

SECRETARIA DE EDUCACION PUBLICA
UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
UNIDAD UPN 291

✓
**APRENDIZAJE DE LA MULTIPLICACION EN
EL SEGUNDO GRADO DE PRIMARIA**

**ARMINDA HERNANDEZ CAMACHO
MA. HORTENSIA FLORES HERNANDEZ
MARIA DIONISIA HERNANDEZ ORDOÑEZ
JOSE ERNESTO CALZADA BECERRA**

**TESIS DOCUMENTAL PRESENTADA PARA
OBTENER EL TITULO DE LICENCIADOS
EN EDUCACION PRIMARIA**

APETATITLAN, TLAX., 1997



DICTAMEN DEL TRABAJO PARA TITULACION

Apetatitlán, Tlax., julio 3, 1997.

**C. PROFRS. ARMINDA HERNANDEZ CAMACHO
MA. HORTENSIA FLORES HERNANDEZ
MARIA DIONISIA HERNANDEZ ORDOÑEZ
JOSE ERNESTO CALZADA BECERRA
PRESENTES.**

En mi calidad de Presidente de la Comisión de Titulación de esta Unidad y como resultado del análisis realizado a su trabajo intitulado "APRENDIZAJE DE LA MULTIPLICACION EN EL SEGUNDO GRADO DE PRIMARIA", opción Tesis, y a solicitud de su asesor C. Lic. Victor Reyes Cuautle, manifiesto a ustedes que reúne los requisitos establecidos al respecto por la Institución.

Por lo anterior, se dictamina favorablemente su trabajo y se les autoriza a presentar su examen profesional.



U. S. E. T.
Universidad Pedagógica
Nacional
UNIDAD U.P.N. 291
TLAXCALA

**ATENTAMENTE
"EDUCAR PARA TRANSFORMAR"**

**LIC. RAMON QUEZADA SANCHEZ
PRESIDENTE DE LA COMISION DE TITULACION
DE LA UNIDAD U.P.N. 291**

RQS/jzh.

INDICE

PAG

Introducción

CAPITULO I PROBLEMÁTICA DE ESTUDIO

| | |
|--|---|
| 1.1 Definición del objeto de estudio | 1 |
| 1.2 Justificación | 4 |
| 1.3 Objetivos | 8 |

CAPITULO II REFERENTES TEÓRICOS

| | |
|--|----|
| 2.1 Contexto social del niño | 9 |
| 2.2 Características psicogenéticas del niño de segundo grado | 11 |
| 2.2.1 Procesos que intervienen en la construcción del conocimiento | 13 |
| 2.3 Enfoque de las matemáticas en el programa vigente | 16 |
| 2.3.1 Referencias sobre la multiplicación | 20 |
| 2.4 Pedagogía Operatoria | 32 |
| 2.5 Referencias del material didáctico | 36 |

| | |
|--|----|
| 2.5.1 Material concreto para las matemáticas | 38 |
| 2.5.2 Importancia del material concreto en el aprendizaje de las matemáticas | 40 |

CAPITULO III PROPUESTAS DIDÁCTICAS ENFOCADAS A LA CONSTRUCCION DE LA MULTIPLICACION

| | |
|---|----|
| 3.1 Introducción a las Propuestas didácticas | 43 |
| 3.2 El Dial en la introducción de la multiplicación | 44 |
| 3.3 La enseñanza de las matemáticas, Según Dienes | 45 |
| 3.4 El Laboratorio de Psicomatemática; La multiplicación: Las máquinas que multipli- can y los arreglos rectangulares de Irma Fuenlabrada | 50 |
| 3.5 El proceso de matematización en la escuela primaria: "Una proposición para intro- ducir la multiplicación en segundo grado" de Irma Fuenlabrada..... | 60 |
| 3.6 El material Cuissenaire : Regletas en color | 82 |

CAPITULO IV TRATAMIENTO DE LA INFORMACIÓN

| | |
|---|----|
| 4.1 Procesamiento de la información | 84 |
| 4.2 Clasificación de propuestas | 85 |

| | |
|--|-----|
| 4.2.1 Propuestas Premultiplicativas | 86 |
| a) Actividades de las propuestas Premultiplicativas | 88 |
| b) Congruencia de las propuestas Premultiplicativas con el aspecto psicogenético de Jean Piaget | 90 |
| c) Contrastación de las propuestas Premultiplicativas con el programa vigente | 91 |
| 4.2.2 Propuestas Multiplicativas | 92 |
| a) Actividades de las propuestas multiplicativas | 93 |
| b) Congruencia de las propuestas Multiplicativas con el aspecto psicogenético, según Jean Piaget..... | 112 |
| c) Contrastación de las propuestas Multiplicativas con el programa vigente | 113 |
| 4.2.3 Propuesta de retroalimentación | 114 |
| a) Actividades de la propuesta de retroalimentación en la multiplicación | 115 |
| b) Contrastación de la propuesta de retroalimentación con el programa | 116 |
| | |
| Sugerencias | 118 |
| Conclusiones | 121 |
| Bibliografía | 123 |
| Anexos | |

INTRODUCCIÓN

En la actualidad la educación ha venido sufriendo diversos cambios, paralelamente con la ciencia y la tecnología se han descubierto nuevas metodologías que superan a las tradicionales. Es por esto que surge la inquietud de realizar esta investigación documental con el siguiente objeto de estudio: "Conocer las propuestas didácticas vigentes para la construcción de la multiplicación en los alumnos de segundo grado de Educación Primaria".

Es por todos reconocido que la enseñanza de las matemáticas en la escuela básica presenta serios problemas, pues ante una cultura moderna nos encontramos multitud de exigencias de conocimientos matemáticos que van más allá de la escuela. Además la sociedad de hoy requiere un manejo funcional de las matemáticas y esto es lo que la escuela tradicional no puede aportar.

Por tal motivo fue necesario conocer el Plan y Programas de Educación Primaria, edición 1993, específicamente en el segundo grado en la asignatura de matemáticas referente al contenido de la multiplicación, interpretando el nuevo enfoque y contrastándolo con las propuestas recopiladas, donde se encontró una congruencia entre ambos, dando como consecuencia una comprensión más amplia en cuanto al desarrollo del razonamiento del niño.

Al realizar las investigaciones en diversas fuentes se encontró similitud entre las propuestas de Irma Fuenlabrada con el programa y los libros de texto gratuito vigentes en lo que respecta a la construcción del concepto de la multiplicación.

La recopilación de todo este material permitió la estructuración de este trabajo que quedó en cuatro capítulos, cada uno de ellos con sus respectivos apartados.

Al primer capítulo se tituló: "Problemática de estudio", donde se manifiesta que el hecho de que el conocimiento matemático puede ser asimilado por simple transmisión de información, es decir, con la forma tradicional de enseñanza, es hoy muy cuestionable. Así aparece el propósito de que el niño construya su conocimiento a partir de su experiencia, de la reflexión sobre la organización de su misma actividad. Para el logro de esto, el contexto social del niño es fundamental porque incrementa su desarrollo cognoscitivo, afectivo y psicomotriz, ya que su realidad forma parte de su vida escolar. Retomando en este capítulo la importancia que tiene el uso de material concreto para la construcción del concepto de la multiplicación, ya que el medio rural o urbano ofrecen una variedad de material con el que el niño puede operar, evitando la mecanización de dicha operación en el proceso enseñanza - aprendizaje .

El segundo capítulo se tituló: "Referentes teóricos - contextuales" en el que se presentan de manera general los diferentes factores que intervienen en la adquisición de conocimientos del alumno, como son: La familia, la escuela y la comunidad, también se presentan las características psicogenéticas del niño según Jean Piaget, para conocer su grado de maduración, lo cual permitirá evaluar si las actividades de las propuestas investigadas responden a las necesidades del niño de segundo grado de Educación Primaria.

También se analiza el enfoque didáctico de la matemática respecto a la multiplicación, haciendo referencia, fundamentalmente al planteamiento y resolución de problemas como forma de construcción de los conocimientos matemáticos, teniendo que el concepto de multiplicación debe construirlo el niño como una operación de correspondencia manejando material concreto, tratando de erradicar la forma tradicional de abordarlo.

En el capítulo tercero titulado: " Metodología en el proceso enseñanza aprendizaje ", se presentan las propuestas didácticas que se encontraron para la introducción a la multiplicación: "El

proceso de matematización: Una proposición para introducir la multiplicación en segundo grado" y "La multiplicación : Las máquinas que multiplican y los arreglos rectangulares" (en las que colabora Irma Fuenlabrada), así como se presentan otros recursos que se consideraron adecuados a estas propuestas como son: El Dial, Los Bloques Multibase de Dienes y las regletas de Cuissenaire.

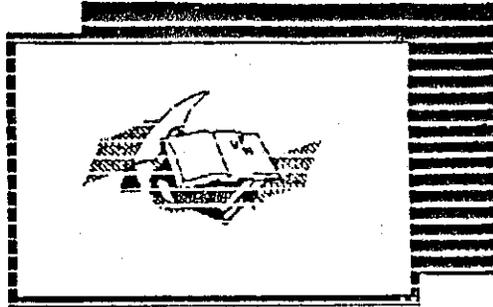
Las propuestas que se han recopilado sugieren el uso de material concreto considerando a éste como un objeto tridimensional que es manipulable por el niño, para lograr en determinado tiempo plasmar lo aprendido.

Con estas actividades se pretende que la didáctica tradicional en donde el alumno funge el papel de receptor del conocimiento , sea sustituida por la pedagogía operatoria donde el profesor más que ser expositor de la clase sea un orientador de actividades creativas, brindando la oportunidad de que el niño opere con diverso material para la construcción de su conocimiento.

El capítulo cuarto se titula: "Tratamiento de la información " donde se hace un análisis comparativo de los datos obtenidos de las propuestas de cada autor, con el programa vigente para encontrar la coherencia entre ellas. Para el análisis de las propuestas fue necesario hacer una clasificación que nos facilitó ubicarlas de acuerdo a la lógica de sus actividades en premultiplicativas, que son consideradas como juegos didácticos para la introducción al proceso multiplicativo siendo éstas el Dial y los Bloques multibásico; en multiplicativas, porque sus actividades tienen una secuencia desde la introducción hasta el concepto de multiplicación, como son: "La multiplicación: Las máquinas que multiplican y los arreglos rectangulares "y "El proceso de matematización: Una proposición para introducir la multiplicación en el segundo grado", estas propuestas fueron estructuradas por Irma Fuenlabrada y colaboradoras, en el Departamento de Investigaciones Educativas - CINVESTAV - IPN. Por último dentro de la clasificación se

encuentra la propuesta de retroalimentación a la multiplicación, porque se aplica con los niños después de haber construido su concepto.

Con esto se pretende que el maestro comprenda que existen otras alternativas de trabajo que permitan la operabilidad con diversos materiales concretos por parte del alumno.



"Los medios son medios. El fin es el logro de los objetivos"

CAPITULO I
PROBLEMÁTICA DE ESTUDIO

1.1 Definición del objeto de estudio

A través de ensayos y errores, examinando el funcionamiento de los programas, estudiando el resultado de las diversas investigaciones disponibles en cuanto a métodos, técnicas y recursos materiales, y observando el fracaso de varias experiencias en la educación, se han ido seleccionando ciertas estrategias que en su momento han sido decisivas en el rendimiento escolar; pues una de las metas de la educación es impulsar a los alumnos en el desarrollo de su capacidad intelectual, lo cual significa encauzar su razonamiento para que puedan resolver problemas en su vida cotidiana.

En México, el sistema educativo ha pasado por una serie de reformas en sus planes y programas de estudio cuando empieza a adaptarse el docente a "x" curriculum, surge uno nuevo modificando nuevamente el proceso enseñanza - aprendizaje; por lo cual tiene que haber cambios pedagógicos que junto con algunos factores del contexto del niño van a propiciar su fracaso escolar.

A consecuencia de los cambios constantes de los programas, en el docente surge un descontento en cuanto al uso de éstos, dando lugar a que se opte por conservar lo más viejo, por ser, quizá, lo que en su momento dio resultado y no acepta el cambio, como es el caso de la multiplicación mecanizada.

Así tenemos, que cuando se inicia la enseñanza de la multiplicación de una manera tradicional como de ha presentado, propicia una memorización en el proceso de resolución de dicha operación. Se puede observar esto cuando al niño se le presenta la definición de la multiplicación como una forma de abreviar sumas con sumandos iguales, esto es, que si tenemos una expresión : $4 + 4 + 4$, ésta se abrevia diciendo tres veces cuatro, pero sin que el

niño realice su representación con material concreto, aunque constantemente ya se le presenta al niño la manera convencional de esta operación, indicándole que memorice las tablas para que resuelva una multiplicación en donde utilice el algoritmo, pero sin haber pasado por el proceso de construcción del concepto; así que no se sabe el por qué de ésta, de dónde surge y como aplicarla; porque no se utilizó material concreto para favorecer el proceso de construcción.

Dentro del Plan y programas de estudio vigente de Educación Primaria, el enfoque en la asignatura de matemáticas en el segundo, grado expresa que se debe poner mayor énfasis en la formación de habilidades para la resolución de problemas y el desarrollo del razonamiento matemático a partir de situaciones prácticas; dicha asignatura está organizada en torno a seis ejes temáticos de los cuales se tomó el primero que es: " Los números, sus relaciones y sus operaciones".

Este eje temático se trabaja desde el primer grado con el fin de proporcionar experiencias que pongan en juego los significados de los números que adquieren en diversos contextos y las relaciones que puedan establecerse entre ellos. Pues se trata de que a partir de los conocimientos con que llegan a la escuela los alumnos, comprendan cabalmente el significado de los números y de los símbolos que los representan para que puedan utilizarlos como herramientas para solucionar diversas situaciones problemáticas que impliquen el uso de la multiplicación. Se debe considerar a la multiplicación como parte fundamental para el desenvolvimiento del niño, por eso, es necesario que durante el proceso enseñanza - aprendizaje se le permita a éste descubrir que esta operación aritmética la puede utilizar para resolver problemas a los que se enfrenta todos los días.

Ubicando a la operación en estudio dentro del área cognoscitiva, es importante tomar en

consideración la teoría del enfoque psicogenético de Jean Piaget, porque toma en cuenta las diferentes etapas de desarrollo para que por medio de éstas se detecte en qué grado de madurez se encuentra el niño para su aprendizaje.

La edad que tienen los niños en el segundo grado de Educación Primaria, corresponde, según Jean Piaget, al período de las operaciones concretas, en el que el niño presenta características particulares que le permitirán construir la operación aritmética de la multiplicación mediante el uso de material concreto que se localiza en su contexto para que resuelva situaciones problemáticas, y razone en la resolución de la operación antes mencionada y sean aptos para resolver problemas de su vida cotidiana.

Es así que dentro de la labor educativa encontramos obstáculos que repercuten en el bajo rendimiento de los niños en el proceso enseñanza - aprendizaje los cuales nos inducen a buscar las alternativas para mejorar la educación, que permitan superar la forma de llevar a cabo el trabajo en el aula en lo que concierne a la multiplicación, mediante el uso de material concreto. El desarrollo de la investigación documental dirigida al segundo grado de Educación Primaria, se presenta formulando el objeto de estudio en los siguientes términos:

“ Conocer las propuestas didácticas vigentes para la construcción de la multiplicación en los alumnos de segundo grado de Educación Primaria “

1.2 Justificación.

Conocer algo supone siempre realizar una construcción y por ello, el niño debe tener un papel activo en el aprendizaje.

Actualmente es muy común escuchar la siguiente frase: "Educar para la vida", ¡ Cuando todavía no se acepta la innovación ! . Los que han intentado poner en práctica algo nuevo en la educación se han encontrado con el gran obstáculo de que siempre se quiere conservar lo tradicional por ser quizás lo que en su momento dio resultado y no se acepta el cambio. Esto ha contribuido a generar problemas en el aprendizaje, como es el caso de la multiplicación mecanizada; es cruel la realidad, pero en la mayoría de los alumnos que están a punto de terminar su educación primaria encontramos casos en los que no saben cuando emplear dicha operación, y esto no termina aquí, sino que el problema continúa en el siguiente nivel.

Es por esto que se considera de interés esta investigación, ya que permite favorecer un mejor desempeño en la labor educativa y así romper con esa tradicional forma de presentarle al niño la multiplicación, puesto que dentro del trabajo docente falta información en cuanto a métodos, técnicas y recursos que se puedan aplicar en la práctica diaria para llevar a óptimos resultados el proceso enseñanza - aprendizaje, porque en la actualidad todavía se ve que algunos docentes, si es que no la mayoría que trabajan frente a grupo se basan en la corriente tradicional, que consiste en la pura recepción del conocimiento por parte del alumno, y el maestro es el que dirige y decide todo lo que deben hacer ellos; el docente no toma en cuenta que los niños puedan razonar, crear, proponer, etc., diferentes formas de realizar las actividades durante la clase y que él tiene el papel sólo de guía, el que debe inducir al niño en el

desarrollo integral de su personalidad. Tal como Piaget dice:

"... que un niño activo es un niño que está aprendiendo". (1)

Es importante que el niño asimile el concepto de la multiplicación por medio de la concretización ya que el niño de siete años promedio que cursa el segundo grado se encuentra en la etapa de las operaciones concretas, siendo necesario crear actividades que respondan a las características que presentan los pequeños de esta etapa. Es fundamental que el niño manipule y represente, y vaya construyendo su propio conocimiento para de ahí asignarle un significado a la operación multiplicativa.

El hecho de no tomar en cuenta las características psicogenéticas del niño conlleva a que éste, responda sólo a los intereses que el maestro tiene; pues el hecho de que realice multiplicaciones con cantidades exageradas, no significa que realmente es un buen matemático aunque esas son las expectativas de padres de familia y directivos, que de pronto hacen caer en el tradicionalismo; por ello debemos estar bien conscientes de que lo que realmente queremos lograr; es maravilloso observar como el niño resuelve su operación generando su propio conocimiento y analizando lo que está haciendo.

Es importante considerar el aspecto afectivo del infante, porque todo alumno que encuentra una actividad que si puede desempeñar bien o mejor que los demás y empieza a ser estimado en cuanto a sus cualidades positivas generará en él un sentimiento de seguridad en sí mismo y a la vez su autoestima.

1 LELAND C. Swenson. "Jean Piaget : Una teoría educacional cognitiva" en Teorías de aprendizaje . Antología, U.P.N. Pág. 205.

Como ya se mencionó, todo individuo puede realizar satisfactoriamente cierta actividad sin menospreciar a aquel que fracasa en matemáticas, pues esto no indica que no posea inteligencia, ya que como señala Piaget :

" Las matemáticas constituyen una prolongación directa de la lógica que preside las actividades de la inteligencia, puestas en obra en la vida ordinaria". (2)

En cuanto al aspecto educativo, es un hecho relevante el tener que ir junto con el niño, induciéndolo a que descubra el procedimiento de cómo solucionar problemas que lleven implícita la realización de una multiplicación mediante el uso de material concreto, relacionando a ésta con problemas reales, ya que está contemplado dentro del enfoque de la asignatura de matemáticas en el Plan y programas de estudio vigente.

Se trata de llevar a cabo las actividades de una manera más operante, se pretende que el niño razone no solamente para resolver problemas matemáticos, sino que lo realice durante los actos de su vida.

Por lo tanto, en el segundo grado de Educación Primaria, el aprendizaje no debe ser tradicional, pues a esta edad el niño le gusta manipular objetos y de esta forma construye su aprendizaje. Así que con este trabajo se trata de conocer que no únicamente se aprende con el uso exclusivo del pizarrón; sino que el niño sea activo en el aprendizaje, incrementando también actividades con material concreto dentro y fuera del salón, favoreciendo su desenvolvimiento tanto en el aspecto afectivo, psicomotriz y cognoscitivo.

2 NOT, Louis. " El conocimiento matemático" en La matemática en la escuela II. Antología, U.P.N. Pág. 20.

Así un sentimiento de impotencia y cansancio profesional parece instalarse frecuentemente en la conciencia de muchos maestros, haciendo el trabajo más difícil al perder de vista todo lo que se puede hacer; con lo que el medio ofrece como semillas, palitos, fichas (corcholatas), envases, etc., para el trabajo con problemas matemáticos, el maestro puede coleccionar y además pedir a los niños que lleven recibos de pago, cajas de medicinas que incluyan precios, bolsas de productos alimenticios, ofertas de productos diversos que se distribuyen en los supermercados, revistas, etc

Este trabajo pretende servir como detonador para los profesores, con la intención de que tenga al alcance una investigación documental sobre las diferentes propuestas de algunos autores, enfocadas a la multiplicación en donde se enfatiza el uso de material concreto, para que el docente en el futuro tenga una fuente de consulta que le permita buscar estrategias de trabajo en dicha investigación, para crear un aprendizaje significativo en los niños, pues se quiere lograr que tanto alumnos, como maestros sean más activos durante todas las actividades que realicen en la escuela, para hacer que los niños razonen y comprendan a la multiplicación como una operación.

Con dicha investigación se contribuirá a un mejor desempeño en la labor docente, para obtener mejores resultados en el proceso enseñanza - aprendizaje y conocer las diversas propuestas didácticas donde el uso de material concreto permite al alumno construir su propio concepto de la multiplicación en el segundo grado de Educación Primaria, además se pretende dar a conocer a los docentes mediante una compilación de propuestas, para que genere una concientización en cuanto a que conservar la tradicional mecanización de la operación antes citada, es como teorizar demasiado a aquel que va aprender a nadar sin introducirlo al agua,

pues a nadar se aprende nadando y el niño aprende creando y haciendo por medio del manejo de material concreto, considerando a éste como un objeto tridimensional manipulable por el alumno.

1.3 Objetivos

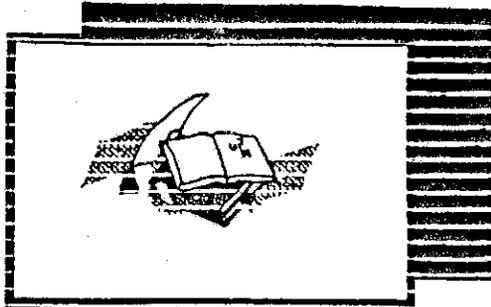
En virtud de las manifestaciones en relación al área cognoscitiva que se presenta en el segundo grado de Educación Primaria donde surge la problemática; los objetivos que se pretenden alcanzar con la realización de esta investigación documental son:

Objetivo General

.Conocer las propuestas didácticas para la construcción de la multiplicación en el segundo grado de Educación Primaria.

Objetivo Especifico :

- Investigar el desarrollo del niño y el aprendizaje de la multiplicación.
- Clasificar las propuestas para el trabajo de la multiplicación en el segundo grado.



"El niño sólo aprende de aquél a quien ama"

Ghoethe.

CAPITULO II

REFERENTES TEORICOS

2.1 Contexto social del niño

Maestros, padres y niños estamos inscritos en múltiples relaciones y situaciones de aprendizaje, que independientemente de su articulación con la realidad escolar tiene cada uno su propia función; el maestro debe estar en contacto directo con los padres de familia con el fin de que éstos conozcan el seguimiento de las actividades escolares que se realizan con la manipulación de material y así poder apoyar a sus hijos en sus tareas extraescolares dándose de esta manera una interacción que es necesaria en la educación

Además de la interacción que se da entre maestros, padres y niños, tenemos que fuera de la escuela la vida del niño se desarrolla en diversos espacios como la casa, la calle, el pueblo o la ciudad a través de las actividades de su cotidianidad.

Así, se establecen relaciones familiares y sociales en las cuales constantemente se está confrontando, complementando o adquiriendo formas de pensar, sentir y hacer, que implican múltiples aprendizajes. Es decir, cuando un niño adquiere cierto conocimiento en x contexto, lo socializa en el grupo, expresando así su propia manera de pensar y de sentir de cada alumno.

El contexto social del niño es fundamental para su desarrollo cognoscitivo, afectivo y psicomotriz puesto que su realidad forma parte de su mundo escolar. Debido a esto es importante considerar la socialización del niño que es el proceso que transforma al individuo biológico en individuo social por medio de la transmisión y el aprendizaje de la cultura de su sociedad; con la socialización el individuo adquiere capacidades que le permiten participar como miembros efectivos de los grupos y la sociedad global. Las principales agencias de socialización son: la familia, la escuela, el grupo de compañeros, el trabajo, los medios de comunicación de masas y las iglesias.

La socialización es un proceso que dura toda la vida. El efecto o la función de ésta para el individuo es la formación de su personalidad por medio de la asimilación de la cultura.

La socialización del niño se realiza desde la infancia en el seno de la familia y posteriormente cuando ingresa a la escuela al realizar actividades para comprender el proceso del concepto de la multiplicación, manifiesta las experiencias afectivas, psicomotrices y cognoscitivas que ha adquirido en la familia; los valores y experiencias que ha adquirido en ella, los pone en práctica con su grupo de compañeros en la escuela y ante la sociedad en la cual se desenvuelve.

Tanto la educación formal como la informal juegan importante papel en la formación del individuo y en aquéllos que ejercen la docencia en una sociedad determinada. Este fenómeno se explica mediante la relación que se da entre educación e ideología en el contexto social.

La familia es la base fundamental para el desarrollo de las relaciones sociales del niño, pues la afiliación al grupo social se inicia con la membresía a la familia, convirtiéndolo así en la base de la organización, ya que enseña a ellos todas las normas sociales, patrones culturales, ideas y creencias del grupo social; es la instancia mediadora entre el individuo y la sociedad ayudándolo de esta manera a participar en su contexto.

Cuando la escuela trabaja aisladamente, es decir, alejada del medio, puede asegurarse que se construye sobre arena.

La escuela actual no se conforma con enseñar al niño en una forma teórica, sino que debe construir su propio conocimiento en base a sus experiencias cotidianas, puede ser manipulando materiales que le sean familiares a la vez que vaya representando con éstos sus operaciones.

Se puede manifestar que el medio al que pertenece el niño establece cierto nivel cultural, el cual se ve reflejado en el aula cuando realiza actividades con material concreto de la multiplicación.

Se dice que el proceso de aprendizaje es principalmente social, las tendencias innatas de un individuo son modificadas, suprimidas o alentadas de acuerdo con las exigencias sociales que lo rodean.

2.2 Características psicogenéticas del niño de segundo grado

De acuerdo a las etapas de desarrollo según Jean Piaget, el niño de segundo grado se encuentra en la que se refiere a las operaciones concretas, está se sitúa entre los siete y once o doce años. Las operaciones del pensamiento son concretas en el sentido de que sólo alcanzan a la realidad susceptible de ser manipulada o cuando existe la posibilidad de recurrir a una representación suficientemente viva. Todavía no puede razonar fundándose exclusivamente en enunciados puramente verbales y mucho menos sobre hipótesis.

El niño empleará la estructura de agrupamiento en problemas de seriación y clasificación, entendiendo por estas lo siguiente:

La seriación es la actividad mental del niño que le permite ordenar objetos a partir de sus diferencias crecientes en referencia al color, al tamaño, al volumen, etc. El niño elabora conceptos como mayor-menor, viejo-nuevo, grueso-delgado, color-sin color

La clasificación es la actividad mental del niño, que le permite agrupar objetos por su semejanza, diferencia, pertenencia e inclusión-exclusión.

El niño es capaz de coordinar operaciones en sentido reversible, entendiendo por esta lo siguiente;

La reversibilidad es la capacidad de ejecutar una misma acción en dos sentidos de recorrido, pero teniendo conciencia de que se trata de la misma acción. Razona únicamente

sobre lo realmente dado, el equilibrio que puede alcanzar es aún relativamente estable; en ella se convierte en poseedor de una cierta lógica.

Es necesario que infante de esta etapa manipule o utilice la representación para alcanzar realmente el conocimiento o sea que su aprendizaje sea concreto. Una de las propiedades de las operaciones concretas se manifiesta cuando el niño es capaz de comparar las partes con el todo y es capaz de invertir las partes y las partes por el todo.

Otra característica del niño es la intuición, la cual se refiere a que cuando algunos alumnos en la vida cotidiana se desenvuelven con éxito en situaciones aritméticas y en el aula fracasan, quiere decir que hay que partir de la realidad para de ahí encaminarse a los contenidos matemáticos. Es necesario retomar la intuición que tiende hacia el objeto (de estudio) concreto favoreciendo a la toma de conciencia de ciertas estructuras matemáticas en las experiencias ordinarias, considerando como intuición a "*la representación de las cualidades concretas pueden expresar las formas matemáticas*" (3).

Con esto nos estamos enfocando a propiciar en el niño situaciones en las que experimente, proponga y compruebe, generado en él un razonamiento que siendo éste el desarrollo de una intuición obtenida en una concentración de razonamiento.

Posteriormente aparecerá el formalismo matemático que viene siendo la representación de la lógica desarrollada mediante la intuición. La formulación sigue a la intuición puesto que las formas son necesarias para precisar la idea primaria.

3 NOT, Louis. "El conocimiento matemático" en La matemática en la escuela II. Antología,

El niño relaciona entre sí las informaciones que recibe y mediante la confrontación de los enunciados verbales de las diferentes personas, adquiere conciencia de su propio pensamiento con respecto al de los otros, corrige el suyo (acomodación) y asimila lo ajeno.

El pensamiento del niño se objetiva en gran parte gracias a que afecta tanto al campo del comportamiento social como al de la afectividad. En esta edad, el niño no sólo es objeto receptivo de transmisión de la información lingüístico-cultural. Surgen nuevas relaciones entre los niños y adultos; Piaget habla de una evolución de la conducta en el sentido de cooperación. Se puede decir que las operaciones concretas son acciones físicas que se han convertido en internas en la mente del niño, o sea que si presentamos al niño un problema expresado en forma verbal, sin una contraparte física, puede suceder que no sea capaz de realizar las acciones mentales necesarias para la resolución del problema. Por eso es importante e indispensable considerar el uso de materiales concretos en la construcción de la multiplicación para que por medio de ello y en base a lo mencionado anteriormente, el niño vaya construyendo realmente un concepto de dicha operación.

El niño a lo largo de las operaciones concretas amplía y perfecciona su actitud operacional. Durante la segunda mitad de este período se advierte un cierto número de evoluciones que con el tiempo, conducen a la aparición de las operaciones formales.

2.2.1.- Procesos que intervienen en la construcción del conocimiento

Piaget ha profundizado fundamentalmente en los procesos propios del desarrollo cognitivo; ha insistido en los cambios estructurales característicos de cada etapa del desarrollo intelectual, cambios relacionados con la conducta infantil.

En su enfoque psicogenético acerca de la naturaleza del proceso de aprendizaje, incorpora los aspectos externos del individuo y los efectos que en él producen, además el proceso interno que se va operando, cómo se van construyendo el conocimiento y la inteligencia en la interacción del niño con su realidad.

Este enfoque concibe la relación que se establece entre el niño que aprende y lo que aprende. Para que un estímulo actúe como tal sobre un individuo, es necesario que éste también actúe sobre el estímulo, se acomode a él y lo asimile a sus conocimientos o esquemas anteriores.

La construcción del conocimiento implica la interacción entre el niño (sujeto que conoce) y el objeto de conocimiento (lo que se desea conocer) en la cual se ponen en juego los procesos siguientes:

=*Asimilación*: que consiste en el proceso normal por el cual un individuo integra datos nuevos al aprendizaje anterior; Piaget considera que las nuevas percepciones se presentan dentro de un marco de una estructura, válida preexistente. El niño desarrolla categorías cognitivas (esquemas) donde almacena información nueva. Cuando algo logra encajar, es preciso modificar sus esquemas. La asimilación es la acción del niño sobre el objeto en el proceso de incorporarlo a sus conocimientos anteriores.

=*Acomodación* es el proceso de alterar las categorías básicas del pensamiento. La acomodación es la modificación que sufre el niño en función del objeto o acción del objeto sobre el niño.

Estas acciones implicadas en los mecanismos de asimilación y acomodación, son acciones mentales que operan desde el punto de vista psicológico en la estructuración progresiva del conocimiento y que dan como resultado final la equilibración, que conduce a una mejor adaptación al medio que es característica de todo ser vivo.

El mecanismo de equilibración constituye un factor fundamental del desarrollo y es necesario para coordinar la maduración, la experiencia física y social del ambiente.

=*La equilibración* es el proceso responsable del desarrollo intelectual en todas las etapas de la maduración y es, igualmente, el mecanismo por cuyo efecto un niño pasa de una etapa del desarrollo a la siguiente.

El niño construye progresivamente su conocimiento el cual dependiendo de las fuentes de donde proviene, puede considerarse bajo tres dimensiones que son:

*****El conocimiento físico**, es la abstracción que el niño hace de las características que están fuera y son observables en la realidad externa, por ejemplo: el color, la forma, el tamaño, el peso, etc. La fuente de conocimiento son los objetos principalmente y la única forma que el niño tiene de encontrar estas propiedades físicas es actuando sobre ellos material y mentalmente, y descubrir como los objetos reaccionan a sus acciones. El conocimiento físico se caracteriza por la realidad de la reacción de los objetos.

*****El conocimiento lógico-matemático**, se desarrolla a través de la abstracción reflexiva. En las acciones del niño sobre los objetos va creando mentalmente las relaciones entre ellas, establece diferencias y semejanzas, según los atributos de los objetos, estructura poco a poco las clases y subclases a las que pertenecen, las relaciona con un ordenamiento lógico. El conocimiento lógico-matemático se va construyendo sobre relaciones que el niño a estructurado previamente y sin las cuales no puede darse la asimilación de aprendizajes subsecuentes. Entre la dimensión física y la dimensión lógico-matemática del conocimiento existe una interdependencia constante, ya que uno no puede darse sin la concurrencia del otro.

*****El conocimiento social**, se caracteriza principalmente por ser arbitrario, dado que proviene del consenso socio-cultural establecido. Este conocimiento conlleva una particular dificultad

para el niño dado que no proviene de objetos, sino que es un conocimiento que tiene que aprenderse de la gente, del marco social que lo rodea. El aprendizaje de las reglas y los valores sociales también debe considerarse como un proceso que el niño construye en sus relaciones con los adultos. En este aspecto la calidad de las relaciones de los mayores, como portadores de esas reglas externas, es un factor determinante en la forma como el niño aprende.

Dadas las características de la actividad del niño, es importante señalar que una de las fuentes principales de donde extrae experiencias para enriquecer su conocimiento en las tres dimensiones que se han señalado se da a partir de la movilidad física que despliega: sus acciones sobre objetos concretos, las interacciones con otros niños durante el juego espontáneo o dirigido, etc., son de fundamental importancia para consolidar paulatinamente sus coordinaciones psicomotoras, favorecer su desarrollo físico general y la construcción de su pensamiento. Por lo tanto, toda acción tendiente a propiciar, respetar y orientar la actividad física del niño debe considerarse como imprescindible para favorecer su desarrollo integral.

2.3.- Enfoque de las matemáticas en el programa vigente

Las matemáticas son un producto del quehacer humano y su proceso de construcción está sustentado en abstracciones sucesivas. A tenido cambios importantes que han partido de la necesidad de resolver problemas concretos, propios de los grupos sociales.

En la construcción de los conocimientos matemáticos, los niños también parten de experiencias concretas, sobre todo en las primeras etapas de su vida y se acentúa más en la etapa de las operaciones concretas, donde sus operaciones las realizan mediante la manipulación de material concreto para que sus estructuras cognitivas comprendan el concepto que se pretende. Sin embargo, a medida que va haciendo abstracciones, el alumno puede

prescindir de los objetos físicos. El diálogo, la interacción y la confrontación de puntos de vista con compañeros y maestros en la escuela, la sociedad en su contexto social, ayudan al aprendizaje y a la construcción de conocimientos.

El éxito en el aprendizaje de esta disciplina depende en gran medida del diseño de estrategias que se realicen durante el proceso enseñanza-aprendizaje para la construcción de conceptos a partir de experiencias concretas, en la interacción con los otros. En la ejecución de las actividades planeadas, las matemáticas serán para el niño herramientas funcionales y flexibles que le permitirán resolver situaciones problemáticas que se le planteen.

Las matemáticas tienen una amplia variedad de usos, puesto que comprende varias áreas de aprendizaje que permiten resolver problemas en diversos ámbitos, tales como el científico, el técnico, el artístico y la vida cotidiana. Si bien todas las personas construyen conocimientos fuera de la escuela que les permiten enfrentar dichos problemas, esos conocimientos no bastan para actuar eficazmente en la práctica diaria. Los procedimientos generados en la vida cotidiana para resolver situaciones problemáticas, muchas veces son largos, complicados y poco eficientes, si se les compara con los procedimientos convencionales que permiten resolver las mismas situaciones con más facilidad y rapidez; porque desde la construcción del concepto de las operaciones en la escuela primaria, se han generado acciones en donde los niños desarrollan habilidades, conocimientos y formas de expresión que ésta les proporciona; esto les permite la comunicación y comprensión de la información matemática presentada a través de medios de distinta índole.

Una de las funciones de la escuela es brindar situaciones en las que los niños utilicen los conocimientos que ya tienen para resolver los problemas y que, a partir de sus soluciones iniciales, comparen sus resultados y sus formas de solución para hacerlos evolucionar hacia los

procedimientos y las conceptualizaciones propias de las matemáticas.

Los propósitos generales de la matemática en la escuela primaria establecen que los alumnos deben adquirir los conocimientos básicos, además de desarrollar:

=La capacidad de utilizar las matemáticas como un instrumento para reconocer, plantear y resolver problemas.

=La capacidad de anticipar y verificar resultados.

=La capacidad de comunicar e interpretar información matemática.

=El pensamiento abstracto por medio de distintas formas de razonamiento, entre otras, la sistematización y generalización de procedimientos y estrategias.

Entonces para elevar la calidad del aprendizaje es indispensable que los alumnos se interesen, encuentren significado y funcionalidad en el conocimiento matemático, que lo valoren y hagan de él un instrumento que les ayude a reconocer, plantear y resolver problemas presentados en diversos contextos de su interés.

La selección de contenidos de este plan está sustentado en el conocimiento que actualmente se tiene sobre el desarrollo cognoscitivo del niño y sobre los procesos que sigue en la adquisición y la construcción de conceptos matemáticos. Los contenidos incorporados al currículum se han articulado en base a seis ejes temáticos de los cuales se tomó el primero que es: "Los números, sus relaciones y sus operaciones", que en el segundo grado comprende contenidos que se relacionan con la construcción de la multiplicación y son:

=Introducción a la multiplicación mediante resolución de problemas que impliquen agrupamientos y arreglos rectangulares, utilizando diversos procedimientos.

=Escritura convencional de la multiplicación (con números de una cifra).

=Construcción del cuadro de multiplicaciones.

Este eje temático se trabaja desde el primer grado con el fin de proporcionar experiencias que pongan en juego los significados que los números adquieren en diversos contextos y las diferentes relaciones que pueden establecerse entre ellos. El objetivo es que los alumnos, a partir de los conocimientos con que llegan a la escuela, comprendan más cabalmente el significado de los números y de los símbolos que los representan y puedan utilizarlos como herramientas para solucionar diversas situaciones problemáticas.

Dichas situaciones se plantean con el fin de promover en los niños el desarrollo de una serie de actividades, reflexiones, estrategias y discusiones, que les permitan la construcción de conocimientos nuevos o la búsqueda de la solución a partir de los conocimientos que ya poseen.

Las operaciones son concebidas como instrumentos que permiten resolver problemas; el significado y sentido que los niños puedan darles, deriva precisamente de las situaciones que resuelven con ellas.

La resolución de problemas es entonces, a lo largo de la primaria, el sustento de los nuevos programas. A partir de las acciones realizadas al resolver un problema (agregar, unir, igualar, quitar, buscar un faltante, sumar repetidamente, repartir, etc.), el niño construye los significados de las operaciones.

El grado de dificultad de los problemas que se plantean va aumentando a lo largo de los seis

grados. El aumento de la dificultad no radica solamente en el uso de números de mayor valor, sino también en la variedad de problemas que se resuelven con cada una de las operaciones y en las relaciones que se establecen entre los datos. Los cambios principales se refieren fundamentalmente al enfoque didáctico, este enfoque coloca en primer término el planteamiento y resolución de problemas como forma de construcción de los conocimientos matemáticos.

2.3.1 Referencias sobre la multiplicación

En la enseñanza de las matemáticas de la escuela primaria se insiste mucho sobre la importancia de la manipulación de los objetos, con el fin de que el alumno construya las nociones a partir de la actividad que ejerce sobre ellos. Es por esto, que se busca motivar a los alumnos con nuevas estrategias, sobre todo porque a esta edad al niño le atrae la manipulación de objetos y basarse en ello para introducirlo al conocimiento de la multiplicación utilizando material de la naturaleza y de deshecho.

Lógicamente, cuando realiza sus colecciones está abstrayendo el significado de un número y ya cuando pasa a la escritura formal de una operación, está utilizando un significante. Así que las actividades de aprendizaje que se dan al niño, los numerales nunca deben considerarse independientes de su significado, puesto que el niño construye un significado para el cual elaborará un significante y que ambos deberán tener una relación. Además la ciencia de las matemáticas tiene un lenguaje propio, puesto que utiliza signos establecidos por un convencionalismo social y que para que el niño se apropie del lenguaje matemático necesita

que estos signos tengan un significado para él, ya sea designando relaciones, nociones, etc., de lo que conoce. Estas actividades le propiciarán al niño desarrollar los procesos cuantitativos y relacionales, y aplicarlos a la solución de sus problemas reales.

Tenemos que la multiplicación, es una operación concreta, puesto que se origina dentro del período de las operaciones concretas, pues se llama así en el sentido de que afecta directamente a los objetos, estas se coordinan en estructuras de conjunto y que además forman la transición entre la acción y las estructuras lógicas. Así que *"...las operaciones con números aparecen como reflejo de las relaciones entre los objetos concretos"*. (4)

Entonces, para el niño de segundo grado, el objeto de conocimiento que son las nociones de multiplicación, se debe dar mediante el manejo de material concreto. Y que éstas

operaciones de contar, clasificar, seriar, relacionados con la manipulación de objetos van a construir en el niño el conocimiento lógico-matemático. *"...debido a que la información no se obtiene a partir de los objetos particulares en tanto que objetos físicos sino que a partir de las propias acciones (o, más exactamente, de sus coordinaciones que el sujeto ejerce sobre ellos"*. (5)

Así este conocimiento se desarrollará a través de la abstracción reflexiva en el niño y que

4 ALEKSANDROV, A. D. Folmogorov. A. N. "Visión general de la matemática" en La matemática en la escuela I. Antología, U.P.N. Pág. 142

PIAGET, Jean. "Observaciones sobre la educación matemática" en La matemática en la escuela I. Antología, U.P.N. Pág. 321.

éstas nuevas estructuras cognitivas, le sirvan de estrategias para la resolución de problemas.

***Qué es una operación.

El término operación, Piaget lo define como "acciones interiorizadas" (reunir, disociar, multiplicar, etc), que pueden desarrollarse en ambos sentidos (reversibilidad). *"Piaget concluye que las operaciones intelectuales, tal como él las define, no son innatas, sino adquiridas por los sujetos"* (6).

Esto es, que de acuerdo al desarrollo del niño, no a cualquier edad puede construir determinado tipo de operaciones, pues tiene que ir construyendo sus concepto de acuerdo al progreso en sus estructuras mentales.

También las operaciones intelectuales no se constituyen de manera aislada, sino coordinadas en sistemas más complejos (estructuras) con leyes relacionales simples como la inversión. Sin embargo, Piaget afirma que: *"...no todas las estructuras de conjunto están presentes en todos los niveles del desarrollo intelectual, sino que se van construyendo progresivamente, dependiendo de las posibilidades operativas de los sujetos"*. (7).

Es así que la multiplicación como operación debe ser construida en el niño con acciones que realice, manipulando material concreto y llegue posteriormente a la comprensión de que las acciones que realiza son operaciones que pueden ser escritas mediante números. Además deben tomarse en cuenta los signos gráficos que representan las operaciones matemáticas, en el

6 GUTIERREZ, Rufina. "Piaget y el curriculum de ciencias" en Una propuesta para la enseñanza de las ciencias naturales. Antología, U.P.N. Pág. 115.

7 Ibid. Pág. 115

caso de la multiplicación el signo "x", pues este representa la situación dinámica en la cual un estado de cosas se transforma y pasa a ser un estado diferente. Por esto, es importante que dentro de las situaciones problemáticas que se le presentan al niño, ir manejando los signos que representen dicha operación, para llegar a conocer que la multiplicación es considerada como una operación de correspondencia, que se aplica en situaciones cotidianas para resolver algún problema; entendiendo como problema una dificultad u obstáculo que es necesario resolver. Los problemas aritméticos plantean dificultades de carácter cuantitativo y por lo tanto exigen soluciones del mismo carácter.

La vida diaria presente situaciones de este tipo de ahí que el trabajo escolar más importante de preparación para la vida sea la solución de problemas aritméticos.

La operación matemática de multiplicar esta contemplada dentro de la aritmética en la cual su aspecto esencial es la resolución de problemas o razonamiento aritmético de carácter intelectual y de comprensión que exige la actividad mental del alumno, para que mediante situaciones problemáticas que se le planteen llegue a descubrir en éstas la multiplicación.

Un problema es una situación aritmética y es el alumno quién debe descubrir que operación debe realizar, ya que es al resolver problemas cuando los alumnos pueden construir sus conocimientos matemáticos de manera que éstos tengan significado para ellos. En esta concepción del aprendizaje, los problemas juegan un papel fundamental: constituyen la principal fuente de conocimientos.

Entonces, el significado que para los niños tenga una operación, esta dado principalmente por los problemas que puedan resolver con ella. No es necesario que los niños aprendan a

distinguir la estructura de los problemas, ni mucho menos que se aprendan los nombres de esas estructuras. Es con la experiencia en la resolución de problemas diversos que ellos van construyendo poco a poco las relaciones necesarias para saber que corresponden a determinada operación.

Así, los problemas que se le planteen al niño para construir el concepto de la multiplicación deben contener dificultades reales y sean inteligibles, es decir, que los datos y las dificultades que presente el problema reflejen la realidad que rodea a los alumnos, sus intereses, su experiencia y referirse a la vida económica del medio.

Si se hace a la aritmética al servicio de la vida diaria, se la hace interesante y útil. Muchos niños pierden el interés por el aprendizaje de la multiplicación cuando se les plantea problemas que no ofrecen una situación práctica, porque les hace suponer que este aprendizaje no nace de la vida misma, de las preocupaciones y deseos del medio, de la actividad y experiencia de los niños.

Las finalidades de los problemas aritméticos en la escuela primaria tienen por objeto formar el hábito de buscar soluciones a los problemas reales de la vida cotidiana, a que busquen por ellos mismos las soluciones, pero para ello es necesario no guiar demasiado a los alumnos, no darles todo hecho y no someterlo a un régimen uniforme de trabajo. Por otra parte, el vocabulario y el lenguaje deben ser claros y comprensibles para los niños, considerando el contexto al que pertenece. En sí, los problemas aritméticos deben ser redactados en lenguaje sencillo, claro y atractivo.

***Concepto de multiplicación.

Tradicionalmente, el concepto de multiplicación se ha manejado como lo expresa José E. Rozan, en su libro titulado "Aritmética y Nociones de Geometría", el cual fue publicado en 1945, y que expresa: "*La multiplicación es una operación que tiene por objeto repetir un número tantas veces como unidades tiene otro*". (8). Posteriormente, en 1961, este mismo concepto Angeles Gómez Blasco, lo expresa en su obra "Aritmética y Geometría", como: "*...ejecutar sumas de sumandos iguales*". (9)

Hasta ahora se había manejado el concepto habitual de que la multiplicación es una suma abreviada, sin embargo, Lerner expresa que si la multiplicación es una suma abreviada, entonces por qué $3 + 0 = 3$, en cambio, $3 \times 0 = 0$, ó por qué $3 + 1 = 4$, siendo que 4 es número subsecuente de 3, en tanto que $3 \times 1 = 3$, determinando así que la función del cero es en la suma neutro, es decir, que es un elemento que al combinarse con x número lo convierte en sí mismo, en la multiplicación es el cero absorbente de tal manera que al combinarlo con cualquier otro, lo convierte en sí mismo, se determina entonces que la función del cero es opuesto en la multiplicación a la que realiza en la suma. De manera similar sucede con el número uno, pues éste al sumarlo con cualquier otro número se obtiene el sucesor y al multiplicar el uno por x número se obtiene este último.

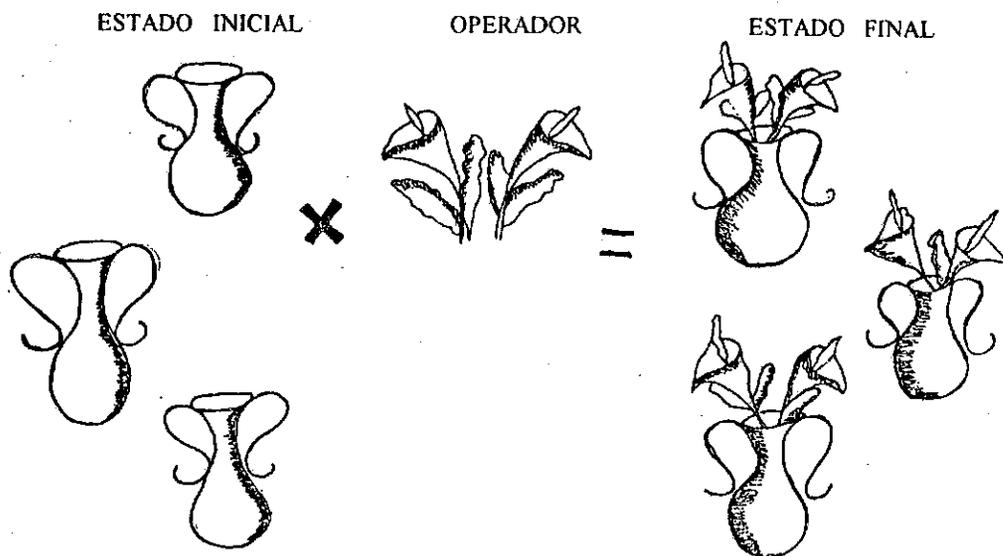
8 ROZAN E. José. "Multiplicación" en Aritmética y nociones de geometría" Pág. 82.

9 GOMEZ Blasco, Angeles. "Multiplicación de números enteros" en Aritmética y geometría.

Contrastando con el enfoque actual del plan y programas vigentes, en el cual expresa que se deben plantear situaciones problemáticas tomadas de las experiencias del niño con el fin de que su aprendizaje sea significativo y así construya el concepto de la multiplicación.

Los programas dedican a la multiplicación un amplio espacio desde el segundo hasta el sexto grado de primaria. En lo que respecta al segundo grado, la multiplicación aparece no como una operación propiamente dicha (esto se hará en grados posteriores). Se presenta únicamente la introducción a la multiplicación mediante la resolución de problemas que impliquen agrupamientos utilizando diversos procedimientos.

Entonces, hay que considerar durante el proceso enseñanza-aprendizaje a la multiplicación como una operación de correspondencia, lo cual resulta más claro explicar porque $3 \times 1 = 3$, explicando así que cada elemento del conjunto inicial le corresponde un elemento en el estado final. Ejemplo:



“La acción concreta que corresponde a la multiplicación es una correspondencia que se establece de la siguiente manera a cada elemento del conjunto inicial le hace corresponder un conjunto de elementos en el conjunto final”. (10).

Esto explica que:

I.-El estado inicial y el estado final no pertenezcan, en el caso de la multiplicación, a la misma clase, ya que, si bien es absurdo reunir elementos de clases diferentes,, es lógico establecer correspondencia entre elementos de una clase y elementos de otra.

II.-De lo anterior, también se deduce que el signo de la multiplicación se llama “por”, porque esta operación no representa una reunión de conjuntos, sino un reemplazo de un tipo de elementos “por” otro tipo de elementos.

Con esto podemos decir, que la multiplicación es una operación diferente a la suma; lo que sí se puede decir, es que la multiplicación es equivalente a una suma de sumandos iguales. Pero equivalente en el sentido que da el mismo resultado y que no es igual, porque el proceso que se sigue para llegar al resultado no es el mismo.

Concluyendo así, que la suma y la multiplicación tienen funciones diferentes, la primera reunir o agregar y la segunda establecer una correspondencia, razón por la cual, los números neutros 1 y 0 difieren en su función en cada operación.

10 LERNER De Zunino, Delia. “¿Qué es la MULTIPLICACION?” en La matemática en la escuela III. Antología. U.P.N. Pág. 113.

***Algoritmo de la multiplicación

Dentro del currículum de matemáticas en la escuela primaria, la multiplicación ocupa un lugar importante de segundo a sexto grado a sexto grado, sin embargo, no se le ha dado a esta asignatura el enfoque formativo que se pretende y el aprendizaje sigue siendo mecanicista, pues la comprensión del algoritmo es casi nulo.

El niño, al ingresar a la escuela tendrá que aprender signos, numerales y literales que son convencionales para todos, teniendo que pasar antes por un proceso en donde comprenda lo que significa cada signo; así tenemos que las cuentas que hacen por escrito (sumas, restas, etc.), los matemáticos las llaman algoritmos. Dicha palabra remite a un método de cálculo que implica una mecánica o una serie de pasos que deben seguirse para resolverlo y que a su vez, en el caso de los algoritmos que todos conocemos y usamos están estrechamente vinculados a las reglas del sistema decimal de numeración.

Los algoritmos son formas convencionales de procedimientos que permiten resolver determinados problemas; son a la vez representaciones de conceptos y tanto su aprendizaje y utilización adecuada requieren que el sujeto comprenda claramente las relaciones que guardan con los conceptos que representan y con las acciones involucradas en la resolución de un problema específico, más adelante se verá cómo antes de llegar al algoritmo ($325 \times 12 =$ significativo), primero el niño debe apropiarse del concepto o significado.

Cuando al niño se le enseña el algoritmo de las diversas operaciones y se hace de una manera independiente de situaciones problemáticas que le dan un significado y una justificación de su uso como instrumento de solución, se notará una tremenda confusión, de tal manera que

no comprende que algoritmo debe utilizar.

Una preocupación de la escuela primaria, es enseñar a los niños los algoritmos, pero desafortunadamente se abordan desde el aspecto mecánico describiendo paso a paso la forma de resolver la operación, sin hacer referencia a ningún contexto.

La comprensión juega un papel muy importante en el aprendizaje de las operaciones y su representación; sin embargo, no se debe dejar a un lado la utilidad de la mecanización en relación al cálculo, ya que permite encontrar la solución en forma rápida y económica. Por otra parte, si sólo se enfatiza el aspecto mecánico del algoritmo con una escasa comprensión del sistema de numeración decimal y sin relación contextual, entonces no le proporcionará utilidad al infante, ni al maestro.

El término algoritmo se emplea en matemáticas para designar el procedimiento mediante el cual se resuelve una operación con dos números cuando el resultado no es evidente de inmediato.

Cuando efectuamos operaciones con numerales sencillos, por lo regular recurrimos a las sumas y productos básicos o también al proceso de contar. Pero cuando las operaciones constan de números de dos o más dígitos, recurrimos a un proceso especial llamado algoritmo.

La comprensión del algoritmo de la multiplicación se busca en la comprensión de los procesos matemáticos en los cuales se desarrolla.

Los procesos son:

=Concepto de la multiplicación

Consiste en una noción intuitiva de que al multiplicar un número por otro, lo que se hace es sumarlo o repetirlo abreviadamente tantas veces como indica la operación. En este punto, es importante saber si la efectuar una multiplicación el alumno tiene clara la idea de repetición que relaciona la adición con la multiplicación. Ejemplo:

$$\begin{array}{r}
 158 \\
 \times 25 \\
 \hline
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 158 \\
 158 \\
 + 158 \\
 \hline
 158 \\
 \hline
 158
 \end{array}
 \qquad
 158 \times 5 = 790$$

=Valor posicional de los números.

Noción de que cada cifra, según su posición tiene un valor, es decir, idea de que las cifras con que se expresa un número representa diferentes agrupamientos de los cuales deriva su valor. En este, lo que se pretende es que los niños perciban el valor de agrupamiento que representan las cifras dentro del sistema de la multiplicación. Ubicar unidades, decenas, centenas, etc., donde corresponda. Ejemplo:

$$\begin{array}{r}
 158 \\
 + 158 \\
 \hline
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 158 \\
 \times 25 \\
 \hline
 \end{array}$$

Esta suma + 158 ¿vale lo mismo que este número? 158

=Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición.

Idea de que al multiplicar un número, este se "separa en partes" y que el producto final es el resultado de la suma de multiplicaciones parciales. Respecto a este punto, se observa si los

niños comprenden que al multiplicar descomponen un número en partes y que la suma de los productos parciales es un mecanismo que permite reunir resultados de multiplicar esas partes.

Ejemplo:

$$\begin{array}{r}
 158 \\
 \times 25 \\
 \hline
 790 \\
 316 \\
 \hline
 3950
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 158 \\
 \times 5 \\
 \hline
 790
 \end{array}
 \qquad
 \text{si}
 \qquad
 +
 \qquad
 \begin{array}{r}
 158 \\
 \times 20 \\
 \hline
 3160
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 158 \\
 + 158 \\
 \hline
 \end{array}
 \qquad
 \text{no}$$

La valorización de estos tres procesos es lo que permitirá conocer la comprensión global que tienen los niños acerca del algoritmo de la multiplicación.

***Propiedades de la multiplicación.

Es importante conocer las tres propiedades de la multiplicación que son:

=Propiedad conmutativa.

Es la que expresa el hecho de que el resultado de un producto de dos factores, no depende del orden de éstos; de manera simbólica esto se representa así: $3 \times 5 = 5 \times 3$, cualquiera que sean los números enteros 3 y 5.

=Propiedad asociativa.

Se realiza una operación binaria $4 \times 5 \times 6 = (4 \times 5) \times 6$, ó también $4 \times (5 \times 6)$.

=Propiedad distributiva.

Nos dice que si multiplicamos un número por la suma de otros dos, obtenemos el mismo resultado si efectuamos primero la suma y luego la multiplicación o si primero sacamos los productos parciales del primer factor por cada uno de los sumandos del segundo y después sumamos éstos dos productos parciales. De manera simbólica se expresa: $4 \times (5 \times 6) = (4 \times 5) + (4 \times 6)$.

Estas propiedades no se les enseña de manera rigurosa, se pretende, que el niño las aprecie de una manera intuitiva y las pueda aplicar en caso necesario.

2.4. Pedagogía operatoria.

La pedagogía operatoria surge en Barcelona, España a principio de la década de los 80'; está basada esencialmente en el desarrollo de la capacidad operatoria del individuo, lo que conduce a descubrir el conocimiento como la necesidad de dar respuesta a los problemas que plantea la realidad y que debe estimular la escuela para satisfacer las necesidades reales, sociales e intelectuales de los alumnos.

Como alternativa a los sistemas de enseñanza tradicionales que consisten en que el alumno tiene que aprender gran cantidad de conocimientos sin que se esfuerce en su comprensión e

interpretación; surge la pedagogía operatoria que recoge el contenido científico de la psicología genética de Piaget y lo extiende a la práctica pedagógica en sus aspectos intelectuales, de convivencia y sociales. Según Piaget, científico suizo, el niño organiza su comprensión del mundo circundante gracias a la posibilidad de realizar operaciones mentales de nivel cada vez más complejo, convirtiendo el universo en operable, es decir, susceptible de ser racionalizado. La construcción de las estructuras operatorias del pensamiento posibilita la comprensión de los fenómenos externos al individuo.

La pedagogía operatoria ayuda al niño para que éste construya sus propios sistemas de pensamiento. Los errores que el niño comete en su apreciación de la realidad y que se manifiestan en sus trabajos escolares, no son considerados como faltas sino como pasos necesarios en su proceso constructivo.

La construcción intelectual no se realiza en el vacío, sino en la relación con su mundo circundante, y por esta razón la enseñanza debe estar estrechamente ligada a la realidad inmediata del niño, partiendo de sus propios intereses. Debe introducir un orden y establecer relaciones entre los hechos físicos, afectivos y sociales de su entorno. Las materias escolares como la matemática, el lenguaje, etc., no son finalidades en sí mismas, sino instrumentos de los que el niño se vale para satisfacer sus necesidades de comunicación y curiosidad intelectual, y por ello debe reconocerlos y utilizarlos, pero su aprendizaje no se hace desligado de una finalidad. Cualquier tema elegido por los niños da lugar a su utilización y aprendizaje.

La pedagogía operatoria se basa en la idea del individuo como "autor" de sus propios aprendizajes, a través de la actividad, el ensayo y el descubrimiento. Considera la inteligencia como el resultado de un proceso de construcción, que tiene lugar a lo largo de toda la historia

personal, y que en esta construcción intervienen como elementos determinantes, factores inherentes al medio en el que vive. Es esta forma en que se desarrolla la inteligencia, analizada y descrita por la psicología genética de Jean Piaget, la que impone sus leyes a la enseñanza y obliga a cambiar los enfoques tradicionales utilizados en la escuela con relación al aprendizaje. La pedagogía operatoria trata de desarrollar en el alumno la capacidad de establecer relaciones significativas entre los datos y los hechos que suceden a su alrededor y de actuar sistemáticamente sobre la realidad que le rodea.

Para la pedagogía operatoria el pensamiento surge de la acción, y es tan importante como la adquisición de un dato o contenido, es el cambio descubierto hasta llegar a él. Comprender es, un proceso constructivo, no exento de errores, que son necesarios si no se requiere fomentar la pasividad y dependencia del alumno.

Conocer, comprender, no es un hecho aislado, sino el final de un recorrido en el cual se confrontan los distintos aspectos de una realidad, se establecen unas hipótesis hasta que surge la explicación que satisface todas las exigencias que previamente aparecían como contradictorias.

La pedagogía operatoria pretende seguir en el aula un camino similar al que ha seguido el pensamiento científico en su evolución: el alumno debe formular sus propias hipótesis aunque sean erróneas, establecer una metodología para su comprobación y verificar su confirmación o no. El papel del profesor será cooperar con el alumno en esta tarea, facilitarle instrumentos de trabajo, sugerirle situaciones y formas de verificar la hipótesis, etc., pero nunca sustituir la actividad del escolar por la suya.

La programación operatoria de un aprendizaje o de una adquisición ha de tener en cuenta que la formación de un concepto o la comprobación de una destreza, pasa necesariamente por estadios intermedios, y que antes de empezar es necesario determinar el nivel del alumno respecto del conocimiento o concepto que desea construir.

La eliminación del autoritarismo del maestro no debe dar lugar a un libertinaje que llevaría al caos y la desorganización, ésta debe ser sustituida por una organización social que proceda de los mismos alumnos. La actividad constante y la curiosidad son características esenciales del niño, basta dejar que se manifiesten libremente para lograr la motivación del alumno frente a la tarea de resolver un problema. Son los intereses de los niños (de acuerdo con su edad y medio social) los que definen los temas que han de ser objeto de trabajo en el aula. Para ello es necesario que los intereses de cada uno se armonice con los de los demás. La elección del tema concreto a trabajar por todo el grupo será objeto de una decisión colectiva, que no toma al azar, sino después de aportar y analizar una serie de argumentos. Las mismas normas que rigen la actividad de la clase se analizan y se tratan entre todos, constituyendo así un aprendizaje de la convivencia democrática. La pedagogía operatoria no se circunscribe sólo a la intelectual, sino que se extiende al campo afectivo y social. La clase se convertirá así en un colectivo abierto a la realidad exterior y que trabaja conjuntamente para resolver los problemas.

La creación intelectual, la cooperación social y el desarrollo armónico son los tres objetivos considerados por la pedagogía operatoria como alternativa frente a la escuela tradicional, cuya actividad estaba guiada por la pasividad, la dependencia del adulto y el aislamiento.

La didáctica crítica supone desarrollar en el docente una auténtica actividad científica,

apoyada en la investigación, el espíritu crítico y la autocrítica; donde las actitudes se actúan y la actividad docente comprende todos los ámbitos, áreas y campos, en que ésta tiene lugar.

En la perspectiva de la didáctica crítica el aprendizaje es concebido como un proceso que manifiesta constantes momentos de ruptura y reconstrucción, las situaciones de aprendizaje cobran una dimensión distinta a los planteamientos mecanicistas del aprendizaje, pues el énfasis se centra más en el proceso que en el resultado, de ahí la importancia de las situaciones de aprendizaje como generadoras de experiencia que promuevan la participación de los estudiantes en su propio proceso de conocimiento.

2.5. Referencias del material didáctico

La educación ha venido a dar un nuevo sentido al material didáctico, que tiene más valor cuando se construye y se usa en relación con el proceso enseñanza-aprendizaje, se convierte a sí mismo y de manera adecuada en un instrumento de acción y de trabajo.

Los términos usados para denominar a éste son: ayudas didácticas, recursos didácticos y medios educativos; no obstante, el término más usual es material didáctico, entendiéndose por tal, el conjunto de medios materiales que intervienen y facilitan el proceso enseñanza-aprendizaje.

El material didáctico ofrece al alumno un verdadero cúmulo de sensaciones visuales,

auditivas y táctiles, que facilitan el aprendizaje; debe ser adaptado a las necesidades del niño, siendo agradable, interesante y educativo.

Una de las características importantes que debe reunir el recurso didáctico es tomar en cuenta la etapa de desarrollo por la que atraviesa el alumno.

Es necesario hacer notar que el material didáctico en la escuela actual, tiene por objeto llevar al alumno a trabajar, a investigar, a descubrir y a construir, y así adquiere un aspecto fundamental y dinámico, propiciando la oportunidad de enriquecer la experiencia del alumno, aproximándolo a la realidad.

La psicología genética plantea que la intervención activa del sujeto sobre los objetos materiales o sobre las relaciones conceptuales es la base de toda adquisición cognoscitiva, coherente, significativa y duradera.

Debe entenderse que el material didáctico, es todo aquellos que facilita la labor docente del maestro y del alumno dentro de un contexto total y sistemático del proceso educativo, que estimula la función de los sentidos para llegar, más fácilmente al conocimiento, a la adquisición y al desarrollo de destrezas y habilidades hasta lograr una actitud positiva frente a la vida.

Hay diversos tipos de material didáctico como el auditivo, visual, gráfico y hasta material de la naturaleza. Este se clasifica en el grupo de los materiales objetivos o concretos, ya que son objetos tridimensionales que pueden ser manipulados por los alumnos para que construyan el concepto de la multiplicación.

2.5.1. Material concreto para las matemáticas

La institución escolar ha de vivir un ambiente rico en una gran cantidad de preguntas, manipulaciones y reflexiones que permita que las personas que en ella conviven aprendan todo ello en el marco de una sociedad concreta. *"Si lo concreto (que existe antes que la conciencia) entra en la escuela, será la base de relación con mundos más amplios". (11).*

La tarea de accionar sobre los objetos va orientada a otras, la abstracción y simbolización de los conceptos, por ello es muy importante señalar que la acción concreta como procedimiento didáctico, ha de realizarse sólo cada vez que el niño tenga que elaborar un concepto nuevo; pues una vez que ha elaborado este concepto a partir de la experiencia concreta, ya estará capacitado para trabajar con su representación simbólica y para mejorarla en la construcción de nuevos conocimientos.

En el momento de adquirir los conceptos básicos no contamos con la estructura lógica que nos permita adquirir un conocimiento abstracto como el que presenta un maestro que se conforma con la exposición en el pizarrón y la ejecución mecánica de ejercicios a través de la memorización (lo más probable es que los niños se queden con lagunas), sin que tengan conciencia de ello.

11 BENEDITO Antolí, Vicente. "Material didáctico" en Enciclopedia práctica de pedagogía-técnica. Pág. 3

Una buena alternativa es la manipulación de objetos concretos una y otra vez, con cuantas variantes puedan ocurrírsele al maestro y al niño, con lo que la adquisición del concepto abstracto se logra cuando el niño logra la asimilación de sus experiencias concretas y ya se pueden resolver los problemas mecánicamente, más no por memorización; sino con la seguridad de una verdadera comprensión porque se trata de un concepto incorporado al esquema mental del niño.

El nuevo enfoque de la educación en México, exige al maestro un giro, un cambio completo en su trabajo cotidiano, surge la necesidad del maestro-conductor que contribuye a la formación del individuo, ayudándolo a realizar un cambio de conducta que sea en beneficio de él mismo y de la comunidad.

El maestro de matemáticas no puede permanecer sordo a este llamado e ignorar lo relacionado con esta ciencia.

La enseñanza de la matemática pretende el desarrollo de las habilidades intelectuales, así como dar las bases para estimular el pensamiento reflexivo, crítico y creativo para impulsar procesos de autoaprendizaje. Lo ideal sería disponer de un material capaz de hacer posible la comprensión de todas las relaciones y estructuras matemáticas; donde el material concreto sugiera ideas, cuando deje entrever una idea abstracta a través de una imagen concreta. Según Puig Adam, dice que: *"Un modelo valioso es el que provoca una situación de aprendizaje al unificar abstracción y concreción, puesto que ambas se dan en la génesis del pensamiento matemático del niño. Las acciones y operaciones mentales tienen su origen en lo concreto, en el mundo físico"*. (12)

El objetivo central de la educación intelectual matemática, no se centra en el utilitarismo; sino en el desarrollo de la capacidad de pensamiento matemático en el niño, así que es necesario el manejo de un material concreto, que permita una ayuda en el intento de comprender las estructuras matemáticas por composiciones-descomposiciones reversibles. Piaget opina, que el niño no llega a realizar abstracciones por el mero hecho de manejar materiales, más bien la abstracción se produce a partir del momento en que llega a apreciar el significado de las transformaciones que tienen lugar cuando clasifica objetos y los coloca por orden de tamaños o cuando los agrupa de una forma determinada y después los reagrupa formando otra estructura distinta. Piaget dice que las nociones matemáticas no se derivan de los materiales mismos, sino de la captación del significado de las operaciones realizadas con éstas. Considera que las nociones y la capacidad para manejarlas mentalmente es usando un material concreto.

2.5.2. Importancia del material concreto en el aprendizaje de las matemáticas

En el segundo grado de educación primaria los contenidos matemáticos se trabajan con actividades en las que es necesario usar material concreto. La forma en que los alumnos utilizan este material determina, en gran medida la posibilidad de comprender el contenido que se trabaja.

Si bien es importante que en un primer momento se permita a los alumnos manipular los materiales, para que se familiaricen con ellos, es necesario plantear situaciones problemáticas en las que el uso del material tenga sentido.

Si el maestro entrega el material a los alumnos y les indica la manera cómo deben utilizarlo para resolver la problemática que se les plantea, los alumnos aprenderán a seguir instrucciones, pero probablemente no podrán comprender por qué tuvieron que realizar dichas acciones con el material concreto. En cambio, si plantea el problema a los alumnos, les entrega el material y les da libertad de usarlo como ellos consideren conveniente para encontrar la solución, los niños pondrán en juego sus conocimientos sobre la situación planteada, echarán mano de experiencias anteriores y utilizarán el material concreto como un recurso que les ayude a resolver un problema.

Así, los alumnos comprenderán la clase de acciones que realizan con el material para resolver el problema y descubrirán propiedades y características del material que con sólo manipularlo (siguiendo indicaciones), quizá hubiera pasado desapercibidas.

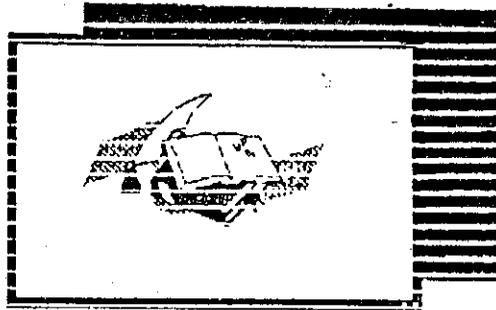
Conforme los alumnos avancen en el proceso de aprendizaje, se puede retirar progresivamente el uso del material concreto y entregarlo sólo para verificar resultados.

Dada la importancia que tiene el uso de material concreto en este grado, es necesario utilizar palitos, semillas, clavos, tuercas, piedras, tapas de frascos, cajas y envases de diferentes formas y tamaños, etc., además del material recortable que propone el libro de texto.

La importancia que esto tiene en el proceso enseñanza-aprendizaje, exige como maestros de matemáticas hacer un alto en el camino y retomar el trabajo, olvidando al maestro bancario,

expositor, dictador, etc., enterrarlo en el pasado y buscar nuevos métodos, técnicas que unidas a la experiencia acumulada a través de los años, ayudan a enriquecer la actividad en el aula.

Valiéndose del material concreto que es conocido y familiar para el alumno.



"Querer al niño es ser su amigo"

CAPITULO III
PROPUESTAS DIDACTICAS ENFOCADAS A LA CONSTRUCCION
DE LA MULTIPLICACION

3.1 Introducción a las propuestas didácticas

La acción, la experiencia y el lenguaje constituyen la base de los procesos intelectuales y la formación de los conceptos matemáticos, éstos proceden de las acciones que el niño realiza con los objetos y se precisan con la ayuda del lenguaje. Manipulando, el niño comienza a clasificar, ordenar, seriar, etc., lo cual le lleva a las primeras nociones matemáticas como la multiplicación en el segundo grado de educación primaria.

En este sentido, las situaciones problemáticas con las que el alumno puede construir la operación multiplicativa desde su introducción hasta el concepto, son actividades que se realizan con distintos materiales concretos, entendiendo por éstos objetos tridimensionales que pueden ser manipulables por el niño.

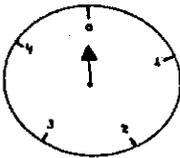
La teoría de Piaget referente a la etapa de operaciones concretas, en la cual se encuentra un niño de segundo grado, expresa la manipulación de material concreto para la construcción del conocimiento; sin embargo, no especifica que determinado material debe emplearse para un contenido únicamente; sino que puede usarse para diferentes contenidos siempre y cuando construya el niño un aprendizaje significativo; entonces se considera que el material del que se hace alusión, puede ser desde material natural, material preparado y hasta su propio cuerpo, poniendo siempre al alumno en actividad para que opere con el material, en esta perspectiva, Piaget habla de que el material debe ser concreto.

Por esto, a continuación se presentan algunas propuestas que emplean material concreto en sus actividades para el aprendizaje de la multiplicación en el segundo grado de Educación Primaria.

3.2 El Dial en la introducción de la multiplicación

Una de las tareas de la educación es crear las experiencias y situaciones que capaciten al alumno hacia X contenido; en lo que respecta a la multiplicación existen diversos métodos de enseñanza para dicha operación. Un procedimiento común es presentar a los alumnos las repuestas hasta que las realicen de manera automática, pero de esta forma el niño es condicionado, repitiendo así por ejemplo $5 \times 4 = 20$ etc., sin embargo la respuesta no significa nada, es simplemente una asociación de respuestas sin-sentido.

En cambio cuando el niño comprende lo que hace, favorece el proceso de su desarrollo. Como un ejercicio de introducción a la multiplicación se retomará el Dial, en el cual el niño desarrolla su lógica de tal manera que puede construir una tabla.



| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|

El dial y su control consiste en que cada vez que el botón 1 se presiona, la manecilla del Dial se mueve un espacio en sentido levógiro, así 2 veces 1 es 2, 3 veces 1 es 3 y 4 veces 1 es 4. Si se presiona el botón 2, la manecilla se mueve 2 espacios. Así que 2 X 1 = 2; dos movimientos de 2 espacios es 4 y 3 movimientos de 2 espacios recorren la manecilla hasta el 1

así que $3 \times 2 = 1$, de manera semejante, $4 \times 2 = 3$. Si se presiona el botón 3 veces, el Dial hará movimientos, cada uno de 3 espacios, y terminará en el número 4, por lo que $3 \times 3 = 4$.

A partir de esta experiencia es fácil construir la tabla y sobre todo establecer su significado. Si se quiere usar la tabla de multiplicación del Dial de manera eficiente, lo mejor es que practique para hacer los resultados automáticos, y poder interpretar cualquier resultado de ésta manera con agilidad.

El uso del Dial para establecer la tabla y luego aplicarla es una forma menos común de enseñar en la escuela los datos usuales de la multiplicación. De esta manera el niño podrá construir las tablas de multiplicar cambiando los dígitos pero siguiendo el mismo proceso.

3.3 La enseñanza de las matemáticas, según Dienes

Dienes ha facilitado algunos datos sobre el material que se ha empleado en las experiencias e investigaciones que ha realizado y que ayuda al niño a desarrollar los conceptos matemáticos.

El profesor Dienes propone un material para la enseñanza de las matemáticas, cuya finalidad es facilitar a los alumnos la adquisición y comprensión de las estructuras matemáticas. Dicho material ayuda al niño en sus intentos de comprensión de estas estructuras; más que el resultado interesa el proceso.

Fichas

Dienes parte primero del empleo de un juego de fichas para trabajar sobre las propiedades de conjunto, que se dividen así:

a) Por el color: rojo, azul y amarillo

b) Por la forma: circular, cuadrada, triangular, rectangular.

c) Por el tamaño: grandes, pequeñas.

d) Por el grosor: gruesas, delgadas.

La colección tiene 48 fichas = $3 \times 4 \times 2 \times 2$. Se trabaja con ellas sobre una caja de cartón que representa el conjunto universal. Las operaciones entre conjuntos pueden materializarse con el auxilio de varios aros de alambre de diferentes diámetros. En forma de juegos lógicos, las fichas Dienes permiten introducir en la matemática escolar las llamadas operaciones lógicas (negaciones, conjunciones, disyunciones, implicaciones, equivalencias).

Cuando el niño está familiarizado con los conjuntos, le es posible pasar al universo de los números. Es cuando se da cuenta de que un mismo símbolo puede representar cosas distintas, porque son convencionales.

Bloques multibase

Cuando en el aprendizaje matemático el alumno está familiarizado con los conjuntos se pasa a la comprensión de la esencia de número y su estructura polinómica, utilizándose los bloques aritméticos multibásicos, material fuertemente estructurado que facilita intuiciones globales del sistema de numeraciones cualquier base.

Los bloques Multibase pueden servir de ayuda a los niños para que alcancen conceptos relativos a la notación numérica; por ejemplo, el de valor relativo. A base de cubitos que se toman por unidad, se van formando prismas cuya razón puede ser 4, como en la siguiente figura.



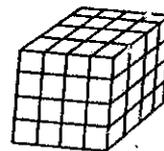
unidad



barra



placa



bloque

Estos prismas se designan con los nombres de unidades, barras, placas y bloques. Por medio de ellos podemos sumar y restar tomando como base 3, 4, 5, 6, ó 10, como hacemos normalmente en la numeración base 10, por ejemplo: 4 unidades = 1 barra, 4 barras = 1 placa, 4 placas = 1 bloque.

El material se presenta en cajas de madera, una para cada barra de numeración y está compuesta de cubos, placas y barras de madera pulida, sin color, a fin de conseguir una mayor abstracción.

En cada caja se encuentran: unidades, barras, placas y bloques. Llevan unas ranuras, fácilmente apreciables, a 1 centímetro de distancia.

Es necesario que el alumno se familiarice con el material antes de llegar a estructuras más complejas. El empleo del material Dienes garantiza a los niños trabajar con aparatos que les procuren situaciones estructuradas de tal manera que les es fácil descubrir por sí mismos ciertas relaciones matemáticas.

Qué debe hacerse con los bloques aritméticos multibase.

1. Debe dejarse a los niños que jueguen y experimenten personalmente con el material, especialmente cuando comiencen a emplearlo.
2. Debe prepararse a los niños para la resolución de las fichas de ejercicio dejando que en primer lugar jueguen con el material, resolviendo problemas muy simples (por ejemplo: intercambio de piezas grandes por piezas de orden inferior).
3. Debe prestarse particular atención a las soluciones originales que puedan obtener determinados muchachos y animarles a que sigan por este camino.
4. Hace falta asegurarse de que los niños practiquen los juegos de valor posiciones con unidades, con las barras, con las placas y con los bloques, de una forma simultánea.
5. Los niños deberán cambiar de base (caja) con tanta frecuencia como lo permita el material disponible en clase.
6. Es conveniente que los niños repitan los ejercicios ejecutando con los bloques, empleando fichas de colores o ábacos.
7. Una vez que los alumnos hayan comprendido un determinado concepto, es necesario asegurarse de que son capaces de aplicarlos correctamente sobre ejercicios concretos (medidas, pesadas, centímetros, metros, kilogramos , etc.).
8. Deben elogiarse los éxitos y animar a aquellos que tengan dificultades para avanzar.

Qué no debe hacerse con los bloques aritméticos multibase

1. No debe esperarse idéntico ritmo de progreso en todos los niños.
2. No deben confundirse la vivacidad de comprensión con la capacidad de raciocinio.

3. No deben ofrecerse recompensas, ni amenazas con castigos, según sea el resultado del trabajo de los niños, ya que estos métodos no tienen nada que ver con un verdadero trabajo y pueden tener una influencia desfavorable sobre el desarrollo psíquico del niño.
4. No debe permitirse al alumno el estudio de un concepto nuevo sin que domine perfectamente todas las fases previas que conducen a dicho concepto.
5. Nunca debe imponerse un método particular para resolver un problema o para indicar un resultado.
6. No debe exigirse la transcripción inmediata al cuaderno de ejercicios de ningún problema. Los alumnos tienen, en general diferentes necesidades en lo que se refiere al número de manipulaciones o experimentos que deban llevar a cabo antes de trasladar los resultados significativos a sus respectivos cuadernos.
7. No deben enseñarse los conceptos de decena y unidad al mismo tiempo que se trabaja con los bloques. El niño que haya trabajado sistemáticamente con los bloques de diferentes bases puede adquirir perfectamente un conocimiento implícito de los conceptos de decena, centena, millar etc..
8. No deben llevarse a cabo multiplicaciones entre números compuestos sin que el alumno haya comprendido a la perfección las reglas de la distributividad y de la asociatividad.
9. El orden natural del ciclo de los conceptos es el siguiente: _____

Juegos ----- Ejercicios estructurados
 Manipulaciones ----- Formación del concepto ----- Ejercicios de aplicación y
 adiestramiento (si son necesarios)

Tanto las fichas como los bloques pueden realizarse en plástico, metal o cartulina.

3.4 El laboratorio de Psicomatemática : Las máquinas que multiplican y los arreglos rectangulares de Irma Fuenlabrada

El departamento de Investigaciones Educativas del CINVESTAV del IPN, llevó a cabo un Laboratorio de Psicomatemática que es un grupo interdisciplinario de investigación que desde septiembre de 1978 ha desarrollado y experimentado una metodología de Enseñanza de las matemáticas en la Escuela Primaria. Este grupo elaboró un Programa Experimental de matemáticas, donde propone una metodología de enseñanza diferente a la metodología tradicional; de la teoría de Piaget se desprende que el alumno debe ser el constructor de su propio conocimiento y se ha podido probar al desarrollar el programa experimental, que una manera de aproximarse a la implementación de ese principio teórico es el desarrollar una metodología de enseñanza basada en la concretización de conceptos matemáticos; además se ha podido constatar que de la reflexión del niño sobre su propia actividad y de su intento por representar simbólicamente esa actividad se le da la oportunidad de apropiarse de mejor manera de los conceptos matemáticos y de la simbología propia de esta ciencia.

Las fichas de trabajo que presenta esta propuesta deben ser realizadas primeramente por el maestro con el material concreto para que viva la experiencia de ver los beneficios que reporta al conocimiento permitiéndole crear sus propias concepciones sobre la manera de resolver las actividades propuestas.

Se recomienda solucionar las fichas con un compañero, antes de iniciar las actividades se elabora el material que se describe para cada ficha en el anexo. Aún en el caso de conocer la respuesta a la pregunta planteada, se debe procurar resolverla con el auxilio del material, porque esta manera de proceder fundamentará mejor el trabajo que se proponga posteriormente a los alumnos.

FICHA No. 1

Con el material 1

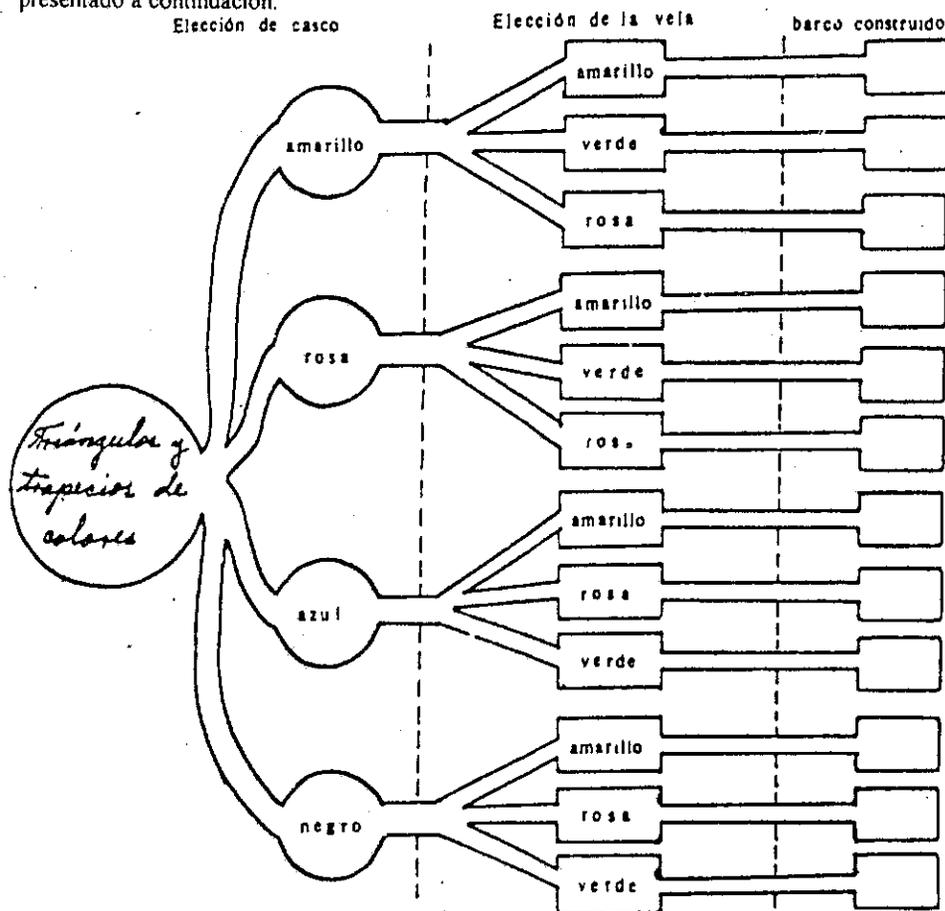
1. Con el material fabrica todos los barcos diferentes que sean posibles de hacer. Los triángulos son las velas y los trapecios son los cascos de los barcos.
2. Clasifica los barcos que construiste y haz un registro de esta clasificación.
¿ Cuántos barcos encontraste? _____
3. ¿ Estás seguro, que en el punto 1 construiste todos los barcos diferentes que se pueden hacer

Escribe UNA MANERA DE REGISTRAR, los barcos contruidos, de tal suerte que no haya "duda, están todos los que deben estar".

4. ¿Sabes a qué barco se refieren cuando se habla del barco amarillo y rosa? _____

¿Qué tipo de convención puede aceptarse para que expresiones del tipo "barco amarillo y rosa" no resulten ambiguas.

5. Una de las convenciones posibles, encontradas en el punto anterior, para designar a los barcos puede ser: "decir primero el color de la vela, y enseguida el color del casco". Con esta convención o con la que se haya descrito, designa a los barcos n, según el diagrama del árbol presentado a continuación.



6. Analiza la presentación de las siguientes situaciones.

a) Nos proponemos fabricar todos los barcos que se puedan, teniendo 4 colores para los cascos y tres para las velas (diferentes a los colores usados en los cascos).

b) Para desayunar podemos escoger entre pan, un bisquet, un panqué o un pastel, a los que se puede untar mantequilla o mermelada, o cajeta.

c) Queremos fabricar banderas con 2 cuadros de tela, tenemos 4 colores.

d) Las "palabras" que se pueden construir de 3 letras con las letras a, b, c, d, e, sin que en las palabras haya repetición de letras (aba, no está permitida).

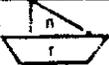
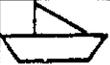
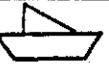
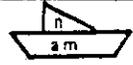
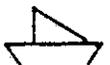
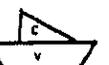
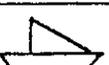
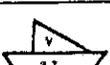
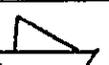
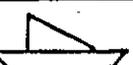
e) Para ilustrar un cuento pegamos un dibujo y una foto junto a él, tenemos 8 dibujos y 4 fotos relacionadas con dicho cuento.

f) Con cuadros de 4 colores fabricamos tapetes de 2 colores ¿Cuántos tapetes diferentes podemos fabricar?

Anota las semejanzas y diferencias que encuentre en las presentaciones anteriores.

7. Registra en la tabla de doble entrada la solución de las situaciones presentadas en el punto 6.

Se entiende por "tablas de doble entrada" registros del tipo :

| Puntos (a) Barcos: | | Color de los cascos | | | |
|--------------------|---------|---|---|---|---|
| | | Roto | Azul | Verde | Amarillo |
| Color de las velas | Naranja |  |  |  |  |
| | Cafe |  |  |  |  |
| | Violeta |  |  |  |  |

8. En un papelito, para cada tabla, registrada en el punto 7; anota cuántas hileras tiene cada tabla y cuántos casilleros tiene cada hilera de la tabla.

¿ Todos son distintos?

FICHA 2

Con el material No. 2

1. Supón que las corcholatas son soldados. ¿ De cuántas maneras se pueden organizar 36 soldados (en arreglo rectangular), para marchar ?

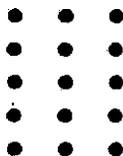
Haz un registro de las distintas formaciones que encuentre.

2. ¿ De cuántas maneras se pueden organizar 24 soldados ?

Haz un registro de las formaciones que encuentre.

3. El comandante no quiere que el enemigo se de cuenta de cómo se van a formar sus soldados; para lo cual se ha inventado una clave secreta:

Cuando él dice fórmense según la clave "5 X 3" los soldados se distribuyen de la siguiente forma:



Forma a los soldados según las claves : (2 X 8) (3 X 5) (4 X 3) (5 X 5). Registra las formaciones.

¿ Cuántos soldados se necesitaron en cada una de las formaciones anteriores ? Haz corresponder las claves con los soldados necesarios para cada formación.

4. En dos hojas cuadrículadas, recorta 15 rectángulos o cuadrados (respeta la línea de la cuadrícula)

a) A cada rectángulo anótale su clave.

b) Reúnan los rectángulos construidos en el equipo y clasifiquenlos poniendo juntos los que tienen el mismo número de cuadritos.

c) Registren la clasificación.

5. Diseña una actividad que tomando en cuenta las anteriores; permita que los niños construyan la tabla de Pitágoras.

6. Juego en equipo. Por turnos un miembro del equipo dice un dígito que se anota en un casillero de la columna izquierda al mismo tiempo empieza a calcular los productos de ese dígito con los que aparecen en la primera hilera. El primero que termina grita "basta" en ese momento todos suspenden y revisan sus resultados, se anotan un punto por cada resultado correcto, se inicia nuevamente el juego y al final cuantifican el puntaje para ver quién ganó.

| | x2 | x7 | x5 | x9 | x3 | x6 | x8 | Puntaje |
|--|----|----|----|----|----|----|----|---------|
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |

Total: _____

143487

FICHA No. 3.

Con el material 3

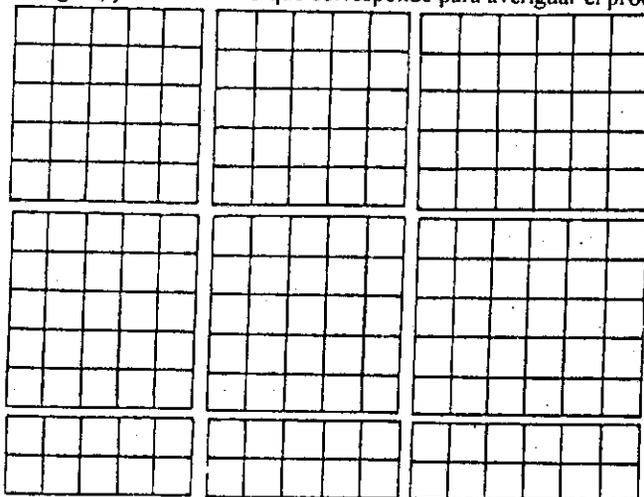
1. En papel cuadriculado, recorta un rectángulo de 12×35 . Encuentra una manera de utilizar este rectángulo para averiguar cuántos cuadritos lo forman: SIN CONTAR LOS CUADRITOS Y SIN RESOLVER DIRECTAMENTE EL PRODUCTO 12×35 .

Describe el proceso que encontraste.

2. En papel cuadriculado, recorta un rectángulo de 25×17 . Recortarlo en rectángulos cuyas claves están en dígitos, anótalos. Usa esos rectángulos chicos para calcular el total de cuadritos que hay en el rectángulo 25×17 .

Registra las claves que encontraste y las operaciones que hiciste para encontrar 25×17 .

3. En el rectángulo 12×16 , se recortaron los rectángulos que se muestran; anota las claves de cada rectángulo; y haz el cálculo que corresponde para averiguar el producto 12×16 .



¿Qué propiedad de la multiplicación se usa, cuando se recorta un rectángulo, en rectángulos más chicos?

FICHA No 4

1. Una "máquina" es un modelo que representa tres momentos:

- Un estado inicial (Entrada)
- "Lo que hace la máquina" (Transformación)
- Un estado final (el transformado de lo que entró; Salida)

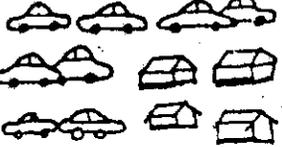
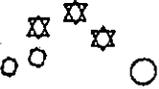
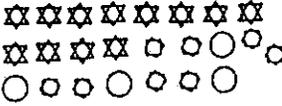
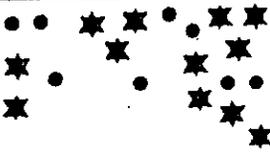
Completa las entradas o salidas, según corresponda, de la máquina que se describe:

| ENTRADA | <i>Por cada cosa que entra la máquina le cambia por 3 de lo que salió.</i> | SALIDA |
|---|--|---|
|  | → |  |
|  | → | |
|  | → | |
| | → |  |
| | → |  |
|  | → | |

2. Completa las entradas y salidas de la máquina siguiente:

| ENTRADA | <i>Por cada cosa que entra la máquina la cambia por 6 de lo que entró.</i> | SALIDA |
|-----------------------------------|--|---|
| 2 niños 3 lápices | | |
| 4 plumas 2 gomas 5 cerillos | → | |
| | → | 18 mesas 6 cuadernos |
| 1 pelota 3 patines | → | |
| 7 helados 2 corcholatas | → | |
| | → | 6 corcholatas verdes 12 corcholatas azules |
| | → | 24 tijeras 6 corcholatas naranjas |

3. Descubre, que hace la máquina. Completa las entradas y salidas.

| ENTRADA | | SALIDA |
|---|---|--|
| 4 canicas 2 trompos |  | |
| 2 coches 1 casa |  |  |
| |  | 12 bicicletas |
|  |  |  |
| 5 triciclos 1 motocicleta |  | |
|  |  |  |

3.5 El proceso de matematización en la escuela primaria: “Una proposición para introducir la multiplicación en segundo grado” de Irma Fuenlabrada

Irma Fuenlabrada junto con Grecia Galvez e Irma Sáiz, realizaron un trabajo donde se propone una manera de introducir la multiplicación en el segundo grado de la escuela primaria.

El tema se inició distribuyendo a cada niño un conjunto de cucharitas de madera (de las que se usan para tomar helados) a las que adjudicaron el significado de: “soldados”. Les pidieron que hicieran formaciones de soldados, es decir, que los dispusieran como los elementos de una matriz $f_1 \times f_2$. Los niños trabajaron con este material durante nueve horas de clases en las que se insistió en que diferenciaran y contaran las f_1 filas y las f_2 hileras de cada formación. Para que diferenciaran los términos de filas y de hileras recurrieron a la organización de juegos en el patio, con formaciones de niños donde, a la orden de ¡filas!, debían tomarse de la mano de sus vecinos de izquierda y derecha y a la orden de: ¡hileras!, debían poner ambas manos en los hombros de su vecino de adelante.

Una formación cualquiera podía realizarse en 3 diferentes planos:

1. En el plano material, con las cucharitas de madera, ya sea sobre las bancas o sobre el pizarrón (sostenidas por imanes). A la ordenación hecha con material le llamaremos **M**. El trabajo sobre multiplicación se inició trabajando en el plano material, para pasar de éste a los otros dos planos.

2. En el plano gráfico, representando a los soldados mediante cruces (u otra señal) al interior de un conjunto de $f_1 \times f_2$ casilleros al que llamaron cuadrícula. Esta representación gráfica la designaremos como **G**.

3. En el plano verbal (oral o escrito), mediante la descripción del número f_1 de filas, el número f_2 de hileras y el número total P (igual a $f_1 \times f_2$) de soldados en la formación. Esta descripción verbal será designada como V .

Las primeras clases se dedicaron a la asimilación de la noción de formación de soldados (matriz $f_1 \times f_2$). Para ello, los niños ejercitaron todos los tránsitos posibles, desde una formación en cualquiera de los planos señalados hacia los otros dos planos. (Fig. 1)

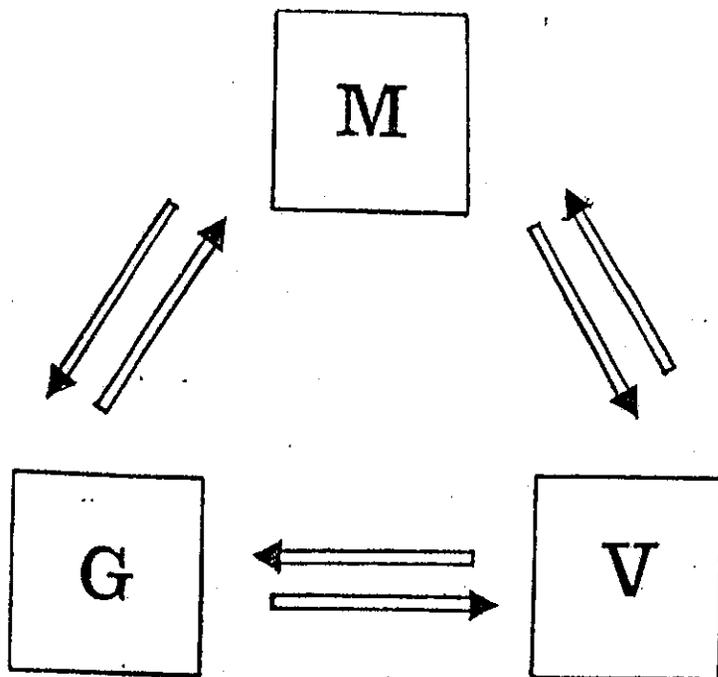


Fig. 1

Antes de introducir la ordenación en el plano gráfico pidieron a los niños un registro espontáneo de una formación realizada en el patio. (Fig. 2 y 3).

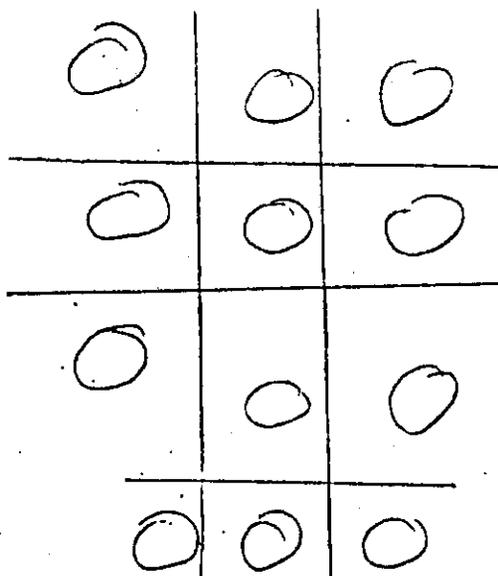
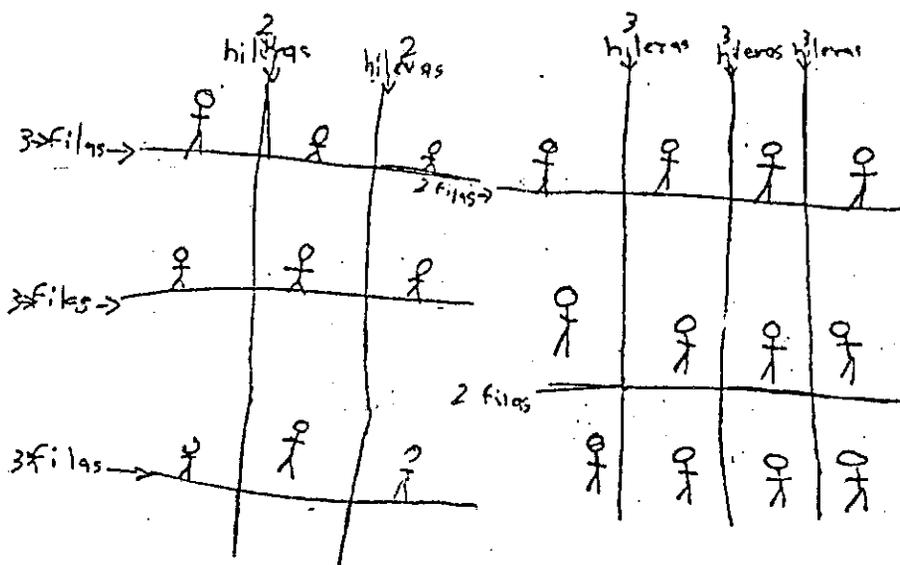


Fig. 2

Fig. 3

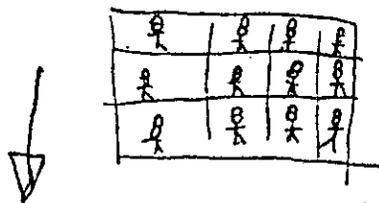
Esto permitió conocer los recursos de que disponían los niños para organizar su representación gráfica, antes de imponerles una forma específica de hacerlo, que fue la cuadrícula.

Cuando se les presentó la cuadrícula la intención fue que usaran una flecha para indicar el sentido en que avanzaba la formación, lo que a su vez determinaba cuáles eran las filas y cuáles las hileras. La variabilidad resultante en la localización de filas e hileras dificultó su discriminación, de manera que se optó por la convención de que los soldados siempre marcharan hacia abajo en el pizarrón y hacia los niños en el papel.

Cuando el ejercicio consistía en partir del plano verbal para pasar al material o la gráfico sólo se especificaba f1 y f2 de modo que los niños debían encontrar P, ya sea en el plano material o en el gráfico.

Para facilitar la comprensión de las relaciones entre f1, f2 y P, se pidió a los niños que fueran agregando una hilera a partir de una formación dada y haciendo un registro en el plano verbal para cada formación obtenida. (Fig. 4)

Agrega 1 hilera - Haz el registro



...3... filas
 ...4... hileras
 ..1.2... soldados

Fig. 4

Con el mismo objetivo, se introdujo una tabla para organizar la información relativa a varias formaciones, en el plano verbal, que incluía: número de filas (f1), número de hileras (f2) y número total de soldados(p). (fig. 5)

Formación de 12 soldados

| Filas | Hileras | Soldados |
|-------|---------|----------|
| 4 | 3 | 12 |
| 6 | 2 | 12 |
| 3 | 4 | 12 |
| 2 | 6 | 12 |
| 1 | 12 | 12 |
| 2 | 6 | 12 |

Fig. 5

El balance de las 9 primeras horas de clases mostró que aún había niños que confundían las nociones de filas y de hileras. Entonces optaron por suprimir la noción de hileras y caracterizar una formación por el número f1 de filas y el número f2 de soldados en cada fila. Para enfatizar esta nueva caracterización se cambió de material y se utilizaron las regletas de Cuisenaire que son paralelepípedos de madera de diferentes colores y tamaños. Los más pequeños son de 1 cm.3 y blancos, luego siguen los de 2 X 1 X 1 cm.3, de color rojo y así sucesivamente, hasta llegar a las de color naranja, de 10 X 1 X 1 cm. 3. Las regletas permitieron concretizar una fila de soldados mediante un único objeto. Así por ejemplo un mosaico formado por tres regletas de

color rosa representaban un formación de 3 filas con 4 soldados en cada una, lo que se podía constatar colocando 4 regletas blancas (unitarias) sobre una de color rosa.

Simultáneamente se introdujo una manera adicional de describir la formación en el plano verbal, que se presentó a los niños como una clave secreta para especificar la formación. En vez de decir que "hay f_1 filas con f_2 soldados en cada fila", usaban la clave: $f_1 \times f_2$. La formación 3×5 estaba compuesta, entonces, por 3 filas con 5 soldados en cada fila. Ampliaron la tabla para registrar formaciones, incluyendo una columna para la clave. (Fig. 6).

| filas | soldados en cada fila | clave secreta | soldados |
|-------|-----------------------|---------------|----------|
| 3 | 3 | 3×3 | 9 |
| 4 | 4 | 4×4 | 16 |
| 6 | 2 | 6×2 | 12 |
| 2 | 6 | 6×2 | 12 |
| 0 | 0 | 0×0 | 0 |
| 5 | 5 | 5×5 | 25 |
| 4 | 9 | 4×9 | 36 |
| 6 | 5 | 6×5 | 30 |
| 4 | 10 | 4×10 | 40 |

Fig. 6

Con las regletas Cuisenaire los niños practicaron el tránsito de la clave ($f_1 \times f_2$) a un mosaico hecho con regletas y viceversa. Dentro de esta ejercitación se incluyó la comparación del tamaño de varios mosaicos por superposición. Los mosaicos representaban tarimas para un baile y se trataba de averiguar cuál necesitaba más madera. El uso de la clave $f_1 \times f_2$ como

descripción alternativa a la especificación de f_1 , f_2 y P en el plano verbal, requirió de una ejercitación adicional de los tránsitos de un plano a otro.

Además de que una operación de multiplicación se puede realizar en tres planos diferentes: material, gráfico y verbal, es posible definir una cuarta variación, dada por la significación de la operación, por los referentes a los cuales remite cuando la estructuramos como "situación multiplicativa". (Fig. 7).

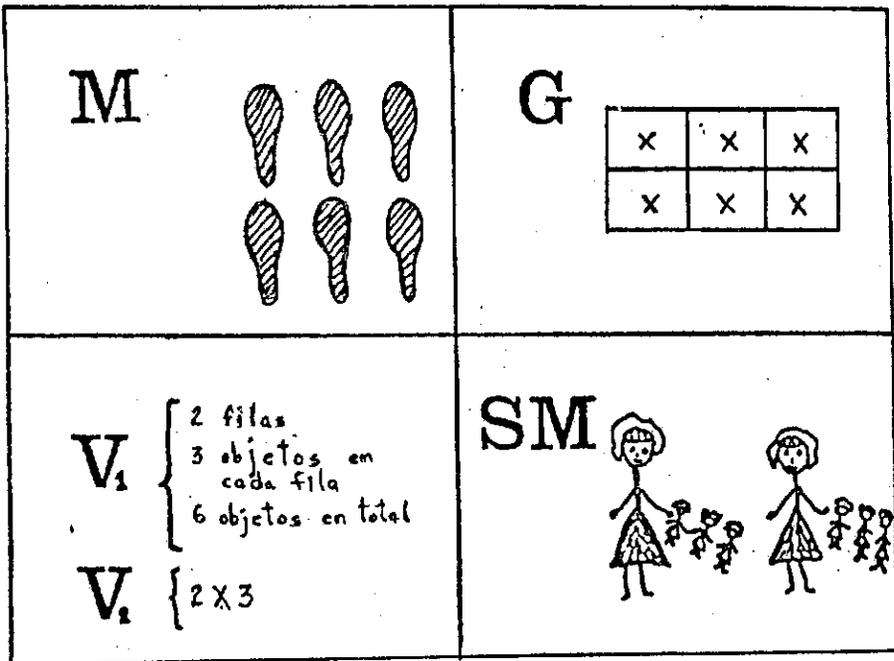


Fig. 7

Así, por ejemplo, 2×3 puede significar, en diferentes momentos:

1. Una formación de dos filas de soldados, con tres soldados en cada fila.
2. Dos bolsillos, con 3 canicas en cada uno.
3. Dos niñas, cada una con 3 muñecas.
4. Dos viajes, en cada uno de los cuales conocimos 3 ciudades, etc.

Denominando, S.M. (situación multiplicativa) al significado específico que toma una operación de multiplicación, se amplió la gama de los tránsitos posibles descritos en la figura 1.

(Fig. 8).

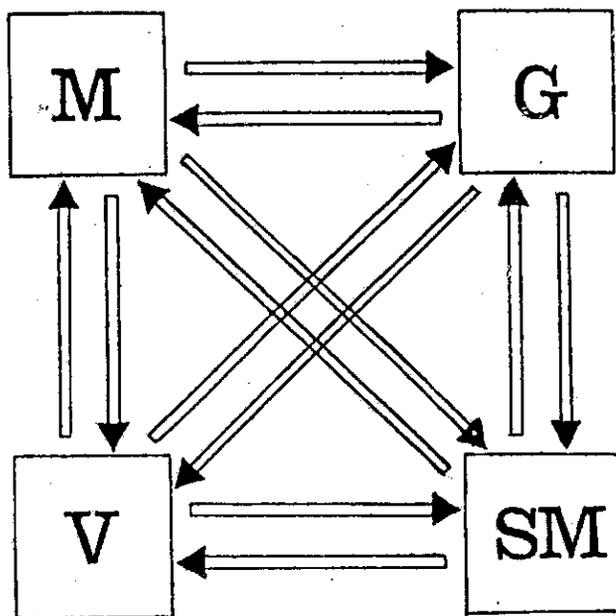
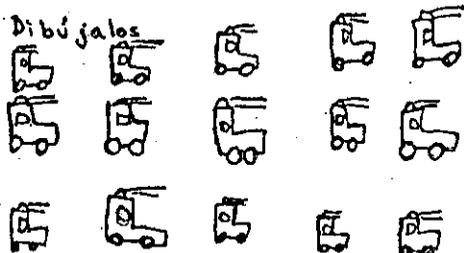


Fig. 8

Para diagnosticar si los niños eran capaces utilizar en otros contextos significativos lo que habían aprendido hablando de soldados, se les presentaron textos que describían situaciones multiplicativas y se les pidió que hicieran un dibujo y que respondieran preguntas (Fig. 9) o que las formularan (fig. 10)

1. Tres niños tienen 5 cochecitos cada uno.



¿Cuántos cochecitos tienen entre los tres?

15

En el patio de Juan cada peral tiene 6 ramas
Cada rama hay 3 peras. Hay 2 perales
Dibújalos



Fig. 9

Escribe preguntas y contéstalas cuenta las peras
de los dos árboles 36 peras

cuenta los árboles 2 árboles

cuenta las ramas de los dos
árboles 12 ramas

Fig. 10

También se presentaron situaciones que sugerían preguntas que se respondían multiplicando, dividiendo o haciendo ambas cosas. En general, los niños lograron representar la situación

mediante un dibujo, formular alguna pregunta (explícita o implícitamente) y responderla. Sin embargo, tuvieron algunas dificultades, como:

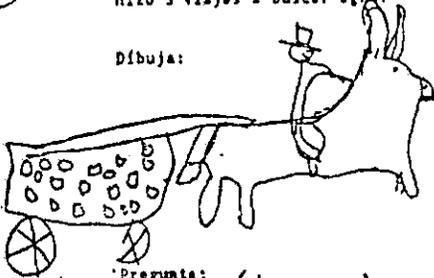
1. La comprensión de algunas situaciones, demasiado distantes de su experiencia personal.

(Fig. 11).



Enrique repartió hoy 20 botellones de agua en su burrito.
Hizo 5 viajes a buscar agua.

Dibuja:



Pregunta:

Cuántos botellones
trajo en cada viaje 4

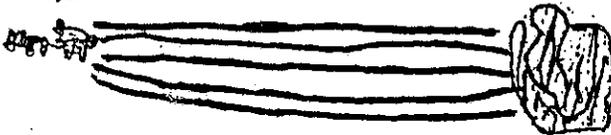
Fig. 11

2. La ausencia de algún recurso, material o gráfico, para resolver las preguntas que implicaban una división. (Fig. 12)

Enrique repartió hoy 20 botellones de agua en su burrito.
Hizo 5 viajes a buscar agua.



Dibujar:



Pregunta:

cuánta
agua
queda en el río

2 2 2 2 2
4 4 4 4 4
8 8 8 8 8
1 1 1

Fig. 12

3. La formulación explícita de sus preguntas (fig.13) y el que tales preguntas fueran pertinentes a la situación descrita. (Fig. 14).



Para la fiesta de Adriana compraron 4 cajas de refrescos.
Cada caja trae 6 refrescos. Entre 6 niños se tomaron todos
los refrescos.

Dibuja:

$$3 \times 8$$

Pregunta: cada niño se to 2 refrescos
no

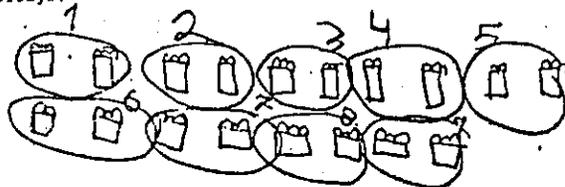
o se tomaron tres

Fig. 13



Julieta hace ositos de felpa para vender. Tiene 18 bracitos
hechos.

Dibuja:



Pregunta: Julieta vendia bracitos
o ositos.

Fig. 14

A las autoras de esta propuesta les llamó la atención el hecho de que, en estas situaciones, pocos niños recurrieron a la cuadrícula que habían usado para representar las formaciones de soldados. En general, dibujaron los objetos descritos en el texto (tal vez influidos por la consigna: "dibuja") y los distribuyeron espacialmente de maneras variadas.

El análisis de los trabajos de los niños, al enfrentarlos individualmente a situaciones multiplicativas, dio lugar a la programación de 8 horas de trabajo colectivo para enseñarles a

usar la cuadrícula, a recurrir a ella como esquema general para representar cualquier multiplicación en el plano gráfico. En las 6 primeras se presentó una situación multiplicativa y los niños encontraron el producto manipulando palitos (en el plano material) o mediante cuadrículas (en el plano gráfico). En cada situación variaba el significado de los factores: niños y refrescos que se toma cada niño, flores artificiales y pétalos en cada flor, viajes por agua y cubetas acarreadas en cada viaje, etc..

La presentación de la situación se hacía:

1. Manteniendo f_1 fijo y variando f_2 .
2. Manteniendo f_2 fijo y variando f_1 . (Fig. 15)
3. Variando a la vez f_1 y f_2 .

Se utilizaba la tabla ampliada (filas, elementos en cada fila, clave y total de elementos) para registrar las variantes de cada situación. Una vez llena la tabla se ejercitaba su lectura a partir de f_1 y f_2 o a partir de P

En el plano verbal, la organización de la información en una tabla permitió ir desarrollando esquemas de análisis para encontrar algunos datos a partir de otros. Los niños ejercitaron los siguientes:

1. Dados f_1 y f_2 , encontrar $f_1 \times f_2$ y P .
2. Dados $f_1 \times f_2$, encontrar f_1 , f_2 y P .

No ejercitaron estos otros:

3. Dados P y f_1 , encontrar f_2 y $f_1 \times f_2$.
4. Dados P y f_2 , encontrar f_1 y $f_1 \times f_2$.

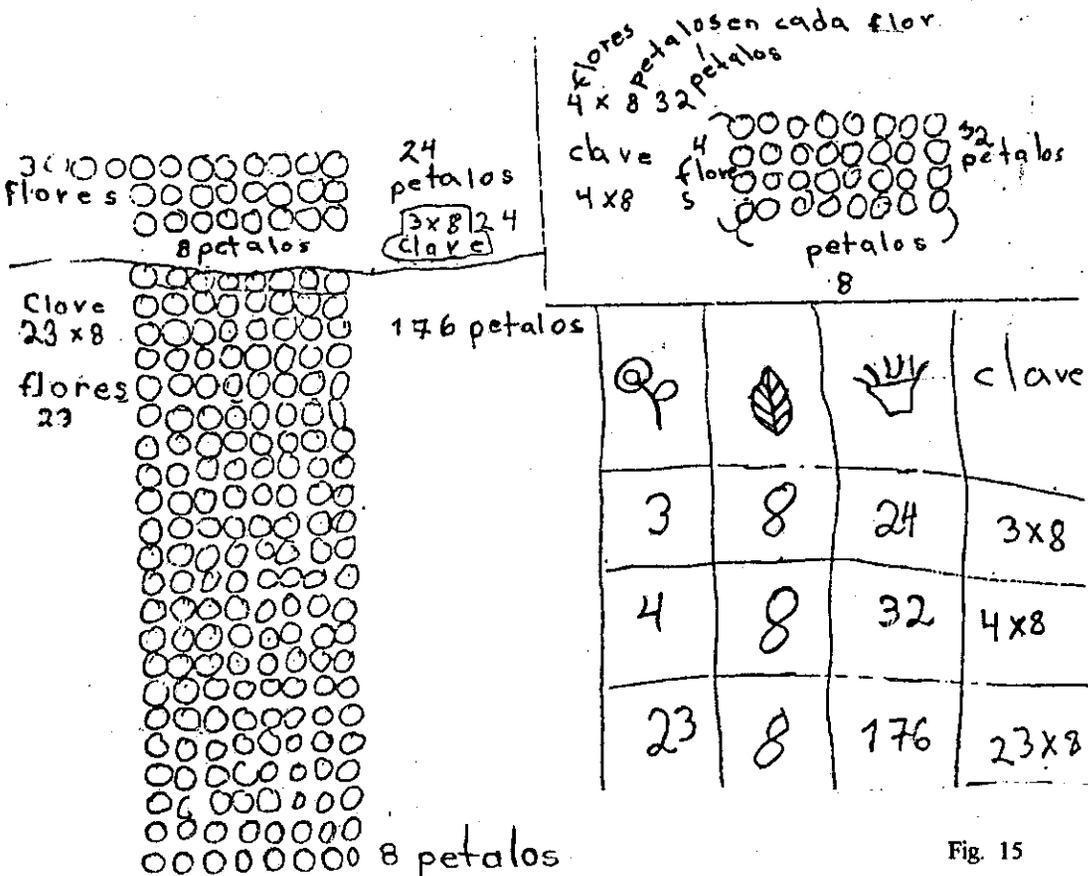
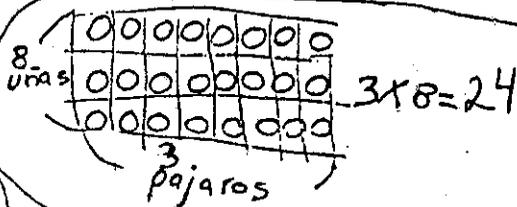


Fig. 15

Las siguientes 2 horas se dedicaron al análisis de las preguntas posibles ante una situación multiplicativa. Se distinguió entre las expresiones que son preguntas y las que no son preguntas, entre las preguntas que se pueden contestar a partir de los datos y las que no se pueden contestar, entre las preguntas que ya están contestadas en el enunciado y las que requieren la formulación de preguntas. A esta altura se introdujo una actividad que se repite con frecuencia cuando los niños terminaban el trabajo programado y que consiste en darles una clave cualquiera y pedirles que inventaran un problema a partir de ella. Inicialmente, los niños tendían a representar la clave en el plano gráfico mediante una cuadrícula, y a diseñar una situación de

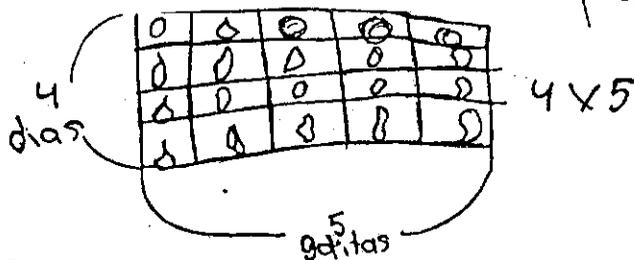
resta a partir del total de elementos de la cuadrícula. Posteriormente fueron aprendiendo a estructurar situaciones claramente multiplicativas. (Fig. 16 y 17).

Magdalena aprende, Magdalena bendía
 a ser pajaritos los pajaros o se
 de papel cada pájaro tiene 8 uñas. los quedaba.



Las uñas
 de los pajaritos
 eran de papel
 o de cartón

Cuántas uñas
 tuvo que utilizar
 Magdalena para
 hacer 12 pajaros



Doña chachita tenía gripa y tenía que tomar
 5 gotitas de remedio al día y se curó al 4^{to}
 día

En las 11 siguientes horas de clases se utilizó un material que los niños ya habían usado en primer grado, y que había resultado bastante útil para la comprensión de la estructura de nuestro sistema de numeración posicional base 4, consiste en un conjunto de triángulos equiláteros de diferentes colores y tamaños. Los triángulos más pequeños son de color amarillo, los siguientes de color azul, los próximos de color rojo y los últimos blancos. El material está construido de tal manera que con 4 triángulos amarillos se puede construir un triángulo del tamaño de los azules y la misma relación guardan los azules con los rojos y los rojos con los blancos. (Fig. 18). La significación de este material para los niños, que fue la misma que conocieron en primer grado, era la siguiente: los triángulos amarillos son refrescos completan una caja, representada por un triángulo azul, 4 cajas completan un cajón representado por un triángulo rojo y, finalmente, 4 cajones completan un camión que transporta refrescos y que está representado por un triángulo blanco.

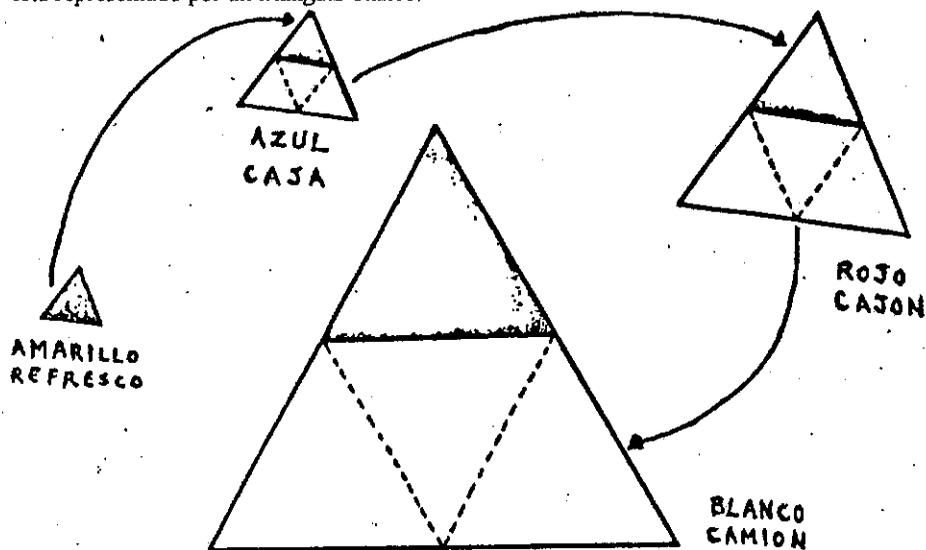


Fig. 18

Finalmente, multiplicaciones imprevistas realizadas por los niños los llevaron a definir una nueva unidad: el trailer, formado por 4 camiones. En primer grado los niños también habían aprendido a utilizar una tabla para registrar una determinada cantidad de triángulos, cuya estructura correspondía a la de la escritura posicional de los números de base 4. (Fig. 19).

Una casa dos cajones y un camión

| △ | △ | △ | △ |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 0 |

Fig. 19

Otro recurso que los niños ya manejaban era el de concretizar las operaciones aritméticas mediante las acciones de una "máquina". La máquina, en este caso, cumple el rol de un operador. Existe un estado inicial, concretizado por lo que sale de ella. Entre ambos, se produce la acción de la máquina- operador que transforma, de alguna manera preestablecida, el estado inicial en el estado final. Los niños habían operado con máquinas no numéricas, máquinas que suman y máquinas que restan. Ahora se define la máquina que multiplica de la siguiente manera. La máquina $\times 3$ es una máquina que, por cada cosa que entra pone 3 cosas en la salida, de la misma clase de las que entraron. (Fig. 20)

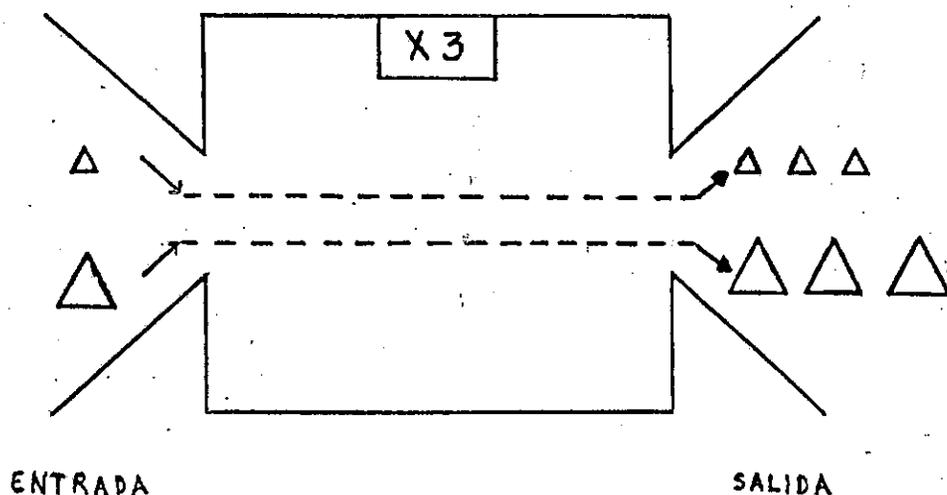


Fig. 20

Fácilmente los niños comprendieron que, en esta máquina, si entra un triángulo amarillo salen tres triángulos amarillo, si entra un triángulo rojo salen tres triángulos rojos, etc.. Pero, de acuerdo al material con que trabajaban (base 4), no podían entrar a la máquina más de tres triángulos de un mismo tamaño, ni tampoco podían salir más de tres triángulos de igual tamaño. De manera que, si entraban dos triángulos rojos la máquina X 3, la máquina debería poner seis triángulos rojos en la salida, pero antes de sacarlos había que cambiar 4 de ellos por un triángulo blanco.

El trabajo con máquinas que multiplican y con el material de triángulos que se ha descrito dio a los niños los elementos necesarios para que posteriormente comprendieran la multiplicación de números polidígitos en base 10. Practicaron la multiplicación con diferentes máquinas registrando entradas y salidas en una tabla.

Después de 6 horas de práctica de multiplicación con triángulos y máquinas, presentamos a los niños situaciones multiplicativas, algunas de las cuales se resolvieron colectivamente y otras individualmente. Estas situaciones seguían refiriéndose a la significación adjudicada a los triángulos, es decir, a refrescos, sueltos o agrupados. En una de ellas se daba lo que salía y se pedía a los niños que determinarían qué había entrado (Fig. 21).

Sonia metió algunas cosas a la máquina que triplicada cada cosa que entra y le salió; 3 camiones y 3 cajas.
 ¿Que metio Sonia a la máquina?
 con resta 1 camión y 1 caja

Dibuja:

| entrada | | | | | | |
|---------|----|-----|------|---|----|-----|
| 0 | 10 | 100 | 1000 | 0 | 10 | 100 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 3 | 0 | 3 |

Fig. 21

En las últimas 15 horas de clase el material de apoyo para realizar multiplicaciones consistió en corcholatas pintadas de colores, una concretización de un sistema de numeración posicional en base 10. Los niños ya habían usado este material para aprender la escritura decimal de los números y como apoyo para el aprendizaje de las operaciones de suma y resta con polidígitos. Las corcholatas azules corresponden a unidades, las rojas a decenas y las amarillas a centenas. En las clases, a veces este material significaba dinero: pesos, monedas de 10 pesos y billetes de 100 pesos. Otras veces significaba dulces: dulces sueltos, bolsas con 10 dulces y cajas con 10 bolsas. El trabajo con este material constituyó una extensión del que habían realizado con los

triángulos. Siguieron manipulando máquinas que multiplican, sólo que ahora cambiaban 10 corcholatas azules por 1 roja y 10 rojas por 1 amarilla.

Durante 4 horas los niños manipularon máquinas, buscando las salidas en diferentes tipos de ejercicios:

1. Dada la máquina y las entradas. (Fig. 22).
2. Dada la máquina, con entradas libres.
3. Máquina y entradas libres.

Cuando trabajaron con triángulos, la significación del material era única (refrescos). Con corcholatas, se hace entrar dinero a la máquina, representado por corcholatas y sacaban dulces o galletas, decimalmente envasados (suetos, en bolsas o en cajas) Así, una corcholata azul significaba un peso al entrar a una máquina y un dulce al salir de ella. Esto no resultó difícil para los niños, puesto que ya habían manejado esta doble significación de las corcholatas y permitió generar situaciones más variadas que con los triángulos.

En la tabla de registro se separa algunos centímetros la columna de la entrada de la de la salida, ya que su presentación adyacente había dificultado su manejo, para algunos niños.

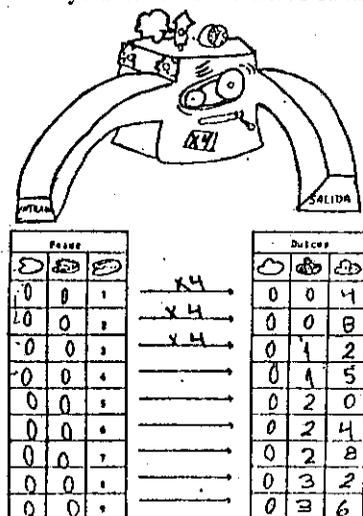


Fig. 22

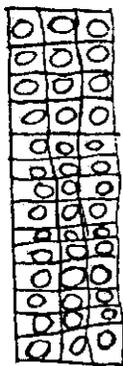
También con las corcholatas hicieron cadenas, esta vez referidas a una fábrica de mazapanes que triplicaban su producción. En las siguientes dos horas resolvieron individualmente situaciones de suma, resta y multiplicación e hicieron ejercicios de multiplicación propuestos en su libro de texto.

Las próximas 6 horas estuvieron dedicadas a relacionar las dos maneras en que se había presentado la operación de multiplicación:

1. Las ordenaciones de objetos en forma material, con sus variantes de representación (cuadrícula, clave) y de significación.
2. Las máquinas, operando con material en base 10.

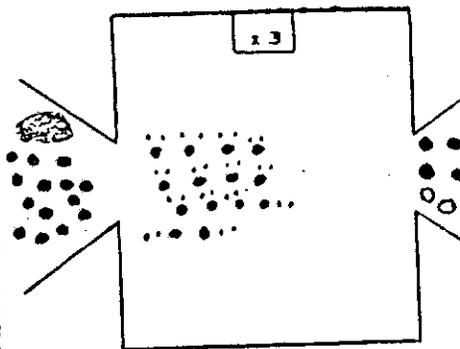
Una primera actividad consistió en dar los factores de una formación (f_1 y f_2) y pedir que la representaran en una cuadrícula, en el plano gráfico, determinando P. A continuación operaban una máquina que multiplicaba por f_2 , ponían f_1 en la entrada y constataban que salían P elementos. (Fig. 23)

Haz la cuadrícula de la clave 14×3



Dibuja una canica en cada cuadrado
¿Cuántas canicas hay? 42

Mete 14 canicas a la máquina



¿Cuántas canicas te salieron? 42

Fig. 23

Luego realizaron la actividad inversa de la que acabamos de describir. Primero operaban con la máquina y después con la cuadrícula. Al final registraban en una tabla los resultados de ambos procedimientos, para facilitar el análisis comparativo (Fig. 24).

| Ficha | Máquina | Cuadrícula | Clave |
|---|---------|------------|-------|
|  | 60 | 60 | 10x6 |
|  | 30 | 30 | 15x2 |
|  | 40 | 40 | 8x5 |
|  | 63 | 63 | 9x7 |

Fig. 24

Analizando los trabajos de los niños se dieron cuenta de que ya podían relacionar la clave, f_1 X f_2 , con la cuadrícula (ordenación de objetos en el plano gráfico), pero no con la máquina.

Para generalizar la significación de la clave se les puso a practicar el tránsito desde la máquina a

| la clave. (Fig. 25) | | | | Entrada | Máquina | Clave | Salida |
|---------------------|----|-----|----|---------|---------|-------|--------|
| 6 | x5 | 6x5 | 30 | 1 | x5 | 1x5 | 5 |
| 4 | x5 | 4x5 | 20 | 11 | x5 | 11x5 | 55 |
| 2 | x5 | 2x5 | 10 | 12 | x5 | 12x5 | 60 |
| 8 | x5 | 8x5 | 40 | 20 | x5 | 20x5 | 100 |
| 9 | x5 | 9x5 | 45 | 200 | x5 | 200x5 | 1000 |
| 3 | x5 | 3x5 | 15 | 60 | x5 | 60x5 | 300 |
| 7 | x5 | 7x5 | 35 | | | | |

Fig. 25

En la clase siguiente hicieron la práctica inversa, la de transitar desde la clave a la máquina.

En síntesis, en esta última etapa se procuró integrar los conocimientos que los niños habían adquirido sobre la multiplicación, practicando los tránsitos posibles entre la ordenación de objetos (cuadrícula), la máquina y la clave, como descripción verbal de ambas concretizaciones de la multiplicación.

Los niños llegaron a expresar claramente las equivalencias con la cuadrícula y la máquina al comparar los resultados de la misma operación multiplicativa.

En la última hora de clases orientaron a los niños para que escribieran la igualdad: $f_1 \times f_2 = P$, que es el paso inicial en muchos programas escolares, para el aprendizaje de la multiplicación (Fig. 26).

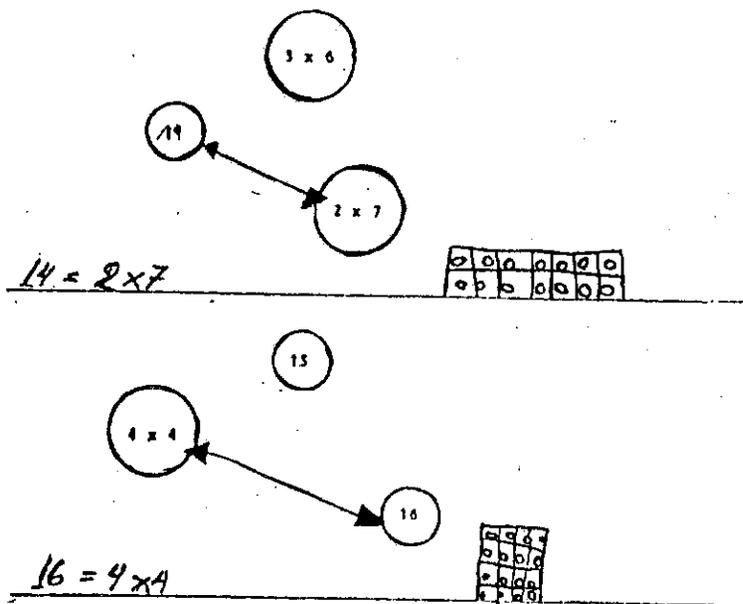


Fig. 26

3.6 El material Cuissenaire: Las Regletas en Color

La cuestión central de la matemática moderna es la noción de escritura o conjunto dotado de relaciones entre sus elementos y de operaciones entre ellos. Una característica fundamental es la de la reversibilidad, lo que permite operaciones directas-inversas. Las operaciones entre los elementos de un conjunto dan a ésta una estructura.

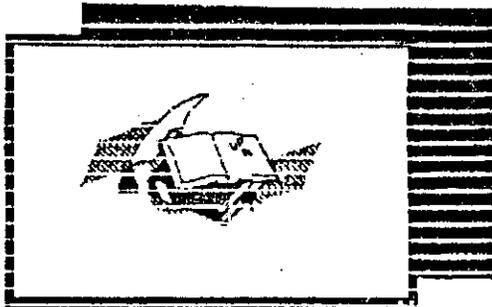
Como ayuda a la comprensión del niño de estas estructuras dinámicas, Cuissenaire ideó un material que consiste en cierto número de regletas de 10 colores diferentes, de forma prismática que representan los diez primeros números, es decir, cada una tiene un centímetro por un centímetro de sección. Blanco (1), rojo (2), verde claro (3), rosa (4), amarillo (5), verde oscuro (6), negro (7), marrón (8), azul (9) y naranja (10). Las regletas y sus combinaciones son isoformas a las de los números.

Las regletas son un modelo matemático de los números y en su conjunto pueden establecerse relaciones (de orden, por la longitud; de equivalencia, por el color o la longitud; clases o subconjuntos de posible enumeración) y operaciones (sumar, multiplicar).

El material Cuissenaire pone en juego la imaginación en el mayor grado posible. Por otra parte, las nociones matemáticas y las operaciones que el niño adquiere se deben mucho más a lo que hace, que a lo que ve. Así aprende a realizar las operaciones de sumar y restar. Por medio de este material, un pizarrón y unas fichas se le puede enseñar las operaciones de multiplicación y división. Posteriormente puede utilizarse el material para introducir el concepto de fracciones y proporciones.

Las regletas de Cuissenaire, proporcionan un modelo adecuado del número como longitud.

Para realizar un producto con regletas, por ejemplo: 2×3 , se toman las regletas 2 (rojo) y 3 (verde claro) respectivamente, y se colocan en cruz. A continuación se toman tantas regletas abajo como indique la longitud de arriba, en este caso se toman dos regletas de tres, ya podemos prescindir de la regleta superior cuya función era indicar cuántas de tres había que tomar, el resto del proceso es el conocido, realizar la suma de las dos regletas de tres y tenemos 2 veces 3 igual a 6.



"El propósito de la evaluación no es probar, sino mejorar"

Gephant.

CAPITULO IV

TRATAMIENTO DE LA INFORMACION

4.1 Procesamiento de la información

Cuando se empiezan a conocer diferentes alternativas de trabajo de una problemática determinada, permite ampliar el conocimiento del docente y así modificar su actitud en el proceso enseñanza-aprendizaje.

Este cambio de actitud genera un criterio más amplio en cuanto a estrategias que pueda llevar a cabo en su trabajo, utilizando diversos tipos de materiales, induciendo al niño a que construya su propio conocimiento.

De las propuestas que a través del tiempo han surgido, basan su éxito en circunstancias que inciden en cierta época y principalmente en la aplicación que da el docente al no ser bien aplicadas, muchas veces, pasan a ser un material que queda latente con la posibilidad de que pueda ser retomado como antecedente de una nueva alternativa.

En el capítulo anterior se hizo referencia a propuestas que inducen a hacer un análisis de ellas, para conocer las actividades que se proponen y saber si son pertinentes para poder aplicarlas al alumno de segundo grado de educación primaria.

En primer término, se hace referencia a las ventajas que proporciona al niño el realizar actividades premultiplicativas, tales como: El Dial y Los Bloques Multibase de Dienes (que no se encuentran como tales en los libros de texto gratuito de matemáticas de segundo grado), y que permitirán, cada una de manera independiente, que el alumno conozca y maneje otros sistemas de numeración no convencionales como el sistema de numeración decimal.

Se continua con el análisis de las propuestas multiplicativas: "La multiplicación: Las máquinas que multiplican y los arreglos rectangulares" y "El proceso de matematización en la escuela primaria: Una proposición para introducir la multiplicación en segundo grado" (en las que

colabora Irma Fuenlabrada), en éstas se induce al educando a construir su concepto de multiplicación y a descubrir el conocimiento convencional de la misma.

Finalmente se analiza la propuesta retroalimentadora: Las regletas de Cuissenaire, material que permitirá al alumno recapitular los conocimientos que vaya construyendo, ya que le dará oportunidad al alumno de reforzar la multiplicación desde una perspectiva lúdica, en la que aparentemente no existe una formalidad de aprendizaje, pero que reafirmará, a través de los ejercicios, su aprendizaje.

4.2 Clasificación de propuestas

En el proceso educativo se deberá asegurar la participación activa del educando estimulando su iniciativa, utilizando recursos didácticos que proporcionen al alumno las experiencias perceptivas, mediante el uso de material concreto y así recupere las nociones que él tiene para la construcción del concepto de la multiplicación y que a través de ellos se logre la comprensión, asimilación y fijación del conocimiento.

El material concreto tiene más valor cuando se construye y se usa en relación con el proceso enseñanza-aprendizaje, convirtiéndose en un instrumento de acción y de trabajo. Este tipo de material didáctico dentro de la planeación sistemática del proceso educativo, juega un papel muy importante que depende de: la forma como se maneje, de la oportunidad con que se emplee y de la función que se le asigne.

Es importante destacar que los materiales didácticos, por muy avanzados que sean, por sí solos no tienen significación, son herramientas o recursos que tienen en manos de los maestros su verdadera dimensión, éstos son aspectos muy relevantes que presentan las propuestas

didácticas-pedagógicas, que implican una relación involucrando al maestro-alumno-material concreto.

Los vínculos que se establecen en el aula no pueden entenderse, ni explicarse por sí mismos, sino en función de múltiples referencias contextuales que adoptan las relaciones interpersonales en el grupo, socializando de alguna manera el proceso para asimilar el concepto de la multiplicación a través de la manipulación de material concreto.

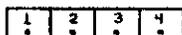
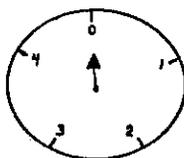
En las propuestas presentadas se maneja diverso material concreto, que de acuerdo a las actividades que se realizan con éste, se han clasificado en propuestas premultiplicativas, multiplicativas y de retroalimentación a la multiplicación.

4.2.1 Propuestas premultiplicativas

De las propuestas que fueron descritas en el capítulo tercero, algunas pueden ser retomadas como recursos en actividades premultiplicativas, con la finalidad de desarrollar el pensamiento lógico del niño, enfocado a la multiplicación, es decir, que vaya descubriendo por sí mismo seriaciones, o sea relaciones numéricas. En estas propuestas no se representan los resultados de manera numérica, únicamente se dan consignas a los niños para que las realicen mediante el material concreto que se maneja en cada una de las propuestas premultiplicativas.

Entre éstas se considera el Dial, que es un material concreto del que puede valerse el maestro para introducir al alumno a la multiplicación; el cual consiste en pequeña tabla cuya función es similar a la de un control con la numeración del cero al cuatro, también incluye un círculo de cualquier tamaño, puede ser de cartón o madera y de igual manera tiene la numeración del

control (0-4), semejante a la de un reloj y al centro una manecilla que gira en sentido **ESTE** para señalar los resultados que indica el control.



El uso del dial es una forma menos común de enseñar en la escuela los datos usuales de la multiplicación, pero parece ser un método más satisfactorio y efectivo que el condicionamiento.

Otra de las propuestas que se considera con actividades premultiplicativas es la de los Bloques Multibase de Dienes, que permite al niño trabajar con material concreto realizando actividades de basificación (base 2, 3, 4, etc.) llevándolo a descubrir por sí mismo relaciones matemáticas respecto a la multiplicación; con éstas el niño intenta comprender las estructuras matemáticas y aunque no presenta un resultado numérico, el objetivo es que descubra el proceso de las actividades de basificación que van encaminadas a la introducción del concepto de la multiplicación de manera intuitiva.

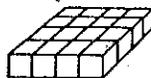
Este material se presenta en cajas de madera, una para cada base de numeración y está compuesto de cubos, placas, barras y bloques de madera pulida sin color a fin de conseguir una mayor abstracción, llevan unas ranuras fácilmente apreciables a 1 cm. de distancia, los cubos pueden realizarse en plástico, metal o cartulina.



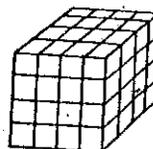
unidad



barra



placa



bloque

a) Actividades de las propuestas premultiplicativas

La planeación de actividades dentro del proceso enseñanza-aprendizaje requiere del apoyo de otras alternativas didácticas independientes al plan y programas de estudio de educación primaria y es importante que estas propongan el uso de material concreto en sus actividades para facilitarle al niño la construcción de su conocimiento y a la vez mejorar el desempeño profesional del docente. Al operar con el Dial se indica al alumno que:

- La manecilla avanzará en el sentido de las del reloj.
- Si se presiona el número 3 en el control, avanzará 3 espacios y llega al número 3.
- Si se presiona dos veces el número 3 en el control llegará al número 1.

Aunque en esta actividad no se llega a resultados convencionales, para el niño son reales de acuerdo al material que se está utilizando, ayudándolo a comprender que cada vez que presione un número en el control avanzará tantos espacios como indique, esto permitirá más adelante relacionar a estos ejercicios con la multiplicación. Sin embargo, el abuso en el manejo del Dial puede llevar al alumno a una confusión si éste memoriza los resultados al manipularlo.

Otra forma de realizar el proceso de manera concreta, es que mediante actividades motrices la realicen en el patio, o sea, se dibuja tanto el círculo como el control, en donde los niños participan por binas, uno realizando las funciones del control (mediante saltos) y otro haciendo las veces de manecilla; así si el niño salta 2 veces en el número 3 del control, el niño que actúa como manecilla avanzará 2 veces 3 espacios llegando al número 1 y como éste podrá realizar diversos ejercicios, ya sea recibiendo indicaciones del profesor o planteándoselas él mismo, favoreciendo la construcción de su conocimiento.

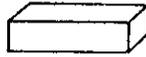
Otra propuesta que contempla actividades premultiplicativas con material concreto es la que presenta Dienes con sus Bloques Multibase, para utilizar este material (cubos) presenta una

secuencia de actividades de basificación, mediante fichas de trabajo planteadas de lo fácil a lo difícil, se toma la primera ficha porque es la que se refiere a actividades premultiplicativas; manejando con ésta ejercicios en diferentes bases. Ejemplo:

Ficha 1 (base . . .)



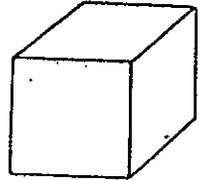
una unidad



una barra



una placa



un bloque

Toma algunas unidades.

1.-¿Cuántas unidades necesitas para construir una barra?

Toma algunas barras.

2.-¿Cuántas barras necesitas para hacer una placa?

Toma algunas placas.

3.-¿Cuántas placas necesitas para construir un bloque?

Escribe las respuestas en tu cuaderno.

Antes de pasar a trabajar con las fichas debe dejarse a los niños que jueguen y experimenten personalmente con el material, para que se familiaricen con él, preparándolos hacia la resolución de las fichas de ejercicio, dejando que en primer lugar jueguen con el material, resolviendo problemas muy simples como intercambiando piezas grandes por piezas de orden inferior.

Con estas actividades, el niño empieza a realizar de manera concreta duplicaciones, triplicaciones, etc., que generarán seriaciones informales, en el sentido de que no se representan

numéricamente sólo de manera concreta, desarrollando la lógica del niño sin llegar a un conocimiento formal, de ahí su clasificación dentro de las actividades premultiplicativas.

En estas propuestas, las actividades no se exponen como situaciones problemáticas reales del contexto del niño, pero son planteamientos relacionados directamente con el tipo de material que manipula el niño en cada una de las propuestas premultiplicativas, enfatizando que favorece al desarrollo de la lógica del niño y fortalece la noción de multiplicación.

b) Congruencia de las propuestas premultiplicativas con el aspecto psicológico, según Jean Piaget.

El desarrollo psicogenético, al inicio de la etapa de las operaciones concretas, dentro de las características esenciales que presenta el niño es que tiende a resolver problemas a partir de percepciones sensoriales inmediatas con el material de las propuestas, como el Dial y los Bloques Multibase, puesto que es influenciado por los aspectos perceptivos de las situaciones o consignas que se le plantea, como por ejemplo: presiona 3 veces el 2 del control del Dial. Presentándose esto en las actividades premultiplicativas, donde el niño puede afirmar algo sin justificar o comprobar, puesto que a esta edad no son capaces de realizar un razonamiento con estructura formal, esto quiere decir que no presenta una multiplicación.

El alumno debe ser visto como un sujeto que posee un determinado nivel de desarrollo cognitivo que Piaget califica como instrumentos de adquisición de conocimientos a través de esquemas donde la asimilación, acomodación y el equilibrio tienen su origen en la acción y constituyen todo crecimiento intelectual.

Al realizar las acciones con el material concreto que se utiliza en las propuestas premultiplicativas, conlleva a que el niño presente un desequilibrio en sus estructuras cognitivas que lo llevará a un equilibrio cuando comprenda el concepto de la multiplicación favoreciendo

el desarrollo de su madurez. Por lo que estas propuestas sí responden a las características e intereses del niño de segundo grado de educación primaria.

El material es apreciable, donde el niño capta concretamente y por lo tanto estas propuestas están considerado el aspecto psicológico.

c) Contrastación de las propuestas premultiplicativas con el programa vigente

La matemática está formada por un conjunto de nociones, elementos y relaciones, la complejidad con la que el niño adquiere dicho conjunto no es en un orden total ni lineal, sino progresivo.

Los contenidos referentes al eje temático de "Los números, sus relaciones y sus operaciones", se trabajan desde el primer grado, con el fin de proporcionar experiencias que pongan en juego los significados que los números adquieren en diversos contextos y las diferentes relaciones que pueden establecerse entre ellos. En el segundo grado se inicia específicamente con el contenido de una operación básica más, que es la multiplicación, ésta se trabaja de acuerdo a las actividades que propone el programa, avance programático y libro de texto a partir del tercer bimestre, propuestas como los Bloques Multibase de Dienes y el Dial, aunque no se consideran en el programa, con éstos de manera intuitiva se encamina al alumno hacia el proceso de la multiplicación.

Cabe aclarar que dichas propuestas no están contempladas en el programa ni en el libro de texto, pero que el maestro puede retomarlas para hacer más activa la clase a manera de juego y posteriormente le sea más fácil al niño manejar diverso material concreto de diferentes maneras en la construcción del concepto de la multiplicación.

4.2.2. Propuestas multiplicativas

Estas propuestas se consideran multiplicativas porque presentan un proceso a seguir desde la introducción a la multiplicación hasta llegar a la construcción de su concepto de acuerdo a como lo plantea el programa de segundo grado de educación primaria.

Son multiplicativas porque están enfocadas directamente a situaciones que inducen al niño a buscar un resultado que da a conocer de manera material, gráfica y verbal (oral o escrita) empleando y desarrollando su conocimiento lógico.

Del Laboratorio de Psicomatemática se analizan dos propuestas:

- 1.-La Multiplicación: Las máquinas que multiplican y los arreglos rectangulares.
- 2.-El proceso de matematización en la escuela primaria: Una proposición para la introducción a la multiplicación en el segundo grado.

La primera está estructurada en 7 fichas de trabajo que se presentan con actividades para aplicarlas desde el segundo hasta el sexto grado, con diferente nivel de dificultad. De ésta se toman sólo las primeras 4 fichas porque son las que están enfocadas al nivel del niño de segundo grado para enfrentarlo a situaciones problemáticas multiplicativas mediante el manejo de material concreto.

En la segunda propuesta multiplicativa se presenta un proceso para llegar a la multiplicación específicamente para segundo grado, en el cual se incluyen actividades de las fichas 1, 2, 3, y 4 de la primera propuesta, con algunas variantes, utilizando material concreto.

Con éstas se pretende enfrentar al alumno ante situaciones problemáticas en las que está implícita la multiplicación que lo llevará a buscar diversas "soluciones" que le permitirán acceder a esquemas multiplicativos.

a) Actividades de las propuestas multiplicativas

La propuesta del Laboratorio de Psicomatemática titulada: La Multiplicación: Las máquinas que multiplican y los arreglos rectangulares, es una proposición para introducir al alumno a la multiplicación, que se inicia al poner al que aprende ante situaciones problemáticas en las que subyace la multiplicación, y es en la búsqueda de “soluciones” donde se empiezan a gestar los esquemas multiplicativos. En estas primeras fichas de trabajo se abordan:

--Situaciones problemáticas: combinatoria y arreglos rectangulares.

--Clasificación de arreglos rectangulares.

--Introducción del signo “x” para designar arreglos rectangulares.

--Recopilación de productos, para construir un repertorio de éstos.

--Cálculo de productos de bidígitos recortando arreglos rectangulares.

Ficha 1: Las actividades sobre combinatoria (por ejemplo ¿Cómo se pueden combinar cascos y velas de diferentes colores?) no son indispensables para llegar a una técnica de la multiplicación, sin embargo, además de ser fácilmente abordadas por los niños los llevan espontáneamente a tratar de enumerar “de alguna manera” las parejas del conjunto-producto (los barcos están formados, una pareja de un casco y una vela). Un comentario que se cree necesario hacer respecto a las actividades de esta ficha, es que se trata de hacer manipulaciones con material concreto, por tanto, es indispensable disponer de un buen paquete de cascos y velas de cada color, de tal forma que los niños puedan construir todos los barcos diferentes que se pueda, inclusive varios ejemplos repetidos.

Es recomendable además, para enriquecer la situación, que haya colores comunes para velas y cascos, de tal forma, que se tenga que encontrar una manera de distinguir, la designación entre los barcos:



Ambos barcos son “azul y verde”, sin embargo son diferentes, por lo que se hace necesario llegar a un acuerdo sobre si primero se va a mencionar el color de la vela y luego el del casco o viceversa.

Cuando se construyen los barcos, la búsqueda será desordenada en un primer momento. Se empezará a organizar en cuanto se quieran encontrar todos los barcos y se quiera estar seguro de que efectivamente, se tienen todos. Puede llegarse eventualmente a la creación de “árboles” (diagrama descrito en la actividad 5 de esta ficha) o más fácilmente a registros en “tabla de doble entrada” (descrito en la actividad 7 de esta ficha).

Para que los niños lleguen a estos dos tipos de diagramas sobre todo al de “tabla de doble entrada” que es más útil (como se verá después) es necesario pedirles antes, que clasifiquen los barcos construidos, de esta manera se les ocurrirá por ejemplo, poner juntos todos los que tienen cascos azul, los que tienen casco rosa, etc., en esta clasificación se irán percatando si tienen barcos repetidos o bien si falta algún barco por construir. En la tabla de doble entrada que se describe en la actividad 7 se tienen por ejemplo, que en la primera columna están todos los barcos que tienen el casco rojo; en la segunda todos los que tienen el casco azul, etc.

A nivel de grupo se llegará a convenir cómo se van a designar los barcos, por ejemplo: primero el casco y luego la vela (se tiene así que “negro-rosa” significa a un barco que tiene en

casco negro y la vela rosa), se puede pedir que escriban el correspondiente (según esta nomenclatura) a cada rama del diagrama de árbol o cada casillero de la tabla de doble entrada, para que después se den cuenta que no es necesario describir quien quedó en el extremo de la rama o en cada casillero porque esto no agrega información a la que da el diagrama en sí.

Para aclarar lo mencionado en el último párrafo; al tener los encabezados de la columna y de los renglones de una tabla de doble entrada, se puede saber quién va en cada casillero.

| Formas de las medallas | | | | |
|------------------------|---|---|---|---|
| | ○ | □ | △ | ◇ |
| * | | | | |
| • | | × | | |
| ☆ | | | | |

Sabemos que la medalla que va en el casillero marcado es

| |
|---|
| • |
|---|

 basta "leer" la información que da la columna y el renglón al que pertenece el casillero.

Una de las partes más importantes de la metodología de enseñanza que se está proponiendo, es la evitar el "reflejo sistemático" por parte de los alumnos ante las situaciones que se presentan y justamente para evitar esto, se introducen problemas que requieren tomar en cuenta otras variables connotaciones, con el fin de mostrar al que aprende, que la solución no siempre es la misma y que exige un análisis cuidadoso. Por lo anterior se le pide en la actividad 6 de la ficha 1 que encuentre las semejanzas y diferencias de varias situaciones.

Las situaciones de combinatoria llevan de manera "natural" a la tabla de doble entrada; esta no es más que una manera de organizar la información de las situaciones presentadas; pero gráficamente se parece a lo que se llama "arreglo rectangular" del cual se puede desprender una técnica operatoria (ficha 2 y 3).

Un último comentario sobre esta ficha en las situaciones de combinatoria subyace la idea de multiplicación, pero ésta no aparece como “suma abreviada”; es decir, la multiplicación es algo más que una suma abreviada y aunque no se pretende profundizar sobre la naturaleza de la multiplicación y de la suma, se presentan algunas observaciones acerca de las diferencias de estas operaciones.

Ante un problema de multiplicación típico de la escuela primaria: Se tienen 5 cajas y en cada caja hay 8 canicas. ¿Cuántas canicas hay?. Sucede que lo que está en juego son:

No. de cajas \times No. de canicas = El resultado son canicas.

Ciertamente aquí la multiplicación se presenta como una suma abreviada, el resultado en este tipo de problemas es siempre de la misma “naturaleza” que la de alguno de los factores; el resultado en el ejemplo son canicas y uno de los factores es canicas.

En el libro de matemáticas de segundo grado también se encuentran ejercicios de este tipo por ejemplo en las páginas 102 y 103 (anexo 1), considerando que no se puede erradicar el concepto de suma abreviada, pues son problemas que se encuentran en el contexto del niño, sin embargo debe evitarse el abuso de éstos e incluir problemas de correspondencia, teniendo como prioridad el uso de material concreto en su solución.

En las situaciones de combinatoria “se tienen 4 colores para cascos y 3 colores para velas”, se tiene así que:

Número de cascos \times Número de velas = Número de barcos

El resultado de este tipo de problemas no es de ninguna de las naturalezas de los factores, es decir, se produce un nuevo elemento, los barcos no son ni cascos ni velas, estos problemas tienen un concepto más abstracto. Cuando se usa la multiplicación para calcular áreas, por ejemplo, la del rectángulo; sucede algo análogo ya que para obtener el área se multiplican el

largo por el ancho del rectángulo que son magnitudes de longitud y lo que se obtiene es una magnitud de área que ciertamente no es de longitud. En estos dos últimos ejemplos, la multiplicación no es una suma abreviada.

Ficha 2: La introducción que se escogió para la multiplicación (ficha 1) desemboca en el estudio de arreglos rectangulares y la enumeración de sus cuadros. la enumeración se puede hacer de diferentes maneras, pero una de ellas es recortando la cuadrícula grande en cuadrículas más chicas; un estudio sistemático de los recortes del arreglo rectangular conduce a la técnica usual de multiplicar.

En estas actividades 1 y 2 de esta ficha se trabaja de manera concreta con los diferentes factores que puede tener un número; por ejemplo: el 36 tiene como factores al 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36, y esto permite la construcción de diferentes maneras (arreglos rectangulares) de organizar la marcha de 36 soldados; por decir algo, algunos de ellos serían:

| | | |
|-------------------------------------|-------------------|-------|
| O O O O O O | O O O O O O O O O | O O O |
| O O O O O O | O O O O O O O O O | O O O |
| O O O O O O | O O O O O O O O O | O O O |
| O O O O O O | O O O O O O O O O | O O O |
| O O O O O O | | O O O |
| O O O O O O | | O O O |
| | | O O O |
| O O O O O O O O O O O O O O O O O O | | O O O |
| O O O O O O O O O O O O O O O O O O | | O O O |
| | | O O O |
| | | O O O |
| | | O O O |

Esta actividad se encuentra en el libro de matemáticas vigente en el tema "La empacadora", en las páginas 78 y 79 (anexo 2), que consiste en que el niño haga paquetes con x número de chocolates o viceversa se le da el número de chocolates y él debe buscar cuántos paquetes puede formar.

Estas actividades para el maestro resultan fáciles, esto obedece al hecho de que se conocen los factores del 36, pero para los niños es una tarea de experimentación y a base de ensayos y errores es que logran conformar los diferentes arreglos rectangulares. El hecho de que los niños dispongan de un material concreto les permite entre otras cosas corregir sin demasiado problema cuando se equivocan, la búsqueda de soluciones se agiliza; cosa que no sucede si se propone esta misma tarea con lápiz y papel.

Al darle una significación al material (las corcholatas representan soldados) se logra interesar a los niños en la actividad y dar en un primer momento "un significado" a la escritura 3×4 al tomarla como "la clave secreta".

Ciertamente que conforme se avanza en el proceso, esta significación particular se va perdiendo hasta llegar a ser el arreglo rectangular y el signo \times la representación de situaciones de tipo multiplicativo más generales.

Es necesario que los niños pasen del arreglo rectangular a la clave y de la clave al arreglo rectangular correspondiente a fin de que avancen paralelamente en tener un modelo de representación de las situaciones multiplicativas y una simbología aritmética de este tipo de situaciones.

La clasificación que se pide en la actividad 4 "poner juntos los arreglos que tienen el mismo número de cuadritos" inicia el proceso de ir elaborando un repertorio de productos. Al describir esta clasificación aparecen registros del tipo:

| | | | |
|--------------|---------------|--------------|---------------|
| 12 | 15 | 9 | 20 |
| 3×4 | 3×5 | 3×3 | 2×10 |
| 4×3 | 15×1 | | 5×4 |
| 2×6 | | | |

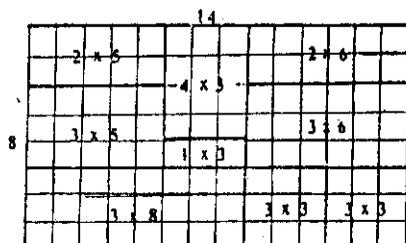
Cada vez que aparece una "clave" cuyo total de cuadritos ya se tiene registrado, se agrega ésta en el lugar que le corresponda, o en caso contrario se "abre" un nuevo grupo. Una actividad similar a ésta se encuentra en el libro de texto gratuito de matemáticas de segundo grado y es el tema "Hunde al submarino" en las páginas 142 y 143 (anexo 3), en donde se utiliza también el cuadro de multiplicaciones.

Para enumerar las casillas de una cuadrícula bastante "grande" (esto depende de la habilidad calculatriz de cada niño), cuentan primero las casillas una por una, pero muy rápidamente utilizan sus conocimientos sobre la suma o la resta y empiezan a imaginar por sí mismos procedimientos de cálculo:

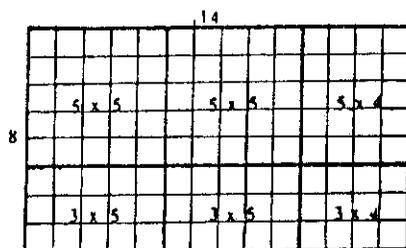
| | | | |
|--------------------|------------------|--------------|--------------|
| ○ ○ ○ ○ | ○ ○ ○ ○ | ○ ○ ○ ○ | ○ ○ ○ ○ |
| ○ ○ ○ ○ | ○ ○ ○ ○ | ○ ○ ○ ○ | ○ ○ ○ ○ |
| ○ ○ ○ ○ | ○ ○ ○ ○ | ○ ○ ○ ○ | ○ ○ ○ ○ |
| ○ ○ ○ ○ | ○ ○ ○ ○ | ○ ○ ○ ○ | ○ ○ ○ ○ |
| ○ ○ ○ ○ | ○ ○ ○ ○ | ○ ○ ○ ○ | ○ ○ ○ ○ |
| 1, 2, 3, 4, ... 20 | 4, 8, 12, 16, 20 | 4, 8, 16, 20 | 4 y 8 = 12 |
| | | | 12 y 12 = 24 |
| | | | 24 - 4 = 20 |

Ciertamente aparece la suma como manera de abreviar un proceso de conteo y no como una versión simplificada de la multiplicación.

La conformación de un repertorio de productos y el cálculo de productos recortando una cuadrícula grande se desarrollan el principio simultáneamente. Finalmente se hacen recortes en la cuadrícula más o menos anárquicos como:



Y no mucho tiempo después (1 ó 2 clases) empezarian a aparecer recortes “más pensados”. Hay dos conductas que se manifiestan, la primera es recortar el mayor número posible de rectángulos iguales y la otra que éstos tengan como factor al número 5.



En el proceso de recortado de arreglos rectangulares ya mencionados, se hace uso del repertorio conocido, pero no excluye que en ocasiones aparezcan rectángulos todavía no registrados en el repertorio, por lo que se hace necesario agregarlos. Este tipo de actividades aparecen en el libro gratuito de matemáticas en las páginas 150 y 151 (anexo 4).

Los niños se darían cuenta que el repertorio que tienen es poco práctico para usarse. Se plantea entonces proposiciones para organizar ese repertorio y es así como aparecerá la conocida “tabla de Pitágoras”.

| (X) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|-----|---|---|----|---|----|----|----|---|---|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 1 | | 3 | 4 | | 6 | | 8 | | 10 | 11 | 12 | | 14 | 15 | 16 |
| 2 | | 4 | | 8 | 10 | 12 | 14 | | | | | | | | | |
| 3 | 3 | | 9 | | 15 | 18 | | | | | | | | | | |
| 4 | 4 | 8 | 12 | | | | | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | | | | | | | | | |

En esta tabla se vacía primero la información que se tiene y puede entonces iniciarse una búsqueda del cálculo de las claves que hagan falta. Cabe aclarar que en un principio la tabla no se detiene en 9 y no es sino hasta que se tenga un método para calcular productos mayores a 9, cuando se pueda justificar el limitar el repertorio al 9 como factor. Como aparece en el libro de texto, la actividad de "El cuadro de multiplicaciones" páginas 126 y 127 (anexo 5) que se auxiliará con el señalador del libro recortable para que el niño se ubique en donde se cruza la fila y la columna, encontrando ahí el resultado. Más en las páginas 132 y 133 (anexo 6) se presenta el cuadro resuelto, en donde se resaltan las seriaciones de manera vertical y horizontal.

Una de las ventajas de organizar el repertorio de productos es una tabla de doble entrada (tabla de Pitágoras) es que por un lado ya se ha tenido cierta experiencia (ficha 1) sobre la construcción de este tipo de registros y por otro se puede retomar en ella información que "ha estado en el ambiente" como puede ser: la conmutativa de la multiplicación, que en determinada columna, la del 3, por ejemplo, se cuenta de 3 en 3 y lo mismo sucede en el renglón del 3 o bien las diferentes maneras de obtener un número a través del productos de otros (el 12 como 3×4 , 4×3 , 2×6 ...).

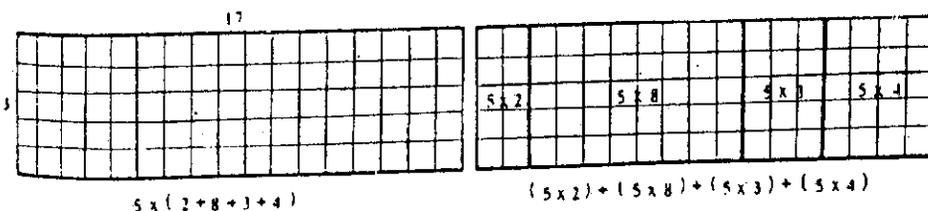
La tabla se utilizará de aquí en adelante, sería ideal que se logrará la memorización sin un aprendizaje "tortuoso" para ello. en la actividad 6 de la ficha que se describe el juego del

“basta”; el interés que tienen los niños por ganarles hace recordar algunos de los productos. Sin embargo, deberá tenerse en cuenta en un principio la tabla a la vista, después podrá estar guardada, pero siempre disponible en caso de necesidad.

Ficha 3: Las actividades de esta ficha conducen al uso de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma a fin de llegar a la elaboración de una técnica para multiplicar. La propiedad se describe aritméticamente:

$$5 \times (2 + 8 + 3 + 4) = (5 \times 2) + (5 \times 8) + (5 \times 3) + (5 \times 4)$$

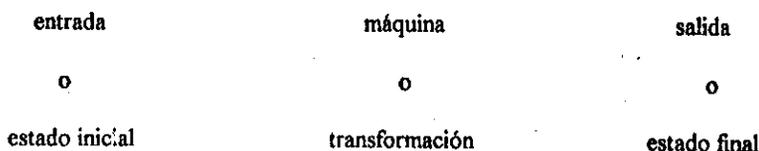
Lo que dice la relación es que se puede primero efectuar la suma de 2, 8, 3 y 4 y lo que resulte multiplicarlo por 5 o bien multiplicar al 5 por cada uno de los términos de la suma y luego sumar resultados. Geométricamente se tiene:



Esta propiedad se desprende para los niños de los recortes de los arreglos rectangulares. Disponiendo, los niños, sólo de un repertorio que se limita a la tabla de Pitágoras, se afician rápidamente a buscar recortes más efectivos en cuanto a la rapidez para calcular. Al mismo tiempo empiezan progresivamente a trabajar con esquemas (como los que se muestran); abandonando las cuadrículas.

| | | | | |
|---|---|-------------------|--|-------------------|
| | | 8 | | 8 |
| | 5 | $5 \times 8 = 40$ | | $5 \times 8 = 40$ |
| 7 | 2 | $2 \times 8 = 16$ | | $2 \times 8 = 16$ |

Ficha 4: En esta ficha se trabaja con "las máquinas" (en particular las que multiplican). En la actividad 1 de la ficha 4 se definió a la máquina como un modelo que representa tres momentos:



En realidad la máquina es un modelo que concretiza (o materializa) al concepto de operación propiamente dicho, es la acción o transformación y, los estados inicial y final reflejan la situación de los elementos operables antes y después de efectuada la operación.

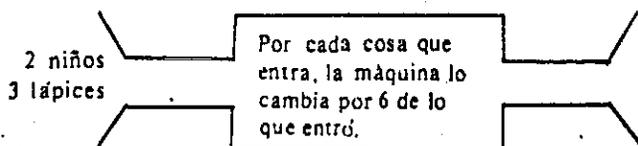
Tal vez sea conveniente recordar que una de las características de la metodología de enseñanza que se está presentado en la propuesta, contempla la necesidad de concretizar los conceptos matemáticos; para que los niños puedan (al inicio del aprendizaje de tales conceptos) realmente operar a nivel concreto.

Las máquinas, no son más que un recurso pedagógico que permite ejemplificar incluso con niños muy pequeños transformaciones que ellos practican en sus juegos, pero empiezan a "verlas como operaciones".

El objetivo principal de esta ficha es la de introducirlo al trabajo con máquinas que multiplican; la regla "por cada cosa que entra, la máquina la cambia por 3 de lo que entró" significa que si entre un lápiz saldrán 3 lápices; si entra 1 caja saldrán 3 cajas.

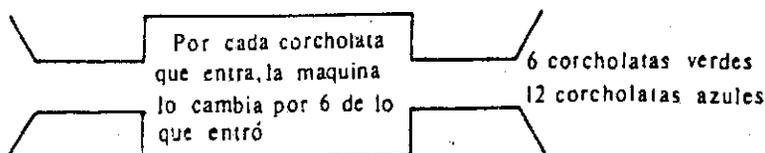
Familiarizarse con este aspecto de las máquinas multiplicativas es muy importante, ya que posteriormente cuando en ella entran cantidades se debe tener presente que al entrar centenas saldrán centenas, si entran decenas saldrán decenas, etc., es decir, saldrán elementos del mismo orden de los que entraron. En el trabajo con máquinas hay que distinguir 3 casos:

1.-Cuando se conoce la entrada y lo que hace la máquina; se trata entonces de averiguar la salida. En la máquina:



Por cada niño que entra la máquina lo cambia por 6 niños, en el ejemplo, salen 12 niños; por cada lápiz que entra la máquina lo cambia por 6 lápices, por tanto salen 18 lápices.

2.-En caso de conocer lo que sale de la máquina y lo que hace la máquina, se puede averiguar la entrada haciendo la acción inversa a la que hace la máquina.



Cada 6 elementos iguales que aparecen en la salida provienen de un elemento (de esa naturaleza) en la entrada. En el ejemplo: 6 corcholatas azules vienen de 1 corcholata azul, 6 corcholatas verdes vienen de una corcholata verde, por tanto en la entrada había 2 corcholatas azules y 1 corcholata verde.

3.-Cuando se conoce la entrada y la salida, y a partir de estos datos hay que averiguar lo que "hace la máquina", este es el caso de la actividad 3 de la ficha 4.

Este es ciertamente el más complicado porque hay que coordinar las entradas con las salidas y descubrir qué tipo de relación se da entre ellas, en los ejemplos se transforma:

| | | |
|---|-------|----|
| 2 | ----- | 8 |
| 1 | ----- | 4 |
| 3 | ----- | 12 |

| | | |
|---|-------|---|
| 2 | ----- | 8 |
| 1 | ----- | 4 |
| 2 | ----- | 8 |

De donde se desprende que la máquina "cambia cuatro por cada uno que entra". Al principio, cuando se propone este trabajo a los niños sucede que recurren frecuentemente a suponer, por ejemplo, que la máquina "agrega 6" por que esta es una manera de obtener al 8 a partir del 2, sin embargo, tienen que ver si su hipótesis es válida para todos los casos y se dan cuenta que no lo es, en:

| | | |
|---|-------|----|
| 1 | ----- | 4 |
| 3 | ----- | 12 |

Se ven obligados entonces a formular otra hipótesis; por ensayo y error (no se tardan demasiado) descubren qué es lo que hace la máquina.

Otro trabajo del Laboratorio de Psicomatemática realizado por Irma Fuenlabrada y colaboradoras, tiene como título "EL proceso de matematización en la escuela primaria: Una proposición para introducir la multiplicación en segundo grado".

Las autoras idearon esta propuesta pensando que todo concepto matemático puede concretizarse por medio de algún material estructurado, manipulable por los niños, y que la manipulación del material debe construir la fase de la aprehensión de conceptos. En la propuesta, los materiales y acciones usadas para concretizar la operación de multiplicación son:

- 1.- La ordenación de cucharitas, regletas o palitos.
- 2.-El tránsito de triángulos ó corcholatas a través de una "máquina".

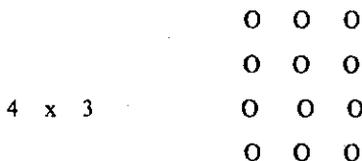
Inicia con el primer plano, trabajando con material concreto (cucharitas) para que los niños construyan el concepto de filas e hileras, clasificando en 3 diferentes planos las actividades en que se realiza, siendo éstas:

1.-El plano material (manejo de material concreto).

2.-El plano gráfico (representación gráfica).

3.-El plano verbal (descripción oral o escrita).

Para que la manipulación del material cobre algún sentido para el niño es conveniente asignarle un significado que tenga relación con los intereses y experiencias de los niños. En la propuesta ordenar cucharitas significó hacer formaciones de soldados, induciendo al niño a formar filas e hileras, incluyendo así actividades motrices para que pudiera apropiarse de estos conceptos; para después aplicarlos al utilizar el material concreto, ejemplificando a través de arreglos rectangulares y dibujando (plano gráfico).



Simultáneamente Fuenlabrada se auxilia de las regletas de Cuisenaire para que los niños formen arreglos rectangulares, permitiéndoles concretizar una fila de elementos mediante un único objeto que significó una vez formar soldados y otra construir tarimas para bailar. Tanto el asignar el mismo significado a dos materiales como variar el significado de un material a que los niños puedan diferenciar material y significado. Lo que se esperó lograr con esto es que, dada una situación significativa, el niño puede recurrir a algún material (entre varios) para representarla y a la inversa, dado un material, el niño pueda crear una situación significativa que pase a estar representada por el material como símbolo de otra cosa.

Después de haber realizado varias actividades similares con las regletas, nuevamente se retoma el plano gráfico, representando mediante dibujos lo que hace con estas.

El proceso de aprehensión de conceptos implica una reconstrucción de lo realizado con el material en el plano de la representación interna y una exteriorización de esta representación que puede darse por lo menos en dos planos; el gráfico, realizando dibujos o esquemas en un papel; y el verbal, mediante el lenguaje oral y escrito. Para garantizar este proceso de reconstrucción interna y de exteriorización, así como la comprensión de la estructura común a las realizaciones material, gráfica y verbal de un concepto, los niños deben practicar el tránsito de un plano a otro hasta ser capaces de construir las otras dos realizaciones correspondientes a una realización.

Las representaciones gráficas usadas en la propuesta son:

- 1.-Cuadrículas, para representar ordenaciones de objetos.
- 2.-Esquemas indicando entrada, operador y salida, para representar máquinas.

Las representaciones verbales a que se recurre son de dos tipos:

- 1.-Descriptivas: Como decir o escribir que una formación tiene f_1 filas, f_2 soldados en cada fila y P soldados en total, o bien que en una máquina entraron 2 triángulos amarillos precisando qué hizo la máquina y que salió. Esta representación verbal resulta más accesible para el niño, pues la practicaron primero.
- 2.-Matemáticas: En las que los niños usan los símbolos y reglas propias del lenguaje matemático para escribir por ejemplo: 3×5 , o para registrar en una tabla con números lo que entró y lo que salió de una máquina, hasta este momento el niño identifica lo que Fuenlabrada denomina "la clave secreta" ($3 \times 5 = 15$).

Para un concepto dado pueden existir varias alternativas de concretización, cada una de las cuales facilita la comprensión de algunos aspectos esenciales del concepto.

En tal caso, es inútil presentar al niño estas alternativas separadamente, siempre y cuando se organicen actividades para ayudarle a encontrar isomorfismos entre ellas. En la propuesta se manejaron dos concretizaciones muy diferentes de la operación de multiplicación. Primero la ordenación de objetos en forma de matriz, que permite una consideración estática de la operación, con la ventaja de hacer aparecer simultáneamente los elementos en juego: F_1 , F_2 y P . Contando las filas se encuentra f_1 , contando las columnas se obtiene f_2 y contando el total de elementos se llega a P . Segundo, la realización de la operación por una máquina, que corresponde a una consideración dinámica, lo que facilita la comprensión de la multiplicación de polidígitos, ya que define la transformación en función de lo que entra a la máquina (unidad, decena, centena). Además contribuye a la formación de un concepto general de operación aritmética, como transformación de un estado inicial en un estado final, y facilita la comprensión de las relaciones entre operaciones (en este caso la relación inversa entre multiplicación y la división).

Otro elemento fundamental para la aprehensión de conceptos está dado por el análisis de las acciones realizadas sobre el material, para que este análisis sea productivo hay que organizar variaciones sistemáticas tanto de qué variables se modifican en una situación, como de qué valores toman esas variables. La organización de los datos en tablas facilita el análisis de los efectos de estas variaciones sistemáticas. Tanto la construcción de una tabla, a partir de diferentes tipos de datos, como su lectura o reconstrucción posterior, partiendo de ciertas columnas para llegar a otras, brindan buenas oportunidades para el desarrollo de la capacidad de análisis.

Además de las variaciones de significado, el introducir variaciones en la forma de registrar una actividad contribuye a mantener la motivación por ella. Por ejemplo: en la propuesta los niños registraron las multiplicaciones en tablas.

Uno de los objetivos universalmente aceptados para la enseñanza de la matemática en la escuela primaria, es que los niños puedan aplicar los conceptos aprendidos a la resolución de problemas. Las investigadoras utilizaron la presentación de problemas en diferentes momentos del programa como un medio para diagnosticar qué tanto podían generalizar los niños, realizando las acciones aprendidas en otros contextos significativos. Al objetivo de resolver problemas dados mediante multiplicaciones se agregó el objetivo inverso: dada una multiplicación inventar un problema, por ejemplo:

$$4 \times 3 = 12$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| ○ | ○ | ○ | ○ |
| ○ | ○ | ○ | ○ |
| ○ | ○ | ○ | ○ |
| ○ | ○ | ○ | ○ |

Pues además de que una operación de multiplicación se puede realizar en sus tres planos diferentes material, gráfico y verbal, se define una cuarta variación, lo que las autoras llaman “situaciones multiplicativas”; es decir, los diferentes planteamientos reales, relacionados con el contexto del niño, que puedan surgir de una misma operación multiplicativa. Por ejemplo: $4 \times 3 = 12$, puede significar:

- 1.-4 niños con 3 helados cada uno.
- 2.-4 casas, cada una con 3 ventanas.
- 3.-4 triciclos con 3 ruedas cada uno. Etc.

Dentro de las situaciones multiplicativas se manejaron interrogantes para su solución, en ocasiones planteadas por el maestro y en otras por el niño; al resolver dichas situaciones pocos

niños recurrieron a la cuadrícula (arreglos rectangulares) en la que las autoras habían insistido para representar filas e hileras. Estos dibujaron los objetos descritos en el planteamiento y los distribuyeron espacialmente de maneras variadas. Esto llamó mucho la atención a las autoras por lo que retomaron nuevamente la "cuadrícula" (arreglos rectangulares) "obligando" al niño a encasillarse en su utilización al resolver los problemas. Esto nos lleva a interpretar en esta propuesta que surgió de la teoría psicogenética de Piaget apegada a la pedagogía operatoria, la cual manifiesta que el niño tenga libertad de elegir el proceso para llegar a la solución de cualquier problema y así lograr su propia sistematización de aprendizaje, en determinado momento no se llegó a respetar el proceso teórico-práctico, que se tenía planeado.

Se considera que en lugar de haber retrocedido totalmente, se debió darle una continuidad en las situaciones multiplicativas, para poder corroborar si más adelante los demás niños utilizaban la cuadrícula, propiciándole más ejemplos en donde el niño descubra el uso de ésta. Con esto se puede decir que no se debe esperar que un grupo sea homogéneo, pues cada niño tiene su propio nivel de desarrollo creando diversas situaciones significativas y representándolas de diferente manera, también se consideró la representación de la "clave secreta" (4×3) para el uso en las situaciones multiplicativas planteadas por él, así como su representación gráfica.

Cabe mencionar que en los planteamientos de los niños, las interrogantes no eran acordes al problema para darles solución, sin embargo, los errores que comete el alumno son pasos necesarios para su proceso constructivo.

Respecto a la escritura matemática se procuró imponer un mínimo de reglas, permitiendo el uso de diferentes formas para escribir una misma cosa. Con frecuencia se recurrió al criterio de "comunicabilidad" como prueba de la calidad del lenguaje. Por ejemplo: cuando los niños construyeron mosaicos con regletas los representaron mediante una clave = $F1 \times F2$. Luego

dieron la clave escrita a un compañero para que construyera el mosaico allí indicado. Se considera que la clave había sido bien escrita por un niño y bien leída por el otro si los dos mosaicos construidos eran iguales. De esta manera, los niños iban dejando de ver a la maestra como el único juez de la calidad de sus trabajos.

Una característica importante de la propuesta es la de dejar que los niños se pongan ejercicios, sea total o parcialmente. Esta modalidad tiene varias ventajas:

- 1.-Los niños gradúan, de acuerdo a sus posibilidades, la dificultad de los ejercicios.
- 2.-Los niños experimentan, averiguando qué obtienen bajo diferentes condiciones. Por ejemplo: cuando se le dejó que definieran la máquina de multiplicar, probaron qué pasaba al multiplicar por uno.
- 3.-Estos trabajos de los niños sirvieron para evaluar su grado de comprensión de una actividad, cuando constituyen una prolongación de ejercicios propuestos por el maestro. También sirven como diagnóstico para averiguar de qué esquemas disponen, qué son capaces de inventar, antes de enseñarles algo.
- 4.-Los niños se entusiasman con este tipo de actividades. La posibilidad de organizar su propio trabajo los aproxima a la situación de "hacer matemáticas", constituyendo un verdadero desafío a su capacidad creativa. Desde luego este desafío resulta más atractivo para algunos. Las autoras piensan que los ejercicios parcialmente libres se ajustan mejor a los requerimientos del grupo total.

Por último, se señala que uno de los propósitos básicos de la propuesta es contribuir a la integración de los conocimientos del niño, interesa que los niños no se sientan limitados a usar procedimientos únicos para abordar una situación problemática. Que tomen conciencia de que pueden optar entre diferentes vías. Además interesa que adquieran el hábito de buscar

relaciones entre cada cosa nueva que aprendan y lo que ya sabían, tanto en el contexto de su aprendizaje escolar como fuera de él.

b) Congruencia de las propuestas multiplicativas con el aspecto psicológico, según Jean Piaget.

Fuenlabrada y sus colaboradoras retoman los principios teóricos de Piaget, cuando diseñan las actividades que se realizan al aplicar estas propuestas, pero siempre con la consigna de que se utilice material concreto.

Estas propuestas multiplicativas están sustentadas como ya se mencionó en la teoría psicogenética de Piaget y por tanto responden a las características de un niño de 7 u 8 años, que para construir su conocimiento es necesario que opere con material concreto, ya que esto le va a permitir apropiarse de mejor manera de los conceptos matemáticos y de la simbología propia de ésta.

Piaget establece que el maestro ayudará a sus alumnos a construir los conocimientos matemáticos más relevantes en la medida en que realice las actividades de aprendizaje adecuadas, tomando como punto de partida los conocimientos ya adquiridos por los alumnos, planteando problemas que los conduzcan a enfrentarse a conflictos, propiciando la confrontación con los hechos de la realidad y con los diversos puntos de vista que surjan, estimulándolos para que piensen y traten de encontrar respuestas por sí mismos.

Es conveniente insistir en la utilización de material concreto para lograr que los alumnos tengan un aprendizaje significativo, pues para Piaget los niños a esta edad se encuentran en la etapa operacional concreta.

c) Contrastación de las propuestas multiplicativas con el programa vigente.

De la propuesta titulada "La multiplicación: Las máquinas que multiplican y los arreglos rectangulares", fueron retomadas sus 4 primeras fichas (combinatoria y arreglos rectangulares) para aplicarlas con algunas variantes en la estructuración de la propuesta "El proceso de matematización en la escuela primaria: Una proposición para introducir la multiplicación en el segundo grado" estas 2 propuestas están estrechamente correlacionadas por que ésta última surge en gran parte del contenido de las primeras 4 fichas de la primer propuesta que abarca la multiplicación hasta en sexto grado o a la formalización del algoritmo. Pero Fuenlabrada utiliza sólo las actividades que cree pertinentes para el segundo grado (fichas 1, 2, 3 y 4) y estructura su segunda propuesta aplicándola a un grupo de niños, a diferencia de la primera que se utilizó únicamente para el inicio de formación de profesores a través de un curso-taller.

Estas propuestas de trabajo en las primeras 3 fichas están relacionadas con el programa, fichero de actividades y las actividades que presenta el libro de matemáticas, que son elementos auxiliares o instrumentos de apoyo para el maestro.

Cuando el niño realice diversas combinatorias con arreglos rectangulares manipulando material concreto, encontrará diferentes soluciones a situaciones problemáticas. Es importante señalar que los arreglos rectangulares que presenta Irma Fuenlabrada en estas propuestas, se incluyen en el libro de matemáticas del alumno de segundo grado, por ejemplo en las páginas 162, 163, 170 y 171 (anexo 7 y 8), porque las actividades que contiene éste aunque con otras variantes persiguen el mismo propósito.

Es necesario mencionar que en estas propuestas no se manejan actividades de seriación, sin embargo en el libro de texto gratuito se presentan con diversas modalidades, como en los temas: "Completa las series", en la página 88, "Cuenta y cuenta", en las páginas 108 y 109,

etc. (ver anexo 9 y 10), con el fin de que el niño tenga una alternativa más práctica para el conteo.

La ficha 4 (la máquina) no está incluida en el programa vigente para la multiplicación, sólo para la suma y la resta, sin embargo, Fuenlabrada utiliza la máquina para sus propuestas como un seguimiento a las fichas 1, 2 y 3. Pues ella y sus colaboradoras al diseñar la investigación en el Laboratorio de Psicomatemática sobre la multiplicación en 1978, fue con el fin de representar una manera diferente de trabajo y al obtener resultados satisfactorios de su aplicación, fueron incluidas algunas actividades en el libro de texto gratuito con el enfoque actual.

Por lo que se puede manifestar que estas propuestas se encuentran dentro del nuevo enfoque didáctico que está contemplado en el programa vigente, el cual manifiesta que las situaciones problemáticas que se plantean es con el fin de promover en los niños el desarrollo de una serie de actividades, reflexiones, estrategias y discusiones que les permitan la construcción de conocimientos nuevos o la búsqueda de solución a partir de los conocimientos que ya posee.

La intención de que los niños participen en la construcción de su conocimiento exige una transformación, tratando de no proporcionar el conocimiento sino de producir las condiciones para que él los construya, es decir, situaciones multiplicativas que lo lleven a originar su conocimiento. Una construcción implica un sujeto activo en su relación con el objeto de conocimiento, pero para ello es necesario crear los medios didácticos concretos que lo hagan posible.

4.2.3. Propuesta de retroalimentación

Después de que se apliquen las propuestas multiplicativas que conducen a la apropiación del concepto de la multiplicación y si algunos niños aún se les dificulta el proceso de esta operación en el plano verbal (oral y escrito) se cree pertinente auxiliarse de las regletas prismáticas de Cuissenaire, que de manera concreta representan una operación formal, por ejemplo:

$$5 \times 3 = 15$$

Se considera de retroalimentación en la multiplicación porque se aplica después de que el niño haya pasado por el proceso de introducción al concepto de la multiplicación, sirviendo únicamente para reafirmar los conocimientos que se pretenden alcanzar.

a) Actividades de la propuesta de retroalimentación en la multiplicación

Una estrategia didáctica para la retroalimentación del concepto de la multiplicación, son las regletas prismáticas que propuso Cuissenaire, estructuradas en diversos tamaños y color de 1 cm. a 10 cm. Con este material de acuerdo al manejo que se le dé, el niño puede establecer relaciones de orden, equivalencias de clase o subconjuntos y operaciones. Aunque este material es elaborado, por sus características tridimensionales es considerado un recurso concreto, cuando es manipulado por el niño al resolver situaciones multiplicativas.

Para realizar una multiplicación con regletas, por ejemplo 3×4 se toman las regletas 4 (rosa) y 3 (verde claro), colocándolas en cruz, colocando arriba la regleta de número 3 y abajo la del 4, enseguida se toma el número de regletas que indica la de abajo, como lo expresa la

longitud de arriba, en este caso se toman 4 regletas de 3 cm. , el resto del proceso es realizar la suma de las 4 regletas de 3 cm. y se tiene 4 veces $3 = 12$.

Cuisenaire no toma en consideración como punto de partida para la construcción del concepto de la multiplicación, planteamientos de situaciones reales para el niño, éste sólo presenta la operación numérica para de ahí resolverla con las regletas. De acuerdo a la descripción de su propuesta se interpreta que ésta puede ser aplicada en el grupo después de haber dado la introducción a la multiplicación como presenta Irma Fuenlabrada, pues en este caso se da de manera más directa, valiéndose de la equivalencia de las regletas

b) Contrastación de la propuesta de retroalimentación con el programa.

En el plan y programas vigente se considera el uso de material concreto, pero no se incluye la utilización de las regletas prismáticas de Cuisenaire. Sin embargo, Fuenlabrada las retoma para introducir al niño a lo que ella llama "la clave secreta" ($4 \times 3 = 12$), representando con ellas de manera concreta dicha clave relacionándolas con el contexto del niño; lo que Cuisenaire no hizo con ellas. Este material es concreto porque le da la oportunidad al niño de manipularlo, respondiendo al nivel de desarrollo que tiene un alumno de segundo grado, incrementando su interés en la construcción de su conocimiento.

Las regletas de acuerdo su descripción de color varía, pues las que envía la S.E.P. a algunas escuelas tienen colores diferentes a los que se mencionaron en la propuesta.

Este trabajo de investigación documental al ser analizado aporta un sustento más amplio para el desempeño del docente en la introducción y concepto de la multiplicación, porque las actividades sí son pertinentes al aspecto cognoscitivo del niño, ya que se maneja material concreto y es precisamente en la etapa de las operaciones concretas en la que se encuentra el niño de segundo grado, las operaciones concretas son acciones mentales derivadas en primer

lugar de acciones físicas que se van convirtiendo en internas de la mente del niño, teniendo una construcción progresiva , en este caso del concepto de la multiplicación.

Por esto es importante que en la enseñanza de la matemática en la escuela primaria, se insista mucho en lo fundamental de la manipulación de objetos, con el fin de que el alumno construya las nociones a partir de la actividad que ejerce sobre ellos, contribuyendo así a su desarrollo integral; pues se encontró en las propuestas actividades motrices, socioafectivas y cognoscitivas que tienden a favorecer la seguridad personal para poder afrontar problemas posteriores en su vida cotidiana.

Por otra parte permite al docente conocer otras alternativas didácticas más dinámicas para motivar y encauzar al niño en la construcción de su conocimiento, favoreciendo el proceso enseñanza-aprendizaje.

SUGERENCIAS

Se han considerado dos alternativas para la enseñanza de la multiplicación, que sin ser propuestas enfocadas para la enseñanza de ésta, si se pueden considerar como auxiliares.

En primer plano se considera el **geoplano**, instrumento que se utiliza principalmente para la geometría, pero que adaptándolo puede ser un buen auxiliar en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la multiplicación.

En segundo término, se propone la utilización del juego de **Bingo**, que se podrá manejar de tal manera que permita la elaboración del cuadro de multiplicar o tabla de Pitágoras.

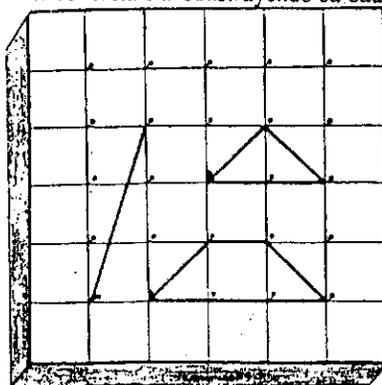
EL GEOPLANO

La Propuesta del geoplano que ideó Gattegno, es un material concreto enfocado a la geometría, está construido con una tabla cuadrada en la que varía la longitud de sus lados, así como del número de clavos incrustados en ella.

La función de éste consiste en la creatividad que el niño tenga para crear diversas figuras geométricas con la ayuda de ligas de colores. Sin embargo, el docente puede tomar este recurso para arreglos rectangulares y el cuadro multiplicativo.

Retomando los arreglos rectangulares de Fuenlabrada en su propuesta para la introducción a la multiplicación, cuando menciona la cuadrícula, se considera que el geoplano puede ayudar al alumno de segundo grado a resolver problemas de multiplicación concretizando con figuras geométricas que elabora en él, donde puede observar el manejo de filas e hileras al construir rectángulos y cuadrados. Por ejemplo: Cuando el alumno construye un rectángulo con

determinado número de cuadrados de largo (5) y determinado número de cuadros de ancho (3), podrá expresar que ha formado tantas filas por tantas hileras, o sea $5 \times 3 = 15$, y de esta manera el geoplano se puede considerar como un recurso más para la retroalimentación de la multiplicación de una forma más concreta e ir construyendo su cuadro multiplicativo.



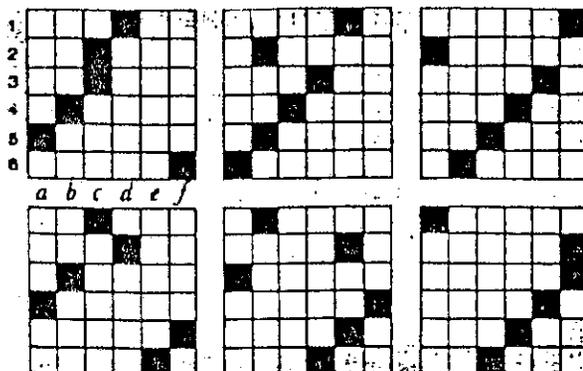
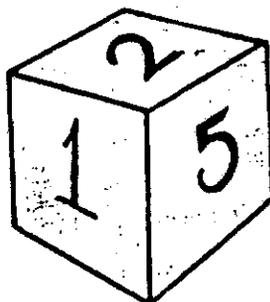
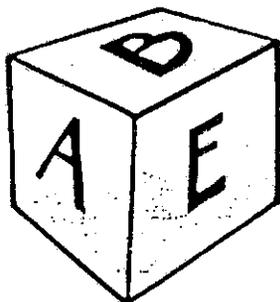
Este medio responde a las características de un niño de 7-8 años , el cual se encuentra según Piaget en la etapa de las operaciones concretas, donde se manifiesta que éste debe operar con los objetos.

EL BINGO

El juego del Bingo se utiliza como una estrategia para localizar puntos en el plano cartesiano, consta de seis cuadrículas y dos dados, se puede jugar hasta con siete niños. Aunque este juego está enfocado al eje temático del tratamiento de la información, puede dársele una variante incluyéndolo como un medio más para la construcción del cuadro multiplicativo, esto es que en las coordenadas horizontal y vertical se anoten exclusivamente números del cero al diez, como en este juego se utilizan dos dados, en un primer dado se anotarán en cada una de sus caras los números del cero al cinco y en el segundo dado del cinco al diez.

En esta variante no se colocarán fichas, ni pintarán cuadros; sino que anotaran el resultado de la multiplicación que se forma al tirar ambos dados y de esta manera irán construyendo su cuadro multiplicativo o tabla de Pitágoras.

De esta actividad podrán surgir variantes que el mismo niño proponga para completar dicho cuadro, evitando la monótona memorización de las tablas de multiplicar, pues el alumno aprende jugando, tomando en cuenta así una de las características más esenciales que presenta un niño de segundo grado de educación primaria



CONCLUSIONES

-Las propuestas que se presentan en este trabajo permitirán mantener al niño en constante actividad con el material concreto que sugiereu; induciéndolo a desarrollar su creatividad y la construcción de su conocimiento, en donde el maestro sólo fungirá como guía del trabajo dejando al lado el papel de transmisor

- El conocimiento matemático se construye a través de las acciones que el niño realiza, manipulando material, por esto, es fundamental manejar material concreto para que el niño construya su conocimiento, respecto a la multiplicación, a través de las relaciones que establece con éste.

- El material concreto que maneje el niño en las actividades para la construcción del concepto de la multiplicación en el segundo grado, puede ser encontrado en cualquier contexto ya sea en el rural o urbano, puesto que en las propuestas, aunque mencionan determinado material cuando fueron aplicadas, se puede sustituir por cualquier otro, siempre y cuando permita al niño tener un aprendizaje significativo.

- Comparando el concepto tradicional y el que se maneja en las propuestas, se puede concluir que el primero no es erróneo, sino que es limitado, y más dependiendo de cómo lo aborde el maestro.

-Para llevar a cabo el análisis de las propuestas didácticas fue necesario clasificarlas en premultiplicativas, multiplicativas y de retroalimentación, tomando en cuanto la secuencia

lógica de las actividades de cada una de ellas en relación a las características psicogenéticas del niño según Jean Piaget.

- Al realizar el contraste de las propuestas con el desarrollo psicológico, se define que como todas las propuestas presentadas manejan un material concreto, éstas responden a las características psicológicas de los niños de segundo grado que se encuentran en la etapa operacional concreta, en donde lo esencial es que el niño al operar con un material, establezca ciertas relaciones matemáticas, en este caso, la multiplicación.

- La utilización de actividades lúdicas en el proceso de construcción de conocimientos, permitirá al docente el enriquecimiento de su labor y al alumno mantener vivo el interés por participar activamente en la adquisición del conocimiento.

- Que el docente se actualice para que conozca las investigaciones más recientes que han realizado referentes a la multiplicación en la escuela primaria; puesto que aportan nuevas alternativas para el desempeño durante el proceso enseñanza-aprendizaje, de acuerdo al enfoque vigente en el Plan y programas de estudio.

- Que se promuevan las propuestas que han surgido en beneficio de la educación, pues éstas, tal como son descritas por sus autoras con modificaciones, son instrumentos indispensables para la labor educativa

BIBLIOGRAFIA

- AJURIAGUERRA, J. "Estadios del desarrollo según Piaget". Desarrollo del niño y aprendizaje escolar. Antología UPN - SEP. Reimpresión. México 1988. pp. 106 - 111.
- ALEKSANDROV A. D., Polmogorov. "Visión general de la matemática". La matemática en la escuela I. Antología UPN - SEP. 1a. Edición 1985. pp. 135 - 143.
- AMORIN Neri, José. "Estudio de algunos métodos utilizados en la enseñanza de los conceptos matemáticos". Enciclopedia Temática de la educación. Vol. III. Editorial Etesa 1981. pp. 81 - 89.
- AVILA, Alicia. "La comprensión del algoritmo de la multiplicación". La matemática en la escuela III. Antología UPN - SEP. México 1993. pp. 137 - 145.
- BENEDITO Antoli, Vicente. "Material didáctico". Enciclopedia práctica de pedagogía. Editorial Planeta España 1988. pp. 33 - 35.
- BERTELY, María y Rosaura Galeana. "En y más allá de la escuela". Problemas de educación y sociedad en México. Antología UPN - SEP. 1a. edición. México 1987. pp. 65 - 69.
- CONSTANCE, Kamii. "Principios pedagógicos derivados de la teoría de Piaget: Su trascendencia para la práctica educativa". Teorías del aprendizaje. Antología UPN - SEP. 1a.

- Edición México 1986. pp. 361 - 370.
- CUEVAS Aguilar, Silvia. "La multiplicación". Didáctica de la aritmética y la geometría. Editorial Oasis. México 1972. pp. 52-56.
- FUENLABRADA, Irma, Grecia Galvez e Irma Sáiz. "El proceso de matematización en la escuela primaria: "Una proposición para introducir la multiplicación en segundo grado". Laboratorio de Psicomatemática. DIE - CIEA - IPN. pp. 22.
- "La multiplicación: Las máquinas que multiplican y los arreglos rectangulares". El laboratorio de psicomatemática. Matemáticas y educación indígena III. Antología UPN - SEP. México 1994. pp. 187 - 264.
- GARCIA Davila, José. "El Bingo" Matemáticas para la escuela de hoy. Editorial Ciencias Educativas S.A. 1a. Edición 1985. pp. 89 - 91.
- GOMEZ Blasco, Angeles. "Multiplicación de números enteros". Aritmética y geometría. Editorial Avante. México 1961. pp. 43 - 48.
- GUTIERREZ, Rufina. "Piaget y el curriculum de ciencias". Una Propuesta pedagógica para la enseñanza de las ciencias naturales. Antología UPN - SEP. México 1988. pp. 111 - 133.
- LELAND C., Swenson. "Jean Piaget: Una teoría maduracional-cogni-

- tiva" Teorías del aprendizaje. Antología UPN - SEP.
1a. Edición México 1986. pp. 205 - 216.
- LERNER de Zunino, Delia. "¿Qué es la MULTIPLICACION?". La matemática en la escuela III. Antología UPN - SEP. México 1988. pp. 129 - 135.
- NOT, Louis. "El conocimiento matemático". La matemática en la escuela II. Antología UPN - SEP. 1a. Edición México 1985. pp. 19 - 31.
- PIAGET, Jean. "Observaciones sobre la educación matemática". La matemática en la escuela I. Antología UPN - SEP. México 1985. pp. 320 - 326.
- ROZAN, José E. "Multiplicación". Aritmética y nociones de geometría. Editorial Progreso. México 1945. pp. 82 -86.
- SAINZ, Irma y David Block. "El Geoplano" Laboratorio de psicomatemática. DIE - CINVESTAV. México 1984. pp. 3 - 6.
- SANCHEZ Cerezo, Sergio. "Descripción de algunos materiales". Enciclopedia Técnica de la Educación Vol. III. Editorial Santillana. pp. 301 - 308.
- "Pedagogía operatoria". Diccionario de las Ciencias de la educación Vol. II. Editorial Santillana 2a Reimpresión 1985. pp. 1306 - 1307.
- SEP, "Comienzo de la multiplicación y propiedades". Mate-

máticas auxiliar didáctico para el segundo grado. México 1972. pp. 71 - 75.

“Importancia del material concreto en el aprendizaje de las matemáticas”. Libro para el maestro Matemáticas. México 1994. pp. 23 - 24.

“Enfoque de las matemáticas”. Plan y Programas de estudio de Educación Primaria. Fernández Editores. México 1993. pp. 51 - 59.

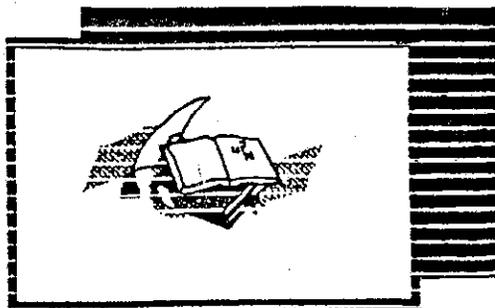
VIDALES Delgado,

Ismael. “La enseñanza de las matemáticas”. Auxiliar didáctico para segundo grado de educación primaria de acuerdo con el programa oficial. Guía para el maestro.

Editorial Larousse. México 1994. pp 18 -19.

ZOLTAN,

Dienes. Cómo utilizar los bloques multibase. Editorial TEIDE. España 1978. 2a. Edición. pp. 5- 17.



ANEXOS

De anexo 1 al anexo 10 ejercicios del libro del alumno de matemáticas de segundo grado vigente.

Anexo 11 tomado de la propuesta: El laboratorio de psicomatemática: La multiplicación: Las máquinas que multiplican y los arreglos rectangulares de Irma Fuenlabrada

A N E X O I

▼ Los niños compraron estampas para su álbum.

- ¿Cuántas estampas tiene cada sobre? _____
- Roberto compró 4 sobres. ¿Cuántas estampas tiene? _____
- Anita compró 6 sobres. ¿Cuántas estampas tiene? _____
- Tere compró 8 sobres. ¿Cuántas estampas tiene? _____

▼ Anota los resultados anteriores en la tabla siguiente y complétala.

| Sobres con 3 estampas | Total de estampas |
|-----------------------|--|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | 12  |
| 5 | |
| 6 | |
| 7 | |
| 8 | |
| 9 | |
| 10 | |





▼ ¿Cuántos sobres se pueden hacer con las estampas que aparecen arriba?

¿Sobran algunas estampas? _____

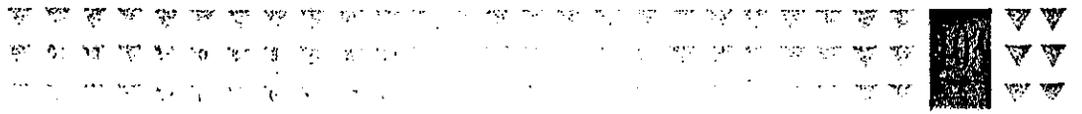
▼ Resuelve en tu cuaderno los siguientes problemas.

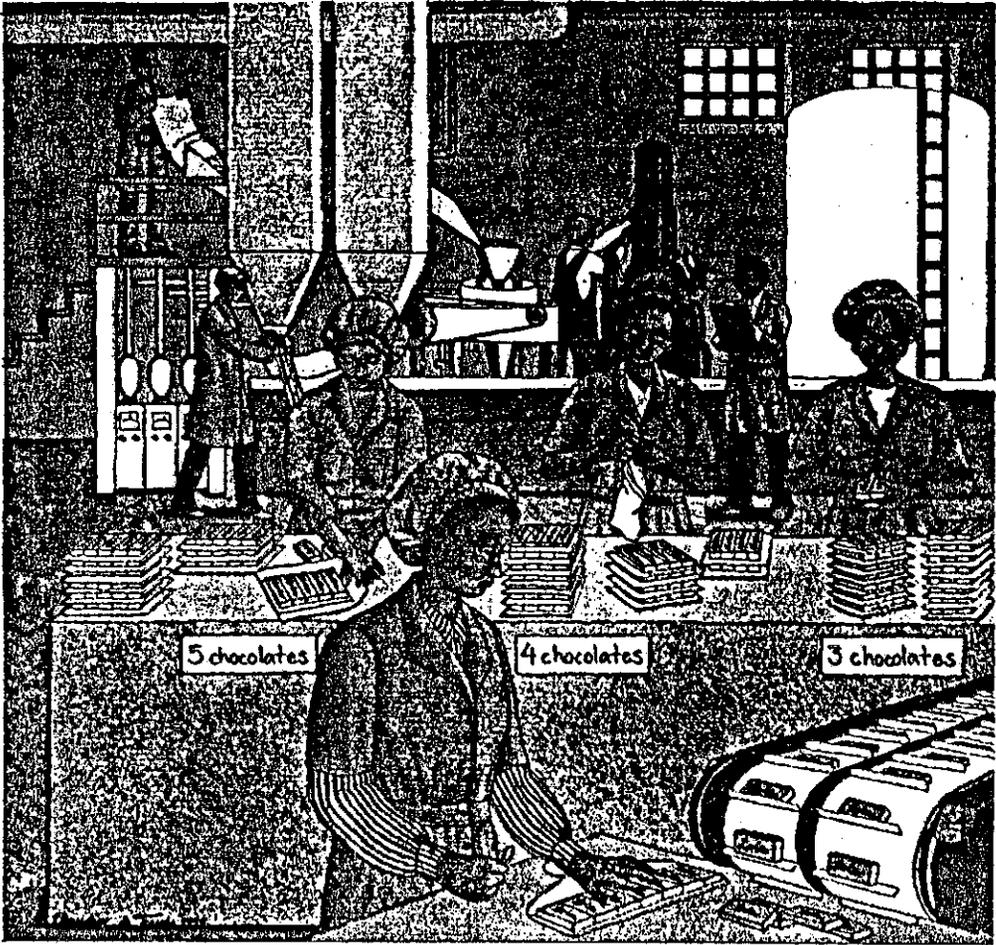
— Armando compró 8 sobres y se le perdieron 2 sobres.
¿Cuántas estampas le quedaron? _____

— Ramón compró 6 sobres y se le perdieron 9 estampas.
¿Cuántos sobres le quedaron? _____

— ¿Cuántos sobres compró Norma, si tiene 15 estampas? _____

— ¿Cuántos sobres compró Mari, si tiene 24 estampas? _____





- ▼ En la fábrica, los chocolates se empaican en bolsas con tres, cuatro, cinco y a veces más chocolates.
- ▼ Toma unas piedritas que vas a usar como chocolates y 7 tapas de frascos para empaicarlos.

- ▼ Haz paquetes con 3 chocolates cada uno y completa la tabla.

| | | | | |
|----------------------|---|---|---|---|
| Número de paquetes | 4 | 5 | 6 | 7 |
| Número de chocolates | | | | |

- ▼ Haz paquetes con 5 chocolates cada uno y completa la tabla.

| | | | | |
|----------------------|---|---|---|---|
| Número de paquetes | 3 | 2 | 8 | 1 |
| Número de chocolates | | | | |

- ▼ Haz paquetes con el número de chocolates que tú quieras. No pongas más de 10 chocolates. Completa la tabla.

| | | | | |
|----------------------|---|---|---|---|
| Número de paquetes | 4 | 3 | 2 | 5 |
| Número de chocolates | | | | |

▼ Completa la tabla.

- ▼ ¿Cuántos paquetes puedes formar con 30 chocolates, si en cada paquete pones 6 chocolates?
- _____
- _____

| Número de paquetes | Número de chocolates por paquete | Total de chocolates |
|--------------------|----------------------------------|---------------------|
|--------------------|----------------------------------|---------------------|

| | | |
|----|----|----|
| 2 | | 36 |
| | 12 | 36 |
| 4 | | 36 |
| | 6 | 36 |
| 9 | | 36 |
| | 36 | 36 |
| 12 | | 36 |
| 36 | | 36 |
| | 2 | |

- ▼ ¿Cuántos paquetes puedes formar con 30 chocolates, si en cada paquete pones 5 chocolates?
- _____
- _____
- _____



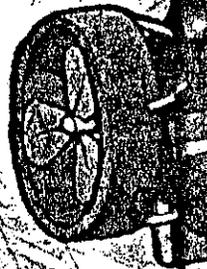
Hunde al submarino

A N E X O 3

- Toma del Rincón de las matemáticas tu **Cuadro de multiplicaciones**. Formen equipos de cuatro niños.

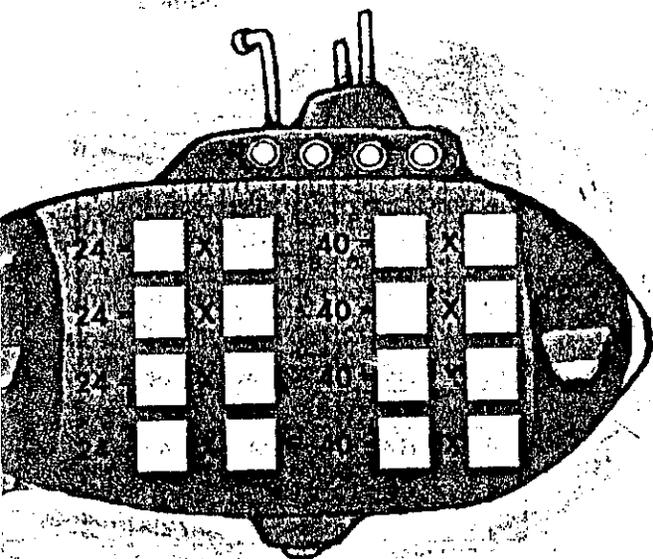
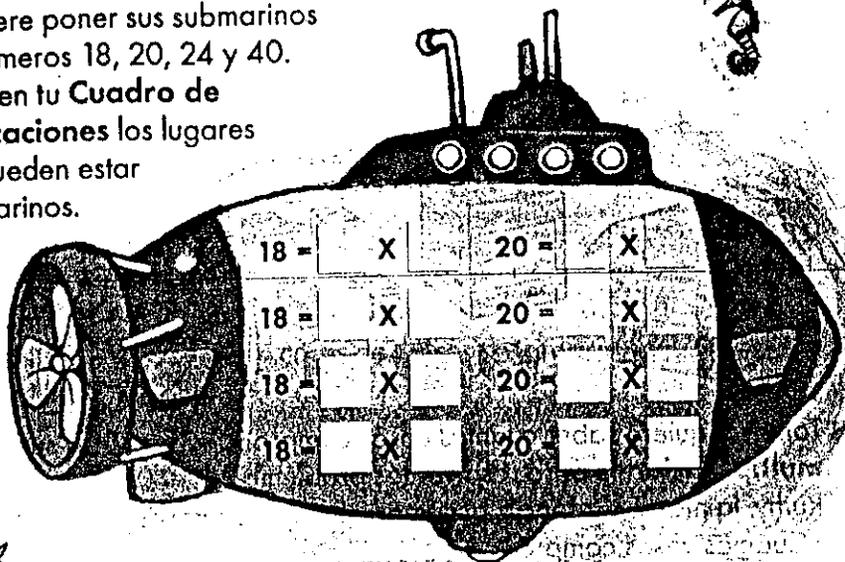
- Un niño coloca una piedrita en su **Cuadro de multiplicaciones**, sin que sus compañeros vean. Esa piedrita es el submarino.
- El niño dice al equipo el número donde colocó el submarino.
- Los niños del equipo anotan el número en la tabla de abajo.
- Buscan en su **Cuadro de multiplicaciones** todas las veces que aparece ese número y anotan en la tabla todas las multiplicaciones donde pueda estar el submarino.
- Por turnos, dicen las multiplicaciones que anotaron.
- El niño que puso el submarino dice en qué multiplicación está colocado el submarino.
- Encierran en un círculo la multiplicación donde estaba el submarino.

| El submarino está en el número | Multiplicaciones | | |
|--------------------------------|------------------|--------------|--------------|
| 16 | 4×4 | 2×8 | 8×2 |
| | | | |
| | | | |
| | | | |



- Continúan así hasta que todos hayan colocado un submarino en su **Cuadro de multiplicaciones**.

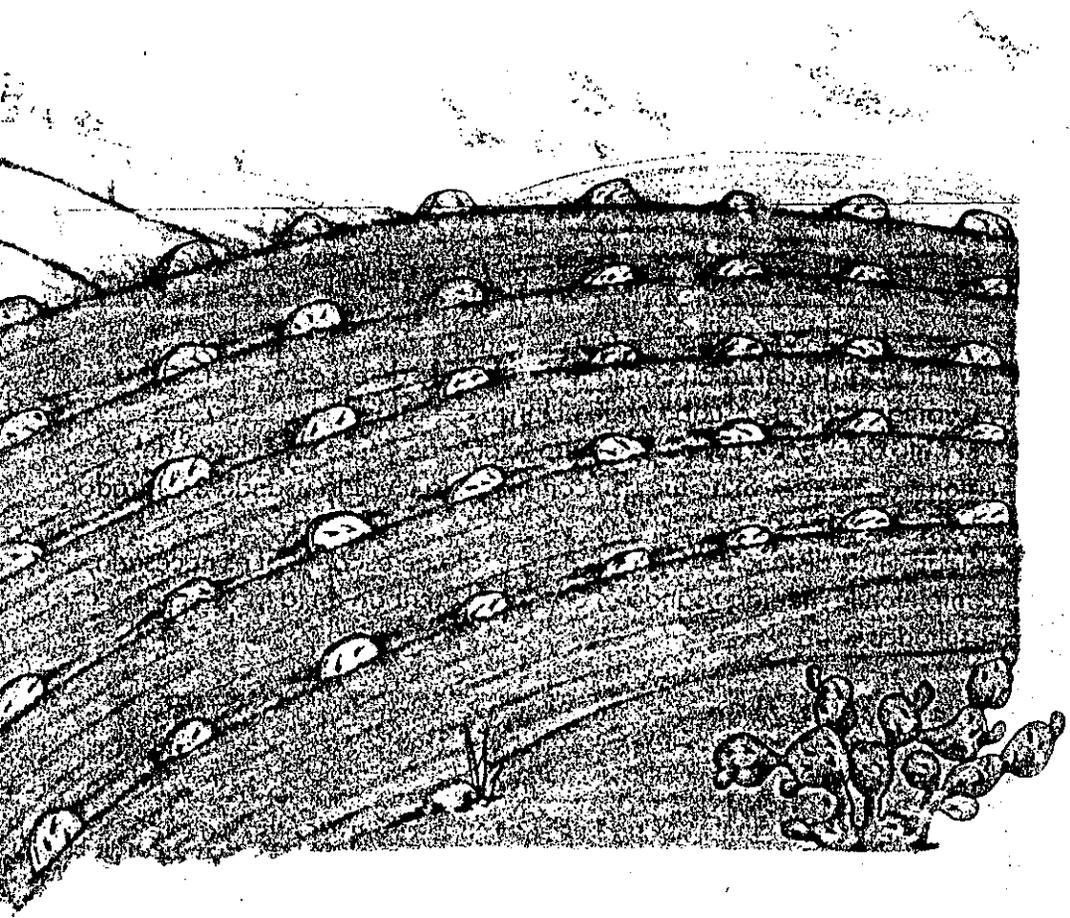
■ Jesús quiere poner sus submarinos en los números 18, 20, 24 y 40. Localiza en tu Cuadro de multiplicaciones los lugares donde pueden estar los submarinos.



Nopalitepec

ANEXO 4

★ Cipriano sembró una nopalera.

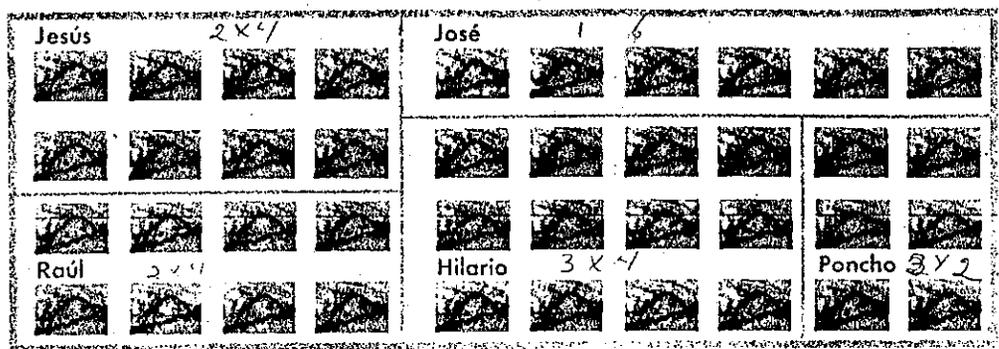


- ¿Cuántas hileras de nopales sembró? _____
- ¿Cuántos nopales hay en cada hilera? _____
- ¿Cuántos nopales hay en total? _____
- Cipriano sembró una nopalera de 5 X 8. ¿Estás de acuerdo? _____
- ¿Por qué? _____





★ Jesús y sus hermanos sembraron una nopalera de 4 X 10 nopales.

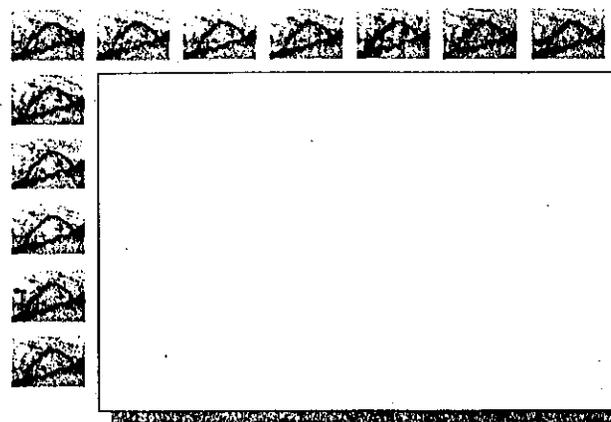


- ... ¿Quién sembró 2 X 4 nopales? _____
- ... ¿Quién sembró 6 nopales? _____
- ... ¿Quién sembró más nopales? _____
- ... ¿Cuántos nopales sembraron en total Jesús y sus hermanos? _____

★ Dibuja en tu cuaderno una nopalera que tenga 18 nopales.

★ Javier dibujó una nopalera, pero una hoja de papel está tapando parte del dibujo.

... ¿Cuántos nopales dibujó Javier en total?



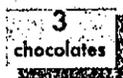
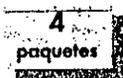
El Cuadro de multiplicaciones

ANEXO 5



- Tonatiuh construye un **Cuadro de multiplicaciones** para ahorrarle trabajo a los empaques de chocolates. En el Cuadro de multiplicaciones que aparece abajo, los números de la franja café indican la cantidad de paquetes y los números de la franja rosa indican la cantidad de chocolates que tiene cada paquete. En los cuadrillos vacíos se anota el total de chocolates.

A Tonatiuh le salen las siguientes tarjetas y calcula el total de chocolates.



$$4 \times 3 = 12$$

- Tonatiuh coloca una parte del señalador abajo del número 4 de la franja café y la otra parte del señalador la coloca a un lado del número 3 de la franja rosa. En el cuadro de la esquina, como se ve en el dibujo, anota el resultado que es 12.

| | 0 | 1 | 2 | 3 | | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|----|---|---|---|---|----|---|---|---|---|---|----|
| 0 | | | | | | | | | | | |
| 1 | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | 12 | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | | |

Brinca la tabla

ANEXO 6

- Teresa brincó de 4 en 4 desde el cero y pintó de verde las series en su Cuadro de multiplicaciones.
- En el Cuadro de multiplicaciones de la derecha brinca de 7 en 7 desde un cero y pinta de azul las series.
 - Brinca de 9 en 9 desde un cero y pinta de café las series.
 - Brinca de 2 en 2 desde un cero y pinta de morado las series.

| X | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|----|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 2 | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 |
| 3 | 0 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | 30 |
| 4 | 0 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 | 40 |
| 5 | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 |
| 6 | 0 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 | 60 |
| 7 | 0 | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 | 70 |
| 8 | 0 | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 | 80 |
| 9 | 0 | 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 | 90 |
| 10 | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |

- Juega con un compañero. Cada uno, tome del Rincón de las matemáticas el Cuadro de multiplicaciones y los Cuadritos de colores.

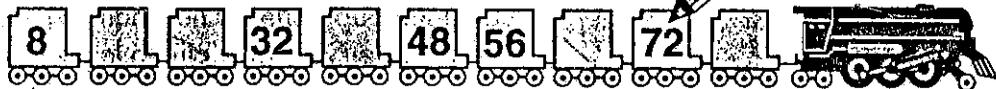
Por turnos, digan un número entre cero y 10.

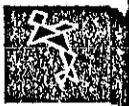
En su Cuadro de multiplicaciones, cada uno busque las dos series de ese número y tápenlas con sus Cuadritos de colores.

El que termine primero dice ¡alto!

Verifiquen los resultados.

- Escribe los números que les faltan a las series.





■ Toma del Rincón de las matemáticas tu **Señalador**.

En tu **Cuadro de multiplicaciones** vacío, anota los resultados de las siguientes cuentas. Usa tu **Señalador** como lo hizo Tonatiuh.

3 paquetes 6 chocolates
 $3 \times 6 = \square$

3 paquetes 7 chocolates
 $3 \times 7 = \square$

3 paquetes 2 chocolates
 $3 \times 2 = \square$

3 paquetes 4 chocolates
 $3 \times 4 = \square$

3 paquetes 1 chocolate
 $3 \times 1 = \square$

3 paquetes 3 chocolates
 $3 \times 3 = \square$

3 paquetes 5 chocolates
 $3 \times 5 = \square$

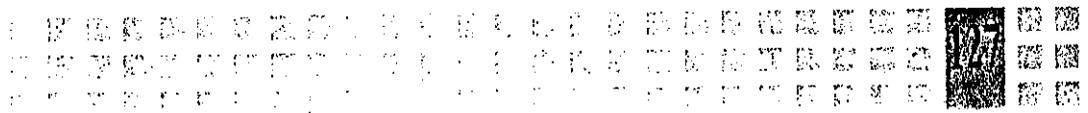
3 paquetes 9 chocolates
 $3 \times 9 = \square$

3 paquetes 10 chocolates
 $3 \times 10 = \square$

3 paquetes 8 chocolates
 $3 \times 8 = \square$

En el renglón del 3, ¿te quedó la serie de 3 en 3? _____

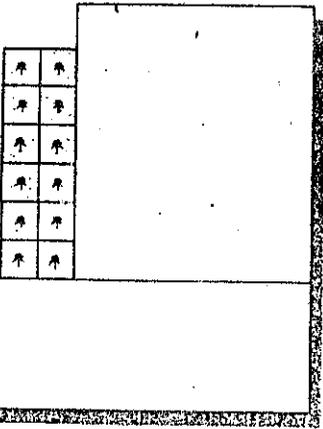
■ Durante los siguientes días, al empezar la clase de matemáticas, vayan llenando su **Cuadro de multiplicaciones**. Resuelvan un renglón por día.



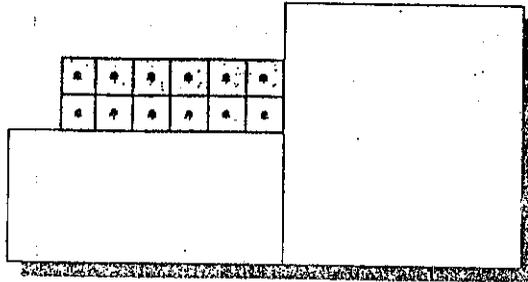


★ Toma del Rincón de las matemáticas tu cuadrícula de **Las margaritas** y dos hojas blancas.

Fíjate cómo tapa Tonatiuh con dos hojas de papel la cuadrícula de **Las margaritas**, para obtener la pared de mosaicos 6×2 y la pared de mosaicos 2×6 .



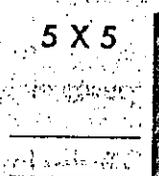
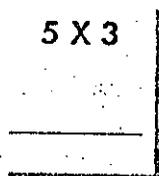
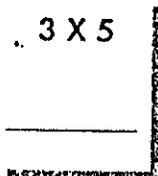
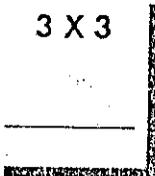
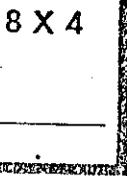
Pared de mosaicos 6×2



Pared de mosaicos 2×6

¿Cuántas margaritas hay en cada una de las paredes? _____

★ Forma en tu cuadrícula de **Las margaritas** las siguientes paredes de mosaicos. Escribe si la pared tiene la forma de un rectángulo o de un cuadrado.





9 X 9

7 X 6

4 X 4

6 X 7

2 X 7

6 X 5

9 X 1

7 X 7

* Con tu cuadrícula de **Las margaritas** forma ahora paredes rectangulares o cuadradas que tengan 24 margaritas, 12 margaritas, 36 margaritas y 20 margaritas.
 ¿Cuántas paredes diferentes hiciste con 36 margaritas? _____

* Formen equipos de cuatro niños. En la tabla de la derecha juegen al *Basta numérico* con multiplicaciones. Se juega igual que el *Basta numérico* que ya jugaron con sumas y restas, pero ahora las cuentas son multiplicaciones.

| | X 5 | X 3 | X 4 | X 6 | Resultados correctos |
|--|-----|-----|-----|-----|----------------------|
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |



Completa las series

ANEXO 9

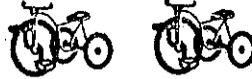
▼ ¿Cuántos triciclos hay?



¿Cuántas llantas hay en total? _____



Cuenta de 3 en 3 y completa la serie.



| | | | | | | | | | | |
|--|--|---|--|----|--|--|----|--|--|--|
| | | 9 | | 15 | | | 24 | | | |
|--|--|---|--|----|--|--|----|--|--|--|

▼ ¿Cuántos coches hay?



¿Cuántas llantas hay en total? _____



Cuenta de 4 en 4 y completa la serie.

| | | | | | | | | | | |
|--|---|--|--|----|--|--|--|----|--|--|
| | 8 | | | 20 | | | | 36 | | |
|--|---|--|--|----|--|--|--|----|--|--|

▼ ¿Cuántos edificios hay?



¿Cuántas ventanas hay en total? _____

Cuenta de 5 en 5 y completa la serie.

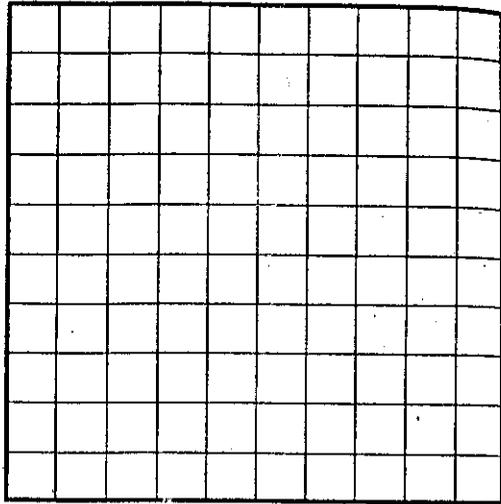
| | | | | | | | | |
|--|--|----|--|----|--|--|----|--|
| | | 15 | | 25 | | | 40 | |
|--|--|----|--|----|--|--|----|--|



■ Recorta tus **Cuadritos de colores** y toma del Rincón de las matemáticas tu **Cuadrícula numérica**.

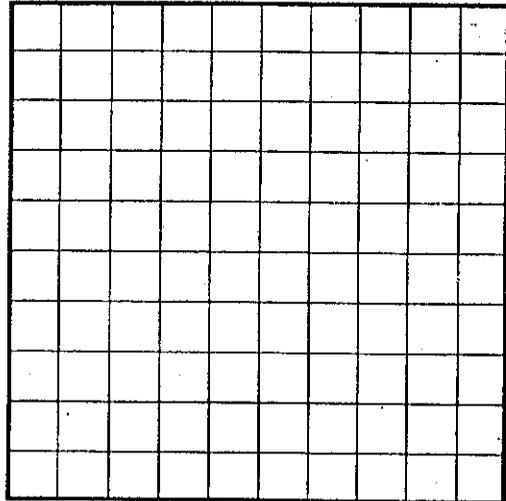
En tu **Cuadrícula numérica** tapa con un cuadrado rosa el número 2, tapa con otro cuadrado rosa el 4. Continúa tapando los números de la serie de 2 en 2 hasta llegar al 100.

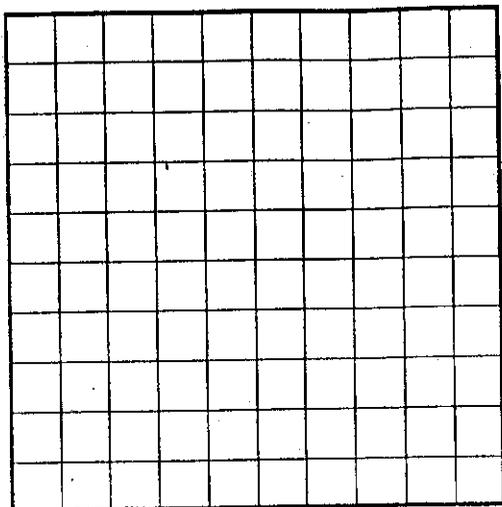
Pinta en la cuadrícula de la derecha cómo quedaron colocados los cuadrados rosas.



■ En tu **Cuadrícula numérica** tapa con un cuadrado morado el número 3, suma tres y coloca otro cuadrado morado arriba del 6. Sigue tapando los números de 3 en 3 hasta terminar en el 99.

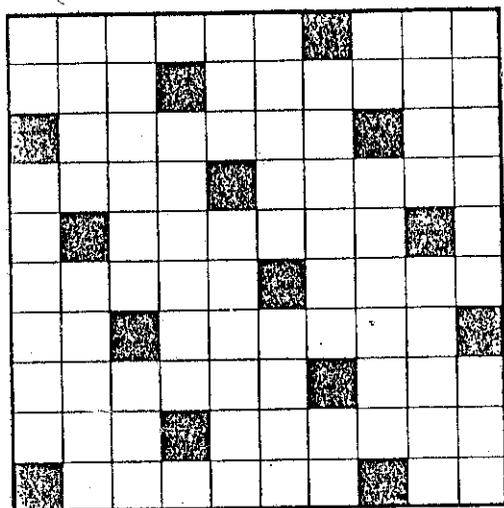
Pinta en la cuadrícula de la derecha cómo quedaron colocados los cuadrados morados.





■ En tu Cuadrícula numérica coloca en el número 4 un cuadrado rosa, suma cuatro y coloca otro cuadrado rosa en el 8. Sigue así hasta llegar al 100.

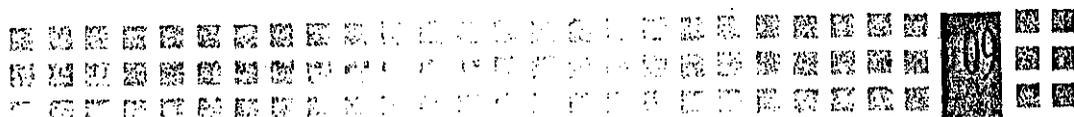
• Pinta en la cuadrícula de la izquierda cómo quedaron los cuadrados rosas.



■ En tu Cuadrícula numérica localiza los números que en la cuadrícula de la izquierda están tapados con un cuadrado morado.

¿Cuál es la serie numérica que se formó? _____

■ Con el grupo y tu maestro, vayan diciendo por turnos qué números están en la serie del 7.



A N E X O 11

ANEXO PARA LAS CUATRO FICHAS DE LA PROPUESTA DEL LABORATORIO DE PSICOMATEMATICA "LA MULTIPLICACIÓN: LAS MAQUINAS QUE MULTIPLICAN Y LOS ARREGLOS RECTANGULARES".

MATERIAL 1

4 TRAPECIOS AMARILLOS

4 TRAPECIOS ROSAS

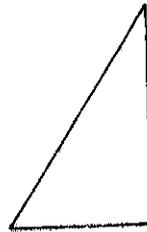
4 TRAPECIOS AZULES

4 TRAPECIOS NEGROS

5 TRIANGULOS AMARILLOS

5 TRIANGULOS VERDES

5 TRIANGULOS ROSAS



MATERIAL 2

40 CORCHOLATAS AZULES

30 CORCHOLATAS ROJAS

20 CORCHOLATAS NARANJA

15 CORCHOLATAS VERDES

10 CORCHOLATAS CAFE

EN SU DEFECTO CIRCULOS DE CARTONCILLO

MATERIAL 3

PAPEL DE CUADRICULA GRANDE