UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

SECRETARÍA ACADÉMICA
COORDINACIÓN DE
POSGRADO

MAESTRÍA EN DESARROLLO EDUCATIVO

"Taller virtual para ampliar el conocimiento matemático y pedagógico de los decimales en futuros profesores de primaria".

Tesis que para obtener el
Grado de**:Maestro en
Desarrollo Educativo**

Presenta

Juan José Sánchez Tapia

Directora de tesis: Dra. Alicia Ávila Storer

México, D.F. 2022

Agradecimientos

A mi asesora, la Dra. Alicia Ávila Storer, por sus valiosas orientaciones. Su dirección, confianza, enorme capacidad intelectual, así como habilidad para ampliar el conocimiento, me hicieron crecer matemática y pedagógicamente.

Al Mtro. Jesús, quien hizo posible el acercamiento con los participantes del taller. Su noble y distinguida forma de llevar a cabo la formación de futuros docentes sigue dando frutos.

A los ocho estudiantes para profesor, por su invaluable apoyo y participación en el desarrollo de las actividades propuestas para el taller.

A la sublime e inigualable Escuela Normal Rural de Zacatecas.

A mis lectores, por la lectura detallada, acertadas observaciones y sugerencias a este documento.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por su apoyo económico —beca nacional— que contribuyó a la realización de esta tesis.

Índice

Introducción

Introducción

Actualmente los números más utilizados para resolver problemas de la vida cotidiana son los naturales y los decimales. En lo que respecta a los decimales, es Stevin quien les da el carácter de noción matemática mostrando una forma de hacer más fáciles los cálculos sin recurrir a las fracciones y que con el tiempo (por problemas de tipografía) su idea de representación de número decimal se convirtió en la convención actual, números que se pueden expresar con punto. Así, se teorizó a los números decimales como objeto de conocimiento y pasaron a ser susceptibles de ser enseñados.

En el mundo, los decimales tienen una enorme cantidad de aplicaciones prácticas. Normalmente, las personas encuentran sentido a los números decimales en prácticas de la medición, comercio y finanzas.

En cuanto a la educación matemática, en México, los decimales aparecen en los libros de texto gratuito para primaria desde 1960. Sin embargo, tal como argumenta Avila (2008), en la cultura del sistema escolar mexicano se señala a estos números como un tema no complejo —en comparación con otros contenidos— otorgándole poco espacio, así como poca preocupación en el currículo y en las prácticas de enseñanza.

Por el contrario, las evaluaciones nacionales de los últimos años muestran que los estudiantes que egresan de sexto grado de primaria no tienen una buena comprensión de los decimales. También se tienen evidencias de que algunos profesores ofrecen una enseñanza que obstaculiza dicha comprensión: les interesa que los alumnos aprendan y memoricen los nombres de columnas después del punto; dejan fuera a las fracciones decimales, obviando que es una forma de representar los decimales; explican operaciones de forma abstracta para que los alumnos reproduzcan los procedimientos en ejercicios similares; y, no proponen establecer conexiones entre representaciones visuales y simbólicas para favorecer el entendimiento del valor de los decimales.

A lo anterior, se puede sumar que existen estudios que exponen una débil comprensión de los decimales por parte de estudiantes de Licenciatura y profesores en servicio (Stacey, 2004; Widjaja, 2008; Avila, 2008; Suárez, 2017; Barriendos, 2019). Por lo que se constata que el sistema educativo, en lugar de otorgar lo necesario a los alumnos para superar los conceptos erróneos, los va cubriendo. Esto último, es relevante, pues son los profesores quienes heredarán a sus futuros alumnos los conocimientos matemáticos de los decimales.

Es por ello que la intención de esta investigación se centró en ampliar el conocimiento matemático y pedagógico de estudiantes de la Licenciatura de Educación Primaria. Con tal fin, se llevó a cabo con un taller cuyos asistentes fueron ocho estudiantes para profesor matriculados en una Escuela Normal Rural del estado de Zacatecas. Se logró que los asistentes transitaran de un estado de menor conocimiento a uno más amplio sobre los decimales, con base en el modelo del Conocimiento Matemático para la enseñanza (MKT, por sus siglas en inglés) desarrollado por Ball y sus colaboradores. Esta transición responde al desarrollo de siete sesiones cuyos propósitos eran trabajar matemática y pedagógicamente distintos aspectos de los decimales.

La investigación que aquí se reporta es resultado del análisis del dominio de conocimientos que tienen los futuros profesores acerca de los decimales. Estos conocimientos se pusieron en evidencia y se accionaron en un proceso de construcción y reconstrucción a través del desarrollo de las actividades propuestas en el taller. Lo anterior, con el afán de superar conceptos erróneos y dificultades con los decimales, logrando ampliar los conocimientos matemáticos y pedagógicos sobre dichos números.

Esta tesis, se compone de cuatro capítulos. El primero se titula *El Proyecto de Investigación* en el cual, en un principio, se describe históricamente y se muestran las definiciones elaboradas por matemáticos y didactas acerca de los decimales. Este capítulo continúa presentando los resultados de investigaciones previas sobre: las dificultades para entender a los decimales, los profesores y los decimales, los profesores en formación y los decimales. Además, se analizan los resultados de evaluaciones nacionales, de los últimos 10 años, en específico de los contenidos de matemáticas haciendo énfasis en los temas alrededor de los decimales. Otro elemento para destacar de este capítulo es la descripción de la selección de contenidos referente a los decimales que conforman los planes y programas propuestos para la enseñanza de cuarto, quinto y sexto grados de primaria, así como el análisis de los libros de texto *(Desafíos matemáticos)*.

Los datos anteriores sirvieron para orientar el diseño del objetivo de la tesis: El desarrollo de un taller virtual con futuros profesores de educación primaria orientado a mejorar su conocimiento matemático y pedagógico sobre los números decimales. De igual manera, esos datos permitieron establecer un fundamento pedagógico para llevar a cabo el taller, gracias al modelo de Deborah Ball y sus colaboradores: *Mathematical knowledge for teaching* (MKT).

En el segundo capítulo, *Metodología para la intervención*, en un inicio se resume el concepto de intervención educativa y se detallan las cuatro fases por las cuales está conformado el proyecto de intervención (taller). Debido a que dicha intervención tuvo como participantes a estudiantes de una escuela normal rural, se muestran rasgos característicos de estas escuelas. Posteriormente, se exponen las características de los participantes y se presentan los resultados de la exploración de sus conocimientos previos acerca de los decimales por medio de un instrumento de evaluación diagnóstica. Dicho instrumento se aplicó en una sesión previa al inicio del taller. Finalmente, en este capítulo, se presenta el diseño de las actividades desarrolladas durante el taller.

En el capítulo tres, *Desarrollo del taller*, se presenta la descripción del taller virtual a partir de la recuperación de las evidencias y la transcripción de las participaciones en las siete sesiones llevadas a cabo. Estas sesiones se organizaron de la siguiente manera: comparar y ordenar números decimales; eliminar el inadecuado criterio de tomar la cantidad de cifras para definir si un decimal es mayor que otro; representar un decimal mediante un área o en la recta numerica; efectuar operaciones con expresiones decimales finitas y expresiones $\frac{a}{b}$ para encontrar equivalencias; percibir el efecto de las multiplicaciones y divisiones usando decimales positivos menores que uno; identificar la propiedad de densidad de los decimales; plantear problemas que se resuelvan utilizando los decimales.

Finalmente, en el capítulo cuatro, se expone el apartado de las *Conclusiones* a las que se llegaron. Por un lado, los conocimientos adquiridos durante el taller. Por otro, la participación del conductor (la forma en que se dirigió cada una de las sesiones). Y, finalmente, las limitaciones, los retos que implicó el desarrollo del taller a través de medios virtuales.

Capítulo 1. El proyecto de investigación

El aprendizaje de las matemáticas por parte del estudiante depende fundamentalmente de lo que acontece dentro del salón de clases, en función de cómo interactúan los docentes y los educandos con el currículo.

(Ball y Forzani 2011)

Capítulo 1. Proyecto de la investigación

En la educación primaria, en México, los números decimales no son considerados por los profesores como un problema de enseñanza importante, ni en cuanto a los conocimientos matemáticos de los alumnos, ni en la manera de enseñarlos, esto en comparación con otros contenidos, como las fracciones. En consecuencia, los tiempos para planear su enseñanza, así como para promover el aprendizaje de esos números es muy reducido.

De manera distinta a lo que se cree, es posible identificar en las pruebas nacionales bajos niveles de comprensión de los decimales e investigaciones que exponen problemas con los conocimientos pedagógicos en los profesores sobre este tema. Además, se puede agregar que los libros de texto gratuitos actualmente vigentes (*Desafíos matemáticos*) ponen mayor énfasis en el cálculo que en el concepto de decimal. Los elementos anteriores me parecen suficientes para reconocer a los decimales como un tema de investigación relevante en la didáctica de las matemáticas.

El presente proyecto analiza los materiales distribuidos por la Secretaría de Educación Pública para la enseñanza de las matemáticas en grados superiores de educación primaria, específicamente en los contenidos que corresponden a la enseñanza de los decimales. Identifica los resultados de exámenes nacionales aplicados por el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación sobre este contenido, conjuntamente con los estudios realizados a niños y profesores identificando que a los primeros les resultan difíciles de aprender y los últimos muestran poco conocimiento matemático y pedagógico sobre ellos. En virtud de todo lo anterior se plantea el siguiente objetivo para la realización de esta tesis:

El desarrollo de un taller virtual con futuros profesores de educación primaria orientado a mejorar su conocimiento matemático y pedagógico sobre los números decimales.

1.1.Referentes teóricos

1.1.1. El concepto de número decimal

Bajo la necesidad de facilitar los cálculos con fracciones decimales, se inventó la escritura con punto de estas fracciones, dando lugar a lo que conocemos como los números decimales. Esta representación se caracteriza por utilizar el principio del valor de posición, así como por extender este principio a la escritura de números menores que la unidad. Este sistema de escritura numérica se emplea en muchísimas áreas de la actividad y del conocimiento humano, la más visible quizás es la medición.

Simón Stevin es el nombre que remite a los inicios de la difusión de esta innovación. En el año de 1585, el matemático belga, introduce los números decimales y su aritmética a partir de una publicación editada en los idiomas utilizados en su ciudad natal Brujas: *De Thiende* en neerlandés y *La Disme* en francés. El objetivo de este trabajo era facilitar las prácticas de los cálculos diarios al utilizar cantidades menores que la unidad, el cual permitió extender el sistema de base 10 utilizando la escritura de los naturales a las fracciones decimales. Stevin utilizó algunos símbolos para indicar la parte entera y la parte menor a la unidad de estos números. Identificó a los enteros como principios ⓪, los décimos eran primas ①, los centésimos eran segundas ② y los milésimos eran terceras ③… como se ve a continuación[1]:

Número: 8.5429

Notación de Simon Stevin: 8⓪5①4②2③9

Años más tarde, según indican Barriendos y Mendoza (2012), en 1617, en Escocia, John Napier hizo más compacta la notación de Stevin utilizando solo un punto para separar la parte entera de los décimos, centésimos, milésimos… en su tabla de logaritmos. Sin embargo, Leibniz (inventor del cálculo diferencial) utilizó la coma en los decimales para dejar el punto como signo de la multiplicación y no confundirlo con el símbolo *"X"* que usaba para referirse a la incógnita. Así, la idea de números con coma comenzó a extenderse por toda Europa y hoy en día es una de las formas de expresar estos números en los países europeos. En cambio, en países como México[2], Estados Unidos, Canadá e Inglaterra (estos últimos países angloparlantes): se usa el punto y no la coma. Esto probablemente por el legado del escocés Napier[3].

[1] Las referencias sobre Stevin fueron tomadas de Waldegg (1996)
[2] En adelante números que se pueden expresar mediante el punto.
[3] Las referencian sobre la difusión de los números con punto o con coma puede consultarse en: https://aprendiendomatematicas.com/uso-de-la-coma/

Ahora bien, no se debe considerar que un número por tener punto sea decimal, ni tampoco que todos los que no lo tienen no lo sean. Por lo que es necesario definirlos y de eso se han encargado distintos matemáticos y didactas:

- Brousseau (1980) plantea que, una forma de construir los decimales es mediante la solución de la siguiente ecuación $10^n \cdot x = z$, esto es, $x = \frac{z}{10^n}$ donde *z* es un número entero y *n* un número natural. Así, los decimales son los racionales que se pueden escribir mediante una fracción decimal cuyo numerador es entero y el denominador es 10, 100, 1000… (una potencia de 10). Por ejemplo: en $10^2 \cdot x = 4$ la x es igual a $\frac{4}{100}$.

- Castro (2001) menciona que los decimales pertenecen al conjunto de los racionales y, por tanto, tienen la característica de expresar cantidades que no corresponden a una unidad completa.

- Según Centeno (1997), los números decimales se pueden construir una vez definida la estructura general de los racionales, considerando solo una parte de sus elementos. Esa parte puede corresponder a los decimales, que son los racionales que se pueden escribir en forma de fracción decimal.

- En términos de Courant y Robbins (2002):

Si una fracción decimal contiene *n* cifras después de la coma, tiene la forma

$$f = z + a_1 10^{-1} + a_2 10^{-2} + a_3 10^{-3} \ldots + a_n 10^{-n}$$[4]

donde *z* es un número entero y las *a* son cifras —0,1,2…, 9— que indica las décimas, centésimas, y así sucesivamente. El número se representa en el sistema decimal en la forma abreviada z, $a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$. Se ve inmediatamente que estas fracciones pueden escribirse en forma de fracción $\frac{p}{q}$, siendo q= 10^n. Si p y q tienen un divisor común, la fracción podrá

[4] Courant y Robbins mencionan que 10^{-n} significa $\frac{1}{10^n}$

reducirse a otra cuyo denominador será divisor de 10^n. (p.86)

- Finalmente, los números decimales son aquellos que se pueden escribir mediante una expresión decimal finita, esto es, que tiene un número determinado de cifras a la derecha del punto (Sainz et al., 2011).

Como se ve, las definiciones de decimal han sido muchas, pero podemos decir que coinciden en que son números que tienen al menos una expresión con denominador potencia de 10.

1.1.2. Los decimales como parte del conjunto de los racionales

Las fracciones, las fracciones decimales y los naturales, al pertenecer al conjunto de los racionales, guardan ciertas relaciones unos con otros, pero también tienen características que los hacen distinguirse unos de otros.

a) Una fracción se puede representar mediante un decimal. Como expresa Freudenthal (1983), cuando una fracción en su mínima expresión[5] tiene solo al 2 y 5 como factores primos del denominador es posible representarla mediante una fracción decimal y, por tanto, mediante una expresión finita. Por ejemplo, $\frac{1}{8}$ es una fracción que tiene al 2 como factor primo del denominador. En este caso, se puede obtener una fracción decimal $\frac{1}{8} = \frac{1\times125}{8\times125} = \frac{125}{1000}$, así mismo, al dividir el numerador entre el denominador hay una expresión decimal finita $1 \div 8 = 0.125$.
b) Con base en García (2014), un número puede ser natural, entero positivo y decimal al mismo tiempo. Por ejemplo, el 2: es natural, entero positivo y fracción decimal $\frac{20}{10}$.

1.1.3. Expresiones decimales periódicas y no periódicas.

De acuerdo con Saiz et al. (2011), existen tres tipos de expresiones decimales: las finitas (que representan números decimales), las periódicas (que corresponden a los racionales que no son

[5] En una fracción en su mínima expresión su numerador y denominador son primos relativos.

decimales) y las no periódicas (números irracionales). A continuación, se muestran las diferencias entre expresiones periódicas y no periódicas.

a) Expresiones decimales periódicas. Existen fracciones de las que en su mínima expresión no es posible encontrar una fracción decimal equivalente ($\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{9}$, etc.). En ese sentido, al dividir el numerador entre el denominador el resultado es una expresión decimal infinita $\frac{1}{3}$ = $0.33\overline{3}$. Este tipo de expresiones, se les conoce como periódicas: el número después del punto se repite constantemente[6] ($\frac{1}{7}$ = $0.\overline{142857}$).
b) Expresiones decimales no periódicas. Cuando calculamos las veces que cabe el diámetro en la circunferencia de un círculo cualquiera, el resultado es la constante π. Es común encontrar su valor aproximado: 3.1416 para hacer más sencillas las tareas matemáticas. Sin embargo, el valor numérico es 3.141592653… el cual no se considera racional al no poderse expresar en la forma $\frac{a}{b}$ (Courant y Robbins, 2002). Este tipo de expresiones son una forma de representar a los irracionales, se les conoce como no periódicas: el número después del punto es infinito, pero no se repite constantemente. Otro ejemplo es la razón entre la diagonal y el lado de un cuadrado cuyo resultado es $\sqrt{2}$ (1.414213…).

La confusión de considerar las expresiones decimales periódicas y no periódicas como números decimales impacta al tratar de comprender lo que es un número decimal. En el ámbito educativo, no solo circula esta idea en gran parte de los alumnos de educación básica y media superior, también los profesores tienen esa creencia (como se menciona más adelante). Por ello, es fundamental brindar una formación a los futuros docentes, así como los que ya están en servicio para fortalecer su conocimiento matemático y pedagógico con el objetivo de mejorar las prácticas de enseñanza vinculadas a los números decimales.

[6] Saiz et al. (2011) menciona que: “Algunos números racionales que son periódicos, como 4.5999… poseen una expresión decimal finita, en este caso 4.6 y, por consiguiente, se identifican como números decimales” (p.136). Cabe aclarar que son los números expresados con punto cuyo periodo es un 9 o un 0. Esto no es tema de esta tesis, que trata de los conocimientos para enseñar en la educación básica.

1.2.Dificultades para entender los decimales

En las últimas décadas, diversos estudios mexicanos acerca de los números decimales han identificado que los estudiantes de primaria, de cuarto a sexto grados, presentan dificultades al tratar de comprenderlos. La naturaleza de esas dificultades se debe en buena medida a que los estudiantes de esos grados asignan características de los naturales a los decimales. Este fenómeno, a juicio de Brousseau (1988), surge por lo siguiente:

> Por una parte, se parecen tanto a los naturales que es muy fácil emplearlos y aprender muy pronto una cierta manera de usarlos: fueron inventados para eso. Pero, por otra parte, esta primera comprensión se convierte en obstáculo para un uso más refinado y para una buena comprensión de cuestiones fundamentales para el estudio de las matemáticas (Brousseau, en Centeno, 1997, p. 13).

En tal sentido, las concepciones que tienen los estudiantes de primaria acerca de los naturales son extendidas a los decimales generando un obstáculo para su comprensión. Dicho de otra manera, los conocimientos previos dificultan el enfrentarse con las nuevas tareas que involucran el uso de los decimales, debido a que, dicho subconjunto numérico tiene características propias diferentes de las de los naturales. Constituye, pues, un fuerte esfuerzo didáctico, por parte del docente, lograr que los niños distingan las diferencias entre ambos números. Este esfuerzo debe comenzar por reconocer los aspectos problemáticos en el aprendizaje de los decimales.

En vista de lo anterior, es oportuno documentar a detalle las dificultades que presentan los alumnos, de los últimos grados de la primaria, al realizar tareas que implican comprender el concepto de decimal.

1. *Distintas representaciones*. De manera frecuente, los estudiantes de los últimos tres grados de primaria (cuarto, quinto y sexto), consideran a los decimales como aquellos que se pueden representar mediante un punto que divide la parte entera de la fraccionaria. Al concebirlos de esa forma, los estudiantes, se encuentran ante dos errores al tratar de entenderlos. El primer error es que, no son los únicos números que cumplen con esta característica; anteriormente se mencionó que números como π (3.141592…), perteneciente al conjunto de los irracionales, también se expresan con punto. El segundo entendimiento erróneo tiene que ver con tener una percepción limitada de los decimales, números que se pueden representar mediante la notación con punto, pero que también son susceptibles de representarse de muchas otras formas (por ejemplo, con

fracciones, como puntos sobre la recta, o mediante áreas). Esto implica un reto para la enseñanza y un gran conflicto para el aprendizaje, puesto que, los decimales cumplen con la característica de *pluralidad de representaciones,* gracias a la noción de equivalencia (0.8 = $\frac{8}{10}$ = $\frac{4}{5}$, etcétera).

2. *Lectura y escritura*. Al respecto, Carpenter (cit. en Centeno, 1981), en uno de los primeros estudios sobre el tema reportó que un porcentaje considerable de alumnos de entre 9 y 13 años piensa que cuando se habla de milésimos se deben escribir números enteros con tres ceros. Ante la pregunta: ¿Cuál de los siguientes números es 37 milésimos?, la mayoría eligió el número 37000[7]. Esta autora, también puso en evidencia que al proponer la tarea de escribir tres centésimas se presentan errores como los siguientes: 0.300, 3.00, 3.100. Además, agregó que los estudiantes se inclinan a escribir secuencias como la siguiente: 0.1,0.2, 0.3…0.9, 0.10 considerando el orden de los naturales. Estos datos indican que “el sistema de numeración decimal no ha sido instalado convencionalmente en los niños […] y estos resultados se repiten cuando se trata de la escritura de los números decimales menores que la unidad” (Centeno, 1997, p. 137)

Quizá un factor que obstaculiza el aprendizaje del valor que representa cada cifra en la parte fraccionaria de un número decimal sea que, en un principio los profesores se centran en una enseñanza *nominalista*[8], esto es, establecer los nombres de las columnas en las cuales está posicionado el número para luego pasar a operar con ellos, porque creen que los algoritmos son de mayor importancia que la comprensión en sí de estos números.

3. *Comparación y orden*. La cantidad de cifras en los decimales no es relevante para determinar si un número es mayor o menor que otro, como sí lo es para los naturales. En el contexto escolar esta diferencia enfrenta a los alumnos a un desafío, pues insisten en aplicar aspectos propios de los naturales a los decimales. Al poner en comparación números decimales cuya cantidad entera es igual, los alumnos inmediatamente fijan su atención en las cifras después del punto. Así, según la cantidad de cifras que posee el decimal después del punto consideran si es mayor o menor que otro. Por ejemplo, es frecuente que consideren que $7.700 < 7.7000$ porque en la parte decimal el 700 tiene tres cifras y 7000 tiene cuatro. Otro caso sería la confusión entre el orden de 0.05 y 0.005

---

[7] Investigación realizada por Carpenter (1981), citado por Centeno (1997).
[8] Concepto planteado por Avila 2013.

donde se piensa, que al igual que los naturales, los ceros a la izquierda no alteran el valor del número y, por tanto, son equivalentes.

En la investigación de Valencia (2014), también se identificó que los estudiantes de sexto de primaria presentan ideas erróneas para reconocer que la parte fraccionaria de un decimal se define en función del valor de cada una de las cifras (un décimo es la décima parte, un centésimo la centésima parte y el milésimo la milésima parte de la unidad). Se encontró que los estudiantes no fueron capaces de ordenar de mayor a menor las cantidades que implicaban: décimos, centésimos, milésimos y enteros en un instrumento de evaluación diagnóstica. Un ejemplo es que muchos estudiantes consideran de manera equivocada que $0.3 < 0.15$ porque en el orden de los naturales 15 es mayor que 3.

4. *Cálculo y operaciones*. El objetivo de muchos profesores en sus prácticas escolares en educación primaria es que los alumnos aprendan a resolver las operaciones: suma, resta, multiplicación y división; piensan que con manejar los algoritmos es suficiente para resolver los problemas que las implican. En el caso de la enseñanza de los decimales lo más común es que los cálculos se prioricen sobre la comprensión de estos números. Para la suma y resta en las aulas, generalmente, los profesores no identifican más dificultad que alinear el punto. Al prever lo anterior, se aplican las mismas reglas que al operar con los naturales. De este modo, surgen errores como sumar (o restar), de manera independiente, enteros con enteros y decimales con decimales (por ejemplo: 1.75 + 2.42 + 3.989 = 6.1106).

En el caso de la multiplicación y la división, en los estudios realizados hace décadas por Brown (1981) fue posible inferir que existen ideas erróneas en estudiantes entre 12 y 15 años al calcular con los decimales. En el grupo que participó en este estudio se pudo observar que, ante la petición de elegir cuál operación tendría un resultado mayor: 8×0.4 o $8 \div 0.4$, 185 de 239 estudiantes dieron una respuesta incorrecta. Lo anterior, es una evidencia de que en la mayoría de los estudiantes de primaria predomina la idea de que la multiplicación siempre da resultados mayores que los factores y en la división el cociente siempre es menor que el dividendo.

Es decir, los estudiantes muestran un conocimiento procedimental de los algoritmos, pero su conocimiento conceptual acerca de los decimales es débil. Valencia y Avila (2015), confirman lo anterior al constatar que se trabaja con la multiplicación y división sin reflexionar sobre el significado de las operaciones.

5. *La densidad de los números decimales*. Una de las propiedades que distingue a los racionales de los naturales es la densidad, esta propiedad refiere a que entre un racional y otro existe infinita cantidad de estos números, cualidad que corresponde también a los decimales al pertenecer a este conjunto numérico (entre 0.5 y 0.6 es posible encontrar a 0.551, 0.5501, 0.55001… es decir, infinidad de otros números). En la escuela primaria se presentan dificultades con la comprensión de esta propiedad, porque, como ya se ha señalado, los estudiantes tienden a pensarlos con las mismas características de los naturales. Ahora bien, los razonamientos erróneos acerca de la densidad de los decimales se pueden clasificar en dos. Primero, los que determinan que no hay ningún decimal entre otros dos. Segundo, quienes tienen la concepción de *densidad restringida* documentada en la investigación de Avila (2013). Esto significa que, ante la tarea de intercalar decimales entre otros dos, algunos estudiantes de primaria asignan sólo 9 (por ejemplo, entre 0.1 y 0.2 solo se pueden hallar 0.11, 0.12, 0.13…0.19 sin permitir insertar uno más, "porque se llegaría a 20").

Sin duda, la propiedad de densidad de los decimales es compleja y difícil de entender, dado que, los alumnos de primaria no descartan la idea de antecesor y sucesor en los naturales, que no es válida para el conjunto de los racionales ni para el subconjunto de los decimales.

Las dificultades expuestas anteriormente reflejan que las tareas referentes a la noción de número decimal no son sencillas para los estudiantes e implican un reto para los profesores en la enseñanza. Por lo tanto, el tema merece que quienes se dedican a la enseñanza, profundicen en el conocimiento de su complejidad y propongan situaciones adecuadas para que los alumnos logren avanzar en su comprensión. A fin de profundizar en las complejidades de estos números, en lo que sigue se expone los conocimientos sobre los decimales, con los que egresan alumnos de primaria (con base en evaluaciones a gran escala).

1.3.Los decimales en las evaluaciones nacionales

Hace tiempo se sabe que los números decimales son difíciles de aprender, esto se puede ver en lo expuesto en el inciso anterior, y también lo muestran los datos de las pruebas nacionales detallados en diversas investigaciones (Avila y García, 2008) (Ávila, 2013) (Valencia, 2014). En lo que refiere a la prueba ENLACE (Exámenes Nacionales del Logro Educativo) correspondiente al ciclo

2010-2011, de los 10 reactivos planteados que tienen relación con los decimales, “podemos identificar que menos del 50% de alumnos de sexto grado muestra un buen dominio en el uso de los decimales, a pesar de que estos no son considerados un problema relevante de la enseñanza” (Valencia, 2014, pág. 27). Un ejemplo, son los reactivos que solicitan conversión de fracciones a decimales, y viceversa (noción de equivalencia en los racionales $\frac{1}{4} = 0.25$); la población estudiantil que dio respuestas incorrectas fue del 54%. Otros ejemplos donde la gran mayoría de estudiantes de sexto grado mostraron respuestas incorrectas (un porcentaje mayor o igual al 50%) contemplan los siguientes aspectos: ubicar un número decimal en la recta numérica, identificar la representación decimal que corresponde a una fracción, identificar el valor posicional de una cifra dentro de un decimal y realizar multiplicación y división de un número decimal entre un natural.

En los últimos años, en México, se ha usado como principal instrumento para evaluar los aprendizajes alcanzados por alumnos de sexto de primaria (a gran escala), la prueba PLANEA (Plan Nacional para la Evaluación de Aprendizajes). Su aplicación en las escuelas primarias mexicanas se llevó a cabo por primera vez en el año 2015 y se estuvo aplicando de manera anual hasta 2019. Con la intención de valorar el sistema educativo en conjunto, se tomaron en cuenta los contenidos establecidos en los planes y programas de estudio, centrándose en tres áreas del conocimiento: lengua, matemáticas y ciencias. Los ejercicios de evaluación, realizados a partir de 2015, mostraron resultados deficientes en lo que respecta al área de matemáticas.

Los especialistas encargados de analizar las pruebas designaron cuatro niveles de logro para cada una de las áreas de estudio: insuficiente, indispensable, satisfactorio y sobresaliente. En lo que respecta a la materia de matemáticas el 60% de los alumnos, al terminar sexto grado, presenta un nivel insuficiente. Por otro lado, sólo cerca del 14% se ubicó en un nivel satisfactorio. En cuanto a los contenidos relacionados con los decimales, los estudiantes logran: leer y escribir números decimales; resolver problemas aditivos con decimales, así como resolver multiplicación y división de naturales entre decimales. Lo anterior es preocupante, pero aún más es encontrar que sólo cerca del 7% de los estudiantes (nivel sobresaliente) pudo comparar números decimales; resolver problemas aditivos con números naturales, decimales y fraccionarios que implican dos o más conversiones (uso de equivalencias, 1/5 = 0.2); así como ubicar dichos números en la recta numérica (SEP, 2015).

En la siguiente tabla se muestran los descriptores para cada nivel y el porcentaje de alumnos por nivel de logro.

Tabla 1. *Resultados en matemáticas: sexto de primaria obtenidos en el examen PLANEA, 2015.*

Nivel 1: Insuficiente (60.5%) Escriben y comparan números naturales. Resuelven problemas aplicando las características y propiedades básicas de triángulos, prismas y pirámides. Resuelven problemas que implican leer información en gráficas de barras.
Nivel 2: Indispensable (18.9%) Leen números naturales y resuelven problemas de suma con naturales, multiplican y dividen. Representan una fracción en un modelo continuo. Reconocen la regla verbal y la pertenencia de un término a una sucesión aritmética creciente. Identifican elementos geométricos como alturas, paralelas, ángulos rectos en figuras sencillas. Resuelven problemas utilizando las características y propiedades de cuadriláteros y pirámides. Identifican unidades de medida de áreas y resuelven problemas de aplicación de perímetros. Ubican lugares usando sistemas de referencia convencionales en planos o mapas. Resuelven problemas de conversión de unidades en el Sistema Internacional de Medidas. Solucionan problemas que implican analizar o representar información en tablas o gráficas de barras
Nivel 3: Satisfactorio (13.8%) Leen y escriben números decimales. Resuelven problemas aditivos con naturales o decimales; de multiplicación o división de naturales o de decimales con naturales. Representan una fracción en un modelo discreto; comparan fracciones y las multiplican por un natural. Usan las fracciones para expresar una división e identifican el dividendo o divisor. Identifican sucesiones geométricas crecientes, a partir de la regla. Resuelven problemas utilizando las características y propiedades de ángulos, rectas, figuras y cuerpos geométricos. Identifican situaciones de aplicación de perímetro y calculan la distancia real de un punto a otro en mapas; ubican coordenadas y objetos en el plano cartesiano. Resuelven problemas directos de conversión de unidades de medida (SI e inglés). Reconocen distintas formas de representar un porcentaje. Resuelven problemas de identificación de la moda en conjuntos de datos
Nivel 4: Sobresaliente (6.8%) Comparan números decimales. Resuelven problemas aditivos con números naturales, decimales y fraccionarios que implican dos o más transformaciones. Resuelven problemas que implican dividir o multiplicar números fraccionarios por naturales. Ubican un decimal en la recta numérica. Usan las fracciones para expresar el resultado de un reparto. Identifican el término siguiente en sucesiones especiales. Resuelven problemas de aplicación de áreas; así como de conversión de unidades de medida con una operación adicional. Describen rutas usando sistemas de referencia convencionales en planos o mapas. Resuelven problemas que impliquen calcular promedios o medianas, y comparar razones.

Es importante señalar que, en el instrumento de evaluación aplicado en el año 2018 a los estudiantes que estaban por terminar sexto grado, se observó un incremento mínimo en los resultados en comparación con PLANEA 2015. En el caso de las matemáticas, el puntaje promedio que era de 500 en la primera evaluación (en una escala de 200 a 800) avanzó a 503 en PLANEA 2018 (diferencia de 3 puntos). Se puede observar también el decremento de casi el 1% en el nivel insuficiente, como también en el nivel indispensable. De esa forma, los porcentajes de población estudiantil de la segunda prueba en el nivel satisfactorio y sobresaliente fueron mayores (en casi 1%) a diferencia del año 2015. Aunque se debe señalar que estas diferencias, probablemente no serían significativas estadísticamente, a continuación, se muestra una tabla comparativa del porcentaje de nivel de logro en PLANEA (2015 y 2018):

Tabla 2. *Nivel de logro en los exámenes PLANEA 2015 y 2018*

	Año	Nivel de logro (%)			
Asignatura/Nivel		Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
Matemáticas	2015	60.5	18.9	13.8	6.8
	2018	59.1	17.9	14.8	8.2

Nota: elaboración propia

En cuestión del contenido de los decimales, los porcentajes que el INEE (Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación) difundió a partir de 2018, sustentan un avance mínimo. De manera que siguen prevaleciendo las dificultades con dichos números en la gran mayoría de alumnos que están por terminar sexto grado. Un 85% no logra realizar operaciones con decimales (adición, multiplicación y división), y también tienen dificultades para leerlos y escribirlos. Por si no fuera ya alarmante, los resultados también muestran que a un 92 % de los alumnos le cuesta trabajo compararlos y se les complica resolver problemas aditivos con decimales que involucran dos o más conversiones (uso de equivalencias).

1.4.Los profesores y los decimales

¿Por qué los profesores consideran los decimales como un tema que merece poco espacio de enseñanza, en comparación con otros contenidos matemáticos en educación primaria?,

¿especialmente en comparación con las fracciones? Los docentes que trabajan en las aulas mexicanas consideran que enseñar y aprender los decimales no representa una tarea compleja. Estos números parecen no considerarse un problema importante desde el punto de vista didáctico para los profesores y cognitivo para los alumnos. A partir de la anterior suposición, se limita el tiempo de su enseñanza y aprendizaje. Se le da poca importancia a la equivalencia, la comparación, el orden, la densidad y a las distintas representaciones.

Sin embargo, como se mostró con anterioridad, los instrumentos de evaluación reflejan que los estudiantes de sexto grado de primaria presentan debilidades en cuanto a la comprensión del concepto de número decimal, mostrando que es un contenido difícil de entender para los alumnos, aun cuando los docentes piensen lo contrario. Esto se debe, en parte, a que este contenido matemático se enseña, por lo general, a partir de dictado de números, memorizando los nombres de columnas y extendiendo la aplicación mecánica de los algoritmos con los naturales a los decimales.

Autoras como Avila (2008) y Barriendos (2019) señalan que muchos profesores de educación primaria presentan dificultades en cuanto al conocimiento matemático de los decimales en los siguientes aspectos:

- Definir qué es un número decimal (en su mayoría los definen como los números que llevan punto).
- En general, desconocen la propiedad de densidad de los números decimales.
- Piensan que es posible hallar un antecesor y sucesor en los decimales.
- Desconocen la relación que guardan las fracciones y los decimales.
- Consideran, desde los aspectos de los naturales, los resultados de la multiplicación y división: las divisiones siempre achican y las multiplicaciones siempre agrandan.

Así mismo, las autoras mencionadas evidenciaron que son pocos los docentes que se percatan de la necesidad de que sus estudiantes rompan con la forma de pensar los naturales para comprender los decimales. Pocos son los que diseñan actividades con la intención de que sus alumnos reflexionen acerca de: qué tipos de problemas se resuelven con los decimales, cómo se opera con ellos, qué los distingue de otros números y qué relación guardan con ellos. De esa manera, los docentes se enfrentan a la compleja tarea de enseñar los decimales teniendo carencias en sus conocimientos matemáticos y pedagógicos alrededor de ese contenido.

La investigación ha demostrado que la propia enseñanza ha contribuido a provocar dificultades en la comprensión de los decimales por parte de los alumnos. En ella se puede observar un fuerte énfasis en la escritura mecánica: décimos, centésimos y milésimos, sin que ésta se sustente en la comprensión del valor de estas cifras y su relación con la unidad. Así, “los números pierden su carácter conceptual para convertirse en un problema de reglas de representación” (Ávila, 2008, pág. 13). Saber el nombre de las posiciones no significa que se comprende el valor representado en cada una de ellas. Como lo hace notar Avila (2008): “Es probable que la forma en que habitualmente enseñamos los decimales también contribuya a la poca diferenciación que los niños hacen entre unos y otros números [los naturales y los decimales]” (pág. 50).

En estudios pasados se encontró que los profesores tienen la idea de que los decimales son fracciones. Pero, si bien no es incorrecta, esta respuesta es incompleta, puesto que, no incluye el elemento que los caracteriza: tener al menos un equivalente a una fracción con denominador potencia de 10. Entonces, sus preocupaciones y acciones didácticas consisten en situarse “en la escritura utilizando ‘el punto’, minimizando y aun excluyendo la atención sobre los aspectos conceptuales de dichos números” (Avila, 2008, pág. 5). De ahí que existan ideas en los enseñantes como: “la ubicación del punto, eso es lo más difícil y memorizar el valor posicional, [pero] Si lo sabe uno explicar y con abundante material didáctico, los alumnos entienden fácilmente” (Avila, 2008, pág. 20).

Otra de las afirmaciones de los profesores es que, los alumnos no aprenden los decimales por falta de atención, desinterés y falta de apoyo en casa. Lo anterior deja al profesor al margen de la responsabilidad de resolver las dificultades a las que se enfrente el estudiante con el concepto y con ello la responsabilidad del aprendizaje. Como señala Avila (2008):

> En el discurso de los profesores predominan ideas pedagógicas muy generales sobre las ayudas útiles para el aprendizaje de los decimales: repasar, asegurar la atención, poner ejemplos, explicar, hacer objetivo el concepto, hacer reflexionar… Estas ayudas —que podrían expresarse en relación con cualquier tema de matemáticas— reflejan un limitado conocimiento de los decimales y se vinculan a la concepción de que el aprendizaje y la enseñanza de dichos números se restringen al sistema decimal de numeración. (pág. 23)

También se puede señalar que algunos profesores mencionan que las lecciones propuestas en el libro de texto gratuito son muy difíciles para los estudiantes, incluso para ellos mismos, por lo cual, evitan trabajar con algunas. Y otros, desconocen la propuesta de la nueva reforma y los materiales distribuidos para el quehacer docente. En la opinión de Avila (2008):

> Se observa aquí una distancia enorme entre las propuestas de innovación y lo que saben los maestros y acostumbran a hacer en sus clases en torno a los decimales [...] que, por cierto, no fue acompañada de alguna acción de formación o actualización docente. Los conocimientos y creencias que expresan los profesores están sumamente alejados de los que permitirían hacer una buena lectura de los materiales que el Estado distribuye para apoyar la enseñanza. (pág. 30)

La multiplicación y división con decimales ha sido un tema complejo para los estudiantes de primaria (como se mencionó anteriormente). En la investigación realizada por Barriendos (2013) se reportó que los profesores compartían la misma idea de los estudiantes de primaria acerca de multiplicación y la división con estos números: en todos los casos, la multiplicación da resultados mayores que los factores y en la división el cociente es menor que el dividendo. Llegando a la hipótesis sustentada por Avila (2008): Los estudiantes para profesor y los profesores en servicio comprenden parcialmente los decimales. Al respecto, la autora informó que los participantes en su estudio (profesores en formación continua) percibían la adición y la multiplicación como operaciones que necesariamente aumentan y la sustracción y división como operaciones que necesariamente disminuyen los resultados.

Estas limitaciones observadas en el conocimiento de los decimales que al parecer comparte un gran número de docentes en servicio, viene sin duda de una enseñanza limitada desde la educación básica que recibieron. Pero esta situación parece mantenerse durante los procesos de formación inicial para convertirse en docentes de educación primaria. Esto se refleja en los estudios que se citan a continuación.

1.5.Los profesores en formación inicial y los decimales

Algunos estudios internacionales se han preguntado acerca de si los futuros profesores cuentan con el dominio de conocimiento suficiente para la enseñanza de los decimales. Bajo este objetivo, han reportado la falta de comprensión de los decimales por parte de algunos estudiantes de magisterio. En Indonesia, el trabajo de Widjaja et al. (2008) reportó las ideas erróneas que tienen los profesores en formación inicial sobre la propiedad de densidad. De acuerdo con estas autoras, el problema se origina al tratar de comprender dicha propiedad a través de los conocimientos preexistentes acerca de la característica discreta de los naturales.

Por otra parte, Steinle y Stacey (2004) hallaron que algunos estudiantes para profesor en Australia mantienen ideas erróneas evidenciadas en estudiantes de niveles de educación básica.

Algunos de los errores que cometían tenían que ver con las tareas de identificar un decimal en la recta numérica y encontrar un decimal entre otros dos decimales dados. Las autoras llegaron a la conclusión de que las ideas erróneas de los profesores en formación inicial sobre los decimales pueden ser transmitidas a sus futuros estudiantes. Así, los profesores en la práctica de la enseñanza no hacen hincapié en que los estudiantes comprendan la naturaleza matemática de sus errores con los decimales, efecto del escaso conocimiento matemático que tienen alrededor de dichos números.

En el caso de México, Suárez (2017) menciona que en los participantes en su estudio (estudiantes para profesor de matemáticas de nivel secundaria) prevalecían las siguientes creencias sobre los números decimales: existencia de un sucesor, pensamiento discrecional para razonar la propiedad de densidad de los decimales (entre dos decimales cualesquiera no hay la posibilidad de incorporar otro) y la presencia de una *densidad ingenua*[9] (argumentan que hay infinito números decimales entre otros dos sin saber por qué).

Podemos observar que en las investigaciones de Indonesia, Australia y México se identifica que una de las dificultades que tienen los profesores antes del servicio docente es con la propiedad de densidad de los decimales y, por tanto, es necesario comprender y resolver dichas dificultades.

Con respecto al Plan de Estudios 2018 para la Licenciatura de Educación Primaria que se desarrolla en las Escuelas Normales de México, en el segundo semestre se lleva el curso: *Aritmética. Números decimales y fracciones*. Este propone que alrededor del tema de los decimales los estudiantes para profesor: analicen los contenidos del Programa de estudio, revisen los libros de texto gratuitos, reconozcan los errores comunes que cometen los alumnos de primaria, diseñen actividades y practiquen su enseñanza. Sin embargo, en el trabajo matemático con estos números no se considera: a) representarlos en la recta numérica; b) identificar y diferenciar qué representan las expresiones decimales finitas, periódicas y no periódicas; c) trabajar la propiedad de densidad; d) identificar el significado de multiplicar utilizando números menores a la unidad; Todos temas esenciales para la enseñanza de los decimales.

Según Ma (2010), con base en estudios realizados en China, los profesores en formación inicial y los profesores que ya están en servicio tienen una débil comprensión de los conceptos y procesos matemáticos, efecto de un sistema educativo que no ha logrado corregir el problema. Por lo que la intención no es cuantificar los conocimientos, sino centrarse en el conocimiento que debe poseer el profesor para la enseñanza de los números decimales.

[9] Término utilizado por Suárez 2017

A continuación, hablaremos de los modelos utilizados por los investigadores para identificar las distintas características del conocimiento del profesor de matemáticas necesarios para la enseñanza.

1.6.Modelos del conocimiento necesario para la enseñanza de las matemáticas

Diversos autores han coincidido en que la investigación del conocimiento del profesor es una forma de pensar a los profesores y su práctica de enseñanza. Esto porque es imprescindible que los profesores posean un conocimiento amplio del contenido que enseñarán para poder enseñarlo bien. Pero es pertinente preguntarse si dicho conocimiento es suficiente al momento de enseñar. Hace casi cuatro décadas Shulman y sus colaboradores (1986) se formularon la pregunta anterior: ¿el conocimiento del contenido es suficiente para enseñar? Lo que significó un gran avance, pues estos investigadores categorizaron el conocimiento base del profesor de la siguiente manera: conocimiento del contenido; conocimiento pedagógico general; conocimiento del currículo; conocimiento pedagógico del contenido; conocimiento de los alumnos; conocimiento del contexto educativo; conocimiento de los objetivos, las finalidades y los valores educativos, y de sus fundamentos filosóficos e históricos (Shulman, 1986).

Aunque la perspectiva de Shulman acerca del conocimiento base del profesor surge en el ámbito de la enseñanza en general, algunos investigadores de la matemática educativa retomarían su propuesta desde fines del siglo XX. La pregunta ya no era ¿Qué matemáticas necesitan saber los profesores?, sino ¿Cómo se utilizan las matemáticas en la enseñanza? (Ball, 2017). Así, surgieron indagaciones en todo el mundo sobre qué conocimientos son necesarios para la enseñanza de las matemáticas. Dos modelos que han buscado analizar los conocimientos de los profesores de matemáticas necesarios para la enseñanza son los diseñados por la Universidad de Michigan y la Universidad de Huelva.

El primer modelo *Mathematical Knowledge for Teaching* —creado por D. Ball y sus colaboradores— ha tenido una fuerte presencia en países de América, Oceanía y Asia. En lo que respecta al segundo modelo *Mathematics Teachers' Specialised Knowledge* —a cargo de Carrillo y sus colaboradores— ha sido relevante en investigaciones de países de Latinoamérica y España. Ahora bien, han sido dos categorías del conocimiento de Shulman las que dieron lugar a desarrollos posteriores en didáctica: el conocimiento del contenido y conocimiento pedagógico del contenido

(Chapman, 2013). La primera en retomar los aportes de Shulman fue D. Ball y sus colegas (Ball et al., 2008). Esta investigadora y sus colaboradores retomaron el conocimiento matemático y conocimiento pedagógico del contenido definidos por Shulman, y cada uno de ellos lo dividieron en tres subdominios, en los que destacan el conocimiento especializado del contenido (un conocimiento matemático útil para la enseñanza distinto del que se utiliza en otros campos de la actividad humana) y el conocimiento del contenido y los estudiantes (ver más adelante).

Según Carrillo et al. (2013), el modelo Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTKS por sus siglas en inglés) surge como refinamiento del modelo que proponen los investigadores de la Universidad de Michigan. El modelo del MTKS está representado en tres dominios divididos de la siguiente manera:

a) Conocimiento matemático

- Conocimiento de los temas
- Conocimiento de la estructura matemática
- Conocimiento de la práctica matemática

b) Conocimiento didáctico

- Conocimiento de la enseñanza matemática
- Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas
- Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas

c) Creencias y concepciones

- Sobre las matemáticas
- Sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

Este trabajo de tesis se desarrollará con base en la propuesta de Ball y sus colegas (que se expone con amplitud más adelante) por tres razones. La primera se debe a que las investigaciones anteriores acerca del conocimiento de enseñanza de los decimales en profesores en preparación para servicio docente se basan en dicho modelo. La segunda es que diversos estudios recientes sobre el análisis del conocimiento del profesor de matemáticas, en otros contenidos en específico, están sustentados en el MKT (en adelante Conocimiento matemático para la enseñanza). La última razón es que el MKT aún es referente de programas de cursos que se especializan en la formación de profesores de matemáticas.

1.7.Los números decimales en el plan y programas de estudio 2011

El plan de estudios 2011 de educación básica considera cuatro periodos escolares para la educación básica (cada uno consta de tres grados). De este modo, la propuesta señala cuatro cortes (término utilizado por la SEP) correspondientes a ciertos rasgos o características clave del desarrollo cognitivo de los estudiantes. La SEP (2011a) indica:

Tabla 3. *Cortes definidos por la SEP para establecer los estándares curriculares*

Periodo Escolar	Grado escolar del corte	Edad aproximada
Primero	Tercer grado de preescolar	Entre 5 y 6 años
Segundo	Tercer grado de primaria	Entre 8 y 9 años
Tercero	Sexto grado de primaria	Entre 11 y 12 años
Cuarto	Tercer grado de secundaria	Entre 14 y 15 años

Cada corte contiene estándares curriculares, entendidos como referentes que se desea alcancen los alumnos. De acuerdo con la SEP (2011a): "Los estándares curriculares son descriptores de logro y definen aquello que los alumnos demostrarán al concluir un periodo escolar; sintetizan los aprendizajes esperados que, en los programas de educación primaria y secundaria, se organizan por asignatura-grado-bloque" (pág. 29).

En particular, los contenidos sobre los números decimales —en primaria— se abordan durante los últimos grados (cuarto, quinto y sexto). Los elaboradores del currículo indican que un niño o niña de 11 y 12 años (al corte del tercer periodo):

- Lee, escribe y compara números naturales, fraccionarios y decimales.
- Resuelve problemas aditivos con números fraccionarios o decimales, empleando los algoritmos convencionales.
- Resuelve problemas que impliquen multiplicar o dividir números fraccionarios o decimales entre números naturales, utilizando los algoritmos convencionales. (SEP, 2011c, pág. 64)

Para alcanzar los estándares curriculares señalados por la Secretaría de Educación Pública es necesario trabajar de manera progresiva (en cada uno de los grados) los aprendizajes esperados.

De acuerdo con la SEP (2011a): "Los aprendizajes esperados son indicadores de logro que, en términos de la temporalidad establecida en los programas de estudio definen lo que se espera de cada alumno: saber, saber hacer y saber ser" (pág. 29). Tales indicadores se usan para la planeación de las clases por el docente y la evaluación de los alumnos en el aula.

Con respecto a la enseñanza de los números decimales en cuarto, quinto y sexto grado de primaria, en los Programas de Estudio se anotan los siguientes aprendizajes esperados:

Tabla 4. *Aprendizajes esperados relacionados con los números decimales (SEP, 2011)*

Cuarto grado	Quinto grado	Sexto grado	
Notación desarrollada de números naturales y decimales. Valor posicional de las cifras de un número.	Análisis del significado de la parte decimal en medidas de uso común; por ejemplo, 2.3 metros, 2.3 horas.	Resuelve problemas que impliquen leer, escribir y comparar números naturales, fraccionarios y decimales, explicitando los criterios de comparación.	Calcula porcentajes e identifica distintas formas de representación (fracción común, decimal, %).
Resolución de sumas o restas de números decimales en el contexto del dinero. Análisis de expresiones equivalentes.	Resolución de problemas que impliquen una división de números naturales con cociente decimal.	Resuelve problemas aditivos con números naturales, decimales y fraccionarios que implican dos o más transformaciones.	Ubicación de fracciones y decimales en la recta numérica en situaciones diversas. Por ejemplo, se quieren representar medios y la unidad está dividida en sextos, la unidad no está establecida, etcétera.
Uso del cálculo mental para resolver sumas o restas con números decimales.	Uso del cálculo mental para resolver adiciones y sustracciones con números fraccionarios y decimales.	Lectura, escritura y comparación de números naturales, fraccionarios y decimales. Explicitación de los criterios de comparación.	Identificación de una fracción o un decimal entre dos fracciones o decimales dados. Acercamiento a la propiedad de densidad de los racionales, en contraste con los números naturales.
Descomposición de números naturales y decimales en expresiones aditivas, multiplicativas o mixtas.	Resuelve problemas que implican multiplicar números decimales por números naturales.	Resolución de problemas aditivos con números naturales, decimales y fraccionarios, variando la estructura de los problemas. Estudio o reafirmación de los algoritmos convencionales.	Conversión de fracciones decimales a escritura decimal y viceversa. Aproximación de algunas fracciones no decimales usando la notación decimal.
Resuelve problemas que implican sumar o restar números decimales.	Resolución de sumas o restas de números decimales en diversos contextos	Resolución de problemas multiplicativos con valores fraccionarios o decimales mediante procedimientos no formales.	Resuelve problemas que implican multiplicar o dividir números fraccionarios o decimales con números naturales.
Resolución de sumas o restas de números decimales en diversos contextos.			Resolución de problemas que impliquen una división de número fraccionario o decimal entre un número natural.

En la tabla anterior es visible el mayor número de aprendizajes esperados sobre los números decimales en sexto grado que en cuarto y quinto de primaria. Se incluyen para cuarto grado 6 aprendizajes esperados, 5 para quinto grado y 11 en sexto grado. También se puede considerar que se hace mayor énfasis en la resolución de problemas que implican suma, resta, multiplicación y en menor medida se atiende el trabajo con aspectos *conceptuales del número decimal*[10].

1.7.1. Los números decimales en los libros *Desafíos matemáticos*.

Como ya se dijo, la enseñanza de los números decimales se inicia a partir del cuarto grado. El material impreso para aprender matemáticas, libro *Desafíos matemáticos*, distribuido a los alumnos para los últimos tres grados de educación primaria por la SEP, cuenta con las siguientes lecciones:

Tabla 5. *Número de desafíos matemáticos en los libros de cuarto, quinto y sexto grados*

	Cuarto grado	Quinto grado	Sexto grado	Total
Número de desafíos	106	85	98	289

Tabla 6. *Desafíos matemáticos en cuarto, quinto y sexto grado dedicados a los números decimales*

	Cuarto grado	Quinto grado	Sexto grado	Total
Número de desafíos	10	8	14	32

Tabla 7. *Desafíos matemáticos en cuarto, quinto y sexto grado dedicados al concepto de número decimal*

	Cuarto grado	Quinto grado	Sexto grado	Total
Número de desafíos	3	0	10	13

[10] Avila (2013) utiliza el termino *conceptual* para referirse a un acercamiento que destaca la naturaleza de los decimales: la relación de orden, la de equivalencia, la propiedad de densidad, los significados que subyacen a su representación decimal.

Grosso modo, al revisar las lecciones que tratan de los decimales (en cuarto y quinto grados), se observa mayor énfasis en contextos que refieren a las magnitudes monetarias y de medida. Mientras que, en el último grado de educación primaria se centra la atención en el concepto de número decimal. Entonces, es conveniente preguntarse: ¿Cómo comenzar la enseñanza de los decimales?, ¿trabajando el concepto de número decimal o resolviendo cálculos y problemas donde se utilicen estos números?

Mediante la exploración de los libros de texto gratuitos se puede percibir que, como lo marca el enfoque de las matemáticas (resolución a través de problemas), se brinda un mayor espacio para que los niños realicen tareas utilizando los decimales en contextos monetarios, de medida y cálculo mental para resolver problemas. Por tal razón, es menor la cantidad de lecciones que se ocupan del concepto de número decimal, trabajándolo en sexto grado después de haber desarrollado los cálculos y los problemas con estos números.

A diferencia del libro *Desafíos matemáticos* para cuarto y sexto, en quinto grado de primaria es menor la cantidad de lecciones con contenidos sobre los números decimales. Los diseñadores de los libros de texto propusieron el uso de los decimales en el contexto del dinero y la medida. Ninguna de las situaciones incluidas implica el trabajo con aspectos importantes de los decimales como objeto de estudio, como convertir fracciones decimales a su escritura con punto, el orden de los números decimales, identificar que entre dos números decimales cualesquiera hay otro número decimal, el uso de la recta numérica o la representación mediante superficies. Estos aspectos son relegados para ser vistos más tarde en sexto grado.

En el último grado de primaria, de los 85 desafíos propuestos en el libro *Desafíos matemáticos sexto grado,* 14 se orientan a los números decimales. En contraste con cuarto y quinto en sexto grado se da mayor énfasis a la lectura y escritura, orden, ubicación en la recta, la densidad y las diferentes formas de representar los decimales. Pero vale la pena preguntarse, ¿la enseñanza de los decimales debe ser con énfasis como instrumento para resolver problemas y situaciones? o ¿se debe también considerar como un objeto que merece reflexión desde el punto de vista matemático?

1.8.Planteamiento del problema

En lo hasta aquí expuesto se ha hablado del poco valor de la enseñanza de los decimales otorgado por los profesores por considerarlo un tema con escaso grado de dificultad para su aprendizaje. No obstante, esta perspectiva puede cuestionarse debido a las evaluaciones que apuntan niveles bajos de comprensión por parte de los alumnos. Brousseau (1980), identificó hace tiempo que la forma de enseñanza obstaculiza la comprensión de los decimales por parte de los alumnos. Y en el caso de México, estos números parecen constituir "un contenido cuasi invisible en la educación primaria, puesto que las preocupaciones y la acción docentes predominantes se sitúan en la escritura utilizando el punto, minimizando y aun excluyendo la atención sobre los aspectos conceptuales de dichos números" (Avila, 2008, pág. 5).

En investigaciones previas se ha documentado que los profesores tienen poco conocimiento de los decimales como números (qué características y que propiedades tienen, o cómo se pueden representar). Una hipótesis que me planteo es que - por el desconocimiento del tema y la poca importancia que le dan, además de los problemas de distribución - los profesores en general no revisan los materiales que proporciona la SEP y se desconoce su contenido y organización. Por otra parte, la Secretaría de Educación Pública ha ofrecido muy poca formación sobre el tema. Incluso se puede agregar que:

> En la actualidad existe una oferta reducida de cursos de actualización en matemáticas. Del total de títulos registrados en el año 2012 (1115) sólo 50 corresponden a esta área, y la mayoría (32) busca actualizar a los docentes en el enfoque por competencias, introducido con la reciente reforma a la educación básica (SEP, 2011). (Gutiérrez y Avila, pág. 115, 2017)

No creo equivocado considerar que esta situación se mantiene hasta el día de hoy. Esto justifica el interés por la formación de maestros y de estudiantes para maestro en el tema de los decimales.

1.9.Objetivo de la tesis

Originalmente el objetivo de la tesis fue: El desarrollo de un taller virtual con profesores de grados superiores de educación primaria orientado a mejorar sus conocimientos matemáticos y pedagógicos sobre los números decimales. El contexto de confinamiento por la pandemia obligó a hacer cambios significativos en este objetivo. Inicialmente, el taller se llevaría cabo con seis profesores de distintas localidades del país: Guadalajara, Ciudad de México, Veracruz y Zacatecas. Se plantearían ocho sesiones a partir de identificar sus conocimientos matemáticos y pedagógicos sobre los decimales para después ampliarlos. La selección de materiales, las estrategias y actividades se llevarían a cabo durante el primer semestre de 2021. Posteriormente, resultó que eso no fue posible por lo que busqué otras opciones para realizar el Taller. De manera que, ahora los participantes serían estudiantes en formación docente, es decir, estudiantes de Licenciatura en Educación Básica de una escuela Normal. En el contexto de confinamiento por el SARS CoV2 el objetivo general del proyecto quedó finalmente de la siguiente manera:

El desarrollo de un taller virtual con futuros profesores de educación primaria orientado a mejorar su conocimiento matemático y pedagógico sobre los números decimales.

1.9.1. Propósitos del taller virtual

En otras investigaciones, en México, se ha expuesto que la formación de profesores es relevante para la mejora del aprendizaje escolar, por lo que dichos estudios proponen trabajar con los docentes para mejorar sus conocimientos pedagógicos y del contenido (Gutiérrez y Ávila, 2017). Con base en el objetivo general de esta tesis, planteé los siguientes propósitos para el taller virtual con los profesores en formación:

- Identificar los conocimientos matemáticos y pedagógicos sobre los decimales que tienen los profesores en formación participantes (diagnóstico).
- Planear situaciones y actividades para desarrollar el taller, con base en los resultados del diagnóstico y de la bibliografía revisada, considerando los distintos tipos de conocimiento que se quieren desarrollar.

Entre las actividades que se decidió realizar durante el taller se consideraron las siguientes:

1. Sobre el conocimiento matemático de los decimales
   a) Identificar las diferentes formas de representar un número decimal.
   b) Identificar la propiedad de densidad.
   c) Comparar y ordenar números decimales.
   d) La multiplicación y la división con números menores que la unidad.

2. Sobre el conocimiento pedagógico de los decimales

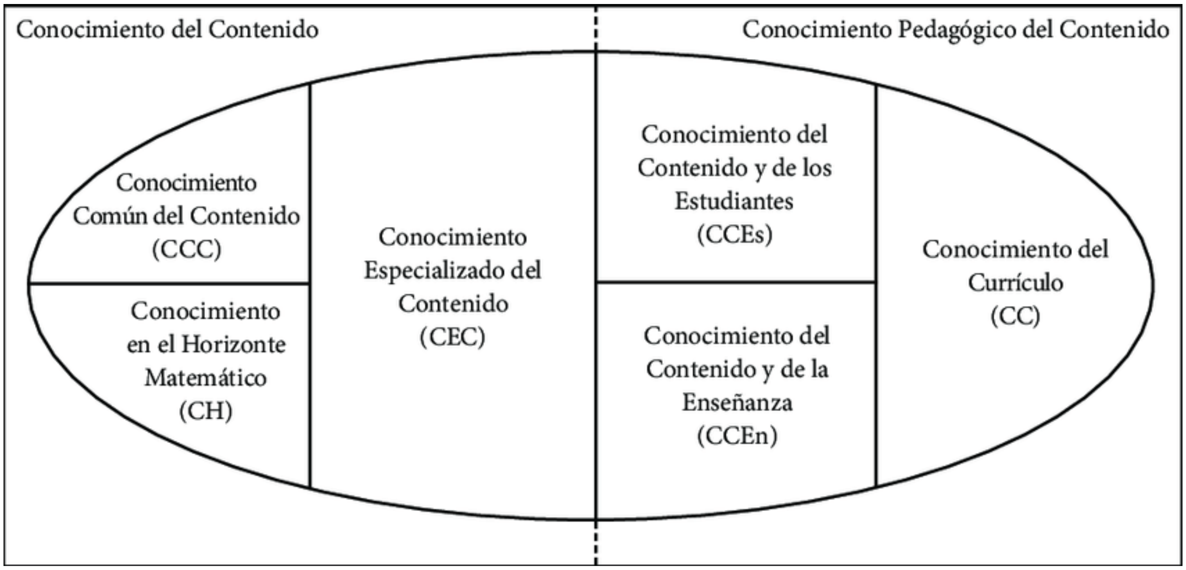
e) Identificar las dificultades que tienen los alumnos para comprender los decimales

f) Proponer o elaborar situaciones con la intención de que los alumnos de primaria aprendan los distintos aspectos del concepto de número decimal.

1.9.2. Fundamento pedagógico

Como se ve en lo anterior, el Taller se organizó con el fin de desarrollar dos tipos de conocimiento: el matemático y el pedagógico. Esta orientación fue tomada de la propuesta de D. Ball y su equipo (Hill, Ball y Schilling 2008), quienes, con base en diversos estudios, muestran que no es suficiente que los profesores tengan un conocimiento disciplinar para desempeñar de manera adecuada la práctica de la enseñanza de las matemáticas y con ello favorecer el aprendizaje de los alumnos. Según Ball y sus colegas, el conocimiento para la enseñanza de las matemáticas que un profesor debe poseer tiene características distintas de las matemáticas que se utilizan con otros propósitos. Éste, entre otras cosas, implica entender el funcionamiento de los procedimientos matemáticos, identificar las causas de los errores que cometen los alumnos y reflexionar si las soluciones de los alumnos son funcionales o no. Desde tal perspectiva, estos autores elaboraron el modelo *Mathematical knowledge for teaching* (MKT) destacando, como se observa a continuación, los dominios del conocimiento matemático y conocimiento pedagógico del contenido, cada uno con tres subdominios:

Figura 1. Modelo para el conocimiento matemático para la enseñanza (MKT, por sus siglas en inglés)



Nota. La figura fue tomada de Hill, Ball & Schilling (2008, p.403).

En el curso-taller, como se verá en el siguiente capítulo, se intentó desarrollar los distintos conocimientos definidos por el modelo desarrollado por Ball[11].

[11] Es conveniente señalar que, el conocimiento pedagógico del contenido evolucionó a "conocimiento didáctico del contenido". Sin embargo, en esta tesis se respeta el termino usado por Ball (2008).

Capítulo 2. Metodología para la intervención: fundamentación planeación y desarrollo del taller

Los docentes que tienen una sólida preparación en su conocimiento de las matemáticas, del pensamiento del estudiante y del currículo escolar están en una posición que les permite apreciar cómo evoluciona el pensamiento matemático con el tiempo y están preparados para ayudar a los alumnos a vincular temas con el objeto de reforzar su comprensión (Ball, Thames y Phelps 2008)

Capítulo 2. Metodología para la intervención

En el presente capitulo se presentan el contexto y los participantes con los que se implementó la intervención. En este se encuentra la descripción de los elementos considerados para la planeación de las sesiones previo a su puesta en escena.

2.1. La Intervención Educativa en la formación de futuros profesores

Grosso modo, la intervención educativa es entendida como el desarrollo de acciones emprendidas por un grupo de participantes con la intención de alcanzar los objetivos previamente diseñados en un proyecto educativo (Barraza, 2010). Su potencial radica en promover un cambio en términos de conocimientos y prácticas. Esta razón, lleva a considerar que es necesario que dicha intervención compare resultados previos y finales al haberse implementado. De acuerdo con lo señalado por Gutiérrez (2008), después de una intervención educativa se pueden reconocer, en el grupo de futuros docentes participantes, los siguientes aspectos:

- Un cambio de concepciones, creencias y estrategias.
- Prácticas docentes innovadoras.
- La creación de un lenguaje común.
- La reflexión sobre su práctica.
- El reconocimiento de los problemas a los cuales se enfrenta en la práctica docente.

Para que se logren los anteriores aspectos, es necesario que el conjunto de acciones a desarrollar en el proyecto de intervención tenga un carácter pedagógico, de evaluación y de compromiso por parte de los participantes. Un factor medular en la intervención educativa es la planeación previa de la actuación del conductor de dicho proyecto. En otras palabras, es fundamental tener claras las tareas que se les plantearán a los participantes, así como los recursos educativos disponibles para facilitar el desarrollo de la intervención, aunque, una vez puesta en marcha la intervención, sea necesario realizar algunas modificaciones.

Dicho lo anterior, es pertinente planear e implementar el proyecto de intervención educativa para apoyar la formación inicial de profesores. En el caso de este trabajo, dirigido a estudiantes de la Licenciatura de Educación Primaria, el proyecto diseñado tuvo la intención de producir reflexiones cerca de la asignatura de matemáticas en cuanto al conocimiento matemático, el conocimiento del aprendizaje de los alumnos y la práctica de enseñanza de las matemáticas y, específicamente, en el tema de los decimales. Por tal motivo, se buscó una escuela Normal interesada en poner en práctica una intervención educativa cuyo fin fuera la ampliación del conocimiento matemático para la enseñanza de los decimales en educación primaria en sus estudiantes.

En el presente trabajo, el proyecto de intervención educativa estuvo conformado por cuatro fases. La primera constó de una fase de análisis preliminar y de consideraciones previas, tomando en cuenta las perspectivas sobre la enseñanza de los decimales consideradas en investigaciones anteriores y los conocimientos previos de los estudiantes para profesor participantes (a través de un instrumento de evaluación). Los resultados de esta fase se utilizaron para el diseño de la intervención. La segunda fase estuvo dedicada a la planeación de 7 sesiones cuya intención fue abordar diferentes aspectos del conocimiento disciplinar y pedagógico de los decimales. Posteriormente, se aplicó la fase de implementación de las actividades mediante un taller virtual a un grupo de profesores de educación primaria en formación. Finalmente, se tuvo una fase de análisis de resultados. Esta última fase fue de gran relevancia puesto que, muestra los resultados y conclusiones teniendo en cuenta el desarrollo de las actividades y las contingencias de la intervención.

Debido a que la intervención se desarrolló con estudiantes de una escuela Normal Rural, en seguida se mencionan algunos rasgos de estas Normales, con el fin de dar contexto al trabajo.

2.2. Normales Rurales

“Las Normales Rurales se crean en México en el año de 1922 y su funcionamiento se ha mantenido hasta la fecha. Tienen como propósito formar a los futuros profesores que desempeñarán la docencia en el medio rural” (Hernández, 2019, p. 224). De acuerdo con el anterior autor, surgen con el nombre de Escuelas Normales Rurales (en adelante ENR), pero en el periodo de 1934 a 1946 cambian su nombre Escuelas Regionales Campesinas y, posteriormente, de 1946 a la fecha conservan el nombre de ENR. Amplio es el abanico, como lo menciona el autor antes citado, de los diferentes enfoques desde donde se han estudiado estas Normales.

En esta ocasión, la intervención presentada tiene la intención de mostrar el rostro académico, en particular del conocimiento matemático y didáctico de las matemáticas alrededor del tema de los decimales de un grupo de estudiantes para profesor de educación primaria, contribuyendo a fortalecer el análisis de las ENR, en la defensa de la educación en México.

La ENR en la cual se llevó a cabo el taller virtual está ubicada en el estado de Zacatecas, ofrece la Licenciatura en Educación Primaria y actualmente cuenta con una matrícula de 578 estudiantes. La mayoría de sus estudiantes provienen de los estados de Zacatecas, San Luis Potosí y Aguascalientes, aunque, admite estudiantes de cualquier lugar de la República Mexicana. Al igual que las otras Normales del país, el plan de estudios 2018 propuesto por la SEP es el que rige el proceso de formación de los futuros docentes que ingresan a la Licenciatura de Educación Primaria en esta Normal. También es relevante mencionar que sus egresados se han incorporado al magisterio en las zonas rurales y urbanas de los estados de Zacatecas, Jalisco, Aguascalientes, San Luis Potosí, Guanajuato y Ciudad de México.

2.3. Participantes

Como ya se dijo, los participantes en el taller pertenecían a un grupo de estudiantes de una escuela Normal Rural del estado de Zacatecas. La conformación de este grupo de futuros profesores se logró por el apoyo e intermediación del profesor a cargo de la asignatura de matemáticas, quien organizó y dio las facilidades para desarrollar siete sesiones de una hora de trabajo. Participaron 8 alumnos - 5 mujeres y 3 hombres - del segundo semestre de la Licenciatura de Educación Primaria (para referir a los participantes, en esta tesis se utilizaron nombres ficticios). El grupo elegido de alumnos proviene de familias con un nivel socioeconómico medio-bajo.

De acuerdo con el Plan 2018, para la Licenciatura de Educación Primaria, en el segundo semestre los alumnos deben cursar la materia Aritmética. Números decimales y fracciones, cuya intención es “favorecer el desarrollo de competencias profesionales para la enseñanza de las matemáticas en la educación primaria” (SEP, 2018). En tal sentido, el criterio de inclusión en el taller fue que los estudiantes no hubieran sido instruidos aún en la enseñanza sobre los números decimales.

2.4. Diagnóstico

Para implementar el taller, cuyo fin era ampliar el conocimiento matemático y pedagógico sobre los números decimales en futuros profesores de primaria, era importante partir de dos cuestiones: ¿Qué tanto conocimiento matemático tienen sobre los decimales los participantes? y ¿Qué tanto saben sobre cómo piensan los decimales los estudiantes de primaria? Por esta razón, fue necesario valorar a través de un instrumento de evaluación sus conocimientos previos para considerarlos junto con sus dificultades y elegir la secuencia de actividades más adecuada. Se dedicó una sesión a su aplicación. El instrumento estuvo compuesto por 11 preguntas y fue elaborado bajo el marco del modelo *Mathematical knowledge for teaching* (MKT de D. Ball) destacando, como se expone a continuación, sus dominios del conocimiento matemático y conocimiento pedagógico del contenido:

Conocimiento pedagógico del contenido

- Consideración de la relevancia del contenido.
- Grados asignados para el estudio de los números decimales en la educación primaria.
- Interpretación de las respuestas de los alumnos al utilizar los decimales.

Conocimiento matemático

- Diferentes formas de representarlos.
- Orden y comparación.
- Operatoria.
- Equivalencias.
- Propiedad de densidad.

Una vez elaborado, el instrumento fue aplicado a los estudiantes que participarían en el taller. Para la aplicación se utilizó la herramienta formularia de Google para recabar los resultados. El cuestionario se resolvió en aproximadamente 30 minutos (en el anexo 1 se puede observar las preguntas del diagnóstico).

2.4.1. Resultados de la evaluación diagnóstica

Los resultados permitieron identificar los siguientes conocimientos.

Conocimiento pedagógico del contenido

Consideración de la relevancia del contenido. En un primer acercamiento a los resultados se observa algo interesante por parte de los estudiantes:, aunque de los tres primeros contenidos que consideran de mayor dificultad para los alumnos de cuarto, quinto y sexto grado están los decimales, persiste, como lo menciona la literatura, la idea de dar prioridad a las fracciones por considerarse de mayor dificultad desde el punto de vista cognitivo de los alumnos (75% de los participantes señalaron esta opción); se agrega también a esta dificultad con las fracciones la comprensión de operar con las multiplicaciones y las divisiones (25% de los participantes).

Otra pregunta del instrumento aplicado ayudó a resaltar la importancia que los participantes dan a las fracciones por sobre los decimales, fue la siguiente: ¿considera fácil o difícil enseñar los números decimales?, en la cual se obtuvieron respuestas como las siguientes:

> *Karyme: Considero que hay mayor dificultad con las fracciones.*
> *Carmen: Las fracciones son de mayor tiempo, porque la verdad a veces ni siquiera le entiendo, entonces pues creo que primero que nada sería que lo comprendiera en su totalidad.*

Grados asignados para el estudio de los números decimales en la educación primaria. Con base en los planes y programas de educación primaria mexicana (2011), el estudio de los decimales se lleva a cabo en los últimos tres grados (cuarto, quinto y sexto grados), en ese sentido se planteó la siguiente pregunta: ¿En qué grado cree usted que debe comenzar la enseñanza de los decimales? Justifique su respuesta. Los resultados dividieron en dos partes al grupo de participantes, un 50% consideró tercer grado y el resto cuarto grado. Algunos de los argumentos de los estudiantes en formación docente fueron:

> *Ignacio: Pues podría empezar desde tercero, ya que, los niños ya ven las fracciones y divisiones que son más difíciles.*
> *Lino: A partir de tercer grado, porque pienso que durante los dos primeros grados ya tuvo un dominio en el manejo de enteros, entonces está listo para pasar al siguiente nivel que es el acomodo de los números con punto.*

En las respuestas de los participantes se contempla una ausencia de conocimiento respecto a la parte matemática y didáctica del contenido números decimales. Como hemos visto, desde hace tiempo la investigación ha considerado a los decimales como difíciles en su aprendizaje, así como en su enseñanza ya que son números con aspectos que los hacen diferentes de los naturales (densidad, representación, orden y al operar con números menores a la unidad en la división y la multiplicación). Pero al parecer, los estudiantes no saben mucho de ello, lo cual es entendible puesto que conforme al plan de estudios de la Normal aún no han comenzado el estudio de estos números (aunque, la parte matemática, desde la educación primaria se tendría que haber estudiado).

Interpretación de las respuestas de los alumnos de primaria al utilizar los decimales. El instrumento de evaluación también fue de gran provecho para examinar cómo los participantes piensan, e interpretan posibles respuestas de los niños. Esto se indagó dado que, además de tener conocimientos matemáticos de los números decimales los profesores también deben saber cómo los están entendiendo las diferentes mentes que conforman el grupo que está a su cargo. Enseguida muestro el ejemplo de una pregunta y una de las interpretaciones a las que llegaron los participantes:

En un examen PLANEA se preguntó a los niños ¿cuántos números hay entre 0.280 y 0.290? La mayoría contestó que hay nueve, algunos contestaron que hay 99, ¿cuáles niños crees que dieron la respuesta correcta?

Tabla 8. *Resultados a la pregunta sobre la densidad de los decimales*

Resultado de los participantes en el taller	
Respuesta correcta: 2	Respuesta incorrecta: 6

> *David: Los alumnos que respondieron de manera correcta son los que dijeron que hay 9, porque es lo que hace falta para llegar al 0.290.*

Se puede identificar en esta respuesta la falta del conocimiento de la propiedad de densidad de los decimales. Entonces, es conveniente que los futuros profesores conozcan esta propiedad. Y, además, que sepan las dificultades con que los estudiantes de primaria se van a encontrar.

Conocimiento matemático de los decimales

A continuación, se muestra lo que se identificó en este dominio con base en el diagnóstico:

- Los ocho participantes consideran que los números decimales solo son aquellos que se expresan con punto. Cabe agregar que el 100% consideró que π era decimal y ninguno consideró decimal la fracción $\frac{30}{10}$.
- Ninguno de los estudiantes logra identificar la propiedad de densidad y fijan falsos consecutivos entre un numero decimal y otro (consideran que 0.291 es el sucesor de 0.29)
- Quienes respondieron el formulario no tienen dificultad al comparar dos decimales y saber cuál es más grande (por ejemplo: 0.9 > 0.785).
- Solo dos integrantes perciben que la multiplicación con decimales no siempre da como resultado un número mayor que los factores o igual que uno de ellos.
- Solo dos integrantes perciben que la división con decimales no siempre da como cociente un número menor que el dividendo.
- A todos les cuesta trabajo encontrar equivalencias entre los decimales y las fracciones y utilizar esta equivalencia como estrategia para operar ($x+\frac{2}{5} = 5.65$)

Al finalizar el examen hubo espacio para que los participantes opinaran sobre cómo se sintieron al responder el instrumento. Gracias a lo anterior surgieron comentarios como los siguientes que sirvieron para analizar lo que, desde su perspectiva, se les dificulta más:

> *Tallerista: cómo te fue con el formulario*
>
> *Victoria: Algunas preguntas se complicaron un poco, pero espero que estén bien*
>
> *Tallerista: ¿cuáles?*
>
> *Victoria: El de la suma, no recuerdo si se resuelve así; el de los números intermedios también, donde se pregunta lo de PLANEA (referente a la densidad)*
>
> ....
>
> *Tallerista: Ok, dime, qué te pareció el diagnóstico*
>
> *Elizabeth: pues a mí siempre se me han dificultado las fracciones, entonces, la parte de la suma de fracciones se me dificultó y había algunas cosas que se me olvidaban*

Tallerista: ¿me podrías dar un ejemplo?

Elizabeth: sobre cuántos números hay entre un número y otro.

Las opiniones de los participantes coincidieron en la reflexión sobre la realización de una suma e interpretación de la respuesta de un alumno a un reactivo de PLANEA, esto incluso se vio reflejado en los resultados del instrumento de evaluación:

Suma de fracciones al que hacen referencia los estudiantes

Resuelve

$$3\frac{}{100} + \boxed{}\,\frac{2}{5} = 5.65$$

Tabla 9. ***Resultados de la suma de fracciones***

Respuesta correcta: 4	Respuesta incorrecta: 1	Sin contestar: 3

Con base en la información obtenida mediante el formulario, se observa que los estudiantes argumentan que el primer paso para resolver la suma anterior es efectuar una división entre el numerador y el denominador (de cada uno de los sumandos) para hallar la expresión decimal con punto. Al considerar esa estrategia se encuentran con una dificultad: en el primer sumando no aparece el numerador; eligiendo resolver mediante prueba y error; incluso tres no dan respuesta.

2.5. Diseño de las sesiones

Con los conocimientos previos identificados mediante el instrumento de evaluación (dificultades tanto en el conocimiento matemático como en el pedagógico vinculado a los decimales) y el análisis de literatura, diseñé las sesiones que se llevarían a cabo durante el taller. Como ya se ha mencionado, este se diseñó para siete sesiones de una hora cada una, que se impartirían los martes y los jueves. Las sesiones exhortaban a los estudiantes a interactuar conceptualmente con:

- La comparación y el orden de los números decimales.
- Eliminar el inadecuado criterio de tomar la cantidad de cifras para definir si un decimal es mayor que otro.

- Representar los decimales mediante modelos de área y en la recta numérica.
- La relación de los decimales con las fracciones (noción de equivalencia).
- La multiplicación y división con números fraccionarios decimales entre 0 y 1.
- Identificar la propiedad de densidad.
- Resolución y planteamiento de problemas que se resuelvan utilizando los decimales.

La organización de los contenidos de este taller de formación de futuros docentes está fundamentada bajo dos consideraciones: el conocimiento disciplinar y el conocimiento pedagógico. Los contenidos conceptuales que se proponen recuperan nociones relevantes acerca del número decimal. En cuanto a lo pedagógico, se busca la reflexión por parte de los participantes sobre las dificultades de los alumnos y las prácticas de enseñanza alrededor del contenido de los decimales. A continuación, se presenta la secuencia de las actividades que se trabajaron durante el taller.

2.5.1. Sesión 1. Comparar y ordenar números decimales

Las actividades planeadas para esta sesión fueron:

- Ordenar de mayor a menor números decimales (Ordena de mayor a menor los siguientes números: 0.25, 0.365, 0.1, 0.05,0.2, 0.035)
- Comentar cuáles son las dificultades que piensan que los niños pueden tener al ordenar los decimales.
- Usar el cuadrado unidad para resolver la situación de ordenar los números decimales.
- Comentar las diferencias entre ordenar números decimales y ordenar números naturales.
- Identificar los conocimientos matemáticos necesarios para ordenar los números decimales.
- Reflexionar y opinar acerca de la forma acostumbrada de algunos profesores al enseñar los decimales.

2.5.2 Sesión 2. Eliminar el inadecuado criterio de tomar la cantidad de cifras para definir si un decimal es mayor que otro.

Las siguientes son las actividades planeadas para esta segunda sesión:

- Analizar un fragmento de clase con el propósito de analizar las respuestas que dan los alumnos de primaria al resolver tareas de comparación de números decimales.
- Responder: ¿cuál es el razonamiento matemático que se observa en las respuestas de los niños?, ¿es correcto o no?
- Compartir a los participantes lo siguiente: "Un aspecto de los decimales es que: Después de la última cifra significativa a la derecha del punto decimal pueden agregarse ceros sin que el decimal cambie de valor [noción de equivalencia]".
- Identificar tareas relacionadas con los decimales que son posibles de resolver con la estrategia anterior.
- Responder algunos problemas e identificar si es útil la estrategia de agregar ceros para resolverlos.
- Reflexionar a partir de la lectura de un texto sobre la noción de equivalencia en los racionales.

2.5.3. Sesión 3. Representar decimales mediante modelos de área y en la recta numérica

En este caso, las actividades planeadas fueron las siguientes:

- Analizar situaciones que implican distintas representaciones gráficas de una misma fracción.
- Resolver situaciones diversas de ubicación de puntos que corresponden a decimales en la recta numérica e identificar su posible dificultad para los alumnos
- Como actividad final de la sesión, reflexionar acerca de si los decimales solo se pueden escribir con punto.

2.5.4. Sesión 4. La relación de los decimales con las fracciones (noción de equivalencia)

Para esta sesión se planearon las siguientes actividades:

- Resolver a través de la situación didáctica "los móviles" problemas de equivalencia entre fracciones y decimales
- Reflexionar, a partir de la resolución de las tareas, sobre la importancia de explicitar la equivalencia entre fracciones y decimales.

- Compartir su opinión sobre la situación trabajada: ¿es fácil o difícil de resolver?, ¿Qué contenidos se trabajan?, ¿Cuál es la relevancia de que los niños identifiquen la relación entre decimales y fracciones?
- Promover la reflexión acerca de qué números son decimales y cuáles no.

2.5.5. Sesión 5. La multiplicación y división con números decimales positivos entre 0 y 1

Para esta sesión se planeó: a partir de la clásica situación del laberinto de los decimales (ver capítulo siguiente), ampliar el conocimiento que tienen los estudiantes para profesores sobre la multiplicación y la división (usando números fraccionarios decimales entre 0 y 1).

2.5.6. Sesión 6. Identificar la propiedad de densidad

En esta sesión se consideró introducir las siguientes actividades:

- Identificar números decimales entre otros dos.
- Reflexionar sobre la cantidad infinita de números que existen entre dos decimales.
- Identificar que los números decimales se comportan de manera diferente que los naturales (por ejemplo, en los decimales no tiene sentido hablar de sucesor o antecesor porque no podemos asegurar que un número sigue o antecede a otro).
- Interpretar las respuestas erróneas que dan los alumnos a través de su concepción de densidad restringida.
- Leer un texto que ayude a reflexionar sobre el significado de la propiedad de densidad.

2.5.7. Sesión 7. Plantear problemas que se resuelvan utilizando los decimales.

Actividades planeadas para el desarrollo de esta sesión:

- Resolver problemas referentes a los siguientes contenidos: multiplicación, división, adición de números expresados en fracción y notación con punto.
- Llegar a una conclusión sobre la importancia de que el docente realice una puesta en común de los procedimientos en un problema planteado en clase.

- Resolver un problema de multiplicación de fracciones decimales utilizando el cuadrado unidad
- Inventar problemas que impliquen algunos de los objetivos trabajados durante el taller.
- Comentarios finales sobre el taller.

2.6. Recolección de evidencias

Con el fin de analizar los resultados de la intervención, se recolectaron evidencias de las actividades realizadas y los avances mostrados por los ocho futuros profesores participantes. Esto se hizo mediante la recuperación de: videos de Google Meet, formularios de Google, pizarras digitales, capturas de pantallas, correos electrónicos y programas orientados al procesamiento de textos, que fueron las herramientas utilizadas en el taller llevado a cabo de manera remota.

Posteriormente, para organizar las evidencias recolectadas, analizarlas y plasmar los datos que conforman la intervención, se realizaron las siguientes fases:

1. Recuperación de la grabación de las actividades realizadas durante el taller virtual con la herramienta digital Google Meet.

2. Recuperación de las respuestas dadas a los formularios de Google, las actividades realizadas en las pizarras digitales, así como sus capturas de pantalla y las actividades elaboradas en Word que se hicieron llegar por correo electrónico.

3. Transcripción de todos los videos correspondientes a las sesiones que se llevaron durante el taller virtual.

4. Análisis de las evidencias del taller virtual para la ampliación de los conocimientos matemáticos y pedagógicos de los futuros profesores de educación primaria participantes.

Capítulo 3. Desarrollo del taller

Los grandes profesores no nacen, se les enseña a serlo.

(D. Ball)

Capítulo 3. Desarrollo del taller

Sesión 1

El objetivo de la sesión fue que los participantes compararan y ordenaran números decimales. Esto se hizo con la intención de que durante la actividad los estudiantes reconocieran el uso de representaciones visuales —cuadrado dividido en cien partes iguales— para dar sentido a la comprensión de números decimales mayores, menores o equivalentes en comparación con otros. También, a través de las escrituras de los decimales mostradas en esta sesión, el conductor del taller quería llegar a que los estudiantes se dieran cuenta de tres formas distintas de representar un decimal: con punto, con fracciones decimales y mediante áreas.

3.1. Objetivo de la sesión: Comparar y ordenar números decimales

Para iniciar la sesión se les propuso a los estudiantes resolver la actividad mediante un formulario de Google. El conductor les comentó que dicho formulario contenía dos secciones y, por tanto, se harían cierres parciales, uno por cada sección, para discutir en plenaria sus resultados. En la primera sección se les presentó un cuadrado dividido en cien partes iguales, al cual se le asignó el nombre de cuadrado unidad (ver adelante). Al estar resolviendo la primera parte de dicho formulario el tallerista presentó, mediante una pizarra de Google Jamboard, un cuadrado unidad idéntico al del formulario para que estuviera a la vista de todos los participantes.

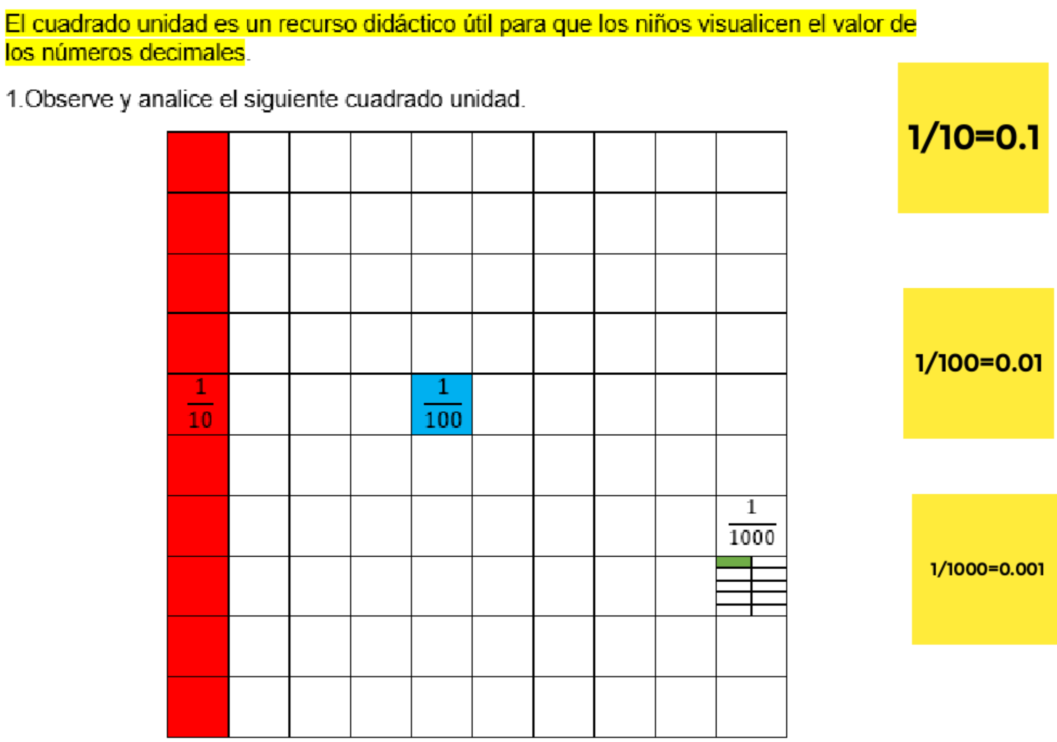
Al terminar la primera parte del formulario se discutió en plenaria distintas formas de representar un decimal. En un primer acercamiento los participantes consideraban que los números que estaban en el cuadrado unidad representando un décimo $\frac{1}{10}$, un centésimo $\frac{1}{100}$ y un milésimo $\frac{1}{1000}$ son fracciones —y no lo vincularon con otra forma de representar los decimales— argumentando que según la forma en como están acomodados tienen un numerador y un denominador. El conductor del taller extendió la indagación preguntándoles: *“¿nada más serán fracciones?, ¿esos números no son decimales?”*.

De acuerdo con las anteriores preguntas, los involucrados tomaron en cuenta que esos números también son decimales, como lo menciona David, cuya idea es aceptada por los demás:

> *David: También pueden ser decimales, porque una fracción tiene una equivalencia a número decimal. 0.1 es un décimo, 0.01 es un centésimo, y 0.001 es un milésimo.*

En el cuadrado unidad se anotó del lado derecho la representación con punto de los números decimales que aparecían expresados como fracción decimal, propuesta por David y aceptada por el colectivo.

Figura 2. Cuadrado unidad proyectado durante la primer sesión



Aunque, en un principio no se reconocía la noción de equivalencia que posibilita a los decimales de ser representados de distintas maneras, tanto en los resultados de los formularios como durante la discusión grupal, los participantes no mostraron dificultad para ir representado los decimales mediante su expresión con punto, fracción decimal, el área equivalente, así como establecer la relación que existe entre los décimos, centésimos y milésimos.

3.1.1. Ordenar y comparar decimales empleando el cuadrado unidad

En esta primera sección, para que los estudiantes del taller comprendieran el significado de cuándo es mayor, menor o igual un número decimal con respecto a otro, fue conveniente retomar una pregunta del diagnóstico, pero esta vez tomando como estrategia la representación visual (cuadrado unidad). El conductor les preguntó: *"para definir si un decimal es mayor que otro, creen que el cuadrado unidad sirva para que los niños respondan, ¿Qué es más grande 0.789 o 0.9?"*. A lo que los estudiantes comentaron lo siguiente:

> *Guadalupe: sí, porque pueden iluminar: 7 décimos, 8 centésimos, 9 milésimos y ya con el cuadrado unidad irlos juntando y ver que es más pequeño que 9 décimos*
>
> *Tallerista: ¿qué estarían aprendiendo los niños?*
>
> *Karyme: Qué cantidad es mayor.*
>
> *Guadalupe: pero también que 9 décimos es igual a 900 milésimos. Así verían que 0.9 es 0.900 que es mayor que 0.785. Es decir, se pueden agregar ceros y no cambia la cantidad.*

De esta manera, los argumentos que surgen —siendo aceptados por el resto de los participantes— son que, además de ayudar a definir qué número de los propuestos es más grande, también el uso del cuadrado unidad apoya para identificar la relación entre los décimos, centésimos y milésimos ($\frac{9}{10} = \frac{900}{1000}$), así como que algunos comprendieran el porqué es válido agregar ceros después de la última cifra significativa sin que el valor del número se altere (0.9 = 0.900). A partir de aquí, la actividad admitió aprobación entre algunos participantes al pensar los decimales como números que se pueden representar mediante escritura con punto o fracción decimal, como lo insinúa Guadalupe: *"yo normalmente pensaba que solo los que llevaban punto eran decimales. Nunca había pensado en la relación que tienen con las fracciones decimales"*.

Con el fin de que los participantes consideraran que la representación visual —cuadrado unidad— se puede utilizar como un recurso de resolución de situaciones matemáticas para quien está aprendiendo, dentro de la primera sección del formulario se realizaron los siguientes cuestionamientos: ¿Usarías el cuadrado unidad para la enseñanza de los números decimales? y ¿Qué aprendizajes de los decimales piensas que se pueden apoyar utilizando el cuadrado-unidad? En la primera pregunta, la mayoría de los estudiantes del taller comienzan a recuperar las ideas compartidas durante la sesión y destacan que promover el uso del cuadrado unidad puede servir para que los aprendices comprendan:

a) *La relación entre décimos, centésimos y milésimos*. Los participantes mencionaron que quien trabaja con el cuadrado unidad puede entender las equivalencias entre los decimales, por ejemplo: ¿Cuántas veces cabe un centésimo en un décimo?, ¿Qué parte de un décimo es un centésimo? y ¿Qué parte de un centésimo es un milésimo?
b) *Identifiquen si un decimal es mayor, menor o igual que otro.* Los estudiantes del taller piensan que el uso del cuadrado unidad sirve como herramienta para que los alumnos de primaria comparen diversas cantidades.
c) *Identifiquen otras formas de representarlos*. Los participantes consideran que al ir realizando la situación del cuadrado unidad es conveniente que el docente mencione, a quien está aprendiendo, que los números decimales se pueden representar mediante una fracción decimal y su escritura con punto. A demás de colorear el área en función de lo que representa la cantidad del número decimal.

Empero, dos de los participantes siguen considerando que solo se puede utilizar para reconocer las fracciones decimales en que está dividida la unidad. Es decir, si lo divido en 10 partes y tomo una, tengo la décima parte de la unidad; si lo divido en cien partes y tomo una, obtengo una centésima parte de la unidad; así como si lo divido en mil partes y tomo una parte, obtengo una milésima parte de la unidad.

En lo que respecta a la segunda pregunta, en la puesta en común el conductor del taller preguntó al grupo: *"¿Qué aprendizajes de los decimales piensas que se pueden apoyar utilizando el cuadrado unidad?".* Después de un momento Victoria pidió la palabra y dijo específicamente:

> *Victoria: Convertir fracciones a decimales y observar que 1/10 corresponde al 0.1, que 1/100 es igual a 0.01 y que 1/1000 se representa como 0.001.*

Para confirmar si todos estaban de acuerdo con Victoria el tallerista preguntó: *"¿los demás que piensan?".* La mayoría de los estudiantes mencionó que el cuadrado unidad principalmente apoyaba para que los alumnos de primaria aprendieran la noción de valor, comparar áreas en razón de la cantidad que representan y equivalencias entre decimales. Sin embargo, Carmen al igual que Victoria piensa que la situación solo sirve para representar de manera simbólica a los decimales. En el siguiente diálogo se pueden constatar las participaciones de los estudiantes:

> *David: Sirve para saber qué decimal es mayor que otro.*
> *Karyme: También para las equivalencias.*

Guadalupe: yo pienso que sirve para saber las veces que cabe un décimo en la unidad, cuántos centésimos hay en un décimo o si un milésimo es la décima parte de un centésimo.

Carmen: Para ver las equivalencias de fracciones a decimales y viceversa. Por ejemplo 0.001 es $\frac{1}{1000}$

Ignacio: Para que los niños ordenen series de números decimales comparando las áreas que representa cada número.

Quizá la intervención que se tuvo en un inicio con los números que se visualizaban en el cuadrado unidad dio pie a las respuestas de Victoria y Carmen. Para lograr que los estudiantes del taller llegaran a una misma conclusión sobre la utilidad del cuadrado unidad, el conductor del taller mencionó:

Tallerista: Entonces, para que todos estemos de acuerdo. El cuadrado unidad sirve para ordenar decimales comparando las áreas que representa cada número, para obtener equivalencias, así como para que el docente aproveche y presente a los alumnos la representación de los decimales mediante su notación con punto y fracción decimal.

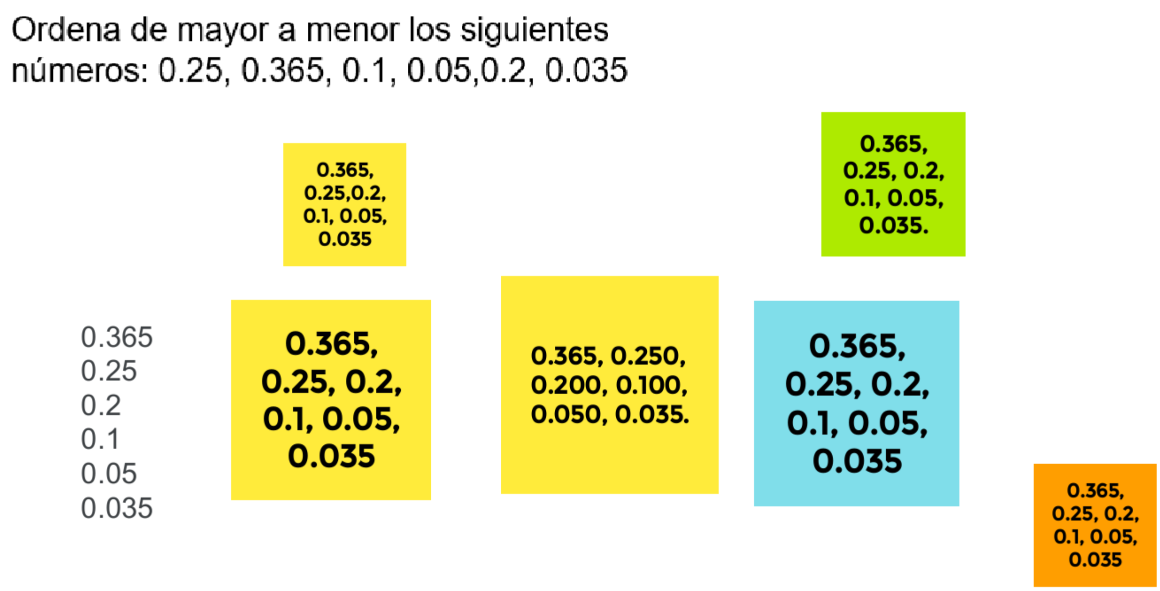
Era importante que los estudiantes del taller llegaran a la conclusión anterior, pues es un conocimiento del contenido que deben poseer. Algunos lo retomarían para la última actividad del taller (inventar dos problemas) y tal vez la mayoría para su futura labor docente. Es decir, para apoyar que los niños tengan una comprensión más íntegra de los conceptos de valor, equivalencia y diversas formas de representar los decimales (expresión con punto, fracción decimal, mediante una representación visual, etcétera).

3.1.2. ¿Quién manipula la representación visual?

Para que los participantes reflexionaran sobre la importancia de que sean los estudiantes de primaria los que establezcan la conexión entre la representación visual y el concepto de equivalencia de los decimales, en el formulario se les preguntó: *¿consideras que la situación del cuadrado unidad sirva para que los alumnos establezcan equivalencias entre los decimales?* Cinco estudiantes concluyeron que los alumnos de primaria pueden comprender, gracias al cuadrado unidad, cómo las cantidades están formadas para establecer la relación entre décimos, centésimos y milésimos, vinculando la representación con el valor de esos números para ordenarlos o compararlos. Por tanto, es conveniente que sea el alumno el que manipula el cuadrado unidad para dar sentido a la idea de equivalencia y el profesor desempeñe el rol de seleccionar la tarea que permita dar sentido a dicha idea matemática. Sin embargo, tres de los participantes creen que el maestro es quien debe manipular el cuadrado unidad para ejemplificar lo que valen los décimos, centésimos, milésimos; para que después los alumnos apliquen esos conocimientos.

Al término de la puesta en común de la primera sección, el conductor del taller dio la indicación para que los participantes continuaran con la siguiente sección del formulario. En esta, aparecían en un principio, seis números decimales. La consigna fue que los ordenaran de mayor a menor. Para que fuera visible para todos, el tallerista les comentó: *"además de ordenar los números, de mayor a menor en su formulario, les comparto una pizarra digital (Jamboard) para que todos podamos ver sus respuestas; para esto es conveniente usar la herramienta de notas adhesivas"*. Los estudiantes del taller los acomodaron como se ve en la siguiente imagen:

Figura 3. *Decimales ordenados por los estudiantes en la pizarra digital.*



Para iniciar la discusión el tallerista preguntó al grupo: *"¿cómo hicieron para ordenarlos?"*. A lo que dos participantes propusieron dos formas distintas. Carmen planteó considerar la columna en que está ubicada cada una de las cifras en relación con su cercanía al punto decimal (Décimos, centésimos, milésimos). Por su parte, Karyme se enfocó en agregar, en la parte decimal, ceros a la derecha después de la última cifra significativa, señalando que esto no modifica su valor. Las siguientes participaciones expresan las dos propuestas:

Propuesta sobre la colocación de cada una de las cifras con respecto al punto decimal:

> *Carmen: Primero el 0.365, porque no había un cero antes del 3, no sé cómo decirlo, o sea que el 3 estaba más cerca del punto y pues entre más alejados estaban del punto eran más chicos. ¿Me entiende?*

Propuesta sobre agregar, en la parte decimal, ceros a la última cifra significativa a la derecha:

> *Karyme: La metodología que yo utilicé fue agregarles un cero a los decimales. por ejemplo, 0.250, 0.200, 0.100 y así, para que todos tuvieran tres dígitos después del cero y ya me fijé para acomodarlos en orden.*

Al escuchar lo que planteó Karyme, el resto de los participantes consideraron que era una buena estrategia. Incluso, cinco estudiantes del taller mencionaron que al ordenar los números también la utilizaron.

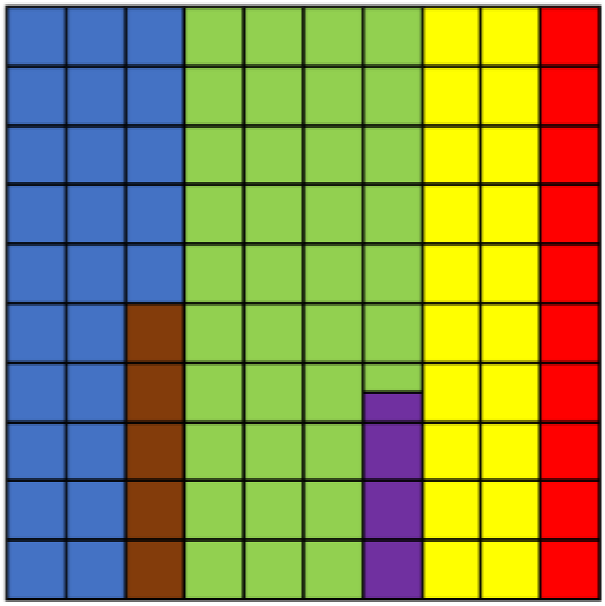
En seguida, para que los participantes reflexionaran sobre los errores que cometen los alumnos de primaria al resolver tareas de ordenar decimales, el conductor del taller preguntó al grupo: *"¿Qué dificultades pueden tener los niños al ordenar los números que acomodaron de mayor a menor?"*. Esto originó el siguiente dialogo:

> *David: Los números con más dígitos pueden causarles conflicto.*
>
> *Guadalupe: Pienso que la confusión está entre los naturales y los decimales. Por ejemplo: entre 0.05 y 0.1 los niños eligen 0.05, porque 5 es mayor que 1.*
>
> *Carmen: Es cierto lo que dice Guadalupe, entre 0.035 y 0.05 pueden elegir 0.05.*

De acuerdo con sus comentarios, los estudiantes del taller logran identificar que, la naturaleza matemática de los errores de orden de los decimales radica en los conocimientos que se tienen de los naturales.

Otra tarea que se planteó a los estudiantes del taller, en la segunda sección del formulario de Google, fue mostrarles un cuadrado unidad coloreado con seis colores distintos (cada color representa una cantidad distinta de área). La consigna era que los participantes anotaran con número decimal la cantidad que representa cada color. Posteriormente, debían ordenar los colores, de manera descendente, de acuerdo con el área que ocupa cada uno (representada por cada uno de los números correspondientes a dichas áreas). A continuación, se presenta el cuadrado unidad coloreado (figura 4).

Figura 4. *Cuadrado unidad pintado de seis colores distintos.*



Los estudiantes del taller no tuvieron problema para ordenar e identificar las cantidades representadas por los seis colores. En la puesta en común el conductor del taller aprovechó para preguntarles*: "En los colores verde y morado hay un cuadradito que está partido a la mitad, ¿Cuánto vale la mitad del cuadradito?".* Esto con la intención de que surgieran estrategias para resolver la tarea de encontrar la mitad de $\frac{1}{100}$. Karyme e Ignacio propusieron las siguientes:

> *Karyme: Yo hice una regla de 3. Yo observé la imagen y en total son 100 cuadraditos. Entonces, si 100 es la unidad, o sea un entero, solamente puse 0.5 por 1 entre 100 y me salió 0.005.*
>
> *Ignacio: ¡hum! creo que milésimos, creo que es 5 milésimos, porque un cuadradito tiene 10 milésimos.*

La mayoría consideró que la estrategia de Ignacio era más fácil de realizar, pues solo bastaba con encontrar la equivalencia de $\frac{1}{100}$ en milésimos y después encontrar la mitad.

Continuando con la puesta en común, el tallerista pidió que comentaran sus respuestas a la pregunta: ¿Qué diferencias hay entre ordenar números decimales y naturales? Los asistentes al taller dijeron lo siguiente:

> *David: El número de cifras en un decimal no te dice si es mayor o no que otro decimal.*
>
> *Guadalupe: Además, entre más ceros después del punto es menor la cantidad que representa. Por ejemplo: 0.05 no es igual que 0.5.*

Estos estudiantes del taller identifican dos características del orden de los decimales. Una es que la cantidad de cifras en un decimal no es relevante para saber si es mayor que otro. La otra tiene que ver con el cero. El cero o los ceros después del punto indican que una cantidad será más pequeña, porque las columnas que representan mayor valor no están ocupadas por cifras significativas.

Para finalizar la sesión el tallerista planteó una situación a los participantes con el propósito de que reflexionaran:

> *Tallerista: Quiero que escuchen la siguiente opinión de un profesor de sexto grado acerca de la enseñanza de los decimales y después me respondan si están de acuerdo. Este profesor dijo: Lo principal es que los niños aprendan los nombres de las posiciones: décimos, centésimos, milésimos. Para pasar pronto a las operaciones que es lo más complicado.*

Las respuestas por parte de los estudiantes del taller no se hicieron esperar:

> *David: No estoy de acuerdo, porque es importante que sepan ordenar los decimales y no solo saber su nombre.*
>
> *Victoria: Creo que enseñar el posicionamiento no lo es todo.*
>
> *Guadalupe: Creo que los alumnos deben tener una concepción del valor que representan y que también se representan con fracciones decimales.*
>
> *Karyme: Deben aprender las diferencias que hay entre los naturales. Además, es importante que sepan las igualdades para saber cuándo un número es más grande o pequeño que otro.*

3.1.3. Aprendizajes logrados en esta sesión

Con esta actividad se dio por terminada la primera sesión. En esta se concluyó lo siguiente: a) los participantes reconocen al cuadrado unidad como una herramienta didáctica útil para comparar decimales; b) identifican que los decimales se pueden representar mediante áreas, fracciones decimales o la escritura con punto; c) Señalan que una estrategia para comparar decimales es agregando ceros en la última cifra significativa de la parte decimal, aunque aún no comprenden que esto se debe a la noción de equivalencia. Por lo tanto, es necesario que en las siguientes sesiones se trabaje con esta noción.

Sesión 2

Antes de iniciar la sesión dos el conductor del taller revisó y analizó lo ocurrido durante la sesión pasada. Este se dio cuenta que, en las puestas en común de la sesión uno, solo algunos participantes estuvieron involucrados. Para tener certeza de que el colectivo está entendiendo los conceptos tratados en el taller, en esta sesión el conductor del taller intervendrá para lograr una participación más equitativa.

En esta segunda sesión se pretendía lograr que los estudiantes del taller reflexionaran sobre el conocimiento matemático y el pensamiento de los alumnos de primaria en torno al tema de comparar números decimales.

3.2. Objetivo 2: Eliminar el inadecuado criterio de tomar la cantidad de cifras para definir si un decimal es mayor que otro.

El tallerista inició la sesión haciendo un recordatorio de las conclusiones a las que se había llegado la sesión anterior. El propósito era que los estudiantes del taller opinaran acerca del orden de los decimales y buscar la participación de quienes no lo hicieron en la sesión uno. El siguiente diálogo muestra la participación de Elizabeth y Lino:

> *Tallerista: La siguiente pregunta va dirigida a Lino: ¿Qué recuerdas de la sesión anterior?*
> *Lino: Vimos que los niños tienen que comprender el valor de los decimales para poder decir cuándo un decimal es mayor que otro. Por ejemplo, 0.3 es mayor que 0.25 porque se le puede agregar un cero a 0.3 [y se convertiría en .30].*
> *Tallerista: Ahora, Elizabeth, ¿Qué recuerdas?*
> *Elizabeth: Que los niños no solo deben memorizar los nombres de la posición, sino que deben aprender que en un $\frac{1}{10}$ hay $\frac{10}{100}$, por ejemplo.*

Estas participaciones dieron certeza al conductor del taller de que los participantes sí estaban entendiendo las tareas del conocimiento matemático y pensamiento de los alumnos de primaria desarrolladas en la sesión uno. Guadalupe, una de las asistentes al taller muy participativa, agregó que también se vio el cuadrado unidad. Ella dijo: *"Vimos que el cuadrado unidad es un apoyo para que los niños comparen cantidades"*

Posteriormente el conductor del taller mencionó a los participantes que en la sesión dos trabajarían el objetivo: eliminar el inadecuado criterio de tomar la cantidad de cifras para definir si es mayor un decimal que otro. También agregó que, al igual que la sesión uno, se trabajaría con un formulario de Google que estaba dividido en dos secciones, por lo que, se harían dos cierres parciales para discutir sus respuestas.

3.2.1. Conocimiento especializado del contenido

En la primera sección se pidió a los participantes que analizaran un fragmento de una clase (véase la figura 5) con el propósito de tres perspectivas: interpretar de las respuestas de los niños, los conocimientos necesarios para poder resolver la actividad y la estrategia de agregar ceros a la derecha de la última cifra significativa:

Figura 5. Fragmento de clase[12]

La maestra pide que ordenen los lugares de una competencia de natación. Los datos se presentan en la tabla:

País	Tiempo (minutos)	Lugar
Cuba	18.19	
México	18.30	
Rusia	18.2	
Alemania	18.177	
Canadá	18.030	
Suecia	18.09	

Niño: ¿Qué vamos a poner?
Maestra: El lugar; el que hace menos tiempo es primer lugar.
Otro niño: ¡Rusia es el que hizo menos, es el primer lugar!
Maestra: Como son 18 enteros, no nos vamos a dar cuenta de quién hizo menos tiempo. ¿Cómo nos vamos a dar cuenta? Nos vamos a pasar a los números decimales comparando primeramente los décimos
Otro niño: ¡Rusia!

En la primera puesta en común, después de que resolvieron la primera sección del formulario, el conductor del taller se dirigió directamente a Ignacio, Carmen, Victoria y Elizabeth para preguntarles: *"¿Cuál es la interpretación de los niños que creen que Rusia es el de menor tiempo?"*. A partir de dicha cuestión surgió el siguiente diálogo:

Ignacio: Que entre menos cifras después del punto es menor la cantidad.

Carmen: Ellos no consideran el tamaño del número después del punto. No es 2, sino .200.

Victoria: Si, 18.2 no es menor que 18.030.

[12] Fragmento tomado de Avila y García (2008).

Elizabeth: Los piensan como naturales y por eso piensan que el 2 es el más pequeñito.

En sus respuestas los participantes suponen que los alumnos de primaria tienen problemas para identificar cuándo un decimal es mayor que otro, pues los entienden desde la propiedad de orden de los naturales: entre más cifras contenga el número es mayor la cantidad que se está representando.

Esta respuesta es compartida por todos los asistentes al taller, puesto que se pudo percibir en las respuestas del formulario de Google.

Continuando con la puesta en común el tallerista comentó al grupo que en ocasiones algunos de los asistentes al taller mencionaban que, en la parte decimal, en la última cifra significativa, se puede agregar ceros. Entonces, ahora se enfocó en Lino, Guadalupe, David y Karyme para cuestionarles: *"¿creen que agregar ceros de esa manera sea útil para desechar el criterio de, a mayor número de cifras, más grande es el decimal?"*. De acuerdo con lo anterior surgió el siguiente episodio:

Lino: Sí, porque si se les pone a comparar 0.150 con 0.2 pueden agregar ceros y observar que 0.200 es mayor.

Guadalupe: Sí, porque la cantidad no se altera y esta habilidad permitirá saber qué cantidad es más grande.

David: Claro, con ello se pueden igualar las cifras y ver cuál es más grande.

Karyme: Sí, porque lo que se obtiene es una equivalencia para ver cuál es mayor.

Hasta este momento las participaciones consideraban que agregar ceros, en la parte decimal, después de la última cifra significativa era una buena estrategia para definir si un decimal es mayor que otro. Sin embargo, la participación de Karyme da pie a indicar que la validez de dicha estrategia se debe a la noción de equivalencia.

Otra de las preguntas de la primera sección del formulario que se discutió durante la puesta en común fue: *¿Qué otras tareas se pueden resolver con la estrategia de agregar ceros?* Los ocho participantes señalaron que, gracias a la estrategia de agregar ceros en los decimales (dos lo mencionaron como encontrar su equivalente), es posible resolver algoritmos de suma y resta que impliquen decimales. Es decir, se puede completar con ceros la parte decimal, alinear el punto y resolver la operación.

Al término de la primera puesta en común el conductor del taller indicó a los participantes que continuaran con la siguiente sección del formulario. En dicha sección se plantearon dos problemas para que los resolvieran. Cuando anunciaron haber concluido el formulario, el tallerista compartió una pizarra para la discusión de dos problemas que se les plantearon (véase la figura 5); las notas adhesivas son las soluciones de los participantes.

Figura 6. *Soluciones a los problemas planteados en la sección 2 del formulario*

Esta vez el tallerista pidió a Ignacio que mencionara la propuesta que tenía sobre cómo resolver el problema de resta:

> *Ignacio: Para resolver con una operación escrita se puede utilizar el aspecto de agregar ceros, se le agregan dos ceros al 3.9.*

Los demás asistentes al taller aceptaron la respuesta refiriendo que era más práctico, en la operación escrita, restar 3.900 – 3.175. De manera que, Ignacio anotó en la pizarra su operación para que fuera visible para todos.

En el caso del segundo problema, el conductor del taller pidió a Lino, Elizabeth y David que mencionaran sus soluciones:

> *Lino: Juan tiene razón, porque también está 2.41, 2.42, 2.43… hasta 2.49.*
>
> *Elizabeth: Sí, es Juan. Porque están los centésimos y hasta los milésimos.*
>
> *David: También creo que Juan. Pero pienso que hay muchos números decimales, ya que, puedes agregar ceros. Por ejemplo: 2.40, 2.400, 2.4000… y 2.50, 2.500, 2.5000…*

Todos reconocieron que el procedimiento de David era correcto, puesto que, se pueden agregar ceros, en la parte decimal, en la última cifra significativa sin que se altere el valor del número. De esa forma, el conductor del taller les propone que David anote las cantidades que sugirió para que estén a la vista de todos. Aunque, ya pueden reconocer que entre un decimal y otro es posible incorporar un número infinito de decimales, siguen sin saber que esta propiedad es conocida como densidad de los números decimales.

Después de los problemas anteriores, en el formulario de Google se planteó un tercer problema. Este decía: Ordena de mayor a menor los pesos de cinco pacientes de una clínica. Los pesos en Kilogramos son: 48.25, 48.05, 48.3, 48.238 y 48.040. En la puesta en común los estudiantes del taller sostuvieron, que al igual que en los otros problemas, se puede utilizar la estrategia de agregar ceros para igualar la cantidad de cifras e ir ordenando de manera descendente los pesos de los pacientes: 48.300, 48.250, 48.238, 48.050 y 48.040.

En los tres problemas anteriores se trabajó con los siguientes conocimientos matemáticos: resta (operación escrita), propiedad de densidad y orden de decimales. Con el propósito de que los participantes se dieran cuenta de la intención didáctica de los problemas, el tallerista preguntó al grupo: *“¿Qué contenidos se trabajan con los tres problemas?”* Todos mencionaron que era la resta y ordenar decimales. Pero en el caso del problema de densidad, lo propusieron como hallar un decimal entre otros dos.

3.2.2. Tema emergente: el valor de π

Cuando los estudiantes del taller lograron identificar la estrategia de agregar ceros para igualar la cantidad de cifras y con ello resolver los problemas propuestos en la segunda sección del formulario, la mayoría no logró comprender que en dicha estrategia subyace la noción de equivalencia. Esto desató la siguiente polémica, que ya no tiene que ver con las equivalencias, sino con la escritura de expresiones de decimales periódicos y los irracionales como π.

> *Tallerista: Hace un momento concluyeron que una estrategia para resolver los problemas es agregar ceros al decimal. Pero ¿Cuántos ceros pueden agregarse, a la derecha del punto, en la última cifra significativa?*
>
> *Guadalupe : Pueden agregarse números tantas cifras [como] queramos saber.*
>
> *David: .490, .4900, .49000 no llega al .50. Hay infinidad, millones de números que pueda poner.*

Tallerista: ¿Creen que sea infinito el número de ceros que pueda poner?

Guadalupe : No, es que no sé profe, es que hay números que tienden al infinito como π que son irracionales, pero hay otros que no, que sí son finitos, ¡creo!

Karyme: Es cierto, cuando divides 1 $\div 3\, es\ igual\ 0.33\overline{3}$ *(refiriéndose a la expresión con punto de* $\frac{1}{3}$*).*

Tallerista: Ok, hay números finitos y otros infinitos. Pero en este caso, el agregar ceros lo puedo hacer de manera infinita. Recuerden, lo que se hace es una equivalencia .49 es igual a .4900.

Después de estos comentarios, el conductor del taller recordó que, de acuerdo con el diagnóstico, los ocho participantes consideraban a π como un decimal. Por lo que pensó que era necesario que los estudiantes reflexionaran sobre las expresiones decimales finitas, periódicas y no periódicas. De esa manera, propuso a los estudiantes del taller dar lectura a un fragmento del libro: *Los decimales más que una escritura:*

Reflexión

Los números decimales son aquellos que pueden escribirse en forma de fracciones decimales.

- Las fracciones decimales son las que pueden expresarse con un numerador entero y un denominador que es una potencia de diez, por ejemplo $\frac{3}{10}$ y $\frac{1}{1000}$ son fracciones decimales; también son fracciones decimales $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{5}$, ya que se pueden encontrar fracciones equivalentes cuyos denominadores sean alguna potencia de 10.
- Este tipo de fracciones tienen la particularidad de que pueden representarse de otra manera: utilizando escrituras que llevan punto decimal, dando lugar a las expresiones decimales finitas y que en la escuela simplemente reciben el nombre de decimales. A las fracciones $\frac{3}{10}$ y $\frac{1}{1000}$ les corresponden, respectivamente, las siguientes escrituras decimales: 0.3 y 0.001
- Las fracciones que no son decimales (por ejemplo $\frac{1}{3}$) no pueden representarse mediante una expresión decimal finita, este tipo de fracciones da lugar a las expresiones decimales periódicas infinitas ($\frac{1}{3} = 0.333333\ldots$)

(Avila y García, 2008, p33.)

Después de la lectura, el conductor del taller quería asegurarse de que los participantes tenían claro que los decimales se pueden representar: mediante una expresión decimal finita, una fracción decimal o una fracción que en su mínima expresión solo tiene al 2 y al 5 como factores primos del denominador. Asi, el tallerista pidió a Karyme y David responder lo siguiente:

Tallerista: Karyme, ¿Qué números con punto son equvalentes a $\frac{1}{2}$*?*

Karyme: $\frac{1}{2}$ *es igual a 0.5*

Tallerista: David, ¿Qué números con punto son equivalentes a $\frac{3}{5}$*?*

David: $\frac{3}{5}$ *es igual a 0.60*

Continuado con la reflexión de la lectura el conductor comentó al grupo que según las autoras existen números expresados con punto que no son decimales y se dirigió a Carmen, Lino, Ignacio y Elizabeth para preguntarles*: "¿Cómo son los números que representan un número decimal*?". Los estudiantes contestaron la pregunta del tallerista de la siguiente manera:

Carmen: Son fracciones que en su denominador tiene al 10, 100, 1000 y así.

Lino: Los decimales son equivalentes con las fracciones, pero no con todas.

Ignacio:Se escriben con punto, pero tienen final y si no es así no son decimales.

Elizabeth: En teoría pueden ser una fracción y números con punto. Como decia Karyme 0.5, $\frac{5}{10}, \frac{1}{2}$ *y hasta agregar ceros, o sea, 0.50 o 0.500.*

Cuando los cuatro estudiantes del taller terminaron su participación, el tallerista mencionó al grupo: *"Estoy de acuerdo con sus compañeros, sin embargo, el comentario de Ignacio llamó mi atención. Coincido con él, no todos los números expresados con punto son decimales*". En seguida, el conductor del taller planteó unas preguntas del diagnóstico para observar si estaban claras las diferencias entre las representaciones de un decimal y las que representan otros números. Ahora fueron Victoria , David, Karyme y Guadalupe los que respondieron.

Tallerista: Victoria , ¿5.98 es decimal o no?

Victoria : Sí, porque termina, no sigue.

Tallerista: David, ¿ $\frac{5}{8}$ *es decimal o no?*

David: (tarda un momento) Sí, porque es equivalente a $\frac{125}{1000}$

Tallerista: Karyme, ¿$\frac{30}{10}$ *es decimal o no?*

Karyme: Sí, porque tiene al diez como denominador.

Tallerista: Por último, Guadalupe , ¿el valor de π: 3.141592… es decimal o no?

Guadalupe : Ya vi que no, porque son infinitas sus cifras decimales.

3.2.3. Aprendizajes logrados en esta sesión

Con estas últimas reflexiones por parte de los participantes el conductor del taller concluyó la sesión dos. En síntesis, se logró: a) la participación de todos los estudiantes del taller en las puestas en común; b) que identificaran los errores que comúnmente cometen los alumnos de primaria al ordenar decimales; c) considerar la estrategia de agregar, en la parte decimal, ceros a la última cifra significativa para resolver: cálculos escritos de suma y resta, problemas de densidad y situaciones que involucran ordenar decimales; d) reflexionar la noción de equivalencia, así como diferenciar entre las expresiones decimales con punto que representan decimales y las que no. Si bien identifican que entre un decimal y otro hay infinidad de decimales, todavía no lo asignan como la propiedad de densidad.

Sesión 3

El propósito de esta tercera sesión fue que los estudiantes del taller analizaran y resolvieran situaciones que implican representar decimales en la recta numérica y mediante áreas. Otra cuestión que también se abordó, usando decimales, fue sobre cuantificar las veces que se repite una figura para formar un entero (por ejemplo: un rectángulo representa $\frac{3}{10}$ y, por tanto, hay que dibujarlo 3 veces y $\frac{1}{3}$ para formar al entero).

3. 3. Objetivo 3: Representar un decimal mediante área o en la recta numerica

El conductor del taller inició la tercera sesión dando a conocer el objetivo tres del taller a los participantes: Representar decimales mediante área o en la recta numérica. La indicación fue igual a la de las sesiones pasadas: resolver las actividades planteadas en un formulario de Google. Una vez más dicho formulario estaba compuesto por dos secciones. De tal manera, se discutirían los resultados durante dos puestas en común, pero mencionándoles que para presentarlos (en el caso de las rectas numéricas) se haría uso de algunas pizarras digitales. Dicho esto, los estudiantes del taller comenzaron a resolver la primera sección del formulario.

Estando terminada la primera sección, el conductor del taller inició la discusión preguntando: *"¿Cuáles fueron sus respuestas a los dos problemas que venían en la sección 1?"*. Estos problemas tenían que ver con cuantificar las veces que se repetía una figura —representada por un decimal— para formar un entero (Véase las figuras 7 y 8).

Figura 7. Problema 1: ¿Cuál de las dos respuestas es correcta?

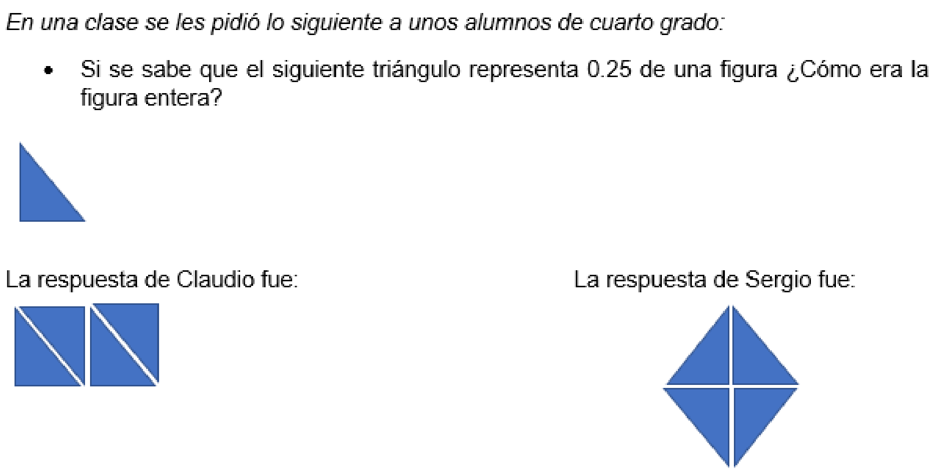
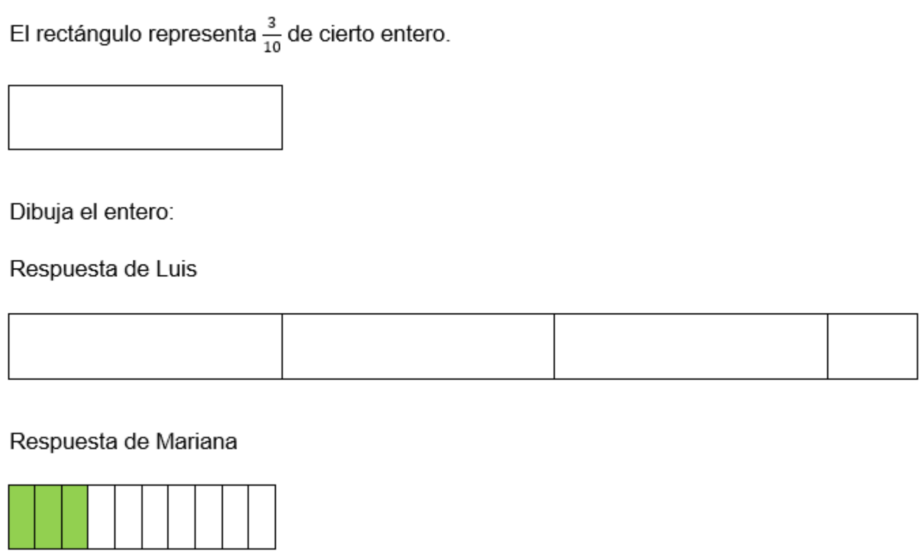


Figura 8. Problema 2: ¿Cuál de las dos respuestas es correcta?



Para el primer problema la participación se unificó y se acordó que las respuestas de los dos alumnos de cuarto grado eran correctas, debido a que, repetir cuatro veces el triángulo (0.25) representaba un entero, cualquiera forma que éste tuviese. Para el problema dos la participación estuvo dividida. Algunos consideraban, según la situación planteada, la respuesta de Luis como correcta y otros la de Mariana. Las opiniones que surgieron fueron las siguientes:

Elizabeth: La de Mariana es correcta, porque coloreó tres partes.

Carmen: Sí, Mariana, porque dejó sin colorear $\frac{7}{10}$.

Lino: Claro que Mariana, el rectángulo es $\frac{10}{10}$ *y pintó tres partes.*

David: Tuvo que ser Mariana, porque solo coloreó los $\frac{3}{10}$.

Guadalupe: Pienso diferente, se les dio un rectángulo que vale $\frac{3}{10}$. *Entonces, si se repite tres veces se obtiene* $\frac{9}{10}$ *y al final hay que agregar un cachito que valga* $\frac{1}{10}$ *para que sea el entero. Por lo que creo que la respuesta de Luis es la correcta.*

Ignacio: Sí, Luis representó tres rectángulos de $\frac{3}{10}$ *y añadió un rectángulo más pequeño para completar el entero.*

Karyme: También pienso que Luis. Es que se les pide que dibujen el entero y no que coloreen $\frac{3}{10}$.

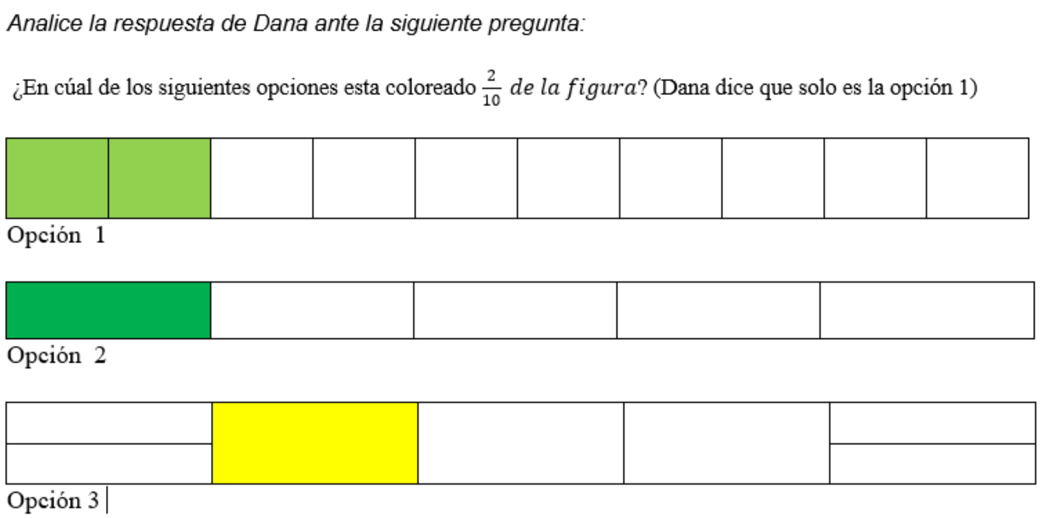
Victoria: Es como dicen mis compañeros. Luis dibujó $\frac{3}{10}, \frac{3}{10}, \frac{3}{10}$ *y* $\frac{1}{10}$.

Como se puede observar, la mitad de los participantes consideraban la respuesta de colorear $\frac{3}{10}$ del rectángulo y la otra mitad la respuesta aditiva de cuatro longitudes $\frac{3}{10}+\frac{3}{10}+\frac{3}{10}+\frac{1}{10}$ para formar al entero (según los participantes 3 rectángulos y un cachito).

Para que todos llegaran a una respuesta en común el conductor les comentó que, si hacía falta repensar su respuesta, podían hacerlo. Al exponer lo anterior David dijo: *"creo que es necesario cambiar mi respuesta, ya que, como dicen mis compañeros el rectángulo que vale* $\frac{3}{10}$ *se repitió tres veces y un tercio para formar el entero"*. Después del comentario de David, los participantes consideran que lo señalado como cachito o rectángulo más pequeño es $\frac{1}{3}$ de la tira que representa $\frac{3}{10}$ de la longitud de la unidad. En lo anterior, encontramos un razonamiento multiplicativo por parte de los participantes, pues matemáticamente se obtiene $\frac{1}{10}$ a partir de $\frac{1}{3} \times \frac{3}{10}$. Sin embargo, Lino se queda en silencio y el tallerista no insistió en preguntarle si sería conveniente replantear su respuesta.

Continuando con la puesta en común de la primera sección del formulario, se discutió la respuesta que da una alumna de quinto grado de primaria ante la situación de identificar, entre tres opciones, la figura que tiene coloreada $\frac{2}{10}$ partes (véase la figura 9).

Figura 9: Respuesta de una alumna de quinto grado



El tallerista eligió a Victoria, Elizabeth, Guadalupe e Ignacio para que contestaran a la pregunta: *"¿Por qué la niña cree que solo en la opción uno está coloreado $\frac{2}{10}$ de la figura?"*. A continuación, se presenta la conversación que surgió:

> *Victoria: Porque está dividida en 10 y coloreada dos partes.*
>
> *Elizabeth: Porque desconoce las fracciones equivalentes.*
>
> *Guadalupe: Porque la pequeña no identifica que en la opción 2 y 3 está coloreado $\frac{1}{5}$ de esas figuras y eso es equivalente a $\frac{2}{10}$.*
>
> *Ignacio: Porque normalmente los niños, en estas actividades, dividen según el denominador y colorean las partes que indica el numerador.*

Al escuchar estas opiniones Karyme plantea que una respuesta como la da la niña se debe a cómo se enseñan las fracciones en la escuela primaria. Ella dice y convence a los demás asistentes del taller: *"en las escuelas es muy común que, para representar fracciones, se les enseñe que el denominador nos indica en cuántas partes dividir la unidad y el denominador indica cuántas partes tomar"*.

Después de estas intervenciones el tallerista se dirigió a Lino, Carmen y David para plantearles la siguiente situación: *"La misma niña (Dana) señaló que, en la opción tres, la parte amarilla es* $\frac{1}{7}$ *de la figura. ¿Cuál es el razonamiento al que llega la niña para dar esa respuesta?"*. Los tres estudiantes del taller señalan, convenciendo a los demás, lo siguiente: *"la niña percibe una figura dividida en siete partes, pero no se percata que esas partes no son iguales"*.

3.3.1. Los decimales representados en la recta numérica

En la segunda sección del formulario el conductor del taller planteó a los participantes usar como recurso la recta numérica para ubicar entre dos decimales otro decimal. A continuación, se presentan los cuatro ejercicios que solucionaron (véase la figura 10).

Figura 10. *Soluciones sobre las rectas numéricas que dieron los participantes.*

[13]

El tallerista presentó a los asistentes al taller, mediante una pizarra digital, las rectas numéricas propuestas en la sección dos del formulario para discutir sus resultados. La consigna fue que encontraran entre los dos números decimales otro decimal y anotaran las soluciones en la

[13] Actividad tomada de García (2014)

pizarra digital. Al final de la discusión, los estudiantes del taller mencionaron que para las últimas tres rectas numéricas existen varias posibilidades de escribir el decimal que se les pedía encontrar. Sin embargo, manifestaron que tuvieron dificultad al enfrentarse a anotar el número que falta en las dos últimas rectas. Así, con el apoyo de la herramienta de etiquetas fueron anotando sus resultados en la pizarra digital.

La primera recta numérica, según los participantes, fue la de menor dificultad. Ignacio comentó que, al no involucrar el uso de los decimales era más sencillo identificar el número entre el 8 y 10. Al estar todos de acuerdo con la respuesta de su compañero, él anota 9 como solución a la primera recta.

Los participantes opinaron que el resto de las rectas numéricas son de mayor dificultad, puesto que involucraban números que no eran enteros, sino el uso de decimales. Es Guadalupe quien pone la discusión en torno a cómo piensan matemáticamente esta actividad los niños de primaria. Ella expuso: *"En este tipo de tareas a los niños se les hace ilógico que haya un número entre otro dos, porque solo conocen los naturales".* Por su parte, Karyme, David y Elizabeth señalaron la importancia de que los alumnos de primaria —antes de enfrentarse a este tipo de actividades— construyan la estrategia de agregar ceros, en la parte decimal, a la última cifra significativa. En otras palabras, saber la noción de equivalencia. Desde esa posición son anotadas en la pizarra digital las primeras respuestas a las últimas tres rectas numéricas. En el siguiente diálogo se observa el procedimiento matemático de Karyme, David y Elizabeth para la solución de dichas rectas.

> *Karyme: Entre 3 y 4 se encuentra $\frac{35}{10}$ porque 3 es igual a $\frac{30}{10}$ y 4 es igual a $\frac{40}{10}$. (Anota su resultado en la pizarra digital).*
>
> *David: Entre 5.7 y 5.8 se encuentra 5.75 porque 5.7 es igual a 5.70 y 5.8 es igual a 5.80. (Anota su resultado en la pizarra digital).*
>
> *Elizabeth: Entre 9.95 y 9.96 se encuentra 9.955 porque 9.95 es igual a 9.950 y 9.96 es igual a 9.960. (Anota su resultado en la pizarra digital).*

La mayoría de los participantes coincide con las respuestas de David y Elizabeth, pero les causa sorpresa la respuesta de Karyme. Algunos dijeron que su respuesta, al decimal entre 3 y 4, fue 3.5. Incluso Lino comentó: *"puse 3.5 porque consideré que entre 3 y 4 está $3\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$ es igual a 0.5.*

Dicho lo anterior, el conductor del taller pensó que era pertinente recuperar todos los resultados equivalentes, junto con su procedimiento matemático, anotándolos con la herramienta de etiquetas en la pizarra digital. Carmen, además de las otras soluciones, propuso que entre 3 y 4 se encuentra $\frac{7}{2}$ porque 3 es igual a $\frac{6}{2}$ y 4 igual a $\frac{8}{2}$. De esta forma, para hallar los decimales entre 5.7 y 5.8, así como 9.95 y 9.96 los participantes plantearon lo siguiente:

> *Victoria: Entre 5.7 y 5.8 se encuentra* $\frac{575}{100}$ *porque 5.7 es igual a* $\frac{570}{100}$ *y 5.8 es igual a* $\frac{580}{100}$*. (Anota su resultado en la pizarra digital).*
>
> *Ignacio: Pues 5.75 es equivalente con 5* $\frac{3}{4}$*. (Anota su respuesta en la pizarra digital).*
>
> *Elizabeth: Entre 9.95 y 9.96 se encuentra* $\frac{9955}{1000}$ *porque 9.95 es igual a* $\frac{9950}{1000}$ *y 9.96 es igual a* $\frac{9960}{1000}$*. (Anota su resultado en la pizarra digital).*
>
> *Guadalupe: También podría 9* $\frac{191}{200}$ *porque es equivalente al decimal que dio Elizabeth. (Anota se respuesta en la pizarra digital).*

Como se ve en sus respuestas, los asistentes al taller encontraron distintas formas de representar un número decimal. Por lo que, el tallerista mencionó lo siguiente*: "Al inicio del taller se les preguntó, ¿Qué es un número decimal? Todos dijeron que son los números que llevan punto. Ahora, ¿Qué piensan?".* Sus argumentos no tardaron en aparecer. A continuación, se muestra lo que expusieron:

> *Lino: No son solo los que llevan punto, también se pueden representar de otras maneras.*
>
> *Carmen: En nuestras respuestas se ven escritos con punto o como fracción.*
>
> *Karyme: Se escriben con punto, con fracción o con fracción decimal.*
>
> *Guadalupe: Además, la sesión pasada, en la lectura, indicaba que no todos los que tienen punto son decimales.*
>
> *Karyme: Es que uno debe fijarse en las equivalencias.*

Para finalizar, se discutieron las respuestas de la siguiente pregunta*: ¿crees que sea correcto representar 0.75 como: 0.7500,* $\frac{75}{100}$, $\frac{750}{1000}$, $\frac{3}{4}$ *y* $\frac{6}{8}$*?* Los estudiantes del taller llegaron a un mismo razonamiento. Estos manifestaron que sí son otras formas de representar 0.75, pues todos los decimales mencionados en la pregunta son equivalentes.

3.3.2. Aprendizajes logrados en esta sesión

En esta tercera sesión se concluyó que los estudiantes lograron: a) reflexionar sobre cómo piensan los alumnos de primaria las tareas de representar los decimales mediante áreas o en la recta numérica; b) construir una estrategia, a través de la noción de equivalencia, para hallar un decimal entre otros dos; c) razonar que la escritura con punto de un decimal es solo una de las distintas formas de representarlo.

Ahora bien, en el problema dos, de la primera sección, todos los asistentes al taller cambian sus respuestas a excepción de Lino y, el tallerista no insiste para llegar a una respuesta en común. Es por ello que las discusiones de las actividades no deben circunscribirse solo al planteamiento de las respuestas de los asistentes al taller, sino que el tallerista, en la gestión de la puesta en común, también debe considerar el análisis y la obtención de una conclusión en común por parte de los estudiantes del taller.

Sesión 4

En la cuarta sesión, los estudiantes conocieron y resolvieron la actividad de los móviles (tomada y adaptada de SEP, 2001). La intención era que efectuaran operaciones con expresiones decimales finitas y fracciones para componer equivalencias ($por\ ejemplo$: $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=0.5$). De tal forma, era necesario que realizaran los cálculos que consideraran convenientes para ocupar los espacios vacíos y mantener en equilibrio en los móviles.

3.4. Objetivo 4: Efectuar operaciones con expresiones decimales finitas y fracciones para encontrar equivalencias.

El conductor del taller inició comentando el objetivo de la cuarta sesión a los participantes: Realizar operaciones con expresiones decimales finitas y fracciones para encontrar equivalencias. Les advirtió que en esta ocasión no se trabajaría con un formulario.

En seguida, con la herramienta de Google Meet: “presentar pantalla”, el tallerista mostró a los asistentes al taller una pizarra digital. Cuando el conductor del taller se percató de que los participantes estaban atentos (sin ningún problema con la conexión), añadió la imagen del primer móvil a la pizarra digital.

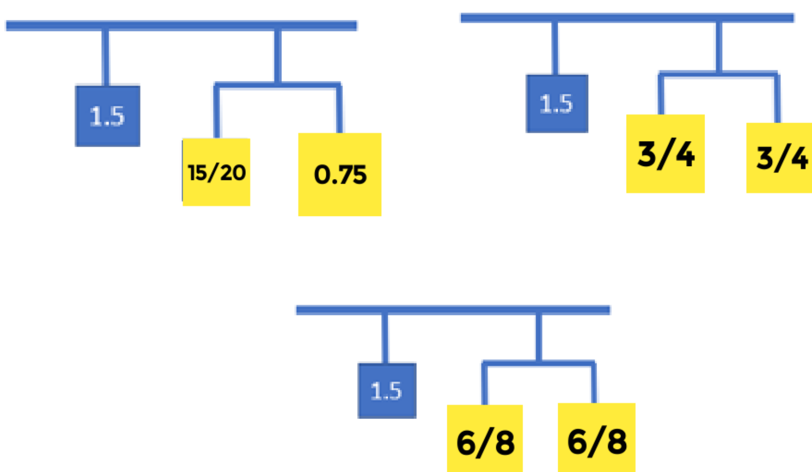
El tallerista dio una introducción para poner en contexto a los participantes con la actividad. Él mencionó:

> *Tallerista: La actividad que se muestra en la pizarra digital se conoce como móviles. Un móvil se caracteriza por mantener en equilibrio los objetos que cuelgan de este. En esta ocasión, nuestros móviles serán de las diferentes formas de representar un decimal. Por lo que la consigna es: Anotar el decimal en cada cuadro vacío para lograr el equilibrio. Además, encontrar tres formas diferentes de resolverlo.*

En cada una de las pizarras digitales se pusieron móviles de manera repetida para que hallaran diferentes representaciones simbólicas posibles de los decimales y las agregaran en los espacios vacíos (notación fraccionaria: $\frac{3}{4}$, $\frac{75}{100}$ o, notación con punto 0.75). El conductor del taller dio a los participantes el tiempo suficiente para hacer cálculos y razonar sus respuestas.

Para el primer móvil el tallerista se dirigió a Lino, Carmen y Elizabeth para que ofrecieran tres soluciones distintas (véase la figura 11).

Figura 11. Respuestas de los participantes al primer móvil.



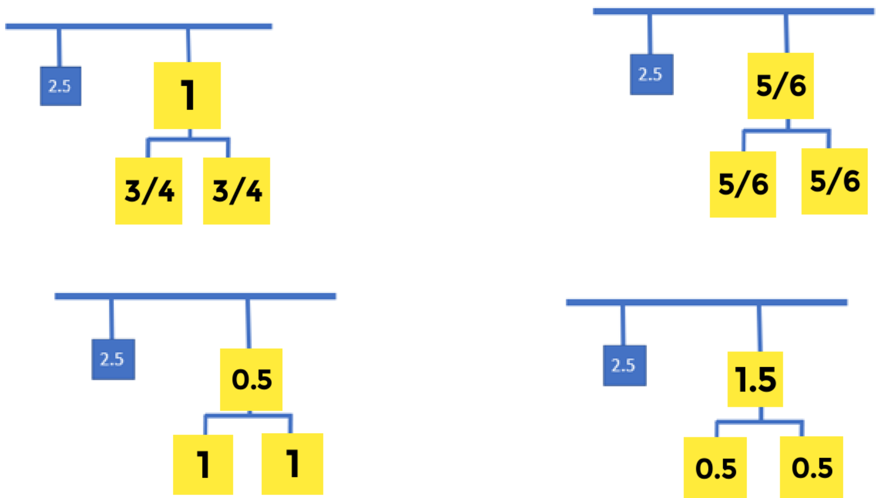
Los estudiantes del taller utilizaron la herramienta de etiqueta (espacios amarillos) para completar lo que hacía falta en los móviles. Los tres participantes expusieron que realizaron el siguiente cálculo: $1.5 \div 2$ para determinar los decimales en los espacios vacíos. A lo anterior, Elizabeth complementó que era necesario utilizar equivalencias para hallar soluciones diferentes al móvil. Dicha participante comentó: *"En mi división utilicé los decimales escritos con punto. Por lo tanto, obtuve 0.75. Después vi que Lino ya lo había puesto y decidí buscar una equivalencia* $0.75 = \frac{3}{4}$*".* Los demás participantes estuvieron de acuerdo con la estrategia. Incluso, Guadalupe mencionó: *"También se puede poner en los espacios vacíos la equivalencia en fracción decimal:* $0.75 = \frac{75}{100}$".

Sin embargo, para el segundo móvil algunos participantes (Lino, Victoria, Carmen, David y Elizabeth) no estaban convencidos con su respuesta. En este móvil los espacios vacíos eran tres y al utilizar la estrategia anterior obtienen una expresión decimal periódica ($2.5 \div 3 = 0.83\overline{3}$). Al compartir sus resultados con los demás se pone en discusión la idea de aproximación de las expresiones decimales periódicas, pues creen que esta afecta el equilibrio de los móviles. Entonces, surge el siguiente episodio:

> *Tallerista: Karyme, Guadalupe e Ignacio: ¿Por qué no están convencidos de usar una expresión decimal periódica?*
>
> *Ignacio: porque el móvil se va a inclinar a la izquierda.*
>
> *Karyme: Sí, al sumar tres veces* $0.833\overline{3}$ *se obtiene* $2.499\overline{9}$ *y eso es más pequeño que 2.5.*
>
> *Guadalupe: Es mejor utilizar fracciones decimales, fracciones o decimales escritos con punto. Por ejemplo: tres veces* $\frac{5}{6}$ *porque es igual a* $\frac{15}{6}$ *que al simplificar se tiene* $\frac{5}{2}$.

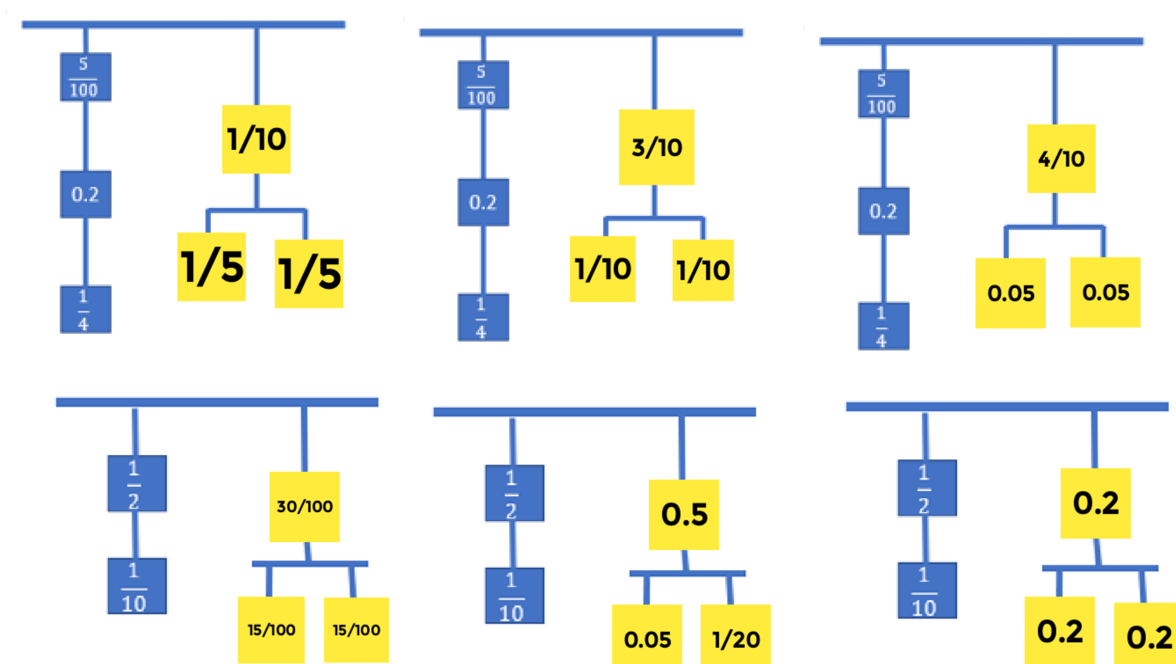
De esta manera, proponen que solo algunos espacios de los móviles son los que deben guardar equidad —para no perder exactitud— como se ve a continuación en la figura 12.

Figura 12. Respuestas de los participantes al segundo móvil.



Los estudiantes del taller concluyeron que la idea de aproximación, al utilizar expresiones decimales periódicas, no produce el efecto que se espera para mantener en equilibrio los móviles. Así, para los últimos dos ejercicios se propusieron las soluciones de Lino, Carmen, Victoria, Ignacio, David y Elizabeth (Véase la figura 13).

Figura 13. Respuestas de los participantes a los móviles 3 y 4.



Para finalizar con la actividad de los móviles Guadalupe y Karyme mencionan que en ciertos casos sí es posible usar la división y en otros no. Por ejemplo, señalan que para el último móvil sí es útil la estrategia de división. A continuación, se muestran sus opiniones:

> *Karyme: En el último móvil si se suma* $\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$ *se obtiene* $\frac{6}{10}$*. Entonces, sí es válido dividir entre tres porque no da un decimal periódico.*
>
> *Guadalupe: Es que en algunos si se puede dividir entre el número de espacios vacíos y en otros no. Por ejemplo, en el penúltimo se suma* $\frac{5}{100}+0.2+\frac{1}{4}$ *se obtiene 0.5 y al dividirlo entre tres, ya que son los espacios vacíos, nos da* $1.166\overline{6}$*.*

Ignacio, al escuchar lo anterior, señala que si utiliza fracciones en vez de las expresiones decimales periódicas se puede asegurar el equilibrio de los móviles. Él propone que para el penúltimo móvil (que tiene $\frac{5}{100}$, *0.2*, $\frac{1}{4}$) en los tres espacios vacíos se puede repetir $\frac{1}{6}$ porque $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$. Todos los asistentes del taller opinaron que lo planteado por Ignacio era correcto.

El conductor del taller aprovechó para preguntar a los participantes: de los siguientes números: $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{20}$ y $0.12\overline{12}$, ¿Cuáles representan un decimal? El tallerista observó que la mayoría consideró que solo $\frac{3}{20}$ representaba un decimal. Sin embargo, Lino planteó que eran todos. El comentario de Lino fue el siguiente: "*Son los cuatro porque en las fracciones se divide el numerador entre el denominador y se obtienen números con punto".* En la sesión pasada Lino ya había manifestado que los decimales no solo se representan por medio de su escritura con punto, pero no entendió que no todos los números expresados con punto son decimales. En consecuencia, los asistentes al taller reaccionaron a lo dicho por Lino:

> *Karyme: No pueden ser todos. Para ser decimales tienen que ser finitos y* $\frac{3}{20}$ *es el único que cumple con ese aspecto porque es 0.15.*
>
> *Ignacio: Incluso,* $0.12\overline{12}$ *no es porque la rayita indica que se repite sin detenerse.*
>
> *Guadalupe:* $\frac{1}{7}$ *y* $\frac{1}{3}$ *tampoco son porque en su escritura con punto representan decimales periódicos.*

Cuando los estudiantes del taller terminaron de intervenir con sus opiniones, el conductor del taller concluyó con una definición de los decimales para que Lino reconstruyera su idea acerca de estos números. Se dirigió a todos y comentó:

> *Tallerista: De acuerdo con lo que se ha dicho en este taller, los decimales se representan por medio de su escritura con punto y por medio de fracciones. Sin embargo, no todos los números con punto, ni todas las fracciones son representaciones de un decimal.*

Lino aceptó lo manifestado por sus compañeros y el tallerista con esto se dio por terminada la sesión.

3.4.1. Aprendizajes logrados en esta sesión

En esta cuarta sesión los participantes lograron: a) realizar cálculos con expresiones decimales finitas y fracciones para componer equivalencias; b) constatar que para obtener resultados exactos es conveniente operar con fracciones y expresiones decimales finitas; c) reforzaron y, en algunos casos, reconstruyeron la idea de la pluralidad de representaciones simbólicas de los decimales.

Desde el inicio del taller, el conductor estuvo convencido de que la puesta en común era un punto clave para que los participantes llegaran a conclusiones en común alrededor del tema de los decimales.

Cabe señalar que durante la sesión se presentaron problemas con la red. Lo anterior, ofreció un espacio para la reflexión de lo inevitable que puede ocurrir durante la práctica docente virtual. El conductor del taller esperó un tiempo para que la conexión mejorara (que convenientemente así sucedió), pero ya estaba pensado en la alternativa de trabajar de manera asincrónica. Sin embargo, dicha alternativa no hubiera contribuido a la interacción de los participantes con el tallerista, así como al intercambio de las ideas de las experiencias con la actividad.

Sesión 5

Para la quinta sesión se propuso a los participantes la situación didáctica *Maze Playing Board*[14] (en adelante *laberinto*), elaborada por el National Council of Teachers of Mathematics (2008), esto con la intención de reconstruir sus ideas de multiplicación y división. De acuerdo con el diagnóstico, los participantes intuyen que: la multiplicación siempre da resultados mayores que los factores y en la división el cociente debe ser menor que el dividendo.

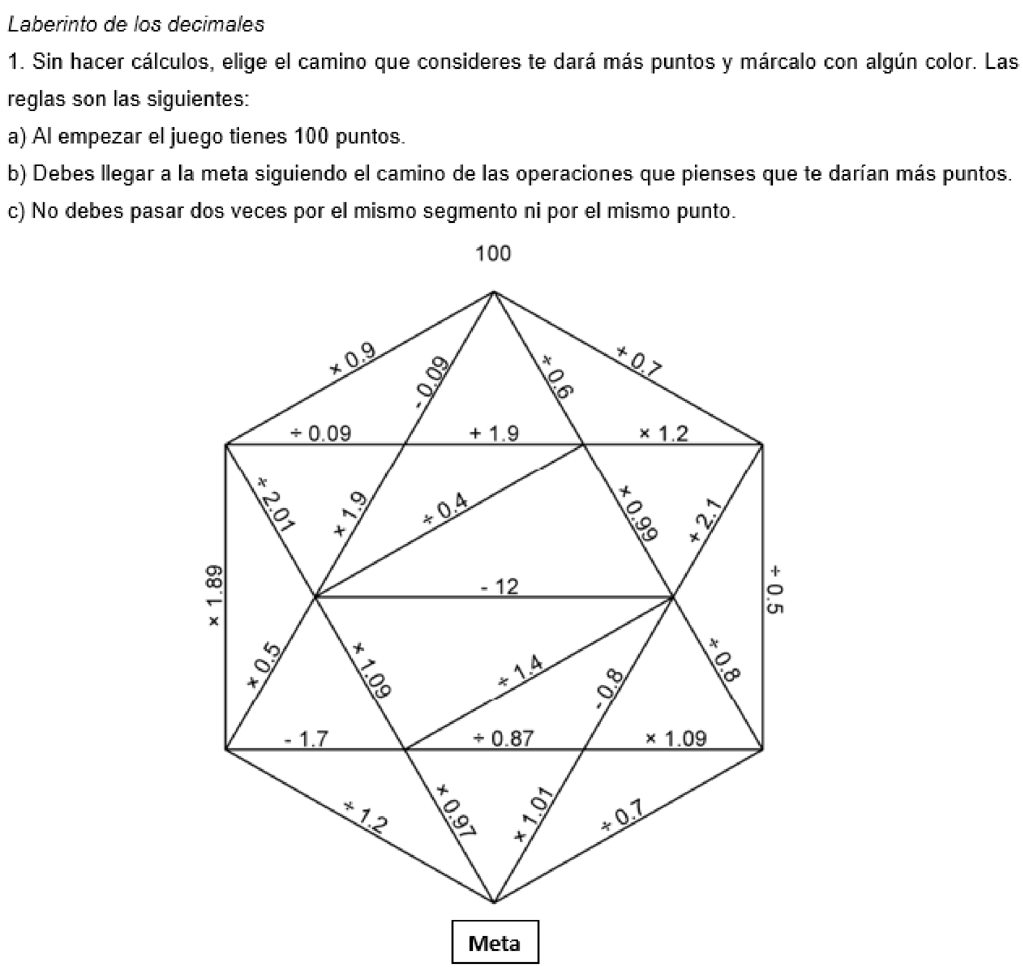
[14] Disponible en: http://illuminations.nctm.org

3.5. Objetivo 5: Percibir el efecto de las multiplicaciones y divisiones usando decimales positivos menores que uno.

La quinta sesión se inició manifestando a los estudiantes del taller, que al igual que la sesión pasada, no se trabajaría con un formulario de Google. Por ende, el tallerista indicó que mediante el uso de pizarras digitales realizarían la actividad: Laberinto de los decimales. También les dio a conocer la intención didáctica de dicha situación: Explorar el efecto de la adición, sustracción, multiplicación y división con decimales.

Para introducir la actividad, se presentó a los estudiantes del taller una primera pizarra digital donde se añadió la imagen del laberinto junto con la consigna (véase la figura 14).}

Figura 14. Presentación del Laberinto de los decimales.



El conductor del taller se dirigió a los participantes y leyó las indicaciones de la actividad. Para constatar que la consigna era clara, cuestionó a Ignacio y Elizabeth: *"¿Pueden decirnos qué se va a hacer en la actividad?"*. Conforme a lo manifestado por estos dos estudiantes y al estar los demás de acuerdo con ellos, el tallerista se aseguró que entendieron correctamente la consigna. Aunque todavía no sabían cómo se organizarían para realizar la actividad.

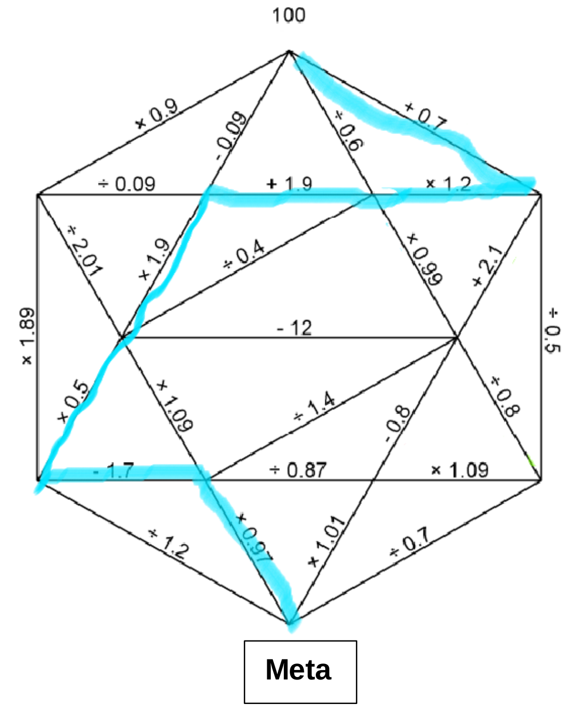
Se les propuso un trabajo mediante ocho pizarras digitales individuales, todas iguales. En cada pizarra aparecía un laberinto. Así, los participantes con la herramienta subrayador marcarían, al mismo tiempo, el camino que consideraban daba más puntos.

Cuando los estudiantes terminaron de marcar los caminos utilizando únicamente su conocimiento sobre las operaciones involucradas (pues no se hicieron los cálculos) se hizo un primer cierre parcial de la actividad para discutir lo realizado.

En el primer acercamiento con la situación, los participantes debían elegir los trayectos —sin hacer ningún cálculo— solo observando si era una multiplicación, división, adición o sustracción. Como era de esperarse, intuyeron los resultados de las operaciones a partir de sus conocimientos previos (originados por las ideas arraigadas a los naturales). Razonaron que sus trayectos debían pasar por las adiciones y las multiplicaciones para obtener resultados mayores y, por el contrario, se debía evitar las sustracciones, así como las divisiones porque darían resultados menores. El siguiente fragmento ejemplifica lo anterior:

> *Carmen: Yo lo que hice fue evitar las divisiones y las restas. Pero ahorita que estoy viendo aquí puse una resta.*
> *Tallerista: ¿Por qué evitar las divisiones y las restas?*
> *Carmen ¡Porque te restan puntos! Es que también quise buscar el camino más largo tratando de evitar las divisiones y las restas.*

Figura 15. *Primera solución de Carmen al Laberinto*



Algunos estudiantes del taller coincidieron con la estrategia planteada por Carmen. Esta estrategia consistía en encontrar el trayecto —más largo— que pasara por las operaciones que implican sumar y multiplicar. Por el contrario, las operaciones que implican restar y dividir debían ser evitadas, pues, según estos participantes, causan pérdida. Enseguida, se muestran los primeros caminos, en el laberinto, de los participantes que aplicaron la misma estrategia que Carmen:

Tabla 10. *Trayectos elaborados sin usar ningún cálculo, solo seleccionando las operaciones.*

Carmen: $100 + 0.7 \times 1.2 + 1.9 \times 1.9 \times 0.5 - 1.7 \times 0.97 = 111.455\ldots$
Karyme: $100 \times 0.9 \times 1.89 - 1.7 \times 0.97 = 163.348$
David: $100 \times 0.9 \times 1.89 \times 0.5 \times 1.09 \times 0.97 = 89.923\ldots$
Lino: $100 + 0.7 \times 1.2 \times 0.99 - 0.8 \times 1.01 = 120.019\ldots$
Elizabeth: $100 - 0.09 \times 1.9 \times 1.09 \times 0.97 = 200.706\ldots$
Guadalupe: $100 \times 0.9 \times 1.89 \times 0.5 \times 1.9 + 1.9 \times 0.99 - 0.8 \times 1.01 = 162.670\ldots$

Sin embargo, dos estudiantes del taller, al escuchar la estrategia anterior, manifiestan inconformidad. Ignacio y Victoria están de acuerdo que se deben evitar las divisiones y las sustracciones. También coinciden que las adiciones aumentan, pero no están seguros de que suceda lo mismo con todas las multiplicaciones implicadas en el laberinto. Su hipótesis (correcta) es que si se multiplica por un decimal menor que uno el resultado disminuye. Lo anterior, originó el siguiente diálogo:

> *Victoria: Yo además de evitar las divisiones y restas, también evité las multiplicaciones por cero.*
>
> *Tallerista: ¿Cómo multiplicaciones por cero?*
>
> *Victoria: Quiero decir las que son menores que la unidad. Por ejemplo, 0.99.*
>
> *Tallerista: ¿Por qué?*
>
> *Victoria: Porque multiplicar por números mayores que uno significa aumentar. Entonces, al revés debe disminuir.*
>
> *Ignacio: Sí, cuando multiplicas por uno se obtiene el mismo número y cuando es la multiplicación por dos o tres se duplica o triplica. Entonces, cuando se multiplica por un número menor que uno se hace más chico.*

Después de estas participaciones el conductor del taller preguntó a los demás si estaban de acuerdo con Victoria e Ignacio. Guadalupe, Karyme y David se mostraron convencidos con la conjetura de sus compañeros. Por el contrario, Carmen, Elizabeth y Lino no lo estaban. El tallerista se dirigió a todos los participantes y les comentó que no se preocuparan, pues iban a tener un nuevo intento para trazar el camino del laberinto. Esta vez usarían calculadora para realizar las operaciones. En tal sentido, el conductor del taller dio el primer cierre parcial recordando las suposiciones a las que habían llegado —sin ningún cálculo— al trazar los trayectos del laberinto.

> *Tallerista: Hasta este momento sus percepciones, sin realizar ninguna operación, son las siguientes: para aumentar, utilizar sumas y multiplicaciones. Para disminuir, utilizar restas y divisiones. Aunque, algunos creen que las multiplicaciones menores que uno, también disminuyen.*

Se les propuso que, antes de elegir un nuevo trayecto, usaran la calculadora para realizar las operaciones de su primer trayecto. Según el conductor del taller, esta tarea era necesaria para que los participantes confirmaran o reconstruyeran sus ideas acerca de las operaciones involucradas en el laberinto. Después de efectuar los cálculos del primer trayecto, los participantes comentaron:

Carmen: Como decía Ignacio y Victoria, al multiplicar por un decimal menor que uno disminuye el resultado.

Ignacio: Creo que hay multiplicaciones que disminuyen más que una resta.

Lino: Tenemos que prestar atención porque las sumas aumentan poquito.

Tallerista: ¿Qué piensas Elizabeth?, ¿crees necesario reconsiderar el camino que elegiste?

Elizabeth: Sí, porque en mi camino pasé por algunas multiplicaciones con decimales menores que uno.

Tallerista: Karyme, ¿tú que considerarías para tu nuevo camino en el laberinto?

Karyme: Fijarme en las operaciones, si multiplican decimales menores que uno las evito. También evitaré las divisiones y las restas.

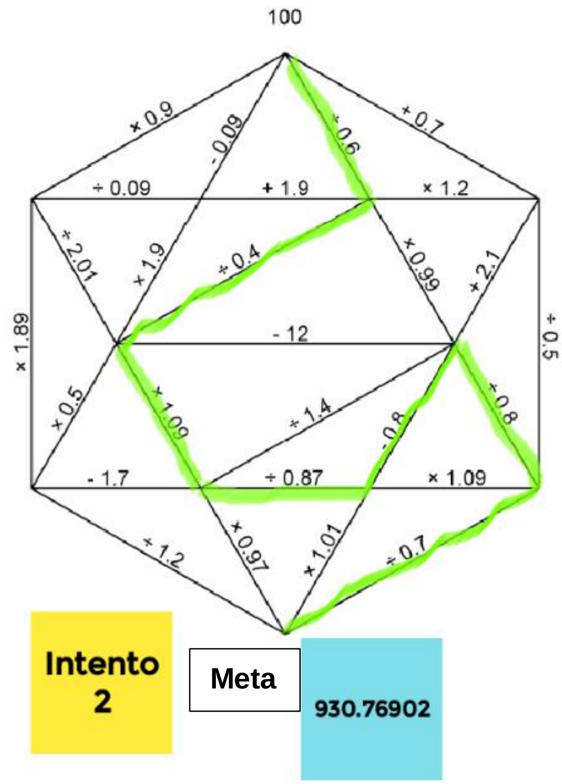
Los estudiantes del taller coincidieron que era necesario reconsiderar sus trayectos. Así, el tallerista les mencionó que, en cada una de las ocho pizarras digitales, añadiría otra imagen del laberinto para que realizaran un nuevo trayecto.

Al trazar los nuevos caminos por el laberinto, a partir de las ideas discutidas anteriormente, los participantes iban comentado que los resultados eran mayores en comparación de los trayectos donde no usaron cálculos. Lino, Victoria, Dennise y David insinuaban que se debía trazar un camino largo que pasara por las adiciones y multiplicaciones que implicaran decimales mayores que uno.

Después de un momento, mientras se realizaba el segundo trayecto, Ignacio usó la herramienta *levantar la mano* para pedir la participación. Este participante señaló lo siguiente: *"Creo que hay divisiones que aumentan los resultados. Por ejemplo:* $100 \div 0.6 =$ *106.666…"*. Los participantes, sorprendidos por el resultado de la operación mencionada por Ignacio, se interesaron por saber el efecto en la división al tener como divisor un decimal menor que uno. La mayoría empezó a borrar el trayecto en el laberinto (que llevaban hasta ese momento) y trazaron otro donde se contemplaban algunas de las divisiones involucradas.

En el primer laberinto Ignacio subrayó el siguiente trayecto: $100 + 0.7 \times 1.2 + 1.9 \times 1.9 \times 1.09 \times 0.97 = 246..568$ .... Ignacio al realizar las operaciones, en su primer trayecto, se percató que era poco el aumento que obtenía, con respecto a los 100 puntos iniciales. Para el segundo laberinto propuso, el siguiente trayecto:

Figura 16. *Segundo camino elaborado por Ignacio*



En el segundo laberinto, Ignacio, elige las divisiones en el que el divisor es un decimal positivo menor que 1. El estudiante del taller, al igual que los demás, señala esas operaciones como: dividir entre decimales menores que el entero. Por lo que en la puesta en común menciona lo siguiente:

> *Ignacio: Desde el inicio del camino pensé en sacrificarme (risas) para pasar por las multiplicaciones mayores que 1. Entonces, dividí entre 0.6 y los puntos aumentaron mucho más, ya que, dividir entre decimales menores que el entero aumenta más que las otras operaciones del laberinto.*

Algunos de sus compañeros (Guadalupe, Karyme, David, Carmen y Elizabeth), manifestaron que percibieron el efecto de las divisiones involucradas, gracias al comentario que dio Ignacio durante la realización del segundo trayecto. En el siguiente diálogo se observan sus razonamientos:

> *Karyme: Como dijo Ignacio, traté de caer en las divisiones que suben y evitar las que bajan.*
>
> *Tallerista: ¿Qué divisiones bajan?*

Karyme: Las divisiones que tienen más de un entero no convienen. Es que iba por un camino y entonces se me atravesó la división 1.4 y me achicó el número.

Ignacio: Creo que a veces no hay nada bueno y hay que agarrar una resta (risas). Pero las divisiones menores al entero dan mayor cantidad que las otras operaciones.

David: Sí, cuando Ignacio mencionó lo de la división me di cuenta de que, algunas divisiones pueden sumar y no todas las multiplicaciones incrementan la cantidad.

Carmen: Entonces se buscan las divisiones que aumenten y también las multiplicaciones que aumenten.

Guadalupe: Qué bueno fue el comentario de Ignacio que nos hizo notar que algunas divisiones aumentan los puntos.

Elizabeth: Cuando dijeron lo de la división traté de subrayar el camino por muchas de las que hay en el laberinto. Sin embargo, después me di cuenta, como dijo Violeta, que algunas achican.

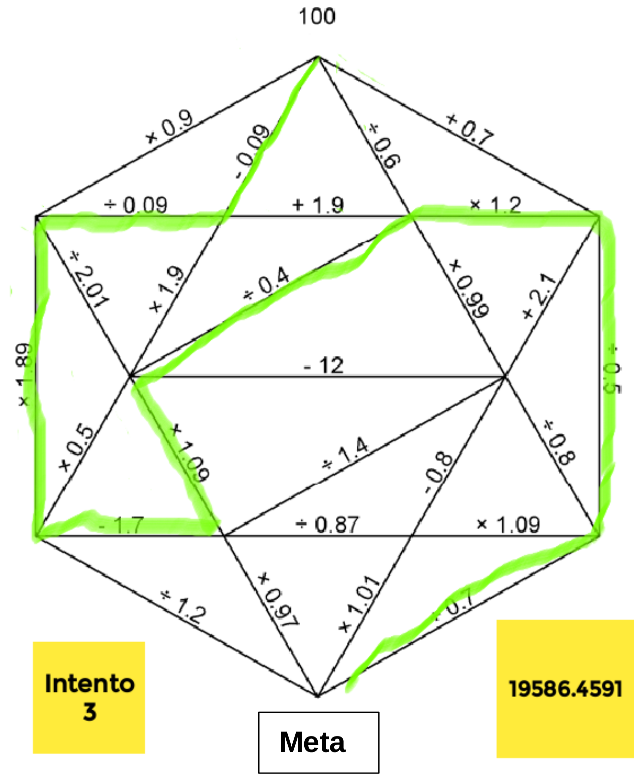
Victoria y Lino no utilizaron, en el segundo laberinto, la estrategia de pasar por las divisiones que aumentan puntos, pero coinciden con los razonamientos comentados por sus compañeros. En el segundo laberinto, los caminos desarrollados por los participantes fueron los siguientes:

Tabla 11. Resultados del segundo laberinto.

Consideran las divisiones que aumentan puntos
Karyme: $100 - 0.09 \div 0.09 \times 1.89 \times 0.5 \div 0.4 \times 1.2 \div 0.5 \div 0.7 = 8991.9$
Guadalupe: $100 - 0.09 + 1.9 \div 0.4 \times 1.09 \div 0.87 - 0.8 + 2.1 \div 0.5 \div 0.7 = 914.821 \ldots$
David: $100 + 0.7 \div 0.5 \div 0.8 \times 0.99 \div 0.4 \times 1.09 \div 0.87 \times 1.01 = 788.448\ldots$
Carmen: $100 \div 0.6 + 1.9 \times 1.9 \times 1.09 \div 0.87 - 0.8 + 2.1 \div 0.5 \div 0.7 = 1150.1890 \ldots$
Elizabeth: $100 \times 0.9 \div 0.09 + 1.9 \div 0.4 - 12 + 2.1 \div 0.5 \div 0.7 = 7128.142 \ldots$
Evitaron las divisiones
Lino: $100 \times 0.9 \times 1.89 \times 0.5 \times 1.09 \times 0.97$ =89.9233…
Victoria: $100 + 0.7 \times 1.2 + 1.9 \times 1.9 \times 1.09 \times 0.97 = 246.5868 \ldots$

Mientras se discutían los resultados, Ignacio elabora un tercer camino. Sorprendido por su hallazgo comenta: *"Encontré un camino que da muchos puntos, quisiera compartirlo con mis compañeros"*. En la ilustración se observa el nuevo trayecto de Ignacio.

Figura 17. *Resultado del tercer laberinto de Ignacio*



El tallerista, se dirigió al grupo para preguntar: *"¿A qué se debe el resultado de Ignacio?"*. Los estudiantes comentaron que los puntos obtenidos por Ignacio se lograron porque, sin importar las sustracciones, usó divisiones entre decimales menores que un entero y multiplicaciones por decimales mayores que 1. Con las anteriores participaciones se dio por terminada la sesión cinco.

3.5.1. Aprendizajes logrados

En esta sesión se logró que los participantes: reconstruyeran la idea que tenían sobre los efectos de las operaciones mediante la experiencia de utilizar decimales en la situación del laberinto.

El conductor del taller estaba interesado en que entendieran que entre más pequeño es el decimal (divisor) mayor es la obtención de puntos (cociente). Pensó en cuestionarlos acerca de qué pasa con dividir entre 0.09 en comparación con las otras divisiones del laberinto. Lo anterior, con la intención de observar que pasar por 0.09 es una buena estrategia para alcanzar una mayor cantidad de puntos. Sin embargo, por motivos del tiempo que se asignó para las sesiones, no se pudo lograr.

Sesión seis

En esta sesión se buscó que los participantes comprendieran la propiedad de densidad de los decimales. Otro propósito fue que los asistentes al taller reflexionaran sobre el pensamiento matemático de los alumnos de primaria alrededor de dicha propiedad.

Si bien los estudiantes del taller —durante la segunda sesión— encontraron una estrategia para hallar un número entre otros dos decimales dados, en esta sesión se pretendieron dos cosas en cuanto su conocimiento matemático: promover un entendimiento común sobre la cantidad infinita de números que hay entre otros dos decimales dados y crear un lenguaje común al designar este aspecto como propiedad de densidad.

3.6. Objetivo 6: Identificar la propiedad de densidad de los decimales

Para el desarrollo de esta sesión se les propuso, a los estudiantes del taller, resolver un formulario de Google cuyo contenido era una serie de cuestionamientos desglosado en dos secciones: conocimiento del contenido matemático y conocimiento del pensamiento de los estudiantes. El tallerista les mencionó: *"En esta sesión, igual que las tres primeras, habrá un formulario con dos secciones. Por lo tanto, haremos dos puestas en común para discutir las respuestas".*

Posteriormente, se les indicó que durante la sesión seis abordarían un tema conocido como propiedad de densidad de los decimales. Los estudiantes del taller comenzaron a resolver la primera sección. Después de un momento se les planteó discutir sus respuestas.

3.6.1. Conocimiento del contenido matemático

La primera petición consistió en hallar cuatro números entre dos decimales dados. A continuación, se muestran los ejercicios:

Anota cuatro números que vayan entre:
2.10 y 2.13 ________________________
13.041 y 13.042 __________________

Las participaciones no se hicieron esperar. Los asistentes al taller aplicaron la misma estrategia que expusieron en la sesión dos. Esta consistía en agregar, en la parte decimal, ceros en la última cifra significativa. El conductor del taller se dirigió a Karyme, Carmen, Lino y David para que compartieran con los demás sus procedimientos utilizados para resolver los ejercicios. En el siguiente episodio se exponen sus comentarios:

> *Tallerista: Lino y Karyme podrían explicar, ¿cómo resolvieron el primer ejercicio?*
>
> *Karyme: Yo puse 2.12, 2.122, 2.123 y 2.124. Para encontrarlos agregue un cero en 2.12, o sea, 2.120.*
>
> *Lino: En esa pregunta puse 2.101, 2.102 y 2.103. Los números los encontré al agregar un cero en 2.10, es decir, 2.100.*
>
> *Tallerista: Ahora, Carmen y David expliquen el segundo ejercicio.*
>
> *Carmen: Bajo el mismo procedimiento de agregar ceros encontré: 13.0411, 13.0412, 13.0413 y 13.0414.*
>
> *David: Utilicé el mismo procedimiento que mis compañeros y obtuve los decimales que mencionó Carmen.*

Después de las intervenciones de los cuatro participantes, el tallerista preguntó si alguien sabía el significado de agregar, en la parte decimal, ceros en la última cifra significativa. Esto con la intención de que argumentaran que lo que está en la base es la noción de equivalencia. Los asistentes evadieron la pregunta y prefirieron expresar sus dudas con respecto a cómo se leen los decimales. David y Guadalupe dijeron:

> *David: Tengo una duda con 13.0414, ¿las cifras de la parte decimal son milésimas o millonésimas?*
>
> *Tallerista: Ese número es trece enteros cuatrocientos catorce diezmilésimos.*
>
> *Guadalupe: Entonces, para leerlos se dice: décimos, centésimos, milésimos, diezmilésimos… y ya después no sé (risas).*

Sin perder de vista que los participantes no argumentaron que su estrategia estaba basada en la noción de equivalencia, el conductor del taller continuó con la puesta en común. El tallerista preguntó: *"¿Cuántos números van entre 0.40 y 0.50?"*. Ahora, las miradas se dirigieron a Elizabeth, Ignacio, Victoria y Guadalupe. Enseguida se muestra sus participaciones:

> *Victoria: Nueve porque son centésimos.*
>
> *Elizabeth: ¡Hum! ¿Es así como dice Victoria? Porque centésimos son 9, milésimos 99 y después 999 con el decimal que dijo Guadalupe hace rato (se refiere a diezmilésimos).*

Guadalupe: Bueno, son nueve entre esos, pero también hay milésimos y diezmilésimos. Lo podemos hacer exponencial para saber cuántos hay: 9 × 9 *y luego por los otros 9 que puede haber. ¡Según yo!*

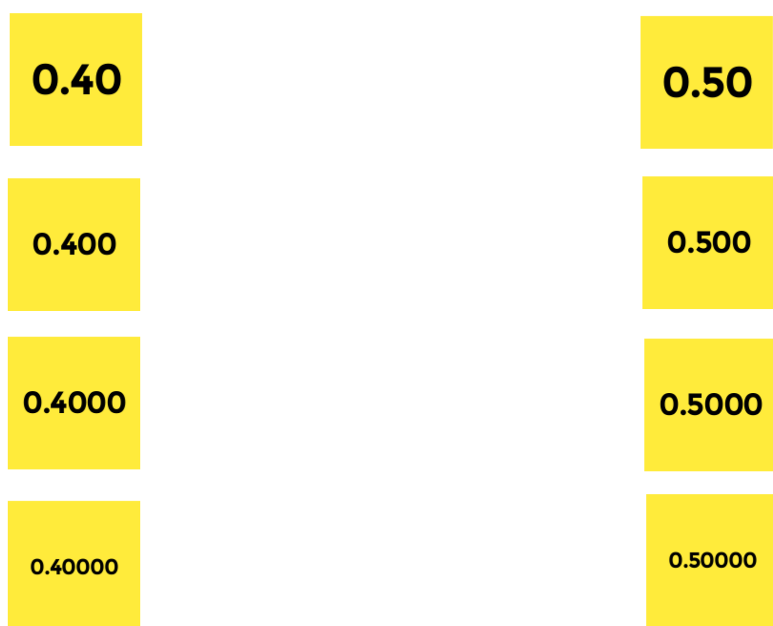
Ignacio: Seria difícil describirlo, pues son demasiados. Creo que no solo hay centésimos, sino que también hay milésimos, diezmilésimos, cienmilésimos y millonésimos.

Guadalupe: ¡Guau! Ignacio sabe los nombres de los decimales.

En los razonamientos se puede percibir dos formas de restringir la densidad. En la primera forma, Victoria solo intercala 9 decimales porque los números de la pregunta refieren a centésimos. En la segunda forma, los otros tres participantes intercalan circunscribiendo la cantidad de decimales según el nombre correspondiente a la última cifra de la parte decimal que han memorizado.

El conductor del taller intervino para que quedara claro que entre dos decimales dados es posible intercalar un infinito número de decimales. Presentó en una pizarra digital los decimales de la pregunta junto con sus equivalencias escritas con punto (véase la figura 18).

Figura 18. *Equivalencias de los decimales 0.40 y 0.50 escritas por el tallerista*



En su intervención el tallerista comentó a los participantes:

Tallerista. Me parece interesante su estrategia de agregar ceros, pero nadie ha dicho cuál es su significado. De esta manera, en la pizarra digital estoy utilizando la estrategia expuesta *por ustedes con los decimales: 0.40 y 0.50. Con la intención de encontrar el significado de agregar ceros y definir el número de decimales que se pueden intercalar entre los decimales dados.*

El conductor prosiguió a cuestionar a los participantes sobre lo que se estaba presentando en la pizarra digital. A continuación, se muestra el fragmento de las respuestas de los estudiantes del taller:

Tallerista: Lino, ¿Crees que los números de la izquierda son equivalentes?

Lino: Sí, porque no cambia su valor si le agregamos ceros.

Guadalupe: También opino que son equivalentes, ya que, en $\frac{40}{100}$ *hay* $\frac{400}{1000}$

Tallerista: Elizabeth, ¿Crees que los del lado derecho también son equivalentes?

Elizabeth: Si, son equivalentes.

Tallerista: Entonces, ¿Qué significa agregar ceros a la última cifra significativa, en la parte decimal?

Los participantes: (Respuesta unificada) Que son equivalentes.

Tallerista: En la escritura con punto, ¿son las únicas equivalencias que hay?

Karyme: No, porque se pueden agregar más ceros.

Tallerista: Ignacio, ¿Cuál es el nombre del decimal 0.400000?

Ignacio: (Tarda en contestar). Creo que es cuatrocientos mil millonésimos.

Tallerista: ¿Crees que le puedas agregar otro cero sin que su valor cambie? Si tu respuesta es afirmativa, ¿Qué nombre recibe ese decimal?

Ignacio: Si le agrego otro cero el decimal es equivalente, pero no sé cómo se llama, solo me sé hasta millonésimos.

Tallerista: Entonces jóvenes, ¿Qué número de decimales hay entre 0.40 y 0.50?

David: La cantidad de decimales intermedios es infinita, porque se les puede agregar ceros, ya que, [de ese modo] encuentras sus equivalentes.

Después el tallerista mencionó otra pregunta de la primera sección para que los participantes compartieran y discutieran sus respuestas. Dicha pregunta era: ¿ustedes consideran que entre 7.200 y 7.300 hay 99 decimales, porque si llegas al 100, llegas al 7.300? Esto detonó el siguiente diálogo:

Victoria: Había puesto que era correcto, pero no es así porque existe infinita cantidad de decimales.

> *Guadalupe: Es incorrecto. Puedo poner entre esos dos decimales el número 7.29999 y continuar escribiendo otro 9 y luego muchos más sin llegar a 7.300.*
> *Lino: También se puede poner 7.201, 7.2001, 7.20001. Entonces, no puedes decir qué decimal es el más chiquito entre 7.200 y 7.300.*

El conductor del taller pudo percibir que lo manifestado por los participantes —hasta este momento de la sesión— tenía relación con definir el número de decimales entre dos decimales dados, así como la indefinición de un antecesor y un sucesor en los números decimales.

Para no dejar espacio a malas interpretaciones sobre la propiedad de densidad, se propuso a los asistentes del taller reflexionar a partir de la lectura del siguiente fragmento del libro: *Los decimales más que una escritura.*

Reflexión

Antecesor y sucesor

En los números decimales no tiene sentido hablar de sucesor o antecesor porque no podemos asegurar que un número sigue o antecede a otro. Considérese, por ejemplo, 0.5 y reflexiónese lo siguiente: no se puede afirmar que el sucesor de 0.5 es 0.6 porque 0.5 equivale a 0.50 y en este caso se podría pensar que el sucesor, entonces, es 0.51; pero también 0.5 = 0.500 y entonces el sucesor sería 0.501, y así se podría mostrar que hay un número infinito de sucesores, lo que le equivale a decir que el sucesor de un número decimal no está definido.

Propiedad de densidad

Entre dos decimales siempre es posible incorporar otro decimal, esto se conoce como la propiedad de densidad de los decimales (válida para todos los racionales).

Los números 0.25 y 0.26 pueden expresarse como 0.250 y 0.260; bajo esta consideración es fácil determinar que entre estos dos decimales están 0.251, 0.252, 0.253, etcétera; pero los números dados se pueden expresar también como 0.2500 y 0.2600, entre esos dos se puede ver que están 0.2501, 0.2502, 0.2503, etcétera. Es decir que hay una infinidad de números entre .25 y .26. (Avila y García, 2008, pp. 47 y 48)

La reflexion brindó la oportunidad de que los participantes concluyeran tres cosas, en la primera puesta en común. La primera es que agregar ceros a la última cifra significativa, en la parte decimal, significa encontrar decimales equivalentes. La segunda es que no se puede definir un antecesor y un sucesor en los decimales. La última cosa es definir que hay una cantidad infinita de números entre otros dos decimales dados.

3.6.2. Conocimiento del pensamiento de los alumnos de primaria

El tallerista se dirigió a los participantes para indicarles que continuaran con la sección dos del formulario para que más adelante se compartieran y discutieran las respuestas.

La segunda sección del formulario de Google constaba de tres preguntas acerca de cómo piensan los niños de primaria la propiedad de densidad de los decimales y los errores que cometen al definir un sucesor y un antecesor de un número decimal.

Al darse cuenta de que todos los participantes tenían terminada la segunda sección del formulario el conductor del taller les mencionó que era tiempo de compartir y discutir sus respuestas.

La primera petición consistió en interpretar la afirmación de un alumno de primaria al definir el antecesor y sucesor de 3.46. Este alumno afirmó lo siguiente: *"3.46 tiene como antecesor: 3.45 y como sucesor: 3.47, dado que, 46 tiene como antecesor: 45 y como sucesor: 47*". Ante dicha afirmación los asistentes del taller opinaron:

> *Victoria: Es incorrecta la respuesta. Siempre se puede encontrar un decimal más chiquito entre 3.46 y 3.47. Entonces, no se puede saber cuál decimal sigue de 3.46.*
>
> *David: Al revés de como dijo Victoria, siempre se puede encontrar un decimal más grande entre 3.45 y 3.46. Entonces, no se puede identificar que decimal está antes de 3.46.*
>
> *Karyme: El niño dio su respuesta desde lo que sabe de los naturales y no tiene relación con los decimales.*
>
> *Guadalupe: Sí, este niño no sabe que se puede hallar 3.461, 3.4601, 3.46001, etcétera. Su respuesta la da desde lo que sabe de los naturales.*

En la discusión de la pregunta los participantes recurrieron al conocimiento matemático y el conocimiento pedagógico. Matemáticamente razonaron que no se podía definir el antecesor y el sucesor de 3.46. Pedagógicamente reflexionaron sobre el obstáculo que se presenta al tratar de entender a los decimales desde los naturales.

Posteriormente, se continuó con la segunda y tercera preguntas. Estas señalaban lo siguiente:

2. Se pidió a los niños de un grupo de sexto grado lo siguiente: *Anota un número que vaya entre 0.25 y 0.26.*

La respuesta de Daniel, de 11 años, fue la siguiente:

"Podría ser 0.<u>25</u>1080043100, porque mientras el veinticinco cinco no se pase a 26, será un número en medio de los otros dos".

Comente con sus compañeros si la respuesta es correcta y qué opinión le merece dicha respuesta.

3. Otra pregunta planteada, y otra respuesta de Daniel fueron las siguientes:

¿Puedes decirme cuántos números pueden ir entre .42 y .43?

Daniel: Infinito (Daniel quiere decir que hay una infinidad de números entre .42 y .43)

¿Cree usted que es correcta la respuesta de Daniel? _________ ¿Cómo la justificaría?

Las dos cuestiones no causaron dificultad, gracias a la definición que se dio sobre la propiedad de densidad y las conclusiones que se obtuvieron de la discusión de las preguntas anteriores. A continuación, se muestra el fragmento de la discusión de las últimas preguntas.

Tallerista: Carmen, ¿Cuál fue tu respuesta a la segunda pregunta?

Carmen: Puse que sí, porque la cifra de las centésimas no cambia y no pasa al .26

Tallerista: ¿Y en la última, Elizabeth?

Elizabeth: Es correcta la respuesta, ya que, existe una infinidad de decimales entre .42 y.43. Siempre salen decimales después de .42 como: .421, .4201, .42001, etc. Si usas las equivalencias los puedes encontrar: .42, .420, .4200, .42000.

Tallerista: Entonces, agregar ceros no es un truco, sino como lo menciona su compañera es identificar un equivalente. Si decimos .42 y .420 estamos haciendo una equivalencia.

En estos últimos argumentos, aceptados por los demás participantes, se observa que se considera como estrategia la noción de equivalencia para determinar que entre dos decimales siempre es posible intercalar otro decimal y reflexionan acerca de ¿Por qué es válido agregar ceros a la derecha de la última cifra significativa en la parte decimal? Con esto se dio por terminada la sexta sesión.

3.6.3. Aprendizajes logrados en esta sesión

En síntesis, los asistentes al taller lograron: a) Identificar que los estudiantes utilizan sus conocimientos de los naturales —que se revelan como falsos—para resolver tareas que involucran la propiedad de densidad de los decimales; b) Entender que existe una cantidad infinita de números entre otros dos decimales dados y designar este aspecto como propiedad de densidad; c) Comprender que es indefinible el decimal que sigue o antecede a otro.

Aunque, en la sesión tres se trabajó la representación de los decimales por medio de la recta numérica, el conductor consideró que hubiera sido oportuno mostrar algunos ejemplos en esta sesión. Esto con la intención de que los participantes identificaran a la recta numérica como un recurso didáctico al momento de trabajar la densidad de los decimales.

Sesión 7

La intención para esta sesión fue trabajar con los asistentes al taller problemas de contextos reales donde tienen sentido las operaciones que involucran decimales. Por último, cada uno de los participantes, se situaron en inventar dos problemas.

3.7. Objetivo 7: Plantear problemas que se resuelvan utilizando los decimales

El conductor del taller inició la sesión planteando el objetivo 7: problemas que se resuelven utilizando los decimales. Les comentó que desarrollarían varias actividades. La primera se trabajó de manera individual. En ella, los participantes resolvieron 3 problemas en un formulario de Google. Se les solicitó que de ser posible anotaran una segunda estrategia de solución. En el formulario aparecieron los siguientes problemas:

1. Lidia tiene 3.72 metros de listón y va a hacer moños. Para cada moño ocupa 0.5 metro de listón. ¿Cuántos moños puede hacer?
2. El precio de un kilogramo de pollo cuesta $88.20. ¿Cuál será el costo de un paquete que contiene 0.58 kg de pollo?
3. De una tela que mide $\frac{3}{5}$ metro, Laura utilizó 0.4 metro para hacer una carpeta. ¿Cuánta tela le sobró?

Para la solución del primer problema los participantes propusieron tres procedimientos. El primero era mediante la división: $3.72 \div 0.5$. En el segundo utilizaron una adición iterada: $0.5 + 0.5 + 0.5 + 0.5 + 0.5 + 0.5 + 0.5$. Por último, implementaron una estimación: $0.5 \times 8 = 4 - 0.5 = 3.5$.

Según los estudiantes del taller, el segundo problema solo tenía un método de solución, la multiplicación: 88.20×0.58.

Todos los participantes propusieron que el problema tres se resolvía por medio de la resta. Sin embargo, encontraron tres procedimientos diferentes: 1) Representar los datos mediante fracciones decimales: $\frac{6}{10} - \frac{4}{10}$; 2) Representar los datos usando expresiones decimales: $0.6 - 0.4$; 3) Empleando las fracciones en su mínima expresión: $\frac{3}{5} - \frac{4}{5}$.

Después de que los participantes expusieron sus diferentes soluciones, el conductor del taller preguntó lo siguiente: *"¿Creen que los procedimientos presentados sean probables soluciones que den los niños de primaria? Justifiquen su respuesta"*. Su respuesta fue afirmativa. Ellos estuvieron convencidos de que, en la clase se pueden presentar errores, así como procedimientos no convencionales y convencionales. Por ejemplo, según los participantes, es más eficiente usar, para el primer problema, la división que una suma iterada.

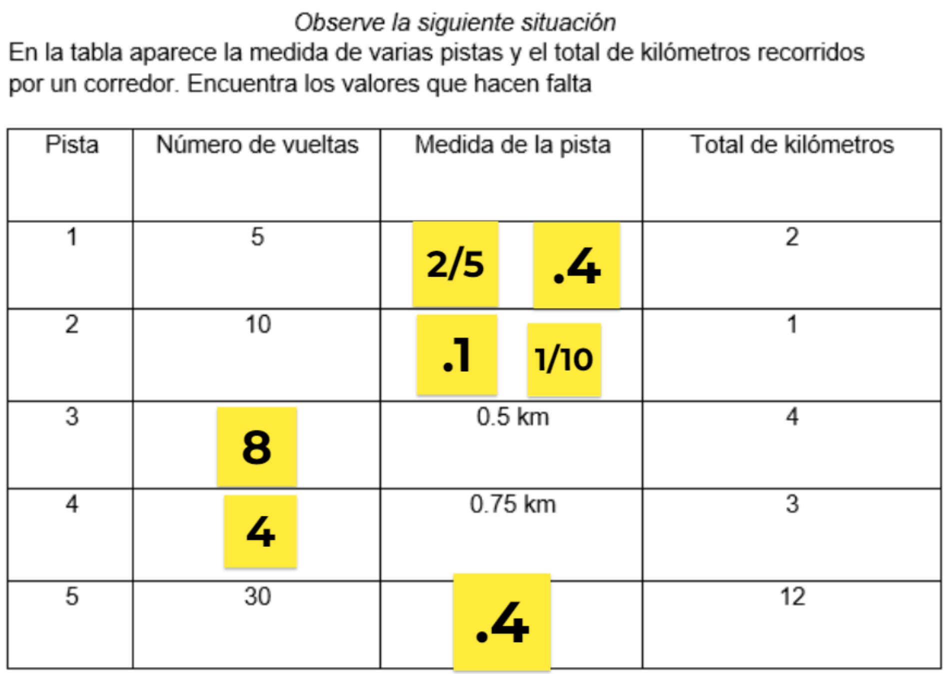
Para seguir con la reflexión del papel docente, el tallerista les preguntó: *"Al resolver problemas en el aula, ¿Por qué es importante realizar una puesta en común de los procedimientos propuestos por los niños de primaria?"*. Lo anterior, generó el siguiente diálogo:

> *Victoria: Para que el alumno logre relacionar las operaciones que el maestro le enseñó con la práctica.*
>
> *Lino: Para que el alumno compare y elija cuál procedimiento le facilita más las cosas.*
>
> *David: El alumno ve cómo se debe contestar y a partir de ahí se dejan más problemas.*
>
> *Carmen: Para que el alumno compruebe si su procedimiento es el más adecuado.*
>
> *Elizabeth: Para que el maestro corrija a los alumnos.*
>
> *Ignacio: Para que validen si su procedimiento es el correcto.*
>
> *Karyme: Aquí, el maestro les muestra la solución y los niños crean la idea de cómo se resuelve.*
>
> *Guadalupe: Los niños identifican procedimientos diferentes al suyo y eligen si son mejor alternativa para resolver.*

Al escuchar las opiniones, el conductor de taller se percató que la participación se dividía en dos creencias. Unos creían que el papel del profesor es mostrar y corregir el procedimiento para que los alumnos lo apliquen en posteriores tareas matemáticas. Otros aceptaban que en ese momento de la clase los niños comprueban si su procedimiento es correcto o no y si es el más eficiente. Por lo que el tallerista intervino y mencionó lo siguiente: *Tallerista: En la puesta en común la función del docente es exhortar a los niños a discutir la validez de sus procedimientos. Por lo que la función del niño es comentar, comparar y reconocer errores (si los hay) en sus procedimientos para concluir, con ayuda del profesor, cuál estrategia de solución es más efectiva.*

Otro problema que se les planteó a los asistentes del taller involucraba la multiplicación de decimales. Mediante una pizarra digital se les mostró una tabla con los siguientes datos:

Figura 1. *Soluciones propuestas por los participantes*



Observe la siguiente situación

En la tabla aparece la medida de varias pistas y el total de kilómetros recorridos por un corredor. Encuentra los valores que hacen falta

Pista	Número de vueltas	Medida de la pista	Total de kilómetros
1	5	2/5 .4	2
2	10	.1 1/10	1
3	8	0.5 km	4
4	4	0.75 km	3
5	30	.4	12

Los estudiantes del taller fueron colocando etiquetas con las soluciones encontradas. En los resultados emitidos se pudo identificar que encontraron sentido a la situación apoyados en la multiplicación. Es decir, qué cantidad al multiplicarse por la medida de la pista o el número de vueltas —según fuera el caso— resulta el total de kilómetros recorridos ($5 \times Q = 2$). Así, en sus soluciones iban apareciendo comentarios como el siguiente:

Guadalupe: En la primera es $\frac{4}{10}$, *porque* $\frac{4}{10}$ *es igual a* $\frac{2}{5}$ *y 5 veces* $\frac{2}{5}$ *es* $\frac{10}{5}$ *que es igual a 2.*

Tallerista: en la fila 3 nos dan 0.5 km en la medida de la pista y 4 kilómetros recorridos en total. ¿Cuántas vueltas dio el corredor?
Ignacio: 8.
Tallerista: ¿Cómo supiste que eran 8?
Ignacio: Porque el total de kilómetros es 4 y en cada vuelta recorre 0.5 kilómetros, por esta razón, un número multiplicado por 0.5 que me de 4 es 8.

Completar los datos de la tabla no representó ninguna dificultad para los participantes. Incluso una estudiante consideró el uso de equivalencia para resolver ($\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$). Por lo visto, usaron los conceptos trabajados a lo largo de este taller.

El tallerista aprovechó para comprobar que les había quedado claro el efecto de multiplicar por decimales menores que 1 (trabajado durante la sesión 5). Así que, les hizo dos preguntas*: ¿Qué número multiplicado por 10 da 1? y ¿Qué número multiplicado por 5 da 4?* Los participantes manifestaron que las preguntas eran fáciles. En el siguiente diálogo se muestran los comentarios:

Ignacio: (risas) ¿Cómo quiere la respuesta?, porque tengo varias formas.
Guadalupe: (risas) Está bien fácil, solo nos anda calando.
Karyme: La primera puede ser: $\frac{1}{10}$, $\frac{10}{100}$*, 0.1, 0.10, etc.*
Ignacio; ¡Sí, nuestras amigas equivalencias! Por ejemplo, la respuesta a la segunda pregunta puede ser: $\frac{4}{5}$, $\frac{8}{10}$*, 0.8, etc.*

3.7.1 Inventar 2 problemas que impliquen el uso de los decimales

Como actividad final, se encomendó a los estudiantes para profesor inventar 2 problemas que se pudieran implementar en un grupo de primaria tomando en cuenta el contenido de los decimales (véase el anexo 2: problemas invitados por los estudiantes). Estos debían tener relación con alguno de los objetivos trabajados durante el taller. A continuación, se presenta la estadística de las actividades que propusieron junto con el recurso didáctico contemplado.

Tabla 12. *Intención y número de actividades*

Comparar y ordenar números decimales	Desechar el criterio de, a mayor número de cifras decimales, más grande es el número.	Identificar diferentes formas de representar un número decimal	Encontrar equivalencias de decimales con las fracciones	Multiplicar con decimales	Identificar la propiedad de densidad
5	3	2	2	1	3

Tabla 13. *Recurso didáctico*

Cuadrado unidad (Comparar y ordenar números decimales)	Uso de tabla de datos que implican decimales. (Desechar el criterio de, a mayor número de cifras decimales, más grande es el número)	Mediante áreas (representación de decimales)	Situación real (Equivalencias)	Situación real (Multiplicación que involucra decimales)	Uso de la recta numérica (Identificar la propiedad de densidad)
5	3	2	2	1	3

Para terminar la sesión, el conductor del taller cuestionó a los participantes sobre: ¿Qué les había parecido el taller? Con lo anterior, se logró que reflexionaran sobre los conocimientos que adquirieron durante las siete sesiones del taller. Sus comentarios fueron clasificados entre el conocimiento pedagógico del contenido y el conocimiento matemático. Cabe rescatar que hubo casos donde se reconocieron ambos conocimientos para la enseñanza de los decimales. A continuación, se muestra una tabla con la clasificación de los comentarios:

Tabla 14. *Conocimiento matemático y pedagógico para la enseñanza de los decimales (opiniones de los participantes)*

Participante	Respuesta	Conocimiento considerado
Carmen	Las sesiones del curso me servirán para tomar varios elementos que ayuden a elaborar actividades respecto de los decimales, unos de estos elementos son como el cuadrado unidad, otros serían los móviles que ayudan a los alumnos a reconocer la relación entre los decimales y las fracciones y el laberinto de los decimales para trabajar las operaciones, entre otros más.	Conocimiento pedagógico del contenido
Victoria	Me pareció muy interesante, he podido comprender cómo es que se trabajan las decimales con los niños. Ahora tengo más presente algunas técnicas que se pueden utilizar para abordar este tema con los niños (Cuadrado unidad, rectas numéricas, el uso de las superficies para representar un decimal etc.), ayudándonos a fortalecer sus aprendizajes	Conocimiento pedagógico del contenido

Lino	Me pareció muy fructífero debido a que el aprendizaje de los números decimales son uno de los mayores dolores de cabeza en los alumnos, ya que se deben de manejar términos a los que no se están acostumbrados naturalmente, así que el taller viene como anillo al dedo para poder acercarnos a la enseñanza de estos temas, donde gracias al mismo me doy cuenta de que tenía una idea muy pobre acerca de las actividades que se pueden plantear en una clase.	Conocimiento pedagógico del contenido
Elizabeth	Aprendí muchas cosas de las que no tenía conocimiento o no recordaba y que son esenciales para la enseñanza de los decimales: Equivalencias, propiedad de densidad, división y multiplicación de los decimales, compararlos y ordenarlos. Las estrategias que el profesor utilizó para darnos a conocer los temas me parecieron muy buenas	Conocimiento del contenido
Ignacio	Me pareció muy bueno y oportuno, sinceramente es un tema que no dominaba demasiado. Lo que más me llevo del taller son los principales errores que cometen los niños (entienden a los decimales desde los pensamientos que tienen de los naturales) y las estrategias para favorecer el aprendizaje de los números decimales (Cuadrado unidad, recta numérica, representación mediante áreas y el laberinto de los decimales). Además, de lo que se necesita entender para su enseñanza: comparar y ordenar, equivalencias, diferentes representaciones, su relación con las fracciones, la multiplicación y división y su resultado, y la propiedad de densidad.	Conocimiento del contenido y conocimiento pedagógico del contenido
Guadalupe	Personalmente, me gustó mucho, ya que a lo largo del taller y gradualmente conocí no solo aspectos de los decimales, sino que también conocí el pensamiento de los niños cuando están aprendiendo sobre los números decimales, por qué arrastran ideas de los números naturales a los decimales, lo que me llevó a lo largo del taller a conocer las estrategias que a veces no favorecen el aprendizaje significativo de los alumnos, así como estrategias que sí lo hacen y la importancia de que los profesores conozcan acerca del tema a enseñar.	Conocimiento del contenido y conocimiento pedagógico del contenido
Karyme	Fue un medio que me permitió comprender los aspectos de los decimales y elaborar actividades, además de comprender cómo los entienden los niños, los ven como si fueran los números naturales. Algunas de sus características no las conocía (densidad, la relación que guardan con las fracciones, decimales periódicos y sus equivalencias). Vimos actividades y métodos que no conocía y considero que serán buenas para ayudar en la concepción de los decimales a mis futuros alumnos, por ejemplo, conocí mejor lo de: el cuadrado unidad, en qué momento utilizar la recta numérica, estrategia de agregar ceros (la equivalencia) y las diferentes formas de representar un decimal mediante áreas, esto me ayudará en un futuro en la puesta en marcha de la profesión docente.	Conocimiento del contenido y conocimiento pedagógico del contenido
David	El taller fue de gran aprendizaje para mí, ya que en sí tenía un conocimiento básico y me ayudó a adquirir mayores conocimientos conceptuales, formas de enseñar a los alumnos y a identificar los errores que cometen, conocí actividades que se pueden desarrollar dentro del aula y además a nutrir mi habilidad para hacer uso de ellas y así lograr que los alumnos comprendan a los decimales.	Conocimiento del contenido y conocimiento pedagógico del contenido

3.7.2. Aprendizajes logrados en esta sesión

Con esta última participación de los estudiantes se dio por terminada la sesión siete. En conclusión, los asistentes al taller lograron: a) encontrar soluciones a situaciones reales donde se involucran los decimales; b) identificar la importancia de considerar previamente los procedimientos que probablemente usen los alumnos de primaria para resolver problemas donde se usan decimales; d) reflexionar acerca del papel docente y del alumno en la pueta en común; e) proponer problemas con la intención de trabajar el contenido de los decimales.

Capítulo 4. Conclusiones

¿Cómo puede la enseñanza convertirse en un acto revolucionario? Comienza con los momentos más pequeños en el aula, que pueden tener consecuencias profundas y duraderas. Pequeñas interacciones entre maestros y estudiantes, momentos que un maestro quizás nunca recuerde, pueden determinar si un estudiante se va sintiéndose visto o invisible.

(D. Ball)

Capítulo 4. Conclusiones

En este capítulo se describen las conclusiones obtenidas, una vez realizada la intervención cuyo fin era que: estudiantes de segundo semestre de la LEP ampliaran su conocimiento disciplinar y pedagógico acerca de los decimales. La intervención consistió en un taller con duración de 7 sesiones realizadas los martes y jueves de los meses de abril y mayo del año 2021. Para llevar adelante el trabajo, se empleó el Modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) elaborado por Ball y sus colegas (2008). En este modelo se sostiene que para enseñar matemáticas el profesor debe dominar los siguientes conocimientos: un conocimiento disciplinar del tema a enseñar y un conocimiento pedagógico acerca de cómo enseñarlo.

Los datos expuestos en investigaciones previas exponen que una parte significativa de docentes considera a los números decimales como sinónimo de expresión decimal, sin percatarse de sus características como racional y su pluralidad de representaciones. De tal manera, dichos docentes muestran poco interés en que sus alumnos hagan una ruptura con la forma de pensar los naturales para comprender los decimales, debido a que, sus conocimientos y creencias poco favorecen a la compleja tarea de enseñar ese contenido. Por lo anterior, a través de las actividades virtuales implementadas durante el taller se tuvo la intención de reconstruir las concepciones sobre los decimales de los futuros profesores que participaron en él.

Al iniciar la intervención se constató que algunas de las dificultades con el conocimiento matemático de los decimales que presentan los alumnos de primaria, reportadas en otras investigaciones, se presentan también en los estudiantes para profesor con los que se trabajó. Estas dificultades se relacionan con:

- Identificar un número decimal.
- El orden entre decimales (asignando antecesores y sucesores como en los naturales).
- El uso de la noción de equivalencia entre los racionales para resolver problemas.
- Representar los decimales mediante el uso de áreas y puntos en la recta.
- La propiedad de densidad
- Comprensión de los resultados al multiplicar o dividir usando números menores que 1, pero mayores que cero.

Lo anterior como resultado de un sistema educativo que no ha logrado superar conceptos erróneos de los decimales en estudiantes que vienen de un nivel medio superior.

Con el fin de superar esas dificultades, se elaboraron y llevaron a cabo actividades para trabajar cada uno de los aspectos antes mencionados. Además, se agregaron actividades para analizar la enseñanza y los errores que frecuentemente cometen los estudiantes de nivel primaria al emplear los decimales.

En general, en cuanto al conocimiento matemático, la mayoría de los participantes tuvo una mejoría significativa. En lo que sigue se rescata el avance que se observó durante el taller:

1. Los estudiantes para profesor pasaron de pensar a los números decimales como aquellos que se escriben con punto, a ser aquellos que "terminan" (a diferencia de los decimales infinitos) y que también se pueden representar mediante una fracción decimal o en sus equivalentes en fracción común. Así, se dejó atrás la concepción de sinónimo entre expresión decimal y número decimal.

2. Un aspecto relevante que se identificó fue que en los decimales no se puede definir antecesor ni sucesor, característica de todos los racionales. Esta idea les permitió entender, con mayor firmeza, por qué números decimales pueden tener una menor cantidad de cifras que otro y, sin embargo, ser mayor que ese otro. Es decir, observaron el valor de los distintos órdenes de la parte decimal de un número: un décimo representa la décima parte de la unidad, el centésimo es una centésima parte de la unidad y un milésimo vale la milésima parte de la unidad; a través de la representación visual de la unidad (cuadrado unidad).

3. Al trabajar con la noción de equivalencia, en una expresión con punto, los estudiantes identificaron que era posible agregar ceros a la derecha de la última cifra significativa de la parte fraccionaria sin que cambiara el valor del número. Tal estrategia los ayudó también a intercalar decimales entre otros dos y a establecer el orden entre dos decimales dados.

5. Las ideas sobre la multiplicación y división que tenían en un inicio los participantes, eran guiadas por los resultados que se obtienen al multiplicar o dividir con naturales (sin importar que estos fueran decimales), es decir, consideraban que el producto es mayor que los factores y el cociente es siempre menor que el d. El proponer el trabajo con la situación, ya clásica, del laberinto de los decimales, puso en duda sus conocimientos previos sobre la magnitud de los resultados. A través del análisis de los números involucrados en las operaciones propuestas (al menos uno menor

que uno, pero mayor que 0). Sin embargo, los estudiantes no llegaron a la idea de que en la división entre menor fuera el divisor (con cantidades entre 1 y 0), mayor sería el cociente.

6. Se evidenció que comprender la propiedad de densidad fue una tarea de gran dificultad para los ocho futuros docentes participantes en el taller. Hizo falta reafirmar esta propiedad a través de representaciones visuales (ubicando números sobre la recta), aunque sí se vieron, hubiese sido pertinente dedicarle más tiempo.

Grosso modo, se puede decir que al igual que los alumnos de primaria, los estudiantes que ingresan a la LEP presentan dificultades con el conocimiento de los decimales. Por tanto, el reto de las instituciones que reclutan a dichos estudiantes (como lo fue para este taller) debe ser dar los apoyos necesarios para robustecer o incluso completar su formación matemática acerca de los decimales, o de lo contrario, heredarán sus dificultades a los alumnos a los cuales comunicarán su enseñanza alrededor de este contenido.

Otro de los objetivos centrales del taller tenía que ver con el conocimiento pedagógico para la enseñanza de los decimales, tema abordado considerando aspectos como: el análisis de los errores más comunes que cometen estudiantes de primaria al trabajar con estos números, análisis de las situaciones propuestas durante el taller acerca de dichos números y el análisis de fragmentos de clases, así como el impacto que tiene la conducción de los docentes al abordar este contenido en primaria. En general, en cuanto al conocimiento pedagógico, la mayoría de los participantes tuvo una mejoría significativa. En lo que sigue se rescata el avance que se presentó:

1. Los estudiantes hicieron uso del cuadrado unidad. Encontraron que utilizarlo en las aulas de la educación primaria es valioso para que los alumnos comprendan el valor de los décimos, centésimos y milésimos y las relaciones entre ellos. Añadiendo que su uso puede servir para que se comparen decimales expresados con punto, fracciones con denominador potencia de 10 o fracciones comunes y determinen cuál es mayor, menor o igual.

2. Consideraron que proponiendo situaciones mediante representaciones visuales (áreas y recta numérica) se facilita el aprendizaje en los alumnos de primaria de los decimales en cuanto a: la noción de equivalencia, la multiplicación de fracciones con la idea de tomar una parte de otra parte y la propiedad de densidad.

3. El análisis de fragmentos de clase fue útil para que los participantes determinaran que, debido a su naturaleza, los decimales son un subconjunto de números con características propias y que comúnmente los estudiantes de primaria quieren automáticamente trasladar características

del conjunto de los naturales para interpretar, de una manera equivocada, el comportamiento de los decimales. Los participantes razonaron también que, si los alumnos de cuarto, quinto y sexto grados realizan exclusivamente tareas de memorizar los nombres de columnas o dictado de números, no se está garantizando una construcción cabal de sus características, como es saber qué valor representan las cantidades.

4. Detectaron que, al realizar la situación del laberinto de los decimales con los niños de primaria, puede cambiar su percepción sobre los resultados de la multiplicación y división cuando estos solo la piensan desde los naturales.

En síntesis, los participantes en el taller llegaron a la conclusión de que, lo que los alumnos aprenderán de los decimales variará según las situaciones propuestas y la conducción del profesor en la clase.

4.1. Reflexiones a partir de la conducción del taller

Las autoridades mexicanas de salud decidieron, ante el creciente número de infectados por el COVID-19, iniciar un aislamiento social a partir de marzo de 2020. Esto tuvo impacto en la educación que a diario se ofrecía en las distintas instituciones de manera presencial. De modo que, para garantizar la educación en México se buscaron distintas alternativas que contribuyeran a la protección estudiantil contra el virus. Una de ellas fue implementar las clases por las diferentes plataformas de videollamadas (Zoom, Microsoft Teams, Google Meet, etc.). Lo anterior, ofreció una mirada a la importancia y lo complejo del papel del profesor. Dio cuenta de que además de saber los contenidos de la disciplina, se debe tener habilidades para crear estrategias didácticas que permitan a los estudiantes desarrollar su pensamiento matemático. Esta circunstancia ocurrió cuando se estaba preparando un taller presencial sobre los números decimales.

La idea de que los estudiantes para profesor contaran con una opción de formación a través de las distintas plataformas, dentro de su horario escolar y verificar que una de sus materias es: *Aritmética. Números decimales y fracciones*, llevó a elaborar una propuesta de intervención que consistió en un taller de matemáticas, con el tema conocimiento para la enseñanza de los números decimales mediante enseñanza remota. Las actividades del taller se planearon con el propósito de generar en los futuros docentes la reflexión sobre el conocimiento matemático de los decimales y el conocimiento pedagógico de ese contenido.

Entonces, en la conducción de la intervención no solo se trató de emplear estrategias ya conocidas desde la práctica como profesor en el aula, había que implementar herramientas tecnológicas que se desconocían y merecieron pruebas de ensayo y error antes de la implementación del taller virtual. Sin duda, Google Meet, plataforma usada para la realización del taller, es un claro ejemplo de una aplicación digital con la que se cuenta para el ejercicio docente virtual, que debemos dejar claro: nunca sustituirá a la práctica de enseñanza en el aula, pero ante casos como el COVID-19 puede ser una alternativa.

Para la planeación del taller se consideró la revisión de investigaciones pasadas en cuanto a la enseñanza y aprendizaje de los números decimales en educación primaria, así como los conocimientos previos de los participantes respecto al tema. En relación con la revisión de la literatura se implementaron situaciones didácticas como: el cuadrado unidad, representaciones de los decimales mediante áreas y rectas numéricas, la lección de los móviles (adaptada de SEP, 2001) y el laberinto de los decimales; el propósito fue que reflexionaran sobre el impacto de implementar dichas situaciones en el aula y los aspectos de los decimales que se abordan en cada una. Los comentarios de dichas situaciones y los problemas que inventaron al final del taller permitieron ver que el objetivo se consiguió.

De acuerdo con lo planeado, con respecto a la relación con sus conocimientos matemáticos, se logró un avance con respecto a los siguientes aspectos conceptuales: reconocimiento de un número decimal, el valor según su posición, orden, comparación, pluralidad de representaciones, densidad y multiplicación de decimales.

Tras la revisión de la primera sesión grabada, con Google Meet, se observó que al implementar una estrategia de participación abierta a todo el grupo (plantear una pregunta e inmediatamente aceptar una respuesta) la puesta en común quedó en manos de solo dos estudiantes para profesor; dejando las siguientes dudas: ¿hay certeza de que paso con los otros participantes? ¿Quiénes no participaron entendieron cuál era el conocimiento matemático que estaba en juego? De tal manera, en las siguientes sesiones, se promovió distribuir la participación de forma equitativa al momento de las discusiones (en algunos casos obligándolos). Así, los estudiantes para profesores lograban validar, corregir o reforzar sus ideas sobre el conocimiento matemático y pedagógico de los decimales abarcado en cada una de las actividades del taller.

Los estudiantes de LEP participantes mostraron interés por mejorar sus conocimientos matemáticos y pedagógicos acerca de los decimales. Grosso modo, las actividades planteadas durante el taller fueron resueltas de manera oportuna, al hacerlo los futuros profesores se mostraron preocupados ante un tema que habitualmente en la educación primaria se cree que merece poco esfuerzo didáctico por parte de los profesores y poco esfuerzo cognitivo por parte de los estudiantes.

4.2. Limitaciones de la intervención

Como parte de las limitaciones de la intervención se puede mencionar que, la experiencia con el taller fue un gran reto ante el cambio de un espacio físico a uno virtual, donde una cámara no cuenta con la capacidad de mostrarnos la captura real de lo que está sucediendo durante la sesión entre las interacciones de los diferentes participantes.

Otro punto para rescatar es que, se presentaron aspectos de la red de la conexión a internet que no se pueden controlar, dicho de otra manera, mantener y garantizar una buena conexión a las sesiones virtuales no estuvo en nuestras manos. Esto en algunas ocasiones dificultó entender las participaciones de los integrantes, la coherencia fluida que se llevaba durante la sesión y pérdida de tiempo valioso que pudo ser ocupado para dar mayor profundidad al análisis de las sesiones.

También, quiero rescatar que los participantes elaboraron exposiciones para presentar a sus compañeros normalistas que no participaron en el taller. Esa experiencia hizo reflexionar acerca de si conjuntamente al propósito de que los futuros profesores ampliaran su conocimiento sobre la enseñanza de los decimales, ¿existe la posibilidad de que ellos pudieran reproducir las sesiones a sus demás compañeros que no participaron en el taller? ¿Cuáles serían los beneficios o contradicciones de hacerlo? Indudablemente, comprendí que se trataba de una encomienda por parte de la autoridad a cargo del grupo y decidí compartirles las actividades que trabajamos, aunque después no hubo posibilidad de conocer qué había pasado con esa acción emprendida por los futuros profesores.

Por último, dejar que el taller cerrara con la reflexión de su propio aprendizaje, adquirido durante las 7 sesiones de esta intervención, brindó una mirada a la importancia que pueden tomar por el contenido, que en investigaciones pasadas se definió como cuasi invisible (Avila, 2008). Esto coloca al contenido de los decimales en un lugar razonable, en cuanto su enseñanza y aprendizaje, como lo señaló Karyme, una de las participantes:

> *El taller fue un medio que me permitió, por su organización, comprender la importancia de un tema subestimado por la educación de la escuela primaria. Me llevo con emoción muchas cosas que aprendí en el taller, así como la ilusión de algún día poder ponerlas en marcha en mi práctica como docente en formación y como docente en servicio.*

Aunque, cabe aclarar, afirmar que el taller logrará modificar la práctica de la enseñanza en torno al contenido de los decimales puede ser muy comprometido, debido a que, los tiempos de esta investigación no favorecieron a explorar todos los elementos que integran los dominios que exige la enseñanza de los números decimales como lo es, realizar un acompañamiento que verifique las acciones que realiza el profesor para un mejor aprendizaje del tema.

Referencias bibliográficas

Referencias bibliográficas

Aguilar, A.; Carreño, E.; Carrillo, J.; Climent, N.; Contreras, L.; Escudero, D.; Flores, P.; Montes, M.; Rojas, N. (2013). *El conocimiento especializado del profesor de matemáticas: MTSK*. En SEMUR, Sociedad de Educación Matemática Uruguaya (Ed.), VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (pp. 5063-5069). Montevideo, Uruguay: SEMUR. Disponible en El_conocimiento_especializado_profesor_matematicas.pdf (uhu.es)

Avila, A. y García, S. (2008). *Los decimales: más que una escritura*. México. INEE.

Avila, A. (2008). Los profesores y los decimales. Conocimientos y creencias acerca de un contenido de saber cuasi invisible. *Educación Matemática*, 20 (2), 5-33.

Avila, Alicia (2013). Conocimientos en construcción sobre los números decimales: los resultados de un acercamiento conceptual. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. Vol. 18, IREM de Strasbourg, pp. 29-59

Barraza, A. (2010). *Elaboración de propuestas educativas.* Universidad Pedagógica de Durango. Disponible en ElaboracionPropuestas.pdf (upd.edu.mx)

Barriendos, A. y Mendoza T. (2012). Sentido Numérico. *En C. Ruiz [y otros] (Ed.) Matemáticas para profesores de primaria y prescolar* (pp. 52-96). UNAM, México.

Barriendos, A. (2013). La multiplicación achica y la división agranda. Cuando los decimales contradicen la experiencia. *Ponencia presentada en el XII Congreso Nacional de Investigación Educativa*, Guanajuato, México, noviembre de 2013. Disponible en www.comie.org.mx

Barriendos, A. (2019). Enseñar los números decimales en la primaria: Una ingeniería didáctica para maestros. Tesis de Doctorado en Pedagogía, UNAM, México.

Ball, D. L. (2017). Uncovering the special mathematical work of teaching. En *Proceedings of the 13th international congress on mathematical education* (pp. 11-34). Springer, Cham.

Brown, M. (1981). Place value and decimals, en K. M. Hart (Ed.) *Children's understanding of mathematics* (pp. 11 – 16). John Murray Eds, Londres.

Brousseau G. (1980) Problèmes de l’enseignement des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques* I (1), 11-59.

Castro, E. (2001), Números decimales. En Enrique Castro (Ed.). *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria* (pp. 315-345). Madrid: Editorial Síntesis.

Centeno, J. (1997). *Números decimales ¿Por qué? ¿Para qué?* Madrid: Editorial Síntesis

Chapman, O. (2013). Investigating teachers' knowledge for teaching mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*(4), 237-243.

Courant, R., & Robbins. (2002). ¿Qué son las matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales. Fondo de Cultura Económica.

Freudenthal, H (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: Reidel. 1 traducción de Luis Puig, publicada en Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados. México: CINVESTAV, 2001.

García, S. (2014). *Sentido numérico. Materiales para Apoyar la Práctica.* México. INEE.

Gutiérrez, C. (2008). Proceso de reflexión en un taller de matemáticas para docentes en servicio. Tesis de Maestría en Desarrollo Educativo, Universidad Pedagógica Nacional, México.

Gutiérrez, C. y Avila, A. (2014). Cambios en el conocimiento sobre la proporcionalidad. Una experiencia de formación de docentes en servicio. En A. Solares, P. Preciado y K. Francis, *Qué cómo y por qué: una conversación internacional sobre el aprendizaje de profesores de matemáticas* (pp. 113-143). Universidad Pedagógica Nacional/ Universidad de Calgary.

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for research in mathematics education*, *39*(4), 372-400.

Hernández, M. (2019). Mactumactzá: la historia que se cuenta de las Escuelas Normales Rurales en México. *Pedagogía y Saberes,* 50, 223-225. Disponible en Vista de Mactumactzá: La historia que se cuenta de las Escuelas Normales Rurales en México (pedagogica.edu.co)

INEE (2015). Resultados nacionales PLANEA. Matemáticas. Sexto de primaria. México: INEE. Disponible en PlaneaFasciculo_10.pdf (sep.gob.mx)

INEE (2018). Resultados nacionales PLANEA. Matemáticas. Sexto de primaria. México: INEE. Disponible en PLANEA06_Rueda de prensa 27nov2018 (sep.gob.mx)

Ma, L. (2010). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Routledge.

Saiz, I., Gorostegui E. y Vilotta D. (2011). Problematizar los conjuntos numéricos para repensar su enseñanza; entre las expresiones decimales y los números decimales. *Educación*

Matemática, vol. 23, núm. 1, pp. 123-151.

SEP (2001). *Libro de matemáticas. Quinto grado*. México: SEP

SEP (2011a). *Plan de estudios*. Educación Básica México: SEP.

SEP (2011b). *Programas de estudio 2011. Matemáticas. Educación Básica. Primaria*. Cuarto grado. México: SEP.

SEP (2011c). *Programas de estudio 2011. Matemáticas. Educación Básica. Primaria*. Quinto grado. México: SEP.

SEP (2011d). *Programas de estudio 2011. Matemáticas. Educación Básica. Primaria*. Sexto grado. México: SEP.

SEP (2013a). *Libro para el maestro. Desafíos matemáticos. Cuarto grado*. México: SEP.

SEP (2013b). *Libro para el maestro. Desafíos matemáticos. Quinto grado*. México: SEP.

SEP (2013c). *Libro para el maestro. Desafíos matemáticos. Sexto grado*. México: SEP.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard educational review*, *57*(1), 1-23.

Steinle, V. y Stacey, K. (2004). Persistence of decimal misconceptions and readiness to move to expertise. In M. J Holnes & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th PME International Conference*, 4, 225- 232.

Suárez, M. (2017). *Acercamiento a la propiedad de los números decimales: Un estudio con profesores en formación*. Tesis de Maestría, Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV, México.

Valencia, E. (2014). *Secuencia de enseñanza de los números decimales basada en un diagnóstico de las dificultades de comprensión de estos números*. Tesis de Maestría en Desarrollo Educativo, Universidad Pedagógica Nacional, México.

Valencia E. y Avila A. (2015). Ideas previas sobre la multiplicación y división con decimales: su evolución a partir de una experiencia con el Laberinto de decimales. *Educación Matemática*. México; vol. 27, núm. 3, pp. 81-110

Waldegg, G. (1996). Sobre el origen y significado de los números decimales. *Revista de la escuela y del maestro*, núm. 11, México: Fundación SNTE, pp. 54-60.

Widjaja, W. Stacey, K & Steinle V. (2008), Misconceptions about Density of Decimals: Insights from Indonesian Pre-service Teachers. *Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia*. 31 (2), 117- 131.

Anexos

Anexo 1

Diagnóstico

Taller virtual para ampliar el conocimiento matemático y didáctico de los decimales de futuros profesores de primaria

200927037@g.upn.mx (no compartidos) Cambiar de cuenta

Menciona 3 contenidos de matemáticas en los que creas que los niños de primaria tengan más dificultades de aprendizaje:

Tu respuesta

¿Considera fácil o difícil enseñar los números decimales? Justifique su respuesta

Tu respuesta

¿En qué grado cree usted que debe comenzar la enseñanza de los decimales? Justifique su respuesta

Tu respuesta

¿Cuáles son números decimales?

- [ ] El valor de $\pi = 3.14159...$
- [ ] 5.98
- [ ] 1/8
- [ ] 30/10

¿Cómo identifica usted que un número es decimal?

Tu respuesta

En un examen PLANEA se preguntó a los niños ¿Cuántos números hay entre 0.280 y 0.290? La mayoría contestó que hay nueve, algunos contestaron que hay 99, ¿Cuáles niños crees que dieron la respuesta correcta? Justifique su respuesta

Tu respuesta

En el mismo examen se les preguntó: ¿Cuál es el sucesor de 0.29? la mayoría respondió 0.30 y otra parte respondió 0.291. ¿Quiénes considera que dieron una respuesta correcta? Justifique su respuesta

Tu respuesta

Escriba un número que se encuentre entre 0.33 y 0.43, pero que esté más cerca del 0.33. Justifique su respuesta.

Tu respuesta

¿Por qué cree que un gran porcentaje de alumnos de primaria consideren que 0.785 es mayor que 0.9?

Tu respuesta

En una clase un alumno dijo: El resultado de cualquier multiplicación siempre es mayor que los números que se están multiplicando. ¿cree que es correcto su argumento? Justifique su respuesta:

Tu respuesta

Otro alumno mencionó: En una división el cociente siempre es más chico que el dividendo. ¿cree que es correcto su argumento?Justifique su respuesta:

Tu respuesta

Resuelve

$$3\frac{\square}{100} + \square\,\frac{2}{5} = 5.65$$

Tu respuesta

¿Te pareció fácil o difícil de resolver el anterior ejercicio? Justifica tu respuesta

Tu respuesta

¿Te parece que a los alumnos les costaría trabajo resolverlo? Justifica tu respuesta

Tu respuesta

Enviar

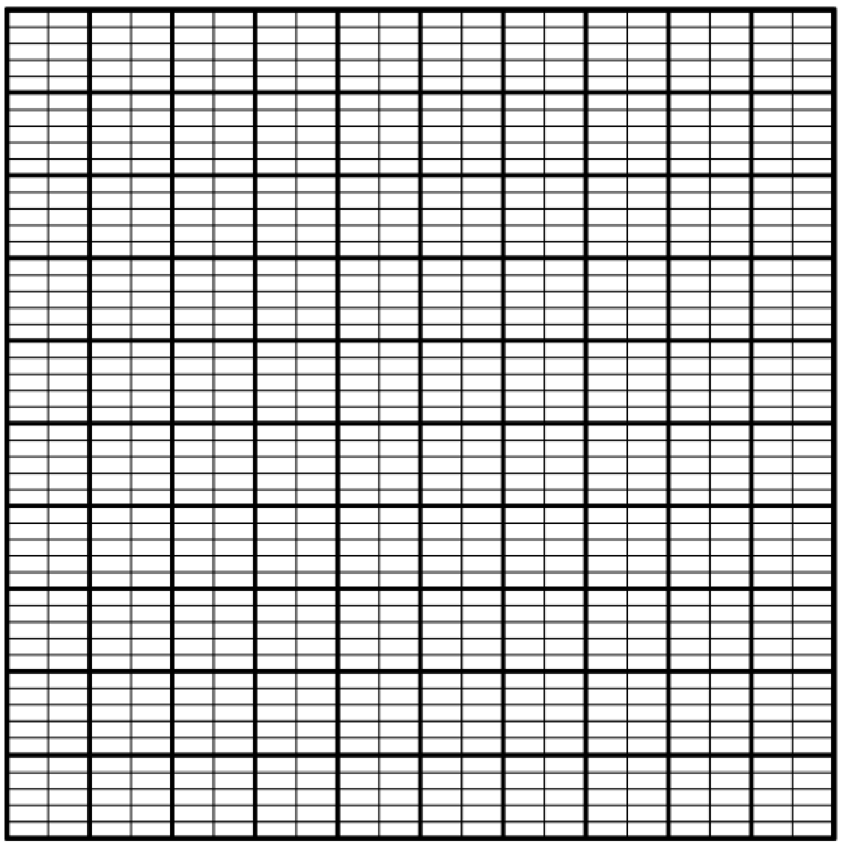
Borrar formulario

Anexo 2

Problemas elaborados por los asistentes al taller

1. Problema elaborado por Carmen (Ordenar decimales):

En el siguiente cuadrado, dividido en 1000 partes iguales, representa con distintos colores las siguientes cantidades: 0.15, 0.128, 0.039, 0.5, 0.10, 0.009. Después, ordena los decimales de menor a mayor.



Contesta las siguientes preguntas:

- ¿Cuántas veces cabe un décimo en la unidad?
- ¿Cuántas veces cabe un centésimo en la unidad?
- ¿Por qué crees que el décimo se llama así?
- ¿Cuántas veces cabe un centésimo en un décimo?

1. **Problema elaborado por David (Comparar decimales):**

Hace días se realizó una carrera de autos deportivos. A continuación, se muestran los tiempos en los que terminaron la carrera.

Auto	Tiempo en Finalizar (Segundos)
Lamborghini	57.7
Ferrari	57.100
Porche	57.039
Mercedes	57.1
Mc Laren	57.29

Ordena de mayor a menor según hayan tardado en finalizar la carrera:

Responde

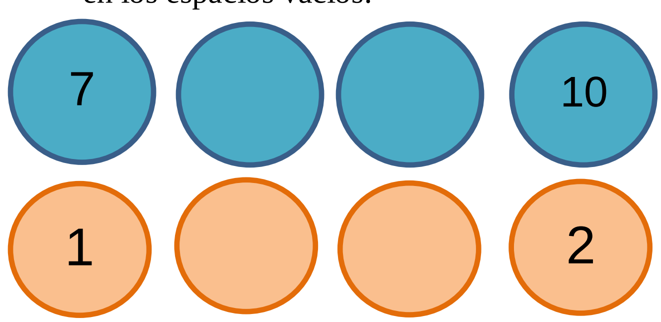
- ¿Qué auto quedo en primer lugar?
- ¿Qué auto en tercer lugar?
- ¿Qué auto en último lugar?
- ¿Hubo algún empate?

2. **Problema elaborado por Guadalupe (Multiplicar decimales):**

Georgina se dedica a la venta de moños, el martes con 2.98 m de listón rojo fabricó moños de 0.25 m. ¿Cuántos moños fabricó?, ¿le sobró listón?

3. **Problema elaborado por Karyme (Densidad de los decimales):**

    I. Encuentra dos números que vayan entre los dos números dados y anótalos en los espacios vacíos:



a) Escribe 4 números que vayan entre 0.3 y 0.4

b) Escribe 12 números que vayan entre 0.30 y 0.40

4. Problema elaborado por Lino (Encontrar la equivalencia):

Doña Carmen mandó a Juanito a la tienda para que comprara la siguiente lista de mandado con Don Pancho.

Al llegar a la tienda Don Pancho le dijo: ″Hijo, he comprado una nueva báscula, es de las más actualizadas, y esta pide las cantidades expresadas con punto decimal″.

Ahora Juanito tiene que expresar las cantidades de la lista con punto decimal.

Ayuda a Juanito a convertir las cantidades, anota la nueva lista:

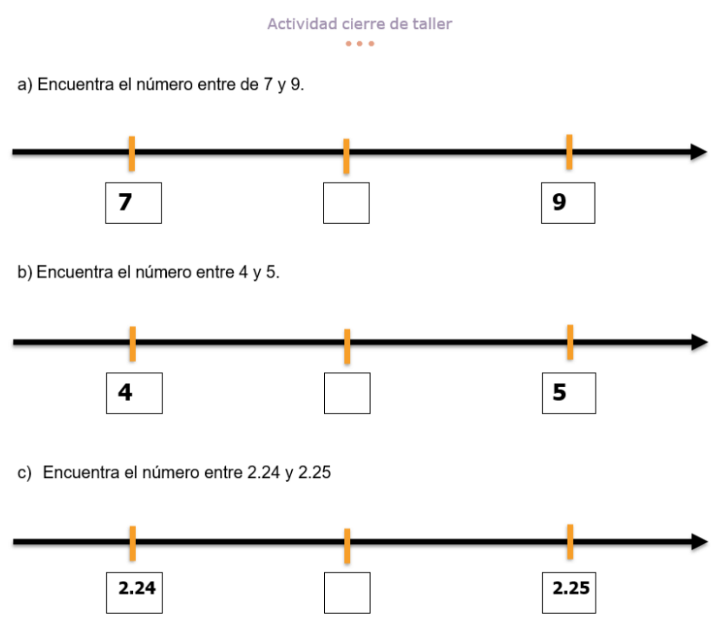
Lista:
¾ Kg de Tomate.
3/3 Kg de Zanahoria.
¼ Kg de Limones.
2/5 Kg de Manzana.
3/6 Kg de Durazno.
4/8 Kg de chile.
3/2 Kg de papa.

5. Problema elaborado por Victoria (Representar decimales mediante longitudes):

La siguiente tira representa $\frac{2}{10}$ de cierta unidad de longitud.

Forma la unidad.

6. Problema elaborado por Ignacio (Densidad de decimales):



7. Problema elaborado por Elizabeth:

Para los juegos escolares se pidió a los alumnos del grupo sexto "A" medir su estatura. Los participantes fueron 3 hombres y 2 mujeres. El registro debe estar ordenado de mayor a menor estatura. Ayuda a los encargados a registrar correctamente los datos de este grupo.

Alumn@	***Estatura (m)***
Juan	1.33
Erick	1.4
Gloria	1.08
Rubén	1.55
Denisse	1.6

Responde:

a) ¿Quién es el más alto?
b) ¿Cuál alumno es el de menor altura?
c) ¿Rubén y Juan son los más altos?
d) Una de las organizadoras colocó a Gloria como la alumna más bajita, ¿Es correcto lo que hizo?