UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

SECRETARÍA ACADÉMICA

COORDINACIÓN DE POSGRADO

MAESTRÍA EN DESARROLLO EDUCATIVO

EDUCACIÓN MATEMÁTICA

La medición en la enseñanza de los números fraccionarios (racionales positivos) en sexto grado de primaria.

Tesis para obtener el Grado de

Maestra en Desarrollo Educativo

Presenta

Haide Araceli Villa Domínguez

Director de tesis

Dr. José Luis Cortina Morfín

Ciudad de México, enero 2023.

AGRADECIMIENTOS

A la Unidad del Sistema para la Carrera de las Maestras y los Maestros (USICAMM), por otorgarme el Reconocimiento Beca Comisión para poder llevar a cabo mis estudios de posgrado.

Al Dr. José Luis Cortina Morfín por su asesoramiento para poder llevar a cabo esta investigación. Gracias por su paciencia, tiempo y apoyo.

A cada una de mis lectoras ya que gracias a sus observaciones pude enriquecer y reflexionar el trabajo que a continuación presento. Gracias a la Dra. Alicia Gabriela Ávila Storer, a la Mtra. Alicia Lily Carvajal Juárez, a la Dra. Ivonne Twiggy Sandoval Cáceres y a la Dra. Dulce María López Valentín.

INDICE

INTRODUCCIÓN

En educación primaria, los números fraccionarios (racionales positivos y no enteros), se encuentran presentes en por lo menos la mitad de la trayectoria escolar. También probablemente estos números sean los que presenten mayor dificultad para ser enseñados, y aprendidos por parte de los alumnos. Lo anterior es consistente con los resultados de pruebas estandarizadas que se aplican a los estudiantes, como PLANEA (INEE, 2018), y también con las evaluaciones que aplicamos los docentes en nuestras aulas.

Por otro lado, las situaciones didácticas que se proponen para enseñar estos números, así como los problemas en los que se espera que sean aplicados, hacen referencia a múltiples medidas de magnitudes continuas[1], entre las que se incluye, por ejemplo, la longitud. Sin embargo, esta estrecha relación entre la medición y los números fraccionarios no siempre nos es evidente a los docentes, al menos ese fue mi caso.

Recuerdo que, con uno de mis grupos de sexto grado, antes de comenzar a trabajar en uno de los "desafíos matemáticos incluidos" en el libro de texto de sexto grado [2] donde se utilizaba el término longitud (el cual aparecía explícitamente en la descripción de la situación), le pregunté a mis alumnos qué significaba esto. No obtuve una respuesta inmediata. Solo, después de una pausa, una de mis alumnas con mejor desempeño en matemáticas intentó explicar qué era la longitud, pero sin articular una explicación clara. Sinceramente, en ese momento, como maestra, no le presté atención a la cuestión. Me enfoqué en el tema principal del desafío: las fracciones.

En general, siempre que el tema principal de un desafío que iba a utilizar en mi enseñanza fuera algún tipo de número fraccionario, me enfocaba en que mis alumnos supieran resolverlo; es decir, que supieran cómo operar con los números y dar respuestas correctas. Eso, a pesar de que las situaciones presentes en los desafíos estaban contextualizadas en el uso de magnitudes continuas: longitud, valor monetario, masa o capacidad. Ahora me cuestiono: ¿Qué tan bien comprendían mis alumnos el significado cuantitativo[3] de los números con los que estaban

---

[1] En esta tesis se entiende por magnitud continua una propiedad de las cosas del mundo que se concibe, matemáticamente, como no teniendo límite en la pequeñez de las partes en las que podría dividirse. Ejemplos de estas propiedades serían la longitud, el área superficial, el volumen y el valor monetario.
[2] El libro de texto oficial para la enseñanza de las matemáticas en sexto grado (SEP, 2019), vigente en México desde el año 2014, viene organizado no en lecciones sino en lo que ahí se denomina "desafíos matemáticos". Se trata de una serie de situaciones didácticas y actividades que son propuestas para ser resueltas por los alumnos; algunas de manera individual y otras trabajando en equipos o en organización plenaria.
[3] Retomando a Thompson, Philipp, Thompson y Boyd (1994), el significado cuantitativo de un número se refiere a lo que éste expresa (o se esperaría que expresara) en términos del tamaño de algo, en una situación o contexto específico.

trabajando, y qué tanto más podrían haber aprendido de los números fraccionarios, al realizar esas actividades, si hubieran comprendido mejor el significado cuantitativo de los números?

La investigación que se reporta en las siguientes páginas tuvo como propósito identificar, de manera sistemática, los conocimientos de medición que deben tener los alumnos para comprender las situaciones didácticas que típicamente se usan para apoyar el aprendizaje de los números fraccionarios; específicamente, fracciones, porcentajes y números decimales. También buscó explorar el nivel de comprensión que tienen alumnos de sexto de primaria de dichos conocimientos de medición. Para lograr lo anterior, se analizó el libro Desafíos Matemáticos sexto grado (SEP, 2019), como recurso didáctico oficial que se proporciona a los estudiantes mexicanos y con el cual los profesores apoyan su labor de enseñanza. También se realizaron entrevistas pedagógicas a cuatro alumnos de sexto y uno de quinto grado de primaria, de una escuela primaria federal de zona urbana ubicada en el Estado de México.

El trabajo se encuentra organizado en cinco capítulos. El primero de ellos lleva por título "La enseñanza de los números fraccionarios". En éste se revisa qué son los números fraccionarios. Se explica que en la literatura no es fácil encontrar una explicación clara de por qué son números. También se propone una definición para los propósitos de esta tesis. En esta definición se indica que los números fraccionarios, en educación primaria, pueden ser entendidos como aquellos que nos van a ayudar a resolver situaciones en las que los números enteros no son suficientes[4].

Así mismo, en este primer capítulo, se hace una exposición de la presencia que tienen tanto los números fraccionarios como la medición en el currículo se educación primaria, con base en Programas de estudio SEP 2011. Se explica cómo, mientras la medición está presente desde primer grado, los números fraccionarios aparecen hasta tercer grado con el tema de fracciones. Posteriormente se mantienen en el currículo, de manera progresiva, hasta sexto grado, con temas de fracciones, porcentajes y números decimales, combinándolos con números enteros. También, se muestra cómo es la propuesta de enseñanza de estos números fraccionarios en los documentos

---

Por ejemplo, el número 0.75 se puede interpretar como un número que expresa un tamaño que corresponde a 75 veces a la centésima parte de una unidad. Su significado será diferente, dependiendo de si toma como referencia a la unidad *metro*, *kilómetro*, *litro*, *kilo*, *gramo*, *peso mexicano* u otra.

[4] Para los efectos de la presente tesis, se usa el término *números enteros* para referirse a los números enteros positivos, o números naturales. Se usa el término *números enteros* y no *números naturales* para enfatizar el contraste con *números fraccionarios*; esto es, el contraste entre *enteros* y *fraccionarios*. Los números fraccionarios se definen más adelante en la tesis.

oficiales. Finalmente se presenta cuál es la relación estrecha entre medición y números fraccionarios para su enseñanza.

El segundo capítulo lleva por título "Preguntas de investigación y metodología". En este capítulo se explican las tres preguntas que dirigieron este trabajo, así como el procedimiento para dar respuesta a cada una de ellas. Las tres preguntas son:

I. ¿Qué conocimientos previos de medición requieren los alumnos de sexto grado de primaria para beneficiarse de las situaciones de enseñanza de los números fraccionarios que se plantean en los materiales oficiales?
II. ¿Cuáles de esos conocimientos previos sería más probable esperar que ya hayan adquirido los alumnos de sexto grado y cuáles no?
III. ¿Qué debería indagar y considerar un docente de sexto grado sobre los conocimientos previos de medición de sus alumnos, antes de utilizar los recursos oficiales para la enseñanza de los números fraccionarios en su práctica?

En este segundo capítulo, se explica a detalle cómo se llevó a cabo el análisis documental del libro Desafíos Matemáticos sexto grado (SEP,2019), para poder dar respuesta a la primera pregunta y cumplir el primer objetivo. Se explica también cómo se diseñó la entrevista, una vez concluido el análisis documental, y cómo fue aplicada para poder dar respuesta a la segunda pregunta de investigación.

Es importante aclarar que la tercera pregunta de investigación se responde hasta el capítulo cuatro, a través de un ejercicio de reflexión que se desprende del análisis de los resultados que se presentan en el capítulo tres.

El tercer capítulo se titula "Resultados". En él se presenta el análisis del libro Desafíos Matemáticos sexto grado (SEP,2019). Se describe de manera detallada qué magnitudes son las que más se emplean en los llamados "desafíos" del libro de SEP, que tienen presentes los temas de números fraccionarios y medición. También se identifican las unidades y subunidades que se usan al trabajar con dichas magnitudes y el tratamiento numérico que se da a cada unidad o subunidad; es decir, si se trabajan fracciones o números decimales. Como ya se mencionó previamente, de este análisis se desprende la entrevista a alumnos enfocada en tres magnitudes: longitud, masa y capacidad.

Posterior a la presentación de los resultados del análisis del libro, se presentan los resultados de las entrevistas. Se sigue la estructura del protocolo de entrevista (ver Anexo 1), en el que se comenzó con una exploración de los conocimientos que tenían los alumnos sobre longitud, enfocándose en cómo la definían e identificaban como algo medible. También, si identificaban y reconocían las unidades, unidades compuestas y subunidades comunes de longitud, como el metro, los centímetros, los milímetros o los kilómetros. Además, se indagó qué tan bien reconocían las equivalencias entre estas unidades, unidades compuestas y subunidades, tanto en situaciones en las que sólo se usaban números enteros (2 m vs. 20 cm) y otras en las que aparecían números fraccionarios (0.75 m vs. 600 mm). Una vez explorada la magnitud longitud, también se procedió a explorar los conocimientos de los entrevistados de las magnitudes masa y capacidad.

En la exposición de los resultados, se describen primero los conocimientos de los alumnos, como colectivo, de cada uno de los temas en los que se indagó. Posteriormente, se presenta un panorama general del nivel de comprensión que pareció tener cada uno de los alumnos entrevistados de manera individual. En general, los resultados muestran qué entendían los alumnos por longitud, cómo dimensionaban, cualitativamente, a las estas unidades, unidades compuestas y subunidades y qué estrategias empleaban al resolver problemas que requerían establecer equivalencias entre ellas, tanto en situaciones en las que sólo se usaban números enteros, como en otras en las que una medida estaba expresada como fracción o número con punto decimal.

El capítulo cuatro lleva por título “La medición en la enseñanza de los números fraccionarios: conclusiones”. Aquí, como su nombre lo indica, se presentan las conclusiones sobre las tres preguntas que dirigieron este trabajo. Se describe, con base en la investigación realizada, cuáles son los conocimientos de medición que necesitan los alumnos para poder beneficiarse de las situaciones propuestas en los materiales oficiales para la enseñanza de los números fraccionarios. También, con base en los resultados, se explica qué conocimientos de medición necesarios es más probable que los alumnos de sexto grado sí tengan, y cuáles no. Finalmente se da respuesta a qué es lo que deberían indagar los docentes de sexto grado en sus alumnos, sobre el tema de medición, antes de utilizar el recurso oficial que se analizó y que se utiliza –en el momento en que se escribe esta tesis– para la enseñanza de los números fraccionarios.

El capítulo cinco lleva por título “Reflexiones finales”. Aquí describo los aprendizajes que, como docente de primaria, adquirí o resignifiqué, en cuanto a mis conocimientos sobre medición, como resultado de elaborar el presente trabajo. Explico cómo el enseñar medición debe ir más allá de lo que típicamente tratamos de lograr los docentes; por ejemplo, que los alumnos utilicen correctamente una regla y cuenten los centímetros. También, lo que aprendí respecto a lo que son los números fraccionarios; sobre todo, que no son algo que los alumnos puedan comprender y significar adecuadamente, simple y solamente a través de sus vivencias cotidianas. Por último, menciono cómo el estudiar la Maestría en Desarrollo Educativo me ha llevado a resignificar mi labor como docente de primaria, específicamente en la asignatura de matemáticas.

Espero que este trabajo pueda servir a otros compañeros docentes de primaria, para visualizar la estrecha relación que existe entre la medición y la enseñanza de los números fraccionarios, bajo un enfoque de resolución de problemas, que ayude a nuestros alumnos a visualizarse como constructores de conocimiento matemático. Espero también que les sirva para entender que el significado de las alusiones que se hacen a contextos de medición, en las actividades que están presentes en los recursos oficiales, pueden no serles claras y evidentes a nuestros alumnos, particularmente cuando el tema principal de estas actividades está relacionado con los números fraccionarios. Para muchos de nuestros niños, estas actividades pueden implicar una doble demanda: por un lado, el conocer un tipo de número que no les es familiar y, por otro, entender el significado de medidas expresadas en unidades (unidades compuestas o subunidades) cuyo significado no les es claro.

Finalmente, espero que este trabajo pueda servir para que, como docentes, reflexionemos sobre cómo enseñar el Sistema Métrico Decimal. Lo común, creo, es que nos preocupemos de que nuestros alumnos memoricen las equivalencias como, por ejemplo, que un metro equivale a 100 centímetros. Lograr que nuestros alumnos entiendan las equivalencias como relaciones multiplicativas, donde las unidades, unidades compuestas y subunidades mantienen entre ellas una relación de múltiplo o submúltiplo, puede ayudar a que los contextos de medición se vuelvan realmente un apoyo para darle significado a los números fraccionarios.

1 LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS

1.1 ¿QUÉ SON LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS?

El presente trabajo se centra en la enseñanza de los números fraccionarios. ¿Pero qué son y cómo se debe entender a dichos números? Aunque se podría considerar que la respuesta a la pregunta es fácil para un docente de primaria, es complicado encontrar una definición sencilla que le sea útil para orientar su trabajo con los alumnos. Existen muchos recursos que ofrecen definiciones de conceptos relacionados, como el de “número racional”, “fracción” y “número decimal”, pero a un docente de primaria no siempre le dejan claro qué son los números fraccionarios y cómo es que éstos pueden ser legítimamente considerados como *números*.

Para ilustrar este punto, comencemos por revisar la definición que ofrece la que quizá sea primera fuente que consultaría un docente, la enciclopedia libre Wikipedia, por ser de muy fácil acceso desde un teléfono móvil. Al hacer una búsqueda de “número fraccionario”, la enciclopedia redirige la búsqueda a la entrada con el título de “fracción”, donde se comienza ofreciendo la siguiente explicación:

> En matemáticas, una fracción, número fraccionario… es la expresión de una cantidad dividida entre otra cantidad; es decir que representa un cociente no efectuado de números. Por razones históricas también se les llama fracción común, fracción mixta o fracción decimal. Las fracciones comunes se componen de: numerador, denominador y línea divisora entre ambos (barra horizontal u oblicua). En una fracción común a/b el denominador "b" expresa la cantidad de partes iguales que representan la unidad, y el numerador "a" indica cuántas de ellas se toman. (Wikipedia, 2021)

Para los propósitos del presente trabajo, hay varias cosas importantes qué destacar de esta entrada de la Wikipedia. La primera es que, como sucede en muchas otras fuentes, se equipara la definición de *número fraccionario* con la de *fracción*. Parecería entonces que el primer término es inadecuado, y que lo correcto es *fracción*. Sin embargo, al menos para un docente de primaria, la explicación de qué es una fracción no deja claro cómo y porqué ésta sería *un número*. Lo que nos dice es que “representa un cociente no efectuado de números”. Desde una perspectiva matemática formal, muy probablemente se trata de una definición adecuada, pero a un maestro de primaria, le ofrece muy poca orientación respecto a en qué consistiría entonces la enseñanza de los números fraccionarios (o de la fracción) y cómo podrían o deberían de llegar a entenderlo los alumnos.

La entrada de Wikipedia ofrece también una definición que nos es más familiar a los docentes de primaria: una fracción es una expresión compuesta de dos números (a/b). Uno de ellos, el denominador, expresa el total de partes en las algo ha sido dividido (un entero o una unidad) y el otro, el numerador, un subconjunto de esas partes. En la literatura, a esta definición de fracción se le conoce como de "parte-todo" (ver Llinares y Sánchez, 1997, p.55). Con base en mi experiencia, es la definición con la que más familiarizados estamos los maestros de primaria y a la que más recurrimos en la enseñanza. Lo importante a destacar aquí es que esta definición tampoco deja claro por qué una fracción puede ser entendida como la expresión de un solo número, y no de dos.

Veamos otro ejemplo, el cual proviene de un documento explícitamente elaborado para docentes de sexto grado por la Comisión Nacional para la Mejora Continua de la Educación (MEJOREDU)[5]. Ahí se proporciona la siguiente explicación:

> La fracción es la relación simbólica entre dos números naturales a/b, donde a es el numerador y representa el número de partes que se consideran de la unidad y b el denominador que representa las partes totales en el que se ha dividido el todo o unidad. La relación parte-todo hace referencia a un todo continuo (elemento) o uno discreto (conjunto de elementos) subdividido en partes iguales. Esto no significa necesariamente que sean de la misma forma, sino equivalentes en alguna magnitud como cantidad de superficie o cantidad de elementos (MEJOREDU 2021, pág.12).

Aquí hay que notar que la explicación no hace referencia explícita a que "la fracción" sea un tipo de número, sino que la define como una relación simbólica; esto es, la relación entre dos números naturales, uno que representa la parte y el otro un todo. Al igual que en la definición anterior, se hace alusión a que, en una fracción, se expresan dos cuentas diferentes. Por un lado, está la cantidad total de elementos que hay en un conjunto (denominador), el cual es creado al dividir "un todo o unidad" en partes iguales. Por otro lado, está el número de elementos que forman un subconjunto, el cual se crea al "considerar" una porción de las "partes iguales" que forman el conjunto original (numerador). Es posible que, para los autores, la "relación simbólica" a la que se refieren en su definición implique claramente una manifestación numérica singular. Sin embargo,

[5] Organismo público descentralizado creado en el 2019 como parte de la Nueva Escuela Mexicana que, entre otras cosas según el sitio de internet oficial, busca contribuir a la mejora continua del Sistema Educativo Nacional.

aquí también, a los lectores docentes no se les hace explícito cómo es que una fracción definida de esta forma podría ser considerada como la expresión de un solo número, y no de dos.

Un ejemplo más es el documento “Sentido numérico. Materiales para Apoyar la Práctica Educativa”, editado por el Instituto Nacional para la Evaluación Educativa (García, 2014). En este texto se nos aclara a los docentes, primero que “Las fracciones constituyen uno de los contenidos que resultan más difíciles de aprender” (p. 28). También que las fracciones, junto con los números decimales, y los naturales “pertenecen al mismo conjunto numérico llamado: números racionales” (p. 61). Finalmente, se nos explica que “Los números racionales son todos aquellos que pueden escribirse como una fracción cuyo numerador y denominador son números enteros y el denominador nunca puede ser cero” (p. 62). Sin embargo, se dejan sin aclarar cuestiones como qué propiedades comparten las fracciones, los números decimales, y los naturales que los hace a todos ser considerados como *números*.

La literatura especializada en el tema, accesible a los docentes, tampoco ofrece gran claridad sobre qué son los números fraccionarios. Uno de los trabajos más citados en los recursos para docentes es el libro “Fracciones” de Llinares y Sánchez (1997). En éste, los autores definen a las fracciones, primero, elaborando sobre la definición formal de número racional: “par ordenado de números naturales escritos de la forma a/b” (p. 52). Después se refieren a ellas como siendo *un ente matemático, una herramienta, un concepto* y *un megaconcepto,* sin elaborar claramente sobre cómo y por qué una fracción sería *un número*.

Retomando las ideas de autores como Kieren, Beher, y Dixon; Llinares y Sánchez (1997) proponen considerar a las fracciones como un “megaconcepto” que implica varios subconstructos o interpretaciones: relación parte-todo, medida, razón, operador y cociente. Aunque los autores ofrecen ilustraciones claras de cada una de estas interpretaciones, no hacen del todo explícito cómo, en cada una de ellas, las fracciones podrían ser consideradas como números.

De las interpretaciones ofrecidas por Llinares y Sánchez (1997), la que más parecería tener personalidad de número, para un docente de primaria, sería la de *medida*. Aquí las fracciones compartirían propiedades con los números enteros[6] (con los que más familiarizados se está en la educación primaria), en tanto que pueden ser usadas para expresar el tamaño de algo, ya sea su longitud, su peso, su capacidad, o alguna otra magnitud.

[6] El lector recodará que, en esta tesis, por “números enteros” se hace referencia únicamente a los números enteros positivos o números naturales.

Respecto a la relación parte-todo, similar a como ya se explicó, en la descripción que dan Llinares y Sánchez (1997), no queda claro el porqué de que la fracción sería un número singular. Algo similar sucede con la interpretación de razón. En cuanto a las interpretaciones de operador y cociente, éstas implicarían reconocer propiedades numérico-algebraicas que se estudian después de la primaria.

Para los propósitos del presente trabajo, encontramos una explicación más útil acerca de qué son los números fraccionarios en el trabajo de Ávila y García (2008) sobre los números decimales. Estas autoras explican que los decimales son números que permiten resolver operaciones o problemas que no es posible solucionar con los naturales. Retomando esta explicación, en el presente trabajo, se considerará a los números fraccionarios (fracciones, números decimales y porcentajes) como aquellos números que se usan, en la educación primaria, para cuantificar y resolver problemas y operaciones en los que los números enteros no son suficientes. Algunos ejemplos serían los siguientes:1) cuando el tamaño de algo es menor a una unidad, o mayor a una unidad, pero menor a dos; 2) cuando el precio de algo se incrementa, para llegar a ser más del doble de lo que era antes, pero sin llegar a triplicarse y 3) cuando el resultado de dividir un número entero entre otro entero no es un número entero.

En términos formales, los *números fraccionarios* a los que nos estamos refiriendo en esta tesis son los que, a partir de las matemáticas modernas, se les ha incluido en el subconjunto numérico de los *números racionales positivos cuyo denominador (en su mínima expresión) es mayor a uno*. Se trata entonces de números que, por ser racionales, pueden ser expresados como el cociente o fracción de dos números enteros, cuyo denominador es distinto a cero. Además, los números fraccionarios a los que nos estamos refiriendo, serían números racionales positivos y su denominador mayor a uno, ya que no incluirían al conjunto de los números naturales (enteros positivos).

Es importante aclarar que, con base en las consideraciones de importantes autores en educación matemática, en esta tesis se ha preferido evitar el termino *racionales* para referirse a los números fraccionarios. Al respecto, por ejemplo, Bobos y Sierpinska (2017) señalan que:

> La literatura de educación matemática para la enseñanza de fracciones en la escuela primaria a veces se afirma que su objetivo es enseñar *números racionales* o "conceptos de números racionales". Pero esto es engañoso, porque el objetivo nunca es enseñar números racionales en el

> sentido en que este término se entiende en matemáticas teóricas, es decir, como un sistema teórico construido algebraicamente (como el campo cociente dentro del anillo de los números enteros) … (p. 205).

Para completar este punto, es importante tener presente que el término *número racional* fue acuñado en tiempos relativamente recientes. En general se le atribuye al matemático Giuseppe Peano (1858–1932). En los currículos de primaria fue introducido dentro de lo que se conoce como la reforma de las matemáticas modernas.

1.2 QUÉ PAPEL TIENEN LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS Y LA MEDICIÓN EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA DE ACUERDO CON EL PROGRAMA DE ESTUDIO 2011: UNA MIRADA GENERAL.

Tanto los números fraccionarios y la medición tienen una gran presencia en la propuesta para la enseñanza de las matemáticas incluida los Programas de estudio 2011 (SEP, 2011a, 2011b, 2011c, 2011d, 2011e y 2011f). Sin embargo, los dos temas se abordan por separado. La propuesta se organiza en tres ejes temáticos: 1) sentido numérico y pensamiento algebraico, 2) forma, espacio y medida, y 3) manejo de la información. La enseñanza de los números fraccionarios se contempla en el primero de estos ejes temáticos, mientras que la medición, en el segundo. Es importante también señalar que la medición es un tema que se estudia a lo largo de los seis grados, mientras que los números fraccionarios se trabajan a partir del tercer bloque curricular de tercer grado.

En el primer grado, como ya se mencionó, los números fraccionarios no se encuentran presentes. El trabajo se concentra en los números naturales. Por ejemplo, al concluir primer grado, se espera que los alumnos puedan desarrollar actividades como el conteo, sumas y restas, análisis de valor posicional y descomposición de números de 10 en 10 con números de hasta dos cifras.

En cuanto a la medición, en el primer grado, los programas de estudio proponen que se trabaje con dos magnitudes: tiempo y longitud. En el Bloque I se comienza con el registro de actividades realizadas en un espacio de tiempo determinado. En el Bloque II no se incluye a la medición. En el Bloque III aparece la longitud, cuando se propone que se realicen actividades que impliquen comparar y ordenar longitudes, ya sea directamente, a ojo, o mediante un intermediario. En el Bloque IV se proponen actividades que impliquen la medición de longitudes usando unidades arbitrarias.

En segundo grado se continúa consolidando el tema de los números naturales. Ahora se espera que los alumnos puedan trabajar con números de hasta tres cifras. Y como ya se mencionó, los números fraccionarios no se trabajan.

En cuanto a medición, el trabajo se centra únicamente en la magnitud *tiempo*. En el Bloque I se proponen actividades que impliquen comparar el tiempo que se requiere para realizar dos o más actividades (adición), y también el uso de unidades de tiempo arbitrarias para medir la duración de una actividad. Después, la medición vuelve a aparecer hasta el Bloque V, donde se propone que se analice la organización del calendario (meses, semanas, días) y las formas en las que se hace uso de éste.

En tercer grado, como ya se mencionó, se hace la introducción formal de los números fraccionarios. Se comienza en el bloque tres y se continua en los dos que siguen hasta el término del ciclo escolar (es decir, bloque cuatro y cinco). Se introduce a los alumnos al estudio de los números fraccionarios a través del contenido de fracciones del tipo medios, cuartos, octavos y demás denominadores que resulten de obtener mitades de mitades. Se trabaja en problemas de suma y resta sencillos, así como en situaciones de reparto. También se busca que los alumnos identifiquen fracciones equivalentes, pero siempre con los denominadores medios, cuarto, octavos, etc.

En cuanto a medición, en el tercer grado, son tres las magnitudes que se manejan: longitud, peso (o masa) y tiempo. En el Bloque I se propone realizar actividades que impliquen la lectura y uso del reloj para verificar estimaciones de tiempo. En el Bloque II aparece el uso de unidades de longitud convencionales. Se proponen actividades que impliquen la estimación de longitudes y su verificación usando la regla, como instrumento de medición. En los Bloques III y IV no aparece el tema. En el Bloque V aparece por primera vez la magnitud *peso*. Se proponen actividades que impliquen la comparación por tanteo del peso de dos objetos y la comprobación de las comparaciones usando una balanza de platillos. También en este bloque se propone que se trabaje el trazo de segmentos de recta con longitudes específicas, usando la regla y sus unidades métricas.

En cuarto grado los números fraccionarios aparecen en los cinco bloques que conforman el programa; y lo mismo pasa en los grados subsecuentes. En este grado, hacen su aparición los números decimales; se trabaja la suma y resta de estos números, así como el análisis del valor posicional tanto de la parte fraccionaria-decimal como de los enteros. Se introducen en las fracciones los denominadores tercios, quintos y sextos, así como las fracciones mayores a la unidad, cosa que no se plantea trabajar en tercer grado. A diferencia de tercer grado, se introduce las sumas y restas con fracciones de diferente denominador en casos sencillos y con procedimientos informales. Se continúa con fracciones equivalentes, pero se introduce la idea de dividir o multiplicar tanto al numerador como al denominador por un mismo número natural. En este grado se presenta el trabajo de fracciones en contextos de magnitudes continuas, específicamente longitud y área, y además se señala que las fracciones deben ser trabajadas específicamente en tres situaciones: de reparto, medición y para expresar partes de una colección que les ayude a encontrar el total.

En cuanto a medición, en cuarto grado, las magnitudes con las que se propone trabajar son cinco: tiempo, longitud, ángulo (o rotación), área y capacidad. Vale la pena aclarar que la longitud se aborda como una propiedad de las figuras geométricas (su perímetro).

En el Bloque I se propone que se resuelvan problemas que requieran del uso del reloj y el calendario. En el Bloque II se propone el trazo de ángulos y el uso de la unidad *grado* como unidad de medida de los ángulos. También se propone que se estudie la comparación del tamaño de superficies, usando unidades de medida de área no convencionales. En el Bloque IV, se propone la realización de actividades que impliquen el cálculo aproximado del perímetro y del área de figuras poligonales mediante diversos procedimientos. También, la construcción y uso de las fórmulas para calcular área y perímetro de un rectángulo y la construcción y uso de las unidades de área m^2, dm^2 y cm^2. En el Bloque V se propone la instrumentación de actividades que impliquen la estimación de la capacidad de un recipiente y la comprobación mediante otro recipiente que sirva como unidad de medida.

En quinto grado se continúa el trabajo de números fraccionarios como fracciones y decimales. Se espera que en este grado los alumnos logren identificar diferentes representaciones de un número fraccionario como, por ejemplo, en cifras, recta numérica o superficies y, además, que den significado de la parte decimal de un número en contextos comunes de medición, por ejemplo, tiempo y longitud. Se sigue trabajando la resolución de problemas de suma y resta de fracciones con diferente denominador. A diferencia de cuarto grado, en quinto grado se introduce la multiplicación de números decimales por naturales y se introduce el tema del porcentaje en donde se deberán relacionar porcentajes comunes con las fracciones que les corresponden, por ejemplo, 50%=1/2, 25%=1/4.

En cuanto a medición, en quinto grado, se trabaja con cinco magnitudes: longitud, capacidad, peso, tiempo y área. En el Bloque I se propone que se estudie a las unidades convencionales de capacidad y de peso, así como la forma en la que se usan. Específicamente, se propone que se estudien las siguientes unidades: litro, mililitro, gramo, kilogramo y tonelada. También en este bloque se propone el que se analicen las relaciones entre diferentes unidades de tiempo. Los Bloques II y III se concentran en el estudio del área. En el Bloque II se propone que los estudiantes construyan y usen la fórmula para calcular área de paralelogramos (rombos y romboides). En el Bloque III, se propone que construyan y hagan uso de la fórmula para calcular área del triángulo y del trapecio. También en este bloque se propone que los estudiantes identifiquen múltiplos y submúltiplos de la unidad de área, como *metro cuadrado* y de las que se usan en labores agrarias. El bloque IV es el último de este grado en el que se incluye el tema de la medición. Se propone que se trabaje en la resolución de problemas en que sea necesaria la conversión entre múltiplos y submúltiplos del metro, kilogramo y litro. También en este bloque se propone la construcción y uso de una fórmula para calcular el perímetro de polígonos.

En sexto grado, se plantea que el trabajo a realizar con los alumnos implique la combinación de los números naturales con fraccionarios (fracciones y números decimales). Se pretende que puedan leerlos, escribirlos y compararlos y que se formalicen los algoritmos convencionales para resolver problemas aditivos combinando los números que ya conocen. Se introduce la multiplicación de fracciones y de decimales mediante procedimientos no formales. Se espera que los alumnos resuelvan problemas de multiplicación y división de números fraccionarios y decimales con números naturales. Se continúa con el trabajo de porcentajes a través del cálculo en cantidades dadas, tanto con base al 100% como mayor al 100%. Se trabaja la ubicación de fracciones y números decimales en la recta numérica y se introduce la propiedad de densidad de los números racionales. Se trabaja la conversión de fracciones decimales a escritura decimal y viceversa. En este grado se introduce el tema de razones.

En cuanto a medición, en sexto grado, el estudio de la medición aparece en cuatro de los cinco bloques curriculares. Son cinco las magnitudes que se estudian: longitud, área, volumen, peso y capacidad. En el Bloque I se propone que se instrumenten actividades que impliquen calcular distancias reales a través de la medición aproximada de un punto a otro en un mapa. En el Bloque II no se incluye el tema de medición. En el Bloque III se propone el estudio de la relación entre las unidades del Sistema Internacional de Medidas y las unidades más comunes del Sistema

Inglés (o Sistema de Unidades Tradicionales de los Estados Unidos). También en este bloque aparece por primera vez el volumen. Se propone que se realicen actividades en las que se compare el volumen de dos o más cuerpos, ya sea directamente o mediante una unidad intermediaria. En el Bloque IV se propone explorar diferentes formas en las que se puede medir la longitud de una circunferencia. También se propone que se explore cómo calcular el volumen de prismas mediante el conteo de unidades. Finalmente, en el Bloque V se propone realizar actividades que impliquen el armado y desarmado de figuras en otras diferentes. En éstas, además, se ha de analizar si cambia el área y el perímetro de las figuras que fueron transformadas.

Con respecto a la enseñanza de los números fraccionarios, en términos generales, en los Programas de estudio 2011 (SEP, 2011a, 2011b, 2011c, 2011d, 2011e y 2011f), se puede observar que se propone que el estudio de estos números se realice a lo largo de cuatro grados escolares, de manera progresiva, siendo sexto grado en donde se espera se alcance una mayor comprensión de este tipo de números.

En cuanto a la medición, son siete las magnitudes que se estudian. La primera que se introduce es *tiempo*, le sigue *longitud*, después *peso* (o masa). Le siguen *ángulo* (o rotación), *área* y *capacidad*. La última en aparecer es *volumen*. La que tiene más presencia es *longitud*. El estudio de esta magnitud se incluye en todos los grados excepto en segundo.

1.3 ¿CÓMO HAY QUE ENSEÑAR LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS?

La enseñanza de los números fraccionarios, dentro de la educación primaria, se lleva a cabo a través de la propuesta contenida en los programas de estudio. Para este tipo de números no existen recomendaciones específicas, sino que se siguen los mismos lineamientos generales de la enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas.

Al respecto, Block (2018) menciona que la orientación general del enfoque hacia la resolución de problemas ha estado presente en la educación obligatoria mexicana desde el programa de estudios de 1993 (SEP, 1993), además de que ha formado parte de una tendencia mundial. Con este enfoque se ha buscado que las experiencias de los estudiantes con las matemáticas sean más significativas y gratas. En general, se trata de que la actividad de resolución de problemas sea fuente de aprendizaje y origen de una diversidad de significados de las nociones a enseñar. Se espera que los alumnos aborden los problemas a partir de sus conocimientos previos y que los errores y la argumentación tengan un papel constructivo en el aprendizaje matemático.

Por sus características y objetivos, en este enfoque, el entorno en el que se contextualiza un problema juega un papel importante. Aunque este contexto no necesariamente debe aludir a la vida real, el que lo haga puede ayudar a que los alumnos reconozcan un problema como significativo, a que lo quieran resolver, y a que argumenten sus soluciones. Esto se nota claramente en los libros de texto obligatorios que se han producido desde 1993, en los que los problemas se contextualizan en situaciones que aluden a eventos deportivos, a los productos que se venden en las tiendas, y a lo que ocurre en la feria de un pueblo, en un circo, en un huerto o en una fábrica; entre otros contextos.

En la actualidad, la educación primaria en México se guía por dos programas de estudio diferentes. En lo general, se sigue el Programa de estudio del 2017 (SEP, 2017), pero para los grados tercero, cuarto, quinto y sexto de educación primaria, respecto a la asignatura de matemática, sigue vigente el programa de 2011. En ambos se nota la presencia del enfoque basado en la resolución de problemas. Por ejemplo, en el programa de 2011 (SEP, 2011e) se indica que:

> El planteamiento central en cuanto a la metodología didáctica que se sugiere para el estudio de las Matemáticas consiste en utilizar secuencias de situaciones problemas que despierten el interés de los alumnos y los inviten a reflexionar, a encontrar diferentes formas de resolver los problemas y a formular argumentos que validen los resultados. Al mismo tiempo, las situaciones planteadas deberán implicar justamente los conocimientos y habilidades que se quieren desarrollar (p. 67).

En el programa del 2017 (SEP, 2017) también se retoma el enfoque de la resolución de problemas. Por ejemplo, se menciona que:

> En la educación básica, la resolución de problemas es tanto una meta de aprendizaje como un medio para aprender contenidos y fomentar el gusto con actitudes positivas hacia su estudio. En el primer caso, se trata de que los estudiantes usen de manera flexible conceptos, técnicas, métodos o contenidos en general, aprendidos previamente; y en el segundo, los estudiantes desarrollan procedimientos de resolución que no necesariamente les han sido enseñados con anterioridad. (p. 219)

Además, en este más reciente programa de estudios se enfatiza en los contextos, mencionando que su autenticidad es crucial para que la resolución de problemas se convierta en una práctica que vaya más allá de la clase de matemáticas. Incluso se menciona que se debe recurrir a situaciones de la vida cotidiana o de las ciencias sociales o naturales para crear situaciones que impliquen problemas significativos a resolver. Se busca que el uso de dichos contextos favorezca el trabajo colaborativo y el desarrollo de capacidades comunicativas.

Con base en estos antecedentes, se puede responder a la pregunta que sirve de título al presente apartado, diciendo que los números fraccionarios se deben de enseñar a través del uso de situaciones problemas. Éstas deben de estar contextualizadas de manera que los alumnos las reconozcan como auténticas y significativas, que los inviten a buscar resolver los problemas y a formular argumentos que sustenten las soluciones que proponen.

1.4 LA RELACIÓN DE LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS CON LA MEDICIÓN

Los contextos de las situaciones problemáticas que se emplean en la enseñanza de los números fraccionarios generalmente hacen referencia a la medición de magnitudes continuas, como la longitud, la masa, la capacidad y el valor monetario. Ello se debe a que en la medición de esas magnitudes el uso de números enteros no es suficiente. Al respecto Sadovsky (2005) refiere que el contexto de medición permite una primera comprensión de los números racionales ya que pone en contacto al alumno con la idea de fraccionar la unidad cuando la misma no entra una cantidad entera de veces en el objeto a medir y que, para efectos prácticos, una cantidad finita de subdivisiones de la unidad es suficiente para medir. Es común que las cosas no midan un número entero de unidades, sino que – por ejemplo – su tamaño sea mayor a 7 unidades, pero menor a 8. Para ofrecer medidas más exactas, en este tipo de situaciones se necesita hacer uso de los números fraccionarios.

Es significativo entonces reconocer que existe una relación estrecha entre la medición y la enseñanza de los números fraccionarios en educación primaria. La importancia de la medición para dicha tarea se nota en los materiales oficiales para su enseñanza. En ellos, como se explica a detalle más adelante en este trabajo, en sexto grado se proponen contextos que aluden a situaciones como el cálculo de cantidades de dinero a pagar o completar; distancias en circuitos o carreras; masas o capacidades de productos a comprar, comparar o completar; o longitudes de productos como listones, telas o encajes.

2 PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN Y METODOLOGÍA

Como lo especificamos en el capítulo anterior, el presente trabajo se centra en la enseñanza de los números fraccionarios. Se busca hacer una contribución que ayude a mejorar la forma en que son enseñados y aprendidos. En el capítulo anterior aclaramos cómo, según la propuesta vigente de la SEP, la enseñanza de los números fraccionarios se basa en el enfoque didáctico consistente en utilizar situaciones problemáticas que inviten a los alumnos a reflexionar en torno a dicha situación y a partir de ahí que ellos desarrollen los conocimientos matemáticos específicos que señala el currículo. Ahora bien, en cuanto a los problemas que se les plantean a los alumnos con relación a los números fraccionarios, nos encontramos con que éstos se encuentran estrechamente ligados a situaciones de medición, ya que las magnitudes continuas son las que van a apoyar a dar significado a situaciones en donde los números enteros no son suficientes. Por ejemplo, en el libro Desafíos Matemáticos tercer grado (SEP, 2019), en el trigésimo desafío (el primero en la que aparecen los números fraccionarios), se contextualizan los problemas en situaciones que implican medidas de capacidad y longitud, tanto con unidades arbitrarias como convencionales (ver Anexo 2, Imágenes 1 y 2).

Situaciones problema, como las anteriores, requieren ciertos conocimientos de medición para que los alumnos puedan entenderlas y enfrentarlas satisfactoriamente, aunque el tema central a trabajar sean los números fraccionarios. Es por ello que la presente investigación se realizó para dar respuesta a tres preguntas que a continuación se describen. Como se ha dicho antes, la primera de ellas es:

I. ¿Qué conocimientos previos de medición requieren los alumnos de sexto grado de primaria para beneficiarse de las situaciones de enseñanza de los números fraccionarios que se plantean en los materiales oficiales?

La segunda pregunta se construye sobre la primera y consiste en identificar:

II. ¿Cuáles de esos conocimientos previos sería más probable esperar que ya hayan adquirido los alumnos de sexto grado y cuáles no?

La tercera y última pregunta va directamente relacionada al quehacer docente e implica especificar:

III. ¿Qué debería indagar y considerar un docente de sexto grado sobre los conocimientos previos de medición de sus alumnos, antes de utilizar los recursos oficiales para la enseñanza de los números fraccionarios en su práctica?

Con la intención de dar respuesta a las preguntas anteriores, la investigación que sirve de base para esta tesis se dividió en dos etapas. La primera fue de naturaleza documental e implicó analizar algunos de los materiales oficiales para la enseñanza de las matemáticas en sexto grado de primaria. El propósito de esta etapa fue dar respuesta a la primera pregunta de investigación. Se buscó identificar los conocimientos de medición que necesitarían los alumnos para encontrarle sentido a las situaciones que aluden a los números fraccionarios en el libro Desafíos Matemáticos sexto grado (SEP, 2019) y beneficiarse didácticamente al resolverlas.

La segunda etapa fue de naturaleza empírica. Implicó la realización de entrevistas semiestructuradas a estudiantes de sexto grado de primaria. Esto se hizo con el objetivo de dar respuesta a la segunda pregunta de investigación.

Es importante aclarar que, para dar respuesta a la tercera pregunta, se tomaron como base de manera reflexiva, los resultados obtenidos en las dos etapas de la investigación.

2.1 ANÁLISIS DOCUMENTAL

En la primera etapa de la investigación, se realizó un análisis del libro de texto oficial que proporciona la SEP, llamado Desafíos Matemáticos sexto grado (SEP, 2019). Dicho análisis fue de naturaleza documental (Hernández, Fernández y Baptista, 2006). El análisis se realizó en varios pasos. Primero, se revisó el libro completo y se identificaron los desafíos que cumplieran al menos uno de dos criterios: a) que incluyeran el contenido de los números fraccionarios, o b) que hicieran uso de constructos o ideas que estuvieran directamente relacionados con la medición.

Pongamos algunos ejemplos. En el quinto desafío del libro Desafíos Matemáticos sexto grado (ver Anexo 2, Imagen 3), los alumnos deben trazar una figura tomando como guía el tamaño que representan siete números escritos con punto decimal. Este desafío entonces incluye el tema de número fraccionario (número decimal), pero no de medición.

En el trigésimo cuarto desafío del mismo libro (ver Anexo 2, Imágenes 4 y 5), las actividades implican analizar y comparar el tamaño de la superficie de varios países del mundo. Todos los datos están expresados con números enteros. Así, en este desafío se incluye el contenido de medición (medición de áreas superficiales), pero no de números fraccionarios.

Finalmente, en el sexto desafío, los alumnos deben de encontrar un peso que iguale los dos platillos de una balanza (ver Anexo 2, Imagen 6). En uno de ellos hay pesos de las cantidades 1 kg, 1/3 kg y 1/3 kg, mientras que en el otro platillo hay un solo peso con la cantidad 3/5 kg. En este caso, entonces, el desafío incluye los dos contenidos, número fraccionario y medición.

El análisis continuó enfocándose únicamente en este último tipo de desafío; esto es, desafíos que incluyeran los dos temas. Fueron analizados y codificados identificando las magnitudes que estaban presentes. Se consideró que una magnitud es una propiedad de las cosas del mundo que se concibe, matemáticamente, como no teniendo límite en la pequeñez de las partes en las que podría dividirse. Ejemplos de estas propiedades serían: la longitud, el área superficial, el volumen, el peso (o masa) y el valor monetario.

También se identificaron las unidades, unidades compuestas o subunidades que se usaban para expresar las medidas de las magnitudes. Se entendió por unidad de medida el tamaño específico de una magnitud que se usa como referencia para cuantificar el tamaño de algo. Estas unidades pueden ser arbitrarias o estandarizadas. En el primer caso, se trataría de una parte del cuerpo o un objeto cuyo tamaño se decide usar como unidad. En el segundo, se trata de tamaños definidos por convención. Es importante mencionar que en algunos sistemas de medición (como en el Sistema Internacional de Unidades) las unidades que se usan para medir una misma magnitud guardan entre ellas una relación multiplicativa, de manera que unas son múltiplos y otras submúltiplos de una unidad coherente. En esta tesis, se hace referencia a las unidades que son submúltiplos de la unidad de referencia como *subunidades*. En el caso de la unidad de longitud “metro” algunos de sus subunidades serían el centímetro y el milímetro. En cuanto a las unidades que son múltiplos, se hace referencia ellas como unidades compuestas. Un ejemplo de ellas sería el kilómetro (unidad que corresponde mil metros).

En el análisis, también se codificó el tratamiento numérico que se le daba a cada unidad (unidad compuesta o subunidad). Las categorías que se emplearan fueron:

- Fracciones propias: fracciones escritas de manera convencional, cuyo numerador es mayor que el denominador
- Fracciones impropias: números formados por un número entero y una fracción propia
- Números decimales con décimos: números escritos con punto decimal expresando una fracción con denominador 10 (décimos)
- Números decimales con centésimos: números escritos con punto decimal expresando una fracción con denominador 100 (centésimos)

- Números decimales con milésimos: números escritos con punto decimal expresando una fracción con denominador 1 000 (milésimos)
- Números decimales con diezmilésimos: números escritos con punto decimal expresando una fracción con denominador 10 000 (diezmilésimos)

Retomando el ejemplo del sexto desafío (ver Anexo 2, Imagen 6), éste fue identificado como incluyendo las magnitudes *valor monetario* y *peso* (o masa), las unidades *peso mexicano* y *kilogramo*, y los números *fracciones propias* y fracciones *mixtas*.

Los resultados de este análisis sirvieron como base para el diseño de las preguntas y de las situaciones que se trabajaron en la entrevista a alumnos correspondiente a la segunda etapa de esta investigación.

2.2 LA ENTREVISTA

La segunda etapa de la investigación implicó el uso de un método de indagación cualitativo, la entrevista semiestructurada (Hernández y et al. 2006). Esta segunda etapa comenzó con el diseño de una versión inicial de un guion de entrevista, el cual se elaboró tomando como base el análisis documental del libro de texto gratuito. Como se explica a detalle en el siguiente capítulo, ese análisis permitió identificar las magnitudes, unidades y tratamientos numéricos de mayor uso en la enseñanza de los números fraccionarios. Se formuló una primera versión del guion y se piloteó entrevistando a una alumna que recientemente había egresado de sexto grado. Ella, en ese momento, se encontraba cursando el primer grado de educación secundaria. Había sido mi alumna en una escuela primaria pública federal urbana y la considero una de las mejores estudiantes de su generación.

La primera versión del guion de entrevista fue estructurada en 3 apartados, cada uno dedicado a una magnitud: longitud, masa (peso) y capacidad. Fue aplicado en dos sesiones. La primera sesión se llevó a cabo el día 28 de abril del 2021 y fue destinada a aplicar la parte de la entrevista relacionada a la longitud. La segunda sesión, fue aplicada el 11 de mayo del 2021 para explorar los conocimientos relacionados con las magnitudes de masa y capacidad.

Con base en las respuestas de la alumna en la entrevista piloto, se formuló una segunda versión del guion, procurando que el instrumento pudiera ser más eficiente para identificar la información que se estaba buscando, tomando como referencia la segunda pregunta de investigación (ver arriba).

Una vez que se tuvo la versión final de la entrevista, se seleccionó la muestra, la cual fue del tipo *muestra por conveniencia* (Hernández y et al. 2006). Se buscó alumnos de 6º de buen nivel de desempeño matemático, que asistieran a una escuela pública. Se contactó a profesoras que impartían ese grado y se les solicitó apoyo para poder contactar alumnos suyos que ellas consideraran eran de alto desempeño en la asignatura de matemáticas y que quisieran participar en la entrevista. Se procuró entrevistar a alumnos de alto desempeño considerando que, si ellos tenían dificultades con algunos conocimientos de medición, sería razonable esperar que también los tuviesen la gran mayoría de sus compañeros de grado.

Es importante aclarar que la decisión final de quién sería una alumna o alumno de buen desempeño y, consecuentemente, qué implicaría serlo, se les dejó enteramente a las docentes que aceptaron colaborar en la realización del proyecto de investigación que sirve de base a la presente tesis. Aunque no se tiene completa certeza de en qué consistió su criterio, se considera que implicó seleccionar alumnos que obtenían buenas calificaciones en matemáticas, que aceptarían ser entrevistados usando un sistema de videoconferencias remotas, y que serían expresivos.

El guion de entrevista final quedó diseñado para ser aplicado en una sola sesión de manera virtual dada la situación de pandemia por COVID 19 que se estaba viviendo. Este guion de entrevista está incluido en el Anexo 1 de esta tesis.

La entrevista final fue aplicada a cinco alumnos de manera individual, cuatro de sexto grado y uno de quinto quienes, como ya se mencionó, eran alumnos considerados por sus profesoras como alumnos de buen rendimiento en la asignatura de matemáticas. Se trabajó con la plataforma de Meet, lo cual permitió que se pudieran grabar las entrevistas en audio y video, o solo en audio si así lo preferían los entrevistados y sus padres.

Vale la pena aclarar que se incluyó un alumno de quinto grado de primaria debido a que, como ya mencioné previamente, el país se encontraba en situación de emergencia sanitaria, por COVID19. Eso hizo necesario que los alumnos fueran contactados por medio de sus profesoras. Algunos de ellos aceptaron participar, pero no se presentaron a la plataforma virtual para realizar entrevista. Ante esta situación y por la fecha en que se llevaron a cabo las entrevistas (al final del ciclo escolar), solicité apoyo a una maestra de 5º para ver si me podía contactar con sus mejores alumnos en la asignatura de matemáticas (ya que se encontraban terminando 5º grado para ingresar a 6º grado). Fue así que se logró completar la muestra, la cual estuvo compuesta por cuatro alumnos de 6º y uno que terminaba el 5º.

La primera entrevista fue aplicada el día 17 de mayo de 2021 y tuvo una duración de 40 minutos. La segunda, fue aplicada el 21 de mayo de 2021 con una duración de 1 hora 20 minutos. La tercera, fue aplicada el 31 de mayo de 2021 con una duración de 42 minutos. La cuarta entrevista fue aplicada el 07 de junio de 2021 con una duración de 57 minutos. Estas primeras cuatro entrevistas fueron aplicadas a alumnos de sexto grado cuya edad era de 12 años. La quinta y última entrevista fue aplicada el día 09 de julio de 2021. Su duración fue de 43 minutos y fue aplicada a un alumno de 5º grado, casi al finalizar el ciclo escolar. La edad de este último alumno era de 11 años.

Para realizar el análisis de las entrevistas, se siguió el guion de entrevista elaborado, primeramente se consideró ver si los alumnos lograban identificar o definir a la longitud como magnitud, qué era lo que entendían con dicho término y si lo identificaban como algo medible con ciertos instrumentos. A continuación, se pasó a indagar si identificaban y dimensionaban la unidad y sus unidades compuestas y subunidades más comunes: metro, centímetro, milímetros, decímetros y kilómetros. Posteriormente se procedió a buscar si lograban establecer equivalencias entre las unidades, subunidades y unidades compuestas más comunes, comparando primeramente entre números enteros y posteriormente entre enteros y fraccionarios.

Una vez terminada la exploración de la magnitud longitud se procedió a identificar elementos similares, pero de las magnitudes masa y capacidad; es decir, si podían definir qué era masa o capacidad. Una vez identificado este elemento se procedió a ver si podían identificar y dimensionar las unidades y sus subunidades más comunes. Para masa, si identificaban y dimensionaban kilogramo, gramo y miligramo y, para capacidad, si dimensionaban la unidad de litro y la subunidad mililitro. Finalmente se indagó si podían establecer comparaciones de las unidades y subunidades más comunes de cada magnitud con números enteros y fraccionarios.

Con relación a cómo se procesó la información que se recolectó a través de las entrevistas a alumnos, vale precisar que las entrevistas fueron grabadas ya sea en audio o video. Las entrevistas fueron revisadas primeramente solo visual y/o auditivamente para escuchar las respuestas y hacer anotaciones de lo que consideraba relevante. Posteriormente fueron transcritas las respuestas de cada entrevista ya que se me dificultó recuperar información importante solo escuchándolas.

3 RESULTADOS

A continuación, se presentan los resultados de la primera etapa de la investigación, que sirve de base a esta tesis, la cual, como el lector recordará, consistió en el análisis documental del libro de texto gratuito Desafíos matemáticos sexto grado (SEP, 2019), que la Secretaría de Educación Pública proporciona a los alumnos de primaria como parte de los recursos didácticos para el aprendizaje de los contenidos plasmados en el currículo oficial.

3.1 ANÁLISIS DEL LIBRO DE DESAFÍOS MATEMÁTICOS SEXTO GRADO

En el capítulo anterior se explicó que el análisis documental se realizó considerando primeramente los desafíos matemáticos que cumplieran el criterio de implicar a la medición, a los números fraccionarios, o bien, a ambos. Como primer paso, se codificaron todos los desafíos, usando como categorías: a) que sólo trataban el tema de medición, b) que trataban el tema de número fraccionario sin aludir a la medición, c) que trataban el tema de número fraccionario aludiendo a la medición, y d) que trataban un tema diferente a la medición y los números fraccionarios. En la Tabla 1 se presentan las frecuencias, de acuerdo con estas categorías.

DESAFÍOS QUE CONTIENEN SOLO MEDICIÓN	DESAFÍOS QUE CONTIENEN SOLO NÚMEROS FRACCIONARIOS	DESAFÍOS QUE CONTIENEN AMBOS TEMAS	DESAFÍOS QUE TRATAN OTROS TEMAS	TOTAL DE DESAFÍOS MATEMÁTICOS EN EL LIBRO
21	11	27	26	85

TABLA 1. Cantidad de desafíos por temas presentes en el libro de texto Desafíos Matemáticos sexto grado (SEP,2019).

Lo primero que hay que reconocer en estos resultados es que, del total de los 85 desafíos contenidos en el libro, 59 de ellos, es decir, el 69.41%, se encuentran relacionados con la medición, los números fraccionaros, o ambos. Esto significa que las actividades que implican a los dos temas que nos ocupan tienen una presencia muy importante, siendo esta mayor a 2/3 del trabajo que se debe realizar en la asignatura de matemáticas en 6º grado.

También es importante reconocer que de los 48 desafíos que contienen el tema de la medición, la mayoría (27; 56.25%) implican también al tema de los números fraccionarios. De manera similar, de los 38 desafíos que contienen el tema de número fraccionario, la gran mayoría

(27; 71.05%) implican también al tema de la medición. Estos resultados son consistentes con la consideración ya comentada de Sadovsky (2005), referente a que los contextos de medición sirven para introducir el estudio de los números racionales en la escuela y apoyan para dar significado a éstos.

Vale la pena aclarar que los 11 desafíos que implican a los números fraccionarios, sin aludir a contextos de medición (ver Tabla 1), están relacionados con la realización de juegos para apoyar el desarrollo de habilidades vinculadas a la lectura, escritura y comparación de números fraccionarios (Ver Anexo 2, Imagen 3), o bien con actividades que buscan apoyar el que los alumnos ubiquen este tipo de números en la recta numérica. En cuanto a los 21 desafíos de medición, que no implican la enseñanza de números fraccionarios (ver Tabla 1), estos están relacionados, en lo general, con la medición de perímetros, áreas y volúmenes.

Finalmente, los 26 desafíos del libro (el 30.59%), que no implicaban ni el tema de medida ni el de número fraccionario (ver Tabla 1), tratan temas como: ejes de simetría, ubicación de puntos en planos de coordenadas, características de cuerpos geométricos, series, medidas de tendencia central, razones y múltiplos y divisores.

Para el análisis de los desafíos matemáticos que tenían presentes ambos temas, medición y números fraccionarios, como se explicó en capítulo de metodología, primero se procuró identificar las magnitudes que estaban presentes. Éstas fueron cuatro, específicamente: longitud, valor monetario, capacidad y masa. (ver Tabla 2 y Anexo 3).

LONGITUD	VALOR MONETARIO	CAPACIDAD	MASA
14	14	3	3

TABLA 2. Magnitudes empleadas en los desafíos matemáticos que en su planteamiento están presentes tanto el tema de medición como de números fraccionarios.

Ahora bien, de acuerdo con las frecuencias presentadas (ver Tabla 2), se puede identificar que las magnitudes más empleadas al plantear un desafío para el trabajo con números fraccionarios en sexto grado de primaria son longitud y valor monetario, seguidas de capacidad y masa. La comprensión de estas magnitudes puede ser de gran importancia para que alumnos puedan darle significado a lo que se les está planteando en una situación de enseñanza de este tipo de número.

Vale la pena aclarar que, si bien la longitud y valor monetario tienen la misma frecuencia, se detectó que la que más veces aparece sola en un desafío es longitud. De las 14 veces en que es empleada en los desafíos, en 12 (85.71%) la longitud es la única; no así valor monetario que de las

14 veces en que es usada, sólo 9 veces (64.28%) aparece sola en el desafío (ver tabla 3 y Anexo 3).

	MAGNITUD			
VECES QUE APARECE	LONGITUD	VALOR MONETARIO	MASA	CAPACIDAD
SOLO	12	9	0	1
COMBINADO	2	4	3	2
TOTAL	14	14	3	3

TABLA 3. Frecuencia con que son usadas estas magnitudes en los desafíos en que están presentes, tanto medida como números fraccionarios.

En cuanto al uso de dichas magnitudes en estos desafíos, solo 5 desafíos de los 27 (18.52%) hacen referencia a dos magnitudes en el mismo contexto combinando longitud con valor monetario, masa con capacidad o alguna de las anteriores con valor monetario. Por otro lado, los 22 desafíos restantes (81.48%) solo hacen referencia a una sola magnitud.

Vale la pena aclarar que en los desafíos en donde el tema de números fraccionarios no está presente se manejan otras magnitudes como tiempo, energía, perímetro, volumen y área.

3.1.1 **UNIDADES POR MAGNITUD**

Siguiendo con la metodología empleada, una vez que se identificaron las magnitudes se procedió a identificar cuáles eran las unidades, subunidades y unidades compuestas con las que se trabaja en cada una de ellas. A continuación, se mencionarán conforme a la frecuencia de su presencia en el texto analizado.

3.1.1.1 LONGITUD

Como ya se dijo, la longitud es la magnitud que más se emplea en los desafíos donde se combina números fraccionarios y medición. En las 14 veces que aparece, se identificaron 8 unidades, subunidades o unidades compuestas de longitud diferentes, siendo estas: metro (7 veces; 50.00%), kilómetro (6 veces; 42.85%), centímetro (4 veces; 28.57%), hectómetro, pie, pulgada, milla y unidad no convencional (una vez cada una [7.14% cada una]; ver Tabla 4).

Lo anterior nos deja ver que hay tres unidades básicas de longitud a las que se hace referencia en los problemas con los que se busca apoyar el aprendizaje de los números fraccionarios (una unidad coherente, una unidad compuesta y una subunidad): el metro, el kilómetro y el centímetro; siendo la primera la que más presencia tiene.

NO.	UNIDAD (subunidad o unidad compuesta)	PRESENCIA RELATIVA	PORCENTAJE
1.	Metro	7 de 14	50.00%
2.	Kilómetro	6 de 14	42.85%
3.	Centímetro	4 de 14	28.57%
4.	Hectómetro	1 de 14	7.14%
5.	Pie	1 de 14	7.14%
6.	Pulgada	1 de 14	7.14%
7.	Milla	1 de 14	7.14%
8.	No convencional	1 de 14	7.14%

TABLA 4. Unidades, subunidades o unidades compuestas con las que se trabaja *longitud* en los desafíos matemáticos en sexto grado.

3.1.1.2 VALOR MONETARIO

Como ya se mencionó, el valor monetario es la segunda magnitud a la que más se hace referencia en los desafíos matemáticos en los que se trabaja el tema de los números fraccionarios. En el análisis se identificaron cuatro unidades: peso mexicano, dólar americano, euro y yen (ver Tabla 5). De ellas, como se esperaría, el peso mexicano tiene la mayor presencia. Se usa en los 14 desafíos (100%) en los que se recurre al valor monetario para apoyar el aprendizaje de los números fraccionarios. Con relación a las otras tres unidades, éstas aparecen en un solo desafío (7.14% cada uno); es decir, en un solo desafío aparece el dólar americano, el euro y el yen combinado con peso mexicano.

NO.	UNIDAD	PRESENCIA RELATIVA	PORCENTAJE
1.	Peso	14 de 14	100%
2.	Dólar	1 de 14	7.14%
3.	Euro	1 de 14	7.14%
4.	Yen	1 de 14	7.14%

TABLA 5. Unidades con las que se trabaja *valor monetario* en los desafíos matemáticos en sexto grado.

3.1.1.3 MASA

La tercera magnitud más empleada es masa. Ésta aparece en 3 de los desafíos que combinan medición y números fraccionarios. Para trabajar dicha magnitud se emplean cinco unidades (ver Tabla 6) las cuales son: el kilogramo (2 veces; 66.66%), el Gramo (1 vez; 33.33%), Miligramo (1 vez; 33.33%), Libra (1 vez; 33.33%) y Onza (1 vez; 33.33%) empleada una sola vez en un desafío respectivamente con un 33.33%.

NO.	UNIDAD (subunidad o unidad compuesta)	PRESENCIA RELATIVA	PORCENTAJE
1.	Kilogramo	2 de 3	66.66%
2.	Gramo	1 de 3	33.33%
3.	Miligramo	1 de 3	33.33%
4.	Libra (estadounidense)	1 de 3	33.33%
5.	Onza (estadounidense)	1 de 3	33.33%

TABLA 6. Unidades con las que se trabaja *masa* en los desafíos matemáticos en sexto grado.

3.1.1.4 CAPACIDAD

Capacidad es la cuarta magnitud que se emplea en los desafíos matemáticos que combinan medición y números fraccionarios. Para trabajar con ella, en los 3 desafíos en que aparece, se emplean 4 unidades, subunidades o unidades compuestas (ver Tabla 7): el litro (3 veces, 100%), el mililitro (2 veces; 66.66%), la onza líquida (1 vez; 33.33%) y el galón (1 vez; 33.33%). Estos resultados muestran que la unidad de capacidad principal es el litro y el mililitro, la subunidad más empleada.

NO.	UNIDAD	PRESENCIA RELATIVA	PORCENTAJE
1.	Litro	3 de 3	100%
2.	Mililitro	2 de 3	66.66%
3.	Onza líquida	1 de 3	33.33%
4.	Galón	1 de 3	3.33%

TABLA 7. Unidades con las que se trabaja *capacidad* en los desafíos matemáticos en sexto grado.

En general, en el análisis hasta aquí presentado se muestra que –según la propuesta vigente– son dos las magnitudes y cuatro las unidades (subunidades o unidades compuestas) que juegan un papel central en la enseñanza de los números fraccionarios. Las magnitudes son la longitud y el valor monetario, y las unidades, el peso mexicano, el metro, el kilómetro (unidad compuesta) y el centímetro (subunidad). Faltaría especificar el papel que juegan estas magnitudes en la enseñanza de cada tipo de número fraccionario.

3.1.2 TRATAMIENTO POR TIPO DE NÚMERO FRACCIONARIO UTILIZADO

Una vez que se identificaron las magnitudes y unidades, subunidades y unidades compuestas empleadas en los desafíos matemáticos que combinan números fraccionarios y medición, se procedió a identificar en la enseñanza de qué tipo de representación de número fraccionario estaba presente cada magnitud. Básicamente, se diferenció entre expresiones en forma de fracción (con numerador y denominador) y expresiones en forma decimal (con punto decimal). Las primeras, a su vez, se diferenciaron entre si eran *fracciones propias* (fracciones cuyo numerador es menor al denominador), *fracciones impropias* (fracciones cuyo numerador es mayor al denominador) o *fracciones mixtas* (fracciones que implican la suma de un número entero con una fracción propia). Las expresiones decimales se diferenciaron con base en si expresaban *décimos* (una cifra después del punto decimal), *centésimos* (dos cifras después del punto decimal), *milésimos* (tes cifras después del punto decimal), o *diezmilésimos* (cuatro cifras después del punto decimal).

Los resultados que se muestran en la Tabla 8, señalan la cantidad de desafíos en que aparecen relacionados la magnitud con el tipo de representación de número fraccionario trabajado. Es importante mencionar que en un solo desafío pueden aparecer simultáneamente dos magnitudes y diferentes tipos de representación de número fraccionario. Por ejemplo, en el desafío matemático 10 titulado “La mercería” se menciona que se compraron 15.5 m de encaje blanco (longitud con número decimal hasta décimos) y que cada metro cuesta $5.60 (valor monetario con número decimal hasta centésimos), Además, se menciona que también se compraron 4.75 m de cinta azul (longitud con número decimal hasta centésimos) y que cada metro costó $8.80 (valor monetario con decimal hasta centésimos). Este desafío, entonces, fue codificado como que incluye dos magnitudes: valor longitud y valor monetario. Además, se especificó que la longitud se trabajaba con decimales hasta décimos, mientras que el valor monetario se trabajaba también con decimales, pero hasta centésimos.

Tipo de número	Magnitud				
	Longitud	**Valor monetario**	**Capacidad**	**Masa**	**Total**
Fracciones (total)	12	--	1	2	15
propias	7	--	1	1	9
impropias	1	--	--	--	1
mixtas	4	--	--	1	5
Número decimal (total)	13	13	5	5	31
décimos	6	--	1	1	8
centésimos	6	12	2	2	24
milésimos	--	1	2	1	4
diezmilésimos	1	--	--	1	1

TABLA 8. Tipo de número fraccionario por magnitud.

Los resultados en la Tabla 8 nos muestran que en el libro de texto tienen más presencia las fracciones expresadas en su forma decimal que las expresadas en la forma a/b. También muestran que para la enseñanza de las fracciones en su forma decimal se usan las cuatro magnitudes, en las que la longitud y el valor monetario tienen la misma presencia. En contraste, en la enseñanza de las fracciones expresadas en la forma a/b, predomina la longitud y valor monetario no está presente.

Parecería entonces que, con base en el análisis realizado al libro de texto Desafíos Matemáticos sexto grado (SEP, 2019), la longitud es la magnitud clave en la enseñanza de los números fraccionarios, incluyendo fracciones y números decimales, ya que el valor monetario sólo juega un papel central en la enseñanza de los números decimales.

De manera global, el análisis realizado indica que la comprensión de la longitud, como magnitud medible, puede ser de gran importancia para el aprendizaje de los números fraccionarios en sexto año de primaria tomando como base el libro de texto Desafíos Matemáticos sexto grado (SEP 2019). Esta comprensión debe de incluir considerar que tanto la unidad convencional de longitud (metro), como su unidad compuesta (kilómetro) y su subunidad (centímetro) pueden ser fraccionados no solo de manera decimal, sino también no decimal (por ejemplo, en medios, tercios, cuartos u octavos).

3.2 ANÁLISIS DE ENTREVISTAS

La segunda etapa correspondiente a este trabajo de investigación fue llevada a cabo una vez que se concluyó el análisis documental del libro de texto Desafíos Matemáticos sexto grado

(SEP, 2019). Dicha etapa consistió en entrevistar a alumnos de sexto grado (en su mayoría) con el objetivo de dar respuesta a la segunda pregunta planteada en esta investigación.

Las entrevistas tuvieron su fundamento en los resultados de la primera etapa de investigación ya que, como recordará el lector, se buscó identificar, primeramente, los conocimientos de medición que son necesarios para que los alumnos puedan apropiarse de las situaciones didácticas que se plantean para la enseñanza de los números fraccionarios. Una vez que se contó con los resultados, se procedió a diseñar las preguntas necesarias para dar respuesta, a través de las entrevistas, a lo que se persigue en esta segunda parte de la investigación, la cual corresponde a identificar cuáles de esos conocimientos de medición, previos y necesarios, sería más probable que ya hayan adquirido los alumnos, y cuáles no.

Ahora bien, mencionando a grandes rasgos los resultados de la etapa anterior, encontramos que longitud fue la magnitud con más peso y, por consecuencia, la más importante para la enseñanza de los números fraccionarios en el libro Desafíos Matemáticos sexto grado (SEP ,2019). Es por ello por lo que esta magnitud es la que tuvo mayor presencia en la entrevista diseñada. Además de longitud, en la entrevista también se abordaron las magnitudes de peso (o masa) y capacidad, las cuáles también se emplean en el libro, pero en menor medida.

3.2.1 DESEMPEÑO GENERAL

Antes de presentar los resultados de las entrevistas en cuanto a los conocimientos específicos de longitud de los alumnos, vale la pena señalar que se notaron diferencias en el nivel de conocimiento individual entre los cinco alumnos entrevistados. Cuatro de ellos cursaban el sexto grado (Sofía, Ángel, Carlos y Valentina[7]) y una (Elena) estaba por concluir quinto. De los cinco, hubo dos niñas que parecieron tener los conocimientos más consolidados de la longitud, una de ellas cursaba el sexto grado y la otra era quien cursaba quinto grado. También hubo dos alumnos, una niña y un niño, que parecían tener más dificultades dándole sentido y trabajando con las situaciones que se les presentaron. Ambos cursaban el sexto grado. Finalmente, hubo un niño cuyos conocimientos de la longitud parecieron no estar tan consolidados como los de las dos niñas, pero mejor que el de la niña y el niño.

Fue entonces posible identificar tres subgrupos, tal y como se describen en la Tabla 9.

[7] Todos los nombres de los alumnos son seudónimos.

	Descripción
Grupo A	Dos alumnos (Sofía y Ángel) con conocimientos menos consolidados
Grupo B	Un alumno (Carlos) con conocimientos un poco más consolidados
Grupo C	Dos alumnas (Valentina y Elena) con conocimientos mejor consolidados

TABLA 9. Descripción de cada subgrupo identificado en cuanto a conocimiento individual de longitud según la entrevista.

Después del análisis de los diferentes temas de longitud, se presenta una descripción general de los conocimientos de longitud que mostraron tener los alumnos que fueron identificados en cada uno de estos subgrupos.

3.2.2 LONGITUD COMO MAGNITUD

La primera parte de la entrevista buscaba indagar si los alumnos podían identificar o definir a la longitud y qué eran lo que entendían con dicho término. Para lo anterior se les plantearon las siguientes preguntas:

1. ¿Has escuchado la palabra longitud? ¿Sabes a qué se refieren con esta palabra? ¿Me lo puedes explicar?

En cuanto a las respuestas obtenidas en las preguntas señaladas con el Número 1, se registró que, de los cinco alumnos entrevistados, cuatro de ellos mencionaron que sí habían escuchado el término. De esos cuatro, Carlos pareció tener una mayor comprensión del término longitud ya que definió la magnitud de la siguiente manera:

"*Es lo que mide una figura o lo que mide algo o la distancia que hay entre un lugar y otro.*"

Sin embargo, en las respuestas que dio posteriormente Carlos pareció considerar la longitud y la capacidad como una misma magnitud.

"[Tienen longitud]…*Una figura, la longitud del radio, del diámetro, de la circunferencia, la base, la altura y la capacidad.*"

Vale la pena destacar de este comentario que Carlos no sólo incluye a la capacidad, sino que sus otros referentes parecen ser todos de las figuras geométricas.

Ángel refirió que sí lo recordaba, que se lo enseñaron para la medida de las figuras geométricas, específicamente la altura. Elena, en la misma línea explicó que la longitud era la medida que tiene algún objeto, pero conforme a la altura.

Valentina mencionó que sí había escuchado el término. Dijo que no recordaba bien a qué se refería. Al hacer un intento por definirla con los recursos que poseía, se notó que lo asociaba con la medición del área. Esta alumna dijo: "*se me viene como que es el espacio que ocupa algún objeto en alguna base, por ejemplo, el espacio que ocupa este vaso en la mesa.*"

Finalmente, solamente uno de los cinco alumnos entrevistados, Sofía, mencionó que no había escuchado la palabra y por lo mismo no sabía a qué se refería la palabra longitud.

Como se puede notar, en general, los alumnos no tenían una idea clara del significado del término *longitud*. Además, asociaban el término fuertemente con las figuras geométricas, y no quedaba claro que la reconocieran como una propiedad de todas las cosas materiales que hay en el mundo; de los animales, de las plantas, de los objetos domésticos y de los astros que hay en el universo.

En las entrevistas, después de que los alumnos hicieron un primer intento por definir longitud, se consideró que era necesario intervenir para aclararles el significado de longitud como magnitud. Se les trató de explicar que la longitud es la distancia que existe entre dos puntos dados, que puede ser medida. Para ello se empleó uno de los *desafíos matemáticos* presentes en el libro de texto, en el cual se emplea el término longitud en un contexto de carreras. Dicho desafío es el tercero que se encuentra en el libro de texto Desafíos Matemáticos sexto grado (SEP, 2019) titulado "Carrera de robots" en donde para el registro de resultados en la tabla aparece una columna con el encabezado "Longitud del salto". También se emplearon objetos para ejemplificar cómo se identificaría una longitud propia de un objeto.

Una vez que se hizo esa intervención, se procedió a plantear las siguientes preguntas:

2. ¿Me puedes decir cómo qué cosas tienen longitud y cómo lo sabes? ¿Las personas tienen longitud? ¿Por qué?

En general, las respuestas que dieron los alumnos a estas preguntas reflejaron que ya tenían una idea más clara del significado de la longitud. Sin embargo, en los ejemplos que proporcionaron sobre qué objetos tienen longitud, se remitieron principalmente a los ejemplos que yo, la entrevistadora, les había mostrado. Una excepción fue la alumna que en un inicio dijo que no había escuchado la palabra longitud, Sofía. Ahora, después de la explicación que se le había dado, mencionó como objetos con longitud a la regla y a una carretera. Al parecer, sí conocía el término, pero no estaba segura de su significado. De manera interesante, ahora asoció el término con cosas que están graduadas, como la regla (con las marcas y los números que denotan centímetros), o la carretera "*porque tiene rayitas*". Su respuesta sugiere que puede haber alumnos que consideren que sólo las cosas que han sido graduadas y rotuladas con números tendrían longitud.

En relación con la pregunta de si las personas tienen longitud, los cinco alumnos consideraron que sí, y que ésta sería lo que mide alguien de los pies a la cabeza.

Desde una perspectiva docente, las respuestas obtenidas en esta parte de la entrevista indican claramente que no sería conveniente asumir que los alumnos de sexto grado entienden debidamente el significado del término longitud. Para algunos podría tratarse únicamente de características propias de las figuras y cuerpos geométricos. Las respuestas de otros entrevistados indican que algunos estudiantes podrían considerar que *longitud* significa exactamente lo mismo que *altura*. Con respecto a esto, Ángel mencionó que "*la mayoría de las cosas tienen longitud porque la mayoría tiene una altura*". También es posible que algunos alumnos no diferencien claramente a la longitud de otras magnitudes como la capacidad o el área.

Otro punto que destacar es que, reflexionando en mi práctica docente, la explicación relativamente breve que se le dio a los entrevistados de qué es la longitud, probablemente sería similar a la que yo le daría a un grupo antes de trabajar una actividad en la que esta magnitud sirviera de contexto; por ejemplo, una donde se analizan los datos de la longitud de diferentes saltos. Con base en las entrevistas realizadas, este tipo de explicación podría no ser suficiente ya que después de mi intervención –como ya se explicó– la mayoría de los alumnos no ofrecieron ejemplos originales de cosas que tendrían longitud, sino que aludieron a ejemplos muy similares a los usados por mí.

3.2.3 LONGITUD COMO ALGO MEDIBLE

Una vez que se les solicitó a los alumnos que definieran longitud y proporcionaran ejemplos de qué cosas podían tener longitud, se dio paso a indagar si la identificaban como algo medible con ciertos instrumentos. Para ello se les hicieron las siguientes preguntas: ¿Conoces algún instrumento con el que se pueda medir longitud? ¿Me los puedes mencionar?

Los cinco alumnos entrevistados mencionaron a la regla como un instrumento de medición de longitud. Tres de ellos, Valentina, Sofía y Elena; también mencionaron a la cinta métrica o a "*el metro*". Estas respuestas sugieren que, en términos generales, los estudiantes tenían un conocimiento adecuado de los instrumentos que miden longitudes. Sin embargo, también se mencionaron otros instrumentos que serían más adecuados para medir capacidades. Por ejemplo, Carlos indicó que "*los biberones pueden medir longitud por las rayitas que tienen de los litros y mililitros para medir*". Se trató de un alumno diferente a quien en la pregunta anterior consideró que las cosas que tenían longitud eran aquellas que tenían marcas, recordando que en ese caso fue Sofía quien mencionó eso. Elena consideró que, además de la regla y el metro, podían ser instrumentos de medición de longitud "*los biberones, las tazas medidoras, los vasos y las cucharas medidoras*". Los comentarios hechos por estos entrevistados corroboran que para muchos estudiantes puede no ser clara la diferencia entre la medición de la longitud y la de la capacidad. Esto quizá se pueda deber también a que los instrumentos de medición de la capacidad están típicamente diseñados para presentar las medidas de esta magnitud en una escala de longitud.

Un caso especial, que vale la pena comentar, fue el de Valentina que cuando se le preguntó por instrumentos de medición, mencionó "*al violín*" (el instrumento musical). Cuando se le preguntó cómo lo utilizaría para medir, ella explicó que "*lo pondría varias veces*" sobre aquello que quisiera medir. Después de reflexionar un poco, cambió de parecer y mencionó como instrumentos de medición de longitud a la cinta métrica y a la regla. De manera interesante, esta alumna parecía tener una idea relativamente clara de que la medición se puede realizar iterando la longitud de un objeto. Pero también pareció asociar, inicialmente, el término *instrumento* no con algo que se usa para medir, sino para tocar música.

En general, las respuestas de los entrevistados a estas preguntas corroboran lo comentado en el apartado anterior. Los alumnos que llegan a sexto grado pueden no tener una idea clara de qué es la longitud, y esto es algo que no se remediaría con una breve explicación como la que se le dio a los entrevistados. Sería entonces importante que, como docentes, nos demos cuenta de que la longitud es un concepto relativamente complejo que incluso los mejores alumnos, cuando llegan al sexto grado, pueden no haberlo comprendido aún con la suficiente claridad, para darle un sentido adecuado a las situaciones de enseñanza que aluden a esta magnitud.

Algo que vale la pena destacar es que, al referirse a la longitud, varios de los alumnos parecían fusionarla con la capacidad, es decir, la identificaban como si fueran la misma magnitud, más no la relacionaban con el peso (o masa). Ningún alumno mencionó a la báscula como instrumento de medición de longitud. Eso se pudo deber a que las básculas les son poco familiares a los niños de sexto grado, por no tener acceso a ellas. En cambio, las reglas, los metros, y los contenedores graduados con los que se pueden medir capacidades (biberones, etc.) les pueden ser más accesibles.

Desde una perspectiva docente, el análisis de las respuestas a las preguntas, hasta aquí presentadas, indican que sería importante proporcionarles a los alumnos de sexto grado más experiencias con el uso de instrumentos de medición. Eso podría ayudarles a entender mejor qué implica medir y qué se puede medir y con qué instrumentos. También podría ayudarles a darle un mejor sentido a las unidades, unidades compuestas y subunidades del Sistema Métrico Decimal, y a las unidades de otros sistemas que, si bien no se trabajan mucho, forman parte de los contenidos a enseñar en sexto grado.

3.2.4 LONGITUD Y SUS UNIDADES

Una vez que se había indagado sobre si lo alumnos eran capaces de definir y reconocer cómo algo medible a la longitud, se procedió a indagar qué unidades de medida tenían ellos presentes como unidades que sirven para medir longitudes, sin precisar si eran unidades coherentes, unidades compuestas o subunidades. Para ello se planteó una primera pregunta: ¿Me puedes mencionar las unidades con que puedes medir una longitud y qué cosas de tu alrededor medirías con cada una de ellas?

La unidad que todos los alumnos mencionaron fue *el metro*; tres mencionaron a l*os centímetros* (Valentina, Elena y Ángel), cuatro a *los milímetros* (Valentina, Elena, Carlos y Ángel), tres a *los kilómetros* (Elena, Carlos y Sofía) y sólo Elena mencionó a *los decímetros*. Ninguno mencionó las unidades del sistema tradicional de los Estados Unidos (pulgada, pie, yarda, milla).

Vale la pena aclarar que hubo dos alumnos que al referirse al metro explicaron lo siguiente: Ángel comentó que sabía que existían unidades más grandes y pequeñas que el metro, pero que no recordaba sus nombres. Por su parte Elena mencionó que "*con los metros es suficiente*" ya que "*a partir de ahí puede ser menos o más del metro*". Estas respuestas son de interés ya que la presencia de las unidades de longitud en múltiples oficios (pintura, plomería, etc.) y en prácticas comerciales (venta de cables, mangueras, tornillos, telas, pliegos de papel, etc.) podría llevar a un docente a suponer que todos los alumnos de sexto grado estarían muy familiarizados con éstas. Las respuestas de estos alumnos indican que, en las vivencias cotidianas de algunos estudiantes, estas unidades podrían no tener mucha presencia, lo que serían importante tener en cuenta, sobre todo cuando se usan situaciones en las que se hace referencia a éstas.

Respecto a las respuestas de los alumnos sobre qué se podía medir con cada una de las unidades que mencionaron, sus respuestas fueron razonables. Por ejemplo, un alumno mencionó que con el metro se podría medir algo grande, con los milímetros algo más pequeño y con los centímetros algo medio entre metro y milímetros. Otros entrevistados mencionaron que con kilómetros se pueden medir carreteras o pistas y con milímetros algo muy pequeño, "*como un pelo de gato porque es chiquito*".

La entrevista continuó con una serie de preguntas que buscaban indagar cómo dimensionaban los alumnos las unidades de medición de la longitud más comunes, sin precisar si eran unidades coherentes, unidades compuestas o subunidades. Para ello se les hicieron las siguientes preguntas:

- ¿Sabes qué es un metro? ¿Tú mides más o menos de un metro? ¿Mides más o menos de dos metros?
- ¿Sabes qué es un centímetro? ¿Me lo puedes mostrar con tus dedos?
- ¿Sabes qué es un kilómetro? ¿Es más largo o corto que un metro? ¿Crees que el patio de tu escuela mida más o menos de un kilómetro? ¿Crees que pueda haber una cancha de futbol que mida un kilómetro de largo?
- ¿Sabes qué es un decímetro? ¿Me puedes decir de qué tamaño es?

Con relación al metro, los cinco alumnos parecieron dimensionarlo de manera correcta. Todos mencionaron que ellos medían más de un metro y menos de dos. Lo mismo ocurrió con el centímetro. Todos los alumnos, incluso los que inicialmente no lo mencionaron como unidad de longitud, mostraron de qué tamaño era con una aproximación razonable.

El caso del kilómetro fue distinto. Aunque todos lo reconocieron como siendo más largo que un metro y útil para medir cosas grandes, en general, parecían dimensionarlo como siendo mucho más corto de lo que realmente es. Por ejemplo, Valentina consideró que sí podría haber una cancha de futbol que midiera un kilómetro de largo, pero que "*debería estar un lugar muy* *grande*”[8]. Los otros consideraron que una cancha de esa medida sería pequeña, por ejemplo: Carlos mencionó que “*estaría muy reducida*”, y Ángel argumentó que “*tendría que ser más grande para que los jugadores se puedan mover con facilidad*”.

Las respuestas de los alumnos pueden no ser sorprendentes ya que el kilómetro es una unidad difícil de ver y dimensionar. Además, puede no formar parte de las vivencias cotidianas de los niños. Sin embargo, no hay que perder de vista que se trata de la segunda unidad de longitud más usada en los desafíos matemáticos. Dedicar tiempo de clase para ayudar a los niños a dimensionar esta unidad compuesta podría ser algo que les ayude en su aprendizaje de los números fraccionarios y otros temas matemáticos.

En relación con el decímetro, sólo Elena lo reconoció rápidamente como una unidad de diez centímetros y que, en un metro, hay diez de ellos. Recordemos que fue ella quien lo mencionó libremente como una unidad de medida de longitud. Tres de los otros alumnos especularon, correctamente, que debería ser “*algo con diez*” por lo podía medir diez centímetros y caber diez en un metro. Por su parte Ángel especuló que podía tratarse también de diez horas o diez minutos.

Con la siguiente serie de preguntas se buscó indagar hasta qué punto los alumnos reconocían la relación multiplicativa entre las longitudes de la unidad del sistema métrico decimal y sus subunidades y unidad compuesta más común. Para ello se les formularon las siguientes preguntas:

- ¿Algo que mide un metro se puede medir en centímetros? ¿Cuántos centímetros mediría?
- ¿Algo que mide un metro se puede medir en milímetros? ¿Cuántos milímetros mediría?
- ¿Algo que mide un kilómetro se puede medir en metros? ¿Cuántos metros mediría?
- ¿Algo que mide un metro se puede medir en decímetros? ¿Cuántos decímetros mide algo que mide un metro?

Las respuestas a estas preguntas indicaron que, aunque los alumnos tenían una idea general de la longitud del centímetro y del milímetro, para varios de ellos, la relación con la longitud del metro nos les era clara y evidente. Todos consideraron que algo que mide un metro se puede medir en centímetros y milímetros. Sin embargo, cuando se les preguntó cuánto mediría un metro en

[8] Respecto de esta respuesta, es importante no perder de vista que si existiera una cancha en el que las porterías estuvieran a 1 km de distancia, ésta sería completamente inviable para jugar futbol.

centímetros sólo tres de los cinco alumnos (Valentina, Elena y Carlos) aludieron a la equivalencia de que la longitud de un metro es igual a la de 100 centímetros. Los otros dos alumnos mencionaron que la equivalencia sería de 1000 centímetros.

Respecto a la relación de equivalencia entre metros y milímetros, dos alumnos (Elena y Carlos) la reconocieron rápida y correctamente (un metro equivale a mil milímetros). Otros dos no estaban seguros (Valentina y Ángel) y mencionaron que un metro equivaldría a cien mil milímetros. Finalmente, Sofía mencionó que no sabía.

Las respuestas de los alumnos a estas preguntas indican que, para muchos alumnos, la relación multiplicativa, de base diez, que guardan los tamaños de la unidad de longitud, sus subunidades y unidades compuestas puede no serles clara y evidente, incluso a quienes estén cualitativamente muy familiarizados con los tamaños de estos. En otras palabras, puede haber muchos alumnos que lleguen al sexto grado sin haber entendido aún que la longitud del centímetro se define con base en una relación multiplicativa con el metro: La longitud del centímetro es tal, que la acumulación de cien iteraciones de esta longitud corresponde, exactamente, a la longitud del metro; y la longitud del milímetro es tal, que la acumulación de mil iteraciones de esta longitud corresponde, exactamente, a la longitud del metro.

Esta observación es importante porque, en la lógica del sistema métrico decimal, el centímetro y el milímetro no sólo son unidades de longitud más pequeñas que el metro. También son sus subunidades decimales, cuyas longitudes guardan una correspondencia multiplicativa exacta con el metro. Asegurarse de que los alumnos entiendan esto podría ayudar a que se beneficien más de trabajar situaciones de enseñanza de los números fraccionarios que implican el uso de las unidades convencionales de medición de longitud.

3.2.5 EQUIVALENCIA ENTRE UNIDADES CON ENTEROS

En las entrevistas, se le presentaron a los alumnos varios problemas donde se les pedía que compararan las longitudes de cosas que habían sido medidas usando diferentes unidades del sistema métrico decimal: metro (unidad), centímetro (subunidad), milímetro (subunidad) y kilómetro (unidad compuesta). Esto se hizo para indagar con más profundidad sus conocimientos respecto a las correspondencias decimales que guardan estas unidades (subunidades y múltiplos). En el primer grupo de problemas todas las medidas fueron presentadas usando números enteros.

A los alumnos se les pidió que leyeran las cantidades presentadas. Después, se les pidió que compararan las medidas y que explicaran su conclusión.

El primer ejercicio de comparación que tuvieron que hacer fue el siguiente:

1. ¿Qué sería más largo, un cojín que mida 120 cm o uno que mida 120 mm?

En este problema se compararon dos cantidades iguales con números enteros, pero con diferente unidad de medida. Los cinco alumnos concordaron en que sería más grande el cojín de 120 cm porque los centímetros son más grandes que los milímetros. Elena mencionó que los centímetros están conformados por milímetros y Ángel mencionó que en los centímetros de las reglas hay unas rayas un poco más chiquitas y que en la escuela les dicen que esos son los milímetros. En estas respuestas corroboraron que los alumnos dimensionaban los milímetros como unidades más pequeñas que los centímetros.

En el segundo problema se les pidió lo siguiente:

2. ¿Qué estaría más lejos de mi casa, una iglesia que está a 14 km o un deportivo que está a 14 000m? ¿Podrían ser iguales?

En este problema, como se puede notar, las cantidades y las unidades eran diferentes, pero la longitud era la misma. Tres de los cinco alumnos reconocieron la igualdad entre las medidas. Carlos consideró que 14 000 m sería más lejos, considerando, aparentemente, que 14 km equivaldría a 140 m (pensando que un kilómetro equivale a cien metros). La respuesta que proporcionó Sofía sirve para ilustrar una de las estrategias que posiblemente usen los alumnos que no dominan las correspondencias decimales entre las unidades del sistema métrico decimal. Ella mencionó que estaría más lejos el de 14 km porque los kilómetros son más largos que el metro. En esta estrategia, la alumna parece enfocarse únicamente en el tamaño de las unidades utilizadas, sin considerar las veces que se iteró cada unidad.

En el tercer ejercicio se pidió comparar lo que a continuación se muestra:

3. ¿Qué sería más alto, un árbol de 124 cm o un árbol de 8 m?

Los cinco alumnos concordaron que el árbol de 8 m era más alto, pero sus argumentaciones fueron distintas. Dos alumnas (Valentina y Sofía) mencionaron que era mayor el de 8 m porque 124 cm eran un metro con 24 cm y 8 m eran 800 cm. Como se ve, estas dos alumnas reconocieron con facilidad la relación de equivalencia entre las dos unidades, y se apoyaron en ella para hacer la comparación.

En contraste, los tres alumnos restantes parecieron no estar seguros de la relación multiplicativa entre el tamaño de las unidades, por lo que basaron su decisión únicamente en su conocimiento cualitativo del tamaño de las unidades. La siguiente transcripción ilustra la forma de razonar de estos alumnos:

ÁNGEL: [sería más alto] El que mide 8 m porque los cm son más pequeños que los metros, porque si mide 124 cm tal vez sea como aquí (se señala el cuerpo) pero si mide 8m es incluso más grande que yo y que mi mamá y más grande que el otro árbol, porque además en los metros hay centímetros y en los centímetros hay milímetros.

ENTREVISTADORA: Si tuvieras que pasar los 8 m a cm, ¿Cuánto sería?

ÁNGEL: Tengo una idea, pero no estoy muy seguro, creo que serían 8000 cm

ENTREVISTADORA: ¿Cómo sabes que son 8000 cm?

ÁNGEL: Recuerdo que había algo que nos enseñaron en la escuela que era algo así como que a veces las cantidades se les podía agregar o quitar ceros…

Es interesante notar cómo este alumno parecía tener una idea bastante clara del tamaño que tendría cada una de las medidas. Sin embargo, no parecía concebir a los centímetros como una subunidad del metro (su centésima parte), sino como una unidad independiente que tendría alguna equivalencia con este; una equivalencia que no recordaba cuál era.

Un problema más del mismo tipo que se les presentó a los alumnos fue el siguiente:

4. ¿Me puedes decir qué es más alto, el techo que está a 700 cm del suelo o el de otro que está a 5 m del suelo?

Como se puede notar, en este problema la longitud mayor era la que usaba las unidades más cortas. Las respuestas de los estudiantes a este problema corroboraron las consideraciones ya explicadas. Dos de los alumnos dijeron que era mayor la cantidad de 5 m. Uno de ellos, Carlos, lo hizo argumentando que era porque la unidad metros es más grande que los centímetros. Ángel pareció considerar que un metro equivalía a mil centímetros, por lo que 5 m serían 5000 cm.

Con base a las respuestas dadas por algunos alumnos podemos inferir que cuando hicieron comparación de cantidad entera relacionada con una unidad de medida, en ocasiones, al no tener certeza de la equivalencia entre unidad y subunidades, separaron la cantidad de la unidad y en este caso compararon la dimensión que ellos estimaban, con base en el tamaño cualitativo de las unidades, más no el binomio número-unidad.

3.2.6 FRACCIONES DE UNIDADES

Con otro grupo de problemas se buscó indagar sobre cómo razonaban los alumnos entrevistados, cuando, al comparar medidas hechas con diferentes unidades del sistema métrico decimal, una de ellas estuviera expresada con números fraccionarios. La dinámica fue la misma: primero se les pidió que leyeran las cantidades, después, que las compararan y, finalmente, que explicaran su conclusión.

Al leer las cantidades que se les presentaban, escritas con número decimal, lo hacían primero deletreando los dígitos. Por ejemplo, 0.7 km lo leían como "*cero punto siete kilómetros*" o "*punto siete kilómetros*". Cuando se les pidió que lo leyeran de otra forma, ninguno supo expresarlo como cantidad fraccionaria: "siete décimos". De manera interesante, dos alumnos lo leyeron como número entero "siete kilómetros".

Ante esta situación, se les hizo un recordatorio de cómo se leen los números decimales como cantidades. Después de esa explicación, los alumnos ya leyeron la cantidad adecuadamente: "siete décimos de kilómetro".

A continuación, se describe cómo razonaron los alumnos al resolver los problemas presentados.

1. ¿Qué sería más grande, el perímetro de un lago que mide 0.7 km o el de uno que mide 700 m?

Valentina y Elena respondieron correctamente al decir que sería una relación de igualdad entre ambas cantidades. Las dos alumnas mencionaron que, a siete décimas de kilómetro le faltan específicamente punto trescientos o tres décimos de kilómetro para que sea un kilómetro entero, y a los setecientos metros para que llegue al kilómetro también le faltan trescientos metros. En este caso, se puede conjeturar que las dos alumnas manejaban la relación multiplicativa entre el tamaño de las dos unidades y, consecuentemente, pudieron hacer la comparación correctamente.

Otros dos de los alumnos (Sofía y Carlos) no establecieron la relación entre las dos cantidades. Sus argumentos fueron principalmente que 700 m supera el entero y .7 km no llega a un entero. En este caso se fijaron en la cantidad dejando de lado las unidades que las acompañan. Por otro lado, hubo un alumno (Ángel) que mencionó lo siguiente: *"700 m pueden parecer un poco más grandes que los kilómetros, los kilómetros a pesar de que no llegan al entero están muy próximos al entero y se supone que el entero de los kilómetros está más grande que los metros,* *[entonces] es más grande 0.7 kilómetros."* Como se puede notar, en este caso, el alumno consideró únicamente el tamaño de las unidades: los kilómetros son más grades que el metro.

En el segundo problema se planteó una situación en donde era mayor la cantidad marcada con la unidad más grande:

2. ¿Qué es más larga, una vara de 0.4 m o una de 30 cm?

En este caso, cuatro alumnos respondieron que es mayor la de 0.4 m. Si nos quedamos sin escuchar su argumentación podríamos decir que los cuatro tuvieron correcta su respuesta. Sin embargo, después de escuchar los argumentos que dieron, la apreciación primera no es del todo adecuada. Una vez más Valentina y Elena mantuvieron la relación cantidad y unidad. Elena logró resolver haciendo la operación división. Mencionó que dividió entre 100 porque 100 son los centímetros que tiene un metro. Valentina realizó un trabajó más de completar las cantidades para llegar al metro teniendo noción de que .4 m son 40 cm. Los otros dos alumnos (Ángel y Sofía) que pareciera dieron una respuesta correcta, cuando argumentaron el porqué de su elección mencionaron que los metros son más grandes que los centímetros, es decir, dejaron de lado el número y se enfocaron en la unidad.

Por otro lado, Carlos en un inicio mencionó que era mayor 30 cm, argumentó que los 30 superan el entero y los metros no llegan a éste. En este caso se enfocó en la cantidad dejando de lado el tamaño de las unidades.

En el tercer problema que se les presentó, se les solicitó comparar cantidades que se trabajan de manera común en la escuela, ambas con la misma unidad, pero expresada de diferente manera en números fraccionarios. A continuación, se presenta:

3. ¿Quién es más alta, una persona que mide 1 ¾ m o una persona que mide 1.75m?

En este caso cuatro alumnos dieron una respuesta correcta, la mayoría ubicando que ¾ de metro equivalen a 75 cm. Entre los argumentos dados, el de Ángel llama la atención mencionando lo siguiente: *"Ambas tienen el mismo tamaño porque en la escuela nos han enseñado cómo se convierten y yo recuerdo esta mentalmente, ¾ eran 0.750 m, pero ese cero a pesar de que se lo pongas muchas veces, ese 0.75 va a seguir valiendo lo mismo, entonces esas dos personas miden lo mismo."*. También considero prudente mencionar la argumentación de Elena, en la cual mencionó: *"Es lo mismo por que si divido 100 entre 4 da 25 y ahí dice que son 3 veces 25 y al sumarlo da 75".* Recordemos que ella tenía clara la equivalencia correspondiente de un metro igual a 100 cm.

Las respuestas anteriores de los alumnos, en este apartado, me hace reflexionar sobre la importancia que tiene la argumentación en la clase de matemáticas y el potencial que tiene el dejar hablar a los alumnos, y escucharlos para verificar si se están apropiando de un razonamiento matemático correcto o si sólo están memorizando un discurso escolar que transmitimos como docentes, pero sin mayor razonamiento de su parte.

A continuación, se presenta el ejercicio cuatro de comparación de fracciones de unidades.

4. ¿Qué es más grande, un libro que mide 0.30 m de largo o uno que mide 200 mm?

En este caso, los cinco alumnos refirieron que es más grande el libro que mide 0.30 m. En este ejercicio, yo como entrevistadora con Carlos, cometí un error al leer el ejercicio ya que pregunté, ¿qué es más grande, un libro que mide 30 centímetros de largo o uno que mide 200mm? Carlos me hizo la observación de que no eran centímetros sino centésimas de metro y se quedó pensativo. De primer momento respondió que *"es más grande un libro de 200 mm porque si los dividimos entre 1000 para pasarlo a metros aún no nos daría un entero, pero supongo que también nos va a dar una cantidad mayor a 30 centímetros de metro."* Comenzó a hacer sus operaciones para corroborar lo dicho. Es importante aclarar que este alumno no había hecho operaciones previamente ya que no las consideraba como parte de su argumentación. Él no había establecido por cuenta propia la relación de cantidad con unidad para hacer la comparación. Un error al leer durante la entrevista lo hizo establecer esta relación, lo cual me recuerda la Zona de Desarrollo Potencial que plantea Vigotsky (Hernández, 2004). Una vez que terminó de hacer las operaciones dio su respuesta definitiva: *"Si pasamos 200mm a metro nos da 0.2 o sea dos décimos, que sería igual a .20 (veinte centésimos) y 20 centésimas de metro es menor que 30 centésimas de metro."* A partir de las operaciones y de comprender la relación entre cantidades y unidades pudo determinar que era más grande el libro que medía .30 m.

Finalmente, el quinto problema implicaba una comparación igualitaria entre kilómetros y metros, pero con cantidades fraccionarias que hacen parecer a una más grande que otra. El ejercicio fue:

5. ¿Qué es más grande, una cochera que mida 0.005km de largo o una que mida 5m?

Dos alumnos mencionaron que eran iguales las dos longitudes. Uno de esos dos alumnos fue Carlos el que en la pregunta anterior logró establecer la relación cantidad-unidad; sin embargo, su primera respuesta fue que era más larga la cochera de 5 m porque *"metros es una unidad mayor que kilómetros y porque si pasamos los 5m a km nos daría 5 milésimas de kilómetro o de metro y nos* *daría 5 que es mayor que…no, es igual, porque el resultado de la división que me dio de 5 entre 1000 también me dio .5…”* Finalmente mencionó que el resultado es igual después de hacer sus operaciones. Sin embargo, consideró que hacía falta precisión en su respuesta, aunque hay que reconocer que tuvo presente la equivalencia de 1 km es igual a 1000 metros.

De los tres alumnos restantes, dos mencionaron que era más grande la cochera de 5 m. Ángel argumentó que era porque los kilómetros no llegaban al entero y Valentina intentando hacer operaciones no logró establecer una relación, ya que, si bien mencionaba que un kilómetro era para ella 100 m, insistía que 5m era más grande que .005 km. Sofía mencionó que era más grandes .005km porque son cinco milésimas de kilómetro que es más grande que el metro, es decir, se fijó en la unidad de medida.

3.2.7 PANORAMA INDIVIDUAL

Como se mencionó al principio de la sección de longitud, se identificaron tres subgrupos entre los cinco alumnos entrevistados, con base en el nivel de consolidación de sus conocimientos de longitud. El subgrupo que los tenía más consolidados (Subgrupo C, ver Tabla 9) estaba conformado por dos niñas. Una de ellas cursaba sexto grado y la otra, quinto grado.

En cuanto a la alumna de sexto grado, refirió que sí había escuchado el término longitud, pero al definirlo lo relacionó con área; sin embargo, al proporcionarle una breve explicación de qué era longitud, logró mencionar ejemplos de longitud.

Al cuestionarle sobre los instrumentos de medición, mencionó primeramente la idea de iterar instrumentos musicales, que posteriormente cambio por cinta métrica y regla, al hacerle la observación de que los instrumentos musicales no serían algo convencional que todos emplearían.

En cuanto a la alumna de quinto grado, ella relacionó a la longitud con la altura de las cosas y después de una breve explicación logró dar ejemplos de longitud sin referirse a la altura. En cuanto a los instrumentos de medición, además de mencionar reglas o cintas métricas, mencionó biberones, tazas y cucharas medidoras.

En ambos casos las alumnas presentaron dificultades en definir longitud e identificarla como algo medible con ciertos instrumentos. Sin embargo, con una explicación breve de qué era longitud, lograron establecer respuestas más certeras.

En cuanto a las unidades, ambas alumnas identificaron las unidades metros, centímetros y milímetros y las pudieron comparar cualitativamente. La alumna de quinto grado logró reconocer las equivalencias exactas entre unidades que se le preguntaron, incluido el kilómetro. A diferencia de la alumna de sexto, reconoció casi todas las equivalencias a excepción de la correspondiente a cuántos milímetros tendría un metro. Ninguna de las dos logró dimensionar, cualitativa y correctamente, al kilómetro.

Respecto a establecer equivalencias entre unidades empleando números enteros y al combinar números enteros con fraccionarios, lograron responder ambos tipos de problemas de manera satisfactoria. Además, en su argumentación, dejaron claro que podían establecer equivalencias entre las unidades que estaban comparando.

El siguiente subgrupo (Subgrupo B, ver Tabla 9) estuvo conformado por sólo un niño que cursaba el sexto grado. Él pareció, de primer momento, identificar qué era longitud, pero cuando dio ejemplos, mencionó algunos relacionados con la magnitud capacidad. Así mismo, cuando se refirió a instrumentos de medición de longitud, mencionó instrumentos de longitud como la regla, pero también de capacidad bajo el argumento de que ambos tienen rayitas que señalan una medición.

Cuando se le cuestionó sobre la definición que había dado en un primer momento de longitud *"la distancia que hay entre un lugar y otro"* y cómo se relaciona con sus ejemplos dados de longitud e instrumentos para medirla, solo se quedó pensando, mas no quiso hacer algún cambio en su respuesta. En este caso, se puede conjeturar que el alumno no tenía una idea clara de cómo identificar la longitud como algo medible, aunque tuviera una definición que pareciera acertada.

Respecto a las unidades, identificó de primer momento a los metros, kilómetros y milímetros, pero los combinó con otras unidades como el galón y la tonelada. Respecto a las equivalencias que se preguntaron en la entrevista, logró identificar la mayoría. El kilómetro no. Tampoco ofreció una descripción adecuada del tamaño de éste.

En relación con las equivalencias de unidades con números enteros, al comparar, se basó en usar a la unidad como referente para poder decir cuál era más grande. Sin embargo, en un momento pareció identificar la relación entre las palabras centímetro y centésimas y, entonces, comenzó a realizar comparaciones atendiendo tanto al número como a la unidad que se estaba usando, dando así respuestas correctas.

Finalmente, en el último subgrupo (Subgrupo A, ver Tabla 9) hubo dos alumnos de sexto grado, un niño y una niña. El niño, al intentar definir longitud lo hizo con relación a figuras geométricas y a la altura. La niña refirió no haber escuchado la palabra. Fue necesario dar una pequeña explicación de longitud para poder continuar con la entrevista.

Cuando se les pidió ejemplos de longitud, el niño mencionó que la mayoría de las cosas tienen longitud por su altura y la niña mencionó cosas argumentando que tenía longitud por las rayitas o números que señalan los centímetros, por ejemplo.

Ambos lograron mencionar instrumentos de medición de longitud como el metro o la regla. El niño logró identificar de primer momento los centímetros, metros y milímetros y la niña solo el metro y el kilómetro. En general los dos alumnos tuvieron dificultades para establecer las relaciones de equivalencias entre la unidad de longitud, sus subunidades y su unidad compuesta.

En cuanto a identificar equivalencias entre unidades con enteros, basaron sus respuestas en comparar la unidad de medida. Cuando compararon medidas realizadas con números fraccionarios, se enfocaron algunas veces en los tamaños de las unidades y otras en las de los números que estaban usando.

3.2.8 LONGITUD, CONSIDERACIONES FINALES

Primeramente, es pertinente reflexionar sobre cómo *la longitud* podría ser considerada como algo trivial, que los alumnos de sexto pueden manejar con facilidad, debido sus aprendizajes en otros grados y a sus experiencias cotidianas. Eso la haría algo fácil de significar, y que no requeriría de ser tratada con puntualidad en la enseñanza de las matemáticas, al menos en sexto grado.

Las entrevistas muestran que, efectivamente, como maestros podemos esperar que los alumnos de sexto grado tengan bastante familiaridad con la longitud, que la asocien con el trabajo que han realizado en el tema de geometría, que identifiquen los instrumentos que sirven para medirla y que también dimensionen correctamente algunas de las unidades, subunidades y unidades compuestas más comunes, al menos de manera cualitativa. Sin embargo, las entrevistas también muestran insuficiencias y fallas en los conocimientos de los alumnos respecto a la longitud, relevantes no sólo para su formación en el campo de la medición y la geometría, sino también en el de los números fraccionarios.

Como ya se explicó, los resultados de las entrevistas indican que el significado del término *longitud* puede ser problemático para muchos estudiantes de sexto grado. Algunos pueden no tener una idea clara de su significado, otros pueden considerarlo como algo propio o exclusivo de las figuras y cuerpos geométricos. También pueden no reconocer claramente la diferencia entre la longitud y otras magnitudes, como el área y la capacidad.

Pero la cuestión más importante parecería estar en el tamaño de las unidades (unidad coherente, unidades compuestas y subunidades). Las entrevistas muestran que los alumnos reconocían bastante bien el tamaño físico de los milímetros, los centímetros y del metro. No así, el del kilómetro. Éste lo dimensionaban como más pequeño o mucho más pequeño de lo que realmente es.

Ahora bien, la familiaridad con algunas de las unidades de medida (unidad coherente, unidades compuestas y subunidades) no parecía incluir, en todos los casos, el que los alumnos reconocieran la relación multiplicativa que determina sus tamaños. El centímetro es, por definición, un submúltiplo del metro cuyo tamaño equivale a la centésima parte de éste. En otras palabras, la equivalencia de 100 cm y 1 m no es producto de una coincidencia empírica, sino algo que se deriva de la definición del centímetro como subunidad del metro. El caso del kilómetro es similar. El tamaño de éste, por definición, es mil veces la longitud de un metro.

En general, en las entrevistas, los alumnos no parecieron concebir los tamaños de las unidades del sistema métrico decimal (unidad coherente, unidades compuestas y subunidades) en sus relaciones multiplicativas; esto es, como submúltiplos y múltiplos del metro en base 10. Algunos alumnos parecieron tener un buen conocimiento de las equivalencias entre las unidades (ej. 1 km = 1000 m), pero parecieron entenderlas más como información necesaria para equiparar y comparar medidas, a través de la ejecución de cierto procedimiento, que como postulados que sirven para definir el tamaño de las unidades de medida.

Hay que tener presente que los entrevistados eran alumnos que sus maestros reconocieron como destacados en matemáticas, por lo que las insuficiencias que mostraron podrían estar más acentuados entre la mayoría de los estudiantes de sexto grado. Dedicar tiempo al tema de la longitud, en sexto grado, podría ser beneficioso para los alumnos. Este beneficio incluiría al estudio de los números fraccionarios, donde se recurre frecuentemente a la longitud y a las unidades convencionales con que se mide ésta, para contextualizar actividades, problemas y situaciones.

3.2.9 MASA

Dentro de las magnitudes identificadas como las que mayormente se emplean en los desafíos matemáticos presentes en el libro de texto Desafíos Matemáticos sexto grado (SEP, 2019), para la enseñanza de los números fraccionarios y en mayor proporción de los números decimales –como recordará el lector que se mencionó en el capítulo anterior– se encuentran las magnitudes de masa (o peso) y capacidad. En este apartado nos enfocaremos a analizar la magnitud masa (o peso) con su unidad coherente de medición, el gramo, su unidad compuesta, el kilogramo, y su subunidad, el miligramo.

A los alumnos entrevistados se les solicitó que definieran qué era un kilogramo y qué cosas se pueden medir en kilogramos. Los alumnos identificaron que es una medida de peso y los cinco lo relacionaron con cosas como comida. Carlos, Ángel y Sofía mencionaron algo más que comida, y solo Carlos mencionó a las personas.

Para continuar con la exploración y verificar si comprendían qué era un kilogramo y su relación con la unidad gramos se preguntó lo siguiente:

- ¿Sabes qué es un gramo? ¿Es más o menos que un kilo? ¿Cómo qué cosas se miden en gramos?
- ¿Algo que pesa un kilo se puede medir en gramos? ¿Cuánto pesaría?

Con respecto a estas preguntas, podemos decir que los alumnos identificaron que un gramo es más pequeño que el kilogramo ya que consideraron que en gramos se pueden pesar las mismas cosas, pero en menor cantidad. En cuanto a equivalencia entre gramos y kilogramos, Elena, Ángel y Sofía mencionaron la equivalencia correcta, es decir, en un kilogramo hay mil gramos; de los dos alumnos que restan, Valentina mencionó que 1kg es igual a 100 gramos y Carlos refirió no saber a cuánto equivalía.

Para explorar la relación entre gramos y miligramos se plantearon las siguientes preguntas:

- ¿Sabes qué es un miligramo? ¿Es más o menos que un gramo?
- ¿Cómo qué cosas se miden en miligramos?
- ¿Algo que pesa un gramo se puede medir en miligramos? ¿Cuánto pesaría?

En este aspecto, los cinco alumnos identificaron que un miligramo es menos que el gramo.

Respecto a qué medirían con miligramos es de llamar la atención respuestas como la de Ángel: "*podría servir para todo, pero en cantidades más pequeñas, incluso que el gramo*" o bien la respuesta de Valentina: *"si compras algo que hayas pedido en miligramos, también pesa menos que un gramo"*. Por una parte, se mencionó que todo se puede medir en miligramos, pero se hizo referencia a la característica del tamaño para seleccionar que algo puede ser medido en miligramos, como la subunidad de medida. Lo que más llama la atención de la segunda respuesta, es que pareciera que si se pesa en miligramos la cantidad de lo que se está pesando debe ser demasiado pequeña, sin llegar a un gramo, lo cual hace reflexionar sobre si los alumnos comprenden la relación existente entre unidades y subunidades.

En cuanto a la equivalencia entre gramo y miligramo, nos encontramos con que Elena menciona que 100 miligramos equivalen a un gramo. El resto de los alumnos estableció la equivalencia correcta, es decir, un gramo igual a mil miligramos. En esta parte, es de llamar la atención la siguiente respuesta de Carlos:

ENTREVISTADORA: ¿Algo que pesa un gramo se puede medir en miligramos? ¿Cuánto pesaría?

CARLOS: 5 milésimas de gramo

ENTREVISTADORA: ¿Por qué?

CARLOS: Porque sería el resultado que nos da la división para saber de pasar los gramos a miligramos, que sería 1 gramo que pesa entre mil, que nos daría 1 milésimo de gramo…

En la argumentación del alumno sale como respuesta una relación de orden inverso a lo que plantea la pregunta. La respuesta sale como resultado de una operación aritmética realizada. Sin embargo, hubiera sido interesante indagar más sobre si esa respuesta tenía significado para él o solo fue un resultado de un cálculo producto del discurso escolar aprendido sobre cómo realizar conversión de unidades.

Finalmente, para explorar si podían realizar vinculación entre unidades se plantearon dos situaciones, la primera fue planteada con números enteros y la segunda con números fraccionarios.

1. ¿Puedo expresar en Kg, el peso de algo que pesa 2500g? ¿Cuánto pesaría?
2. ¿Puedo expresar en Kg, el peso de algo que pesa 800g? ¿Cuánto sería?

En el ejercicio 1, los dos alumnos que desde un inicio no tenían clara la equivalencia entre gramos y kilogramos (Carlos y Valentina) tuvieron la respuesta incorrecta diciendo que 2500 g eran 25 kg. Así mismo, ambos tuvieron incorrecto el segundo ejercicio. Carlos incluso mencionó en ese ejercicio *"Sería cambiar de unidad. Tendría que ver cuántos gramos hay en un kilogramo, pero no sé".*

Como se puede notar, los alumnos parecían conocer el procedimiento de conversión entre unidades, pero no parecían entender con claridad que los kilogramos son múltiplos 1000 de la unidad gramo. Considero importante que el alumno reconozca que no sabe y la cuestión radicaría en cómo poder apoyar de manera significativa a los alumnos en el aula sin darles la respuesta de manera directa.

El resto de los tres alumnos tuvieron correctos los dos ejercicios. En el segundo ejercicio aparecieron, una vez más, argumentaciones del tipo que dan .8 porque es el resultado de dividir 800 entre 1000. Los alumnos parecían conocer la relación de equivalencia entre kilogramos y gramos (1kg=1000g), y dominar la habilidad de cálculo mental. A continuación, se muestra la argumentación:

ÁNGEL: Entonces serían 0.8 kg, porque si fueran 8kg tendrían que ser 8000g (Su primera respuesta había sido 8 Kg y se le volvió a preguntar la equivalencia entre kilogramos y gramos). Es la misma cuestión de los ceros, no sé muy bien cómo explicarlo, pero siento que es un poquito más por lógica, recorres ceros, quitas ceros, mueves puntos o quitas también a veces puntos. Tengo 800 y el punto se mueve tres lugares a la izquierda porque esos tres lugares son los mismos ceros que están en el mil de que 1kg son 1000.

Lo anterior deja ver que los alumnos tienen las habilidades de cálculo para resolver operaciones, sin embargo, es necesario cuestionar si comprenden y significan el porqué de esas operaciones.

3.2.10 CAPACIDAD

Como ya se mencionó anteriormente, capacidad es una de las magnitudes que se emplea para la enseñanza de los números fraccionarios, con mucha menor presencia que longitud, dentro de los desafíos matemáticos. Sin embargo, se encuentra presente y se recurre a ella, principalmente, para el trabajo de números decimales.

Con respecto a capacidad se les preguntó si sabían qué era un litro y qué cosas se medían en litros. Todos contestaron que servía para medir líquidos y dos de los cinco alumnos desde un inicio refirieron que eran mil mililitros. Más adelante se les planteó la pregunta de cuántos mililitros hay en un litro. Con las respuestas, fue evidente que todos los alumnos identificaban la relación litro-mililitro; es decir, un litro es igual a 1000 ml. Así mismo, todos los alumnos identifican que los mililitros son más pequeños que los litros.

En cuanto a si los alumnos podrían comparar litros y mililitros sin importar si el número era fraccionario o entero, se plantearon las siguientes tres preguntas:

1. ¿Sabes cuántos mililitros hay en ¼ de litro?

2. ¿Puedo expresar en litros 2750 mililitros de jugo? ¿Cuánto sería?
3. ¿Puedo expresar en litros 300 mililitros de leche? ¿Cuánto sería?

Primeramente, como docente he de admitir que me sorprendió conocer que sólo dos de los cinco alumnos (Valentina y Elena) sabían que en ¼ de litro había 250 mililitros, ya que yo pensaba que era una equivalencia muy conocida y común en los ejercicios que se les plantean. Incluso, yo pensaba que era una situación de lo que llamamos vida cotidiana: los alumnos saben que un litro tiene 1000 ml. Sin embargo, pareciera que no supieron qué hacer con esa información cuando se les presentó una fracción. Las respuestas fueron por ejemplo *"25 mil mililitros", "no sé"* o *"No estoy muy seguro, aunque creo que tal vez es lo mismo que un mililitro"*. Esto me recordó a lo que se plantea en el primer capítulo, ¿realmente los alumnos reconocen a la fracción cómo un número?

Los cinco alumnos lograron resolver el ejercicio dos, cuya respuesta era que 2750 mililitros son 2.750 litros. Respecto al ejercicio tres, en donde tenían que convertir los 300 ml a litros, solo dos alumnos (Elena y Ángel) lo respondieron adecuadamente. En este caso, comparto con el lector la explicación de Elena del porqué de su respuesta.

ELENA: 0.3 litros porque son mililitros, entonces como no tiene litros completos son decimales, entonces en vez de que esté completo le pones un punto porque no llega a los mil que sería el litro.

ENTREVISTADORA: ¿Cómo sabes que es 0.3 y no .03 o .003?

ELENA: Porque 300 no es tan pequeño para estar lejos de los mil.

Esta reflexión considero no está basada en una operación aritmética sino en analizar la relación entre el tamaño de litros y mililitros y el significado de los números decimales, lo cual supera lo que se venía argumentando con base en operaciones aritméticas. Vale la pena señalar que esta argumentación fue de la alumna de 5º grado.

El resto de los tres alumnos que tuvo mal el resultado, una vez más, aun habiendo expresado de manera correcta la equivalencia, al responder mencionaron que eran 3 litros, argumentando que ese era el resultado de la división.

3.2.11 CONSIDERACIONES FINALES MASA Y CAPACIDAD

Es importante señalar cómo, para varios de los alumnos, el tener la información correcta sobre las equivalencias entre unidades y subunidades, no implicaba que las dimensionaran de manera adecuada la relación entre el tamaño de éstas. Eso, al parecer, hizo que aceptaran que 300 mililitros de leche podrían equivaler a 3 litros, aun cuando antes habían mencionado, de manera correcta, que un litro equivaldría mil mililitros.

4 LA MEDICIÓN EN LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS: CONCLUSIONES

En este capítulo se da respuesta puntual a las tres preguntas que guiaron la investigación. Como recordará el lector, la primera pregunta planteada fue la siguiente: ¿Qué conocimientos previos de medición requieren los alumnos de sexto grado de primaria para beneficiarse de las situaciones de enseñanza de los números fraccionarios que se plantean en los materiales oficiales?

La respuesta a esta pregunta se basa, sobre todo, en el análisis del libro de texto oficial, Desafíos Matemáticos sexto grado (SEP, 2019) ya reportado en el capítulo 3. Los resultados de este análisis indican que –previamente a involucrarse en las actividades de enseñanza propuestas para los números fraccionarios– los alumnos de sexto grado deben tener una compresión relativamente sólida de la medición de cuatro magnitudes: longitud, valor monetario, masa y capacidad (ver Tabla 10).

MAGNITUD	UNIDADES
Longitud	-Metro -Kilómetro -Centímetro
Valor monetario	-Peso mexicano
Masa	-Kilogramo -Gramo -Miligramo
Capacidad	-Litro -Mililitro

TABLA 10. Magnitudes y unidades, subunidades y unidades compuestas de las que los alumnos de sexto requieren tener conocimientos previos, relativamente bien consolidados, para afrontar las situaciones de enseñanza planteadas en los materiales oficiales para la enseñanza de los números fraccionarios.

De las cuatro magnitudes, la más importante parecería ser *la longitud*, ya que es la más usada y se alude a ella en las actividades de enseñanza tanto de las fracciones como de los números decimales. Así pues, desde una perspectiva didáctica, los conocimientos previos de los alumnos sobre longitud parecerían ser de particular importancia para el estudio de los números fraccionarios.

Los resultados del análisis también indican que, respecto de la longitud, los alumnos deben tener conocimientos previos, relativamente bien consolidados, de tres unidades de medición: el *metro* (unidad coherente), el *kilómetro* (unidad compuesta) y el *centímetro* (subunidad; ver Tabla 10).

Respecto de la magnitud *valor monetario*, el análisis muestra que los alumnos deben tener conocimientos previos de ésta, sobre todo para trabajar las situaciones que implican a los números decimales y, en particular, para las que aluden a los centésimos. La unidad de la que los alumnos deben tener conocimiento previo es el *peso mexicano* (ver Tabla 10).

En cuanto a la magnitud *masa*, ésta tiene más presencia en la enseñanza de los números decimales (hasta milésimos), pero también se alude a ella en situaciones que refieren a las fracciones. Las unidades de importancia son el *kilo* (unidad compuesta), el *gramo* (unidad coherente) y el *miligramo* (subunidad; ver Tabla 10).

Finalmente, de la magnitud *capacidad*, ésta también tiene más presencia en la enseñanza de los números decimales (hasta milésimos), pero está presente en algunas situaciones que refieren a las fracciones. Las dos unidades de las que los alumnos deberán tener conocimientos previos son el *litro* (unidad coherente) y el *mililitro* (subunidad; ver Tabla 10).

Se nota entonces que son cuatro las magnitudes y nueve las unidades de medida (ver Tabla 10) con las que los alumnos deberán estar relativamente bien familiarizados, para darle sentido, de manera adecuada, a los contextos a los que se alude en las situaciones que, en los materiales oficiales, se proponen para la enseñanza de los números fraccionarios. Es importante precisar que se trata de conocimientos previos para el trabajo con números fraccionarios, por lo que no deben de ser considerados los únicos conocimientos sobre medición que requerirían los alumnos de sexto grado. Por supuesto, tampoco deben de ser considerados los únicos conocimientos de importancia, sobre medición, que los alumnos deberán adquirir en su formación primaria. El tema de la medición no se agota con los números fraccionarios. Hay otros contenidos que implican trabajar con otras magnitudes, como el *área* y el *volumen*.

La segunda pregunta de investigación que se propuso responder con la investigación que sirve de base para esta tesis fue: *¿Cuáles de los conocimientos previos de medición, que requieren los alumnos de sexto grado para beneficiarse de las situaciones de enseñanza de los números fraccionarios, sería más probable esperar que ya hayan adquirido y cuáles no?*

El lector recordará que fue para responder a esta pregunta que se instrumentó la segunda parte de la investigación Ésta implicó entrevistar a cinco alumnos. Si bien fueron relativamente pocos los niños entrevistados, éstos fueron seleccionados por que eran considerados por sus profesores como los mejores en la clase de matemáticas. Consecuentemente, sería razonable esperar que las dificultades y limitaciones que se documentó que tenían los estudiantes entrevistados, respecto a sus conocimientos de medición, serían similares a las que tendrían sus compañeros de grado; si no es que éstas estarían más acentuadas entre esos otros estudiantes.

Respecto a la magnitud *longitud*, los resultados de la investigación indican que los alumnos entrevistados contaban con múltiples conocimientos de ésta, pero, en general, no los tenían lo suficientemente bien consolidados para darle cabal sentido a las situaciones que aluden a ella, en los materiales oficiales, para la enseñanza de los números fraccionarios. En general, se documentó que los estudiantes no asociaban el término, de manera inmediata, con una propiedad inherente que se le puede atribuir a todos los objetos físicos del mundo, independientemente de su naturaleza especifica, y de si han sido medidos o no. Por ejemplo, no parecía que les sería evidente que todos los árboles que hay en el mundo tiene una longitud que les es propia, aunque no haya sido medida.

En lugar de ello, para varios de los alumnos entrevistados, el tener longitud parecía ser algo que sería propio, únicamente, de las figuras y cuerpos geométricos y, para algunos, sólo de una de las dimensiones: la altura. Para otros alumnos, tendrían longitud sólo las cosas cuyos tamaños se conocen (o se pueden conocer), medidos en unidades convencionales. Por ejemplo, si una botella tiene longitud es porque se sabe (o se puede saber) cuántos centímetros mide.

También se identificó que, para algunos alumnos, la longitud parecía ser una propiedad que tendrían sólo objetos con escalas de medición marcadas en ellos, como las reglas, los biberones, o una pista de atletismo. Otro punto para destacar es que algunos alumnos no parecían tener clara la diferencia entre la longitud y otras magnitudes como la capacidad y el área.

Los resultados del análisis, entonces, indican que sería razonable esperar que los alumnos de sexto tengan cierta familiaridad con la longitud, pero no necesariamente los conocimientos previos necesarios para darle sentido a los contextos que se proponen en los materiales oficiales para la enseñanza de los números fraccionarios. En general, el análisis indica que no sería apropiado esperar que los alumnos de sexto cuenten con los conocimientos previos de la longitud para reconocerla, claramente, como la distancia que hay entre dos puntos, concibiéndola como una propiedad inherente que se le puede atribuir a todos los objetos físicos del mundo, y las distancias que hay entre ellos; independientemente de su naturaleza especifica, y de si han sido medidos o no.

En cuanto a los conocimientos previos de las unidades de medición de longitud, los estudiantes entrevistados parecieron estar bastante familiarizados con cuatro de ellas: metro (unidad coherente), centímetro (subunidad), milímetro (subunidad) y kilómetro (unidad compuesta). Pudieron reconocer con facilidad cuál era más grande que cuál y, en el caso de las primeras tres, parecieron poder dimensionarlas correctamente, de manera cualitativa. En el caso del kilómetro, los alumnos parecieron atribuirle un tamaño muy diferente al que realmente tiene. El lector recordará que algunos alumnos consideraron que sí podía haber un campo de futbol que midiera un kilómetro y otros pensaron que éste no sería lo suficientemente grande.

Los conocimientos previos de las unidades de medida que parecieron estar insuficientemente consolidados fueron los relativos a las relaciones multiplicativas que implican los tamaños de estas unidades. Los estudiantes parecieron no tener aún un dominio suficiente de las correspondencias decimales entre los tamaños de las cuatro unidades de medición de longitud. Consecuentemente, para los estudiantes no parecía ser evidente que la longitud de un centímetro es tal que se requieren exactamente 100 iteraciones de ella para obtener una longitud idéntica a longitud de un metro; o que se requieren exactamente 1000 iteraciones de la longitud de un milímetro para obtener una longitud idéntica al metro. En general, los alumnos no parecían tener claro que unas de las unidades eran múltiplos de otras y, recíprocamente, unas eran submúltiplos de otras.

Vale la pena recordar que las limitaciones de los alumnos en entender la relación multiplicativa entre las cuatro unidades se notaron cuando se les pidió que compararan medidas realizadas con diferentes unidades. Por ejemplo, cuando se les pidió comparar qué era más alto, un techo que se encontraba a 700 cm del suelo o uno que estaba a 5 m. Para hacer la comparación algunos de los alumnos parecían apoyarse únicamente en su conocimiento cualitativo de las unidades. Ellos escogían el techo que medía 5 m de altura como el más alto porque reconocían que los metros eran más largos que los centímetros.

Aunado a lo anterior, las comparaciones se complicaron cuando aparecieron los números fraccionarios. Como ejemplo, tenemos la situación donde se les planteó comparar qué era más larga, una vara de 0.4m o una de 30 cm. Para poder responder, algunos alumnos continuaban apoyándose en su conocimiento cualitativo de las unidades diciendo que era mayor la de 0.4 m porque los cm son más pequeños que el metro sin reconocer que 0.4m son 40 cm. Por otro lado, hubo quien se apoyó únicamente de su conocimiento de los números, escogiendo que era mayor la vara de 30 cm porque el 30 superaba el entero y 0.4 no llegaba al entero, sin considerar la unidad de medida que acompañaba a la parte numérica.

También recuérdese que cuando se les planteó una situación de igualdad utilizando números fraccionarios, al seguir apoyándose sólo en el tamaño de la unidad o sólo en el tamaño de los números, no lograron identificar dicha igualdad.

En resumen, entonces, de las cuatro unidades de medición de longitud, el análisis muestra que sería razonable esperar que los alumnos de sexto grado estén familiarizados con cuatro de ellas: metro (unidad coherente), centímetro (subunidad), milímetro (subunidad) y kilómetro (unidad compuesta). Además, sería razonable esperar que pudieran dimensionar correctamente las primeras tres, aunque sólo de manera cualitativa. En el caso del kilómetro, es probable que lo conciban, cualitativamente, como siendo mucho más corto de lo que realmente es, por lo que habría que ayudar a los estudiantes a que lo dimensionaran correctamente.

Las principales insuficiencias en los conocimientos previos de los alumnos podrían estar en las relaciones multiplicativas que guardan los tamaños de las unidades de longitud. En este caso, apoyarlos para que las conozcan y puedan trabajar con ellas con facilidad y flexibilidad podría requerir de esfuerzos pedagógicos significativos.

En cuanto a las otras magnitudes de relevancia presentes en las actividades que se proponen para la enseñanza de los números fraccionarios, masa y capacidad, la investigación realizada no permite dar resultados tan puntuales como en caso de la longitud. Sin embargo, parecería razonable esperar que los conocimientos previos de los alumnos referentes a estas magnitudes fueran similares a los de la longitud.

En el caso de la magnitud masa, pareció que a los alumnos se les dificultó menos el manejo de correspondencias multiplicativas entre las unidades gramo (unidad coherente) y kilogramo (unidad compuesta), y entre gramo y miligramo (subunidad). En general, se notó menos la tendencia de los alumnos de enforcarse, en el momento de hacer una comparación, ya sea sólo en el número o sólo en el tamaño de la unidad. Sin embargo, vale la pena recordar que los factores multiplicativos que usaron algunos alumnos fueron incorrectos. Por ejemplo, para convertir kilogramos a gramos, algunos alumnos multiplicaron por 100 en lugar de por 1000.

En el caso de la capacidad, también se notó que había dificultades. Algunos alumnos parecían reconocer la equivalencia entre 1000 ml y un litro. Sin embargo, ésta parecía ser más resultado de aplicar reglas de conversión que un entendimiento de la relación unidad-subunidad. Otros alumnos parecían considerar que era otra la equivalencia.

La tercera y última pregunta de investigación que se propuso responder con la investigación que sirve de base para esta tesis fue: *¿Qué debería indagar y considerar un docente de sexto grado sobre los conocimientos previos de medición de sus alumnos, antes de utilizar los recursos oficiales para la enseñanza de los números fraccionarios, en su práctica?*

Con base en la investigación realizada, la respuesta corta a esta tercera pregunta es que un docente sexto grado, antes de utilizar en su práctica los recursos oficiales para la enseñanza de los números fraccionarios, debe de indagar si sus alumnos tienen conocimientos relativamente bien consolidados de la longitud, y de tres de sus unidades convencionales de medida (ver Tabla 10). Además, también debe de indagar si sus alumnos tienen conocimientos relativamente bien consolidados del valor monetario, la masa y la capacidad, y de las unidades de medición más comunes de estas magnitudes (ver Tabla 10).

Como ya se explicó, estos conocimientos son necesarios para darle sentido a las actividades de enseñanza de los números fraccionarios que se proponen en los materiales oficiales de sexto grado. Sin esos conocimientos, el beneficio para los alumnos de realizar las actividades propuestas puede verse severamente disminuido. Sería entonces importante para un docente apoyar a sus alumnos a que adquieran esos conocimientos, antes de involucrarlos en el estudio de los números fraccionarios, usando los materiales oficiales.

La investigación realizada, además, permite especificar qué implicaría el que los conocimientos de los alumnos de las magnitudes y unidades estén suficientemente bien consolidados. En cuanto a longitud, no sería suficiente que los alumnos estén familiarizados con ésta y con las unidades de media de uso más común. Los alumnos deben de concebir a la longitud como la distancia que hay entre dos puntos, y como una propiedad inherente que se le puede atribuir a todos los objetos físicos del mundo, y las distancias que hay entre ellos; independientemente de su naturaleza especifica, y de si han sido medidos o no. También, deben poder diferenciar claramente a la longitud de otras magnitudes, en particular de la capacidad y del área.

En segundo lugar, los alumnos deben poder dimensionar correctamente las unidades comunes de longitud, incluyendo el kilómetro. Además, deben conocer las relaciones multiplicativas que implican los tamaños de estas unidades, esto es, sus correspondencias decimales, y deben poder trabajar con estas correspondencias con facilidad y flexibilidad. Es importante señalar que conocer estas relaciones implica el entender que éstas definen el tamaño de una unidad con relación a la unidad de referencia (como submúltiplos o múltiplos de esta unidad de referencia), y no sólo se trata de un recurso para convertir las medidas y obtener respuestas correctas.

En cuanto a las otras tres magnitudes, los alumnos deben poder identificarlas claramente y distinguirlas unas de otras. Además, deben de poder dimensionar correctamente sus unidades, y no sólo conocer, sino también tener un buen dominio de las relaciones multiplicativas que implican los tamaños de estas unidades (sus submúltiplos y múltiplos).

5 REFLEXIONES FINALES

A manera de cierre del presente trabajo, reflexionaré alrededor de la resignificación que le doy como docente a mi práctica de enseñar números fraccionarios dentro de un aula de educación primaria. Comenzaré diciendo que soy profesora de educación básica de escuelas primarias federales del Estado de México. He tenido la oportunidad de trabajar a lo largo de 8 años en este sistema, atendiendo diversos grados desde, 1º hasta 6º. Al redactar esto, hago remembranza de algunas experiencias con alumnos de 6º grado con los que tuve la oportunidad de trabajar. Recuerdo a alumnos, que, al inicio del ciclo escolar, al yo mencionar “saquen cuaderno de matemáticas”, sus expresiones eran de desagrado.

También recuerdo a algunos alumnos, los cuales, aparentemente, estaban trabajando en la actividad propuesta, pero al observarlos, se notaba que no era del todo claro para ellos lo que tenían que hacer. Recuerdo que al comentarles “no estas entendiendo, ¿verdad?” su respuesta era un “no”, con alivio, ya que ellos no tenían iniciativa para preguntar. Poco a poco fui testigo de cómo fueron cambiando su actitud para acercarse conmigo a expresar sus dudas. Eso me llevó a reconocer, que yo como maestra tenía fortalezas para trabajar con ellos. Pero también identifiqué limitaciones, ya que no sabía cómo apoyarlos para fortalecer ciertos conocimientos que yo daba por hecho que ya tendrían consolidados, por ser alumnos de 6º grado.

Es a partir del trayecto recorrido dentro de la maestría y de esta investigación, que logré resignificar algunos contenidos matemáticos, así como prácticas relacionadas con la enseñanza de esta asignatura. De manera general puedo mencionar, que resignifiqué a los números fraccionarios (específicamente fracciones, porcentajes y números decimales), las magnitudes continuas y discretas, la medición y mi papel como maestra dentro de la enseñanza de las matemáticas.

Primeramente, como docente, reconozco la ventaja de poder identificar que existen más números aparte de los números enteros y que dentro de la trayectoria en educación primaria si bien, la mayor parte del trabajo se realiza con estos números, es importante reconocer que existen los números fraccionarios; es decir, por ejemplo, reconocer que ½ es un número así como lo es 2 e ir más allá de la idea de que ½ es una fracción la cual se encuentra compuesta de dos números, en donde uno de ellos me indica en cuanto se divide el entero y otro que me señala cuántos hay que tomar de dicho entero. No es que considere que esto está mal, ya que así se explica bajo un modelo parte-todo. Sin embargo, deja de lado su identidad como un número.

También es importante poder reconocer que .8 es diferente de 3.14, aunque ambos se escriban con punto. También, que 70% representa algo diferente que un número entero acompañado de un símbolo, que significa “por ciento” el cual resuelvo a través de lo que conocemos como la regla de 3. Es decir, como maestra considero valioso el poder identificar las características básicas de los números que se nos presenten en el currículo, con los que se tenga que llevar a cabo el trabajo con los niños, ya que así se tendrá más claridad para apoyar a interpretar y operar con ellos.

Aunado a lo anterior, en cuanto a la enseñanza de los números fraccionarios, me apropio de la necesidad de trabajar con magnitudes continuas al plantear algún problema o situación a resolver. No se puede realizar trabajo solo con números y situaciones que representen cantidades enteras. Es necesario que los alumnos reconozcan y les quede claro que hay situaciones en donde los números enteros no van a ser suficientes o bien van a carecer de sentido. Por ejemplo, en una situación donde alguien va a comprar frascos para conservar mermelada, no tendría sentido decir que compró 3 más ¾ frascos (3 completos más ¾ de otro frasco). La expresión “¾ de frasco” carece de sentido cuando “frasco” se refiere al objeto físico. Sin embargo, sí es posible decir que la mermelada que se hizo alcanzó para llenar 3 frascos más ¾ de otro frasco.

En tanto objetos materiales, discretos, los frascos no se pueden fraccionar sin convertirse en restos de un frasco roto. Es ahí en donde intervienen las magnitudes continuas. Cuando la suma 3 más ¾ de frasco tiene sentido, no se están sumando frascos en tanto entes discretos (objetos), sino volúmenes (ej., de mermelada), expresados en unidades que usan como referencia la capacidad de un frasco; la cual, por ejemplo, puede corresponder a 1 litro.

Las magnitudes continuas son importantes, no sólo en la educación primaria sino a largo plazo. Son las que van a permitir entender que, dentro de cada intervalo finito, limitado por dos números enteros, existen valores infinitos que pueden ser señalados a través de los números fraccionarios. Se trata entonces de lo que en los programas de estudio 2011 (SEP, 2011f) se menciona como la “propiedad de densidad de los racionales, en contraste con los números naturales” (p.77).

Ahora, si bien los contextos de medición, en donde se trabajan y desprenden las magnitudes continuas, nos van a apoyar a dar significado a los números fraccionarios, un contexto por sí solo no va a hacer su trabajo de significante. A partir de lo anterior resignifico el papel de la medición dentro de mi labor de enseñanza al poder otorgarle otra lectura a los Planes y Programas de estudio.

En planes y programas de estudio, específicamente 2011, en los ejes donde se organiza el contenido, por un lado, se organiza Sentido numérico y pensamiento algebraico y por el otro Forma, espacio y medida. No percibía la relación estrecha de la medición con Sentido numérico específicamente con los números fraccionarios. Yo lo veía como dos contenidos separados sin relación.

En 5º grado se plantea que los alumnos conozcan y hagan uso de las unidades estándar de capacidad y peso, así como que se trabaje con problemas en donde se lleven a cabo conversiones entre múltiplos y submúltiplos del metro, litro y kilogramo. Este contenido previo a 6º grado lo puedo ver como el antecedente para poder significar los contextos de medición con números fraccionarios. Se podría decir que se esperaría que la parte de medición quedara cubierta en 5º grado y en 6º se continue construyendo la noción de sentido numérico de los números fraccionarios, evitando así una doble carga para los alumnos.

Ahora bien, recordando las respuestas de los alumnos entrevistados para este trabajo, en donde ante una situación del tipo: ¿qué es más grande 700 cm o 5m?, al tener que dar respuesta a lo anterior, recurren a la estrategia de separar el número de la unidad de medida para compararlas, me hace replantearme si se comprende lo que es medición o sí solo se aprenden datos convencionales de memoria.

Me planteo la necesidad de que, al introducir las magnitudes continuas, sea conveniente significar lo que implica la medición para poder contextualizar de mejor manera las situaciones de enseñanza que se plantean para los números fraccionarios en grados superiores; ya que damos por hecho que los alumnos saben medir y que no les causará mayor conflicto imaginar una cinta métrica para medir algo.

La medición va más allá de la actividad de usar un instrumento para poder otorgar una cantidad de medida. Ma hace plantearme la necesidad de cuestionar si cuando un alumno mide con una regla, es consciente de que son 5 cm como una magnitud continua o si el 5 lo considera como algo discreto. Nunca había reflexionado respecto a que tal vez no abandonó el mundo discreto, aunque sean actividades de medición, lo que me hace cuestionarme sobre qué tanto realmente significó a través de magnitudes continuas. Es decir: ¿realmente era consciente que trabajaba con magnitudes continuas?

Existen nociones fundamentales que tal vez no sean tan fáciles de asimilar para los alumnos. Recordando que longitud es la magnitud más empleada, para contextualizar a los números fraccionarios, considero lo que menciona Stephan y Clements (2004) sobre la medición de una longitud, la cual implica dos aspectos: 1) identificar una unidad de medida y subdividir (mental y físicamente el objeto por esa unidad) y 2) iterar esa unidad de extremo a extremo a lo largo de la longitud que va a ser medida. El proceso de medición de una longitud lleva implícitas ciertas nociones que pueden parecer fáciles de entender para nosotros los maestros, las cuales son: partición, iteración de unidad, transitividad, conservación, acumulación de distancia y la relación con el número.

El alumno debe comprender que, al tener una medida de longitud, aunque no se vea, la longitud medida está definida como partida en unidades del mismo tamaño, y que a la vez estas unidades pueden partirse aún más; también, que la unidad de medida está colocada repetidamente a lo largo de la longitud a medir, pero con la característica específica de que una es seguida de la otra, con la mayor precisión.

Juárez (2017) documentó que la iteración no es algo tan fácil de realizar, ya que los alumnos no consideran importante, de primer momento, cómo poner las unidades con las que se está midiendo a lo largo de la longitud. Pueden dejar espacios entre éstas, o encimarlas, y eso no les causa conflicto para dar un resultado de medida. Así mismo, con relación a la iteración, es importante que los alumnos reconozcan que el significado de iterar una unidad es una distancia que va desde el comienzo de la primera iteración hasta el final de la última.

Otro elemento importante, dentro de los aspectos a considerar sobre las nociones de medición, es que los alumnos puedan recurrir a un elemento tercero para comparar las longitudes entres dos objetos, que es lo que se denomina transitividad. Al respecto, investigadores como Kammi y Clark (1997 en Stephan y Clements, 2003) llegan a la conclusión de que la regla no es lo ideal como instrumento de medición antes de que el estudiante pueda pensar transitivamente. Incluso, mencionan que es importante que el alumno piense transitivamente para poder comprender la medición.

Un aspecto que puede parecer muy obvio para nosotros como adultos, dentro de la medición, es que cuando un objeto o segmento de recta es movido, la longitud de este no cambia. Sin embargo, esa noción de conservación no es algo que podamos obviar en los alumnos.

Finalmente es importante que el alumno comprenda que si bien, en la medición se lleva a cabo un acto de contar, no están contando cantidades discretas, sino que hay una unidad involucrada, por eso no es lo mismo medir 30 m que 30 cm. No se trata de leer un instrumento de medición, sino de que comprendan que hay una unidad que está siendo iterada cubriendo el espacio que se encuentra entre el punto de inicio y final de la longitud a medir.

Realmente, no había considerado que el medir una longitud es algo más complejo que utilizar un instrumento como la regla o el metro. Además, en mi práctica docente, el trabajo siempre lo había realizado con números enteros. Las equivalencias que les daba a mis alumnos eran que 1 m son 10 dm, 100 cm o 1000mm, pero nunca he explicado, por ejemplo, que 1cm es la centésima parte del metro. Dejaba sin considerar esa relación inversa.

Hay otras cosas de medición con relación a los números fraccionaros que para nosotros como docentes pueden ser obvias, pero que no lo son necesariamente para los alumnos. Ejemplo de ello son las fracciones de ½ o ¼ acompañados de alguna magnitud (litros o metros). Pareciera que la vida cotidiana se los podría enseñar y que no requieren mayor explicación, pero no necesariamente sucede así. Considero que el hecho de que los números vayan acompañados por alguna magnitud de nuestro Sistema Métrico Decimal les da un significado que no es tan fácil de asimilar para nuestros alumnos; por ejemplo, 1/4 m= .25m= 25 cm o bien, ¼ L = .25 L =250 ml. Representa una tarea demandante, ya que deben significar el valor del número fraccionario dentro de cierta unidad o subunidad de medida.

Otra cuestión que toma un nuevo significado en mi práctica es la cuestión del tiempo y mi papel como maestra. El tiempo destinado a la clase más allá de que sea mucho o poco, debe ser aprovechado de la mejor manera y con ello me refiero a que cada minuto trabajado sea para que los alumnos reflexionen, argumenten y expongan dudas. El dejar hablar a mis alumnos requiere de mí una gran responsabilidad docente para escuchar y poder entender lo que quieren comunicar y a partir de ahí acompañar o redirigir el razonamiento que ellos estén llevando a cabo.

Es necesario que los alumnos pierdan el miedo a hablar y a compartir qué es lo que están analizando, sea correcto o no. Como docente no puedo solo enfocarme en el resultado correcto o erróneo, sino que debo enfocarme en el proceso y poder detectar fortalezas y debilidades. Si es que hay error, tener la capacidad de poder direccionar la actividad. Y si no hay error, reconocer que los alumnos pueden dejar al descubierto diversos procedimientos que pueden ser compartidos con sus compañeros. Lo anterior implica que como docente tenga claridad en los contenidos a enseñar, y con ello no me refiero a que sea toda una experta en el tema, pero sí que tenga la claridad necesaria para saber por dónde investigar o aclarar dudas.

Algo que también resignifico es el diseño de las situaciones didácticas, ya que no cualquier problema puede apoyar a alcanzar el objetivo de enseñanza que se tenga planteado. Además, es importante considerar el cómo se va a trabajar dicho problema, en dónde se debe reconocer lo valioso que es poner en común los procedimientos trabajados.

6 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ávila, A. y García, S. (2008). *Los decimales: más que una escritura.* México: INEE.

Block, D. (2018). La enseñanza de las matemáticas en la reforma curricular de 1993 en México. Algunas reflexiones 25 años después. En A. Ávila (Ed.). *Rutas de la educación matemática*. (p.p. 302-320). México: Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática.

Bobos, G., & Sierpinska, A. (2017). Measurement approach to teaching fractions: a design experiment in a pre-service course for elementary. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 17(2),* 203-239.

Comisión Nacional para la Mejora Continua de la Educación. (2021). *Matemáticas 6º de primaria. Orientaciones didácticas.* México. Recuperado el 23 de septiembre de 2021 de https://www.mejoredu.gob.mx/images/publicaciones/orientaciones/od_06_mate.pdf

Fracción (s.f). En Wikipedia. Recuperado el 14 de octubre de 2021 de https://es.wikipedia.org/wiki/Fracci%C3%B3n

Hernández, G. (2004). *Paradigmas en psicología de la educación.* México: Paidós.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación.* (4ª ed.). México: Mc Graw Hill.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. (2018). *Planea. Resultados nacionales 2018. 6º de primaria.* Recuperado el 25 de septiembre de 2020 de http://planea.sep.gob.mx/content/general/docs/2018/RESULTADOS_NACIONALES_PLANEA2018_INEE.pdf

Juárez, M. G. (2017). *La fracción como medida: una experiencia con alumnos de quinto grado.* Tesis de maestría. Universidad Pedagógica Nacional.

Llinares, S. y Sánchez, M. V. (1997). Fracciones: La relación parte-todo. España: Editorial Síntesis.

Sadovsky, P. (2005). *Enseñar matemáticas hoy: Miradas, sentidos y desafíos*. Argentina: Libros del Zorzal.

Secretaria de Educación Pública. (1993). *Plan y programas de estudio 1993. Educación Básica. Primaria*. México: SEP.

Secretaria de Educación Pública. (2011a). *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación Básica. Primaria. Cuarto grado.* México: SEP.

Secretaria de Educación Pública. (2011b). *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación Básica. Primaria. Primer grado.* México: SEP.

Secretaria de Educación Pública. (2011c). *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación Básica. Primaria. Quinto grado.* México: SEP.

Secretaria de Educación Pública. (2011d). *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación Básica. Primaria. Segundo grado.* México: SEP.

Secretaria de Educación Pública. (2011e). *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación Básica. Primaria. Sexto grado.* México: SEP.

Secretaria de Educación Pública. (2011f). *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación Básica. Primaria. Tercer grado.* México: SEP.

Secretaria de Educación Pública. (2017). *Aprendizajes Clave para la educación integral. Educación primaria. 6º Plan y programas de estudio, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación.* México: SEP.

Secretaría de Educación Pública. (2019). *Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Sexto grado*. México: SEP.

Stephan, M. y Clements, D. H. (2003). Linear and area measurement in prekindergarten to grade 2. En Clements, D. H. (Ed.) *Learning and teaching measurement.* (pp.3-16). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

7 ANEXO 1

GUION DE ENTREVISTA A ALUMNOS

LONGITUD

EDAD: ___________________________ GRADO ESCOLAR: _________________________

FECHA DE ENTREVISTA: ____

INSTRUCCIONES: Te pido por favor me apoyes respondiendo las preguntas que te haré a continuación; así mismo te pido, que también argumentes cada una de tus respuestas.

LONGITUD

1er nivel: MAGNITUD

1. ¿Has escuchado la palabra longitud? ¿Sabes a qué se refieren con esta palabra? ¿Me lo puedes explicar?
2. ¿Me puedes decir cómo qué cosas tienen longitud y cómo lo sabes?
3. ¿Las personas tienen longitud? ¿Por qué?
4. ¿Conoces algún instrumento con el que se pueda medir longitud? ¿Me los puedes mencionar?

2º nivel UNIDADES

5. ¿Me puedes mencionar las unidades con que puedes medir una longitud y qué cosa de tu alrededor o que conozcas medirías con cada una de ellas?

Para poder aclarar su respuesta anterior

5.1 ¿Sabes qué es un metro? ¿Tú mides más o menos de un metro? ¿Mides más o menos de dos metros?

5.2 ¿Sabes qué es un centímetro? ¿Me lo puedes mostrar con tus dedos?

5.3 ¿Sabes qué es un kilómetro? ¿Es más largo o corto que un metro? ¿Crees que el patio de tu escuela mida más o menos de un kilómetro? ¿Crees que pueda haber una cancha de futbol que mida un kilómetro de largo?

6. ¿Algo que mide 1 metro se puede medir en centímetros? ¿Cuántos centímetros mediría?
7. ¿Algo que mide 1 metro se puede medir en milímetros? ¿Cuántos milímetros mediría?
8. ¿Algo que mide 1 kilómetro se puede medir en metros? ¿Cuántos metros mediría?
9. ¿Sabes qué es un decímetro? ¿Me puedes decir como de qué tamaño es? ¿Algo que mide un metro se puede medir en decímetros? ¿Cuántos decímetros mide algo que mide un metro?

3er nivel EQUIVALENCIA ENTRE UNIDADES CON ENTEROS

10. Mostrar la siguiente imagen:

120 cm 120 mm

¿Me puedes leer las dos medidas por favor?

a) ¿Qué sería más largo, un cojín que mida 120 centímetros o uno que mida 120 milímetros? ¿Me puedes explicar por qué? ¿Cómo sabes que no son del mismo tamaño?

-Seguir la misma lógica con las medidas que continúan, mostrando primero las medidas y pedir que sean leídas antes de plantear la situación de comparación.

b) 14 km o 14 000 m: ¿Qué estaría más lejos de mi casa, una iglesia que está a 14 Km o un deportivo que está a 14 000 m? ¿Podrían ser iguales las dos distancias?

c) 124 cm o 8 m: ¿Qué sería más alto Un árbol de 124 cm o un árbol de 8 m?

d) 700 cm o 5 m: El alto de techo que está a 700 cm o el de otro que está 5 m.

<u>4º nivel FRACCIONES DE UNIDADES</u>

13. Igual. Ir mostrando medida por medida. Que la lea. Luego el problema con contexto. Sí deletrea los decimales (cero punto siete), preguntar si los puede leer con los términos fraccionarios (décimo, centésimo, milésimo).

a) 0.7 km o 700m: El perímetro de un lago de 0.7 km o el perímetro de un lago de 700 m.

b) 0.4m o 30 cm: Una vara de 0.4 m o una vara de 30 cm.

c) 1 ¾ m o 1.75 m: Una persona que mide 1 ¾ m o una persona que mide 1.75 m.

d) 0.30 m o 200 mm: Un libro que mide 0.30 m o un libro que mide 200 mm.

e) 0.005 km o 5 m. Una cochera que mida 0.005 km de largo o una que mida 5 m.

MASA

1. ¿Me puedes decir qué es un kilo? ¿Como qué cosas se miden en kilos?
2. ¿Sabes qué es un gramo? ¿Es más o menos que un kilo? ¿Como qué cosas se miden en gramos?
3. ¿Algo que pesa un kilo se puede medir en gramos? ¿Cuánto pesaría?
4. ¿Sabes qué es un miligramo? ¿Es más o menos que un gramo?
5. ¿Cómo qué cosas se miden en miligramos?
6. ¿Algo que pesa un gramo se puede medir en miligramos? ¿Cuánto pesaría?

[Las siguientes preguntas sólo usarlas si queda tiempo y si al alumno le ha ido muy bien con todas las preguntas anteriores].

7. ¿Puedo expresar en Kg, el peso de algo que pesa 2500g? ¿Cuánto sería?
8. ¿Puedo expresar en kg, el peso de algo que pesa 800g? ¿Cuánto sería?

CAPACIDAD

1. ¿Me puedes decir qué es un litro? ¿Como qué cosas se miden en litros?

2. ¿Sabes qué es un mililitro?

3. ¿A un recipiente de 1 litro cuántos mililitros le caben?

[Igual con estos, sólo si hay tiempo y si le ha ido bien en las anteriores]

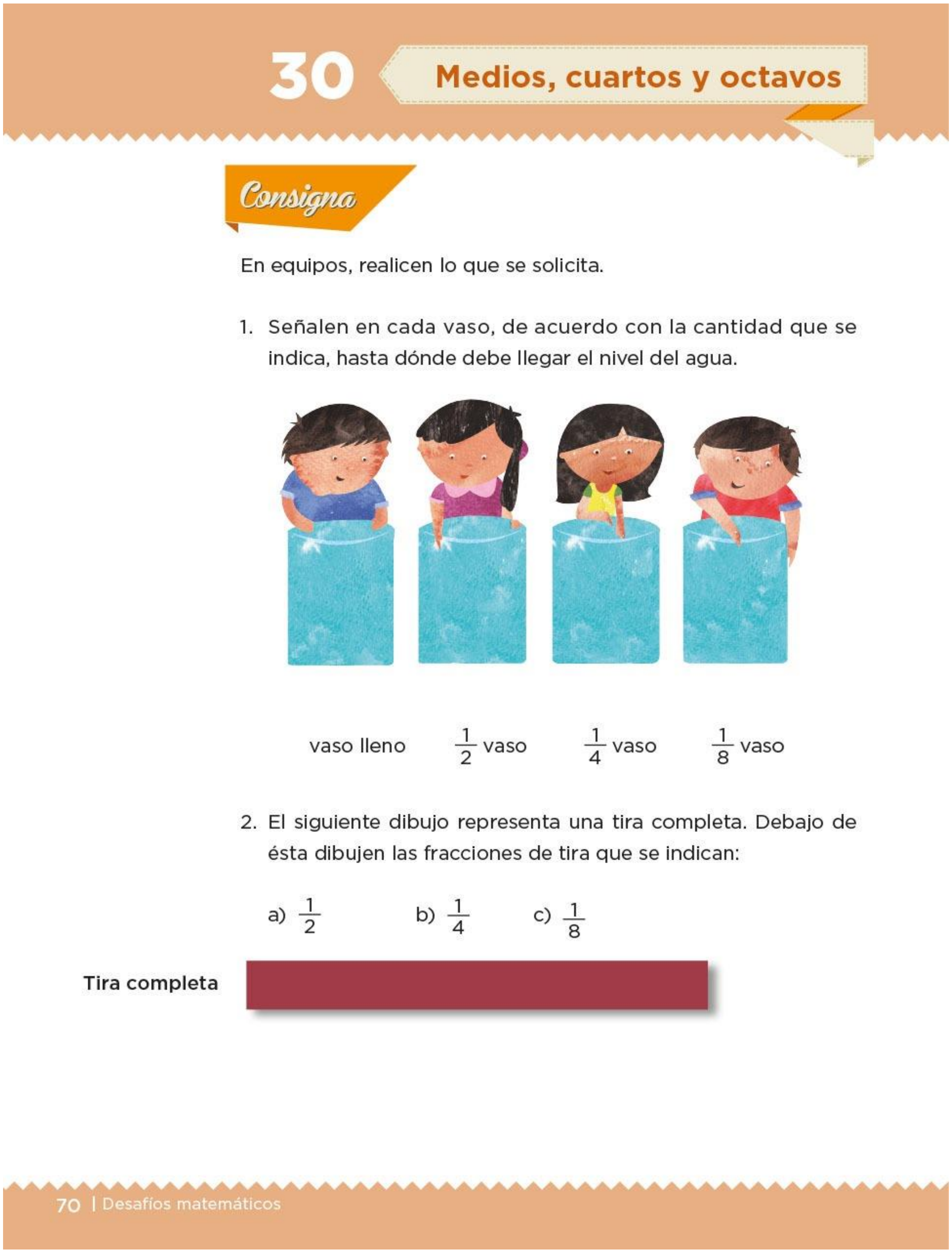
4. ¿Sabes cuántos mililitros hay en ¼ de litro?

5. ¿Puedo expresar en litros 2750 mililitros de jugo? ¿Cuánto sería?

6. ¿Puedo expresar en litros 300 mililitros de leche? ¿Cuánto sería?

8 ANEXO 2

EJEMPLOS DE DESAFÍOS MATEMÁTICOS


30 Medios, cuartos y octavos

Consigna

En equipos, realicen lo que se solicita.

1. Señalen en cada vaso, de acuerdo con la cantidad que se indica, hasta dónde debe llegar el nivel del agua.

vaso lleno $\frac{1}{2}$ vaso $\frac{1}{4}$ vaso $\frac{1}{8}$ vaso

2. El siguiente dibujo representa una tira completa. Debajo de ésta dibujen las fracciones de tira que se indican:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{8}$

Tira completa

70 | Desafíos matemáticos

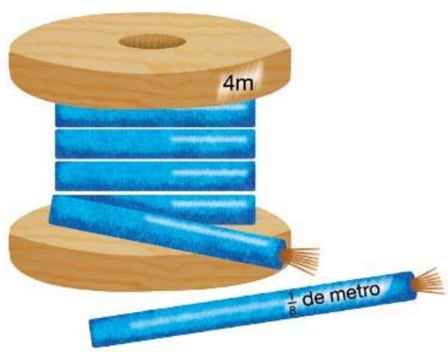
IMAGEN 1. Primer desafío matemático presente en el libro de texto Desafíos Matemáticos tercer grado (SEP, 2019) en donde aparecen números fraccionarios titulado “Medios, cuartos y octavos”.

Bloque III

3. ¿Cuántos vasos de $\frac{1}{4}$ de litro se pueden llenar con 3 litros de leche?

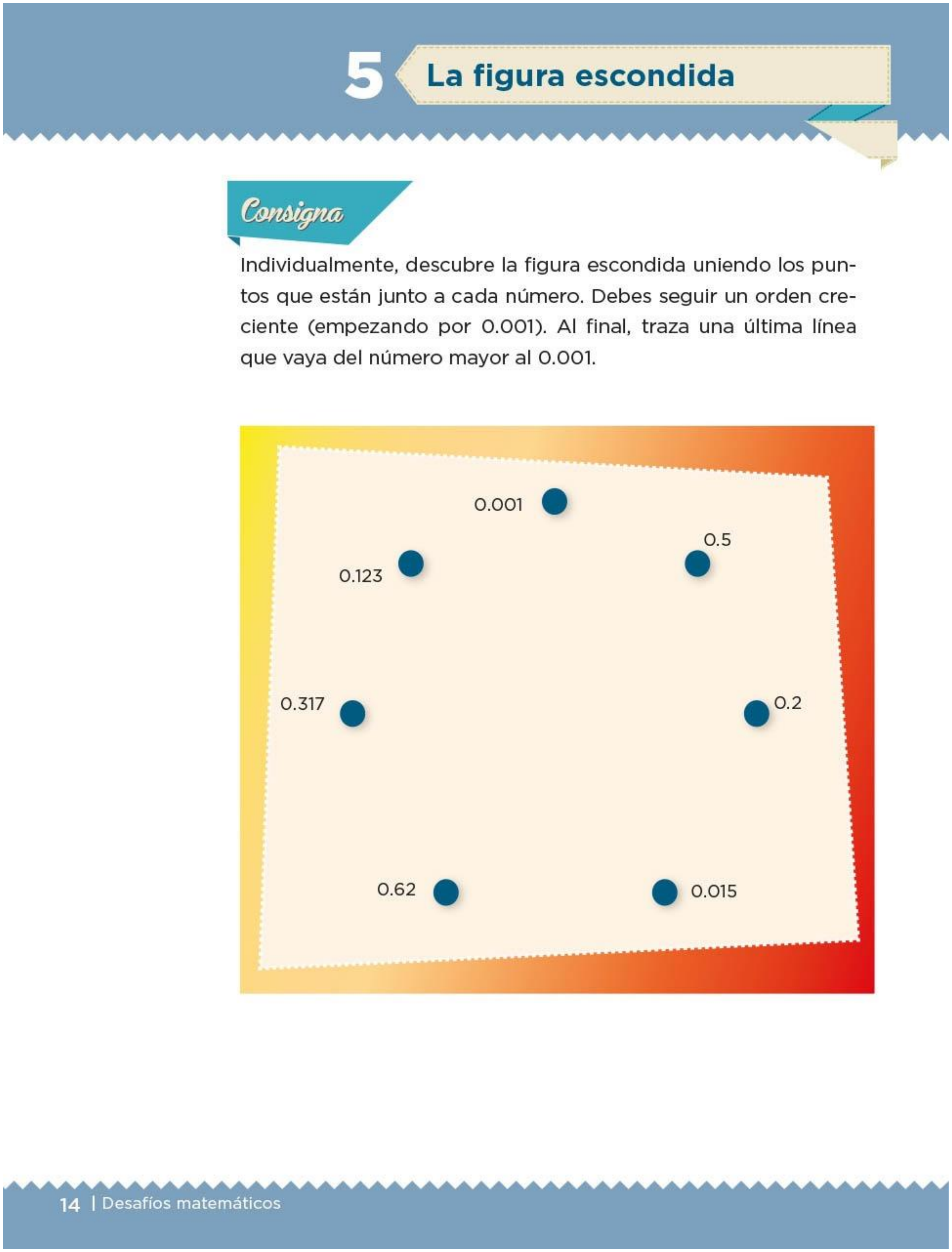
4. ¿Cuántos vasos de $\frac{1}{2}$ de litro se pueden llenar con la siguiente cantidad de agua de naranja?

5. ¿Cuántos pedazos de $\frac{1}{8}$ de metro se pueden cortar de 4 metros de cable?



Tercer grado | 71

IMAGEN 2. Continuación del desafío matemático 30 “Medios, cuartos y octavos” presente en el libro de texto Desafíos Matemáticos tercer grado (SEP, 2019).



5 La figura escondida

Consigna

Individualmente, descubre la figura escondida uniendo los puntos que están junto a cada número. Debes seguir un orden creciente (empezando por 0.001). Al final, traza una última línea que vaya del número mayor al 0.001.

14 | Desafíos matemáticos

IMAGEN 3. Ejemplo de desafío matemático que solo incluye el tema de número fraccionario presente en el libro de texto Desafíos Matemáticos sexto grado (SEP, 2019).

2019).

34 Nuestro país

Consigna

En parejas, contesten las preguntas que se plantean en cada problema.

1. La siguiente tabla muestra la extensión territorial de los 15 países más grandes del mundo.

País	Superficie total (km²)
Federación de Rusia	17 075 200
Canadá	9 984 670
Estados Unidos de América	9 631 420
China	9 596 960
Brasil	8 511 965
Australia	7 686 850
India	3 287 590
Argentina	2 766 890
Kazajstán	2 717 300
Sudán	2 505 810
Argelia	2 381 740
República Democrática del Congo	2 344 858
Arabia Saudita	2 149 690
México	**1 964 375**
Indonesia	1 910 931

Fuente: INEGI, *Anuario estadístico de los Estados Unidos Mexicanos*, 2010.

66 | Desafíos matemáticos

IMAGEN 4. Ejemplo de desafío contextualizado en medición (comparación de superficies) pero que no trata tema de números fraccionarios presente en el libro de texto Desafíos Matemáticos sexto grado (SEP, 2019).

Bloque II

a) ¿Cuál es la extensión del territorio mexicano?

b) ¿En qué orden se organizaron los datos de la tabla?

c) ¿Qué lugar ocupa México por la extensión de su territorio?

d) ¿Cuál es el país más grande del mundo?

e) ¿Cuántos y cuáles países de América se encuentran entre los más grandes del mundo?

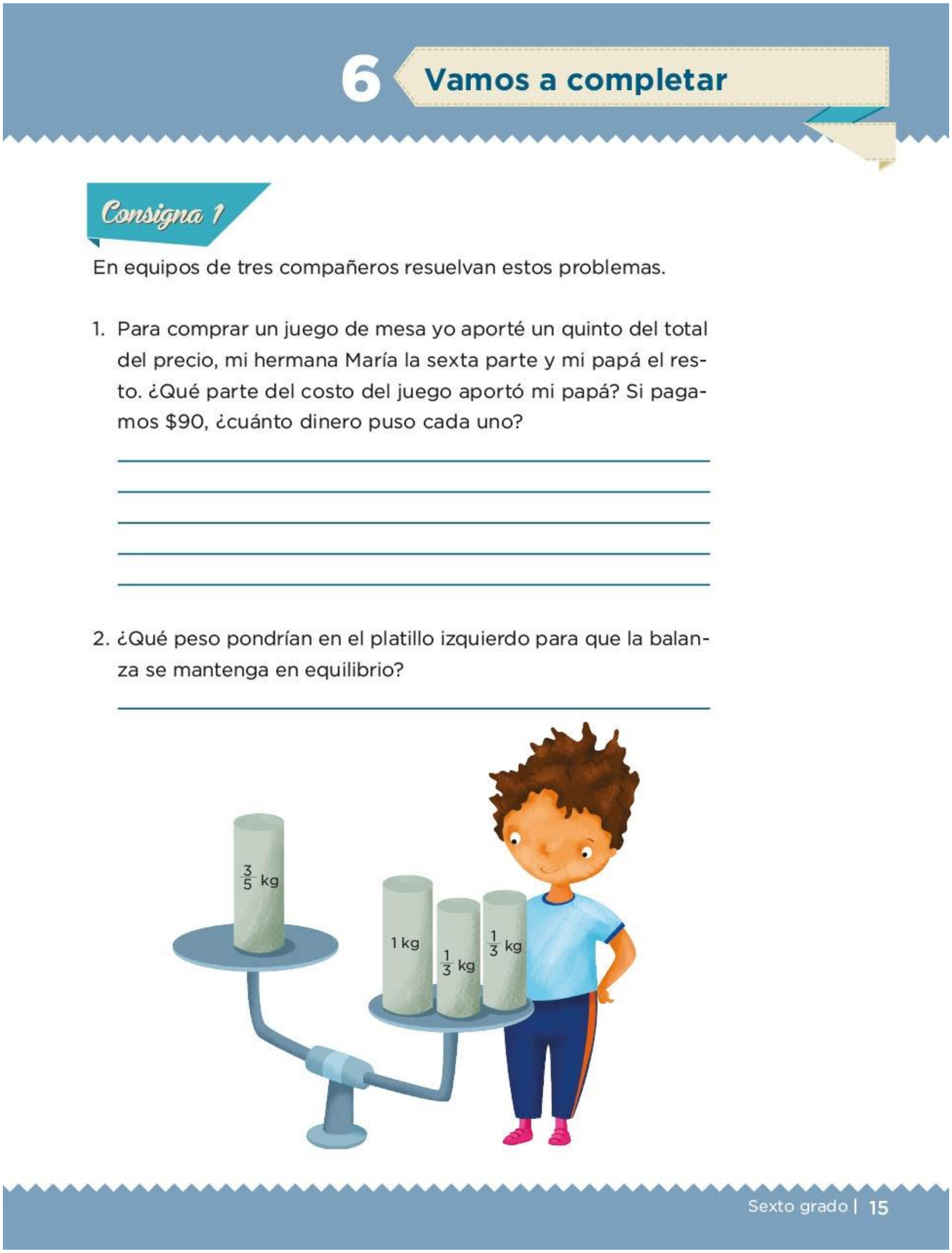
f) ¿Qué lugar ocupa México entre los países de América con base en su extensión territorial?

g) Muchas veces se dice que México tiene una superficie de 2 000 000 km². ¿Por qué creen que se diga eso?

Sexto grado | 67

IMAGEN 5. Continuación del desafío matemático 34 titulado “Nuestro país” presente en el libro de texto Desafíos Matemáticos sexto grado (SEP, 2019).

2019).


6 Vamos a completar

Consigna 1

En equipos de tres compañeros resuelvan estos problemas.

1. Para comprar un juego de mesa yo aporté un quinto del total del precio, mi hermana María la sexta parte y mi papá el resto. ¿Qué parte del costo del juego aportó mi papá? Si pagamos $90, ¿cuánto dinero puso cada uno?

2. ¿Qué peso pondrían en el platillo izquierdo para que la balanza se mantenga en equilibrio?

Sexto grado | 15

IMAGEN 6. Ejemplo de desafío matemático contextualizado en medición (valor monetario y masa) que trata tema de números fraccionarios presente en el libro de texto Desafíos Matemáticos sexto grado (SEP, 2019).

9 ANEXO 3

REGISTRO DE DESAFÍOS MATEMÁTICOS QUE COMBINAN EL TEMA DE MEDICIÓN Y NÚMEROS FRACCIONARIOS EN SU CONTEXTO

# DESA	NOMBRE DESAFÍO	EJE	INTENCIÓN DIDÁCTICA	ÁREA	VOLUMEN	LONGITUD	MASA	CAPACIDAD	VALOR	TIEMPO	ENERGÍA
3	Carrera de robots	Sentido numérico y pensamiento algebráico	Escribir, comparar y ordenar fracciones.			1					
6	Vamos a completar	Sentido numérico y pensamiento algebráico	Resolver problemas aditivos con números fraccionarios que tienen diferente denominador				1		1		
8	El equipo de caminata	Sentido numérico y pensamiento algebráico	Resolver problemas que impliquen la multiplicación entre una fracción o un decimal			1					
9	El rancho de Don Luis	Sentido numérico y pensamiento algebráico	Resolver problemas que impliquen la multiplicación entre una fracción o un decimal y un número natural, mediante			1					
10	La mercería	Sentido numérico y pensamiento algebráico	Resolver problemas multiplicativos con valores fraccionarios o decimales mediante procedimientos no formales			1			1		
19	Préstamos con intereses	Manejo de la información	Calculen porcentajes aplicando la correspondencia "por cada 100,n"						1		
20	Mercancía con descuento	Manejo de la información	Calculen porcentajes tomando como base el cálculo de 10 por ciento.						1		
21	¿Cuántas y de cuáles?	Manejo de la información	Interpreten adecuadamente la información que muestra una gráfica circular para responder algunas preguntas.						1		
22	¡Mmm…postres!	Manejo de la información	Completen la información de tablas con base en la proporciona una gráfica circular, respondan preguntas en las que recurran a la información de ambas y saquen conclusiones.						1		
24	¿Quién va adelante?	Sentido numérico y pensamiento algebráico	Reflexionen sobre la equivalencia y el orden entre expresiones fraccionarias y decimales.			1					
30	Tantos de cada 100	Manejo de la información	Resuelvan, con distintos procedimientos, problemas en los que se requiera calcular el porcentaje de una cantidad.						1		
31	Ofertas y descuentos	Manejo de la información	Encuentren formas de calcular el porcentaje que representa una cantidad respecto a otra.						1		
32	El IVA	Manejo de la información	Busquen maneras para calcular porcentajes mayores a 100%.						1		
33	Alimento nutritivo	Manejo de la información	Interpreten y usen información explícita e implícita contenida en tablas.				1	1			
35	¿Quién es el más alto?	Sentido numérico y pensamiento algebráico	Resuelvan problemas que implican comparar fracciones y decimales.			1					
44	Pulgada, pie y milla	Forma, espacio y medida	Determinen la operación que les permite encontrar la equivalencia entre las unidades de longitud del Sistema Inglés (pulgada, pie y milla) y las del Sistema Internacional de Unidades.			1					
45	Libra, onza y galón	Forma, espacio y medida	Elijan las operaciones que les permitan resolver problemas donde es necesario comparar unidades de peso y capacidad de los sistemas Inglés (libra, onza y galón) e Internacional.				1	1	1		
46	Divisas	Forma, espacio y medida	Calculen equivalencias entre divisas de diferentes países.						1		
55	Los jugos	Sentido numérico y pensamiento algebráico	Identifiquen la expresión con punto decimal de una fracción común sencilla (medios, cuartos y décimos).					1	1		
56	Los listones	Sentido numérico y pensamiento algebráico	Identifiquen que el dividir el numerador entre el denominador es una manera de hallar la expresión con punto decimal de una fracción.			1					
57	Los listones 2	Sentido numérico y pensamiento algebráico	Expresen fracciones no decimales usando una aproximación expresada con punto decimal.			1					
61	Circuito de carreras	Sentido numérico y pensamiento algebráico	Descubran la equivalencia entre las expresiones "a/b de n" y "a/b veces n"			1					
62	Plan de ahorro	Sentido numérico y pensamiento algebráico	Identifiquen y usen el significado de las expresiones "a/b de n", "a/b veces n" y "a/b x n"			1			1		
66	¿Conoces a pi?	Forma, espacio y medida	Obtengan la medida de la circunferencia y el diámetro de varios círculos y adviertan que el cociente del primero sobre el			1					
67	¿Para qué sirve pi?	Forma, espacio y medida	Usen la relación entre la circunferencia y el diámetro para resolver problemas.			1					
80	Repartos equitativos	Sentido numérico y pensamiento algebráico	Encuentren un procedimiento para dividir fracciones entre números naturales, en casos donde el numerador no es			1					
81	¿Cuánto cuesta un jabón?	Sentido numérico y pensamiento algebráico	Encuentren un procedimiento para dividir números decimales entre números naturales en un contexto monetario.						1		
				0	0	14	3	3	14	0	0
				AREA	VOLUMEN	LONGITUD	MASA	CAPACIDAD	VALOR	TIEMPO	ENERGÍA
			VECES EN QUE APARECE SOLA LA MAGNITUD			12	0	1	9		

Registro que muestra los desafíos matemáticos que combinan números fraccionarios y medición, así como cuál es la magnitud o magnitudes que se encuentran presentes en cada uno de éstos.