UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

SECRETARÍA ACADÉMICA

COORDINACIÓN DE POSGRADO

DOCTORADO EN EDUCACIÓN

Exploración en modalidad remota sobre la aplicación de la teoría de variación a la enseñanza y al aprendizaje de las matemáticas del bachillerato: El caso de la resolución general de ecuaciones diofánticas lineales

Tesis que para obtener el grado de:

Doctor en Educación Presenta:

DAVID SILVA BAUTISTA

Tutora:

Dra. Verónica Hoyos Aguilar

Ciudad de México, Diciembre de 2021

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Una premisa general de las matemáticas escolares es que, mediante la realización de alguna actividad didáctica, los alumnos aprenderán. La planificación de actividades que probablemente conduzcan a los resultados de aprendizaje previstos es un problema persistente en la práctica de los educadores de todos los niveles. La teoría de la variación (Marton, 2015) puede utilizarse para diseñar y analizar actividades de aprendizaje manteniendo el objetivo de aprendizaje en el centro.

Por otro lado, desarrollar un sentido estructural de las ecuaciones permite al estudiante realizar tareas algebraicas de formas más eficientes y menos propensas a errores, por lo que es relevante fortalecerlo desde los inicios de su formación.

Esta investigación tiene como eje central la exploración de la enseñanza de resolución en números enteros de ecuaciones diofánticas lineales con dos incógnitas (EDL) a través de la conjunción de la teoría de la variación de Marton (2015), las unidades de discernimiento de Leung (2012) y de la metodología del experimento de enseñanza (Cobb et al. 2003). Todo ello fue parte del estudio, diseño e implementación de las tareas de enseñanza-aprendizaje que aquí se diseñaron y que fueron implementadas con un grupo de estudiantes de primer año del bachillerato.

En un primer momento la investigación se enfoca en el estudio, análisis y diseño de un conjunto de tareas, es decir tareas de aprendizaje que requirien agrupar aspectos críticos (dimensiones de variación) del objeto de aprendizaje (resolución en números enteros de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas) que, a su vez, tomaron valores (no necesariamente numéricos) que se hicieron variar, de acuerdo a la teoría de la variación de Marton (2015), estos valores son llamados características críticas.

En un segundo momento el trabajo se centró en la puesta a prueba de las tareas de enseñanza-aprendizaje con un grupo de estudiantes de segundo semestre de bachillerato, empleando 10 experimentos de enseñanza (Cobb y Steffe 1983) agrupados en cinco unidades de discernimiento (Leung, 2012).

Todo lo elaborado por los alumnos en las hojas de trabajo (aprendizaje vivido) fue objeto de análisis y clasificación. En concreto, utilizamos la taxonomía SOLO (Biggs y Collis, 1982), para analizar y reflexionar sobre los resultados observables del aprendizaje de los estudiantes que los sitúa en niveles de complejidad cognitiva ascendente (preestructural, uniestructural, multiestructural, relacional, abstracta ampliada) que van de un conocimiento superficial a un conocimiento más profundo. En este trabajo los primeros cuatro niveles nos sirvieron para clasificar las respuestas de los estudiantes, con el fin de identificar refinamientos y validación de concepciones sobre el objeto de estudio, logradas o finalmente incluidas en el aprendizaje previsto.

Entre los resultados más destacables que se obtuvieron en este trabajo de tesis figuró la relación que hay en los objetos de aprendizaje previsto (el cual denota las capacidades que el profesor queria que los alumnos desarrollarán) y lo vívido (que manifiesta lo que realmente se aprendió desde el punto de vista de los estudiantes) inherentes a las tareas. En cuanto a la focalización de aspectos y características críticas de las ecuaciones diofánticas lineales con dos incógnitas, se logró un avance significativamente mayor. En resumen, los estudiantes lograron discernir:

1. Los coeficientes en una **ecuación diofántica lineal** con dos incógnitas
2. La existencia de soluciones enteras (el papel del M.C.D. de (a,b))
3. Como encontrar una solución particular (en el caso de que la haya)
4. El número de soluciones enteras que tiene una ecuación *(usando un modelo general)*

Además, fuera de una educación convencional (presencial), y como parte del andamiaje utilizado en este estudio (y tal vez debido a la pandemia por COVID-19) se aprovecharon recursos digitales a favor del aprendizaje, como el video tutorial (en YouTube) y la utilización de la geometría dinámica (geogebra).

Ultimamente es notorio el uso que los jóvenes le dan a los recursos digitales con los que cuentan, en particular vale la pena mencionar el acceso a videos tutoriales de matemáticas en YouTube. Por ejemplo, en esta investigación sucedió que los estudiantes fueron capaces de descargar y utilizar geogebra, accediendo a ello por medio de un video tutorial.

Los datos (aprendizaje vívido) sobre las respuestas de los estudiantes se obtuvieron a partir de las hojas de trabajo que se les entregaron. Algunas de ellas les fueron enviadas a través de sus correos electrónicos personales, de manera asincrónica. Otras, les fueron entregadas de manera presencial (en las instalaciones de la escuela). Las actividades de los estudiantes en relación con estas hojas de trabajo fueron desarrolladas en parejas y directamente en sus domicilios.

La presente tesis esta estructurada en cinco capítulos. El primero de ellos, da cuenta de algunos antecedentes y del estado de la enseñanza aplicando la teoría de la variación. Esto es, se revisó la literatura sobre trabajos de investigación anteriores que usan la teoría de la variación en la enseñanza de las matemáticas, en especial investigaciones cercanas a la resolución de ecuaciones, en álgebra.

En este primer capítulo de la tesis también se encuentran consideraciones curriculares en relación con las ecuaciones diofánticas lineales con dos incógnitas, consideraciones que es necesario tener en cuenta previo al diseño de tareas de aprendizaje para estudiantes de bachillerato.

En el segundo capítulo se presenta el planteamiento del problema de investigación, su justificación, objetivos y las metas o preguntas que la guiaron. De igual manera se despliegan las directrices teóricas que guiaron este trabajo de tesis y que brindaron el soporte para el diseño de las tareas de aprendizaje, las cuales interesa hacer notar que se llevaron a cabo con los estudiantes en ambientes híbridos de aprendizaje (papel y lápiz, Geogebra y videotutoriales).

El tercer capítulo aborda la metodología de la investigación. Las observaciones empiricas se llevaron a cabo con la participación de los estudiantes de segundo semestre de bachillerato de la Escuela Preparatoria Oficial Núm. 171 de la zona oriente del Estado de México, la fecha y lugar de realización de la experimentación, las herramientas para la recolección y los datos obtenidos.

Cabe señalar que las tareas se llevaron a cabo en situaciones escolares distintas a las convencionales debido a la pandemia por COVID-19. Por lo que, los estudiantes resolvieron estas tareas, algunas vía remota por correo eléctronico, otras presenciales y finalmente otras realizadas en parejas desde sus casas. Además, se describe a detalle cada una de las cinco unidades de discernimiento de acuerdo a la idea propuesta por Leung (2012) y bajo la aplicación de la teoría de la variación de Marton (2015) como fuente para el diseño y adaptación de las tareas utilizadas en este estudio exploratorio.

Este capítulo concluye con la descripción del proceso de diseño e instrumentación de las actividades propuestas, cuya finalidad fue la de generar aprendizajes matemáticos que son parte del currículum obligatorio en el bachillerato.

Se abordaron temas relacionados con las ecuaciones lineales con dos incógnitas y las propiedades de los números enteros. Específicamente, se trabajo en torno al desarrollo del sentido estructural y la comprensión de la resolución en números enteros de las ecuaciones diofánticas lineales con dos incógnitas.

En el cuarto capítulo se presentan los datos obtenidos mediante la implementación de las actividades de las que se describio su manufactura con detalle en el capítulo anterior; se detallan el desarrollo y avance de los estudiantes a partir de las tareas que se instrumentaron durante las cinco unidades de discernimiento.

También se presenta el análisis efectuado a partir de las respuestas escritas de los alumnos en las hojas de trabajo; se revisaron y discutieron las respuestas obtenidas de las preguntas que se plantearon durante la elaboración de las tareas.

Además, se muestran imágenes de las respuestas obtenidas de los estudiantes en las hojas de trabajo y se resalta la categorización de las respuestas obtenidas mediante la Taxonomia SOLO.

En la última sección de este cuarto capítulo se presenta un resumen de los principales resultados obtenidos en la experimentación, soporte empírico de esta tesis de doctorado.

En el quinto capítulo se abordan las conclusiones que se derivan de todo el estudio exploratorio que se realizó en este trabajo de tesis. Se señalan los posibles aportes, y las rutas que podrían seguir siendo exploradas en relación con el tema y con la teoría que aquí se eligió abordar.

Finalmente, se incluyó el Anexo I, en donde se presenta el guión de las tareas de aprendizaje de las cinco unidades de discernimiento y las preguntas de reflexión que se plantearon a los estudiantes en las hojas de trabajo.

CAPITULO I. ANTECEDENTES

1.1 ORIGEN DE LA ENSEÑANZA CON VARIACIÓN

La enseñanza de Bianshi (es decir, cambiando o variando), o ejercicio de Bianshi, es visto como un enfoque básico en los paises asiaticos, donde se ha utilizado de manera regular en la instrucción dentro del aula de matemáticas (Li, Peng & Song, 2011).

La búsqueda de múltiples soluciones a un problema, la aplicación de un método o la estrategia matemática para resolver un conjunto de problemas interconectados y la variación de un problema en múltiples problemas son habilidades básicas valoradas por la mayoría de los profesores de matemáticas en China.

La educación matemática china es tradicional, esto es, el conocimiento es más importante que la habilidad, repetición y muchos ejercicios; educación tradicional produce maestros tradicionales (Zhang, 2005). Aunque los maestros chinos no ven la repetición y la comprensión como procesos ajenos sino más bien interconectados y complementarios (Lai & Murray, 2012). Estos procesos de compresión y repetición son fundamentales para la enseñanza con variación.

La enseñanza con variación es una práctica autóctona en la enseñanza de las matemáticas; esta tiene sus bases en el taoísmo y confucianismo (Sun, 2011b). De hecho, del confucianismo se deriva la noción de variación.

Hay tratados chinos antiguos como el texto nueve, capítulos de artes aritméticas, donde se aprecia el uso de la enseñanza con variación (Huang & Li, 2017). Aunque no es exactamente claro cuándo fue compilado, los investigadores coinciden que fue en la Dinastía Han (del 206 a.c al 220 d.c). Este libro incluye 246 problemas con respuestas y reglas generales de cómo resolver problemas (Cai & Nie, 2007). La información sugiere que la enseñanza de las matemáticas y la resolución de problemas han sido importantes en China desde tiempos antiguos.

La práctica de la variación en China es llamada Bianshi, donde *Bian* representa *cambio* y *shi* significa *forma* (Sun, 2011b). La misma definición etimológica indica que la enseñanza con variación se basa en la idea del cambio, ejemplos y ejercicios variantes para ayudar a los estudiantes a desarrollar una comprensión profunda de los conceptos y de los métodos matemáticos.

La enseñanza y aprendizaje con variación está ampliamente diseminada en China, como lo refleja un viejo proverbio chino que reza: “sólo comparando podemos distinguir” (Huang & Li, 2017). Esta forma de enseñar ha sido aplicada conscientemente o intuitivamente por mucho tiempo y casi se ha convertido en la rutina de enseñanza de los maestros chinos (Li et al., 2011).

La enseñanza con variación, aunque se considera desarrollada en China, está fuertemente soportada por varias teorías occidentales de aprendizaje y enseñanza. La teoría de Marton ofrece un fundamento epistemológico y un soporte conceptual para la teoría de enseñanza con variación (Li et al., 2011).

Al tener la enseñanza con variación fundamentos teóricos se puede considerar como una perspectiva de la didáctica de las matemáticas. Esta estrategia considerada originaria de China permite hacer conexiones entre conceptos y soluciones, además de entender la estructura matemática de los mismos y de los fundamentos de los algoritmos lo cual enriquece el desarrollo del curriculum (Sun, 2011b).

Para finalizar esta sección cabe señalar que la enseñanza con variación no es una característica exclusiva de la educación matemática en China. Por ejemplo, en el artículo “*Mathematics Lessons in Korea: Teaching with Systematic Variation”* (Park, 2006) se describen diferentes formas de variación en el salón de clases de tres escuelas coreanas. Aunque también es importante notar que la variación en ejercicios estructurados cambia de país a país (Sun, 2011b).

1.2 ADOPTANDO DOS CONCEPTOS DE VARIACIÓN, ES DECIR, VARIACIÓN CONCEPTUAL Y VARIACIÓN PROCEDIMENTAL

En la educación matemática china se da gran importancia a la comprensión del conocimiento y se usan variaciones para profundizar esta misma comprensión en la búsqueda de la esencia del nuevo conocimiento. La variación se refiere a la representación matemática de objetos matemáticos desde diferentes perspectivas, cambiando los aspectos no esenciales y manteniendo los aspectos esenciales (Tu & Shen, 2010).

En el aprendizaje de conceptos matemáticos a los estudiantes se les proporciona una serie de problemas en los cuales las características esenciales del concepto matemático se mantienen mientras que las características no esenciales son cambiadas (Cai & Nie, 2007).

La esencia de un concepto puede ser resaltado contrastando formas estándar y no estándar, y las interpretaciones incorrectas del mismo pueden ser corregidas usando contraejemplos (Li et al., 2011).

Enseñar entonces significa construir espacios apropiados de variación (Marton y Booth, 1997). La idea central de la enseñanza con variación es resaltar las características esenciales de un concepto a través de variaciones de características no esenciales (Lai & Murray, 2012).

La práctica de la variación ha logrado una atención considerable debido a la importancia de las variaciones como condiciones necesarias para el aprendizaje profundo (Sun, 2011b). Hay dos tipos de variación que son útiles para una comprensión significativa. Una de ellas es llamada variación conceptual y la otra es llamada variación procedimental (Park, 2006). A continuación, se describen ambas.

La variación conceptual se divide en dos tipos. En el tipo 1 se varía la connotación de un concepto, el objetivo de esta variación es proporcionar a los estudiantes diferentes ejemplos del mismo concepto desde diferentes perspectivas. En el tipo 2 consiste en resaltar las características críticas de un concepto contrastando con contraejemplos y no ejemplos.

En la variación procedimental se ayuda a los estudiantes a obtener el conocimiento paso por paso, desarrollar progresivamente su experiencia en la resolución de problemas y formar un conocimiento bien estructurado. A continuación, se verán algunos ejemplos.

1.3 EJEMPLOS DE VARIACIÓN CONCEPTUAL Y PROCEDIMENTAL

Ejemplo 1. Al explicar el concepto de triángulo no es un suficiente mostrar únicamente ejemplos de triángulos sino además dar ejemplos de otros polígonos, el objetivo es que el alumno determine cuáles son las características o atributos esenciales del triángulo al contrastarlo con otros polígonos.

Ejemplo 2. Al estudiar el concepto de ecuación al estudiante se le provee diversas expresiones (ejemplos variantes) y se le pide que señale cuáles son ecuaciones y cuáles no.

Los estudiantes deben distinguir las características esenciales de una ecuación, en este caso la igualdad (=) y la(s) variable(s), (ver Tabla 1.1).

Expresiones que son ecuaciones	Expresiones que no son ecuaciones
$\mathbf{5x = 10}$	$2x - 4 > 6$
$\mathbf{3x + 4 = 7}$	$3 + 4 = 7$
$\mathbf{x^2 + y^2 = 4}$	$5 + 9$
$\mathbf{x^2 - 4 = 0}$	
$\mathbf{x = 6}$	

Tabla 1.1. Ejemplos variantes para distinguir las características esenciales de una ecuación

Los ejemplos fueron tomados del articulo Teaching Algebraic Equations with Variation in Chinese Classroom (Li et al., 2011).

En la tabla 2 podemos observar diferentes expresiones (numéricas y algebraicas), algunas son ecuaciones y otras no. A través de la comparación de ejemplos y contraejemplos los estudiantes pueden comprender mejor las características que definen a una ecuación.

Ejemplo 3. Al explicar la definición de altura de un triángulo no es suficiente con mostrar únicamente la forma estándar para lograr que los alumnos comprendan el concepto de altura de un triángulo (ver figura 1.1).

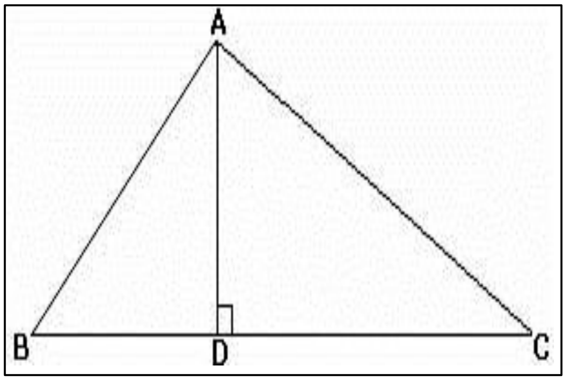


Figura 1.1. Ejemplo estándar de altura en un triángulo

En este ejemplo es importante para la clarificación del concepto variar características no esenciales, en este caso la forma del triángulo, la posición o el vértice, le ayuda al estudiante a comprender el concepto de altura (ver figura 1.2).

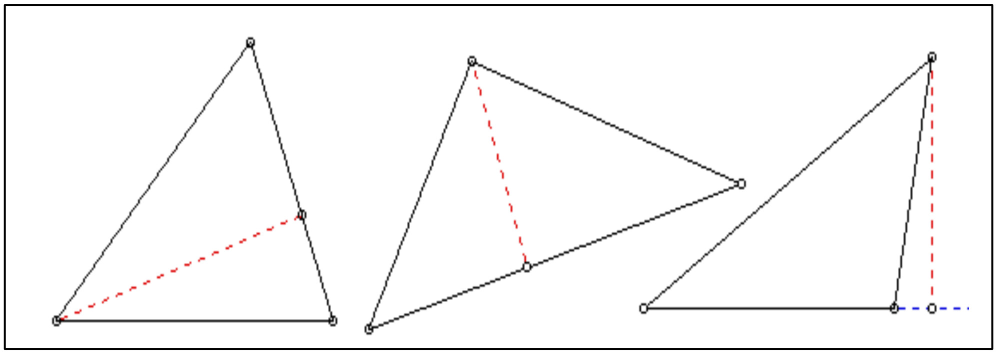


Figura 1.2. Se muestra alturas en diferentes tipos de triángulo y trazadas desde distintos vértices

En el caso de los profesores de matemáticas de Shanghái, en la explicación de algún concepto matemático usan al menos tres ejemplos, variando el contexto o el grado de dificultad, los maestros desafían a los alumnos a pensar y desarrollar un entendimiento más profundo del concepto (Lim, 2007).

Ejemplo 4. Para entender la naturaleza positiva de la raíz cuadrada, a los estudiantes se les proporciona los siguientes ejemplos variantes del concepto de raíz cuadrada, aumentando su complejidad (ver Tabla 1.2).

Nivel de dificultad	Ejemplo	Descripción del nivel
1	$\sqrt{9}$ =?	Ejemplo concreto cuya raíz cuadrada es directa.
2	$\sqrt{3^2}$ =?	Ejemplo concreto pero el radicando es un cuadrado perfecto.
3	$\sqrt{(-3)^2}$ =?	Ejemplo concreto que requiere el concepto de valor absoluto.
4	$\sqrt{x^2}$ =?	Ejemplo algebraico que requiere el concepto de valor absoluto.
5	$\sqrt{(x-3)^2}$ =?	Ejemplo algebraico más general que requiere el concepto de valor absoluto.

Tabla 1.2. Ejemplos variantes del concepto de raíz cuadrada. Ejemplos tomados del articulo *Problem solving in Chinese mathematics education* (Cai & Nie, 2007)

El objetivo de la variación conceptual es proveer a los estudiantes, los conceptos matemáticos desde múltiples perspectivas y experiencias. En el caso de la variación procedimental, su objetivo es proveer un proceso de formación etapa por etapa en el cual la experiencia de los estudiantes en la resolución de problemas se manifiesta por la variación de problemas y en la variedad de transferencia de estrategias (Lai & Murray, 2012).

Los docentes chinos utilizan la variación procedimental con el uso de diversos métodos de solución para un problema dado, esta variación da a los estudiantes una amplia oportunidad de trabajar y perfeccionar sus habilidades matemáticas (Lim, 2007). La variación procedimental se deriva de tres formas de resolución de problemas:

- *Un problema múltiples cambios* (OPMC, One Problem, Multiple Changes): se extiende el problema original variando las condiciones, cambiando los resultados y haciendo generalizaciones.
- *Un problema múltiples soluciones* (OPMS, One Problem, Multiple Solutions): variando los diferentes procesos de solución de un problema y asociando diferentes métodos de solución.
- *Múltiples problemas una solución* (MPOS, Multiple Problems, One Solution): aplicar el mismo método a problemas similares (Lai & Murray, 2012).

1.4 PERSPECTIVAS TEÓRICAS DE LA ENSEÑANZA CON VARIACIÓN

Se han desarrollado hasta el momento dos perspectivas teóricas con respecto a la enseñanza con variación, una desarrollada por el investigador Federence Marton llamada Teoría de *Variación del Aprendizaje* (TVA), y el *Bianshi* que es la enseñanza con variación desde el enfoque chino, cuyo principal representante es Gu Ling Yuan. Ambas corrientes tienen muchas similitudes, y también presentan diferencias.

Por ejemplo, la teoría de variación del aprendizaje no es exclusiva para matemáticas y se centra en el aprendizaje de las diferencias mientras que Bianshi es exclusivamente para matemáticas (Huang & Li, 2017).

Muestra de ello es la aplicación de la teoría de variación en un área diferente de las matemáticas, en este caso, aplicada a la administración, se puede consultar el artículo: Learning Through the Variation Theory: A Case Study de Eddie W. L. Cheng (2016).

En la teoría de variación de Marton, se proponen cuatro patrones de variación llamados: contraste, generalización, separación y fusión. Estos patrones de variación son elementos fundamentales usados para organizar la experiencia de variación y ellos generan interacciones entre los estudiantes y el objeto de aprendizaje. Más que patrones se consideran tipos de interacción de variación que pueden construir experiencias matemáticas (Leung, 2012). Veamos cada uno de ellos, de acuerdo a Leung (2012).

Contraste: es discernir si algo satisface una cierta condición o no. Por otro lado, para comprender una idea matemática, a menudo se recurre a encontrar contra ejemplos para discernir las características críticas de la idea. Ejemplo, cuando los estudiantes aprenden el concepto de ecuación, el maestro debe dar ejemplos de expresiones que no sean ecuaciones.

Separación: es la conciencia generada mediante un contraste refinado sistemático que se obtiene variando deliberadamente o no variando ciertos aspectos con el objetivo de distinguir las partes invariantes del todo. Ejemplo cuando el alumno reconoce las características de una ecuación lineal con una variable, al compararla con otros tipos de ecuaciones (lineal con dos variables, cuadrática, cúbica, etc.)

Generalización: la generalización es una interacción de variación que es de naturaleza inductiva. Cuando el mismo patrón invariante surge en diferentes situaciones bajo contraste y separación, este patrón puede descontextualizarse. La generalización es un contraste útil para explorar si un patrón observado puede ocurrir mientras que ciertos varían.

Es una verificación y una conjetura que verifica la validez general de un patrón separado que a menudo es un objetivo de las exploraciones matemáticas. Ejemplo, al resolver varias ecuaciones lineales en una variable el alumno reconoce que hay un algoritmo general para resolver estas ecuaciones.

Fusión: integra características críticas o dimensiones de variación en un todo bajo co-variación simultánea. Al fusionar las características críticas separadas o las dimensiones de la variación, puede aparecer un concepto completo. Ejemplo al resolver problemas de aplicación de las ecuaciones lineales el alumno integra tanto el concepto de ecuación (al construirla) y la forma de resolverla (algoritmo).

1.5 REVISIÓN DE ALGUNOS ESTUDIOS SOBRE EL USO DE LA TEORÍA DE LA VARIACIÓN

Los estudios que se presentan a continuación y que han sido analizados en esta sección muestran la aplicación de la teoría de la variación en diferentes contextos y para diferentes propósitos. El mensaje general es que la Teoría de la Variación ofrece una perspectiva tan intuitivamente universal (Kullberg, Runesson & Marton 2017) que se puede aplicar de manera útil a cualquier situación de instrucción con la expectativa de que su utilización y visión seguirá. La efectividad de la teoría de la variación como herramienta para analizar los enfoques pedagógicos presenta al menos tres implicaciones:

- La teoría de la variación sistematiza, una inclinación pedagógica natural (posiblemente inevitable) para variar aspectos del objeto de aprendizaje.
- La estructura sistemática de la teoría de la variación y el vocabulario asociado proporcionan una herramienta poderosa para el análisis de la instrucción.
- La aplicabilidad productiva de la Teoría de la Variación a los propósitos educativos proporciona evidencia de la utilidad general de la Teoría de la Variación.

En el estudio llamado ***Desarrollo del sentido estructural en alumnos universitarios mediante el uso de la Teoría de la Variación en el manejo de expresiones algebraicas racionales,*** Ascencio y Eccius-Wellmann (2019) señalan que desarrollar un sentido estructural permite al alumno realizar tareas algebraicas de formas más eficientes y menos propensas a errores, por lo que enfatizan que es relevante fortalecerlo.

Para esta investigación las autoras utilizaron el sentido estructural, como lo llama Vega-Castro (2013), el sentido estructural es un conjunto de capacidades necesarias para trabajar flexiblemente con expresiones algebraicas, que implican el uso combinado de conocimiento conceptual y procedimental (p.167).

De tal manera que, ante la revisión de trabajos llevada a cabo por las autoras (Eccius-Wellmann, 2011; Eccius-Wellmann, 2013, Chinnappan y Forrester 2014 y Godino et al. 2015) que evidencian la necesidad de que los profesores identifiquen maneras más eficientes de proceder en la resolución algebraica y la carencia de que esas formas eficientes de proceder se promuevan en la formación del estudiante, así como la escasez de propuestas para desarrollar el sentido estructural, motivó la realización de la investigación de Ascencio y Eccius-Wellman (2019), el objetivo de las autoras fue el desarrollo del sentido estructural en estudiantes universitarios de nuevo ingreso a las carreras administrativas (p.164).

La investigación la hicieron mediante la elaboración e implementación de actividades de enseñanza-aprendizaje, específicamente en estructuras algebraicas. En la delimitación de su estudio, las autoras trabajaron con los temas de simplificación y operaciones con expresiones algebraicas racionales y sus prerrequisitos.

Ascencio y Eccius-Wellman (2019), eligieron como fundamento teórico pedagógico para orientar la construcción de las actividades de enseñanza-aprendizaje, la teoría de la variación de Marton (2015). Su enfoque en los contrastes y variaciones se estima adecuado para promover en el alumno el análisis de las estructuras algebraicas antes de trabajar con ellas, como sugieren Banerjee y Subramaniam (2005). Ellos consideran que desarrollar un sentido estructural de las expresiones requiere el uso de procedimientos y reglas en situaciones y contextos variados, que permitan encontrarle el sentido a las relaciones entre los componentes de diversas expresiones que compartan los mismos aspectos estructurales.

Las autoras realizaron un cuasi-experimento (dado que los participantes no fueron elegidos al azar) con siete grupos de nuevo ingreso a las carreras administrativas de la universidad sede del estudio, que cursaban la materia de Álgebra. Los alumnos de cuatro grupos, 72 en total, trabajaron con las actividades diseñadas para fomentar el sentido estructural con base en la teoría de la variación (grupos experimentales). Los de los otros tres grupos, 62 en total, trabajaron de forma habitual, que no contempla actividades basadas en dicha teoría (grupos de control).

Los reactivos con los que ellas valoraron el sentido estructural en los estudiantes, los mismos antes y después de realizar las actividades de enseñanza-aprendizaje, incluyeron los temas de productos notables, factorización, simplificación y operaciones con expresiones algebraicas racionales, los cuales las autoras indican que forman parte de la currícula previa a la universidad, pero se retoman en la asignatura de algebra que se cursa en el primer año de universidad para homogeneizar los conocimientos de los alumnos. Las actividades diseñadas por Ascencio y Eccius-Wellman (2019), incluyeron entonces temas previos (elementos neutros, jerarquía de las operaciones, conformación de los términos en el álgebra, leyes de los exponentes y operaciones con expresiones algebraicas), para promover el desarrollo del sentido estructural a lo largo de más clases y crear un andamiaje en el aprendizaje, en el que los nuevos conocimientos se contrasten con los anteriores gradualmente y en todos ellos se haya fomentado el desarrollo del sentido estructural.

Estas autoras asignaron valores numéricos que ponderaron el sentido estructural mostrado según la complejidad de las estructuras y subestructuras. A continuación, se enlistan y explican los descriptores, acompañados por la ponderación asignada (p.177).

- SE1 Reconoce una estructura familiar
  SE1a en su forma más simple (1 punto)
- SE2 Trata con un término compuesto (subestructura) como una única entidad y reconoce una estructura familiar en una forma más compleja
- SE2a donde el término compuesto (subestructura) contiene un producto o potencia pero no una suma o resta (2 puntos)
- SE2b donde el término compuesto (subestructura) contiene una suma o resta y posiblemente también un producto o potencia (3 puntos)
- SE3 Elige manipulaciones apropiadas para hacer el mejor uso de una estructura
- SE3a en su forma más simple (4 puntos)
- SE3b donde el término compuesto (subestructura) contiene un producto o potencia pero no una suma o resta (5 puntos)
- SE3c donde el término compuesto (subestructura) contiene una suma o resta y posiblemente también un producto o potencia (6 puntos)
- SE4 Distingue subestructuras dentro de una entidad y reconoce relaciones entre ellas (evita errores de interpretación y uso de las relaciones dentro de la estructura)
- SE4a Las subestructuras forman parte de la misma expresión polinómica o similar (expresión en un solo nivel). Opera sin error pero no contesta la pregunta (7 puntos)
- SE4b Las subestructuras forman parte de diferentes expresiones polinómicas o similares (expresión en dos niveles). Opera sin error pero no contesta la pregunta (8 puntos)
- SE4c Las subestructuras forman parte de la misma expresión polinómica o similar (expresión en un solo nivel). Opera sin error y contesta la pregunta (9 puntos)
- SE4d Las subestructuras forman parte de diferentes expresiones polinómicas o similares (expresión en dos niveles). Opera sin error y contesta la pregunta (10 puntos)

Ascencio y Eccius-Wellman (2019) señalan que los contenidos de las actividades fueron seleccionados y secuenciados para promover el desarrollo del sentido estructural a la par del aprendizaje del tema, al fomentar el análisis de las estructuras de las expresiones algebraicas antes de trabajar con ellas.

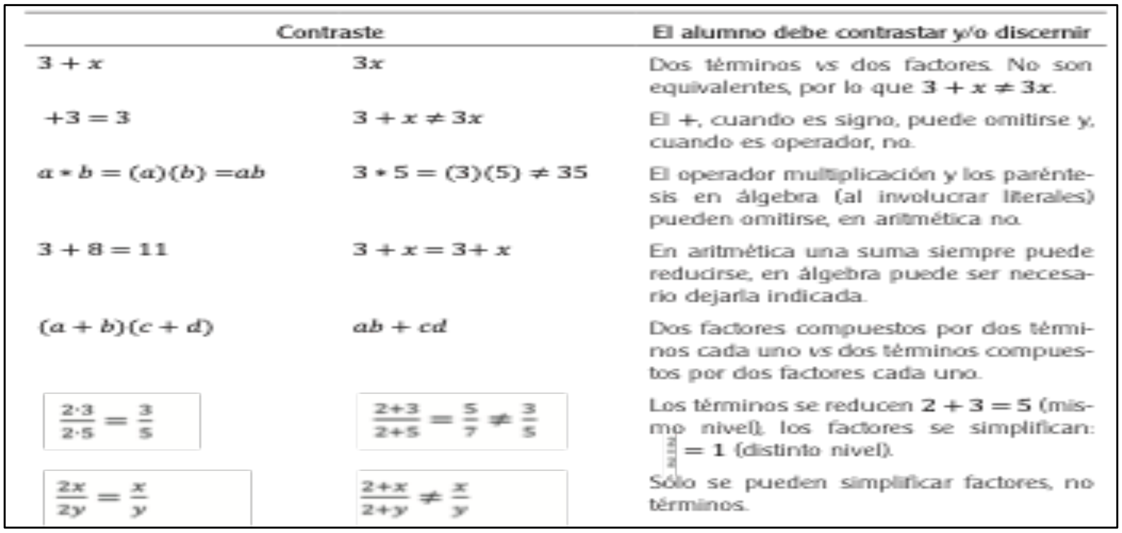
Cada actividad se afinó para incluir aquellos aspectos críticos que se manifestaron en la evaluación diagnóstica y que no habían sido previamente considerados.

Para llevar a cabo la prueba de la efectividad de las actividades diseñadas, las autoras comenzaron por administrar una evaluación diagnóstica (pre-test), con lápiz y papel, en los siete grupos, el primer día de clases. Posteriormente trabajaron con las actividades en nueve clases no consecutivas, cuando dichas actividades coincidían con el temario general de la materia.

Ellas señalan que se fomentó el análisis de las estructuras y los procesos algebraicos mediante la observación de las diferencias y similitudes entre, por ejemplo, pares o grupos de expresiones algebraicas y sus correspondientes simplificaciones u operaciones, a través de patrones de variación propuestos con ese fin, como los mostrados en las tablas 1 a 3. Para ello usaron tanto el pizarrón como actividades impresas para contestarse de forma individual o cooperativa, todo supervisado por el docente para que los estudiantes se enfocaran en los aspectos críticos correspondientes.

En la clase posterior a la última actividad ellas aplicaron una segunda evaluación (pos-test), idéntica a la diagnóstica. En ambas, cada procedimiento de respuesta de cada alumno fue clasificada por las autoras según la guía de descriptores diseñada (mencionadas anteriormente) para este estudio, mediante la cual ellas valuaba el sentido estructural manifestado por la forma particular de proceder, según la ponderación de dichos descriptores.

En la tabla 1.3, las autoras presentan el diseño de algunos contrastes básicos, que les permitieron a los estudiantes lograr una mejor transición del aritmética al álgebra, al identificar algunas diferencias entre ellas, así como la diferencia entre término y factor y entre reducir y simplificar, con ejemplos y contraejemplos.



Contraste		El alumno debe contrastar y/o discernir
$3 + x$	$3x$	Dos términos *vs* dos factores. No son equivalentes, por lo que $3 + x \neq 3x$.
$+3 = 3$	$3 + x \neq 3x$	El $+$, cuando es signo, puede omitirse y, cuando es operador, no.
$a * b = (a)(b) = ab$	$3 * 5 = (3)(5) \neq 35$	El operador multiplicación y los paréntesis en álgebra (al involucrar literales) pueden omitirse, en aritmética no.
$3 + 8 = 11$	$3 + x = 3 + x$	En aritmética una suma siempre puede reducirse, en álgebra puede ser necesario dejarla indicada.
$(a + b)(c + d)$	$ab + cd$	Dos factores compuestos por dos términos cada uno *vs* dos términos compuestos por dos factores cada uno.
$\frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 5} = \frac{3}{5}$	$\frac{2+3}{2+5} = \frac{5}{7} \neq \frac{3}{5}$	Los términos se reducen $2 + 3 = 5$ (mismo nivel), los factores se simplifican: $\frac{2}{2} = 1$ (distinto nivel).
$\frac{2x}{2y} = \frac{x}{y}$	$\frac{2+x}{2+y} \neq \frac{x}{y}$	Sólo se pueden simplificar factores, no términos.

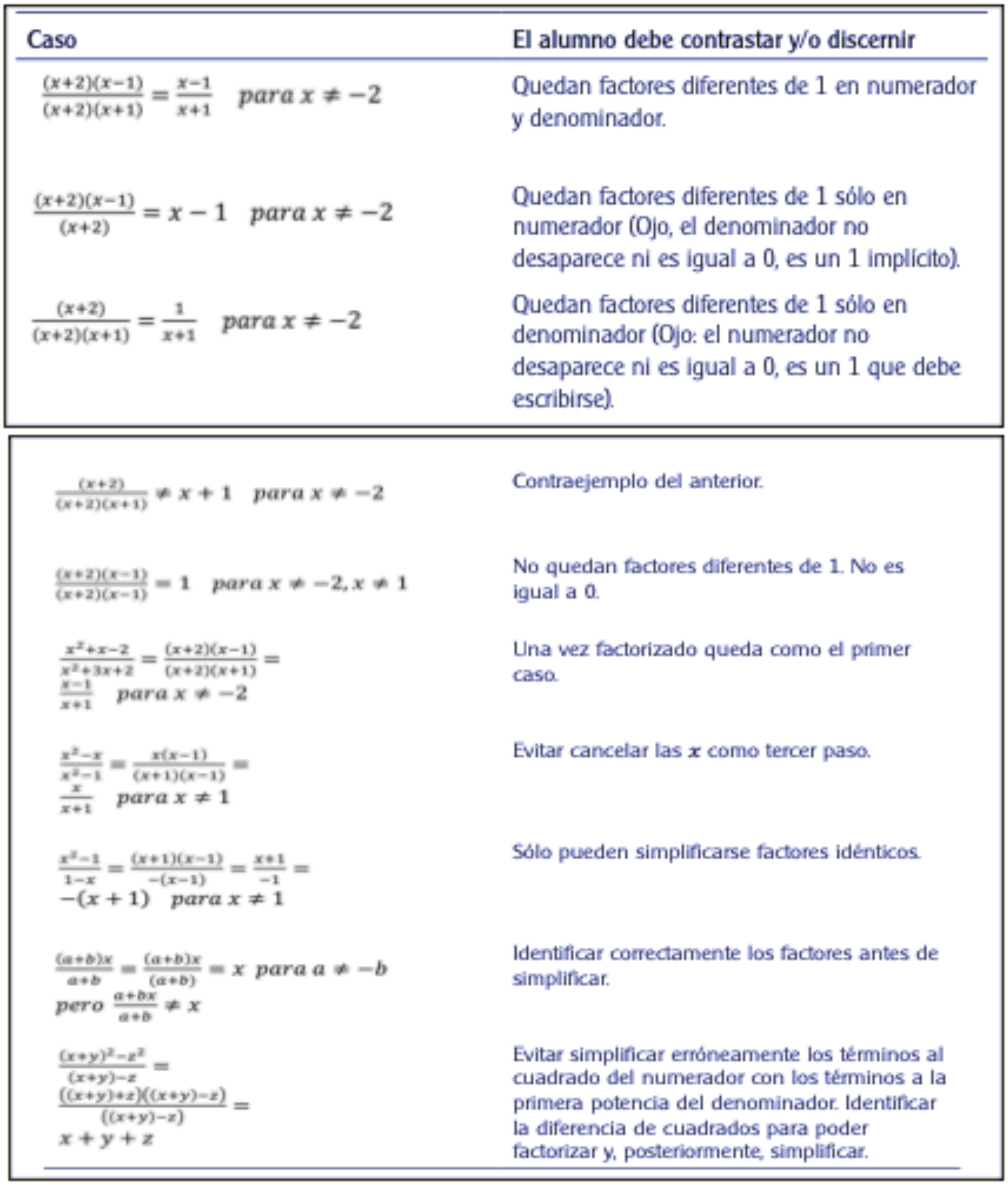
Tabla 1.3. Contrastes básicos

En la tabla 1.4 las autoras identificaron las subestructuras y realizaron factorizaciones. Por ejemplo utilizaron el trinomio cuadrado perfecto como estructura principal. Las variantes de los sub-términos (subestructuras) se basaron en los descriptores de Hoch y Dreyfus (2006); la capacidad de ver una expresión algebraica como una entidad, el reconocer una expresión algebraica como una estructura previamente conocida, sus sub-es-tructuras, las conexiones mutuas entre estructuras, cuáles manipulaciones son posibles y, finalmente, cuál manipulación es más eficiente (p.167).

$a^2 + 2ab + b^2$	a	b	$(a + b)^2$
$m^6 + 2m^3n^4 + n^8$	m^3	n^4	$(m^3 + n^4)^2$
$\frac{4}{9}x^2 + 2x + \frac{9}{4}$	$a = \frac{2}{3}x$	$b = \frac{3}{2}$	$\left(\frac{2}{3}x + \frac{3}{2}\right)^2$
$(a + b)^2 - 10(a + b) + 25$	$(a + b)$	5	$\left((a + b) - 5\right)^2$
$49w^2 - 14w(xy + z) + (xy + z)^2$	$7w$	$(xy + z)$	$\left(7w - (xy + z)\right)^2$

Tabla 1.4. Constraste de distintos tipos de subestructuras

Dado que al realizar una simplificación de expresiones algebraicas racionales se presentan diversos procedimientos, tipos de respuestas y posibilidades de error, las autoras realizaron una actividad en la que estos se contrastaron, como se ilustra en la tabla 1.5.



Caso	El alumno debe contrastar y/o discernir
$\frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x+1)} = \frac{x-1}{x+1} \quad para\ x \neq -2$	Quedan factores diferentes de 1 en numerador y denominador.
$\frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)} = x - 1 \quad para\ x \neq -2$	Quedan factores diferentes de 1 sólo en numerador (Ojo, el denominador no desaparece ni es igual a 0, es un 1 implícito).
$\frac{(x+2)}{(x+2)(x+1)} = \frac{1}{x+1} \quad para\ x \neq -2$	Quedan factores diferentes de 1 sólo en denominador (Ojo: el numerador no desaparece ni es igual a 0, es un 1 que debe escribirse).
$\frac{(x+2)}{(x+2)(x+1)} \neq x + 1 \quad para\ x \neq -2$	Contraejemplo del anterior.
$\frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-1)} = 1 \quad para\ x \neq -2, x \neq 1$	No quedan factores diferentes de 1. No es igual a 0.
$\frac{x^2+x-2}{x^2+3x+2} = \frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x+1)} =$ $\frac{x-1}{x+1} \quad para\ x \neq -2$	Una vez factorizado queda como el primer caso.
$\frac{x^2-x}{x^2-1} = \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} =$ $\frac{x}{x+1} \quad para\ x \neq 1$	Evitar cancelar las x como tercer paso.
$\frac{x^2-1}{1-x} = \frac{(x+1)(x-1)}{-(x-1)} = \frac{x+1}{-1} =$ $-(x+1) \quad para\ x \neq 1$	Sólo pueden simplificarse factores idénticos.
$\frac{(a+b)x}{a+b} = \frac{(a+b)x}{(a+b)} = x \ para\ a \neq -b$ $pero\ \frac{a+bx}{a+b} \neq x$	Identificar correctamente los factores antes de simplificar.
$\frac{(x+y)^2-z^2}{(x+y)-z} =$ $\frac{((x+y)+z)((x+y)-z)}{((x+y)-z)} =$ $x + y + z$	Evitar simplificar erróneamente los términos al cuadrado del numerador con los términos a la primera potencia del denominador. Identificar la diferencia de cuadrados para poder factorizar y, posteriormente, simplificar.

Tabla 1.5. Constraste de casos en simplificación de expresiones algebraicas racionales

Los resultados que presentaron scencio y Eccius-Wellman (2019), en esta investigación fueron que se observó un incremento del nivel de sentido estructural estadísticamente superior en los grupos experimentales con respecto a los grupos de control y se comprobaron que es posible desarrollar, en mayor medida, el sentido estructural en los alumnos, al incluir, en las actividades que realizan, contrastes y variaciones elegidos con esa intención.

Finalmente, las autoras señalan que las actividades usadas en la intervención con los grupos experimentales, basadas en la Teoría de la Variación (Marton, 2015) y el andamiaje que se promueve en la enseñanza con variación china (Gu et al., 2004), que incluyeron contrastes, variaciones y andamiajes cuidadosamente planeados, mostraron ser significativamente más útiles para integrar intencionadamente el desarrollo del sentido estructural dentro del aprendizaje de diversos temas algebraicos, en comparación con actividades que no tuvieron ese diseño.

Aunque los resultados fueron obtenidos al trabajar con expresiones algebraicas racionales y sus pre-rrequisitos, ellas consideran que pueden conseguirse resultados similares al elaborarse y probarse actividades con diseños semejantes a los usadas en esta investigación, para diversos temas algebraicos, por lo que el aporte a la matemática educativa abarcaría el álgebra en general, no sólo las expresiones mencionadas.

En el estudio llamado ¨***La adopción de la teoría de la variación en el aula: efecto sobre el logro algebraico de los estudiantes y la motivación para aprender***¨ de Jing, Tarmizi, Abu & Aralas (2017), señalan *que* el análisis de las clases impartidas en las regiones de Asia Oriental que obtienen buenos resultados en los Estudios Internacionales de Matemáticas y Ciencias, como Corea del Sur, Hong Kong y Japón, demostró que los profesores de las aulas de matemáticas presentaron de manera sistemática las características del contenido teniendo en cuenta la variación y las capacidades de los alumnos.

Los autores mencionan que estudios recientes (*Li, Peng & Soon, 2011*, *Hiebert & Handa 2004)* han demostrado que la integración de la teoría de la variación en la enseñanza en el aula mejora significativamente el rendimiento de los alumnos.

Teniendo en cuenta los éxitos anteriores en la integración de la teoría de la variación en el aula en otros países, ellos decidieron examinar el efecto de la teoría de la variación en la enseñanza y el aprendizaje del álgebra en una escuela de Malasia.

El objetivo del estudio que estos autores propusieron fue examinar la eficacia del aprendizaje del álgebra utilizando Variation Teaching Strategy (VTBS), es decir la estrategia de enseñanza con variación, en comparación con la Conventional Teaching Strategy (CTS), que quiere decir estrategia de enseñanza convencional en el rendimiento algebraico y la motivación del aprendizaje de las matemáticas entre los estudiantes de segundo curso (8º grado) de Malasia.

Estos autores usaron en este estudio un diseño de investigación de grupo de control no equivalente cuasi-experimental que involucró a 58 estudiantes de forma dos (Grado 8) en dos clases (30 en el grupo experimental, 28 en el grupo de control). La primera clase de estudiantes pasó por una clase de álgebra impartida con estrategia basada en la teoría de la variación (VTBS), mientras que la segunda clase de estudiantes experimentó la estrategia de enseñanza convencional (CTS). Los instrumentos que ellos utilizados para el trabajo empírico fueron una prueba de álgebra de 24 ítems y una encuesta de interés de motivación de materiales didácticos de 46 ítems.

Las preguntas que ellos retomaron y adaptaron fueron tomadas de la Prueba Diagnóstica de Álgebra (Chow, 2011), que consistían en problemas de dos temas de álgebra del programa de estudios del segundo grado, como: expresiones algebraicas y ecuaciones.

Las evaluaciones sobre el contenido y las habilidades fueron: comprensión y uso de letras y símbolos, resolución de ecuaciones, traducción de palabras a expresiones algebraicas, análisis y generalización de patrones numéricos, relación entre variables. De acuerdo a los autores los alumnos obtenian 1 de puntuación por cada respuesta correcta con una puntuación total de 24, donde dicha puntuación al final se convirtió en porcentaje.

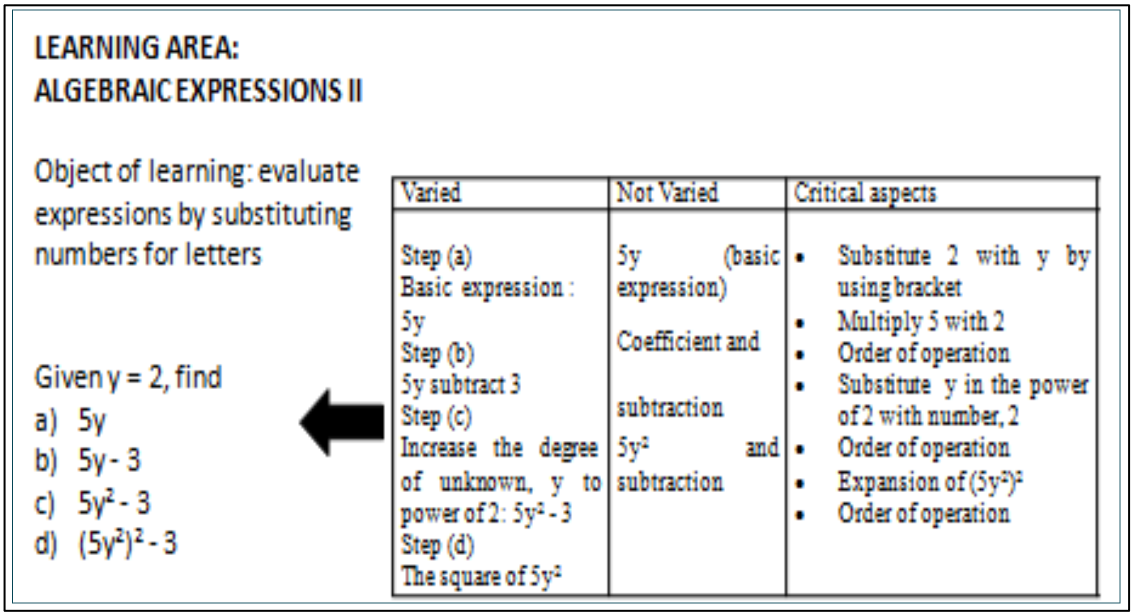
En este estudio, los autores también utilizaron como instrumento la Encuesta de Interés por la Motivación de los Materiales Didácticos (IMMIS) de Keller y una subescala de interés desarrollada por ellos mismos, para medir la motivación de los estudiantes para aprender matemáticas en términos de cinco dimensiones y se calificó mediante una escala Likert de cuatro puntos, que va de 1 (Muy en desacuerdo) a 4 (Muy de acuerdo).

La primera dimensión, atención (A), medía el grado en que el método utilizado en los dos grupos podía iniciar y mantener la motivación del alumno durante el proceso del experimento. La segunda escala, relevancia (R), examinaba si los alumnos podían percibir el valor y la utilidad de lo que se enseñaba. La tercera escala, confianza (C), medía el grado en que los alumnos consideraban que podían cumplir con éxito los objetivos y las tareas planteadas durante la clase. La cuarta escala, Satisfacción (S), medía los sentimientos de logro y atractivo intrínseco de los encuestados durante la clase, y el Interés (I), medía la reacción afectiva al modo de instrucción.

Los autores señalan que este instrumento fue validado por dos profesores expertos en la materia y se realizó un estudio piloto antes de la prueba real para comprobar la fiabilidad del instrumento. El alfa de Cronbach obtenido para la escala de motivación general fue de 0,924 y los valores de cada subescala fueron los siguientes: atención (,747), relevancia (,823), confianza (,708), satisfacción (,859) e intereses (,871).

La experimentación que llevaron a cabo los autores con los estudiantes se completó en seis semanas (1000 horas de contacto). En la primera semana, ellos administraron la prueba de pre álgebra a los alumnos, a los que se les administró una prueba posterior y la encuesta tras la finalización del proceso experimental.

Los profesores utilizaron el material didáctico: el Módulo del Profesor y el Módulo del Alumno, elaborados por los investigadores, como guías principales para impartir las clases de álgebra de VTBS. Los dos temas de álgebra que ellos seleccionaron (como ya se menciono) para este estudio fueron las expresiones algebraicas y las ecuaciones lineales. En la Figura 1 se presenta un ejemplo de la tarea de aprendizaje de álgebra. El ejemplo de actividad VTBS es el siguiente:



LEARNING AREA:
ALGEBRAIC EXPRESSIONS II

Object of learning: evaluate expressions by substituting numbers for letters

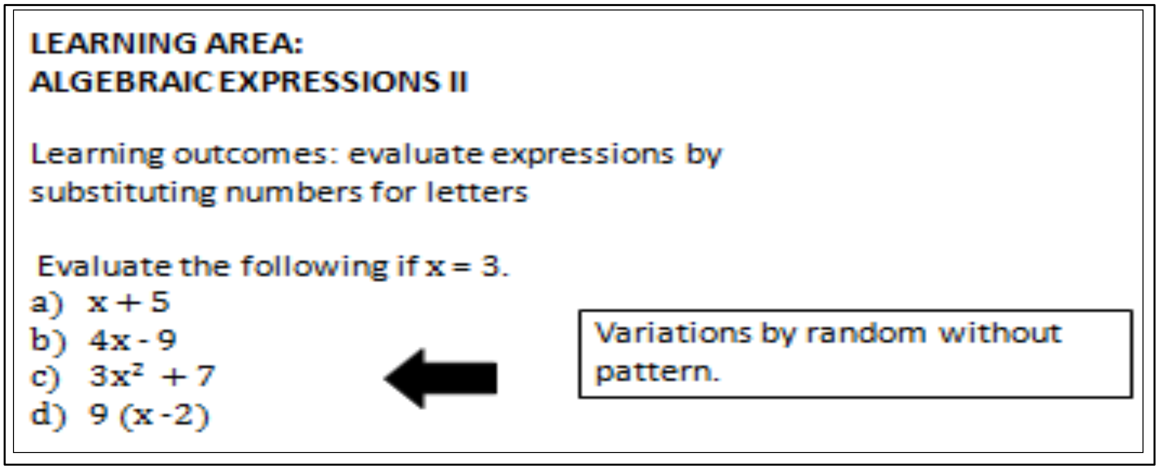
Given $y = 2$, find
a) $5y$
b) $5y - 3$
c) $5y^2 - 3$
d) $(5y^2)^2 - 3$

Varied	Not Varied	Critical aspects
Step (a) Basic expression : $5y$ Step (b) $5y$ subtract 3 Step (c) Increase the degree of unknown, y to power of 2: $5y^2 - 3$ Step (d) The square of $5y^2$	$5y$ (basic expression) Coefficient and subtraction $5y^2$ and subtraction	• Substitute 2 with y by using bracket • Multiply 5 with 2 • Order of operation • Substitute y in the power of 2 with number, 2 • Order of operation • Expansion of $(5y^2)^2$ • Order of operation

Figura 1.3. Un ejemplo de actividad de aprendizaje VTBS

Jin et al. (2017) señalaron que el resultado del análisis de covarianza indicó que los estudiantes del grupo experimental lograron puntuaciones de prueba significativamente mejores que el grupo de control. Sin embargo, el resultado del análisis de varianza multivariante no mostró evidencia de un efecto significativo de VTBS en la motivación general de los estudiantes del grupo experimental en las cinco subescalas; atención, relevancia, confianza, satisfacción e interés.

Por otro lado, los autores mencionan que a los participantes del grupo de control se les enseñó con un enfoque de enseñanza y aprendizaje convencional: la técnica "explicar-práctica-memorizar". Donde utilizaron como instrumentos el libro de texto y un cuaderno de ejercicios (de temas de álgebra) en las clases. En la figura 2 se muestra un ejemplo de la actividad de aprendizaje CTS.



LEARNING AREA:
ALGEBRAIC EXPRESSIONS II

Learning outcomes: evaluate expressions by substituting numbers for letters

Evaluate the following if $x = 3$.

a) $x + 5$
b) $4x - 9$
c) $3x^2 + 7$
d) $9 (x - 2)$

Variations by random without pattern.

Figura 1.4 Un ejemplo de actividad de aprendizaje CTS

Los autores señalan que este estudio aporta pruebas empíricas adicionales que apoyan el uso de la teoría de la variación como guía pedagógica para diseñar lecciones de álgebra en el aula. Las medias y las desviaciones estándar del rendimiento algebraico de los estudiantes en la Prueba de Álgebra se muestran en la Tabla 1 para el grupo VTBS y CTS. Antes del tratamiento, el grupo VTBS (M = 27,400, SD = 11,30) tenía un rendimiento ligeramente mejor que el grupo VTBS (M = 25,15, SD = 10,25). Ambos grupos progresaron después del tratamiento, y el grupo VTBS obtuvo mejores resultados (M = 58,13, DT = 12,90) que el grupo CTS (M = 42,32, DT = 11,44).

Test	Group	N	M	SD
Pre	VTBS	30	27.40	11.30
	CTS	28	25.14	10.25
Post	VTBS	30	58.13	12.90
	CTS	28	42.32	11.44

Tabla 1.6. Estadísticas descriptivas del rendimiento algebraico de los estudiantes

Ellos mencionan que este resultado coincide con los hallazgos de Al-Murani (2006); Choy (2006); Guo & Pang (2011) en sus estudios donde investigaron el efecto del uso de la teoría de la variación en matemáticas. Sin embargo, la investigación no afirma que la enseñanza con variación sea la mejor estrategia de instrucción en la enseñanza del álgebra, ya que claramente los estudiantes del grupo de control también estaban aprendiendo.

A partir de las estadísticas descriptivas de la Tabla 1.7, los autores señalan que los estudiantes de CTS tienen puntuaciones medias de motivación ligeramente superiores a las de VTBS en las cinco subescalas: atención (M = 2,70), relevancia (M = 2,73), confianza (M = 2,62), satisfacción (M = 2,87) e interés (M = 2,82).

	Group	M	SD	N
Attention	VTBS	2.60	0.38	30
	CTS	2.70	0.41	28
Relevance	VTBS	2.60	0.42	30
	CTS	2.73	0.44	28
Confidence	VTBS	2.43	0.34	30
	CTS	2.62	0.50	28
Satisfaction	VTBS	2.68	0.50	30
	CTS	2.87	0.52	28
Interest	VTBS	2.77	0.36	30
	CTS	2.82	0.42	28

Tabla 1.7. Media y desviaciones estándar de las subescalas de motivación para el aprendizaje de los estudiantes

Finalmente, los autores indican que estos resultados sugirieron que la adopción de VTBS en el aula de álgebra es efectiva en el rendimiento algebraico de los estudiantes, pero no en la motivación de los estudiantes para aprender. Por lo que, recomiendan realizar más investigaciones adicionales sobre el impacto de VTBS en los resultados afectivos de los estudiantes.

En otro estudio revisado llamado ¨***¿Qué es posible aprender al usar la teoría de la variación del aprendizaje en la enseñanza de las matemáticas?¨,*** de Kullberg, Runesson & Marton, (2017). Señalan que la teoría de la variación del aprendizaje enfatiza la variación como una condición necesaria para que los alumnos puedan discernir nuevos aspectos de un objeto de aprendizaje.

Ellos mencionan que hay un número sustancial de estudios que han informado sobre cómo se puede utilizar la variación para mejorar el aprendizaje de los estudiantes. Por ejemplo, se ha informado de cómo los profesores, mediante el uso de la variación y la invarianza dentro y entre ejemplos, pueden ayudar a los alumnos a interactuar con la estructura matemática (Bartolini Bussi et al. 2013; Huang y Yeping 2017; Marton 2015; Marton y Pang 2013; Sun 2011; Watson y Mason 2006). Ellos consideran que el análisis de "lo que es posible aprender" de una lección, también dice algo sobre "lo que no es posible aprender".

Los autores señalan que lo que se hace posible y lo que no se puede aprender, visto desde la perspectiva de la teoría de la variación, a menudo se analiza a partir de datos del aula en los que se centra en la interacción entre el profesor y los estudiantes en relación con el contenido enseñado. Sin embargo, en la ilustración empírica que presentan en este trabajo, analizan los ejemplos utilizados por el docente sin tener en cuenta la interacción, que habitualmente analizan (p. Ej., Kullberg y Runesson 2013).

Los datos presentados provienen de un estudio más amplio sobre la enseñanza de profesores de matemáticas y ciencias después de que se involucraron en una intervención de estudio de lecciones impulsada por la teoría de 1,5 años, en la que utilizaron la teoría de la variación.

Un hallazgo es que los maestros, después de participar en este desarrollo profesional particular, hacen que otros aspectos del contenido sean notables para los estudiantes a través de su enseñanza (Kullberg et al. 2016; Nilsson 2014; Vikstrom 2014). El objetivo de este artículo indican los autores, es demostrar cómo se puede analizar el diseño de una lección desde el punto de vista de la teoría.

En este artículo, los autores ofrecen una ilustración empírica y un análisis de la enseñanza de un profesor de un método para resolver ecuaciones con una incógnita. Ellos señalan que hubo similitudes generales entre la Lección 1 (L1) y la Lección 2 (L2). Por ejemplo, las lecciones tenían aproximadamente la misma duración y se enseñó el mismo método (cancelación) para resolver ecuaciones con una incógnita. En ambas lecciones, los estudiantes trabajaron creando ecuaciones con una incógnita para un compañero de estudios. Ellos se centraron en las similitudes y diferencias en los espacios de ejemplo representados para explorar, en un nivel micro, los efectos de la intervención en la práctica docente.

Analizaron los ejemplos presentados por el profesor durante la discusión de toda la clase utilizando como marco la teoría de variación (Marton 2015). Su análisis muestra que el objeto de aprendizaje en acción y, por lo tanto, lo que se hizo posible aprender en la lección, había cambiado. Es decir, en L1, el objeto de aprendizaje implicaba principalmente el método y el procedimiento para resolver, encontrando respuestas a ecuaciones con una incógnita.

Cuando el mismo maestro enseñó L2 sobre el mismo tema después de la intervención, las respuestas a las ecuaciones utilizadas en la lección ya se conocían, y el objeto de aprendizaje era, en cambio, comprender la estructura de una ecuación: cómo se puede crear una ecuación y las operaciones utilizadas para resolverlo. Los autores indican que el maestro también articuló estas diferencias entre las lecciones.

En cuanto al objeto de aprendizaje previsto en L1, señalan que el maestro dijo que quería que los estudiantes estuvieran "*más seguros en el método (cancelación) [...] pero es más que el método lo que busco [...] deben ver que es posible resolver una ecuación, ver el uso de ella, que es una buena manera, que encaja en su sitio, por así decirlo*. Después de la intervención, dijo sobre L2*: Mi punto es que si entiendes qué es una ecuación y cómo está estructurada, entonces eres capaz de resolverlas [...] puedes enseñarles un método para resolver la ecuación sin que realmente comprendan qué es una ecuación, porque les enseñas un método que da un resultado, pero la pregunta es si tienen una comprensión fundamental de lo que es una ecuación*. Ellos sugerieren que el maestro, en este caso, ha cambiado los objetos de aprendizaje previsto y en acción, y su punto de vista sobre lo que los estudiantes necesitan aprender para poder resolver ecuaciones con una incógnita.

El análisis que los autores presentan de la Lección 1 sugiere que el objeto de aprendizaje en acción y las dimensiones de variación que se abrieron pusieron de manifiesto principalmente el proceso de resolución de ecuaciones con una incógnita. El profesor, junto con los alumnos, en la Tarea 1 (ver más abajo), resolvieron y discutieron varios ejemplos de ecuaciones con diferentes números en cada lado del signo igual, uno tras otro, para ilustrar la igualdad.

En los dos primeros ejemplos, 12 es invariante, pero el lado en el que se coloca el doce varía, así como los factores que se multiplican para dar 12. Por lo tanto, en los primeros tres ejemplos de ecuaciones, el maestro varió los números, el orden de números y el número de factores a cada lado del signo igual, mientras se mantiene invariante el signo de igualdad / igual. resolvió una ecuación numérica con representación icónica (Tarea 2) y dos ecuaciones hechas a partir de problemas de palabras (Tarea 4), utilizando el método de la cancelación.

1. $3\times4=12$
2. $12=3\times2\times2$
3. $12\times2=3\times2\times2\times2$
4. $3\times6=18\times2=36$ $3\times6\neq18\times2=36$

Figura. 1.5. Ejemplo de la Tarea 1

La Tarea 2 introdujo dos formas de resolver la ecuación 3x + 5 = 20 con el método de cancelación. El maestro mostró una representación icónica del proceso de resolución y también resolvió la ecuación numéricamente (Figura 1.6). La representación icónica mostró inicialmente una escala con tres cajas y cinco piedras en el lado izquierdo y veinte piedras en el lado derecho. En esta tarea, la representación varió (icónica / numérica), mientras que la ecuación con una incógnita permaneció invariable. Además de la posibilidad de discernir una representación visual del método de cancelación, también fue posible discernir que x podría ser una serie de objetos (piedras).

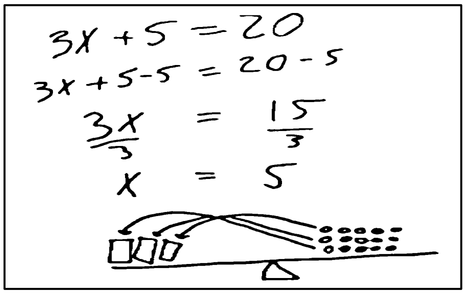


Figura 1.7. Ejemplo de la Tarea 2

En la Tarea 3, se discutieron dos ecuaciones, $3x + 20 = 5$ y $2x + 3 = 3x + 4$, y se encontró que no se pueden resolver para números enteros positivos. La característica invariante que ellos presentaron en estos ejemplos fue que las ecuaciones no tenían solución para números enteros positivos, mientras que las ecuaciones y los números en las ecuaciones variaban. Sugeiren que a partir de estos ejemplos, y en contraste con las ecuaciones de tareas anteriores, fue posible discernir que algunas ecuaciones con una incógnita no se pueden resolver para números enteros positivos.

En la Tarea 4, se hicieron dos ecuaciones con una incógnita a partir de problemas verbales y se resolvieron una tras otra. No se hizo ninguna comparación entre los dos problemas. El primer problema era sobre una persona que compraba cosas en una tienda y el segundo era sobre la relación entre las edades de tres hermanas. Las dos ecuaciones, $x \div 3 + 495 = 1975$ y $3x + (x + 5) + x = 40$, variaron con respecto al contexto (precio, edad), las operaciones utilizadas en las ecuaciones (suma, división) y los números en las ecuaciones. Ellos utilizaron el mismo método (invariante) para resolverlos. Por lo tanto, señalan que fue posible discernir que las ecuaciones con una incógnita pueden representar diferentes situaciones y resolver diferentes problemas.

Los autores indican que en la Tarea 5, el maestro usó la misma ecuación ($3 + 4 = 7$) para crear tres ecuaciones diferentes con una incógnita (Fig. 1). Primero, sustituyendo 3 con x se creó la ecuación $x + 4 = 7$. En la segunda ecuación, x se varía cuando 4 (en $3 + 4 = 7$) se sustituyó por 2 × ($3 + 2x = 7$).

En la tercera ecuación, $3 + 4 = 7$ sigue siendo el punto de partida desde el cual se varía x nuevamente, cuando se sustituye 3 (con $6x \div 4$) en la ecuación $6x \div 4 + 4 = 7$. Ellos señalan que se hizo posible que los estudiantes vieran la creación de una ecuación con números desconocidos y el proceso de resolución de esa ecuación simultáneamente de resolución.

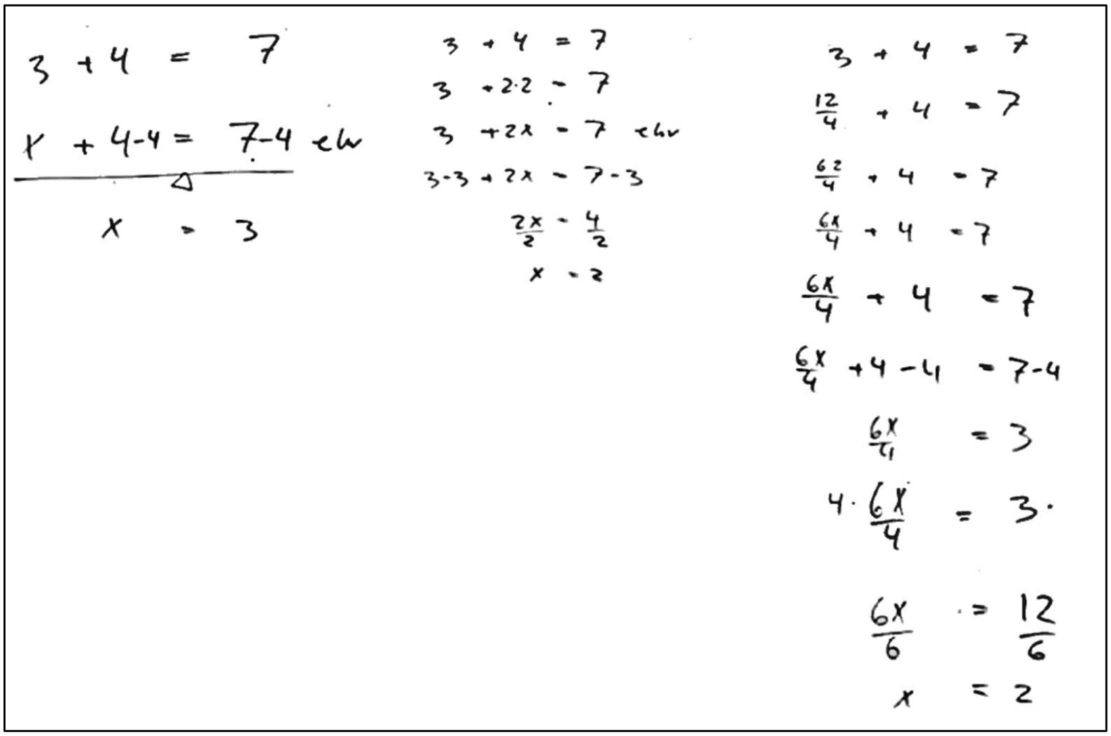


Figura 1.7. La misma ecuación se utiliza para crear y resolver tres ecuaciones diferentes con una incógnita en L2: (Tarea 5)

La Lección 2 sugiere que el objeto de aprendizaje en acción hacía hincapié en la comprensión de las ecuaciones, su estructura y el modo en que las diferentes operaciones (suma, resta, multiplicación y división) afectan a una ecuación. (En la lección 1, las operaciones se utilizaron al resolver ecuaciones con una incógnita sin que se prestara atención a este aspecto).

Los autores mencionan que aunque el maestro enseñó el mismo tema en ambas lecciones, la lección L1 y L2 hicieron posible discernir diferentes dimensiones de variación (aspectos) y, por lo tanto, permitieron aprender cosas diferentes.

En L1, las dimensiones de variación se refieren principalmente a:

(1) el significado del signo igual / igualdad (=, ≠),

(2) representación (icónica, simbólica),

(3) ecuaciones no solucionables (solucionables, no solucionables),

(4) contexto (piedras, precio, edad), con respecto a la resolución de ecuaciones con una incógnita.

En L2, las dimensiones de variación se referían a:
(1) el signo igual / igualdad (=, ≠),
(2) representación de una ecuación / un desconocido (multiplicación por un número entero, multiplicación por x),
(3) operando en la igualdad (multiplicación, división),
(4) propiedades de igualdad (aditivo, multiplicación) y
(5) cómo se pueden hacer las ecuaciones (lo que x representa variado).

Las dos lecciones ofrecieron dos posibilidades bastante diferentes para el aprendizaje, ya que se abrieron diferentes dimensiones de variación y, por lo tanto, fueron posibles de experimentar. También señalan que el análisis de lo que es posible aprender también arroja luz sobre lo que no es posible aprender.

Según Kullberg et al. (2017), la teoría puede servir como una herramienta para los maestros cuando planean y ponen en acción la enseñanza. La teoría también ofrece herramientas que los maestros pueden usar, para enfocarse en el contenido matemático enseñado, la comprensión de los estudiantes y cómo habilitar las posibilidades de aprendizaje.

Finalmente, los autores de este trabajo de investigación indican como resultado de su trabajo de investigación que conceptos teóricos como el objeto de aprendizaje y sus aspectos críticos pueden ayudar a los profesores a centrarse en la capacidad de aprender y en lo que los estudiantes necesitan aprender para hacerlo. También señalan que otra idea importante dentro de la teoría de la variación es cómo podemos ayudar a los alumnos a darse cuenta de lo que queremos que disciernan. Si un aspecto que queremos que nuestros estudiantes noten varía en un contexto invariable, es más probable que los estudiantes lo perciban (Marton y Pang 2013). Estos autores señalan que es claro, que la variación y la invariancia en la enseñanza no garantiza el aprendizaje; que en el mejor de los casos, puede hacer posible que el aprendizaje suceda.

En el estudio llamado ¨***Utilizar la variación para criticar y adaptar las tareas matemáticas***¨*, de* Metz, Preciado-Babb, Sabbaghan, Davis, and Ashebir, 2017. Los autores informan sobre cuatro ideas clave que han encontrado importantes en su trabajo con los profesores, basadas en casi cinco años de investigación con la Iniciativa Mentes Matemáticas (Math Minds Initiative).

Ellos señalan que estas ideas combinan la Teoría de la Variación del Aprendizaje con un fuerte enfoque en la evaluación continua para informar la forma en que los maestros adaptan las secuencias de tareas ofrecidas en el recurso utilizado por los maestros del proyecto. Al hacerlo, ellos esperaban que los profesores apuntaran a atender mejor tanto a los alumnos con dificultades como a los que necesitan extenderse mientras desarrollan un conocimiento matemático coherente.

Los autores indican que la Iniciativa Math Minds (mentes matemáticas) se ha centrado en mejorar la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria de Calgary. Parte de este trabajo se lo han centrado en el aprendizaje profesional de los docentes, que es el enfoque que ellos le dan a este trabajo d einvestigación. Señalan que la iniciativa integra investigación sobre evaluación formativa (Wiliam, 2011), motivación intrínseca (Pink 2011), dominio del aprendizaje (Guskey, 2010), carga cognitiva (Clark, Kirschner y Sweller, 2012) y teoría de la variación (Marton, 2015), que han integrado en un marco de cuatro partes para apoyar la retroalimentación que se ofrece a los maestros (ver Tabla 1.8).

Ribboning	Monitoring	Adapting	Connecting
Utilizar la variación estructurada para llamar la atención sobre los discernimientos potencialmente novedosos necesarios para un concepto.	Asegurarse de que cada estudiante pueda y esté obligado a proporcionar comentarios al maestro en respuesta a cada consulta de la cinta.	Revisar / idear tareas, explicaciones y otros compromisos para que se ajusten a los conocimientos demostrados.	Moverse entre "parte" y "todo" cuando se haga una cinta para asegurarse de que los alumnos no pierdan de vista los conceptos en estudio.

Tabla 1.8. Principios de Math Minds (adaptado de Davis, 2016)

Aquí, lo que ellos llaman ribboning (encintado) se refiere a un patrón alterno de tareas que llama la atención sobre las ideas clave y la evaluación de cada idea clave. Ribboning se basa en la teoría de la variación y la teoría de la carga cognitiva para dirigir eficazmente la atención a las ideas clave sin abrumar la memoria de trabajo.

Ellos señalan, que los patrones claros de variación entre las ideas que pueden mantenerse unidas en la memoria de trabajo hacen más probable que se disciernan las conexiones entre esas ideas. Es decir, que la evaluación formativa con un seguimiento cuidadoso de la retroalimentación de los estudiantes y la enseñanza que responde a esa retroalimentación son esenciales para asegurar que las distinciones previstas se lleben a cabo de hecho antes de pedir a los estudiantes que las amplien o conecten. En este trabajo, los autores se centran principalmente en la variación, donde para ellos es importante enfatizar cómo la variación apoya y es apoyada por otros elementos del protocolo de investigación.

Los autores de este trabajo de investigación indican que en otros trabajos anteriores, han descrito algunos de los retos que enfrentan los profesores en: a) apoyar a los estudiantes en dificultades y b) ofrecer extensiones significativas (cf. Preciado-Babb, Aljarrah, Sabbaghan, Metz, Pinchbeck, & Davis, 2016). También han resaltado algunas de las dificultades que se experimentan al crear patrones propios de variación (Metz, Preciado-Babb, Sabbaghan, Pinchbeck, Aljarrah, & Davis, 2016).

Según P. Preciado Babb, L. Yeworiew, & S. Sabbaghan (Eds.), 2017 desde entonces han pedido a los profesores (de malaisa) que consideren las siguientes preguntas al examinar los patrones de variación que ofrece el recurso utilizado por todos los profesores que paraticipan en el proyecto:

(a) ¿Qué características del concepto están separadas para su atención?

(b) ¿Las características sobre las que queremos llamar la atención son sistemáticamente variadas?

(c) **¿**La variación se establece en un contexto constante? y

d) ¿Las ideas clave se yuxtaponen de una manera que resalta el patrón de variación deseado?

Aquí, los autores destacan cuatro ideas que han surgido como significativas en este trabajo con maestros y estudiantes en torno a estas preguntas (p.171).

- El **primero** reitera la importancia del contraste: cuando cambian demasiadas cosas o cambian las cosas incorrectas, es posible que los estudiantes no hagan las distinciones deseadas.
- El **segundo** subraya que incluso la variación estrechamente controlada puede no notarse si los elementos relevantes no se yuxtaponen claramente y si no se invita a los estudiantes a notar qué cambios y qué permanece igual de un ejemplo a otro.
- En el **tercero**, distinguen aún más entre analizar el trabajo en fragmentos manejables y utilizar patrones claros de variación para llamar la atención sobre los conceptos clave dentro de esos fragmentos.
- Finalmente, en la **cuarta** idea, abordan las preocupaciones de que la variación estrechamente estructurada puede permitir a los estudiantes simplemente extender patrones sin comprender por qué ocurren.

En todo momento, en el estudio ellos mantuvieron un énfasis en la evaluación continua y la respuesta adaptativa: ninguno de los patrones identificados debía considerarse ideal o suficiente por sí mismo. Los autores mencionan que cuando las tareas se organizan de manera tal que cada pieza se basa en la comprensión de la anterior, evaluar la comprensión al final de una lección o incluso en varios intervalos durante una lección no es suficiente.

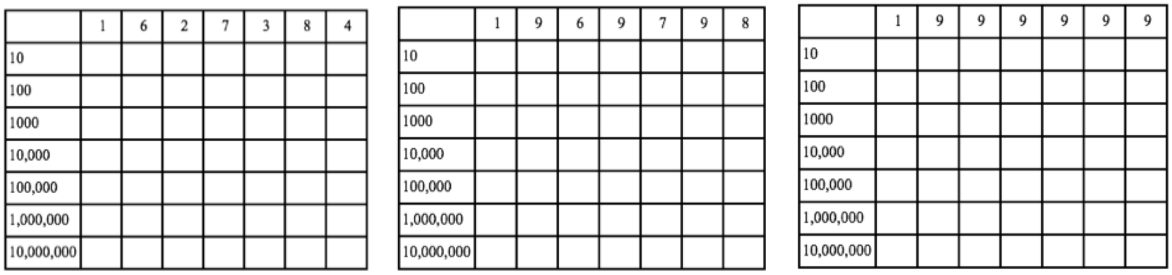
Ellos, mencionan que se puede encontrar una idea sutil pero poderosa en la distinción entre variación sistemática que varía la característica que queremos que los estudiantes noten mientras se mantienen constantes otras características (es decir, contraste) de la variación sistemática que varía todo lo demás mientras se mantiene constante la idea clave (es decir, generalización). Marton (2015) señaló que tendemos intuitivamente hacia lo último; es decir, cuando queremos ayudar a alguien a entender algo, ofrecemos muchos ejemplos. Sin embargo, estos autores señalan que esto solo funciona si la idea ya ha sido discernida y solo necesitamos ampliar la percepción de lo que puede abarcar. No funciona bien para introducir nuevas ideas. De tal manera que apreciar esta distinción puede cambiar la forma en que adaptamos las explicaciones y las tareas para ayudar a los estudiantes con dificultades.

Dentro del trabajo emprico con los estudiantes los autors señalan que al presentar el tema de redondeo en el grado 5º, el recurso utilizado por un profesor fue primero una recta numérica para llamar la atención, sobre si varios números están más cerca del 0 o del 10, y luego del 10 o del 100.

Después ofrecio un procedimiento común que consistio en comprobar el dígito que sigue al que se redondea; si es 5 o más, se redondea hacia arriba; si es menos de 5, se redondea hacia abajo. La práctica incluyo una colección de números para redondear a 10, otra para redondear a 100 y otra para redondear a 1000.

Ellos mencionan que para algunos estudiantes, este patrón no supuso ningún problema. Sin embargo, un alumno no le encontró sentido hasta que se le pidió que contrastará el mismo número redondeado a diferentes valores de posición, como se muestra en la figura 1.8. Este alumno estaba especialmente intrigado por el patrón escalonado de ceros que se forma en el primer conjunto y por el hecho de que diez millones se redondearan a cero.

También le interesó el tercer conjunto, en el que todos los casos, excepto el último, redondean a 2.000.000. Lo que comenzó como un apoyo a un alumno con dificultades fue mucho más allá de la tarea original de redondear a 1000.



	1	6	2	7	3	8	4
10							
100							
1000							
10,000							
100,000							
1,000,000							
10,000,000							

	1	9	6	9	7	9	8
10							
100							
1000							
10,000							
100,000							
1,000,000							
10,000,000							

	1	9	9	9	9	9	9
10							
100							
1000							
10,000							
100,000							
1,000,000							
10,000,000							

Figura 1.8. Uso de contraste para profundizar la comprensión del redondeo

Una de las consideraciones más pertinentes que señalan los autores es que las secuencias fuertemente estructuradas en las que sólo una cosa cambia a veces crean secuencias predecibles que permiten a los estudiantes predecir respuestas basadas en patrones observados en lugar de entender esos patrones. Sin embargo, incluso cuando los patrones de variación parecen claros y la enseñanza es receptiva, hay momentos en que los patrones pasan desapercibidos o sin ser notados. Marton (2015) no abordó directamente la carga cognitiva (Clark, Kirschner y Sweller, 2012).

A pesar de ello, los autores señalanque subrayó la importancia de mantener las ideas simultáneamente en la conciencia, lo que requiere atención a la memoria de trabajo, así como una cuidadosa consideración de lo que debe mantenerse unido: "La experiencia de la igualdad y la diferencia no es sólo una función de lo que hay que experimentar, sino de las cosas que se experimentan simultáneamente" (Marton, 2015, p. 66).

Metz, Preciado-Babb, Sabbaghan, Davis, and Ashebir, 2017 señalan que a veces, las demandas sobre la memoria de trabajo (Clark, Kirschner y Sweller, 2012) hacen que sea útil separar partes de un procedimiento más complejo de manera que puedan aprenderse en partes manejables y luego volver a unirlas. Si bien es importante, esto por sí solo no llama la atención sobre las ideas matemáticas incluidas en esos pasos.

En el recurso utilizado por los maestros de su estudio, la división larga en 4º Grado se dividió en pasos diseñados para reducir la carga en la memoria de trabajo. Los estudiantes primero trabajaron con dividendos de dos dígitos y un divisor de un dígito; el procedimiento se dividió en pasos que se explican conceptualmente, luego se practicó para ganar fluidez antes de agregar el siguiente paso. Para algunos, esto fue suficiente. Otros lucharon por recordar los pasos; entre los que lo hicieron, algunos no pudieron explicarlos. Luego les ofrecieron una secuencia de práctica que variaba sistemáticamente el divisor, como en la Figura 1.9.

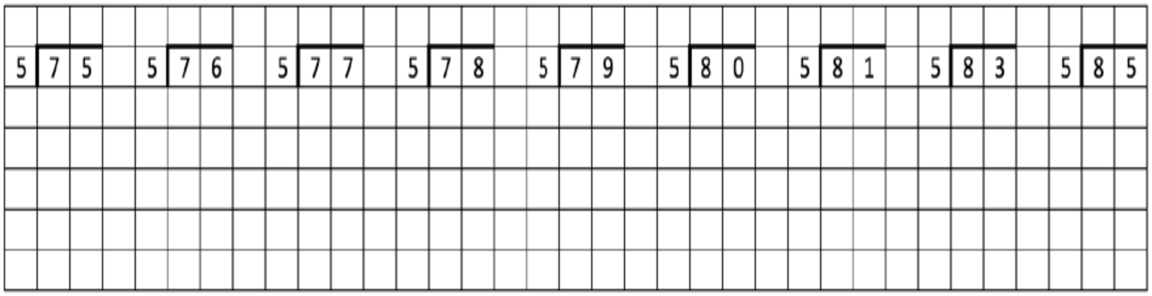


Figura 1.9. Variación sistemática de la práctica para una división larga

Como sólo cambiaba una cosa, los alumnos podían ver (cuando se les pedía que miraran) cómo cambiaban (o no) varias partes del algoritmo, cada vez que el dividendo aumentaba en uno (algo importante que destacan los autores es que el uso de papel cuadriculado sirvió para facilitar el seguimiento de los cambios de un ejemplo a otro); también podían ver que el resto aumentaba en uno cada vez.

Ellos señalan que cuando se les preguntaba por qué, podían rastrear más fácilmente la causa de los cambios. Además, como algunos de los datos numéricos requeridos eran constantes de una pregunta a otra, se desviaba menos la atención de la comprensión del algoritmo.

Por otro lado, señalan que es fácil trivializar lo que para los estudiantes pueden ser ideas fundamentalmente importantes para una comprensión más profunda. Por ejemplo, mediante el uso de patrones claros de variación junto con las indicaciones para atender esa variación, como el uso apropiado de puentes cuando los saltos perceptivos son demasiado grandes, o detenerse en patrones que empujan la comprensión más allá de patrones predecibles.

Es por ello, que se les pidió a los maestros que fueran más allá de lo que el recurso a menudo describe (de forma adecuada pero insuficiente) en términos de andamiaje y atención a los límites de la memoria de trabajo.

Los profesores de la iniciativa se han basado en gran medida en el recurso para definir y secuenciar características críticas para el aprendizaje de temas particulares. Sin embargo, están asumiendo una mayor responsabilidad por lo que se establece uno al lado del otro en la secuencia momento a momento de una lección.

Finalmente, P. Preciado Babb, L. Yeworiew, & S. Sabbaghan (Eds.), 2017, enfatizan aún más en cómo la atención cuidadosa a los patrones de variación podría apoyar conexiones más fuertes a lo largo del tiempo, es decir, entre lecciones, unidades y grados. Al igual que los andamiajes, el recurso enfatiza y respalda la revisión del material abordado en las lecciones.

Es por ello, que al igual que con el andamiaje, la conceptualización de la revisión en términos del uso de la variación para yuxtaponer cuidadosamente lo antiguo y lo nuevo puede apoyar fuertes conexiones entre ideas clave.

Por lo que, el contraste es más poderoso cuando se experimenta directamente y no depende del recuerdo de una lección realizada el año pasado, la semana pasada o incluso antes en una lección. ¿Como hacerlo? requiere una conciencia más amplia de lo que se espera que los estudiantes comprendan con el tiempo. Los autores concluyen sealando que es importante considerar formas de apoyar a los maestros que a menudo están más familiarizados con un solo grado o un pequeño rango de grados para mirar más allá de los límites de sus tareas de enseñanza.

Por otro lado, presentamos a continuación un estudio de Koichu B., Zaslavzky O., y Dolev L., (2015) llamado ***Efectos de las variaciones en el diseño de las tareas sobre las***

experiencias de aprendizaje de los profesores de matemáticas: el caso de una tarea de clasificación.

El objetivo del estudio presentado por estos autores en el presente artículo fue examinar cómo las variaciones en el diseño de las tareas pueden afectar a las experiencias de aprendizaje de los profesores de matemáticas. El estudio se centró en tareas de clasificación, es decir, tareas de aprendizaje que requirieron agrupar un conjunto determinado de elementos matemáticos, de tantas formas como fuera posible, de acuerdo con diferentes criterios sugeridos por los propios participantes.

Estos especialistas se centraron particularmente en presentar el ejemplo de una tarea de clasificación en la que los elementos a agrupar estaban relacionados con conceptos básicos de geometría analítica, que a su vez estaban conectados con la noción de lugares geométricos de los puntos (LP).

Todo realizado sobre la base de un experimento de diseño de tres iteraciones con profesores de matemáticas de secundaria en ejercicio, dando cuenta sobre los objetos de aprendizaje previstos y en acción inherentes a las tres versiones distintas de la misma tarea.

Este estudio se basa en la teoría de la variación y también puede considerarse una aplicación de la teoría de la variación al diseño de tareas. Por lo que, estos autores señalan que en términos de la teoría de la variación (por ejemplo, Marton y Booth 1997; Runesson 2005), el discernimiento de las propiedades estructurales y las conexiones entre los conceptos básicos de la geometría analítica representados de diferentes maneras representó su objeto de aprendizaje previsto.

En estos, una tarea de clasificación particular fue el medio de aprendizaje, el número y el contenido de los elementos matemáticos incluidos en la tarea fueron sujetos de manipulaciones didácticas, y las experiencias de los profesores con la tarea, que se ofreció en tres versiones diferentes, constituyeron un espacio de variación o un objeto de aprendizaje en acción.

Por otro lado, este estudio señalan los autores que también puede considerarse como un experimento de diseño (por ejemplo, Cobb et al. 2003) porque se centraron en los aspectos iterativos del diseño de la tarea.

Koichu et al. (2015), en este trabajo extrajeron algunas sugerencias con base empírica sobre el diseño de tareas de clasificación que potencialmente podrían evocar experiencias de aprendizaje deseables en los profesores participantes. Todos los participantes en este estudio (53 profesores de matemáticas de secundaria) tenían una amplia experiencia en la enseñanza del nivel más avanzado del plan de estudios de matemáticas en Israel.

Habían estudiado geometría analítica durante sus estudios universitarios, es decir, entre 10 y 25 años antes de llevar acabo este estudio. Por lo que, ellos sugieren que los conocimientos de los profesores sobre geometría analítica incluían representaciones, fórmulas y propiedades de las líneas rectas seleccionadas y las secciones cónicas.

Durante la experimentación con la tarea diseñada, se les pedió a los profesores participantes que clasificaran los elementos en el contexto de la geometría analítica de la forma más apropiada posible. Considerando el conjunto de elementos dados, clasificando los elementos en grupos para que cada elemento perteneciera a un solo grupo.

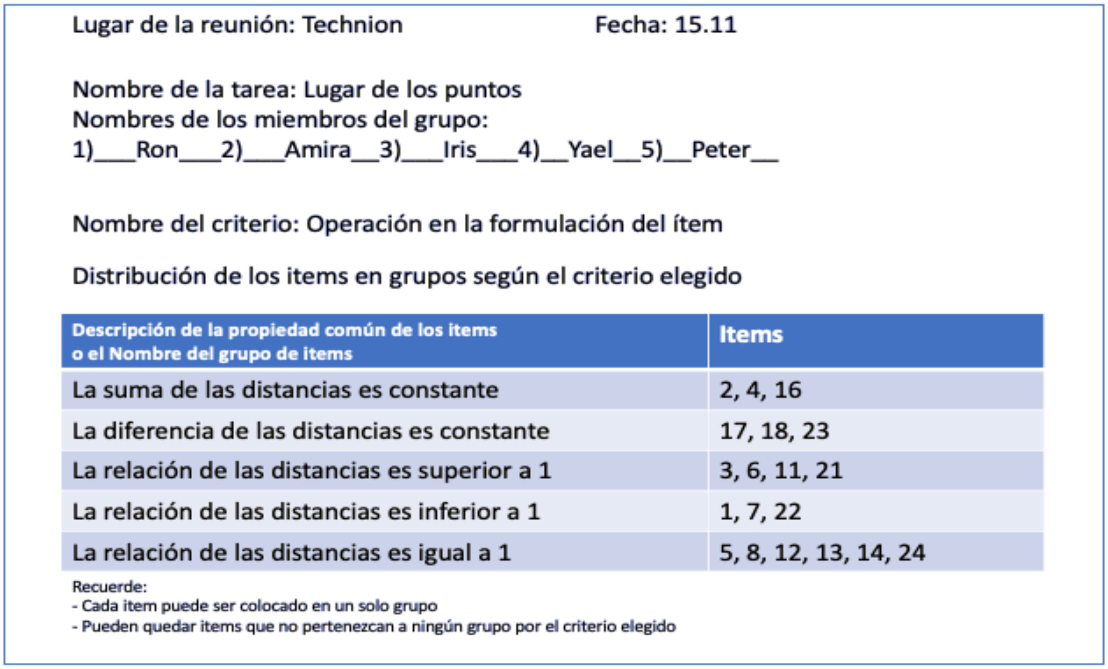
Los grupos que se formaron fueron según el criterio de elección de cada profesor. El proceso de clasificación se repitió tantas veces como fue considerado por los profesores, por criterios adicionales y en hojas de clasificación adicionales., tantas como fue necesarias.

En la figura 1, se presenta un ejemplo de la tarea de clasificación presentada por los autores, en la que los ítems de la primera versión de la tarea del LP se clasifican de acuerdo con el criterio "por operación de generación".

Nuevamente, Koichu et al. (2015), mencionan que cada grupo de participantes obtuvo tantas hojas en blanco como solicitaron y se les indicó que utilizaran solo una hoja por criterio; los profesores trabajaron en pequeños grupos de 3-5 profesores. El instructor se abstuvo de intervenir en el trabajo de los profesores en esta etapa.

La discusión reflexiva al final del taller fue moldeada por la solicitud del instructor a todo el grupo de compartir abiertamente las impresiones de hacer la tarea y, en particular, completar la siguiente oración*: Antes del taller pensé que... y ahora creo que...*

En la siguiente figura 1.10 se muestra una parte del ejemplo de la hoja de clasificación de los puntos geométricos de un equipo de los maestros participantes.



Lugar de la reunión: Technion Fecha: 15.11

Nombre de la tarea: Lugar de los puntos
Nombres de los miembros del grupo:
1)___Ron___2)___Amira__3)___Iris___4)__Yael__5)__Peter__

Nombre del criterio: Operación en la formulación del ítem

Distribución de los items en grupos según el criterio elegido

Descripción de la propiedad común de los items o el Nombre del grupo de items	Items
La suma de las distancias es constante	2, 4, 16
La diferencia de las distancias es constante	17, 18, 23
La relación de las distancias es superior a 1	3, 6, 11, 21
La relación de las distancias es inferior a 1	1, 7, 22
La relación de las distancias es igual a 1	5, 8, 12, 13, 14, 24

Recuerde:
- Cada item puede ser colocado en un solo grupo
- Pueden quedar items que no pertenezcan a ningún grupo por el criterio elegido

Figura.1.10 Ejemplo de hoja de clasificación

La primera versión diseñada de la tarea de clasificación LP consistió en 24 ítems (ver cuadro 1), creados para maximizar dos tipos de variaciones controladas. El primer tipo previsto de variación controlada estaba relacionado con los objetos matemáticos descritos en las tarjetas para clasificar: círculos, elipses que no son círculos, parábolas, hipérbolas, una línea recta y el conjunto vacío.

En esta versión los autores incluyeron dos elementos que disfrazaban el conjunto vacío (items 7 y 17 en el cuadro 1) y un elemento que disfrazaba una línea recta (item 6) para dar a los participantes una oportunidad adicional de discernir las propiedades estructurales de los items; se refirieron a estos items como "patológicos".

El segundo tipo de variación incluida en esta primera versión de las tareas se relacionó con el tipo de representación: simbólica, gráfica y verbal, donde este último tipo se dividió en subtipos. Es decir, los ítems verbales variaron con respecto a dos factores: la operación involucrada en la generación de loci (la operación generadora, por ejemplo, suma, resta, división) y los elementos generadores dados en las descripciones (por ejemplo, un segmento y un punto, dos segmentos).

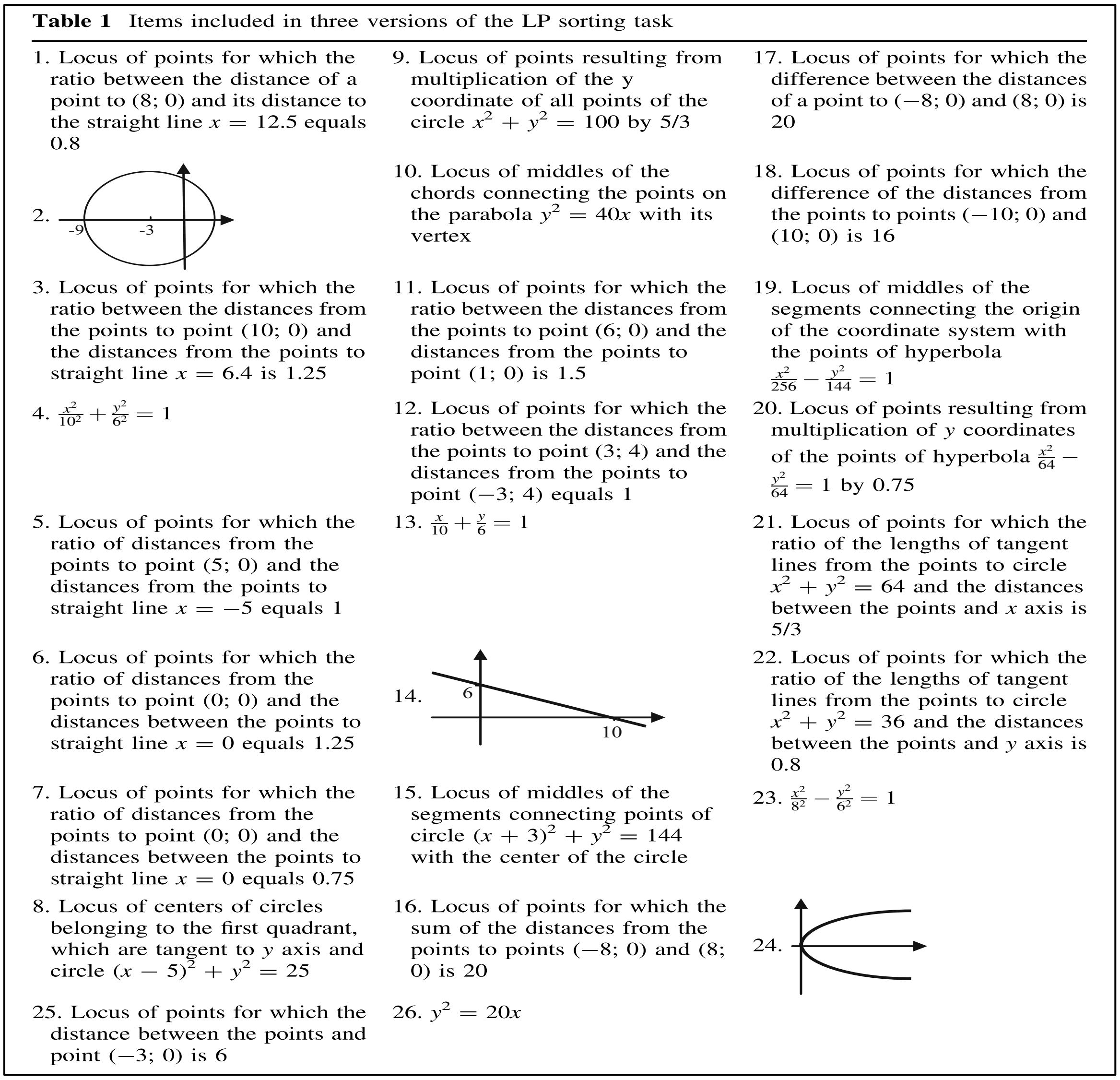


Table 1 Items included in three versions of the LP sorting task

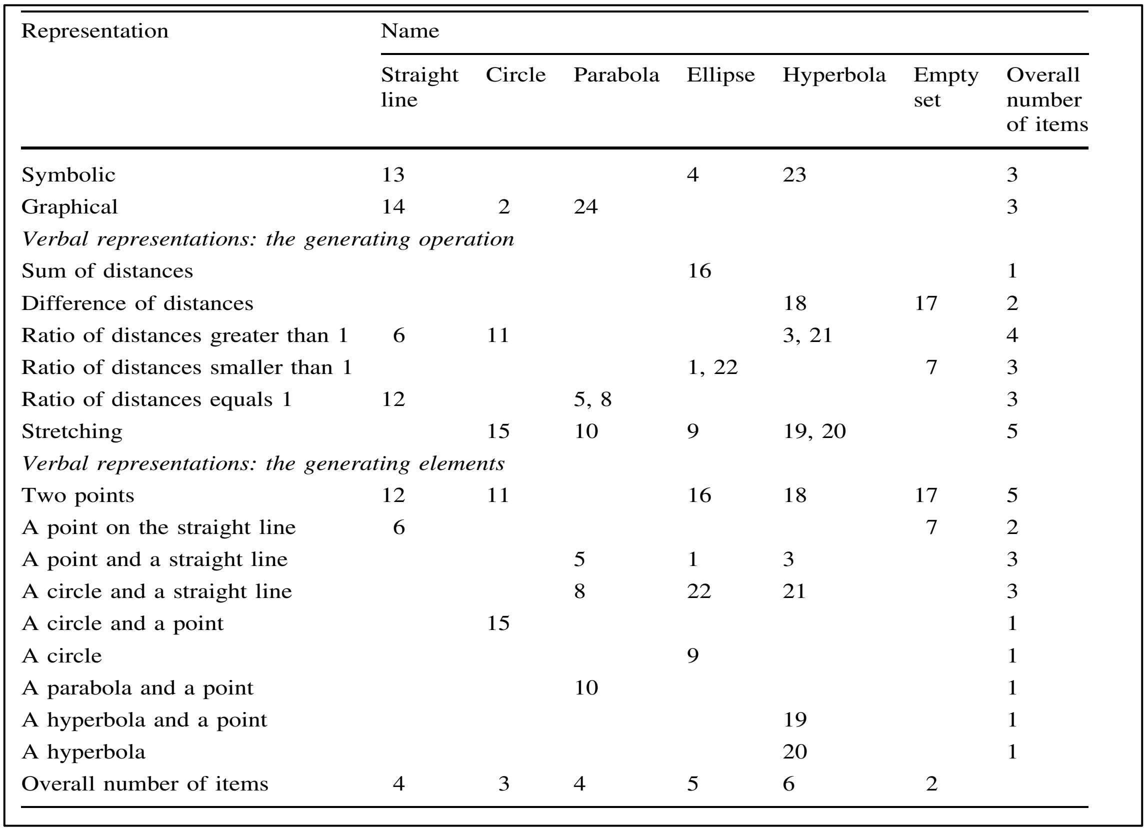
1. Locus of points for which the ratio between the distance of a point to (8; 0) and its distance to the straight line $x = 12.5$ equals 0.8
2.

3. Locus of points for which the ratio between the distances from the points to point (10; 0) and the distances from the points to straight line $x = 6.4$ is 1.25
4. $\frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1$
5. Locus of points for which the ratio of distances from the points to point (5; 0) and the distances from the points to straight line $x = -5$ equals 1
6. Locus of points for which the ratio of distances from the points to point (0; 0) and the distances between the points to straight line $x = 0$ equals 1.25
7. Locus of points for which the ratio of distances from the points to point (0; 0) and the distances between the points to straight line $x = 0$ equals 0.75
8. Locus of centers of circles belonging to the first quadrant, which are tangent to y axis and circle $(x - 5)^2 + y^2 = 25$
9. Locus of points resulting from multiplication of the y coordinate of all points of the circle $x^2 + y^2 = 100$ by 5/3
10. Locus of middles of the chords connecting the points on the parabola $y^2 = 40x$ with its vertex
11. Locus of points for which the ratio between the distances from the points to point (6; 0) and the distances from the points to point (1; 0) is 1.5
12. Locus of points for which the ratio between the distances from the points to point (3; 4) and the distances from the points to point (−3; 4) equals 1
13. $\frac{x}{10} + \frac{y}{6} = 1$
14.

15. Locus of middles of the segments connecting points of circle $(x + 3)^2 + y^2 = 144$ with the center of the circle
16. Locus of points for which the sum of the distances from the points to points (−8; 0) and (8; 0) is 20
17. Locus of points for which the difference between the distances of a point to (−8; 0) and (8; 0) is 20
18. Locus of points for which the difference of the distances from the points to points (−10; 0) and (10; 0) is 16
19. Locus of middles of the segments connecting the origin of the coordinate system with the points of hyperbola $\frac{x^2}{256} - \frac{y^2}{144} = 1$
20. Locus of points resulting from multiplication of y coordinates of the points of hyperbola $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{64} = 1$ by 0.75
21. Locus of points for which the ratio of the lengths of tangent lines from the points to circle $x^2 + y^2 = 64$ and the distances between the points and x axis is 5/3
22. Locus of points for which the ratio of the lengths of tangent lines from the points to circle $x^2 + y^2 = 36$ and the distances between the points and y axis is 0.8
23. $\frac{x^2}{8^2} - \frac{y^2}{6^2} = 1$
24.
25. Locus of points for which the distance between the points and point (−3; 0) is 6
26. $y^2 = 20x$

El cuadro 1. Representación los elementos incluidos en cada versión de la tarea.

En el cuadro 2 los autores nos resumen las características de los ítems por los dos tipos de variaciones. La última fila de la Tabla 2 nos muestran que el conjunto estaba bastante equilibrado con respecto a la clasificación por los tipos de loci de puntos. La última columna de la Tabla 2 muestra que el conjunto también fue considerablemente rico con respecto a las oportunidades para clasificar los ítems por diferentes tipos de representaciones y items dados en las descripciones verbales.



Representation	Name						
	Straight line	Circle	Parabola	Ellipse	Hyperbola	Empty set	Overall number of items
Symbolic	13			4	23		3
Graphical	14	2	24				3
Verbal representations: the generating operation							
Sum of distances				16			1
Difference of distances					18	17	2
Ratio of distances greater than 1	6	11			3, 21		4
Ratio of distances smaller than 1				1, 22		7	3
Ratio of distances equals 1	12		5, 8				3
Stretching		15	10	9	19, 20		5
Verbal representations: the generating elements							
Two points	12	11		16	18	17	5
A point on the straight line	6					7	2
A point and a straight line			5	1	3		3
A circle and a straight line			8	22	21		3
A circle and a point		15					1
A circle				9			1
A parabola and a point			10				1
A hyperbola and a point					19		1
A hyperbola					20		1
Overall number of items	4	3	4	5	6	2	

Cuadro 2. Dos tipos de variación prevista en la primera versión de
la tarea de clasificación de LP

En términos del espacio de variación bidimensional de la tarea del LP, el objeto de aprendizaje previsto (discernir las propiedades estructurales y las conexiones entre los conceptos básicos de la geometría analítica representados de diferentes maneras) se convirtio en un objeto de aprendizaje en acción cuando los participantes consideraron el criterio de clasificación *por los nombres de los lugares de los puntos* junto con los criterios *por las principales operaciones de generación* y *por los principales elementos generadores*.

Esto señalan los autores que se debió a que la consideración y el uso de estos criterios permitieron a los participantes discernir que los mismos objetos de la geometría analítica pueden describirse mediante diferentes operaciones y elementos generadores y que formulaciones verbales de aspecto similar pueden describir objetos diferentes.

De esta forma, Koichu et al. (2015), indican que la recolección y obtención de los datos empiricos en este estudio (para las tres versiones de la tarea) consistieron en las discusiones de grupos pequeños y de todo el grupo grabadas en cinta de video transcritas (aproximadamente 7 h de cinta de video), además de las acciones de clasificación de los participantes: Las cámaras de video estaban dirigidas a las mesas para que se capturaran los movimientos físicos de las cartas en el proceso de clasificación.

La actuación de cada pequeño grupo se grabó en vídeo durante todo el proceso de clasificación. Al final del proceso de clasificación, se recogieron las hojas de clasificación completadas.

Por ejemplo, mencionan en el artículo que un participante en uno de los grupos sugirió clasificar los elementos " por los tipos de representaciones ", y luego los miembros del grupo movieron físicamente las tarjetas para formar tres grupos que constan de los elementos representados gráfica, verbal y simbólicamente.

En consecuencia, señalan que el criterio “por el tipo de representación” se dedujo de este episodio como uno de los criterios formulados por el grupo, aunque el grupo no lo escribió en una hoja de clasificación. Por lo que, mencionan que al surgir un criterio particular en la discusión varias veces, se contó este número de veces mencionado.

Por otro lado, se señala que para asegurar la confiabilidad de la identificación de los criterios de clasificación basados en los datos grabados en video y escritos, tres analistas, dos de los cuales desconocían las preguntas de la investigación, analizaron los datos escritos y grabados en video del primer taller y decidieron de forma independiente qué criterios de clasificación se habían aplicado y considerado por los participantes del estudio (p. ej., Wiersma 1995). Indican que nn la mayoría de los casos (18 de 21), los tres analistas dedujeron los mismos criterios. Los desacuerdos se resolvieron en la discusión entre los analistas.

A continuación, se identificaron las ocasiones en las que se tomaron decisiones sobre cómo clasificar un elemento verbal concreto según los criterios de clasificación formulados (en adelante, decisiones de clasificación), también mediante la yuxtaposición del discurso y las acciones de clasificación de los participantes.

Cada decisión de clasificación se codificó según el tipo de experiencia de clasificación, de la siguiente manera: (1) experiencia de clasificar el ítem *resolviéndolo*, es decir, aplicando manipulaciones algebraicas antes de colocarlo en un grupo determinado; (2) experiencia de clasificar el ítem sin aplicar manipulaciones algebraicas, reconociendo oralmente sus propiedades. El siguiente es un ejemplo de afirmación, que nos permitió codificar una decisión de clasificación concreta (en relación con el ítem 16, véase el cuadro 1) como *reconocimiento del objeto familiar por el estudio anterior*: *El objeto no es un objeto de la familia*.

Profesor: Estoy familiarizado con esta definición de elipse. No necesitamos resolverla.

De la primera version de la tarea los autores observaron que todos los grupos partieron de la forma más aparente de clasificar, por los tipos de representaciones, pero sólo un grupo lo escribió en la hoja de clasificación.

Esto sugiere que la mayoría de los participantes no percibían esta forma como digna de ser compartida. Basándonse en el discurso grabado de los pequeños grupos, sugeriendo que esto se debe a que consideraron este criterio demasiado obvio o sin esfuerzo.

En esta primera versión de la tarea, los autores señalan que quedó claro que el número total de elementos era abrumador para los profesores. Las afirmaciones típicas, durante el trabajo en pequeños grupos sobre la tarea, sobre esta cuestión fueron las siguientes:

- Hay demasiadas tarjetas. Es imposible considerarlas todas.
- Es mucho trabajo... todavía tenemos que clasificar 5 tarjetas, pero no quiero hacerlo más...
- El tema de la sobrecarga fue central también en la discusión reflexiva:
- El ejemplo introductorio con los polígonos estaba bien, pero aquí era difícil construir los grupos [de elementos] porque había muchas cosas que resolver.
- No tuvimos suficiente tiempo. Fue decepcionante, ya que pensé que habíamos propuesto muchos criterios interesantes.

La segunda versión constó de 18 ítems. En esta versión, los autores excluyeron los ítems que se habían abordado únicamente de forma algebraica (8, 10, 15, 19, 20 y 21 en el cuadro 1). Aunque el espacio de variación previsto se redujo en la segunda versión, en comparación con la primera, comprobaron que el espacio de variación en acción se enriqueció.

En general, señalan que los profesores que trabajaron en 5 pequeños grupos y propusieron un total de 30 criterios. Los principales criterios de clasificación fueron :

- El criterio "por el tipo de representación (simbólica, gráfica o verbal)", 9 veces;
- El criterio "por el nombre del lugar de los puntos (parábola, hipérbola, etc.)", 5 veces;
- El criterio "por las palabras clave en las descripciones de los ítems (suma de distancias, proporción, etc.)", 7 veces,

- y el criterio "por la capacidad del grupo de identificar los lugares sin resolver el ítem". (''la facilidad de solución'')-3 veces.

La forma de clasificar "por los nombres de los loci de puntos" fue considerada por todos los grupos que trabajaron en la segunda versión relativamente pronto, es decir, después de formular uno o dos criterios y antes de formular otros dos o cuatro criterios. Para recordar, 5 de los 6 grupos que trabajaron en la primera versión de la tarea consideraron este criterio como el último. Este hallazgo mencionan los autores sugiere que, en esta versión, los profesores se dedicaron más a buscar similitudes y diferencias estructurales entre los ítems que en la primera versión de la tarea.

Hablando de forma reflexiva, los autores concluyen que en esta segunda versión de la tarea, el uso de manipulaciones algebraicas apoyó las decisiones de clasificación de los profesores, pero no fue la principal experiencia que obtuvieron de la tarea. En particular,dado que no había ítems verbales, que se abordarán sólo algebraicamente.

Una diferencia esencial entre la segunda y la tercera versión que propusieron los autores parece estar relacionada con los tipos de experiencia utilizados para tomar decisiones de clasificación. Ellos señalan, que de las 55 decisiones de clasificación, 41 (75 %) se basaron en el uso de conocimientos previos (de éstas, 28 decisiones fueron matemáticamente correctas), y sólo 8 decisiones (15 %) en manipulaciones algebraicas (dos de estas decisiones fueron matemáticamente correctas).

Los autores observaron que los participantes habían prestado atención a las similitudes y diferencias estructurales, en términos de diferentes combinaciones de operaciones y elementos generadores, entre los objetos considerados. Estos autores mencionan de manera rflexiva que las dos principales subcategorías representadas del criterio *por palabras clave* en la tercera versión de la tarea son- *por la principal operación generadora* y *por los principales elementos generadores*-.

Finalmente, tal y como se presentó, en cada versión sucesiva de la tarea de clasificación del LP, el objeto de aprendizaje representado (es decir, las experiencias ofrecidas por la tarea) estaba más cerca del objeto de aprendizaje previsto (es decir, discernir las propiedades estructurales y las conexiones entre los conceptos básicos de la geometría analítica representados de diferentes maneras) que en la anterior. De lo que los autores logran discernir y formular cuatro heurísticas que pueden informar sobre del diseño de futuras tareas matemáticas con base en la teoría de la variación para los profesores de matemáticas como aprendices:

- **Heurística 1.** Los principios teóricos generales pueden ser útiles para el diseño inicial de la tarea, pero el diablo está en los detalles.
- **Heurística 2.** Las experiencias reales de los alumnos con una tarea de clasificación dependen del grado de trabajo ''técnico'' (en contraposición al ''conceptual'') necesario para realizar la tarea.
- **Heurística 3**. A veces, menos es más.
- **Heurística 4**. El diseño de la actividad de varios pasos debe tener en cuenta que las decisiones fáciles de tomar, por regla general, preceden a las decisiones más díficiles.

La principal contribución que indican los autores del presente estudio al creciente cuerpo de conocimientos sobre el diseño de tareas en la educación matemática, en general, y sobre el diseño de tareas de ordenación o clasificación, en particular, se ha dilucidado en la sección anterior, en términos de cuatro heurísticas. Donde se analiza explícitamente los efectos de una tarea concreta en términos de espacios de variación multidimensional y en conexión explícita con el conocimiento previo de los alumnos.

El estudio intentó revelar no sólo el potencial de aprendizaje de la tarea, como han hecho un número considerable de estudios, sino también las experiencias reales de los alumnos con diferentes versiones de la tarea en su complejidad y en el nivel de toma de decisiones de grano fino.

1.6 EXPERIMENTOS DE ENSEÑANZA

La metodología de los experimentos de enseñanza se ha originado con la intención de comprender el desarrollo de los conceptos en los estudiantes, en áreas particulares de la matemática (Simon, 2000).

De forma general, un experimento de enseñanza consiste en una secuencia de episodios de enseñanza en los que los participantes son normalmente un investigador-docente, uno o más alumnos y uno o más investigadores-observadores (Steffe y Thompson, 2000, citados en Molina *et al.*, 2011).

Seguidamente se presentan las características centrales de los experimentos de enseñanza, las cuales también están implicadas en los experimentos sobre el desarrollo del conocimiento del profesor.

a) ***Profesor-investigador:*** los experimentos de enseñanza han resultado ser una opción a los paradigmas en los cuales los investigadores son observadores o cuantificadores de situaciones "naturales" o "experimentales".

El doble papel de investigador y profesor proporciona una oportunidad para que este desarrolle conocimiento a través de múltiples iteraciones de un ciclo de reflexión-interacción. Esta ruptura de la diferenciación entre docente e investigador está motivada por el propósito de experimentar de primera mano el aprendizaje y razonamiento de los alumnos (Kelly y Lesh, 2000; Steffe y Thompson, 2000).

Como parte del ciclo de reflexión-interacción, el investigador aplica a las interacciones con los estudiantes su conocimiento personal y aquel compartido por la comunidad de investigación, incluyendo conjeturas actuales sobre el fenómeno estudiado. La intuición y patrones de acción del investigador, los cuales no son parte de su conocimiento explícito, también contribuyen a la interacción.

La interpretación de las interacciones por parte del investigador, le permite respaldar o constatar algunos aspectos de su conocimiento y desafiar otros, dando como resultado la modificación de lo sabe. De modo que este ciclo es esencial en los experimentos de enseñanza, pues posibilita a los investigadores mejorar su conocimiento acerca de cómo aprenden los estudiantes. En general, se espera que todos los participantes del experimento construyan aprendizajes (Molina *et al*., 2011).

b) ***Análisis continuos y retrospectivos:*** los experimentos de enseñanza implican dos niveles de análisis de datos: (a) los continuos, que ocurren durante y entre las sesiones con los estudiantes, y (b) el retrospectivo, que se enfoca en el conjunto total de las sesiones. Cada nivel de análisis sirve al investigador de forma particular.

Los análisis continuos son la base de las decisiones que se toman en la planificación y desarrollo de cada sesión con los estudiantes, permiten probar las hipótesis y promover el desarrollo. Un aspecto clave es la generación y modificación, por parte del investigador, de los modelos relativos al conocimiento, acciones y disposiciones de los estudiantes. El análisis retrospectivo implica una reexaminación de un gran cuerpo de información. Este implica una revisión estructurada de las grabaciones del experimento de enseñanza, con el propósito de desarrollar modelos explicativos acerca del desarrollo del conocimiento matemático de los estudiantes.

c) ***Construcción del modelo:*** el fin del experimento de enseñanza es la elaboración de un modelo explicativo del desarrollo del conocimiento matemático de los estudiantes. Estos modelos explicativos empiezan a ser esbozados durante los análisis continuos, sin embargo, es durante el análisis retrospectivo cuando son articulados con más detalle.

De acuerdo con Molina et al. (2011) el objetivo último del experimento de enseñanza es: "Elaborar un modelo del aprendizaje y/o desarrollo de los alumnos, en relación con un contenido específico, entendiendo este aprendizaje como resultado de la manera de operar y las situaciones puestas en juego por el investigador-docente" (p.79).

d) ***Generación y prueba de hipótesis:*** el experimento de enseñanza conlleva ciclos continuados de generación y prueba de hipótesis. Las conjeturas actuales de los investigadores guían sus interacciones con los estudiantes. Tales interacciones proporcionan información que respalda o genera modificaciones de esas suposiciones y también promueve la elaboración de nuevas conjeturas. Las hipótesis iniciales del equipo investigador guían el desarrollo del plan inicial de investigación.

e) ***Grabación:*** la grabación de las sesiones con los estudiantes usualmente se complementa con la videograbación. La transcripción de las grabaciones en audio y video es esencial en el análisis posterior. Frecuentemente, las grabaciones se escuchan o se miran en medio de las sesiones, para apoyar los análisis continuados y la toma de decisiones.

1.7 CONSIDERACIÓN PEDAGÓGICA DE LOS CONCEPTOS BÁSICOS DE LA ARGUMENTACIÓN, JUSTIFICACIÓN Y PRUEBA MATEMÁTICA EN EL CURRICULUM DEL BACHILLERATO

El modelo educativo establecido en la Educación Media Superior de México (INEE, 2017) considera los desempeños terminarles de los estudiantes, sin importar el subsistema al cuál pertenezcan, a partir del desarrollo de un conjunto de competencias. En este sentido, el Marco Curricular Común (MCC) permite articular los programas de distintas opciones de la EMS en el país; además, comprende una serie de desempeños terminales expresados como:

(I) Competencias genéricas,
(II) Competencias disciplinares básicas y extendidas (de carácter prope- déutico) y
(III) Competencias profesionales básicas y extendidas (para el trabajo).

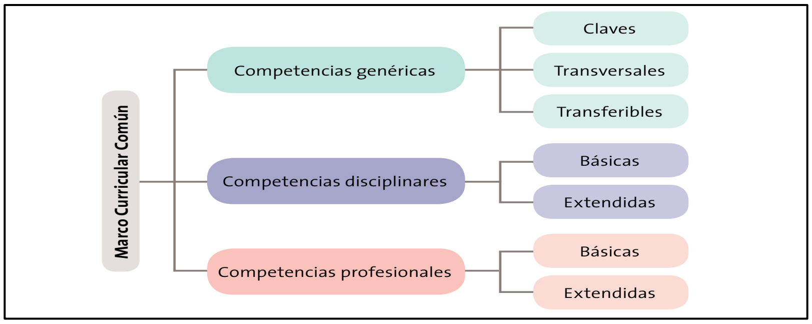


Figura.1.11. Marco curricular común

De tal manera, que las competencias disciplinares básicas de matemáticas buscan propiciar el desarrollo de la creatividad y el pensamiento lógico y crítico entre los estudiantes. Un estudiante que cuente con las competencias disciplinares de matemáticas puede argumentar y estructurar mejor sus ideas y razonamientos.

Las competencias reconocen que a la solución de cada tipo de problema matemático corresponden diferentes conocimientos y habilidades, y el despliegue de diferentes valores y actitudes. Por ello, los estudiantes deben poder razonar matemáticamente, y no simplemente responder ciertos tipos de problemas mediante la repetición de procedimientos establecidos. Esto implica el que puedan hacer las aplicaciones de esta disciplina más allá del salón de clases. En la siguiuente tabla se muestra un bosquejo general de los programas de bachillerato general y tecnológico del campo disciplinar de matemáticas.

Campo disciplinar	Programas de estudio Bachillerato General	Programas de estudio Bachillerato Tecnológico
Matemáticas	Matemáticas I Matemáticas II Matemáticas III Matemáticas IV	Álgebra Geometría y trigonometría Geometría analítica Cálculo diferencial Cálculo Integral Probabilidad y estadística

Tabla 1.9. Bosquejo general de los programas de estudio del bachillerato general y tecnológico

Por otro lado, dentro de la comunidad matemática, el tema de la prueba es frecuentemente un tema de debate; El razonamiento deductivo se contrasta con la inducción natural de las actividades empíricas y con la argumentación informal. Sin embargo, la investigación sugiere que los estudiantes de bachillerato no encuentran estas distinciones fáciles (véase, por ejemplo, Martin y Harel, 1989). El proceso de prueba es innegablemente complejo, involucrando una variedad de competencias de los estudiantes, identificando supuestos, aislando propiedades y estructuras dadas, y organizando argumentos lógicos, cada uno de los cuales de ninguna manera es trivial.

En ese sentido, en la educación matemática, la investigación empírica sobre este tema ha tendido a centrarse en describir y analizar las respuestas de los estudiantes a las preguntas que requieren pruebas. Una gran cantidad de evidencia indica que la mayoría de los estudiantes tienen dificultades para seguir o deducir cómo construir argumentos presentados formalmente, entendiendo que difieren de la evidencia empírica, y en su uso para obtener resultados adicionales (Balacheff, 1988; Chazan, 1993; Fischbein, 1982; Harel y Sowder, 1998; Porteous, 1994; Schoenfeld, 1989).

Los enfoques de los estudiantes para probar se han clasificado en varias dimensiones: desde pragmático, que implica recurrir a acciones, hasta conceptual, argumentar desde propiedades y relaciones (Balacheff, 1988; van Dormolen, 1977); de deducción débil a fuerte (Bell, 1976; Coe y Ruthven, 1994); de acuerdo con diferentes representaciones: enactiva, visual, numérica, formal (Tall, 1998) y diferentes esquemas de prueba transformadores (Simon, 1996), analíticos, empíricos y externos (Harel y Sowder, 1998).

Muchos estudios (por ejemplo, Bell, 1976; Mason, 1982) han argumentado que los estudiantes deberían tener la oportunidad de probar y refinar sus propias conjeturas y obtener una convicción personal de su verdad junto con la experiencia de presentar generalizaciones y evidencia de su validez.

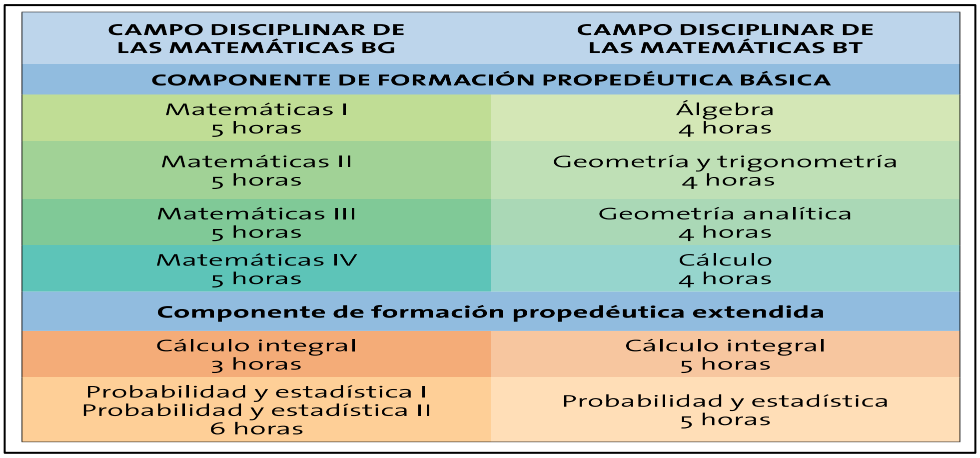
En México con base en el Acuerdo Secretarial 444 que establece las competencias del Marco Curricular Común para el Sistema Nacional de Bachillerato (INEE, 2017) se asume a las competencias disciplinares básicas de las matemáticas como el medio para propiciar el desarrollo de la creatividad y el pensamiento lógico y crítico entre los estudiantes. Así, el estudiantado que cuente con dichas competencias en las matemáticas, argumentará y estructurará de mejor manera sus juicios, ideas y razonamientos.

Las competencias matemáticas favorecen entre los estudiantes las capacidades para analizar, razonar y comunicar de forma eficaz; a la vez que le abren la posibilidad de plantear, resolver e interpretar situaciones matemáticas en una variedad de contextos.

En síntesis, las matemáticas, como parte de la cultura, constituyen una de las piezas más significativas de la acción civilizatoria. Esta disciplina constituye, a la vez, un objeto de estudio en sí mismo, y una herramienta imprescindible para la comprensión y el estudio de las ciencias, las humanidades y las tecnologías. Es así que favorecen, entre los educandos, la disposición a la acción: que usen, disfruten y entiendan a las matemáticas en contextos diversos, más cercanos a la realidad de quien aprende. El énfasis en el desarrollo de las competencias matemáticas favorecerá que los educandos tengan una aproximación.

> *Las matemáticas, como conjuntos de conceptos abstractos (número, variable, función, proporción y semejanza, entre otros) que se articulan en redes con apoyo de los procedimientos válidos (como la inferencia lógica –la negación, o los principios– el principio del tercero excluido, entre otros). Estos razonamientos se aplican a diversos clases o categorías de objetos, a saber, números, figuras, estructuras y transformaciones, y deben su origen a la necesidad de representar y tratar con situaciones que provienen de la vida cotidiana como el tratamiento del riesgo y la aleatoriedad, el cambio, la variación y la predicción, o los patrones, las formas y la simbolización, entre otras.*

Es por ello, que para lograr la enseñanza y, sobre todo, el aprendizaje y el arraigo a una cultura matemática, es imperativo el dominio disciplinar de los estudiantes y su participación en procesos de empoderamiento; esta doble función caracteriza al cambio educativo propuesto en el Nuevo Modelo Educativo 2018**.**



CAMPO DISCIPLINAR DE LAS MATEMÁTICAS BG	CAMPO DISCIPLINAR DE LAS MATEMÁTICAS BT
COMPONENTE DE FORMACIÓN PROPEDÉUTICA BÁSICA	
Matemáticas I 5 horas	Álgebra 4 horas
Matemáticas II 5 horas	Geometría y trigonometría 4 horas
Matemáticas III 5 horas	Geometría analítica 4 horas
Matemáticas IV 5 horas	Cálculo 4 horas
Componente de formación propedéutica extendida	
Cálculo integral 3 horas	Cálculo integral 5 horas
Probabilidad y estadística I Probabilidad y estadística II 6 horas	Probabilidad y estadística 5 horas

Tabla 1.10**.** Asignaturas revisadas del campo disciplinar de las Matemáticas

1.8 EL CONCEPTO DE ECUACIONES EN EL NUEVO PLAN DE ESTUDIOS DEL BACHILLERATO GENERAL (NME 2018)

Nuestro país, como otras naciones en el mundo, se encuentra impulsando una Reforma Educativa de gran calado. El diseño de esta reforma establece como obligación la elaboración de los planes y programas de estudio para la educación obligatoria, para que encuentre una dimensión de concreción pedagógica y curricular en las aulas. Es por ello, que los contenidos de las asignaturas son importantes porque propician y orientan el desarrollo de competencias, habilidades y destrezas.

En este sentido, el Nuevo Modelo Educativo (INEE, 2017) señala que existe evidencia de que el anterior Modelo Educativo de la Educación Media Superior (2013) no dio respuesta a las necesidades presentes ni futuras de los jóvenes. En este modelo, la *enseñanza* era dirigida de manera estricta por el profesor, era impersonal, homogénea y priorizaba la acumulación de conocimientos y no el logro de aprendizajes profundos; el *conocimiento* se encontraba fragmentado por semestres académicos, clases, asignaturas y se priorizo la memorización y la consecuente acumulación de contenidos desconectados; el *aprendizaje* se rigió por un calendario estricto de actividades en las que se les decía a los alumnos, rigurosamente, qué hacer y qué no hacer, y se incorporaron nuevas tecnologías a *viejas prácticas*. Todo ello, produjo conocimientos fragmentados con limitada aplicabilidad, relevancia, pertinencia y vigencia en la vida cotidiana de los estudiantes, así como amnesia post-evaluación en lugar de aprendizajes significativos y profundos.

En el analisis del Nuevo Modelo Educativo 2017, se puede destacar que las competencias disciplinares básicas de matemáticas buscan propiciar el desarrollo de la creatividad y el pensamiento lógico y crítico entre los estudiantes. Señala que un estudiante que cuente con las competencias disciplinares de matemáticas podrá argumentar y estructurar mejor sus ideas y razonamientos. Sin embargo, estas competencias reconocen que a la solución de cada tipo de problema matemático corresponden diferentes conocimientos y habilidades, y el despliegue de diferentes valores y actitudes. Por ello, los estudiantes deben poder razonar matemáticamente, y no simplemente responder ciertos tipos de problemas mediante la repetición de procedimientos establecidos. Esto implica el que puedan hacer las aplicaciones de esta disciplina más allá del salón de clases.

Por ello, los planes y programas de estudio de referencia proponen fortalecer la organización disciplinar del conocimiento, y al mismo tiempo, favorecer su integración inter e intra asignaturas y campos de conocimiento, a través de siete elementos organizadores.

- Aprendizajes clave.
- Aprendizaje esperado.
- Componente de los ejes.
- Contenido central.
- Contenido específico.
- Eje del campo disciplinar.
- Producto esperado.

Uno de los cambios fundamentales que se propone en este modelo consiste en enfatizar el valor de uso del conocimiento matemático por parte del estudiante, es decir colocar a las prácticas sobre el objeto formal. En ese sentido, la propuesta curricular incorpora a la algoritmia y la memorización como medios necesarios, pero no suficientes, para la construcción de conocimiento matemático, lo cual contribuye al desarrollo de una manera matemática de pensar entre el estudiantado.

El énfasis en el desarrollo de las competencias matemáticas pretende favorecer que los educandos tengan una aproximación práctica al campo disciplinar: digamos que a su significación mediante el uso (INEE, 2017).

Es por ello, que las matemáticas son vistas como conjuntos de conceptos abstractos (número, variable, función, proporción y semejanza, entre otros) que se articulan en redes con apoyo de los procedimientos válidos (como la inferencia lógica –la negación, o los principios– el principio del tercero excluido, entre otros). Estos razonamientos se aplican a diversos clases o categorías de objetos, a saber, números, figuras, estructuras y transformaciones, y deben su origen a la necesidad de representar y tratar con situaciones que provienen de la vida cotidiana como el tratamiento del riesgo y la aleatoriedad, el cambio, la variación y la predicción, o los patrones, las formas y la simbolización, entre otras.

Por ejemplo, las relaciones que guardan algunas cantidades en la naturaleza deberán representarse casi mágicamente por medio de los elementos de las estructuras numéricas y el álgebra. El manejo de los elementos del álgebra sigue las reglas bien definidas de los números que hacen de su manipulación una tarea relativamente sencilla, creando con esto las bases para la modelación matemática de los fenómenos naturales y otras situaciones de la vida cotidiana.

> *...en el ámbito de la aritmética la construcción de nuevos objetos matemáticos como "la teoría de números" que en tanto relación de equivalencia defnida en Z permite establecer importantes relaciones entre las ecuaciones algebraicas y la divisibilidad. En otras palabras la noción de congruencia es emergente de un cambio en el pensamiento matemático, más allá de las nuevas técnicas y resultados teóricos que también se logran crear y demostrar en este ámbito de la Matemática, transformándose en uno de los objetos esenciales en los que se basa el proceso de algebrización de la Aritmética. Es indudable que esto justifca sin ambigüedad la necesidad de su incorporación como otro de los elementos que ayudan a transitar, al estudiante de bachillerato, el camino de la comprensión de la ciencia que debe aprender.*

En este sentido, uno de los conceptos más importantes en matemáticas en el nivel bachillerato, esta relacionado con la solución de ecuaciones ya que éste, "tal y como se define actualmente en Matemáticas es un objeto muy elaborado como consecuencia de numerosas generalizaciones realizadas a través de una evolución de más de 2000 años" (Ruiz, 1998). Es de esta manera como la solución de ecuaciones en números enteros está estrechamente ligadas a muchos problemas de la teoría de números que pueden ser utilizados con éxito para ampliar los conocimientos en matemáticas de los alumnos del bachillerato (Guelfond, A. O. ,1979).

A continuación, se presentan en la tabla 1.11 las asignaturas pertenecientes al campo disciplinar de Matemáticas y su temporalidad en el Nuevo Modelo Educativo (INEE, 2017).

Campo disciplinar de las matemáticas (bachillerato General)	Horas
Matemáticas I	5
Matemáticas II	5
Matemáticas III	5
Matemáticas IV	5
Componente de formación propedéutica extendida	
Cálculo integral	3
Probabilidad y estadística I	3
Probabilidad y estadística II	6

Tabla 1.11. Asignaturas pertenecientes al campo disciplinar de matemáticas

El papel que desempeña la solución de ecuaciones en los planes escolares del bachillerato (INEE, 2017) es muy importante desde las matemáticas mismas, la manera en que dicho concepto es demandado en la constitución conceptual de otros conceptos, procesos o problemas matemáticos. La fortaleza de la matemática como herramienta en la solución de problemas se sustenta en su capacidad para reconocer en realidades diversos elementos comunes y transformarlos en conceptos y relaciones entre ellos, para elaborar modelos generales que luego se aplican exitosamente a problemas diversos, e incluso, bastante diferentes de aquellos que originaron el modelo.

Por ello, aprender a generalizar partiendo de lo particular es necesario para establecer propiedades entre los objetos matemáticos que representan la realidad, y comprender el alcance de estos así como su uso en la solución de los problemas. A continuación, se presenta el análisis de la solución de ecuaciones por su carácter articulador e integrador en los planes escolares del NME (2018).

1.8.1 MATEMÁTICAS I. DEL PENSAMIENTO ARITMÉTICO AL LENGUAJE ALGEBRAICO

En este eje se profundizan y amplían los aspectos de número, variable y relación proporcional propios de la Educación Básica, para plantear al Álgebra como un lenguaje que permite generalizar y expresar simbólicamente a los números y sus operaciones, y que posibilita, a su vez, la modelación de fenómenos y el planteamiento y resolución de situaciones que exigen del manejo formal de un lenguaje simbólico dotado de significados (INEE, 2017).

El Álgebra es, a la vez, un objeto de estudio en sí mismo y una forma de entender procesos de simbolización en matemáticas, ciencias y tecnologías: la fuerza del lenguaje algebraico radica en su capacidad de generalización que se expresa en el poder de la simbolización mediante variables y su manipulación, así la ***variable*** sirve para representar la edad de Pedro, la temperatura del cuerpo, el tiempo transcurrido, la conversión de moneda entre naciones, o la posición del móvil en una recta, pero también habla de manipulaciones de la variable en la construcción de múltiplos y submúltiplos, su doble, su mitad, o a través de los desplazamientos o traslados, o como un cambio de escala, entre otras.

De este modo el estudiante estaría en condiciones de reconocer la importancia de las matemáticas para su vida, pues las estaría movilizando mediante el uso de un lenguaje para el reconocimiento de patrones, para arribar a su simbolización y la generalización que se constituyen en los elementos básicos de la solución de ecuaciones (en nuestro caso, en números enteros).

Eje	**Componentes**	**Contenido central**	**Aprendizajes esperados**	**Productos esperados**
•Del pensamiento aritmético al lenguaje algebraico	•Patrones, simbolización y generalización: elementos del Álgebra básica.	•La *variable* como número generalizado, incógnita y relación de dependencia funcional: ¿cuándo y por qué son diferentes?, ¿qué caracteriza a cada una? Ejemplos concretos y creación de ejemplos. •Tratamiento algebraico de enunciados verbales – "los problemas en palabras": ¿cómo expreso matemáticamente un problema?, ¿qué tipo de simbolización es pertinente para pasar de la aritmética al álgebra? •Interpretación de las expresiones algebraicas y de su evaluación	•Transitan del pensamiento aritmético al lenguaje algebraico. •Desarrollan un lenguaje algebraico, un sistema simbólico para la generalización y la representación. •Expresan de forma coloquial y escrita fenómenos de su vida cotidiana con base en prácticas como: simplificar, sintetizar, expresar, verbalizar, relacionar magnitudes, generalizar patrones, representar mediante símbolos, comunicar ideas, entre otras. •Reconoce la existencia de las variables y distinguen sus usos como número general, como incógnita y como relación funcional.	Abordar situaciones en las que se distinga la variable como incógnita, como número generalizado y como relación de dependencia. •Generalizar comportamientos de fenómenos y construir patrones. •Representar y expresar simbólicamente enunciados verbales de actividades matemáticas.

		numérica. Operaciones algebraicas. ¿Por qué la simbolización algebraica es útil en situaciones contextuales?	•Interpreta y expresan algebraicamente propiedades de fenómenos de su entorno cotidiano. •Evalúa expresiones algebraicas en diversos contextos numéricos.	
		Resolución de ecuaciones lineales en contextos diversos: ¿qué caracteriza a la solución? •Sistemas de ecuaciones lineales con dos variables, en estrecha conexión con la función lineal: ¿qué caracteriza al punto de intersección?, ¿siempre existe solución? •Ecuaciones cuadráticas en una variable y su relación con la función cuadrática. Interpretación geométrica y algebraica de las raíces.	Significa, gráfica y algebraicamente, las soluciones de una ecuación.	Interpretar la solución de un sistema de ecuaciones lineales, analítica y gráficamente.

Tabla 1.12. Del pensamiento aritmético al lenguaje algebraico

De acuerdo con Fernandez, T. (2014), las ecuaciones diofánticas lineales, pueden considerarse como el eslabón faltante entre aritmética y álgebra. Como así mismo, su estudio nos deja ver el paso de la aritmética al álgebra, como una continuidad, y en todo caso como rupturas parciales, y no una gran grieta epistemológica, ya que en ellas es necesario el uso del álgebra en los momentos en que la aritmética resulta insuficiente, como herramienta de prueba y de resolución, como productora de conocimientos sobre lo numérico.

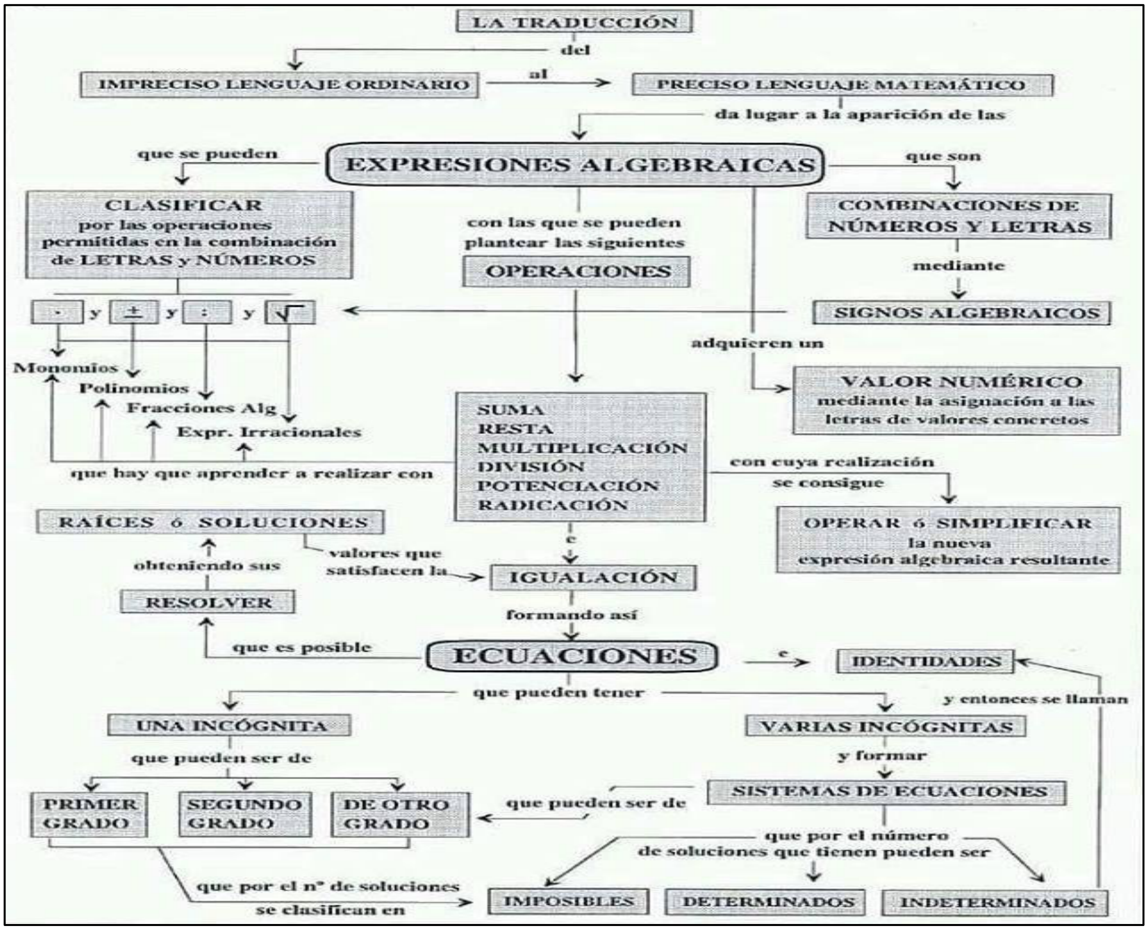


Figura 1.12. Mapa conceptual de las expresiones algebraicas

1.9 ECUACIONES DIOFÁNTICAS

Las ecuaciones diofánticas deben su nombre al matemático griego Diofanto de Alejandría. Pero históricamente estas ecuaciones tienen un origen anterior, veamos un poco del origen de las mismas. Los matemáticos de la India se interesaron en encontrar soluciones enteras a las diferentes ecuaciones, así en el siglo VII a. C. se estudiaron las soluciones enteras a varias ecuaciones diofánticas simultaneas.

La teoría de números fue una de las disciplinas de estudio favoritas para los matemáticos helenos de Alejandría a partir del siglo III a. C.. Destaca entre todos los matemáticos de la época el ya mencionado Diofanto de Alejandría, quien escribió un tratado, “Aritmética”, de 13 libros de los que se conservan 6 en la actualidad. Esta obra fue traducida por los árabes y traducida al latín en el siglo XVI. Desde entonces muchos han sido los matemáticos que han trabajado en estas ecuaciones como Lagrange, Euler, Gauss o Fermat.

Destaca en la resolución de ecuaciones diofánticas el conocido Teorema de Fermat que nos indica que la igualdad $x^n+y^n=z^n$ sólo tiene soluciones con x,y,z números enteros si n es menor que dos. Aunque este teorema fue conjeturado por Fermat en el siglo XVII no es hasta el año 1995 cuando es demostrado por el matemático británico Andrew Wiles.

El interés de estudiar este tipo de ecuaciones en este trabajo recae en que la resolución de ecuaciones es un tema que se desarrolla desde secundaria y se consolida en bachillerato desde los primeros niveles (matemática I y II) y, que a su vez, permite el estudio de los diversos conjuntos numéricos (naturales, enteros, racionales, iiracionales y reales). Sin embargo, no hay un espacio especial dentro de los planes y programas de matemáticas (INEE, 2017) para las ecuaciones diofánticas, que por lo general pueden ser catalogadas como dificiles y laboriosas. Gracián (2013) señala que el interés que encierra la resolución de una ecuación diofántica esta en relación directa con la naturaleza de las incógnitas. Por ejemplo, si lo que se plantea en una ecuación se hace referencia al volumen de un líquido no importará, en principio, que la solución incluya cantidades fraccionarias; pero si se trata, por ejemplo, del número de personas que pueden asistir a una reunión, esta claro que únicamente tendrán sentido las soluciones enteras, ya que crecería de sentido dividir a una persona en trozos.

1.9.1 ECUACIONES DIOFÁNTICAS LINEALES

El planeamiento anterior, es el motivo de este trabajo, el cual pretende revisar algunas ecuaciones algebraicas y buscar sus soluciones en el campo de los números enteros y en alguna de estas encontrar un patrón para localizar estas soluciones. Estas ecuaciones, cuyas soluciones encontramos en los números enteros, son trabajadas desde miles de años, su precursor fue Dioanto de Alejandría, por lo que este tipo de ecuaciones, las cuales estudiaremos, son llamadas Ecuaciones Diofánticas.

Consideremos el problema de resolver $ax + by = c$ en enteros. Aquí a, b, c son dados y se debe determinar $x, y \in Z$. Las condiciones de existencia de soluciones y el método para obtenerlas se basa en el algoritmo extendido de Euclides.

Teorema

La ecuación diofántica lineal $ax + by = c$ tiene soluciones $x, y \in Z$ si y sólo si mcd $(a, b)|c$

Prueba: Sea d = mcd (a, b)
"$= \Rightarrow$": Si existen $x, y \in$ Z tal que $c = ax + ay$, entonces $d|c$ pues $d|a$ y $d|b$.
"$\Leftarrow =$": Si $d|c$ entones $c = kd$. Como podemos determinar, usando el algoritmo extendido de Euclides, $s, t \in$ Z tal que $d = sa + tb$, entonces $c = kd = (ks)a + (kt)b$ y una solución de la ecuación diofántica lineal sería $x = ks$ y $y = kt$.

Solución general. La solución general se establece al estilo de las ecuaciones diferenciales y el álgebra lineal: Primero se busca la solución de la ecuación homogénea $ax + by = 0$ y la solución general de la ecuación $ax + by = c$ se expresa usando esta solución.

Teorema

Sea d = mcd (a, b). Las soluciones de la ecuación diofántica lineal homogénea $ax + by = 0$ son de la forma,

$$\mathrm{x} = \frac{b}{d}\, t \qquad \mathrm{y} = -\frac{a}{d}\, t \qquad \text{con } \mathrm{t} \in \mathrm{Z}$$

Prueba: Claramente $\frac{a}{d}$ y $\frac{b}{d}$ son enteros. Sustituyendo directamente "x" e "y" se observa que efectivamente son soluciones de la ecuación homógenea para cualquier $t \in$ Z.

Ahora hay que mostrar que cualquier otra solución "x", "y" $\in$ Z tiene esa forma. Sea $a = kd$ y $b=k'd$.

$ax+by=0 \implies ax = -by \implies kx = -k'y$. Esto último dice que $k|(-k'y)$. Ahora como mcd$(k,k)=1$,entonces por el corolario 2.5, $k|(-y)$.

Por tanto $y= -\frac{a}{d}\, t \qquad \mathrm{x} = \frac{b}{d}\, t \qquad \text{con t} \in \mathrm{Z}$

Teorema

Sea d = mcd(a,b). Si la ecuación diofántica lineal $ax + by = c$ tiene una solución

$x = x_0, \quad y = y_0,$

Entonces la solución general es $\quad x = x_0 + \frac{b}{d}\,t, \quad y = y_0 - \frac{a}{d}\,t \quad$ con t $\in$ Z

Prueba: Sean $x = x_0$, $y = y_0$, solución de $ax + by = c$. Tenemos,

$$\begin{cases} ax + by = c \\ \\ ax_0 + by_0 = c \end{cases} \Rightarrow \overbrace{a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0}^{\text{Ecuación homogénea}} \Rightarrow \begin{cases} x - x_0 = (b/d)t \Rightarrow x = x_0 + (b/d)t \\ \\ y - y_0 = (-a/d)t \Rightarrow y = y_0 - (a/d)t \end{cases}$$

1.9.2 ALGORITMO DE EUCLIDES

El algoritmo de Euclides es un procedimiento para calcular el máximo común divisor (m.c.d.) de dos números. Euclides fue un matemático griego que recopiló varios datos en su obra llamada Elementos. Esta obra es considerada como uno de los pilares de las matemáticas, y Euclides el *padre de la Geometría*.

En sus *Elementos de Geometría*, Euclides explica que el máximo común divisor de dos números se puede encontrar dividiendo el número mayor por el número menor. Si la división es exacta, el M.C.D. es el número menor. Si la división no es exacta, entonces se toma el residuo, y se divide tantas veces como haga falta para llegar a una división sin residuo. El M.C.D. es el último número por cuál se puede dividir.

Aunque la palabra algoritmo nos hace pensar en cálculos complejos, en nuestro caso el cálculo es mucho más sencillo. Solo hace falta seguir los siguientes pasos.

Sean a, b $\in$ N tales que $b \leq a$.

Como calcular el máximo común divisor de a ***y de*** b

Paso 1: Dividiendo a entre b obtenemos:

$$a = q_1 b + r_1 , \quad \text{con} \quad 0 \leq r_1 < b.$$

• Si $r_1 = 0$, entonces mcd (a, b) = mcd (b, 0) = b y hemos acabado.

• Si $r_1 \neq 0$, pasamos al Paso 2.

Paso 2: Dividimos b entre r_1 obtenemos:

$$b = q_2 r_1 + r_2, \quad \text{con} \quad 0 \leq r_2 < r_1.$$

• Si $r_2 = 0$, entonces mcd (a, b) = mcd (b, r_1) = mcd (r_1, 0) = r_1 y hemos acabado.

• Si $r_2 \neq 0$, pasamos al Paso 3.

Paso 3: Dividimos r_1 entre r_2 obtenemos:

$$r_1 = q_3 r_2 + r_3 , \quad \text{con} \quad 0 \leq r_3 < r_2.$$

• Si $r_3 = 0$, entonces mcd (a, b) = mcd (b, r_1) = mcd (r_1, r_2) = mcd (r_2, 0) = r_2
y hemos acabado.

• Si $r_3 \neq 0$, pasamos al Paso 4.

Los resultados de las sucesivas divisiones los podemos escribir entonces de la siguiente forma:

$$\begin{array}{lll}
\text{Paso 1:} & a = q_1 b + r_1 & 0 < r_1 < b \\
\text{Paso 2:} & b = q_2 r_1 + r_2 & 0 < r_2 < r_1 \\
\text{Paso 3:} & r_1 = q_3 r_2 + r_3 & 0 < r_3 < r_2 \\
\quad\vdots & \qquad\vdots & \qquad\vdots \\
\text{Paso } n-1\text{:} & r_{n-3} = q_{n-1} r_{n-2} + r_{n-1} & 0 < r_{n-1} < r_{n-2} \\
\text{Paso } n\text{:} & r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n & 0 \leq r_n < r_{n-1}
\end{array}$$

Paso 4: Este proceso continúa hasta que lleguemos a una división con resto cero.

La sucesión de restos $(r_k)_{k \geq 1}$ es finita por ser estrictamente decreciente:

$$0 \leq \cdots < r_3 < r_2 < r_1.$$

El u´ltimo resto no nulo es entonces el máximo común divisor buscado.

Supongamos que el último resto nulo es $r_n = 0$, entonces mcd (a, b) = r_{n-1}.

1.9.2.1 ALGORITMO EXTENDIDO DE EUCLIDES

El algoritmo de Euclides no sólo sirve para encontrar el máximo común divisor de dos números, sino que también nos indica que el *mcd* se puede expresar como combinación lineal de los mismos. Además, el *MCD* es el menor entero positivo en que estos dos números se pueden usar como combinación lineal. Lo que buscamos con el algoritmo extendido de Euclides, son los coeficientes de esta combinación lineal.

Esta propiedad resulta de gran utilidad, sobre todo al momento de resolver ecuaciones Diofantinas (ecuaciones de la forma $ax + by = c$, donde todos son enteros y a, b y c son constantes). Otra aplicación útil es que cuando a y b son primos relativos (por lo que $c = 1$), entonces x es el inverso multiplicativo de a módulo b. Por ejemplo, para $5x + 3y = 1$, una solución es $5(-1) + 3(2) = 1$, y tenemos que $5(-1) \equiv 1 \bmod 3$ y $3(2) \equiv 1 \bmod 5$.

Para encontrar los valores de x e y, consideremos lo siguiente. Expresando el *MCD* como combinación lineal de las entradas, implica que $c = MCD$:

$$MCD\,(a, b) = ax + by$$

También sabemos que:

$$MCD\,(a, b) = MCD\,(b, a \bmod b)$$

Si hacemos que $a_1 = a$, $b_1 = b$, $a_2 = b$ y $b_2 = (a \bmod b) = a - bk$, donde k es entero, entonces:

$$MCD(a_1, b_1) = MCD\,(a_2, b_2)$$

Reemplazando en la primera ecuación tenemos:

$$\begin{aligned} MCD\,(a_1, b_1) &= a_1x_1 + b_1y_1 \\ MCD\,(a_2, b_2) &= a_2x_2 + b_2y_2 \\ &\vdots \\ MCD\,(a_n, b_n) &= a_nx_n + b_ny_n \end{aligned}$$

Si hacemos $MCD\ (a,b) = d$, y suponiendo que tenemos dos iteraciones además de los valores de x e y para la segunda (x_2, y_2):

$$MCD\ (a_1, b_1) = a_1x_1 + b_1y_1 = d$$
$$MCD\ (a_2, b_2) = a_2x_2 + b_2y_2 = d$$

Sabemos que $a_2 = b_1$, $b_2 = a_1 - b_1k$ y $k = \frac{a1}{b1}$, por lo que:

$$d = a_1x_1 + b_1y_1$$
$$d = a_2x_2 + b_2y_2 = b_1x_2 + (a_1 - b_1k)\ y_2$$

Uniendo las dos ecuaciones:

$$a_1x_1 + b_1y_1 = b_1x_2 + (a_1 - b_1k)y_2 = a_1y_2 + b_1(x_2 - ky_2)$$

Lo anterior se cumple si:

$$x_1 = y_2$$
y $$y_1 = x_2 - ky_2 = x_2 - \frac{a1}{b1}y_2$$

Con esto, podemos calcular los valores de x e y en base a lo anteriores. Ahora sólo necesitamos obtener cuales son los valores iniciales. Sabemos que en la última iteración $a_n = d$ y $b_n = 0$, entonces nos queda que:

$$MCD\ (a_n, b_n) = a_nx_n + b_ny_n$$
$$d = dx_n + 0y_n$$
$$x_n = 1, y_n = 0$$

Ejemplo. Calcular el máximo común divisor de los números 141 y 96. Encontrar números u y v tales que 141u + 96v= d. Hacer comprobaciones.

Solución. Primero apliquemos el algoritmo de Euclides:

141 = 96 * 1 + 45;
96 = 45 * 2 + 6;
45 = 6 * 7 + 3;
6 = 3 * 2 + 0.

De aquí concluimos que d = 3. Comprobamos que 3 es un divisor común de 141 y 96:

141= 3 * 47,   96 = 3 * 32.

Ahora calculemos u y v. Vamos a representar cada uno de los residuos del algoritmo de Euclides como una combinación lineal entera de 141 y 96. Empezamos con 141 y 96:

141 =141 *1 + 96 * 0;

96 = 141 * 0 + 96 *1.

Luego usamos las igualdades del algoritmo de Euclides para expresar cada residuo a través de dos anteriores y representarlo como una combinación lineal entera de 141 y 96:

45 = 141 – 96 = (141 *1 + 96 * 0) – (141* 0 + 96 *1) = 141 * 1 + 96 * (-1);
6 = 96 – 45 * 2 = (141 * 0 + 96 * 1) – (141 * 1 + 96 *(-1)) * 2 = 141 * (-2) + 96 * 3;
3 = 45 – 6 * 7 = (141 * 1 + 96 * (-1) – (141 * (-2) + 96 *3) * 7 = 141 * 15 + 96 * (-22);

Hemos encontrado u y v:

u = 15,   v = – 22.

Comprobemos que 141u + 96v = d:

141 * 15 + 96 * (– 22) = 2115 – 2112 = 3.

CAPITULO II. MARCO TEÓRICO

2.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La matemática es una de las herramientas mentales más influyentes para ser utilizada en la vida de un hombre durante siglos (Skemp, 1985). Los estudiantes necesitan adquirir conocimientos y habilidades matemáticas para competir y sobrevivir en la vida. Estas habilidades incluyen razonamiento lógico, habilidades para resolver problemas y la capacidad de pensar de manera abstracta (INEE, 2017).

El desafío en la educación de hoy es enseñar a los estudiantes de manera efectiva habilidades diversas y diferentes ritmos de aprendizaje para que puedan aprender conceptos matemáticos con comprensión y desarrollar motivación positiva e interés hacia el aprendizaje de las matemáticas.

Los resultados de algunos estudios internacionales sugieren un dominio incompleto y deficiente de los conceptos relacionados, así como la incapacidad de aplicar el conocimiento previo relevante entre los estudiantes (Lim, 2010; Siti Aishah, 2010; Nadirah, Yusof, Siti Fatimah, Rahimah y Ezrinda, 2012), también se han reportado hallazgos similares en otros países; Finlandia, Suecia y Sudáfrica (Tossavainen, Attorps y Väisänen, 2011; Viirman, Attotps y Tossavainen, 2011) que sugieren que los estudiantes tienen dificultades similares para comprender por ejemplo el concepto estructural de ecuación, igualdad y función.

En México se insta a los maestros a que incorporen varios enfoques de enseñanza en su enseñanza y aprendizaje, sin embargo, los informes de estudios locales (Rojano y Solares, 2017) han demostrado que la exposición y el ejercicio siguen siendo el enfoque de enseñanza más común adoptado por los maestros de matemáticas.

Los resultados de algunas investigaciones (Rojano y Solares, 2017) sobre el impacto de las reformas educativas en las clases de matemáticas en el bachillerato en México señalan que con frecuencia los profesores siguen utilizando, en mayor o menor medida, los enfoques anteriores a éstas.

Se adaptan los nuevos recursos utilizando estrategias previas aun cuando los aprendizajes de las matemáticas en sus estudiantes sigan siendo deficientes (de acuerdo a la prueba PISA 2015, México agrupa sólo a 3% de sus estudiantes en los niveles altos, a 40%

en los niveles intermedios (niveles 2 y 3), y a 57% en los niveles inferiores (nivel 1 y Debajo del nivel 1).

Al respecto, se destaca la relación que existe de las acciones en el aula "con creencias y convicciones y no sólo con destrezas didácticas", y se señala que "modificar las concepciones y el núcleo de las creencias resulta mucho más complejo (Ávila, 2009, p.350). Sin embargo, las investigaciones reportan que las "estrategias de los maestros han tendido a establecer equilibrios entre las prácticas propias y algunos de los planteamientos de la propuesta curricular" (Block et al, 2007, p.286), además puntualizan que el conflicto parece ser un elemento clave para generar los cambios en las prácticas. Pero no identificaron qué detona la decisión de cambiar dichas prácticas.

Lo anterior coincide con nuestras observaciones en clases de matemáticas durante más de una década. Esto es, los maestros, en su mayoría, a pesar de transitar por diferentes reformas y contar con diversos recursos (tanto digitales como nuevos libros de texto) han modificado poco sus prácticas (Trigueros, Lozano y Sandoval, 2014).

Un estudio dirigido por el Instituto Nacional de Evaluación de la Educación (INEE, 2017) en el informe de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE, 2015) descubrió que la mitad de las lecciones en el aula se concentraron en lograr una comprensión superficial del contenido, en lugar de adquirir habilidades matemáticas.

Los informes de investigaciones internacionales como Jamaliah (2001), Ruzlan (2007) y Lim y Hwa (2011), con veinte años de diferencia, muestran que los maestros aún obligan a los estudiantes a seguir algoritmos rígidamente sin dar tiempo para que los estudiantes exploren, experimenten y comprendan conceptos. Es por ello que, los estudiantes a menudo aceptan pasivamente doctrinas y técnicas sin ningún esfuerzo por explorar las propiedades y relaciones entre números y operaciones.

Finalmente, los planes y programas de matemáticas del bachillerato general en México tienen una perspectiva de aprendizaje orientada en la exploración y co-construcción del entendimiento matemático. Sin embargo, están sobrecargados con una larga lista de subtemas que presentan una perspectiva de educación en matemáticas basada en la repetición de conocimiento preestablecido.

Tales subtemas reducen y fragmentan la complejidad y las conexiones de los conceptos matemáticos clave. Por otro lado, otras ramas de las matemáticas, como la teoría de números y la teoría de grafos, son ignoradas por los programas de estudio a pesar de su utilidad, importancia matemática y potencial pedagógico en la enseñanza de otros temas, como la aritmética, la combinatoria y la probabilidad.

En ese sentido, de potenciar la enseñanza de otros temas de matemáticas el presente trabajo de investigación pretende contribuir en la colaboración entre investigadores y profesores, analizando el surgimiento del cambio en las prácticas de enseñanza de las matemáticas en el bachillerato en México y en el desarrollo de nuevas prácticas en el aula a partir de la teoría de la variación. En particular, en la resolución de las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas en números enteros que no solo tienen interés teorico, sino que este tipo de ecuaciones a veces se presentan en otras asignaturas como la física y que, además, pueden ser utilizadas con éxito para ampliar los conocimientos en matemáticas de los estudiantes del bachillerato.

2.2 JUSTIFICACIÓN

La enseñanza con variación es una estrategia exitosa en paises asáticos (Li, Peng & Song, 2011, Lai & Murray, 2012, Huang & Li, 2017), y aunque es muy usada y conocida en China, hay pocos indicios de su practica en occidente (Sun, 2011b), particularmente en América Latina y México son pocos los trabajos que se conocen al respecto (Ascencio G. R., & Eccius-Wellmann, C., 2019, Ramírez, L. 2018).

En este trabajo de tesis se han revisado la mayoría de los trabajos recientes del uso de la enseñanza con variación, diferentes a los presentados en los países asiáticos (Kullberg, A., Runesson Kempe, U., & Marton, F. 2017, Metz, M., Preciado Babb, A. P., Sabbaghan, S., & Davis, B. 2017) para dar mayor soporte empirico a la exploración de la viabilidad de su aplicación en nuestro contexto. Es decir, en el bachillerato general en México.

De acuerdo a Mhlolo (2013) la enseñanza con variación presenta un gran potencial de enseñar matemáticas creando oportunidades para los alumnos al desarrollar una comprensión profunda de las matemáticas, posiblemente al ser modificada y adaptada en el salón de clases cuyo objetivo es enseñar para la comprensión conceptual.

Al indagar en los resultados nacionales de la prueba Planea (Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes, 2017) en matemáticas nivel bachillerato, podemos destacar lo siguiente:

> *En Matemáticas, 6 de cada 10 estudiantes se ubica en el nivel I (66 %); casi 2 de cada 10 se ubican en el nivel II (23%); en el nivel III, sólo 8 de cada 100 estudiantes (8%); en el nivel IV, casi 3 estudiantes de cada 100 (2.5%)" (p.7/41).*

En otras palabras, el 89% de los estudiantes de bachillerato que presentaron la prueba Planea están clasificados en los niveles I y II.

Para comprender más a profundidad, enseguida se presentan los niveles de logro de la prueba PLANEA en el área de Matemáticas (p. 7/41):

- ***Nivel IV.*** Dominan las reglas para transformar y operar con el lenguaje matemático (por ejemplo, las leyes de los signos); expresan en lenguaje matemático las relaciones que existen entre dos variables de una situación o fenómeno; y determinan algunas de sus características (por ejemplo, deducen la ecuación de la línea recta a partir de su gráfica).

- ***Nivel III***. Emplean el lenguaje matemático para resolver problemas que requieren del cálculo de valores desconocidos, y para analizar situaciones de proporcionalidad.

- ***Nivel II.*** Expresan en lenguaje matemático situaciones donde se desconoce un valor o las relaciones de proporcionalidad entre dos variables, y resuelven problemas que implican proporciones entre cantidades (por ejemplo, el cálculo de porcentajes).

- ***Nivel I.*** Tienen dificultades para realizar operaciones con fracciones y operaciones que combinen incógnitas o variables (representadas con letras), así como para establecer y analizar relaciones entre dos variables.

La mayoría de los estudiantes mexicanos de bachillerato evaluados en la prueba Planea (2017), caen en el nivel I y II, y sólo el 8% cae en el nivel III, nivel en el que se puede considerar que queda ubicado la resolución de problemas que requieren el uso de ecuaciones.

Esta tesis se ubica precisamente, con parte de la población que problamente no quedaría ubicada en el Nivel III, y entorno de la resolución de problemas que involucran ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

En otras palabras, la resolución de problemas con ecuaciones de primer grado con dos incógnitas es parte de la asignatura de matemáticas del primer año de bachillerato general (matemáticas I y II) y la investigación (estudio exploratorio) que se lleva a cabo en esta tesis, esta población y esta asignatura es la de interés.

En ese sentido, al ser la enseñanza con variación un perspectiva didáctica de las matemáticas efectiva para la compresión de los conceptos matemáticos y resolución de problemas (Li et al., 2011) , y después de revisar los resultados de los estudiantes mexicanos en las pruebas PISA (2015) y Planea (2017), y la necesidad de ubicar a la población en estudio en el nivel III de la prueba Planea, se justifica entonces la iniciativa de explorar otras formas de enseñanza de las matemáticas, en particular la enseñanza con variación en un contexto mexicano.

Esto se hará en esta tesis a través del estudio, diseño e implementación de un conjunto de tareas de aprendizaje que pueden ser modelizadas por una ecuación diofántica lineal (EDL) del tipo ax + by = c con *a, b* y *c* pertenecientes a *Z*, incluso buscando que los estudiantes puedan experimentar el "hacer matemática" inclusive incorporando TIC (Tecnologías de la Información y la Comunicación).

De acuerdo con Fernandez, T. (2014, p.19), las ecuaciones diofánticas lineales, pueden considerarse como el eslabón faltante entre aritmética y álgebra. Como así mismo, su estudio nos deja ver el paso de la aritmética al álgebra, como una continuidad, y en todo caso como rupturas parciales, y no una gran grieta epistemológica, ya que en ellas es necesario el uso del álgebra en los momentos en que la aritmética resulta insuficiente, como herramienta de prueba y de resolución, como productora de conocimientos sobre lo numérico.

En ese sentido, Guelfond A.O. (1979), tambien señala que la solución de ecuaciones en números enteros tiene no solamente interés teórico. Pues ecuaciones de este tipo a veces se dan en la física; el interés que presentan las ecuaciones de números enteros es lo suficiente alto, puesto que estas ecuaciones estan estrechamente ligadas a muchos problemas de la teoría de los números. Además, pueden ser utilizadas con éxito para ampliar los conocimientos en matemáticas de los alumnos de escuelas medias (p.8).

Finalmente, entre los resultados importantes que se esperan obtener en este trabajo de tesis figura la relación entre los objetos de aprendizaje previsto y vivido que son inherentes a las tareas.

2.3 OBJETIVOS

- Aplicar la teoría de la variación al diseño y aplicación de tareas de aprendizaje para la enseñanza de las ecuaciones diofánticas lineales con dos incógnitas y coeficientes enteros en ambientes híbridos.

- Promover la focalización de los aspectos y características críticas de las ecuaciones diofánticas lineales con dos incógnitas y coeficientes enteros, a partir de los patrones de variación (constaste, generalización y fusión), para que los estudiantes logren discernir el objeto de aprendizaje.

- Analizar en qué medida el objeto de aprendizaje (vivido) asociado con cada fase está relacionado con el objeto de aprendizaje previsto.

- Analizar las respuestas de los alumnos en la resolución de las ecuaciones ecuaciones diofánticas lineales en números enteros, que muestran su nivel estructural alcanzado de acuerdo a los niveles de la taxonomía SOLO?

2.4 PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

El estudio es guiado por las siguientes preguntas de investigación:

1. ¿Cómo se aplica la teoría de la variación en el diseño e implementación de tareas de aprendizaje para la enseñanza de las ecuaciones diofánticas lineales con dos incógnitas y coeficientes enteros en ambientes híbridos?

2. ¿Cómo promover la focalización de los aspectos y características críticas de las ecuaciones diofánticas lineales con dos incógnitas y coeficientes enteros, a partir de los patrones de variación (constaste, generalización y fusión), para que los estudiantes logren darle significado al objeto de aprendizaje?

3. ¿En qué medida el objeto de aprendizaje (vivido) asociado con cada unidad de discernimiento está relacionado con el objeto de aprendizaje previsto?

4. ¿Cómo clasificar las respuestas de los estudiantes en la resolución de ecuaciones diofánticas lineales con dos incógnitas en números enteros, que muestren su nivel estructural alcanzado de acuerdo a los niveles de la taxonomía SOLO?

2.5 MARCO TEÓRICO-METODOLÓGICO

2.5.1 TEORÍA DE LA VARIACIÓN DEL APRENDIZAJE

La teoría de la variación del aprendizaje (TVA) postula que "el aprendizaje siempre tiene un objeto" (Runesson 2005, p. 70). En esta teoría, las formas de ver o experimentar un objeto en particular, como un objeto de aprendizaje, se consideran fundamentales para su aprendizaje (por ejemplo, Ling y Marton 2012).

A su vez, la forma en que se ve o experimenta el objeto está determinada por los aspectos críticos del objeto de aprendizaje que el alumno discierne de manera simultánea y cómo se relacionan entre sí (Marton y Booth, 1997).

El "***objeto de aprendizaje***" es un término especial en la teoría de la variación y no significa lo mismo que "objetivos de aprendizaje", que apuntan al final del proceso de aprendizaje. En cambio, el objeto de aprendizaje apunta al comienzo del proceso de aprendizaje y generalmente se refiere al foco de una situación de enseñanza, aquello a lo que se dirige el aprendizaje, es decir, "lo que se va a aprender" (Ling, 2012).

En relación con los mecanismos cognitivos del aprendizaje, la teoría de la variación se basa en la premisa de que los temas a analizar pueden ser discernidos o experimentados por un alumno o un grupo de alumnos de varias maneras, dependiendo de los aspectos críticos del objeto a los que se dirige la a tención.

Ling y Marton (2012) señalan que un objeto de aprendizaje, una unidad del temario, puede tener muchos aspectos, y no todos son cruciales; los alumnos pueden no aprender lo que se espera que aprendan porque dirigen su atención a aspectos no cruciales o críticos.

En relación con el diseño de tareas, la teoría de la variación se usa con frecuencia como una guía para construir secuencias de elementos que resaltan un aspecto crítico (variante) de un objeto de aprendizaje pretendido mediante la variación de sus características críticas o esenciales (por ejemplo, Gu et al. 2004; Lai y Murray 2012; Sun 2011; Watson y Mason 2006).

En nuestro estudio, la teoría de la variación se aplica en el estudio, diseño e implementación de tareas de aprendizaje que requieren agrupar aspectos críticos del objeto de aprendizaje (resolución de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas) variando las características críticas (Gu, 1999).

Con respecto a la relación Profesor-alumno, la teoría de la variación abarca tres tipos de objetos de aprendizaje (Marton y Booth 1997; Runesson 2005). *Un objeto de aprendizaje previsto* que denota las capacidades que el profesor quiere que los alumnos desarrollen. *Un objeto de aprendizaje en acción* que constituye la interacción entre los alumnos y el profesor o entre los alumnos y ellos mismos, y denota lo que es posible aprender en una situación particular.

En otras palabras, un objeto de aprendizaje en acción denota un conjunto de experiencias que ofrece la interacción. Finalmente, *un objeto de aprendizaje vivido* que denota lo que realmente se aprende desde el punto de vista de un estudiante. Los objetos de aprendizaje previstos, promulgados y vividos pueden o no coincidir.

El objeto de aprendizaje previsto puede identificarse de manera bastante directa. Analizarlo en acción requiere identificar todas las posibilidades que materialmente ofrece un objeto para desarrollar cierta capacidad como inherente a la situación de aprendizaje.

En relación con el diseño de la tarea, revelarlo significa que el profesor que diseña una tarea debe evaluar críticamente, con base a las observaciones de la lección, qué espacio de variaciones ofrece la tarea a los alumnos para experimentar y en qué medida su experiencia es beneficiosa para construir el objeto de aprendizaje previsto (Marton y Booth 1997; Runesson 2005).

Marton y Pang (2006) sugieren que el objeto de aprendizaje vivido se puede identificar con base a las respuestas de los alumnos a las preguntas escritas y orales que se dan después de la lección. Sin embargo, Runesson (2005) señala que el objeto de aprendizaje vivido es metodológicamente difícil de revelar. Nuestro estudio, así como algunos otros estudios que utilizan la teoría de la variación (por ejemplo, Ling y Marton 2012; Watson y Mason 2006), se enfoca en los 3 objetos de aprendizaje.

2.5.2 TEORÍA DE LA VARIACIÓN COMO PRINCIPIO DE DISEÑO INSTRUCCIONAL

El punto de partida de la teoría de la variación se refiere a los medios con los que podemos ayudar a los estudiantes a manejar situaciones novedosas de manera poderosa (Marton y Pang 2006). Originada en la tradición de la fenomenografía, la teoría de la variación plantea que el aprendizaje implica ver o experimentar aspectos críticos de un objeto de aprendizaje

(Marton y Booth 1997; Marton 2015). El objeto de aprendizaje proporciona respuestas a la pregunta "¿Qué se debe aprender?" De tres maneras: define (1) el contenido, (2) el objetivo educativo y (3) lo que debe aprenderse (aspectos críticos). El objeto de aprendizaje puede ser diferente para diferentes alumnos.

El aprendizaje, desde el punto de vista de la teoría de la variación, implica diferenciación en lugar de acumulación (cf. Gibson y Gibson, 1955). Por lo tanto, la teoría de la variación explica las condiciones del aprendizaje y explica las fallas de aprendizaje de una manera específica: cuando los alumnos no aprenden lo que se pretendía, no han discernido los aspectos necesarios.

Por lo tanto, la idea central de la teoría de la variación es que el discernimiento es una condición necesaria del aprendizaje: qué aspectos atendemos o discernimos que son de importancia decisiva para la forma en que entendemos o experimentamos el objeto de aprendizaje. Sin embargo, el discernimiento no puede suceder sin que el alumno haya experimentado variaciones. Para discernir y enfocarse en aspectos (o dimensiones de variación), el alumno debe haber experimentado variación en esos aspectos.

Por ejemplo, es más probable que los estudiantes en una clase de física (nueva situación) identifiquen que las letras en la ley de Ohm $V = R \times I$ representan variables si han experimentado expresiones algebraicas con letras que no sean solo “x” representando variables en matemáticas.

Si han experimentado ecuaciones con letras que no sean solo “x”, es más probable que disciernan que la letra puede elegirse arbitrariamente (cf. Häggström 2008). Entonces, para que el aspecto (crítico) sea posible de discernir, el maestro debe abrir el aspecto como una dimensión de variación (“x” podría ser reemplazado por otras letras / símbolos). Mason y Watson (2006) y Mason (2017) argumentan de manera similar: la variación puede estructurar la toma de sentido al llamar la atención sobre los aspectos críticos al enseñar matemáticas.

Uno de los principios más específicos de la teoría de la variación es ver que las diferencias preceden a la igualdad (Marton y Pang 2006, 2013). Marton y Pang (2013) afirman que cuando se ayuda a los alumnos a hacer que una noción tenga un significado propio, como cuando se ayuda a los estudiantes a comprender un nuevo concepto, con frecuencia señalamos ejemplos que comparten el significado dirigido pero difieren de otra manera, por ejemplo, señalando ejemplos de ecuaciones lineales y declarando: "Esta es una ecuación lineal y esta no es una ecuación lineal". Marton y Pang (2013) argumentan en contra de esta visión de desarrollar nuevos significados a partir de la experiencia de la igualdad, ya que la teoría de la variación afirma lo contrario:

> *No puedes entender qué es el chino simplemente escuchando a diferentes personas que hablan chino si nunca has escuchado otro idioma, y no puedes entender qué es la virtud al inspeccionar diferentes ejemplos del mismo grado de virtud. Tampoco puedes entender qué es una ecuación lineal mirando solo las ecuaciones lineales. (pág. 25)*

Desde un punto de vista pedagógico / instructivo, seguir este principio de la experiencia de la diferencia antes de la igualdad tiene ciertas implicaciones. Por ejemplo, para comprender el concepto de una función lineal $y = mx + b$ es necesario saber cómo difiere de las funciones no lineales. De lo contrario, es simplemente un sinónimo de "función".

Del mismo modo, un triángulo debe compararse con un círculo o cualquier otra forma para tener un significado propio. En la teoría de la variación, la comparación de dos conceptos implica un patrón particular de variación llamado "contraste". Se podría argumentar que esto es similar a los contraejemplos, que a menudo se usan en matemáticas para justificar conjeturas y generalizaciones.

En los diseños de lecciones basados en la teoría de la variación, el contraste (que podría ser un contraejemplo) se usa con un objetivo específico: ayudar a los alumnos a adquirir nuevos significados abriendo dimensiones apropiadas de variación (ver Marton y Pang 2013; Marton 2015).

El contraste tiene que ser seguido por la generalización. Para generalizar la idea de una función, por ejemplo, uno debe experimentar la similitud, ciertos aspectos definitorios, de diferentes funciones. Por lo tanto, para ver no solo una instancia de la función como una función, debe ver el mismo conjunto de aspectos dentro de las diferentes funciones y la relación parte-todo entre esos aspectos, como una comunalidad entre las diversas instancias que encuentre.

De esta forma, los aspectos críticos se separan de la instancia particular y se puede hacer una generalización. En lo que respecta a este patrón de variación, el aspecto crítico se hace variar mientras que otros aspectos no varían.

Entonces, por ejemplo, si el aspecto 'pendiente' se abre como una dimensión de variación, es posible experimentar que una función lineal podría tener diferentes pendientes variando el valor m (diferentes valores positivos / negativos) y manteniendo el valor b invariante.

Sin embargo, comprender el objeto de aprendizaje implica comprender el objeto como un todo y, por lo tanto, implica un discernimiento simultáneo de los aspectos críticos y su relación. Cuando las dimensiones de variación correspondientes a varios aspectos críticos se abren simultáneamente, puede tener lugar la fusión.

Marton (2015), sugiere un prototipo de cómo secuenciar patrones de variación e invariancia para lograr el aprendizaje, de la siguiente manera: comenzando con el objeto de aprendizaje no dividido, generalmente un problema a resolver con el objetivo de familiarizar a los estudiantes con la situación o qué debe ser dominado, seguido de contraste, generalización y finalmente fusión (p. 263).

Entonces, todo esto se reduce a una conjetura que sugiere que los patrones de variación e invariancia y cómo se secuencian, que son inherentes a las tareas, ejemplos, ilustraciones e interacciones entre maestros y alumnos, son de importancia decisiva para lo que se hace posible aprender.

Cuando estos principios se utilizan para el diseño de instrucción, muchas de las ideas sobre la enseñanza que los docentes dan por sentadas se cuestionan, como por ejemplo, "enseñar una cosa a la vez" (Zhang 2009), "nunca hacer uso de respuestas incorrectas", “hacer un contraste" (Ekdahl y Runesson 2015) o "siempre comenzando con la similitud en lugar de las diferencias" (Marton y Pang 2013).

Cuando se guía por la teoría de la variación en la planificación del aprendizaje, el maestro debe ser consciente no solo de los aspectos críticos, sino también de cómo abrirlos como dimensiones de variación y determinar qué características (valores, no necesariamente númericos) en esas dimensiones serían críticos.

Sin embargo, además de ofrecer patrones de variación en conjuntos de ejemplos, también es importante que la enseñanza llame la atención sobre esos patrones (Kullberg et al. 2014). Los estudiantes también pueden abrir dimensiones de variación cuando trabajan individualmente (Runesson 2006), o en discusiones grupales o de toda la clase (Kullberg 2012).

Al analizar cómo se maneja el objeto de aprendizaje durante la enseñanza, los objetos de aprendizaje 'previsto', 'en acción' y 'vivido' se usan para diferenciar entre la meta particular y la intención del maestro con respecto a lo que los estudiantes deben aprender (objeto previsto de aprendizaje), lo que se hace posible aprender en la lección (el objeto de aprendizaje en acción) y lo que los alumnos realmente aprenden (objeto de aprendizaje vivido). Incluso si el maestro planea poner en acción un objeto de aprendizaje de cierta manera, esto puede ser diferente de lo que realmente es posible que los alumnos detecten en el aula.

2.5.3 VARIACIÓN Y EJEMPLIFICACIÓN

Varios estudiosos (por ejemplo, Dienes 1960; Gentner 2005; Rittle-Johnson y Star 2009; Schwartz y Bransford 1998) han argumentado los beneficios de usar múltiples ejemplos en lugar de solo un ejemplo en educación matemática, con respecto al aprendizaje de los estudiantes.

Se ha encontrado que dos ejemplos son mejores que uno, y que dos ejemplos presentados juntos son mejores que dos ejemplos presentados por separado (Rittle-Johnson y Star 2009, p. 529). La variabilidad de los ejemplos comparados es importante para que varios ejemplos sean efectivos (Rittle-Johnson y Star 2009). Una pregunta importante a considerar en relación con estos hallazgos es "Cuando se comparan dos ejemplos, ¿qué aspectos de los ejemplos deberían variar y qué aspectos deberían permanecer iguales?" (Ibid., P. 530).

Por otra parte, el uso de ejemplos mixtos (ejemplos de diferentes tipos) facilita el aprendizaje de los estudiantes más que el uso de múltiples ejemplos del mismo tipo (Hatala et al. 2003; Kornell y Bjork 2008; Rohrer y Pashler 2010; Schmidt y Bjork 1992; Taylor y Rohrer 2010).

Cuando se mezclan diferentes tipos de tareas o ejemplos, los alumnos se ven obligados a distinguir entre ellos y, por lo tanto, a mejorar la comprensión de tareas y ejemplos novedosos. Otros estudios han demostrado que el conocimiento previo de los estudiantes afecta el aprendizaje al comparar múltiples ejemplos (Rittle-Johnson et al. 2009), y cuando se usa una combinación de ejemplos correctos e incorrectos en ejemplos trabajados (Große y Renkl 2007). Se ha argumentado que las diferencias en los ejemplos utilizados que son demasiado difíciles de discernir pueden ser menos beneficiosas para el aprendizaje de los estudiantes (Gentner y Markman 1994).

Watson y Mason (2006) argumentan que un ejercicio matemático, por ejemplo, una colección de preguntas o tareas, debe verse como un solo objeto (matemático), de la siguiente manera: la tarea como un todo (o colección de preguntas), que es enfocado por los estudiantes y el maestro durante una lección, y sobre el cual el alumno actúa de manera inteligente y matemática, al observar, analizar, explorar, cuestiona, transformar, etc.

Watson y Mason sugieren que es la estructura del ejercicio en su conjunto, no los elementos individuales, que promueven la creación de sentido matemático común (p. 97). Argumentan que "las tareas que presentan cuidadosamente una variación estructurada generalmente tienen como resultado un mejor progreso de una manera que los conjuntos no estructurados no lo hacen" (p. 92), y que la variación sabiamente planificada, por ejemplo en una tarea o conjunto de ejemplos, puede hacer que los aspectos críticos sean más notables para el alumno.

Es decir, "la construcción de tareas que utilizan la variación y el cambio de manera óptima es un proyecto de diseño en el que la reflexión sobre la respuesta del alumno conducen a un mayor refinamiento y precisión de la elección y secuencia de los ejemplos" (p. 100).

Watson y Mason (2006, p. 109) sugieren que las secuencias de tareas cuidadosamente diseñadas con variación sistemática pueden permitir a los estudiantes discernir similitudes y diferencias.

El uso de la variación sistemática en las tareas para la enseñanza de las matemáticas con respecto al aprendizaje de los estudiantes se ha estudiado dentro de un marco de teoría de la variación (por ejemplo, Al-Murani 2007; Goldenberg y Mason 2008; Gu et al. 2004; Guo et al. 2012; Huang et al.2016; Pillay 2013; Rowland 2008; Watson y Chick 2011). Los resultados de estos estudios indican que la teoría de la variación como principio de diseño puede hacer que aspectos críticos del objeto de aprendizaje sean notables para el alumno y, por lo tanto, mejorar el aprendizaje.

2.5.4 DISCERNIENDO CONCEPTOS MATEMÁTICOS A TRAVÉS DE LA TRANSFORMACIÓN DE SUS REPRESENTACIONES

Discernir los aspectos y las características críticas de la resolución de ecuaciones diofánticas lineales con dos incógnitas en números enteros, es el objeto de aprendizaje en este trabajo de tesis. La elección de este objeto de aprendizaje se basó en la literatura que destaca la importancia de involucrar a los alumnos en experiencias que requieren la conexión de diferentes representaciones de conceptos matemáticos como un umbral para el aprendizaje (por ejemplo, Goldin 1998; NCTM 2000; Duval 2006; Askew et 1997; Swan 2007, 2011).

Según Duval (2006), la explicación más general y precisa de lo que significa la noción de representación es "algo que significa otra cosa" (p. 103), donde en contextos matemáticos "algo" es a menudo un signo o una configuración particular de signos y "algo más" es otro cambio o configuración de signos.

Duval (2006), sostiene que la transformación de las representaciones constituye una esencia de cualquier actividad matemática y distingue dos tipos de transformaciones: tratamientos y conversiones. En sus palabras,

> ***Los tratamientos*** *... son transformaciones de las representaciones que ocurren dentro del mismo registro: por ejemplo, realizar un cálculo mientras se mantiene estrictamente en el mismo sistema de notación para representar los números, resolver una ecuación o un sistema de ecuaciones, completar una figura utilizando criterios de percepción de conectividad o simetría, etc. (p. 111).*
>
> ***Las conversiones*** *... son transformaciones de las representaciones que consisten en cambiar un registro sin cambiar el objeto que se denota: por ejemplo, pasar de la notación algebraica de una ecuación a su representación gráfica, pasar del enunciado en lenguaje natural de una relación a su notación utilizando letras etc. (p. 112).*

Duval (2006) sostiene que la conversión es un tipo de transformación más compleja desde el punto de vista cognitivo que el tratamiento. Esto se debe a que cambiar un registro incluye el reconocimiento del mismo objeto representado entre dos representaciones que pueden tener un aspecto muy diferente. En términos de la teoría de la variación, se podría decir que las conversiones requieren discernir un aspecto invariable, que es el mismo objeto matemático (por ejemplo, la variación de la altura de un cilindro, inscrito en un cono), cuando otro aspecto, que es el registro de la representación, es variado.

En el diseño de las tareas de aprendizaje propuestas en este trabajo se tuvieron en cuenta ambos tipos de transformaciones, pero desde el inicio consideramos que las conversiones eran más compatibles con nuestros objetivos; específicamente, una de las consideraciones involucradas en el diseño de nuestras tareas fue crear varias oportunidades para que los alumnos participantes reconocieran los mismos objetos matemáticos, por ejemplo, una ecuación de primer grado, que se describe mediante diferentes representaciones.

2.5.5 ORDENANDO TAREAS DESDE LA PERSPECTIVA CONEXIONISTA

El potencial de las tareas de elementos relacionados con conceptos de la teoría de números, álgebra y geometría analítica como una herramienta útil de enseñanza / aprendizaje puede considerarse también desde la perspectiva conexionista ofrecida por Askew et al. (1997).

Esta perspectiva argumenta a favor de la enseñanza, que se basa (entre otras consideraciones) en la conciencia de los vínculos entre los diferentes aspectos del plan de estudios de matemáticas (del bachillerato) y en el reconocimiento de las conexiones entre las ideas matemáticas en la enseñanza. Swan (2007, 2011) consideró la perspectiva conexionista como una razón para construir tareas de aprendizaje.

Específicamente, diseñó tareas de aprendizaje para los maestros, cuyo objetivo era ayudar a los maestros de matemáticas "a apreciar la importancia de desarrollar imágenes mentales para los conceptos mediante la exploración de representaciones alternativas y las múltiples conexiones entre ellos" (Swan 2011, p. 64).

Este objetivo es pertinente también para las tareas de aprendizaje con los estudiantes respecto de la resolución de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, que se llevará a cabo en este trabajo. Swan (2007, 2011) descubrió que el uso de tareas de aprendizaje orientadas a las conexiones, tiene un impacto positivo en las creencias y las prácticas de los maestros de matemáticas y también en los estudiantes.

2.5.6 IMPLICACIONES PARA EL USO DE TECNOLOGÍAS DIGITALES EN EL AULA Y EL DESARROLLO DE ACTIVIDADES

Las tecnologías digitales están cambiando los contextos de aprendizaje, de comunicación e interacción entre los sujetos, por lo que es necesario seguir avanzando en el uso de estas herramientas en las escuelas de educación básica (Rojano, 2014). En la actualidad, existen diversas aplicaciones educativas y programas especializados diseñados con fines didácticos, como logo, software de Geometría Dinámica, calculadoras graficadoras y recursos digitales de la Web en portales educativos.

En las últimas décadas, para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas los investigadores dan cuenta de que ciertos desarrollos tecnológicos posibilitan otras formas de representación dinámicas complementarias a las generadas en ambientes de lápiz y papel (representaciones estáticas); apoyan procesos de construcción y verificación de conjeturas, de comprobación de una estimación y, por ende, enriquecen las estrategias para resolver problemas matemáticos.

Sin embargo, su aportación para favorecer el aprendizaje de las matemáticas dependerá de un actor clave, el profesor, ya que su mediación en el aula y diseño cuidadoso de las tareas y la selección de estas herramientas tecnológicas pueden o no hacerlo posible.

Las herramientas tecnológicas pueden ser utilizadas de acuerdo con distintos enfoques sobre las matemáticas y su enseñanza. Nos interesa destacar aquí las diversas maneras de usarlas, esto es que sean afines a los enfoques actuales para la enseñanza de las matemáticas.

El objetivo principal del empleo de la tecnología en el aula no se reduce a practicar algoritmos, interesa que éstos ayuden al alumno a discernir los aspectos y características críticas mediante el ejercicio de la reflexión.

De este modo, la matemática se convierte en mucho más que una simple mecanización de procedimientos. El uso de calculadoras, computadoras, tabletas y algunas aplicaciones tienen gran potencial educativo, siempre y cuando respondan a una finalidad pedagógica y curricular; por ejemplo, para la búsqueda y clasificación de datos, tablas, gráficas, construcción, exploración y animación de figuras geométricas o para realizar experimentos matemáticos.

Los ejemplos de actividades que hemos diseñado y seleccionado son producto de las investigaciones realizadas y que reconocemos con un gran potencial por las representaciones semióticas que proveen. En particular, aquellas que consideramos favorecen las experiencias aritméticas, geométricas y algebraicas, de modelación y simulación.

Aunque hay diversas tecnologías, en una parte de las tareas diseñadas se utiliza el software de Geometría Dinámica llamado “Geogebra”, con la finalidad de producir y poner a prueba una propuesta didáctica que se complementa con el uso de esta herramienta.

2.5.7 ALGUNAS POTENCIALIDADES DEL USO DE TECNOLOGÍAS DIGITALES EN GEOMETRÍA

La Geometría Dinámica (GD) enriquece la representación figural porque brinda mayor nivel de evidencia y por consiguiente ayuda en la transición del dibujo al objeto geométrico (Sandoval, 2005 y 2009). Pues cuando el alumno usa el arrastre (herramienta que permite mover, en la pantalla, objetos geométricos construidos como puntos, segmentos, rectas, polígonos, entre otros, para reubicarlos, agrandar o achicar una figura, etc.) ejecuta la representación semiótica, el enunciado o la conjetura adquiere un dominio de validez en una familia de figuras o gráficas y no en una sola representación.

Otra de las potencialidades al usar la GD consiste en qué actividades de construcción como, por ejemplo, la gráfica de una ecuación, pueden ayudar al estudiante a dar sentido a la localización de puntos (x, y), a entender su solución dentro de un esquema axiomático y de las condiciones necesarias y suficientes al elaborar una conjetura.

Para fundamentar esta conjetura, se considera pertinente incorporar otras actividades de construcción, para la toma de datos definitiva, que conlleven la comunicación de enunciados, tanto de manera oral como escrita. En suma, se puede decir que Geógebra, como ejemplo de GD, es un medio que:

- Proporciona a los estudiantes un entorno para que realicen construcciones basadas en las definiciones y exploren e interpreten diferentes tipos de representación: la numérica a través de la medición, la figural mediante los trazos, la verbal por medio de los comentarios, etiquetas, etc. En este aspecto, les brinda la oportunidad para analizar y discutir, en términos conceptuales, el significado de la situación geométrica en cuestión.

- Induce al estudiante en las tareas de construcción a realizar un análisis de la estructura geométrica bajo estudio y una coordinación de las relaciones entre las representaciones figural y discursiva.
- La riqueza, desde un punto de vista cognitivo, que se obtiene al usar geógebra, no solamente depende de la herramienta, sino también del contexto de comunicación entre los estudiantes y el profesor.

Por otro lado, la GD sirve como laboratorio matemático, ya que:

- Las herramientas disponibles en este ambiente posibilitan descubrir, validar y confirmar conjeturas y relaciones entre los objetos.
- Permite tener un dibujo que se puede modificar y, por ende, hace visible la "invariancia o varianza" de una propiedad mediante el arrastre.
- El sujeto interviene de manera activa en las construcciones, por lo tanto, se puede generar la sensación de estar manipulando directamente los objetos en la pantalla.

Implementar actividades usando GD, posibilita el desarrollo de ciertas habilidades en los estudiantes. Por ejemplo:

- Formular y verificar sus conjeturas con base en observaciones y exploraciones.
- Articular relaciones y construir generalizaciones, mediante la sistematización.
- Gracias a la mediación de la GD, se puede desarrollar la exploración sistemática. Las propiedades que se exploran son de una familia de figuras o gráficas, pues una sola representación es insuficiente.
- El uso de contraejemplos para refutar conjeturas.
- Identificar las dependencias funcionales entre los objetos construidos.
- Induce estrategias que le son propias como el arrastre, la animación, la verificación de propiedades y el uso de macros.

Por lo tanto, es fundamental que el maestro, durante el proceso de familiarización con las aplicaciones educativas, enfatice la importancia de conocer los comandos y los requerimientos para su uso. En el caso de la GD, comprender el comportamiento dinámico de las relaciones en estos nuevos ambientes, entiéndase: las jerarquías de dependencia entre los elementos de una construcción o al momento de utilizar cierta herramienta, es esencial.

Al respecto, Talmon y Yerushalmy (2004) reportan sus resultados sobre la importancia de establecer las relaciones de dependencia y la jerarquía de las mismas, así como las semejanzas y diferencias cuando se usan distintas interfaces de GD.

Por ejemplo, si se traza primero un segmento y a éste luego se le considera radio de una circunferencia, los objetos independientes (libres) son distintos, que si se construyera primero una circunferencia y luego se trazara un radio.

Las exploraciones que se pueden realizar en ambientes dinámicos facilitan a los estudiantes la manipulación de las representaciones figúrales de los objetos geométricos, mediante herramientas como el arrastre, la medición, la verificación de propiedades, construcciones auxiliares, entre otras.

Como resultado de dicha interacción, se descubren aspectos críticos, se producen conjeturas y se pueden generar estrategias argumentativas que justifiquen la conjetura. El tipo de argumentos utilizados no son del todo deductivos, aunque los educandos pueden lograr un control conceptual de lo que observan en sus pantallas.

Otra herramienta que consideramos prometedora es la de Comentarios, una opción que permite introducir textos con extensión variable. Con ella, se les puede pedir a los educandos que justifiquen sus soluciones, así no tendrían que hacer una exploración en un medio dinámico y escribir la justificación en uno estático.

2.5.8 ASPECTOS DE LAS REPRESENTACIONES ALGEBRAICAS

Dada la trascendencia y las dificultades que se dan en la transición de la aritmética al álgebra, resulta de primordial importancia comunicar a los estudiantes de bachillerato aspectos críticos del desarrollo del pensamiento algebraico, como la construcción de los significados de las representaciones algebraicas y las relaciones entre sintaxis y semántica.

Solares (2013), señala que es importante que en los cursos de formación inicial y continua de los estudiantes se incluyan estos aspectos entre sus temas de estudio. Por ejemplo, resulta crucial para la adquisición del lenguaje algebraico dar atención a la reformulación y extensión de los usos del signo “=” y de la representación de la incógnita.

Proporcionar a los estudiantes herramientas y conocimientos didácticos para gestionar y articular los significados aritméticos y algebraicos puede ayudar a la construcción de los conocimientos necesarios para sus actividades de aprendizaje.

Es sabido también que los tratamientos mecanicistas de los conocimientos algebraicos, centrados en la aplicación de algoritmos, generan poca comprensión y nulo desarrollo de habilidades para el uso del lenguaje algebraico en la solución de problemas.

Sin embargo, no basta obtener una representación algebraica de un problema, es necesario operar con ella, regresar al contexto, transitar entre sus distintas representaciones (gráfica, tabla, expresión algebraica, lenguaje natural).

Es importante comunicar u ofrecer a los estudiantes actividades que promuevan el desarrollo de técnicas que permitan transformar expresiones algebraicas, encontrar expresiones equivalentes, pasar de una forma de representación a otra (de la gráfica a la tabla, de la tabla a la expresión algebraica, etc.). Todas éstas son fuentes importantes de significado matemático.

2.5.9 LA TRANSICIÓN ENTRE LA ARITMÉTICA Y EL ÁLGEBRA

La transición entre la aritmética y el álgebra es un tema de investigación interesante y permanente en la Didáctica de la Matemática. En este sentido, el análisis del carácter algebraico o aritmético de ciertos problemas escolares aparece como un aspecto relevante a la hora de diseñar tareas de aprendizaje que faciliten dicha transición. Socas (2011, p. 10), confirma que la transición entre la aritmética y el álgebra "ha sido y es un tema de investigación permanente". A este respecto, Filloy y Rojano (1989, p. 20) señalan que:

> *...las concepciones de los estudiantes respecto a que las operaciones se llevan a cabo con números deben modificarse de forma que pueda desarrollarse la idea de operar con objetos distintos de números (como incógnitas) o puedan concebirse esos nuevos objetos.*

Por otro lado, se pueden identificar varios inconvenientes en el paso de la aritmética al álgebra, la escuela a través de su proceso de enseñanza y aprendizaje, comprendido en parte por la primaria y la secundaria, trabaja con conjuntos numéricos concretos tales como números naturales, enteros y racionales. Sin embargo, llega el momento (en el bachillerato) en el cual todos esos conjuntos son sustituidos por letras y comienza la enseñanza total del álgebra.

De acuerdo con Rojas et al. (1999), *Los procesos aritméticos no están desligados de los procesos algebraicos, la matemática juega un papel importante de mediador entre ambos procesos* (pág. 19). Ya que las letras hasta ese momento se utilizan para cuestiones relacionadas con el lenguaje.

Es decir, en un sentido sintáctico que obtienen una validez según las situaciones, lo que indica que no todos los estudiantes distinguen las letras de la misma manera, además deben ligar su conocimiento a las estructuras numéricas y generar relaciones para poder operar con ellas en el campo de las matemáticas.

Así pues, se puede llegar a creer que dentro de la cotidianidad, la letras sólo cumplen un papel comunicativo al ser integrantes de un signo lingüístico con el que nos podemos comunicar, y así ser parte fundamental de los estudios de la lingüística y la oralidad; por otra parte mientras en matemáticas son piezas de variable valor, pero acatan una serie de reglas que no son modificables (tal como en la lengua) las cuales deben tener una codificación exacta de cada uno de sus símbolos, en palabras de Campuzano (2016), *Es un lenguaje nuevo que permite manejar como conocidas las cosas desconocidas* (pág. 38).

2.5.10 DIFICULTADES EN LA TRANSICIÓN DE LA ARITMÉTICA AL ÁLGEBRA

De acuerdo con Osorio (2016), los factores que explican las dificultades en la resolución correcta de las expresiones algebraicas pueden ser: escaso manejo de expresiones simbólicas; falta de conexión entre el lenguaje algebraico y el numérico; abuso en el uso de calculadoras; conocimiento insuficiente de la estructura aritmética que se traduce en una manipulación algebraica errónea.

Estas dificultades se han encontrado en los estudiantes al realizar ejercicios algebraicos, pues en los ejercicios aritméticos a ellos se les hace fácil realizar ejercicios mecánicos, pero al combinarlos con las letras no se percatan que son operaciones aritméticas.

Los errores detectados en las producciones escritas de los estudiantes coinciden con los señalados por Arballo (2009) quien han observado: confusión tanto en la aplicación de las propiedades de las operaciones como en las reglas de signos; errores en la jerarquía de las operaciones; sustitución de las letras presentes en las expresiones algebraicas por números; dificultades en el reconocimiento y aplicación de los casos de factoreo.

Históricamente el álgebra surgió de la aritmética ante la necesidad de sistematizar y describir propiedades generales y procedimientos generales para resolver clases de ejercicios (Olmedo, Galíndez, & Peralta, 2015).

Este hecho histórico justifica el aprendizaje del álgebra bajo la concepción de aritmética generalizada, y además porque alude al carácter inductivo del mismo. Las expresiones algebraicas se introducen como generalizaciones de las operaciones con cantidades y rápidamente se pasa a considerarlas como objetos matemáticos en los cuales se llevan a cabo operaciones estructurales como la reducción de términos semejantes, la factorización, u operar de igual modo en ambos miembros de una ecuación.

La introducción del álgebra va enfocada al aspecto sintáctico, asumiéndose que las dificultades de los estudiantes son debidas a la complejidad de su sintaxis.

El aprendizaje del lenguaje simbólico, está asociado exclusivamente a la aplicación de fórmulas y algoritmos para resolver cierto tipo de problemas y no a la comprensión de las mismas, es importante reconocer que la forma de argumentar es lo que da la estructura a la matemática y para ello se requiere comprender el significado de las variables y relaciones, presentadas en un lenguaje simbólico.

González (2012), señala que existen dificultades al comprender y usar el concepto de variable adecuadamente, los estudiantes no interpretan sus significados y presentan diversas dificultades cuando requieren trabajar con ellas, por ejemplo: ignoran la variable, la asumen como un objeto, no pueden modelar problemas, operan con las expresiones algebraicas como operan con las expresiones numéricas.

Los estudiantes se quedan con el uso sin significado de las letras y eso explica la dificultad a la hora de resolver problemas, pues no encuentran en el lenguaje simbólico las herramientas para el establecimiento de una relación o el planteamiento de una ecuación necesaria para entender, interpretar y trabajar con una determinada situación.

Tangarife (2013), señala que el cálculo algebraico surge como generalización del trabajo aritmético con modelos numéricos en situaciones de variación de los valores de las mediciones de cantidades relacionadas funcionalmente. Es necesario señalar que el desarrollo de este pensamiento debe también atender al estudio de las actividades matemáticas propias de los procesos infinitos.

Por tal razón es necesario incorporar tempranamente a los estudiantes en el estudio de los conceptos fundamentales de ese campo y de las técnicas y métodos de estimación y de aproximación, lo cual se logra articulando la búsqueda de soluciones exactas y no exactas, de intervalos de valores aceptables, de problemas de estimación de posibles valores en el contexto de medidas de longitudes, áreas y volúmenes y de modelos matemáticos que utilicen expresiones algebraicas. Se refuerza así a la estimación como núcleo conceptual importante en el desarrollo del pensamiento numérico.

En este trabajo de tesis vamos a centrarnos en el estudio de problemas que pueden ser resueltos mediante una ecuación diofántica lineal con dos incógnitas. Gracián (2013) señala que el interés que encierra la resolución de una ecuación diofántica está en relación directa con la naturaleza de las incógnitas. Por ejemplo, si lo que se plante en una ecuación hace refrencia al volumen de un líquido no importará, en principio, que la solución incluya cantidades fraccionarias; pero si se trata, por ejemplo, del número de personas que pueden asistir a una reunión, está claro que únicamente tendrán sentido las soluciones enteras, ya que carecería de sentido dividir a una persona en trozos.

Este tipo de ecuaciones, cuyas soluciones se exigen que tomen valores enteros, es lo que se conocen como ecuaciones diofánticas, en honor a Diofánto, matemático griego del año 275 a. C. que las estudió exclusivamente y dió soluciones a algunas de ellas. Las ecuaciones diofánticas lineales, pueden considerarse como el eslabón faltante entre aritmética y álgebra: aritméticas por ser diofánticas (por utilizar números enteros) y algebraicas por ser ecuaciones (por utilizar incógnitas).

2.5.11 SENTIDO ESTRUCTURAL DE ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

En su estudio Vega-Castro D., (2013), *Perfiles de alumnos de educación secundaria relacionados con el sentido estructural manifestado en experiencias con expresiones algebraicas*, Vega-Castro D., Molina, M. y Castro, E. (2012), llamado *Sentido estructural de estudiantes de bachillerato en tareas de simplificación de fracciones algebraicas que involucran igualdades notables*, se señala que existe gran coincidencia entre diversos autores

(Cerdán, 2010; Hoch & Dreyfus, 2005, 2006; Nortes & Nortes, 2010; Novotná & Hoch, 2008) en destacar la falta de capacidad de los estudiantes de educación secundaria y bachillerato (de 12 a 18 años) para aplicar las técnicas algebraicas básicas en contextos distintos de los que han experimentado.

En especial se pone énfasis en las dificultades manifestadas por los alumnos para reconocer y generar formas equivalentes de expresiones algebraicas comprendiendo su significado; ambas capacidades, la de reconocer y la de generar dichas expresiones, están relacionadas con los objetivos de aprendizaje de la educación matemática en educación secundaria (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006; NCTM, 2000).

La reiterada percepción de las dificultades señaladas, así como otras puestas de manifiesto por los estudiantes en el aprendizaje del álgebra han ocasionado un interés creciente en la investigación en Educación Matemática por conocer cuál es el conocimiento sobre álgebra escolar que poseen o desarrollan los estudiantes de educación secundaria y cómo éste se lleva a cabo (Demby, 1997; Hoch & Dreyfus, 2005, 2006; Kieran, 1989, 2006, 2007; Kirshner & Awtry, 2004; Sfard & Linchevsky, 1994; Ruano, Socas & Palarea, 2008; Trujillo, Castro & Molina, 2009).

Esta misma preocupación ha dado lugar al surgimiento del constructo "sentido estructural", que busca precisar las habilidades necesarias para hacer un uso eficiente, en tareas escolares, de las técnicas algebraicas aprendidas.

En esta línea de trabajo se enmarca este estudio que presentan Vega-Castro, D., Molina, M. y Castro, E (2012), en el que analizan el sentido estructural que ponen de manifiesto estudiantes de primer curso de bachillerato (de 16-17 años) en la simplificación de fracciones algebraicas que involucran igualdades notables.

En primer lugar plantean la problemática en la que se enmarca este estudio, pasando a centrar la atención en el constructo sentido estructural y en el estudio empírico realizado.

2.5.12 DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA

Tradicionalmente el álgebra es introducida como generalización de la aritmética y las representaciones algebraicas se tratan como generalizaciones de las operaciones aritméticas, las cuales son evaluadas para valores concretos de las variables (Kieran, 1992).

Se sigue un enfoque inductivo –se espera que los estudiantes adquieran conocimiento de la estructura de las operaciones a partir de su aprendizaje de la aritmética– y a continuación las representaciones algebraicas se consideran como objetos matemáticos en los cuales se llevan a cabo operaciones estructurales, por ejemplo, la combinación de términos lineales, la factorización y la operación miembro a miembro de una ecuación (Kieran, 1992).

Este enfoque asume que las relaciones matemáticas, que son el verdadero objeto de la representación algebraica, son familiares al estudiante debido a su aprendizaje de la aritmética, por lo cual durante la enseñanza del álgebra se les presta poca atención.

Sin embargo, diversos estudios muestran que muchos alumnos poseen una pobre comprensión de las relaciones y estructuras matemáticas (Booth, 1982; Kieran, 1989; MacGregor, 1996; Schifter, 1999) y muestran una falta de relación entre sus conocimientos aritméticos y sus conocimientos algebraicos (Carpenter & Franke, 2001; Warren, 2001, 2004).

Dichos trabajos evidencian que esta forma tradicional de introducir el álgebra no es eficaz en el desarrollo de las habilidades de los alumnos para reconocer y usar la estructura matemática. A esto Kieran (1992) añade la comprensión del significado de las letras y el cambio de convenciones, como otras de las principales dificultades en la introducción del álgebra.

El énfasis de la enseñanza de la aritmética en "encontrar la respuesta" hace que los alumnos consigan desenvolverse con procesos intuitivos e informales evitando el uso y reconocimiento de la estructura, que es esencial en el aprendizaje del álgebra (Kieran, 1989). Para explicar esta transición, Sfard (1991), Sfard y Linchevski (1994), Gray y Tall (1994) y Kieran (1991) utilizan la dualidad proceso-objeto[1].

Según estos autores, una de las grandes diferencias entre estas subáreas de las matemáticas, la aritmética y el álgebra, es que en la primera de ellas las expresiones simbólicas (en este caso numéricas) son interpretadas como procesos; mientras que en de interpretarse como procesos y como objetos.

---

[1] Según Tall, Thomas, Davis, Gray y Simpson (2000), esta idea de la dualidad proceso/objeto surgió, en los años 50, a partir del trabajo de Piaget. Las ideas de Piaget sobre las acciones y operaciones que se convierten en objeto de pensamiento y asimilación han sido extendidas más allá de las matemáticas elementales.

Ver una entidad matemática como un objeto requiere ser capaz de referirse a ella como si fuera una cosa real y manipularla como una unidad global. En cambio, interpretar una entidad matemática como un proceso implica considerarla como algo potencial constituido por una secuencia de acciones, en lugar de una verdadera entidad (Sfard, 1991).

Desde esta perspectiva, el estudio del álgebra escolar se entiende como una serie de ajustes proceso–objeto que los alumnos deben realizar para poder comprender los aspectos estructurales del álgebra. Progresivamente se va desarrollando la habilidad de ver una cadena de símbolos como un nombre para un número, más adelante se llega a considerar las letras en una fórmula como variables en vez de incógnitas, y finalmente se perciben las funciones que se esconden tras las fórmulas.

En el trabajo con expresiones algébricas es frecuente que los estudiantes actúen "sin pensar", trasformando las expresiones por medio de técnicas algebraicas aprendidas e ignorando sus significados, pero es esencial tener la capacidad de recuperar los significados de dichas expresiones cuando sea necesario.

Un buen dominio del álgebra requiere comprender ambas concepciones de las expresiones algebraicas (objeto y proceso) y flexibilidad en el paso de una a otra en la resolución de tareas según sea necesario; de este modo, el trabajo con expresiones algebraicas requiere la conjugación flexible de conocimiento procedimental y conceptual (Hiebert & Lefevre, 1986).

El primero de ellos permite aprovechar el poder de abstracción del lenguaje algebraico y el segundo informa para la toma de decisiones sobre las manipulaciones a realizar y la interpretación de los resultados obtenidos.

Los estudios empíricos realizados ponen de manifiesto la falta de dominio del álgebra por parte de los estudiantes, señalando como causas una concepción exclusivamente procedimental de las expresiones algebraicas y la falta de conocimiento conceptual que sustente la ejecución de dichos procedimientos.

Las dificultades que los estudiantes manifiestan con la estructura algebraica fueron inicialmente estudiadas por Booth (1982), Wagner, Rachlin y Jensen (1984) y por Steinberg, Sleeman y Ktorza (1990), quienes pusieron de manifiesto que alumnos de educación secundaria tenían dificultades para concebir una expresión compleja como un todo y reconocer semejanzas en las estructuras de ecuaciones equivalentes, pese a mostrar facilidad para resolver dichas ecuaciones siguiendo procedimientos estándares.

Booth (1982) investigó el tipo de expresiones algebraicas que los alumnos consideraban equivalentes y observó que interpretaban las expresiones de manera diferente según el contexto aplicando la siguiente regla: “Una expresión algebraica se resuelve siempre de izquierda a derecha, a menos que el contexto especifique que debe realizarse previamente otra operación”. Según esta regla, un par de expresiones pueden ser equivalentes en un contexto y no serlo en otro.

En el contexto de las ecuaciones, Sfard y Linchevski (1994) observan que los estudiantes no suelen aplicar la definición formal de equivalencia de ecuaciones (igual conjunto de soluciones) sino que tienden a utilizar el criterio de poder trasformar una ecuación en otra.

Pirie y Martin (1997) señalan la tendencia de los alumnos a interpretar las ecuaciones como sucesos temporales, no estáticos y a leerlos de izquierda a derecha. Además confunden los conceptos de equivalencia numérica y equivalencia algebraica y no muestran capacidad para juzgar la equivalencia entre expresiones numéricas sin la realización del cálculo de las operaciones implicadas (Liebenberg, Sasman & Olivier, 1999).

Los trabajos de Herscovics y Linchevski (Herscovics & Linchevski 1994; Linchevski & Herscovics 1994) y Ruano et al. (2008) señalan algunas de las dificultades y errores concretos que manifiestan los estudiantes al transformar expresiones algebraicas tales como la necesidad de clausura que muestran los alumnos, la particularización de expresiones algebraicas donde les dan valores numéricos al no encontrar sentido en el uso del lenguaje algebraico en algunos contextos, el uso inadecuado o la ausencia de paréntesis, la concatenación de igualdades, el fallo en la percepción de la cancelación de expresiones, la sobre-generalización de la propiedad distributiva del producto respecto de la suma a la operación multiplicación, la falta de aceptación del signo igual como expresión de una equivalencia, un orden incorrecto de las operaciones y la separación de un número del signo operacional que le precede.

2.5.13 CONCEPCIÓN ESTRUCTURAL O PROCEDIMENTAL DE LAS MATEMÁTICAS

Sobre la forma de operar una expresión algebraica, distintos autores han identificado que está guiada por la forma en que se visualiza la expresión. Los alumnos, al enfrentar una tarea algebraica, pueden centrarse en aspectos de tipo procedimental/operacional/instrumental (ver $a + b$ como una suma que debe realizarse) o estructural/relacional (ver $a + b$ como la expresión de la suma de a más b, o la relación de a y b mediante el operador suma, sin que sea obligatorio realizar dicha suma). La manera de visualizar una expresión algebraica tiene diversas implicaciones.

Por ejemplo, Skemp (1976) señala la importancia de enseñar las matemáticas de forma relacional, en la que el alumno comprenda las relaciones entre los elementos antes de operar. Advierte que es fácil enseñar de forma instrumental (seguir reglas sin razonar), con la que se logran desempeños aceptables rápidamente, aunque no perdurables. Enseñar de forma relacional, por el contrario, tiene las ventajas de permitir adaptar lo aprendido a nuevas tareas y de que el aprendizaje sea más sencillo de recordar.

Es conveniente que se logre dejar de ver los operadores como una operación que debiera hacerse (interpretación procedimental) y se le dé a la expresión una interpretación estática (relacional) para que las manipulaciones algebraicas, como las sustituciones de variables, puedan hacerse adecuadamente, como sugiere Freudenthal (1983).

Además de los operadores, el signo igual también puede ser visto de forma meramente procedimental, lo cual complica la transición de la aritmética al álgebra. Burgell y Ochoviet (2015) resaltan la importancia de fomentar en los alumnos una visión relacional del signo igual, mediante actividades no estándar.

Se puede tener una concepción operacional de las matemáticas, en la que una entidad es concebida como el producto de un proceso o como el proceso mismo, mientras que en la estructural es concebida como una estructura estática, como un objeto real.

La operacional está en las primeras etapas de la formación del concepto y la estructural evoluciona a partir de ella. La operacional es necesaria pero no suficiente para el aprendizaje y la resolución de problemas, mientras que la estructural facilita todos los procesos cognitivos (Sfard 1991).

Por otro lado, Molina (2010) explica que, si al realizar una operación o resolver una ecuación se emplea un procedimiento estándar aprendido, sin detenerse a analizar las características particulares del ejercicio en cuestión, se trabaja bajo un enfoque procedimental.

En cambio, si se realiza un análisis previo de las características críticas de las expresiones (su estructura) y al llevar a cabo la actividad se les toma en cuenta, entonces se trabaja bajo un enfoque estructural.

Propone, por tanto, promover el hábito de la observación y el análisis de características críticas de las expresiones antes de iniciar la manipulación, con el fin de fortalecer el enfoque estructural, que permita un trabajo más significativo con expresiones aritméticas y algebraicas y evite algunas de las dificultades que los alumnos encuentran en el aprendizaje y transición entre ambas.

2.5.14 SENTIDO ESTRUCTURAL EN MATEMÁTICAS

Aunque el enfoque procedimental/operacional/instrumental es necesario por sí mismo e indispensable para llegar al enfoque estructural/relacional, los alumnos suelen quedarse en el primero por diversas razones, Skemp (1976).

> *La comprensión relacional, de acuerdo con Skemp, es "tanto saber qué hacer, como por qué", mientras que la comprensión instrumental equivale a "conocer reglas sin razones".*

El concepto de sentido de estructura, introducido por Linchevski y Livneh (1999), abarca las capacidades de reconocer formas equivalentes de una expresión y de identificar las formas apropiadas de realizar una tarea. Posteriormente, Hoch (2003) lo describe como una colección de habilidades, separada de las habilidades manipulativas, que permiten a los estudiantes hacer mejor uso de las técnicas algebraicas aprendidas previamente.

Para ella, las cadenas de símbolos forman estructuras y su interpretación depende del contexto. La conciencia de esas distintas interpretaciones es parte del sentido de estructura. Señala que se denota una falta de dicho sentido al operar sin observar si la estructura permite seguir un proceso más eficiente, como cuando se operan los agrupadores como un primer paso no reflexionado en una transformación algebraica.

La apariencia externa de una expresión revela un orden interno determinado por las relaciones entre las partes que componen su estructura, según Hoch y Dreyfus (2004), quienes incluyen en la mencionada colección de habilidades: la capacidad de ver una expresión algebraica como una entidad, el reconocer una expresión algebraica como una estructura previamente conocida, sus sub-estructuras, las conexiones mutuas entre estructuras, cuáles manipulaciones son posibles y, finalmente, cuál manipulación es más eficiente.

Por su parte, Harel (2013) describe el razonamiento estructural como una habilidad combinada de observar estructuras, actuar sobre ellas con un propósito claro y razonar en términos de estructuras generales, no de casos particulares. Harel y Soto (2017) proponen cinco categorías para el razonamiento estructural: generalización de patrones, reducción de una estructura no familiar a una familiar, reconocimiento y operación de acuerdo a la estructura, justificación epistemológica y razonamiento en términos de estructuras generales. Esta categorización presenta algunas similitudes con los descriptores de Hoch y Dreyfus (2006).

Desde su perspectiva, Mason, Stephens y Watson (2009) identifican como pensamiento estructural la disposición para explicar, conectar y usar las propiedades de una estructura en el pensamiento matemático. La conciencia de dichas propiedades, que dependen de las relaciones entre sus elementos, es el centro del pensamiento estructural. Al desarrollar la conciencia de la estructura matemática en el alumno, se transforma su pensamiento matemático y su compromiso con la actividad matemática.

Según estos autores, el profesor debe ser capaz de reconocer la estructura matemática para poder lograr que sus estudiantes la disciernan, apoyados en las actividades diseñadas por el docente.

Una forma de lograrlo es pedirles a dichos estudiantes que señalen, antes de manipular la expresión matemática, cuáles propiedades de su estructura justifican dicha manipulación. Mencionan que el enfoque procedimental o estructural logrado en los alumnos es una decisión pedagógica, esto es, depende de cómo se lleva a cabo la enseñanza.

Consideran que se puede desarrollar el pensamiento estructural al trabajar en tareas que se enfoquen en la naturaleza de la relación en vez del cálculo, para que la atención se oriente hacia los aspectos estructurales como propiedades que aplican en muchas instancias; también al usar ejemplos que bloqueen las rutinas familiares.

Algo importante acerca de las relaciones estructurales es no convertirlas en el contenido a ser aprendido, sino tratarlas como conciencia a ser traída a la superficie, preferentemente a través del uso de ejemplos cuidadosamente variados, aunque existen casos en los que es necesario hacer del reconocimiento de las estructuras el centro de la actividad (Hoch & Dreyfus, 2007).

En este trabajo de tesis fue preciso determinar una forma de valorar el nivel de sentido estructural en los alumnos. Éste se consideró como la suma de las siguientes habilidades: reconocer la estructura algebraica de la expresión que se observa (coeficentes y variables), identificar las manipulaciones que es posible realizar sobre ella, dada su estructura y elegir la más eficiente de todas.

2.5.15 LA NECESIDAD DE ESTRUCTURA EN MATEMÁTICAS

De acuerdo con Sfard (2001), en diferentes épocas, quienes trataron de capturar la naturaleza elusiva del significado propusieron una amplia variedad de definiciones. El tema del significado como un asunto de relaciones entre conceptos más que sólo conceptos como tales, y el de la comprensión como habilidad para ver la estructura que emerge de estas relaciones, se repiten de una manera u otra en la mayoría de estas propuestas. Ciertamente se encuentran en la idea piagetiana de aprendizaje significativo como construcción y reorganización de esquemas mentales.

La idea de que la comprensión es casi equivalente a ver relaciones fue traída al contexto de la Educación Matemática hace más de sesenta años por Brownell (1935), pero llegó a ser prominente gracias al trabajo seminal de Skemp (1976) quien, inspirado por Mellin-Olsen, sugirió la distinción ahora bien conocida entre comprensión instrumental y relacional.

Si bien ver la estructura es útil en cualquier dominio del conocimiento, en matemáticas puede ser la esencia misma del aprendizaje. Después de todo, las matemáticas pueden considerarse como una ciencia de estructura, como “el estudio de construcciones ideales (aplicable con frecuencia a problemas reales), y el descubrimiento consiguiente de relaciones entre las partes de estas construcciones, antes desconocidas" (Charles Peirce, en Moritz, 1942, p. 8)[2] .

La búsqueda de estructura se refleja en la propia forma bien organizada y jerárquica de las matemáticas. Es decir, aprender matemáticas implica ver estructuras en varios niveles diferentes: primero, las estructuras que se pueden extraer directamente de cosas concretas y acciones y que constituyen los conceptos matemáticos básicos (e.g., los números naturales, formas geométricas simples), luego las estructuras obtenidas a través de investigación de relaciones entre estas estructuras matemáticas fundamentales, y así sucesivamente.

Este proceso no tiene que terminar, ya que ni siquiera el cielo es el límite para la nunca estática jerarquía de los conceptos matemáticos. Sin embargo, lo que determina la calidad del aprendizaje es la visibilidad de la lógica interna de este cuerpo especial de conocimient; si comprender significa ver estructura, entonces es importante que las conexiones bien organizadas entre conceptos ya aprendidos y aquellos que los estudiantes hasta ahora van a aprender nunca desaparezcan de su vista.

Los *Estándares* se refieren extensamente a "extraer" estructuras matemáticas a partir de una variedad de situaciones. A través de todos ellos, se promueve la idea de que las "concepciones matemáticas se crean a partir de objetos, eventos y relaciones" (NCTM, 1989, p. 11). También se presta bastante atención a la necesidad de apreciar la estructura general de las matemáticas. El cuarto estándar en cada nivel se titula "Conexiones matemáticas" y los autores del documento explican el fundamento lógico:

> *Este título enfatiza nuestra creencia de que [...] las matemáticas se deben enfocar como un todo. Conceptos, procedimientos y procesos intelectuales están interrelacionados. En el sentido significativo, "el todo es más grande que la suma de las partes." Es decir, el currículo debe incluir intentos deliberados, a través de actividades instruccionales específicas, de conectar ideas y procedimientos tanto entre diferentes tópicos matemáticos como con otras áreas de contenido. (p. 11)*

---

[2] La descripción de las matemáticas como la "ciencia de ver regularidades" está relacionada con esto (National Research Council, 1989; Schoenfeld, 1992).

2.5.16 ESTRUCTURAS ALTERNATIVAS EN MATEMÁTICAS

Algunos investigadores (por ejemplo, Booth, 1988; Kieran, 1988, 1992) afirman que las dificultades de los estudiantes con la estructura matemática en el sistema algebraico reflejan dificultades que estos estudiantes ya tienen con la estructura matemática en el sistema numérico.

La disposición cognitiva de los estudiantes para manipular las partes numéricas de las ecuaciones reveló algunas malas interpretaciones inesperadas de la estructura matemática. Las "reglas" que usan para manipular las partes numéricas a menudo parecen ser aleatorias. Parece que descubrir la estructura matemática de las expresiones en cuestión es un gran obstáculo para ellos.

Varios investigadores, incluidos Booth (1984, 1988), Greeno (1982), Kieran (1988, 1992), Lins (1990) y Matz (1980), atribuyeron muchas de las dificultades fundamentales experimentadas por los estudiantes principiantes de álgebra a su incapacidad para identificar formas equivalentes de una expresión algebraica. Según Kieran (1988), el conocimiento estructural significa ser capaz de identificar "todas las formas equivalentes de la expresión".

Linchevski y Vinner (1990) argumentaron que esta definición debería modificarse para incluir la capacidad de discriminar entre las formas relevantes para la tarea -generalmente una o dos formas- y todas las demás. Booth (1981, 1984, 1988) enfatizó que los estudiantes construyen sus nociones algebraicas sobre la base de su experiencia previa en aritmética.

Por lo tanto, su sistema algebraico hereda propiedades estructurales asociadas con el sistema numérico con el que están familiarizados. Ella sugiere (Booth, 1988) que las dificultades de los estudiantes en álgebra se deben en parte a su falta de comprensión de varias nociones estructurales en aritmética.

Matz (1980) y Lins (1990) también sugieren que los procesos informales de los estudiantes se basan en sus conocimientos previos. Sin embargo, la diferencia esencial entre Booth, por un lado, y Matz y Lins, por el otro, radica en la forma en que ven la interacción entre la comprensión del estudiante del campo antiguo y el nuevo.

Mientras que Booth afirma que el fracaso en la comprensión de la estructura algebraica refleja dificultades en la comprensión de la aritmética, Matz y Lins sostienen que la dificultad radica en la transición entre los dos modos. Según Booth, la transición entre las partes correspondientes de los dos campos (el antiguo y el nuevo), es directa y, por lo tanto, el fracaso en el nuevo revela dificultades en el antiguo, mientras que la comprensión del antiguo garantiza, en cierto modo, la comprensión de las partes correspondientes en el nuevo.

Según Matz y Lins, los obstáculos en el nuevo sistema no reflejan necesariamente obstáculos en el anterior, más bien probablemente reflejan dificultades en la interpretación del nuevo sistema; los estudiantes no operan dentro del marco de referencia adecuado, lo que resulta en formas inadecuadas de estructurar la situación (Lins, 1990).

Greeno (1982), sin embargo, sugiere que los errores relacionados con la estructura matemática son aleatorios e inconsistentes. Afirma que los estudiantes principiantes de álgebra dividen las expresiones matemáticas en partes componentes de formas que parecen sin rumbo, erróneas y arbitrarias.

Kirshner (1989) sugiere que para algunos estudiantes las características superficiales y las claves visuales sirven como pistas dominantes para las decisiones sintácticas en contraposición a las reglas proposicionales algebraicas. La observación de Kirshner podría explicar parcialmente parte del desempeño de los estudiantes que a primera vista parece ser muy aleatorio.

2.5.17 BUSCANDO LAS SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN LINEAL CON DOS VARIABLES

En la investigación sobre el aprendizaje y la enseñanza del álgebra escolar, Kieran (1992, p. 390) plantea estas preguntas: "¿Qué hace que la comprensión del álgebra escolar sea una tarea difícil para la mayoría? ¿Es el contenido del álgebra la fuente del problema? ¿O es la forma en que se enseña lo que hace que los estudiantes no puedan entender la materia? "

Panizza, M. & Sadovsky, P. & Sessa, C. (1999), señalan en su estudio que el álgebra se introduce desde el primer año de la escuela secundaria, a través de las ecuaciones de primer grado con una incógnita, mostrando que, a partir del conjunto de tareas que los alumnos realizan, elaboran una concepción según la cual la ecuación es una igualdad numérica y las letras son números a «develar» (Panizza, Sadovsky y Sessa, 1996).

Estos resultados coinciden, de alguna manera, con lo que ya había anticipado Carolyn Kieran a propósito de las ecuaciones: *Presumimos que las concepciones primitivas de los niños de lo que es una ecuación no contienen, en general, la idea de que tengan términos literales a ambos lados del signo igual. Las ecuaciones de ese estilo carecen de sentido a la* *vista de la presunta concepción ingenua de los niños de una ecuación como un hecho numérico ligeramente disfrazado con la falta de algún componente* (Kieran, Filloy Y agüe, 1989).

¿Cuál sería la influencia de dicha concepción en la comprensión de otros objetos de enseñanza que aparecen más adelante? Panizza et al. (1999), señalan que los alumnos presentan dificultades en el tratamiento de objetos algebraicos con infinitas soluciones o aún con varias soluciones, objetos tales como ecuaciones con dos o más variables y ecuaciones de grado mayor que uno.

Casi todos los alumnos que fueron entrevistados en su trabajo de investigación, señalan los autores que enfrentaron el problema de resolver una ecuación lineal con doa variables extendiendo conocimientos producidos sobre otros objetos: ecuaciones de una variable y sistemas lineales con dos variables. En muchos de los procedimientos que utilizaron fue posible reconocer también fuertes marcas de su experiencia aritmética. Casi todos los alumnos anticiparon que la ecuación debía tener solución única. Se basaron principalmente en dos cuestiones:

- Las representaciones que tienen los alumnos acerca de los problemas que se resuelven con ecuaciones, les hacen ver en el contexto del problema una justificación a la unicidad de las soluciones.
- Las representaciones de las letras como números ya determinados pero desconocidos contribuyen a que los alumnos busquen el valor de la x y el valor de la y.

En la búsqueda de soluciones de la ecuación, la mayoría de los alumnos adaptan al nuevo objeto los procedimientos aprendidos para un objeto cercano: sistema de ecuaciones. El procedimiento incorrecto que resulta podría nombrarse como *sustitución en sí misma* y consiste en despejar una variable en función de la otra y luego reemplazar, en la escritura original de la ecuación, la variable despejada por la expresión obtenida.

Los alumnos no ven, ni *a priori* ni a posteriori, que eso los conduce a una identidad. De algún modo, al reemplazar una variable por lo que se obtuvo al despejar, tienen la impresión de haber respetado la relación entre las dos variables en juego. De hecho han aplicado al objeto transformaciones que «respetan» la igualdad (aunque no conservan el conjunto solución).

Panizza et al. (1999), señala que los alumnos evidencian desconcierto al arribar a una expresión que no saben interpretar. Frente a esto reaccionan de diferentes maneras: Algunos, al llegar a expresiones como $0 = 0$ o $y = y$, declaran que la ecuación no tiene solución y, en la medida en que piensan que el problema sí tiene, invalidan la ecuación como modelo del problema.

Cualquiera que sea el procedimiento utilizado por los alumnos para operar con la ecuación de dos variables, al llegar a una igualdad numérica (verdadera o falsa), adjudican a cada uno de los números involucrados a cada lado de la ecuación algunos de los siguientes significados:

a) es el «resultado» de la ecuación, o sea la solución;
b) o, en caso de estar trabajando en la resolución de un problema, es alguna otra cantidad que tiene un sentido preciso en términos del problema.

A modo de conclusión Panizza et al. (1999), señalan que la ecuación lineal con dos variables no es reconocida por los alumnos como un objeto que define un conjunto de infinitos pares de números.

Cuando aparece en el contexto de los sistemas lineales –pensamos que como producto de que la mayor parte de los sistemas que los alumnos resuelven tienen solución única–, éstos adaptan bien la concepción de la letra como incógnita a la resolución de sistemas con solución única: antes se trataba de develar la x ahora habrá que develar la x y la y.

La noción de *incógnita*, en cambio, no resultaría eficaz para interpretar el rol de las letras en una ecuación con dos variables, objeto éste que debería ser comprendido si los sistemas lineales fueran concebidos como un conjunto de condiciones independientes que deben cumplirse simultáneamente.

Por otra parte, cualquiera haya sido el trabajo realizado alrededor de «ecuación de la recta», éste no parece suficiente para que los alumnos puedan establecer una relación entre los puntos de la recta y las soluciones de la ecuación correspondiente. La posibilidad de aproximación a la concepción de las infinitas soluciones parece basarse –en los alumnos entrevistados– en sus respectivas centraciones en objetos diferentes.

2.5.18 TAXONOMÍA SOLO

La Taxonomía Structure of the Observed Learning Outcome (SOLO), fue diseñada en 1982 (Biggs y Collis, 1982) como consecuencia de ciertas críticas que habían surgido acerca de la teoría de las etapas de Piaget.

Fundamentalmente, los piagetianos de la época consideraban que el desarrollo cognitivo evolucionaba a través de etapas discretas, cada una de ellas definida en términos de una estructura lógica propia que gobernaba todas las actuaciones de los individuos. Los ejemplos de actuaciones oscilantes entre diferentes etapas, referidas como décaleges, se veían como aberrantes y extraños (Biggs y Collis, 1991).

Lo que resultó evidente para Biggs y Collis (1982), fue que en el contexto escolar, la aparición del décalege era muy común: Un estudiante podía ser «pre- formal» en matemática mientras que en historia podría ser «pre-concreto» o, incluso, «formal» en matemática un día y «concreto» el siguiente (Biggs y Collis, 1991).

Estas observaciones, dicen, no pueden indicar cambios en el desarrollo cognitivo, sino, más bien, cambios en constructos más próximos como el aprendizaje, la actuación o la motivación de los estudiantes.

De esta manera, Biggs y Collis (1982) trataron el problema de proporcionar a los profesores un instrumento que les permitiera determinar el nivel de desarrollo cognitivo de sus estudiantes, a partir de sus interacciones con los alumnos en las situaciones de clase.

Pronto se dieron cuenta que, al analizar las respuestas de los alumnos, estaban tratando con dos fenómenos. El primero de ellos era lo que llamaron *la estructura cognitiva hipotética y el segundo, la estructura del resultado del aprendizaje observado* (SOLO).

La taxonomía SOLO de Biggs y Collis (1982) se inspiró en las descripciones piagetianas de las diferencias cualitativas en el manejo de las mismas tareas y estaba destinada a ayudar en el análisis de las respuestas de los estudiantes a preguntas abiertas en la escuela (Marton, 2015, p.115).

Las diferentes categorías se refieren a diferentes formas de manejar una misma tarea, y básicamente, se componen de cuatro niveles diferentes: en el nivel preestructural, no se dominan aspectos cruciales de la tarea; en el nivel uniestructural, se domina un aspecto crucial de la tarea; en multiestructural, se dominan varios aspectos cruciales; finalmente, a nivel relacional, varios aspectos cruciales se relacionan entre sí.

Los niveles más elevados de la taxonomía corresponden a un aprendizaje más profundo, a una interpretación personal del contenido que relaciona la tarea con situaciones alejadas del contexto inmediato, que establece relaciones con otros conocimientos relevantes y con materiales procedentes de diferentes fuentes de información. Contrariamente, los niveles inferiores de la taxonomía SOLO corresponden al tratamiento de la información de manera aislada y reproductiva.

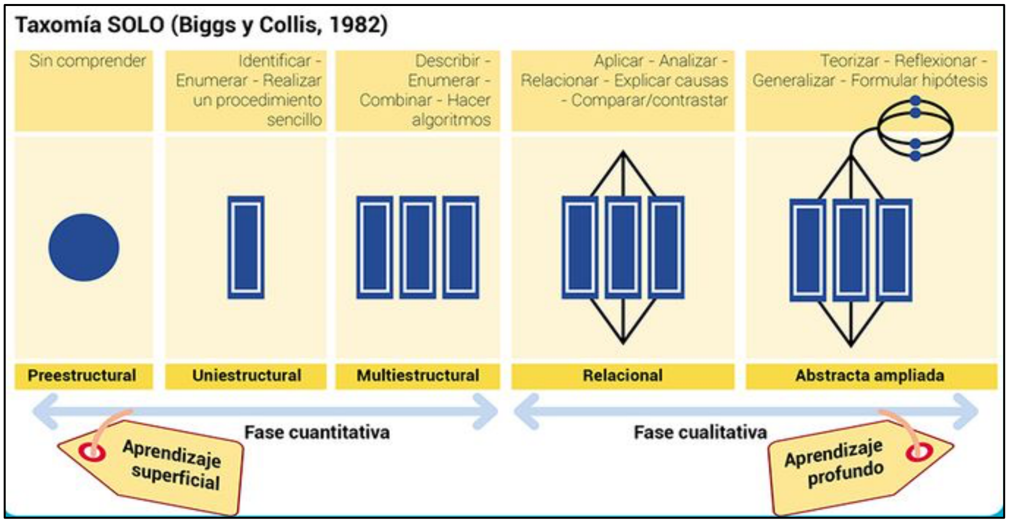


Figura 2.1. Niveles de la taxonomía SOLO

Dicha taxonomía tiene las siguientes categorías:

- Pre-estructural.- No se domina ningún aspecto crucial de la tarea.
- Uniestructural.- Se domina sólo un aspecto crucial de la tarea.
- Multiestructural.- Se dominan varios aspectos cruciales de la tarea.
- Relacional.- Relaciona entre si varios aspectos cruciales de la tarea

A medida que los estudiantes aprenden, los resultados de su aprendizaje muestran fases similares de creciente complejidad estructural. *Hay dos cambios principales* -dice Biggs- *los cuantitativos, a medida que aumenta la cantidad de detalles principales en la respuesta de los estudiantes y los cualitativos, a medida que los detalles se integran a un modelo* *estructural. Las fases cuantitativas del aprendizaje se producen primero; después, el aprendizaje cambia cualitativamente.*

En la siguiente tabla 2.1 se muestra ejemplo de clasificación de las posibles respuestas de los alumnos en función de los niveles de comprensión manifestados en un ejercicio de desempeño escrito.

Nivel Pre-estructural (E)	Nivel Uniestructural (D)
• No resuelve la cuestión planteada • Como mucho, reproduce los contenidos memorizados • Hace algunas asociaciones irrelevantes • Se centra únicamente en un aspecto de todos los posibles • Utiliza únicamente una pequeña cantidad de la información disponible.	• Responde a lo planteado pero de forma limitada • Selecciona una parte de la información para responder a la pregunta • Apenas establece relaciones entre los datos • Plantea la respuesta de manera descriptiva • Raramente alcanza conclusiones; cuando concluye acerca de algo, lo hace precipitadamente y basándose en escasa información
Nivel Multiestructural (C)	Nivel Relacional (B)
• Utiliza dos o más conjuntos de datos • Normalmente llega a ordenarlos, pero no logra llegar a explicar el modo en que se relacionan • No utiliza toda la información disponible • Ignora las posibles incoherencias en los argumentos que sostiene • Emplea un estilo meramente descriptivo • Apunta alguna relación causa-efecto	• Relaciona la información de un modo coherente • Alcanza conclusiones que responden a los datos disponibles • Ofrece algunas explicaciones teóricas para justificar su modo personal de relacionar la información • Emite juicios personales • Utiliza un estilo explicativo para expresarse
Nivel de Abstracción Extendida (A)	
• Incluye información nueva en la respuesta • Es capaz de manejar conceptos elaborados • Considera diversas hipótesis • Ofrece distintas explicaciones plausibles, todas ellas basadas en informaciones relevantes • Arriesga conclusiones basadas en sus propios razonamientos • No siente la necesidad de alcanzar una conclusión única, sino que suguiere y justifica posibles respuestas a la cuestión planteada	

Tabla. 2.1 Ejemplo de clasificación de las respuestas de los alumnos

2.5.19 EDUCACIÓN NO FORMAL DESDE EL VIDEO TUTORIAL

En la actualidad, el papel del aprendizaje es fundamental por los cambios tecnológicos que ha transformado la manera de obtener la información, permitiendo a la educación un abanico de posibilidades de generar y acceder al conocimiento.

La educación no formal entonces, se define “como actividades educativas organizadas, sistemáticas, realizadas fuera del marco del sistema oficial” (Martín, 2013: 4). es un proceso de aprendizaje que incluye prácticas donde las estructuras se escapan de los estándares educativos formales, para constituir una formación de capacitación e información asumida por las personas de acuerdo con sus necesidades educativas.

Ante las posibilidades de desarrollo que ofrece este proceso, el primer paso esencial es la capacidad educativa de identificar las cualificaciones necesarias para las tareas que se tienen que hacer, así como responder a las inquietudes de dónde buscar dichas habilidades, cómo aprenderlas y cómo aplicarlas (Castells, 1999). *Es posible educar fuera del aula donde el educando pueda interactuar con el medio ambiente, explorar, indagar e investigar y con ello todo lo que implica las actividades del hombre y el mundo físico que lo rodea* (Sánchez y Galvis, 2016: 12).

La llegada de la internet ha cambiado la manera de buscar la información, y con el surgimiento de las redes sociales el cambio en la forma de comunicarse, dando un giro de 180 grados en las relaciones interpersonales.

Desde su aparición en 2005 la red social YouTube es aprovechada por los seguidores de la producción audiovisual. YouTube es una plataforma en la cual los usuarios pueden subir y compartir videos. Aloja una gran variedad de clips, películas, programas de televisión y vídeos musicales, así como contenidos de videoblogs y tutoriales.

Todo esto soporta la efectividad comunicativa de YouTube, que contiene una gran cantidad de videos que promueven el conocimiento y la interacción.

Aunque YouTube no es el único portal de video online, es el más visitado en la actualidad. Más allá de haber sido el primero de su clase en aparecer, se ha convertido en un referente de la cultura digital de forma casi inmediata.

Luego de que fuese adquirido por Google incrementó su dimensión comercial, sus posibilidades tecnológicas y extendió su plataforma. Lo que lo llevó a ser el tercer sitio web más visitado en todo el mundo, detrás del buscador Google y de la red social Facebook (Pérez Rufi, 2013: 45).

En este caso, YouTube se ha convertido en el favorito de los realizadores audiovisuales, y por ende, de quienes lo usan para enseñar a través del video tutorial. Esta plataforma digital es aprovechada por los jóvenes, que continúan respondiendo desde los nuevos escenarios a los mismos retos y eventualidades que sortean cotidianamente.

Es por ello, que en el campo educativo el video tutorial puede ser usado para el aprendizaje de idiomas, el uso de métodos investigativos, la realización de reseñas de libros o películas y hasta la ejecución de procesos matemáticos.

El video tutorial es una herramienta ideal para adquirir conocimiento y por ello son los más buscados en YouTube "son tan eficaces y válidos como los cursos presenciales. El video tiene esa característica especial que ilustra lo que se está contando, de ver como se hace, poderlo grabar y después reproducir al antojo del usuario.

Por consiguiente, se puede decir que el video tutorial favorece al aprendizaje, siempre que conlleve una serie de elementos:

> *Debe favorecer la realimentación, comprobación, aplicación, demostración, resolución de ejercicios, problemas de la vida diaria y proyectos de una manera interactiva brindando un juego de iniciativas a través de organizadores gráficos y animaciones hacia la búsqueda de fundamentación científica y su ejecución, conseguir además un aprendizaje significativo que implica un cambio en los esquemas de conocimientos que se poseen previamente, estableciendo nuevas relaciones entre dichos elementos, mejorando de esta manera el proceso de enseñanza-aprendizaje (Fernández, Díaz, Del Carmen y Recio, 2013: 1994*).

El uso del video tutorial no es exclusivo de la academia, como se ha expuesto; todos pueden tener acceso a este tipo de audiovisual para su formación. "Lo anterior nos lleva a examinar la utilidad de los videotutoriales como herramientas que superan la limitación de la presencialidad obligatoria" (Castillo y Carrillo, 2012: 69). La necesidad de seguir aprendiendo dentro y fuera del aula es lo que lleva a cualquier persona a estar interesado por la educación. La tecnología ha permitido superar la presencia en la escuela facilitando la continuidad de adquirir el conocimiento de manera autónoma.

CAPÍTULO III. METODOLOGÍA

3.1 ENFOQUE DE LA INVESTIGACIÓN

Esta investigación se llevó a cabo a través de la conjunción de la teoría de la variación (Marton, F., & Pang, M. F., 2006) y de la metodología del experimento de enseñanza (Cobb et al. 2003) que es parte del estudio, diseño e implementación de las actividades propuestas de enseñanza-aprendizaje.

En ese sentido, en un primer momento la investigación se enfocó en el estudio, análisis y diseño de un conjunto de tareas, es decir tareas de aprendizaje que requieren agrupar aspectos críticos (dimensiones de variación) del objeto de apendizaje (resolución de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas en números enteros) que, a su vez, toman valores (no necesariamente numéricos) que varían, llamados características críticas.

En un segundo momento el trabajo se concentró en la implementación del conjunto de tareas con los estudiantes. Para ello, *se* empleó una metodología constructivista a través de experimentos de enseñanza, según lo descrito por Cobb y Steffe (1983) para la investigación con sujetos individuales. Adaptamos esta metodología a la investigación sobre matemáticas en el aula (a la manera de Cobb et al., 1993).

La metodología del experimento de enseñanza involucra *la hipótesis de lo que [el alumno] podría aprender y de cómo encontrar formas de fomentar este aprendizaje* (Steffe, 1991, p. 177). Entre los resultados importantes que se esperan obtener figura la relación entre los objetos de aprendizaje previsto (que denota las capacidades que el profesor quiere que los alumnos desarrollen*)* y vivido (que manifiesta lo que realmente se aprende desde el punto de vista de un alumno*)* que son inherentes a las tareas.

Debido a la amenaza de COVID-19 desde principios del 2020, nuestra escuela y todos los centros educativos (en todo el mundo) se enfrentaron a la disyuntiva de cómo continuar impartiendo sus cursos, mientras mantienen a su personal y estudiantes a salvo de una emergencia de salud pública que se mueve rápidamente y que no acabamos de comprender bien.

Muchas instituciones optaron por cancelar todas las clases presenciales, incluidas las prácticas en laboratorios y otras actividades de aprendizaje e investigación, y solicitaron a los profesores que impartieran sus cursos en línea para ayudar a prevenir la propagación del virus que provoca COVID-19.

Transitar hacia un modelo de instrucción en línea supone la flexibilidad de enseñar y aprender en cualquier lugar y momento. Sin embargo, al migrar al aprendizaje en línea de forma tan abrupta, tuvimos que tener en cuenta que las crisis y los desastres también crean interrupciones en la vida de los estudiantes y los docentes, fuera de su papel en la escuela (en nuestro caso por ejemplo, la falta de accesibilidad a un equipo informático y la conectividad a internet).

Quien esto escribe elaboro todas las actividades propuestas en este trabajo de tesis y participó dirigiéndolas para que se pudieran llevar a cabo durante la pandemia por COVID-19. Hodges et al. (2020) señala que se debe entender este cambio no como una educación en linea o a distancia sino como una educación remota de emergencia (ERDE) que probablemente no fue la prioridad de todos los involucrados y que hubó estudiantes que no pudieron incorporarse a los cursos de inmediato e incluso algunos desertaron.

Algunas de las actividades que se trabajaron con los estudiantes fueron realizadas por medios informáticos (fueron enviadas a través de sus correos electrónicos personales) de manera asincrónica, otras realizadas de manera presencial (en las instalaciones de la escuela) y unas más se elaboraron directamente en sus domicilios.

De tal manera, todo lo elaborado por los alumnos en las hojas de trabajo (aprendizaje vivido) fue objeto de análisis y clasificación. En concreto, utilizamos la taxonomía SOLO, que es un acrónimo de las palabras Structure of the Observed Learning Outcome, es decir, Estructura del Resultado Observado de Aprendizaje, elaborada por Biggs y Collis en 1982, que se basa en la importancia de analizar y reflexionar sobre los resultados observables del aprendizaje que los sitúa en niveles de complejidad cognitiva ascendente.

Los autores establecen cinco niveles: preestructural, uniestructural, multiestructural, relacional, abstracta ampliada (Biggs, 2006, pág. 71) que van de un conocimiento superficial a un conocimiento más profundo. En este trabajo estos niveles nos sirvieron para clasificar las respuestas de los estudiantes, con el fin de identificar refinamientos y validación de concepciones sobre el objeto de estudio, logradas o incluidas en el aprendizaje previsto.

3.2 LA FUENTE DE LOS DATOS

Los datos recabados en este trabajo de tesis se recopilaron como resultado de una experiencia en la enseñanza-aprendizaje de la resolución en números enteros de las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, con base en la teoría de la variación, en la Escuela Preparatoria Oficial (EPO Núm. 171) de la zona oriente del Estado de México.

Durante los últimos años, la enseñanza de las matemáticas en México ha experimentado cambios significativos. Debido a las reformas educativas implementadas, por razones históricas y realistas, algunas características típicas de la educación matemática en México se destacan por enseñar contenidos difíciles, enfatizando el rigor, la abstracción y la aplicación de los algoritmos. Sin embargo, como resultado de la reforma de la educación matemática en todo el mundo, los contenidos de enseñanza están cambiando gradualmente para adaptarse al interés de los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas y para relacionarse con la vida real (INEE, 2017).

Al mismo tiempo, el método de enseñanza tradicional que enfatiza la práctica se está moviendo gradualmente hacia el método de combinar aprendizaje y descubrimiento, interacción profesor-alumno, aprendizaje cooperativo grupal, etc. En la misma medida, la enseñanza con variación se ha desarrollado con los tiempos.

Debido a la amenaza de COVID-19 desde principios del 2020, nuestra escuela y todos los centros educativos (en todo el mundo) se enfrentaron a la disyuntiva de cómo continuar impartiendo sus cursos, mientras mantienen a su personal y estudiantes a salvo de una emergencia de salud pública que se mueve rápidamente y que no acabamos de comprender bien.

Muchas instituciones optaron por cancelar todas las clases presenciales, incluidas las prácticas en laboratorios y otras actividades de aprendizaje e investigación, y solicitaron a los profesores que impartieran sus cursos en línea para ayudar a prevenir la propagación del virus COVID-19.

En ese sentido, los datos sobre las respuestas de los estudiantes se obtuvieron de las hojas de trabajo (aprendizaje vivido). Algunas de las actividades que se trabajaron con los estudiantes fueron realizadas por medios informáticos (fueron enviadas a través de sus correos electrónicos personales) de manera asincrónica, otras realizadas de manera presencial (en las instalaciones de la escuela) y unas más se elaboraron directamente en sus domicilios.

Se seleccionaron los datos de las cinco unidades de discernimiento que consideramos en este trabajo de tesis para la enseñanza de las ecuaciones diofánticas lineales con dos incógnitas apoyandonos en la extensión de la teoría de la variación hecha por Leung. Esto se llevó a cabo con un grupo de 35 estudiantes (entre 15 y 17 años) en mayo-julio del 2020 y quien escribe esto fue su maestro de matemáticas.

3.3 SELECCIÓN DE LOS ESTUDIANTES

De acuerdo con los planes y programas del bachillerato general (INEE, 2017), la escuela preparatoria oficial cuenta ademas de las Unidades Academicas de Conocimiento (UAC´s) de matemáticas (I a VI, plan 2013) con talleres de matemáticas (del I al IV, plan 2017) para desarrollar el pensamiento lógico matemático del estudiando al proponer alternativas de solución desde diversos enfoques priorizando las habilidades del pensamiento tales como la búsqueda de patrones o principios que subyacen a fenómenos cotidianos, la generación de diversas alternativas para la solución de problemas, el manejo de la información, la toma de decisiones basada en el análisis crítico de la información matemática, interpretación de tablas, gráficas, diagramas y textos con símbolos matemáticos que se encuentran en su entorno, todo ello permitirá tanto la argumentación de propuestas de solución como la predicción del comportamiento de un fenómeno a partir del análisis de sus variables.

En consecuencia, la estrategia de enseñanza-aprendizaje y la evaluación que diseñe el personal docente para realizar su práctica educativa en las asignaturas que conforman el campo disciplinar de matemáticas deben girar en torno a problemas significativos para la vida del alumnado, es decir no debe ser repetitivas o se resuelvan aplicando un procedimiento modelo matemático que no tenga significado, dichas situaciones deben promover la movilización de recursos diversos para el diseño de una metodología de solución.

Para esta investigación se trabajó con los estudiantes de la UAC de matemáticas II (del segundo semestre) del ciclo escolar 2019-2020 de manera síncrona y asíncrona por la pandemia de COVID-19, y aunque se invitó a otros estudiantes de diferentes grupos de segundo semestre a participar, no aceptaron. Dieciseis alumnos participaron de manera continua en las sesiones virtuales (en parejas), mientras que el resto lo hizo de manera esporádica. En la siguiente tabla se presenta información general sobre los participantes.

Nombre	Edad	Semestre	Genero	
1. Dafné	15	Segundo	Femenino	Equipo 1
2. Nadia	16	Segundo	Femenino	
3. America	15	Segundo	Femenino	Equipo 2
4. Eduardo	16	Segundo	Masculino	
5. Ivan	16	Segundo	Masculino	Equipo 3
6. Liliana	16	Segundo	Femenino	
7. Monserrat	16	Segundo	Masculino	Equipo 4
8. Juan de Dios	15	Segundo	Femenino	
9. Sergio	16	Segundo	Masculino	Equipo 5
10. Jesus	16	Segundo	Masculino	
11. Flor	17	Segundo	Femenino	Equipo 6
12. Brenda	16	Segundo	Femenino	
13. Jaqueline	17	Segundo	Femenino	Equipo 7
14. Ariana	17	Segundo	Femenino	
15. Yarinka	16	Segundo	Femenino	Equipo 8
16. Gabriel	17	Segundo	Masculino	
Resto del grupo	20 estudiantes, que presentaron discontinuidad y entrega esporádoica de las tareas			

Tabla 3.1 Información de los equipos participantes

3.4 DISEÑO DE LAS TAREAS DE APRENDIZAJE APLICANDO LA TEORÍA DE LA VARIACIÓN

La Teoría de la Variación de Marton (2015), está enfocada en las condiciones necesarias para aprender, que están relacionadas con el objeto de aprendizaje, su elección y secuenciación. Marton y Booth (1997) consideran que adquirir un conocimiento es encontrar nuevas formas de vivir una experiencia relacionada con ese conocimiento.

En particular, en este trabajo de tesis el objeto de aprendizaje estriba en la resolución de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas en números enteros y para que los estudiantes adquieran un conocimiento sobre el tema la tarea que se afronta como parte de esta investigación es la del diseño didáctico de una nuevas formas de vivir o de experimentar, para los estudiantes sobre este conocimiento.

Marton y Booth destacan que una persona ha aprendido un objeto de aprendizaje o proceso cuando es capaz de enfocar, de forma simultánea y consciente, aquellos aspectos críticos (o dimensiones de variación) de ese objeto de aprendizaje o proceso que le son esenciales, dentro de un contexto dado. Mencionan que el aprendizaje es una función del discernimiento, entendido como distinguir, mediante el intelecto, una cosa de otra o varias cosas entre sí, a través de la observación de diferentes clases de variación (contrastación, separación, generalización y fusión), de los elementos entre ellos.

Los aspectos críticos del objeto de aprendizaje (aquello que se aprenderá) son aquellos que permiten verlo como debe ser visto para ser aprendido de forma adecuada al contexto (Marton, Runesson, & Tsui, 2004).

Häggström (2008), menciona que la persona que discierna más aspectos críticos de un objeto y más relaciones entre ellos, podrá hacer uso de ese objeto de mejores formas, comparado con quien haya discernido menos aspectos críticos.

Lo (2012) señala que los estudiantes no pueden discernir de forma natural los aspectos críticos, requieren que el profesor les provea las oportunidades de hacerlo, mediante la elección y organización del objeto de aprendizaje. Los valores corresponden a las características, y la dimensión de variación corresponde al aspecto en este trabajo.

Un aspecto crítico es, por lo tanto, una dimensión crítica de la variación y una característica crítica es un valor crítico (Marton, 2015 p.47). Los aspectos críticos (o dimensiones de variación) toman valores (no necesariamente numéricos) que varían, llamados características críticas.

Por ejemplo, para resolver una ecuación algebraica de primer grado en dos variables en números enteros, un aspecto critico es que los coeficientes sean números enteros. Valores distintos en esa dimensión, la de los coeficientes, da lugar lugar a que se abran otras dimensiones de la variación, incluidos los casos en el que el coeficiente independiente c es uno, cero o distinto de de uno y cero. Aspectos y características críticas son inseparables y, por tanto, se disciernen de forma simultánea.

Según como sea presentado y percibido, un aspecto se puede discernir de formas más o menos precisas, lo cual afectará la forma en que se entiende y se usa. Una forma más precisa se logra mediante patrones de variación e invariación, según propone Marton (2015), quien advierte que, para que un alumno pueda discernir un aspecto crítico de un objeto de aprendizaje, es condición necesaria que lo observe variar.

Para el autor, el patrón de variación mínimo, base de los demás, es el contraste, en el que se involucran al menos dos aspectos, uno de los cuales varía y el otro no. El que varía es sobre el que se llama la atención del estudiante, es el que se desea que discierna. Por ejemplo, si se desea enseñar a distinguir una ecuación de primer grado con dos incógnitas con coeficientes enteros de una que no lo es, se puede mostrar estas ecuaciones:

$\boxed{2x + 3y = 10}$ $\boxed{2x + \frac{3}{2}y = 10}$

El único aspecto que varía es el coeficiente del segundo término, en la primera ecuación es un número entero, y en la segunda ecuación, el coeficiente del segundo término no lo es (es un número racional o fracción propia). Mediante este contraste, el estudiante identifica, específicamente en estos dos ejemplos, cuál sería una ecuacion lineal con dos incognitas con coeficientes enteros y cuál no.

Los contrastes consecutivos llevan a la separación y a la generalización, considerados también patrones de variación e invariación. Después de observar distintos contrastes similares al anterior, el alumno comienza a separar aquello que hace que una ecuación lineal con dos incognitas con ceofiecientes enteros lo sea y generalizarlo para identificar este tipo de ecuaciones entre diversas ecuaciones lineales con distintas sub-estructuras. [para mayor detalle acerca del uso del térrmino sub-estructura o estructura ver, Ascencio y Eccius-Wellmann, 2019]

- Por ejemplo, en las siguientes tres ecuaciones comparandolas dos a dos (la primera con la segunda y la primera con la tercera) se observan tres características distintas entre ella, a saber entre la primera y la segunda es distinto el signo del coeficiente del segundo término, también el término independiente c es distinto y en la segunda ecuación sólo aparece una incógnita la x.

1) $\boxed{2x + 3y = 10}$ 2) $\boxed{2x - 3 = 0}$ 3) $\boxed{\sqrt{2}x - 3y = 15}$

En cada una de estas comparaciones, por ejemplo, comparando la primera ecuación con la segunda, se puede ver que aparentemente ambas tienen la misma estructura, porque en ambas aparecen primer término, segundo término y término independiente. Sin embargo, en la segunda expresión no aparece la varibale y, y también cambia el signo del segundo término, además de que el término independiente c también cambia. Es la experiencia de todos esos cambios lo que permite lo que el estudiante logre separar las características que son importantes en una ecuación de primer grado en dos variables y con coefientes enteros.

Finalmente, el hacer variar dos o más aspectos a la vez, lleva a un patrón de variación e invariación llamado fusión (Marton, 2015). Por ejemplo, la fusión podría lograrse al distinguir una ecuación lineal con dos incógnitas con coeficientes enteros de una ecuación cuadrática con coeficientes enteros. Cambia de grado la ecuación y de signo positivo a negativo:

$$\boxed{x^2 + 8y = 20} \qquad \boxed{x - 8y - 20 = 0}$$

Figura 3.1. Secuencia pedagógica de los patrones de variación

Olteanu y Olteanu (2012), por su parte, sugieren un nuevo patrón de variación e invariación, al que llaman similitud (similarity), el cual permite identificar que dos expresiones tienen el mismo significado, es decir, son dos formas, que se ven diferentes, pero que expresan lo mismo, como en los incisos a y b siguientes:

a) $\boxed{2x + 4y = 16}$ y $\boxed{\frac{1}{2}(4x + 8y = 32)}$

b) $\boxed{(a + b)(a - b)}$ y $\boxed{a^2 - b^2}$

Sumado a la determinación de los aspectos críticos y de los patrones de variación con los que éstos se presentarán a los alumnos, el diseño de una actividad o serie de actividades puede incluir un andamiaje, el cual implica pequeñas variaciones que llevan a pequeños avances en el aprendizaje, graduados por las actividades que dirige el profesor, según señalan Gu, Huang y Marton (2004).

Ellos indican que el andamiaje pone énfasis en el proceso y la jerarquía del aprendizaje. Aplicar el andamiaje en el salón, significa que los estudiantes avanzan exitosamente de su nivel actual de conocimiento hacia el siguiente a través de un diseño instruccional efectivo, conocido como Pudian en China (Huang & Li, 2017).

En la enseñanza con variación en China se hace, además, una distinción entre la variación conceptual y la variación procedimental en el momento de elaborar las actividades. Lai y Murray (2012) observaron cómo las estrategias de variación procedimental apoyaron el aprendizaje significativo en los alumnos, al enfocar intencionadamente, dentro de las actividades que éstos realizan, conexiones sustantivas y no arbitrarias entre conocimientos.

En esta tesis la variación procedimental se incluye en el diseño de las tareas 4A, 4B y 4C. De tal manera, que ahí se puede ver que al hacer variar el coefiente *c*, ya sea diferente de cero o uno, para encontrar una solución particular se utilizan tres tipos de procedimientos matemáticos: (i) criterios de multiplicidad o divisibilidad (p.115); (ii) criterio de cifras terminales (p.119); y (iii) criterio de la división (p.123).

En la tarea siete se hace variar nuevamente el coeficiente *c* siendo igual a 1, de modo que para encontrar una solución particular se aplica otra variación procedimental al utilizar como procedimiento el algoritmo de Euclides.

Por su parte, Kullberg, Kempe y Marton (2017), señalan que, mediante el análisis de las actividades de enseñanza-aprendizaje bajo el marco de la teoría de la variación se puede identificar las características críticas que serán más fácilmente discernible por el alumno, por haber sido adecuadamente enfocadas y tematizadas, y lo que no.

Por lo tanto, este marco permitió tanto revisar actividades ya existentes para complementarlas y que incluyerán las posibilidades de aprender necesarias, como crear actividades completamente nuevas. En este trabajo de tesis se dieron ambas situaciones al diseñar y construir las actividades de enseñanza-aprendizaje con las que trabajaron los estudiantes.

El que la Teoría de la Variación esté centrada en el objeto de aprendizaje hace que sea adecuada para buscar aprendizajes más ordenados, reflexionados, significativos y en este trabajo con un mayor análisis de las estructuras observadas de las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas en números enteros y que, a la vez, se eviten cierto tipo de errores (por ejemplo, confundir coeficientes y variables) mediante la presentación de contrastes de ejemplos y contraejemplos.

En ese sentido, Marton (2015) considera que la gran mayoría de las fallas para entender el objeto de aprendizaje derivan de que el estudiante no observó las diferencias que era necesario que percibiera. También advierte que, si bien el entendimiento no provoca una acción, una acción expresa el entendimiento. Esto puede interpretarse como que los procedimientos de respuesta de los alumnos a las tareas muestran las estructuras que discernieron y los procesos que eligieron debido a dicho discernimiento, es decir, muestran su nivel cognitivo de las ecuaciones algebraicas, en nuestro caso de acuerdo con la taxonomía SOLO.

El objeto de aprendizaje (matemático) principal en esta tesis es la búsqueda de las soluciones enteras (particular y general) de las ecuaciones diofanticas lineales del tipo ax + by = c*,* donde *a* y *b* son números enteros diferentes de cero y *c* un número entero cualquiera.

El aprendizaje previsto en el conjunto de tareas de aprendizaje, es que los alumnos discernan los aspectos criticos avanzando en el reconocimiento de las características criticas que a su vez abren diferentes dimensiones de variación y tipos de procedimientos o de trabajo matemático, por ejemplo el desarrollo de las propiedades de los números enteros y el algoritmo de Euclides para llegar a:

1. ¿Cómo son los coeficientes en una **ecuación diofántica lineal** con dos incógnitas?
2. ¿Cuándo tiene solución entera? (M.C.D de (a, b))
3. En caso de tener solución, ¿cómo encontrarla? (Solución particular)
4. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación? (Modelo general)

Esta estructura elegida apoya la facilitación del conocimiento matemático y pedagógico de los alumnos de bachillerato, ofrece la oportunidad de experimentar matemáticas desafiantes (etapa de trabajo individual), apoya la socialización (trabajo en grupos pequeños y etapas de discusión reflexiva), promueve la capacidad de los alumnos para reflexionar sobre sus experiencias de aprendizaje y enseñanza, así como sobre su crecimiento personal (etapa de discusión reflexiva).

El proceso inicial de la construcción del conjunto de tareas de aprendizaje fue compatible con lo descrito por Watson y Mason (2006) para diseñar secuencias de enseñanza de ejercicios basados en las percepciones (presuntas) de los estudiantes.

Específicamente, se comenzó a partir del análisis de cómo se representan los aspectos y características críticas elegidos en los libros de texto y en la enseñanza tradicional con los maestros (que imparten matemáticas en nuestra escuela), así mismo se incluyó decisiones sobre qué variaciones controladas debieron considerarse para que los estudiantes "pudieran observar regularidades y diferencias, desarrollar expectativas, hacer comparaciones, tener sorpresas, evaluar, adaptar y confirmar sus conjeturas dentro de cada tarea" (ibid, p. 109).

Como parte del andamiaje en este estudio y debido a la pandemia por COVID-19 se aprovecho la tecnología a favor del aprendizaje, fuera de una educación convencional (presencial), a partir del uso que los jóvenes le dan al video tutorial (en youtube).

Se presenta esta herramienta como un medio más para el proceso de aprendizaje independiente y como estrategía de aprendizaje ante la emergencia sanitaria, ya que el video tiene esa característica especial que ilustra lo que se está contando, de ver como se hace, poderlo grabar y después reproducir al antojo del usuario. *Lo anterior nos lleva a examinar la utilidad de los videotutoriales como herramientas que superan la limitación de la presencialidad obligatoria* (Castillo y Carrillo, 2012: 69).

En la siguiente figura se presenta un bosquejo general de la determinación de los aspectos y características criticas, los contrastes y los patrones de variación e invariación necesarios para tematizar la resolución de las ecuaciones diofánticas lineales, como propone la Teoría de la Variación (Marton, 2015).

Se muestran también algunas dimensiones de variación conceptual y procedimental que se abren dentro del objeto de aprendizaje previsto.

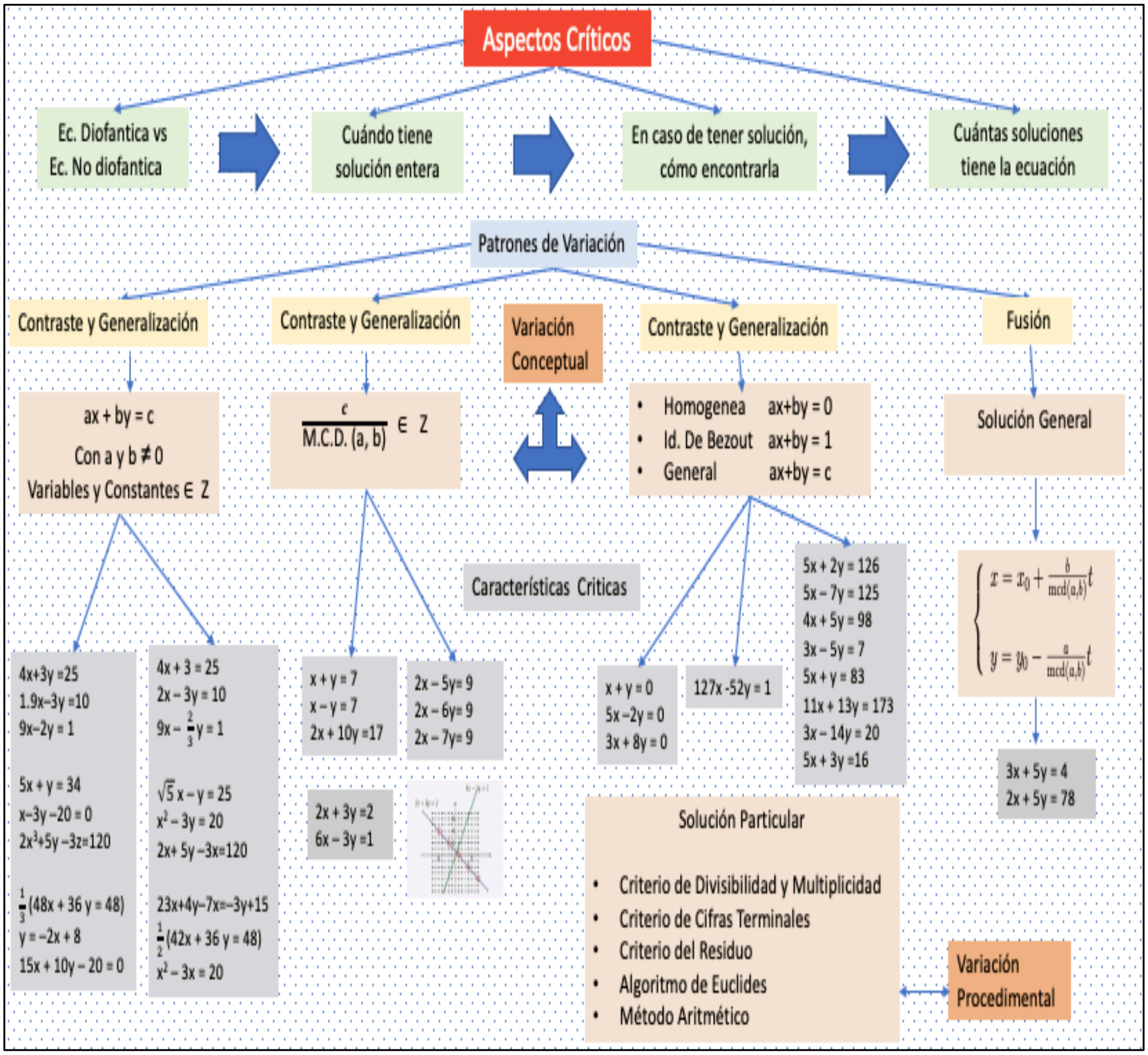


Figura 3.2. Representación de los aspectos y caracterírticas criticas del objeto de aprendizaje

3.4.1 UNIDADES DE DISCERNIMIENTO

Leung (2012, p.436) propuso la idea de una unidad de discernimiento que representa una unidad de un proceso pedagógico impulsado por los cuatro tipos de conciencia Contraste, Separación, Generalización y Fusión (C, S, G y F) provocados en una interacción de variación. Según Leung, en una situación pedagógica, estos cuatro tipos de interacción de variación actúan juntos de manera concertada para generar discernimiento, como se muestra en la Figura 3.3.

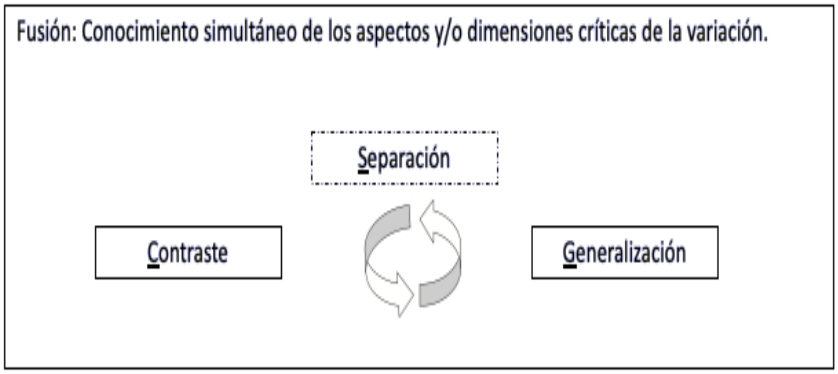


Figura 3.3. Una unidad de discernimiento impulsada por los tipos de interacción de variación

Según Leung (2012, p.437), las flechas circulares y el rectángulo punteado indican que existe una interacción mutuamente mejorada entre el contraste y la generalización para generar conciencia de las dimensiones de variación o aspectos críticos. Leung postula que el proceso de comprensión matemática está secuenciado por una cadena de interacciones de variación en las que la simultaneidad y el foco de atención juegan roles críticos (Figura 2).

Figura 3.4. Una secuencia temporal pedagógica sobre la comprensión de un objeto matemático de aprendizaje

Cada una de las unidades de discernimiento de la Figura 2 representa un concepto matemático en desarrollo que se fusiona mediante un proceso de contraste y generalización impulsado por la separación, como se muestra en la Figura 3.

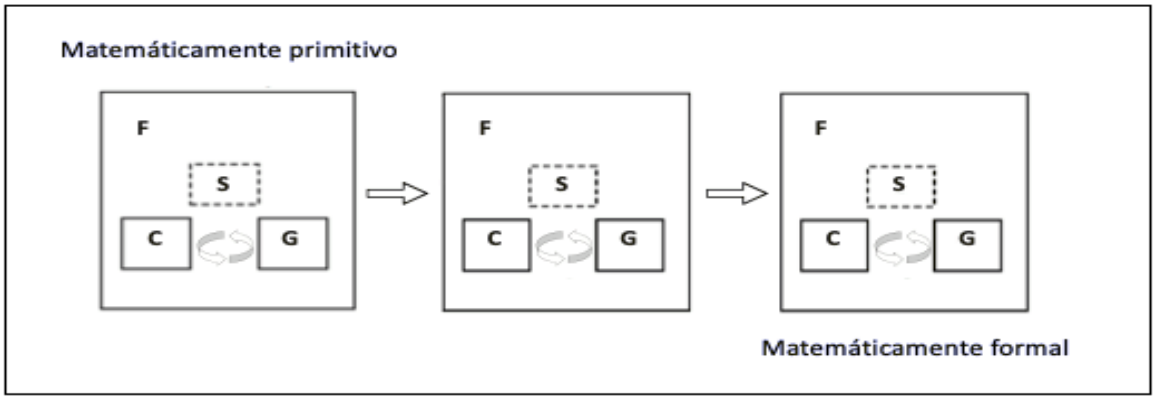


Figura 3.5. Un modelo de pedagogía matemática basado en la variación

Este modelo pedagógico (Figura 3.5) muestra cómo una lección o serie de lecciones consiste en una secuencia de interacciones de variación que aumenta en niveles sofisticados de contraste, reflejando la evolución de una idea desde la etapa primitiva a una etapa matemática más formal.

A continuación en la siguiente figura se presentan las cinco unidades de discernimiento que consideramos en este trabajo de tesis para la enseñanza de las ecuaciones diofánticas lineales con dos incógnitas apoyandonos en la extensión de la teoría de la variación hecha por Leung.

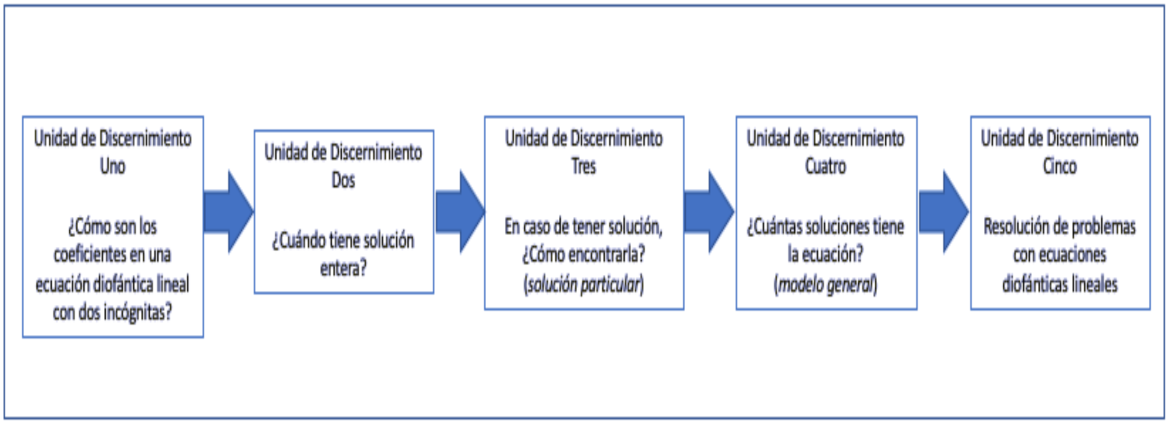


Figura 3.6. Unidades de discernimiento

En particular, la descripción detallada de los diferentes episodios de enseñanza sugeridos por las cinco unidades de discernimiento, se presenta enseguida.

3.4.2 UNIDAD DE DISCERNIMIENTO UNO

¿Cómo son los coeficientes en una ecuación diofántica lineal con dos incógnitas?

Episodio de enseñanza 1: Una ecuación lineal con dos incógnitas es una igualdad del tipo ax + by = c donde *a* y *b* son números y ´x´e ´y´son las incógnitas. Una solución es todo par de números que cumple la ecuación. La cuestion que vamos que enseguida vamos a responder es: ¿*Cómo son los coeficientes en una ecuación diofántica lineal con dos incógnitas*?

Para responder a esta primera pregunta, utilizamos la siguiente proposición:

Una ***ecuación diofántica lineal (EDL)*** con dos incógnitas es una igualdad que tiene la siguiente forma: ax + by = c donde *a* y *b* son números enteros diferentes de cero y *c* un número entero cualquiera, «**x**» e «**y**» son las incógnitas o variables que deberán tomar valores enteros. Notese que en una ecuación lineal, ninguna de las variables tiene exponentes mayores a 1 (véase la figura 3.7).

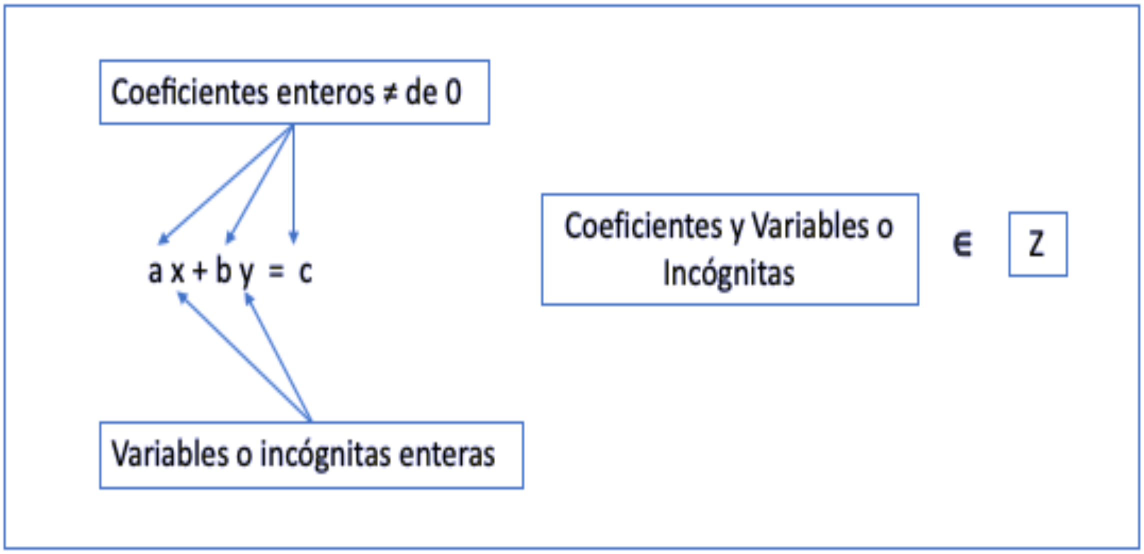
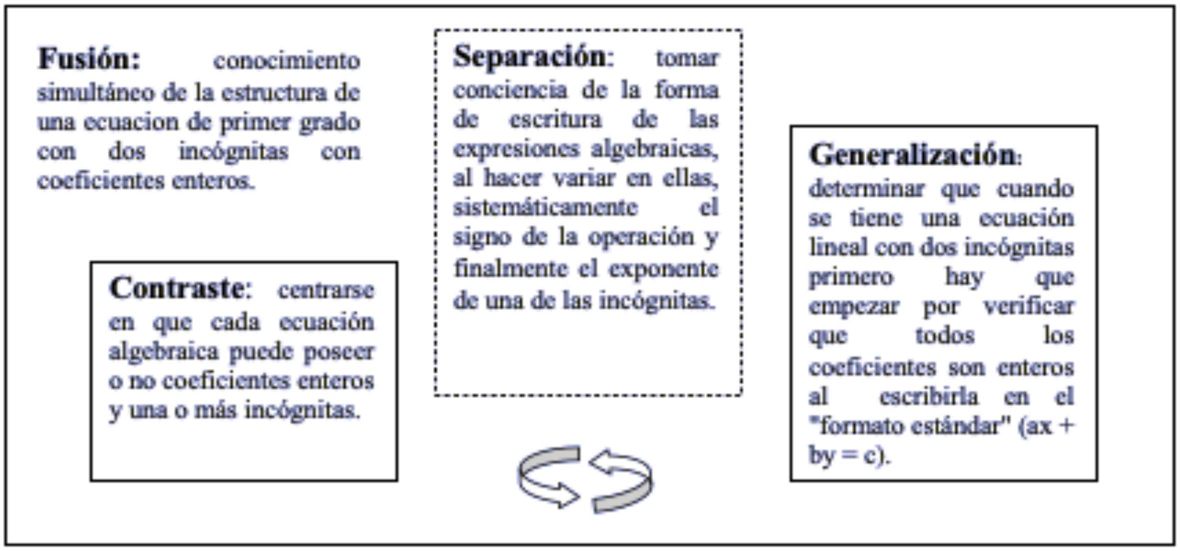


Figura 3.7. Coeficientes y variables o incógnitas enteras

En la Figura 3.8 se muestra la primera parte del modelo pedagógico que se ha implementado en esta tesis; consiste en interacciones de variación que posteriormente se concretan en las actividades que aparecen más adelante en la tabla de contenido de la tarea 1 y que estan enfocadas a determinar cuando los coeficentes son enteros en ecuación diofántica lineal con dos incógnitas. Esto es, en este primer episodio de enseñanza, la simultaneidad y el foco de atención han jugado roles críticos.



Fusión: conocimiento simultáneo de la estructura de una ecuacion de primer grado con dos incógnitas con coeficientes enteros.

Contraste: centrarse en que cada ecuación algebraica puede poseer o no coeficientes enteros y una o más incógnitas.

Separación: tomar conciencia de la forma de escritura de las expresiones algebraicas, al hacer variar en ellas, sistemáticamente el signo de la operación y finalmente el exponente de una de las incógnitas.

Generalización: determinar que cuando se tiene una ecuación lineal con dos incógnitas primero hay que empezar por verificar que todos los coeficientes son enteros al escribirla en el "formato estándar" ($ax + by = c$).

Figura 3.8. Una unidad de discernimiento para determinar **¿Cómo son los coeficientes en una ecuación diofántica lineal con dos incógnitas?**

3.4.2.1 DISEÑO DE LA TAREA 1

Skemp (1976), señala la importancia de enseñar las matemáticas de forma relacional, en la que el alumno comprenda las relaciones entre los elementos antes de operar. Advierte que es fácil enseñar de forma instrumental (seguir reglas sin razonar), con la que se logran desempeños aceptables rápidamente, aunque no perdurables.

Enseñar de forma relacional, por el contrario, tiene las ventajas de permitir adaptar lo aprendido a nuevas tareas y de que el aprendizaje sea más sencillo de recordar. Es conveniente que en esta tarea 1 se logre dejar de ver a los operadores como una operación que debiera hacerse (interpretación procedimental) y se le dé a la expresión una interpretación estática (relacional) para que las manipulaciones algebraicas (que haremos más adelante en las tareas), como las sustituciones de variables, puedan hacerse adecuadamente, como sugiere Freudenthal (1983).

Además de los operadores, el signo igual también puede ser visto de forma meramente procedimental, lo cual complica la transición de la aritmética al álgebra. Burgell y Ochoviet

(2015) resaltan la importancia de fomentar en los alumnos una visión relacional del signo igual, mediante actividades no estándar (como las propuestas en esta tarea).

Esta Tarea 1 (ver Anexo 1) se diseño con base a la Teoría de la Variación (Marton, 2015) y el andamiaje que se promueve en la enseñanza con variación china (Gu et al., 2004), donde se incluyeron contrastes, variaciones y andamiajes cuidadosamente planeados, mismos que son más útiles para integrar la posterior manipulación de expresiones algebraicas donde se requiere que los estudiantes conozcan bien las reglas, propiedades y convenciones con respecto a los números y signos de operación.

En esta tarea se presentan una serie de ecuaciones algebraicas, en conjunto con algunos contrastes básicos, que permiten una mejor focalización entre lo que varia (los coeficientes) y lo que permanece invariante (las variables o signo de operación), al identificar algunas diferencias entre ellas, así como la diferencia entre coeficientes y exponente y entre reducir y simplificar.

Para su diseño tambien se tomaron en cuenta algunos de los errores comunes que cometen los estudiantes y las características propias del objeto de aprendizaje para la determinación de los aspectos críticos (Ec. diofántica vs Ec. No diofántica), los contrastes y los patrones de variación e invariación necesarios para tematizarlos, como propone la Teoría de la Variación (Marton, 2015).

Así mismo se fomentó el análisis de las características críticas y los procesos algebraicos (p.e. reducción de términos semejantes) mediante la observación de las diferencias y similitudes entre, por ejemplo, pares o grupos de expresiones algebraicas y sus correspondientes simplificaciones u operaciones, a través de patrones de variación propuestos con ese fin (contraste, separación, generalización y fusión –ver figura 3.8).

En las tres tablas que aparecen a continuación (tabla 3.2, 3.3, 3.4) se muestra un bosquejo detallado de las diferentes componentes de la tarea 1. Empezando por detallar cuáles fueron los primeros aspectos y características criticas en una ecuación diofántica lineal.

Aprendizaje Previsto	Contenido	Evidencias
¿Cómo son los coeficientes en una ecuación diofántica lineal con dos incógnitas? Identificar que los coeficientes *a, b* y *c* pertenecen a los números enteros. Identificar que la expresión contiene dos incógnitas. Discenir que en una ecuación lineal, ninguna de las variables tiene exponentes mayores a 1. Emplear las reglas básicas del álgebra para reorganizar, combinar o simplificar los términos y obtener el formato estándar *ax +by = c*.	**Aspecto crítico** Ec. Diofántica lineal **vs** No Ec. Diofántica lineal **Características críticas** Coeficientes enteros a) $4x + 3y = 25$ b) $4x + 3 = 25$ c) $1.9x-2y = 10$ d) $2x-2y= 10$ Ec. del tipo Id. Bezout e) $9x-2y=1$ f) $9x-\frac{2}{3}y=1$ Coeficientes enteros e incógnitas o variables lineales a) $5x + y = 34$ b) $\sqrt{5}\,x - y = 25$ c) $x - 3y - 20 = 0$ d) $x^2 - 3y = 20$ e) $2x^3 + 5y - 3z = 120$ f) $2x + 5y - 3x = 120$ a) $\frac{1}{3}(48x + 36y = 48)$ b) $23x + 4y - 7x = -3y + 15$ c) $y = -2x + 8$ d) $\frac{1}{2}(42x + 36y = 48)$ e) $15x + 10y - 20 = 0$ f) $x^2 - 3x = 20$	Soluciones escritas de los alumnos en las hojas de trabajo. Fotografías.

Tabla 3.2. Primeros aspectos y características críticas en una ecuación diofántica lineal

En la siguiente tabla, se muestra la relación pedagógica entre los patrones de variación durante el primer episodio de enseñanza.

Actividades de enseñanza-aprendizaje	Patrones de Variación	Materiales y recursos didácticos
Identificar los coeficientes *a*, *b* y *c* de las ecuaciones propuestas. Identificar cuál de las expresiones contiene dos incógnitas. Determinar cuál de las ecuaciones propuestas son ecuaciones diofánticas lineales con dos incógnitas.	**Constraste** Variación en los coeficientes *a, b* y *c* Variación en los signos de operación (+/-) **Separación** Variación en la estructura de la expresión algebraica, los coeficientes y exponentes del término *ax*.	Hojas de trabajo Computadora Calculadora

	Generalización Variación en la forma estandar de escribir las ecuaciones (estructura). **Fusión** Conocimiento simultáneo de la estructura de una ecuacion de primer grado con dos incógnitas con coeficentes enteros.	

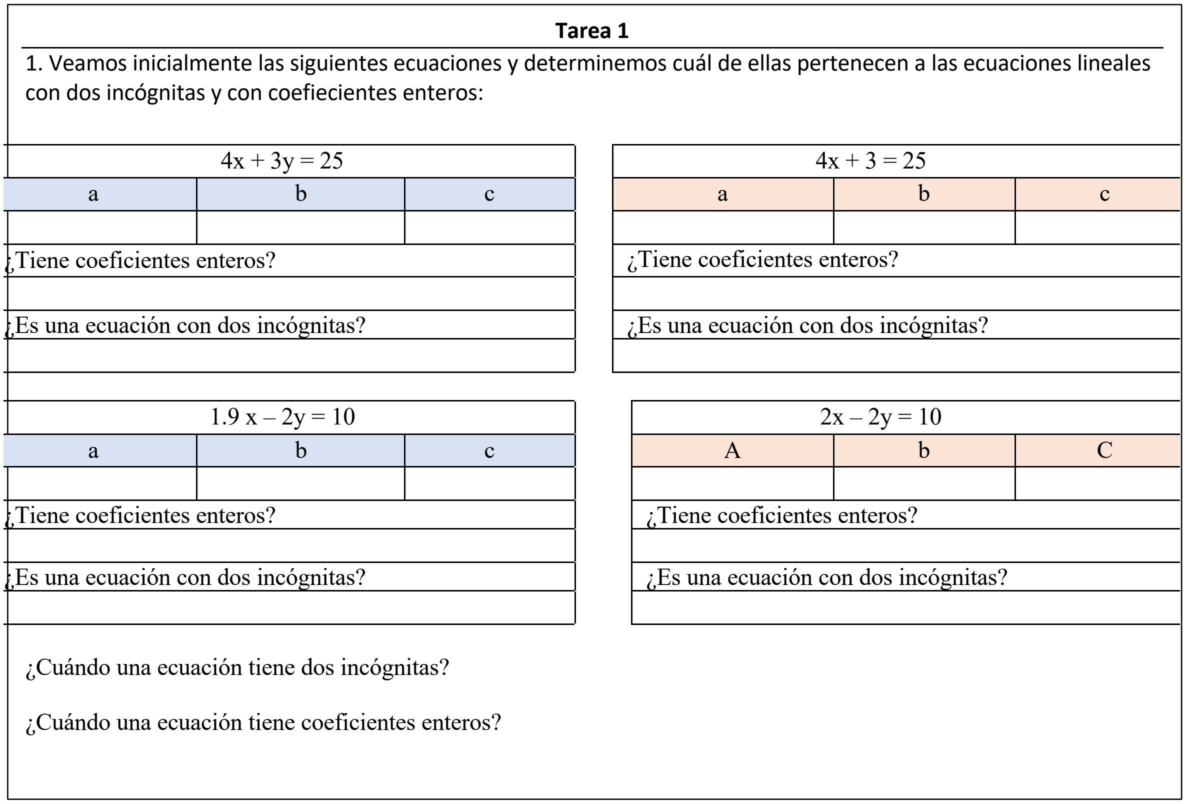
Tabla 3.3. Patrones de variación en el primer episodio de enseñanza

Finalmente, en la tercera tabla que aparece a continuación se muestra las expectativas o los aprendizajes previstos (en términos de la contrastación y/o el discernimiento) y relación con el contenido de la Tarea 1.

Ec. diofántica vs Ec. No diofántica		**El alumno debe contrastar y/o discernir**
$4x + 3y =25$	$4x + 3 = 25$	Dos ecuaciones de primer grado con coeficientes enteros y sólo una con dos incógnitas (variación en el término *by*).
$1.9x -3y =10$	$2x-2y= 10$	Dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas y sólo una con coeficientes enteros (variación en el término *ax*).
$9x-2y=1$	$9x-\frac{2}{3}y=1$	Dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas y sólo una con coeficientes enteros (variación en el término *by*).
$5x + y = 34$	$\sqrt{5}\ x – y = 25$	Dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas y sólo una con coeficientes enteros (variación en el término *ax*).
$x – 3y – 20 = 0$	$x^2 – 3y = 20$	Dos ecuaciones con dos incógnitas y coeficientes enteros, sólo una de primer grado y estructura distinta..
$2x^3 + 5y – 3z = 120$	$2x + 5y – 3x = 120$	(el estudiante deberá emplear las reglas básicas del álgebra de forma que se pueda reorganizar, combinar o simplificar los términos y obtener el “formato estándar” *ax + by = c*)
$\frac{1}{3}(48x + 36\ y = 48)$	$23x + 4y – 7x = –3y +15$	Dos ecuaciones de primer grado con coeficientes enteros y estructura distinta.
$y = –2x + 8$	$\frac{1}{2}(42x + 36\ y = 48)$	(el estudiante deberá emplear las reglas básicas del álgebra de forma que se pueda reorganizar, combinar o simplificar los términos y obtener el “formato estándar” *ax + by = c*)
$15x + 10y – 20 = 0$	$x^2 – 3x = 20$	Dos ecuaciones con dos incógnitas y coeficientes enteros, sólo una de primer grado y estructura distinta. (empezar por escribirla en lo que se conoce como el "formato estándar"¨ *ax + by = c*)

Tabla 3.4. El contenido de la Tarea 1 en relación contrastación o discernimiento

En concreto, todas las consideraciones teóricas enunciadas, quedaron finalmente vertidas en hojas simples de trabajo para los estudiantes, de las cuales enseguida, se muestra un extracto (ver las hojas de trabajo completas en el anexo 1).



Tarea 1

1. Veamos inicialmente las siguientes ecuaciones y determinemos cuál de ellas pertenecen a las ecuaciones lineales con dos incógnitas y con coefiecientes enteros:

4x + 3y = 25		
a	b	c
¿Tiene coeficientes enteros?		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		

4x + 3 = 25		
a	b	c
¿Tiene coeficientes enteros?		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		

1.9 x – 2y = 10		
a	b	c
¿Tiene coeficientes enteros?		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		

2x – 2y = 10		
A	b	C
¿Tiene coeficientes enteros?		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		

¿Cuándo una ecuación tiene dos incógnitas?

¿Cuándo una ecuación tiene coeficientes enteros?

Figura 3.9. Extracto de las hojas de trabajo asociadas a la primera tarea

3.4.3 UNIDAD DE DISCERNIMIENTO DOS

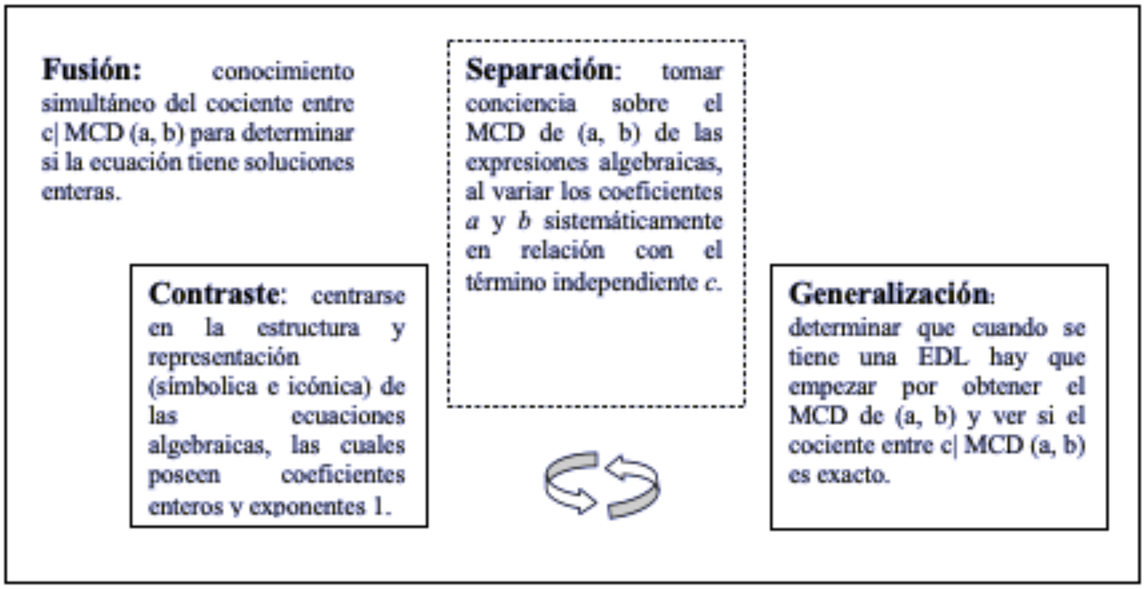
¿Cuando tiene solución entera?

Episodio de enseñanza 2: Una vez que hemos determinado en la tarea 1 cómo son los coeficientes en una ecuación diofántica lineal con dos incógnitas. La cuestion que ahora vamos a responder es: ¿cuando tiene solución entera?

Para responder a esta pregunta, se diseño la tarea 2A y 2B donde se focalizó la atención de los estudiantes en el siguiente aspecto crítico:

Proposición. La ecuación diofántica ax + by = c tiene solución **si y sólo si** d |c, donde d = M.C.D de (a, b).

En la Figura 3.10 se muestra la segunda parte del modelo pedagógico que se ha implementado en esta tesis. Consiste en interacciones de variación que posteriormente se concretan en las actividades que aparecen más adelante en la tabla de contenido de la tarea 2A y que estan enfocadas a determinar cuando una ecuación diofántica lineal tiene soluciones enteras; esto es, en este segundo episodio de enseñanza, nuevamente la simultaneidad y el foco de atención han jugado roles críticos.



Fusión: conocimiento simultáneo del cociente entre c| MCD (a, b) para determinar si la ecuación tiene soluciones enteras.

Separación: tomar conciencia sobre el MCD de (a, b) de las expresiones algebraicas, al variar los coeficientes *a* y *b* sistemáticamente en relación con el término independiente *c*.

Contraste: centrarse en la estructura y representación (simbolica e icónica) de las ecuaciones algebraicas, las cuales poseen coeficientes enteros y exponentes 1.

Generalización: determinar que cuando se tiene una EDL hay que empezar por obtener el MCD de (a, b) y ver si el cociente entre c| MCD (a, b) es exacto.

Figura 3.10. Una unidad de discernimiento para determinar **¿Cuando tiene solución entera?**

3.4.3.1 DISEÑO DE LA TAREA 2A

Molina (2010), explica que, si al realizar una operación o resolver una ecuación se emplea un procedimiento estándar aprendido, sin detenerse a analizar las características particulares (en nuestro caso las características críticas) del objeto de aprendizaje en cuestión, se trabaja bajo un enfoque procedimental.

En cambio, si se realiza un análisis previo de las características críticas de las expresiones (p.e. su estructura) y al llevar a cabo la actividad se les toma en cuenta, entonces se trabaja bajo un enfoque estructural. Este autor propone, por tanto, promover el hábito de la observación y el análisis de características particulares (críticas) de las expresiones antes de iniciar la manipulación, con el fin de fortalecer el enfoque estructural, que permita un trabajo más significativo con expresiones aritméticas y algebraicas y evite algunas de las dificultades que los alumnos encuentran en el aprendizaje y transición entre ambas.

En ese sentido, esta tarea 2A (ver Anexo1), se diseño de acuerdo a la secuenciación pedagógica de los patrones de variación señalados por Marton (2015) contraste, separación, generalización y fusión. Se consideró el aspecto crítico (tiene solución vs no tiene solución) y las características críticas (ecuaciones diofánticas lineales del tipo, generales).

En la primera parte de esta tarea se presentan algunos contrastes básicos, que permiten una mejor transición del aritmética al álgebra, al identificar algunas diferencias entre las ecuaciones propuestas, variando una característica crítica (los signos de operación de las ecuaciones) y manteniendo invariante los coeficientes *a*, *b* y el término independiente *c*.

En el diseño también se consideró que: los estudiantes identifiquen los coeficientes (*a*, *b* y el término independiente *c*) de las ecuaciones, encuentren el M.C.D de (a, b) y realicen la división *c* / M.C.D de (a,b). Posteriormente se solicita que encuentren algunas soluciones en números enteros de las ecuaciones propuestas utilizando el procedimiento de tanteo, de tal manera que logren formular conjeturas sobre las posibles soluciones enteras y las prueben.

En la segunda parte de esta tarea 2A, se avanzó hacia una variación por separación y generalización, al cambiar la estructura de la ecuación propuesta, donde los coeficientes *a* y *b* son ahora números pares y el término independiente *c* impar. De tal manera que focalizamos ahora la atención de los estudiantes en el M.C.D de (a, b), el cuál es un número par y no divide de manera exacta al término independiente *c*. Por lo que, la ecuación no tiene solución.

Marton (2015), señala que los contrastes consecutivos llevan a la separación y a la generalización. Después de observar distintos contrastes similares al anterior, el alumno logra separar (en nuestro caso) aquello que hace que una ecuación diofántica lineal con dos incógnitas tenga solución y generalizarlo para identificar las ecuaciones que si tienen solución al momento de variar distintas características críticas (como los coeficientes *a* y *b*).

Finalmente, en la tercera parte de esta tarea 2A se proponen tres ecuaciones, donde lo que varia ahora es el término *by*, quedando invariante el coeficiente *a* y el término independiente *c*. Focalizando la atención de los estudiantes en las variaciones, para discernir que el M.C.D de (a, b) de una de las ecuaciones no divide de manera exacta al término independiente *c*, por lo que dicha ecuación no tiene solución en números enteros.

En consecuencia, el diseñó de esta tarea 2A con la aplicación de estos patrones de variación pretende lograr la fusión y que los estudiantes logren el aprendizaje previsto que es discernir la característica crítica de que una ecuación diofántica lineal con dos incógnitas tiene solución **si y sólo si** el M.D.C de (a, b) divide a *c* de manera exacta.

Para esta tarea se aprovechó el uso de la tecnología a favor del aprendizaje, fuera de una educación convencional (en este caso, debido a la pandemia por COVID-19), a partir del uso que los jóvenes le dan al video tutorial (en youtube) y que se presenta esta herramienta como un medio para el proceso de aprendizaje independiente, en los 2 videos se presentan se muestra una breve introdución a las ecuaciones diofánticas lineales con dos incógnitas y como encontrar algunas soluciones enteras por tanteo.

Así pues, en las tres tablas que aparecen a continuación (tabla 3.5, 3.6 y 3.7) se muestra un bosquejo detallado de las diferentes componentes de la tarea 2A. Empezando por ahondar cuáles fueron los aspectos y características criticas en la determinación de cuando una ecuación diofántica lineal tiene solución entera.

Aprendizaje Previsto	Contenido	Evidencias
Discernir que una ecuación diofántica lineal con dos incógnitas tiene solución **sólo** si el Máximo Común Divisor de *a* y *b* divide a *c* de manera exacta. Discenir la aplicación de las propiedades de los números enteros. (#par por # par es igual a un # par) (#par por # impar es igual a un # par) (#par más # par es igual a un # par) (#par menos # par es igual a un # par) (#par más # impar es igual a un # impar) (#impar menos # impar es igual a un # par)	**Aspecto crítico** Tiene sol. vs No tiene sol. **Características críticas** Ec. Diofánticas generales 2 ecuaciones lineales a) $x + y = 7$ b) $x – y = 7$ 1 ecuación lineal g) $2x + 10y = 17$ 3 ecuaciones lineales g) $2x -5y = 9$ h) $2x -6y = 9$ i) $2x -7y = 9$	Soluciones escritas de los alumnos en las hojas de trabajo. Fotografías.

Tabla 3.5. Aspectos y características críticas para determinar si una ecuación diofántica lineal tiene solución entera

En la siguiente tabla, se muestra la relación pedagógica entre los patrones de variación durante la primera parte de este segundo episodio de enseñanza.

Actividades de enseñanza-aprendizaje	Patrones de Variación	Materiales y recursos didácticos
Identificar los coeficientes *a*, *b* y *c* de las ecuaciones propuestas. Encontrar el MCD de (a,b) Dividir el MCD de (a,b) entre *c* Encontrar algunas soluciones (x_o, y_o) en números enteros de las ecuaciones diofánticas utilizando el procedimiento de tanteo, formulando sus conjeturas y probandolas. Determinar cuando tiene solución entera.	**Constraste** Variación en los signos de operación (+/-). **Separación** Variación en los coeficientes *a* y *b* en relación con el coeficiente *c*. **Generalización** Variación en los coeficientes *a, b* y *c.* Variación en el MCD de (a, b) **Fusión** Variación del cociente entre c| MCD (a, b) para determinar si tiene o no soluciones enteras.	Hojas de trabajo Computadora Calculadora
Videos Tutoriales	https://youtu.be/oUXlqhktJGo https://youtu.be/fZfmWyt0d8U	

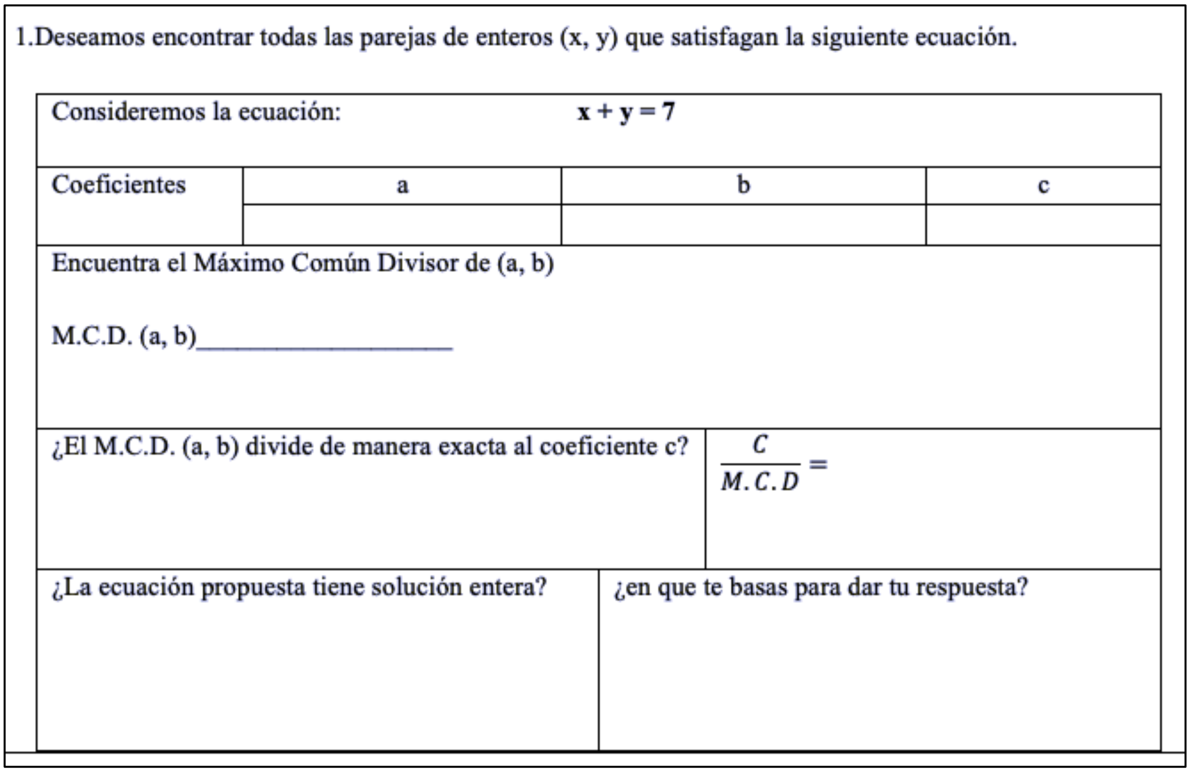
Tabla 3.6. Patrones de variación en el segundo episodio de enseñanza

Finalmente, en la tercera tabla que aparece a continuación se muestra las expectativas o los aprendizajes previstos (en términos de la contrastación y/o el discernimiento) y relación con el contenido de la Tarea 2A.

Tiene sol. **vs** No tiene sol.			**El alumno debe contrastar y/o discernir**
x + y =7	x – y =7		Dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas y coefientes enteros. Ambas con soluciones enteras (variación en el signo de operación).
2x + 10y = 17			Una ecuación de primer grado con dos incógnitas y coefientes enteros. Sin soluciones enteras (variación en los coefeciente *a y b* pares y el término independiente *c* impar. Por lo que, el M.C.D de (a, b) no divide de marera exacta a *c*.
2x -5y = 9	2x -6y = 9	2x -7y = 9	Tres ecuaciones de primer grado con dos incógnitas y coefientes enteros. Sólo dos con soluciones enteras (variación en el término *by* y del M.C.D de (a, b)).

Tabla 3.7. El contenido de la Tarea 2A en relación contrastación o discernimiento

En concreto, todas las consideraciones teóricas enunciadas, quedaron finalmente vertidas en hojas simples de trabajo para los estudiantes, de las cuales en seguida, se muestra un extracto (ver las hojas de trabajo completas en el anexo 1).



1.Deseamos encontrar todas las parejas de enteros (x, y) que satisfagan la siguiente ecuación.

Consideremos la ecuación: $\mathbf{x + y = 7}$

Coeficientes	**a**	**b**	**c**

Encuentra el Máximo Común Divisor de (a, b)

M.C.D. (a, b)____________________

¿El M.C.D. (a, b) divide de manera exacta al coeficiente c? $\frac{C}{M.C.D} =$

¿La ecuación propuesta tiene solución entera?

¿en que te basas para dar tu respuesta?

Figura 3.11. Extracto de las hojas de trabajo asociadas a la tarea 2A

De acuerdo con Leung (2012), una pedagogía matemática que se basa en la variación es aquella que a propósito proporciona a los estudiantes medios para experimentar la variación a través de, por ejemplo, herramientas concretas, representación múltiple de un concepto, un ejercicio diseñado estratégicamente, etc. para crear un ambiente de aprendizaje matemáticamente rico que permite a los estudiantes discernir variantes.

En el diseño de esta tarea, la raíz de la variación es observar las relaciones producidas entre las partes y el todo mientras el foco de atención cambia, y descubrir qué cambia entre estas relaciones.

Matemáticamente hablando, esto es similar a discernir la relación entre variables contextuales; es decir, posibles aspectos que pueden variar en una situación matemática, mientras que pedagógicamente, esto significa que el maestro debe decidir cuándo enfocarse en qué aspecto debe variar para lograr el resultado de aprendizaje previsto.

En esta tarea también se consideró comprender el concepto erróneo de los alumnos y las diferentes estrategias de los alumnos para resolver problemas de ecuaciones algebraicas. De acuerdo a Ekawati, R., & Lin, F.L. (2014), los docentes no siempre están conscientes de estos factores debido a su práctica, no les dan la oportunidad a los estudiantes de lidiar con ideas erróneas y diferentes estrategias propuestas de los estudiantes.

En ese sentido, los planes y programas del bachillerato (INEE, 2017) señalan que este hecho promueve la actitud de sustentar una postura personal con base en los argumentos construidos para dar una respuesta matemática que no sólo refiera a la implementación de una operación y/o, regla, sino que se sustenta en una racionalidad contextualizada que fundamenta su argumentación (p.98).

3.4.3.2 DISEÑO DE LA TAREA 2B

Las actividades de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas deben diseñarse para ayudar a los estudiantes a ver las relaciones entre las diferentes formas del mismo problema (Gu, Huang & Marton, 2004; Mok, 2009; Mok & Lopez-Real, 2006), permitiéndoles acercarse a los conocimientos previos desde diferentes perspectivas (Gu, Huang y Marton, 2004; Ling y Marton, 2012).

En álgebra, los conceptos deben presentarse de forma numérica, gráfica, algebraica y descriptiva simultáneamente (NTCM, 2000); y la descripción se puede presentar implícitamente. Es más probable que los estudiantes construyan una comprensión más completa cuando construyen relaciones entre las cuatro representaciones (NTCM, 2000).

En ese sentido, Duval (2006) señala que las conversiones son transformaciones de representaciones que consisten en cambiar un registro sin cambiar el objeto que se denota: por ejemplo, pasar de la notación algebraica de una ecuación a su representación gráfica, pasar de la declaración del lenguaje natural de una relación a su notación utilizando letras etc. (p. 112).

Específicamente, una de las consideraciones involucradas en el diseño de esta tarea 2B fue crear varias oportunidades para que los alumnos reconocieran los mismos objetos matemáticos, descritos por medio de diferentes representaciones (variación por contraste). En términos de la teoría de la variación de Marton (2015), se podría decir que las conversiones requieren discernir un aspecto crítico invariable, que es el mismo objeto matemático cuando otro aspecto crítico, que es el registro de la representación, es variado.

En esta tarea 2B se presentaron dos ecuaciones diofánticas lineales con dos incógnitas (del tipo, id. Bezout y generales) y su representación gráfica en el plano cartesiano (utilizando Geogebra), permitiendo tener un patrón de variación por contraste entre su representación símbolica y gráfica.

Se focalizó la atención de los estudiantes en las características críticas (soluciones enteras) que corresponden a los pares $(x, y) \in Z$ de la recta $2x + 3y =2$ ((−5,4), (−2,2), (1,0), (4,−2), (7,−4)). Se pidió a los estudiantes tomar al menos un par (x_o, y_o) para probar y demostrar que efectivamente cumplen con la igualdad en la ecuación y son solución. Por otro lado, en el caso de la recta correspondiente a la ecuación $6x – 3y =1$, no se presentan los pares (x_o, y_o), que podrían corresponder a las soluciones. Por lo que, se les cuestionó si ¿tendría alguna? En este caso, se pidió a los estudiantes que conjeturarán y probarán.

Este diseño permitió a los estudiantes observar la relación entre cantidades y gráficos, y admitir diferentes puntos de vista y representaciones del concepto matemático (Heid, 1995; Yerushalmy & Chazan, 2008). La variación en la representación ayudó en la operatoria a realizar, prestando entonces atención (focalizando) plena a la ubicación de los puntos (x_o, y_o) como solución entera de las ecuaciones en sí mismas, sin que los cálculos los dispersarán.

Como lo señalaron Gu et al. (2004), la enseñanza con variación ayuda a los estudiantes a desarrollar una comprensión profunda de un concepto desde múltiples perspectivas. En las tres tablas que aparecen a continuación (tabla 3.8, 3.9 y 3.10) se muestra un bosquejo detallado de las diferentes componentes de esta tarea 3. Empezando por detallar cuáles fueron los aspectos y características criticas en la determinación de cuando una ecuación diofántica lineal tiene solución entera (representación gráfica).

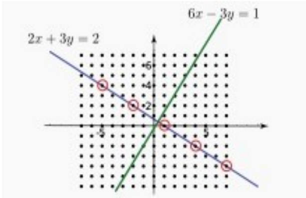
Aprendizaje Previsto	Contenido	Evidencias
Discernir que una ecuación diofántica lineal con dos incógnitas tiene solución **sólo** si el M.C.D de *(a,b)* divide a *c* de manera exacta. Discernir que en la representación gráfica de las ecuaciones algebraicas, la intersección (entera) de puntos (x_o, y_o) en el plano cartesiano representan las soluciones en números enteros.	**Aspecto crítico** Tiene sol. **vs** No tiene sol. **Características críticas** Ec. diofántica general e Id. de Bezout 2 ecuaciones lineales a) 2x + 3y =2 b) 6x – 3y =1 Representación gráfica  	Soluciones escritas de los alumnos en las hojas de trabajo. Fotografías.

Tabla 3.8. Aspectos y características críticas para determinar si una ecuación diofántica lineal tiene solución entera

En la siguiente tabla, se muestra la relación pedagógica entre los patrones de variación durante la segunda parte de este segundo episodio de enseñanza.

Actividades de enseñanza-aprendizaje	Patrones de Variación	Materiales y recursos didácticos
Identificar los coeficientes *a*, *b* y *c* de las ecuaciones propuestas. Encontrar el M.C.D de (a, b) Dividir el M.C.D de (a, b) entre *c* Encontrar las soluciones (x_o, y_o) en números enteros de las ecuaciones diofánticas utilizando la representación gráfica meidante la aplicación de Goegebra, formulando sus conjeturas y probandolas. Constestar las preguntas planteadas Determinar cuando una ecuación diofántica tiene solución entera.	**Contraste** Variación en los coeficientes *a* y *c*. Variación en el signo de operación (+/-). Variación en la representación; de simbólica a gráfica. **Separación** Variación en la localización de puntos en el plano cartesiano x_o, y_o **Generalización** Localización de puntos en el plano cartesiano x_o, $y_{o,}$ y su interseción entera. **Fusión** Variación en el M.C.D de (a, b) Variación del cociente entre c| M.C.D (a, b) para determinar si tiene o no soluciones enteras	Hojas de trabajo Computadora Calculadora Geogebra

Tabla 3.9. Patrones de variación en el segundo episodio de enseñanza

Finalmente, en la tercera tabla que aparece a continuación se muestra las expectativas o los aprendizajes previstos (en términos de la contrastación y/o el discernimiento) y relación con el contenido de la Tarea 2B.

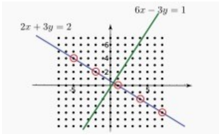
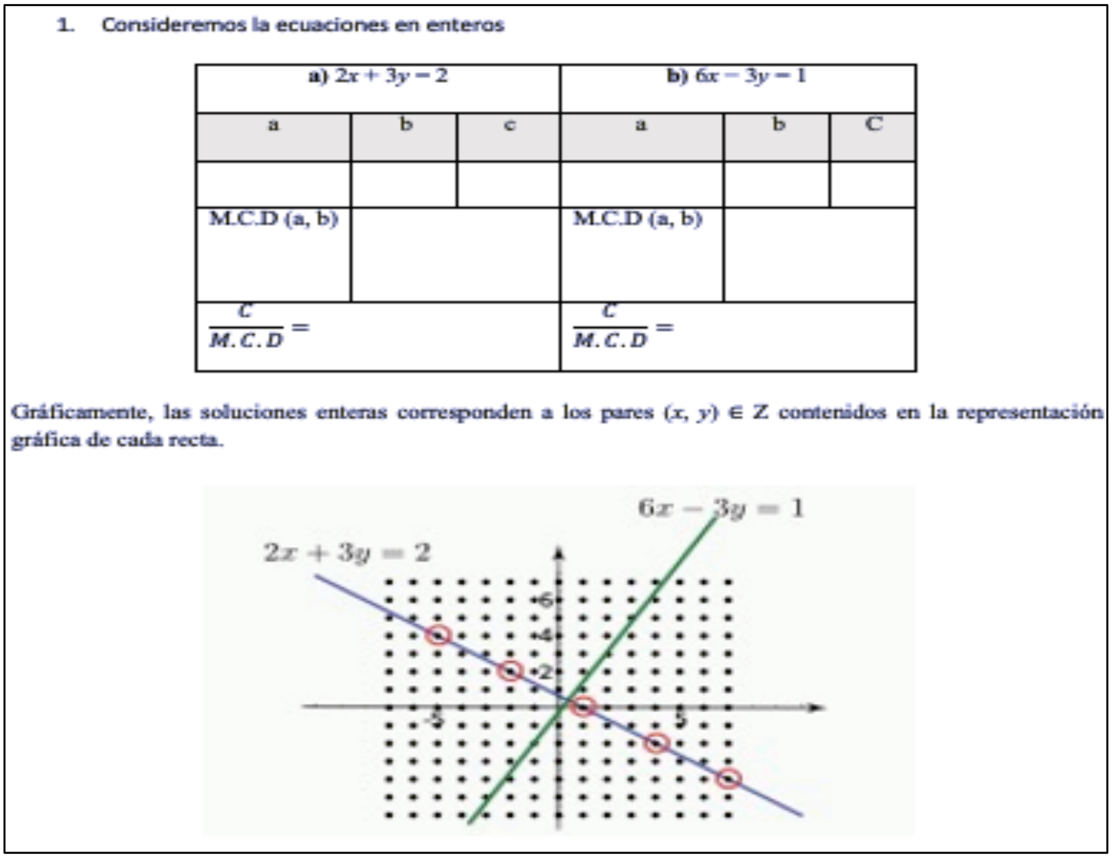
Tiene sol. <u>vs</u> No tiene sol.		**El alumno debe contrastar y/o discernir**
2x + 3y =2	6x – 3y =1	Dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas y coeficientes enteros. Variación en el coeficiente *a* y el término independiente *c*, así como el signo de operación y del M.C.D (a, b)).
		Variación en la representación algebraica a la icónica. (localización de puntos en el plano cartesiano x_o, y_o, y su interseción entera como soluciones enteras)
2x + 3y =2 MCD (a, b) = 1 $\frac{2}{1} = 2$ Soluciones; Puntos en la recta (x_0, y_0) ((−5,4), (−2,2), (1,0), (4,−2), (7,−4)).	6x – 3y =1 MCD (a, b) = 2 $\frac{1}{2} = 0.5$ Sin soluciones; No hay puntos de intersección entera en la recta (x_0, y_0)	Sólo una ecuación con soluciones enteras de acuerdo a la proposición: La ecuación diofántica ax + by = c tiene solución **si y sólo si** d |c de manera exacta, donde d = M.C.D de (a, b).

Tabla 3.10. El contenido de la Tarea 2B en relación contrastación o discernimiento

En concreto, todas las consideraciones teóricas enunciadas, quedaron finalmente vertidas en hojas simples de trabajo para los estudiantes, de las cuales en seguida, se muestra un extracto (ver las hojas de trabajo completas en el anexo 1).



1. Consideremos la ecuaciones en enteros

a) $2x + 3y = 2$			b) $6x - 3y = 1$		
a	b	c	a	b	C
M.C.D (a, b)			M.C.D (a, b)		
$\frac{C}{M.C.D} =$			$\frac{C}{M.C.D} =$		

Gráficamente, las soluciones enteras corresponden a los pares $(x, y) \in Z$ contenidos en la representación gráfica de cada recta.

Figura 3.12. Extracto de las hojas de trabajo asociadas a la tarea 2B

Los planes y programas del bachillerato (INEE, 2017) señalan que los alumnos deben interpretar situaciones reales, hipotéticas o formales que requieren de la utilización del pensamiento matemático. Deben Formular y resolver problemas, aplicando diferentes enfoques. Argumentando la solución obtenida de un problema con métodos numéricos, gráficos o analíticos (p. 108).

3.4.4 UNIDAD DE DISCERNIMIENTO TRES

En caso de tener solución, ¿cómo encontrarla? (Solución particular)

Sobre la forma de operar una expresión algebraica, distintos autores han identificado que está guiada por la forma en que se visualiza la expresión (Skemp 1976, Sfard 1991, Burgell y

Ochoviet 2015). Los alumnos, al enfrentar una tarea algebraica, pueden centrarse en aspectos de tipo procedimental/operacional/instrumental (ver a+b como una suma que debe realizarse) o estructural/relacional (ver $a + b$ como la expresión de la suma de a más b, o la relación de a y b mediante el operador suma, sin que sea obligatorio realizar dicha suma). La manera de visualizar una expresión algebraica tiene diversas implicaciones (por ejemplo, que el alumno comprenda las relaciones entre los elementos antes de operar).

Hoch y Dreyfus (2004), señalan que el profesor debe ser capaz de reconocer la estructura matemática (en nuestro caso los aspectos críticos) para poder lograr que sus estudiantes la disciernan, apoyados en las actividades diseñadas por el docente (en nuestro caso a través de la teoría de la variación).

Una forma de lograrlo es pedirles a dichos estudiantes que señalen, antes de manipular la expresión matemática, cuáles propiedades de su estructura justifican posibles manipulaciones o tranformaciones. Mencionan que el enfoque procedimental o estructural logrado en los alumnos es una decisión pedagógica, esto es, depende de cómo se lleva a cabo la enseñanza.

Episodio de enseñanza 3: Las dos cuestiones que vamos a responder son: ¿cuando tienen solución entera? y ¿en caso de tener solución como encontrarla?

Para responder a la primera pregunta, utilizamos el siguiente aspecto crítico.

Proposición. La ecuación diofántica ax + by = c tiene solución si y sólo si d|c, donde d = M.C.D.(a, b).

En caso de tener solución, hemos de tener en cuenta tres criterios (procedimientos matemáticos), para encontrar una solución particular.

- Cirterio de Multiplicidad o Divisibilidad
- Criterio de Cifras Términales
- Cirterio de la División

Pang, Ming-fai & Lo, Mun. (2011), señalan que aunque los procedimientos y métodos empleados para llevar a cabo un estudio de aprendizaje pueden variar, los principios subyacentes siguen siendo los mismos. Uno de los propósitos de un estudio de aprendizaje es generar datos que nos permitan establecer la relación entre la enseñanza y el aprendizaje. Esto puede hacerse a través de una variedad de métodos. Iniciar el trabajo matemático con los estudiantes de esta manera implica proponer un modo particular de hacer y producir conocimiento basado en la teoría de la variación (Marton, 2015).

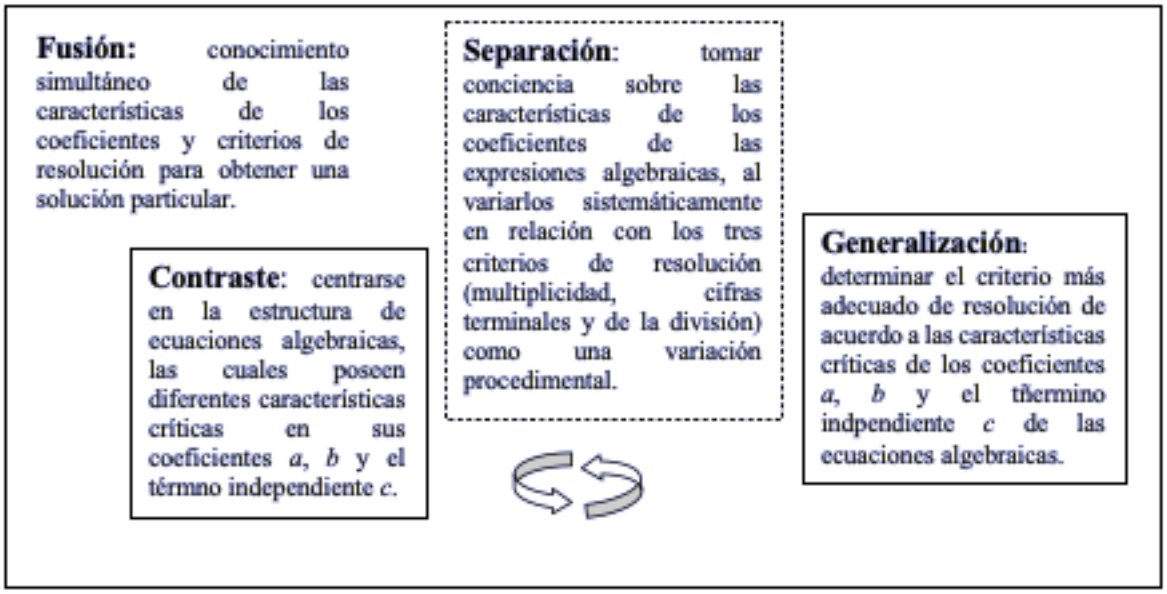
Para ello, se diseñaron las tareas 3A, 3B y 3C (ver Anexo 1) donde se utilizó la variación procedimental, ya que su objetivo es proveer un proceso de formación etapa por etapa en el cuál la experiencia de los estudiantes en la resolución de problemas (ecuaciones diofánticas lineales del tipo general) se manifiesta por la variación de problemas y en la variedad de transferencia de estrategias (Lai & Murray, 2012).

De acuerdo con Lim, (2007) cuando los docentes utilizan la variación procedimental con el uso de diversos métodos de solución para un problema dado, esta variación da a los estudiantes una amplia oportunidad de trabajar y perfeccionar sus habilidades matemáticas.

En el diseño de estas tareas (3A, 3B y 3C) se utilizó nuevamente el video tutorial como una herramienta ideal para apoyar la adquisión de conocimiento sobre los tres criterios matemáticos mencionados en este episodio de enseñanza para obtener una solución particular de las ecuaciones diofánticas lineales.

De acuerdo con Castillo y Carrillo (2012: 69), el video tiene esa característica especial que ilustra lo que se está contando, de ver como se hace, poderlo grabar y después reproducir al antojo del usuario, superando la limitación de la presencialidad obligatoria del profesor.

En la Figura 3.13 se muestra la tercera parte del modelo pedagógico que se ha implementado en esta tesis. Consiste en interacciones de variación que posteriormente se concretan en las actividades que aparecen más adelante en la tabla de contenido de las tareas 3A, 3B y 3C que estan enfocadas para determinar cuando una ecuacion diofántica lineal con dos incógnitas tiene solución y en caso de tenerla, como encontrar una solución particular. Esto es, en este tercer episodio de enseñanza, también la simultaneidad y el foco de atención han jugado roles críticos.



Fusión: conocimiento simultáneo de las características de los coeficientes y criterios de resolución para obtener una solución particular.

Contraste: centrarse en la estructura de ecuaciones algebraicas, las cuales poseen diferentes características críticas en sus coeficientes *a*, *b* y el térmno independiente *c*.

Separación: tomar conciencia sobre las características de los coeficientes de las expresiones algebraicas, al variarlos sistemáticamente en relación con los tres criterios de resolución (multiplicidad, cifras terminales y de la división) como una variación procedimental.

Generalización: determinar el criterio más adecuado de resolución de acuerdo a las características críticas de los coeficientes *a*, *b* y el tïhermino indpendiente *c* de las ecuaciones algebraicas.

Figura 3.13. Una unidad de discernimiento para determinar **en caso de tener solución entera, ¿cómo encontrarla? (Solución particular).**

3.4.4.1 DISEÑO DE LA TAREA 3A

De acuerdo a los resultados presentados en el planteamiento del problema de este trabajo de tesis acerca de las pruebas PISA (2015) y PLANEA (2017), sabemos que la comprensión de las ecuaciones en la escuela secundaria y el bachillerato se ha basado generalmente en el aprendizaje mecánico de reglas para manejar símbolos carentes de significados y sin referentes concretos.

Nuestro objetivo en el diseñó de esta tarea 3A es abordarlas, con otro enfoque (mediante la teoría de la variación), anhelando que resulten significativas y sirva de base para conceptos posteriores y aplicaciones de la vida real. Por lo tanto, el alumno necesita comprender el enunciado, reconocer los objetos y eventos presentes, recordar lo que sabe, abstraer, hacerse un plan, utilizar procedimientos, operar, encontrar un resultado y probarlo.

Según la Teoría de la variación de Marton (2015), el discernimiento de las características críticas se produce bajo interacción sistemática entre un alumno y lo que se debe aprender, y la variación es el agente que genera dicha interacción (Marton, Runesson y Tsui, 2004).

La variación local en diferentes aspectos de un objeto de aprendizaje revela la estructura variable de todo el objeto de aprendizaje. Las variantes tambien pueden ser características críticas que definen o generalizan un objeto de aprendiaje.

Esto coincide muy bien con lo que se trata de hacer en matemáticas, ya que un objetivo principal de la actividad matemática es separar los patrones invariantes mientras que las diferentes entidades matemáticas varían y, posteriormente, generalizar, clasificar, categorizar, simbolizar, axiomatizar y operacionalizar estos patrones.

El aprendizaje previsto en esta tarea 3A nuevamente fue que los estudiantes lograrán disernir cuando una ecuación del tipo $ax + by = c$, en la que a y b son números enteros diferentes de cero y c un número entero cualquiera, tiene solución entera y en caso de tenerla como encontrarla. Para ello, se utilizó como procedimiento de solución el *Criterio de Divisibilidad o Multiplicidad*, donde los estudiantes debieron centrar su atención en si a o b eran multiplos del término independiente c y si alguno no lo era, se debió convertir en multiplo de c.

Con el fin de lograr óptimos resultados, se propusieron dos ecuaciones diofánticas lineales con dos incógnitas (del tipo, generales), donde se utilizó un patrón de variación por contraste, separación y generalización en un problema con múltiples cambios (OPMC, One Problem, Multiple Changes): donde se extiende el problema original variando las características críticas, cambiando los resultados y haciendo generalizaciones (Lai & Murray, 2012).

En esta tarea 3A, al igual que en las anteriores, se solicitó a los estudiantes identificar los coeficientes a y b de las ecuaciones, así como obtener el M.C.D de (a, b) y realizar el cociente c/M.C.D, para determinar si ambas ecuaciones tienen solución entera, que de acuerdo con Leung (2012), el contraste tambien consiste en discernir si algo satisface una determinada condición o no, es decir, si algo "es" o "no es".

Una vez determinado si ambas tenían solución en números enteros, se pidió visualizar el video tutorial (en YouTube) acerca del criterio de divisibilidad o multiplicidad y discernir como aplicarlo para convertir los coeficientes a y b en múltiplos de c y obtener la solución particular (x_o, y_o).

En las tres tablas que aparecen a continuación (tabla 3.11, 3.12 y 3.13) se muestra un bosquejo detallado de las diferentes componentes de la tarea 4. Empezando por detallar cuáles fueron los aspectos y características criticas para determinar cuando una ecuacion diofántica lineal con dos incógnitas tiene solución y en caso de tenerla como encontrarla a partir del discernimiento y aplicación del criterio de Divisibilidad o multiplicidad.

Aprendizaje Previsto	**Contenido**	**Evidencias**
Discernir que una ecuación diofántica lineal con dos incógnitas tiene solución **sólo** si el M.C.D de (a, *b)* divide a *c* de manera exacta. En caso de tener solución, cómo encontrarla (*solución particular).* Discernir que el criterio de divisibilidad o multiplicidad se usa cuando el término independiente *c* es divisible por alguno de los coeficientes *a* o *b*. En este caso, el valor de la otra variable será, múltiplo también.	**Aspecto crítico** Tiene Sol. **vs** No tiene Sol. Encontrar una solución particular **Características críticas** (Criterio de Divisibilidad o Multiplicidad) Ec. diofánticas generales 2 ecuaciones lineales a) $5x + 2y = 126$ b) $5x – 7y = 125$	Soluciones escritas de los alumnos en las hojas de trabajo. Fotografías.

Tabla. 3.11. Aspectos y características críticas para determinar si una ecuación diofántica lineal tiene solución entera y como encontarla apartir del criterio de divisibilidad o multiplicidad

En la siguiente tabla, se muestra la relación pedagógica entre los patrones de variación durante la primera parte del tercer episodio de enseñanza.

Actividades de enseñanza-aprendizaje	**Patrones de Variación**	**Materiales y recursos didácticos**
Identificar los coeficientes *a*, *b* y *c* de las ecuaciones propuestas. Encontrar el M.C.D de (a,b) Dividir el M.C.D de (a,b) entre *c* Constestar las preguntas planteadas Determinar cuando tiene solución entera. Se busca si *a* o *b* son multiplos de *c*, si alguno no lo es se convierte en multiplo de *c*.	Variación procedimental **Contraste** Variación en los coeficientes *b* y *c*. Variación en el signo de operación (+/-). **Separación** Invariante el término *ax.* Variación en uno de los coeficientes *a* o *b* en relación con ser multiplo o divisor del coefiente *c.* **Generalización** Variación en cualquiera de los coeficientes *a, b* y *c* (tranformar los tres términos como multiplos). **Fusión** Conocimiento simultáneo de las características críticas de los coeficientes	Hojas de trabajo Computadora Calculadora Geogebra

	a y *b* del criterio de multiplicidad o divisibildad para encontrar una solución particular.	
Video Tutorial	https://youtu.be/v0le8CgcQJo	

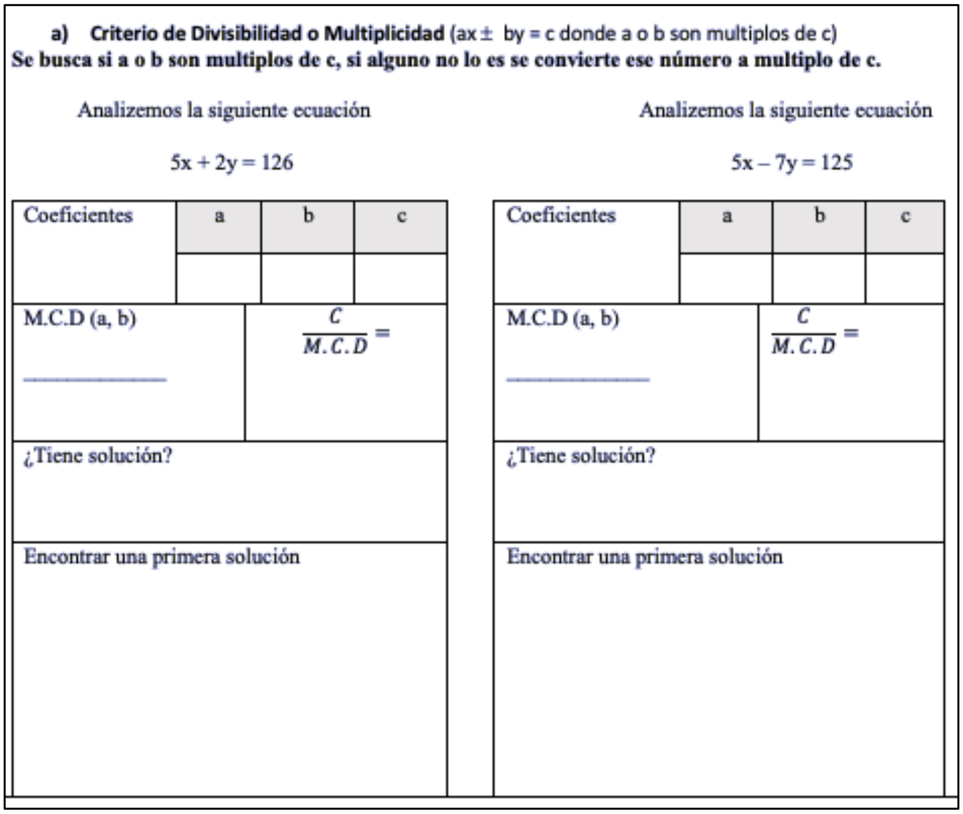
Tabla 3.12. Patrones de variación en el tercer episodio de enseñanza

Finalmente, en la tercera tabla que aparece a continuación se muestra las expectativas o los aprendizajes previstos (en términos de la contrastación y/o el discernimiento) y relación con el contenido de la Tarea 3A.

Tiene Sol. vs No tiene Sol. **Encontrar una solución particular**		**El alumno debe contrastar y/o discernir**
5x + 2y = 126	5x – 7y = 125	Dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas y coeficientes enteros (variación en el signo de opración y del coeficiente b y del término independiente c).
		Ambas ecuaciones tienen soluciones enteras. Ambas con al menos un término multiplo de c.
5y	*7y*	Terminos que hay que convertir en multiplo de c.
5x + 2y = 126 2 es multiplo o divisor de 126 5 no es multiplo o divisor de 126 Convertir 5y como multiplo o divisor de 126 5(2) + 2(58)= 126 10 + 116 = 126	5x – 7y = 125 5 es multiplo o divisor de 125 7 no es multiplo o divisor de 125 Convertir 7y como multiplo o divisor de 125 5(32) – 7 (5) = 125 160 – 35 = 125	Encontrar una posible solución particular (entera) aplicando el criterio *criterio de multiplicidad o divisibildad.*

Tabla 3.13. El contenido de la Tarea 4A en relación contrastación o discernimiento

En concreto, todas las consideraciones teóricas enunciadas, quedaron finalmente vertidas en hojas simples de trabajo para los estudiantes, de las cuales en seguida, se muestra un extracto (ver las hojas de trabajo completas en el anexo 1).



a) Criterio de Divisibilidad o Multiplicidad (ax ± by = c donde a o b son multiplos de c)
Se busca si a o b son multiplos de c, si alguno no lo es se convierte ese número a multiplo de c.

Analizemos la siguiente ecuación

$5x + 2y = 126$

Coeficientes	a	b	c

M.C.D (a, b)	$\frac{C}{M.C.D} =$
______________	

¿Tiene solución?

Encontrar una primera solución

Analizemos la siguiente ecuación

$5x - 7y = 125$

Coeficientes	a	b	c

M.C.D (a, b)	$\frac{C}{M.C.D} =$
______________	

¿Tiene solución?

Encontrar una primera solución

Figura 3.14. Extracto de las hojas de trabajo asociadas a la tarea 3A

La teoría de la variación postula que la condición necesaria para el discernimiento es la "variación experimentada" por parte del alumno (Pang y Marton 2007). Para poder discernir una cierta característica crítica de un objeto de aprendizaje, el alumno necesita experimentar variación en esa característica crítica. Como han argumentado Marton y Pang (2006), el discernimiento de un aspecto crítico equivale a experimentar una diferencia en las características críticas del aspecto.

Los planes y programas del bachillerato (INEE, 2017), señalan que el estudiante debe desarrollar innovaciones y proponer soluciones a problemas a partir de métodos establecidos. Construye conjeturas, diseñá y aplica modelos para probar su validez (p.198).

3.4.4.2 DISEÑO DE LA TAREA 3B

Kullberg, Kempe y Marton (2017), señalan que, mediante el análisis y diseño de las actividades de enseñanza-aprendizaje bajo el marco de la Teoría de la Variación se puede identificar lo que será más fácilmente discernible para el alumno, por haber sido adecuadamente enfocado y tematizado, y lo que no.

En el diseño de esta tarea 3B se buscó encontrar una solución (particular) en números enteros de las ecuaciones diofánticas lineales propuestas variando el procedimiento de solución al focalizar la atención de los estudiantes ahora en el *Criterio de Cifras Terminales*, donde es importante discernir si a o b terminan en *5,* si es el caso se multiplica por 2 ambos miembros de la ecuación y se analizan las cifras terminales de a, b y c aplicando las propiedades de los números.

Para ello, en esta tarea se propusieron nuevamente dos ecuaciones diofánticas lineales con dos incógnitas (del tipo, generales), donde se utilizó un patrón de variación por contraste, separación y generalización, así como un problema con múltiples cambios (OPMC, One Problem, Multiple Changes, se extiende el problema original variando las condiciones, cambiando los resultados y haciendo generalizaciones) de acuerdo con Lai & Murray, (2012).

Se continuó solicitando la identificación de los coeficientes a, b y c, asi como el M.C.D de (a, b) y determinar si estas ecuaciones tienen solución o no en números enteros, en el caso de ambas ecuaciones se focalizó la atención de los estudiantes en una nueva característica crítica, el término by es multiplo de 5 por lo que, se pidio a los estudiantes visualizar el video tutorial (en YouTube) del criterio de cifras terminales y lograr discernir como aplicarlo para obtener una solución particular en números enteros.

El aprendizaje, desde el punto de vista de la teoría de la variación, implica diferenciación en lugar de acumulación (cf. Gibson y Gibson, 1955). Por lo tanto, la teoría de la variación explica las condiciones del aprendizaje y explica las fallas de aprendizaje de una manera específica: cuando los alumnos no aprenden lo que se pretendía, no han discernido los aspectos y características críticas.

Por lo tanto, la idea central de la teoría de la variación es que el discernimiento es una condición necesaria del aprendizaje: qué aspectos atendemos o discernimos que son de importancia decisiva para la forma en que entendemos o experimentamos el objeto de aprendizaje. Sin embargo, el discernimiento no puede suceder sin que el alumno haya experimentado variaciones. Para discernir y enfocarse en aspectos y características (o dimensiones de variación), el alumno debe haber experimentado variación en esos aspectos y características.

En ese sentido, se ha demostrado que el uso de ejemplos mixtos (ejemplos de diferentes tipos) facilita el aprendizaje de los estudiantes más que el uso de múltiples ejemplos del mismo tipo (Hatala et al. 2003; Kornell y Bjork 2008; Rohrer y Pashler 2010; Schmidt y Bjork 1992; Taylor y Rohrer 2010).

En las tres tablas que aparecen a continuación (tabla 3.14, 3.15, 3.16) se muestra un bosquejo detallado de las diferentes componentes de la tarea 5. Empezando por detallar cuáles fueron los aspectos y características criticas para determinar cuando una ecuacion diofántica lineal con dos incógnitas tiene solución y en caso de tenerla como encontrarla a partir del discernimiento y aplicación del criterio de cifras terminales.

Aprendizaje Previsto	**Contenido**	**Evidencias**
Discernir que una ecuación diofántica lineal con dos incógnitas tiene solución **sólo** si el M.C.D de *(a, b)* divide a *c* de manera exacta. En caso de tener solución, cómo encontrarla (*solución particular).* En caso de tener solución, cómo encontrarla (*solución particular).* Discernir que el Criterio de Cifras Terminales se usa cuando uno de los coeficientes *a* o *b* termina en 5. Se recomienda multiplicar por 2 la ecuación original y analizar la última cifra de cada término.	**Aspecto crítico** Tiene Sol. **vs** no tiene Sol. Encontrar una solución particular **Características Criticas** (Criterio de cifras términales) Ec. diofánticas generales 2 ecuaciones lineales a) $4x + 5y = 98$ b) $3x – 5y = 7$	Soluciones escritas de los alumnos en las hojas de trabajo. Fotografías.

Tabla 3.14. Aspectos y características críticas para determinar si una ecuación diofántica lineal tiene solución entera y como encontarla apartir del criterio de cifras terminales

En la siguiente tabla, se muestra la relación pedagógica entre los patrones de variación durante la segunda parte del tercer episodio de enseñanza.

Actividades de enseñanza-aprendizaje	**Patrones de Variación**	**Materiales y recursos didácticos**
Identificar los coeficientes *a*, *b* y *c* de las ecuaciones propuestas. Encontrar el M.C.D de (a,b) Dividir *c*/M.C.D de (a,b)	Variación procedimental **Contraste** Variación en los coeficientes *a y c.* Variación en los signos de operación (+/-).	Hojas de trabajo Computadora

Constestar las preguntas planteadas Determinar cuando tiene solución entera. Se busca si *a* o *b* son multiplos de 5, si alguno lo es se multiplica por 2 ambos términos de la ecuación y se analizan las cifras terminales de *a*, *b* y *c* de la ecuación, aplicando las propiedades de los números, para encontrar la solución particular.	**Separación** Variación en el coeficiente *b* que termina en 5. **Generalización** Variación en cualquiera de los coeficientes *a* y *b* que terminan en de 5 (Multiplicar por dos toda la ecuación y analizar el producto de cada término *ax* y *by* en función del coeficiente *c*). **Fusión** Conocimiento simultáneo de las características críticas de los coeficientes *a* y *b* del criterio de cifras terminales para encontrar una solución particular.	Calculadora Geogebra
Video Tutorial	https://youtu.be/v0le8CgcQJo	

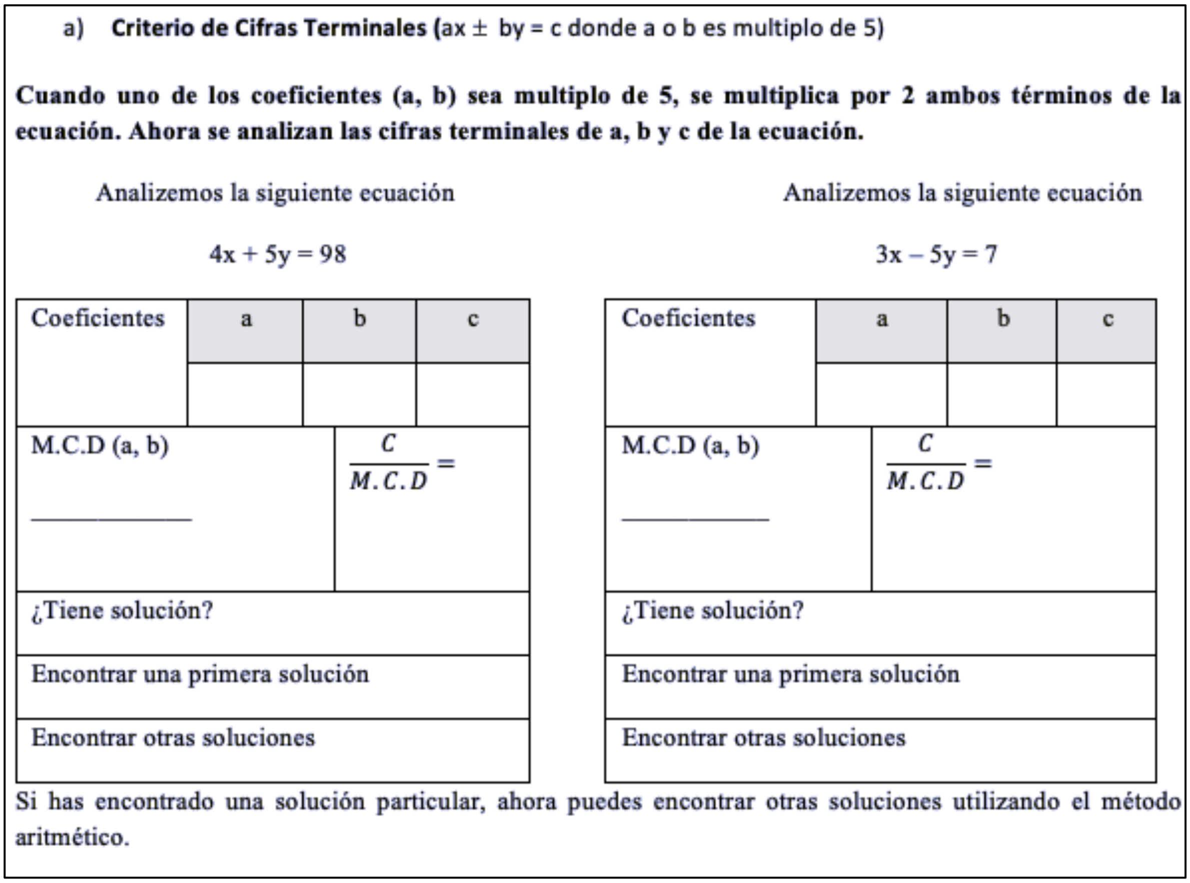
Tabla 3.15. Patrones de variación en el tercer episodio de enseñanza

Finalmente, en la tercera tabla que aparece a continuación se muestra las expectativas o los aprendizajes previstos (en términos de la contrastación y/o el discernimiento) y relación con el contenido de la Tarea 3B.

Tiene Sol. vs No tiene Sol. **Encontrar una solución particular**		**El alumno debe contrastar y/o discernir**
4x + 5y = 98	3x – 5y = 7	Dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas y coeficientes enteros.
		Ambas tienen soluciones enteras. Ambas con el coeficiente b que termina en 5.
2 [4x + 5y = 98] 8x + 10y = 196 Cifras terminales de cada término …6 …0 …6 8(2) + 10 (18) = 196 16 + 180 = 196	2 [3x – 5y = 7] 6x – 10y = 14 Cifras terminales de cada término …4 …0 …4 6(4) - 10 (1) = 14 24 – 10 = 14	Multiplicar por dos toda la ecuación y analizar las cifras terminales de cada término (discenir la aplicación de las propiedades de los números enteros), para encontrar una solución particular (entera).

Tabla 3.16. El contenido de la Tarea 3B en relación contrastación o discernimiento.

En concreto, todas las consideraciones teóricas enunciadas, quedaron finalmente vertidas en hojas simples de trabajo para los estudiantes, de las cuales en seguida, se muestra un extracto (ver las hojas de trabajo completas en el anexo 1).



a) **Criterio de Cifras Terminales** (ax ± by = c donde a o b es multiplo de 5)

Cuando uno de los coeficientes (a, b) sea multiplo de 5, se multiplica por 2 ambos términos de la ecuación. Ahora se analizan las cifras terminales de a, b y c de la ecuación.

Analizemos la siguiente ecuación

4x + 5y = 98

Coeficientes	a	b	c
M.C.D (a, b) ____________	$\frac{C}{M.C.D} =$		
¿Tiene solución?			
Encontrar una primera solución			
Encontrar otras soluciones			

Analizemos la siguiente ecuación

3x – 5y = 7

Coeficientes	a	b	c
M.C.D (a, b) ____________	$\frac{C}{M.C.D} =$		
¿Tiene solución?			
Encontrar una primera solución			
Encontrar otras soluciones			

Si has encontrado una solución particular, ahora puedes encontrar otras soluciones utilizando el método aritmético.

Figura 3.15. Extracto de las hojas de trabajo asociadas a la tarea 3B

Jing et al. (2017), señala que el desafío en la educación de hoy es enseñar a los estudiantes de manera efectiva habilidades diversas y diferentes ritmos de aprendizaje para que puedan aprender conceptos matemáticos con comprensión y desarrollar motivación positiva e interés hacia el aprendizaje de las matemáticas.

3.4.4.3 DISEÑO DE LA TAREA 3C

En el bachillerato, los estudiantes se enfrentan a una polisemia de las literales que los involucra en las tareas de utilizar y diferenciar variables, incognitas, números generalizados y parámetros en situaciones provenientes de diversas áreas de las matemáticas.

Es por ello, que en el diseñó de esta tarea 3C, centramos la atención de los estudiantes en encontrar una solución (particular) en números enteros de las ecuaciones diofánticas (del tipo, generales), utilizando como procedimiento ahora el *Criterio de la División*. Es, pues, la comprensión del algoritmo de la división y las variaciones de las características críticas (variación en el término *by,* caso 1 y *2*) realizadas en las ecuaciones lo que se debió focalizar para resolver la tarea y no tanto la destreza en los cálculos.

Por lo que, aplicamos variación procedimental: un problema, múltiples soluciones (OPMS), variando los diferentes procesos de solución de dicho problema u otros y asociando diferentes métodos de solución (Lai & Murray, 2012).

En este caso la construcción de las relaciones tiene importancia, ya que los objetos matemáticos recobran significado de las maneras en que se relacionan con otras cosas. Los estudiantes construyen significados para una nueva idea o proceso relacionandolo con ideas o procesos ya conocidos (fusión).

Las características críticas de variación utilizadas en esta tarea se transformaron finalmente en definiciones formales y proposiciones matemáticas sobre las ecuaciones diofánticas lineales. Se pidio a lo estudiantes visualizar el video (en YouTube) del criterio de la división, de tal manera que lograrán discernir las características críticas del algoritmo de la división (D = d*q + r), donde *D* es el dividendo, *d* el divisor, *q* el cociente y *r* es el residuo.

Al mismo tiempo, que la relación existente entre ellos aplicando las propiedades de los números es que *q* es el valor asignado para *x* y *r* es el valor para *y* de la soluciuón particular.

Una tarea importante en la enseñanza consiste en lograr que el estudiante desarrolle una disposición a comprender para transitar del lenguaje aritmético al algebraico, por lo que se debe captar su voluntad a engancharse en el continuo proceso de comprensión, para lo cual debe desarrollar el hábito de trabajo y reflexión (INEE, 2017).

En ese sentido, la busqueda y discusión de diversas formas de resolver un problema representa un aspecto fundamental en el proceso de construir una comprensión conceptual de las ideas matemáticas y en el desarrollo de competencias en la resolución de problemas.

En este contexto, el acercamiento visual y el empirico son el punto de partida para utilizar diferentes recursos y conceptos que permitan representar y explorar el problema desde perspectivas diferentes. En esta tarea la tecnología ha permitido superar la presencia en la escuela facilitando la continuidad de adquirir el conocimiento de manera autónoma.

Como se puede esperar, el video tutorial tiene un devenir bastante promisorio, tanto así que estos favorecen un aprendizaje significativo, al establecer nuevas relaciones que mejoran el proceso de enseñanza-aprendizaje (Márquez, 1995).

En las siguientes tres tablas que aparecen a continuación (tabla 3.17, 3.18 y 3.19) se muestra un bosquejo detallado de las diferentes componentes de la tarea 3C. Empezando por detallar cuáles fueron los aspectos y características criticas para determinar cuando una ecuacion diofántica lineal con dos incógnitas tiene solución y en caso de tenerla como encontrarla a partir del discernimiento y aplicación del criterio de la División.

<table>
<tr><th>Aprendizaje Previsto</th><th>Contenido</th><th>Evidencias</th></tr>
<tr>
<td>Discernir que una ecuación diofántica lineal con dos incógnitas tiene solución sólo si el Máximo Común Divisor de <i>a</i> y <i>b</i> divide a <i>c</i> de manera exacta. En caso de tener solución, cómo encontrarla (<i>solución particular).</i>

En caso de tener solución, cómo encontrarla (<i>solución particular)</i>

Discernir que el Criterio de la División (D = d*q + r), se usa cuando no se puede aplicar los critrios anteriores. Consiste en expresar todos los términos en función del menor de los coeficientes.

<table>
<tr><td>D
Dividendo</td><td>D
Divisor</td></tr>
<tr><td>R
Residuo</td><td>q
Cociente</td></tr>
<tr><td>↓</td><td>↓</td></tr>
<tr><td>Y</td><td>X</td></tr>
</table>
</td>
<td>Aspecto Crítico
Tiene Sol. <u>vs</u> no tiene Sol.
Encontrar una solución particular

Características críticas
(Criterio de la División)

Ec. diofánticas generales
2 ecuaciones lineales

a) 5x + y = 83
b) 11x + 13y = 173</td>
<td>Soluciones escritas de los alumnos en las hojas de trabajo.

Fotografías.</td>
</tr>
</table>

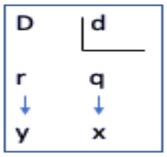
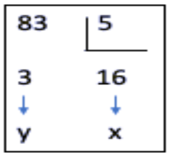
Tabla 3.17. Aspectos y características críticas para determinar si una ecuación diofántica lineal tiene solución entera y como encontarla apartir del criterio de la división

En la siguiente tabla, se muestra la relación pedagógica entre los patrones de variación durante la tercera parte del tercer episodio de enseñanza.

Actividades de enseñanza-aprendizaje	Patrones de Variación	Materiales y recursos didácticos
Identificar los coeficientes *a*, *b* y *c* de las ecuaciones propuestas.Encontrar el M.C.D de (a, b) Dividir el M.C.D de (a, b) entre *c* Constestar las preguntas planteadas Determinar cuando tiene solución entera. Aplicar el algoritmo de la división para obtener una solución particular cuando: Caso 1: *by* < *ax* donde b = 1 o b < a, pero a < d) D D Dividendo Divisor R q Residuo Cociente ↓ ↓ Y X Caso 2: *by* > *ax* *ax +(ay +by) = c* Descomponer el término mayor en función del término menor.	Variación procedimental **Contraste** Variación en los coeficientes *a*, *b* y *c*. **Separación** Variación en el coeficiente *b*: $b < a$ $b > a$ **Generalización** Variación en los coeficientes *a*, y *b* en relación con los dos casos: *by* < *ax* y *by* > *ax* (donde el residuo debe ser un valor más pequeño que el divisor). **Fusión** Conocimiento simultáneo de las características críticas de los coeficientes *a* y *b* del criterio de la división para encontrar una solución particular	Hojas de trabajo Computadora Calculadora
Video Tutorial	https://youtu.be/v0le8CgcQJo	

Tabla 3.18. Patrones de variación en el tercer episodio de enseñanza

Finalmente, en la tercera tabla que aparece a continuación se muestra las expectativas o los aprendizajes previstos (en términos de la contrastación y/o el discernimiento) y relación con el contenido de la Tarea 3C.

Tiene Sol. **vs** No tiene Sol. Encontrar una solución particular		**El alumno debe contrastar y/o discernir**
5x + y = 83	11x + 13y = 173	Dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas y coeficientes enteros. Ambas tienen soluciones enteras.
5x + y = 83   	ax + by = c d*q + r = D	Discernir el Caso *1: b < a* Para obtener una solución particular (entera).

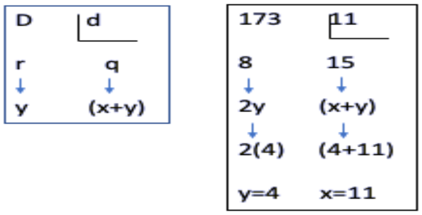
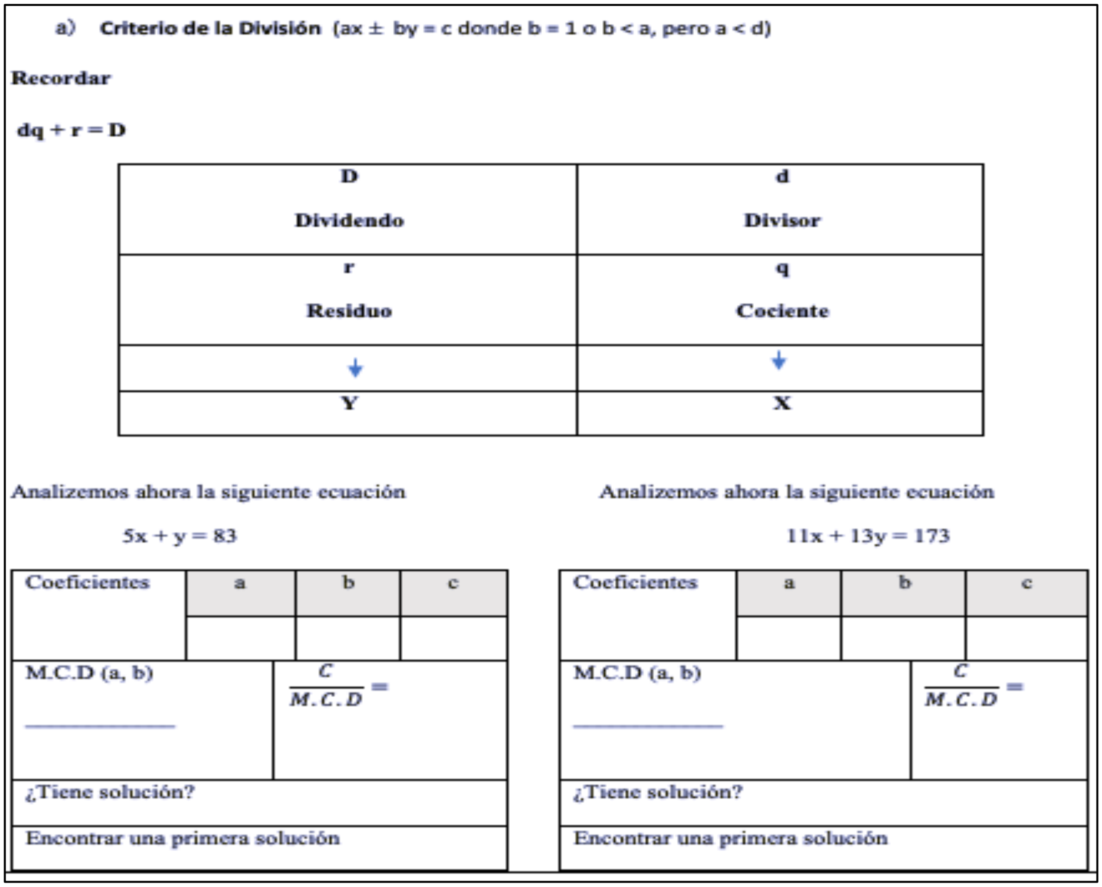
$11x + 13y = 173$ $11x + (11y + 2y) = 173$ $11(x + y) + 2y = 173$  	$a(x+y) + by = c$ $d*q + r = D$	Discernir el Caso 2: $b > a$ Para obtener una solución particular (entera).

Tabla 3.19. El contenido de la Tarea 3C en relación contrastación o discernimiento

En concreto, todas las consideraciones teóricas enunciadas, quedaron finalmente vertidas en hojas simples de trabajo para los estudiantes, de las cuales en seguida, se muestra un extracto (ver las hojas de trabajo completas en el anexo 1).



a) **Criterio de la División** (ax ± by = c donde b = 1 o b < a, pero a < d)

Recordar

$dq + r = D$

D **Dividendo**	**d** **Divisor**
r **Residuo**	**q** **Cociente**
↓	↓
Y	**X**

Analizemos ahora la siguiente ecuación

$5x + y = 83$

Coeficientes	**a**	**b**	**c**

M.C.D (a, b) ____________ $\frac{C}{M.C.D} =$

¿Tiene solución?

Encontrar una primera solución

Analizemos ahora la siguiente ecuación

$11x + 13y = 173$

Coeficientes	**a**	**b**	**c**

M.C.D (a, b) ____________ $\frac{C}{M.C.D} =$

¿Tiene solución?

Encontrar una primera solución

Figura 3.16. Extracto de las hojas de trabajo asociadas a la tarea 4C

Como señalaron Cai y Nie (2007), la enseñanza con variación, al presentar una serie de problemas interconectados, puede ayudar a los estudiantes a comprender conceptos y dominar el método de resolución de problemas, desarrollando así el conocimiento de las matemáticas de los estudiantes. Por lo tanto, está claro que este método de enseñanza puede promover el aprendizaje significativo de las matemáticas por parte de los estudiantes.

Por ejemplo, Li J., Peng A., Song N. (2011) señalan que el concepto de ecuación se puede presentar a los estudiantes mediante el uso de variaciones visuales o específicas; la característica crítica del objeto de aprendizaje puede destacarse al contrastar formas estándar con otras no estándar; y los malentendidos del objeto pueden corregirse mediante el uso de contraejemplos. Además, utilizando actividades de enseñanza con variación, los estudiantes pueden comprender cómo se generan y desarrollan los aspectos críticos del objeto de aprendizaje, adquieren las representaciones y estrategias de resolución de problemas y luego construyen una relación jerárquica entre las diferentes características críticas (es decir, variación procedimental).

3.4.5 UNIDAD DE DISCERNIMIENTO CUATRO

¿Cuántas soluciones tiene la ecuación? *(*Modelo general*)*

Como lo señalaron Gu et al. (2004), la enseñanza con variación ayuda a los estudiantes a desarrollar una comprensión profunda de un objeto de aprendizaje desde múltiples perspectivas. Se puede ayudar a los estudiantes cuando aprenden, si los maestros implementan adecuadamente la enseñanza con variación mediante la adopción de diferentes tipos de variación y niveles de representación de acuerdo con los objetivos de aprendizaje, si se basan en el conocimiento y la capacidad existentes de los estudiantes y usan diferentes contenidos en diferentes fases de la enseñanza.

Episodio de enseñanza 4: Las tres cuestiones que vamos a responder son:

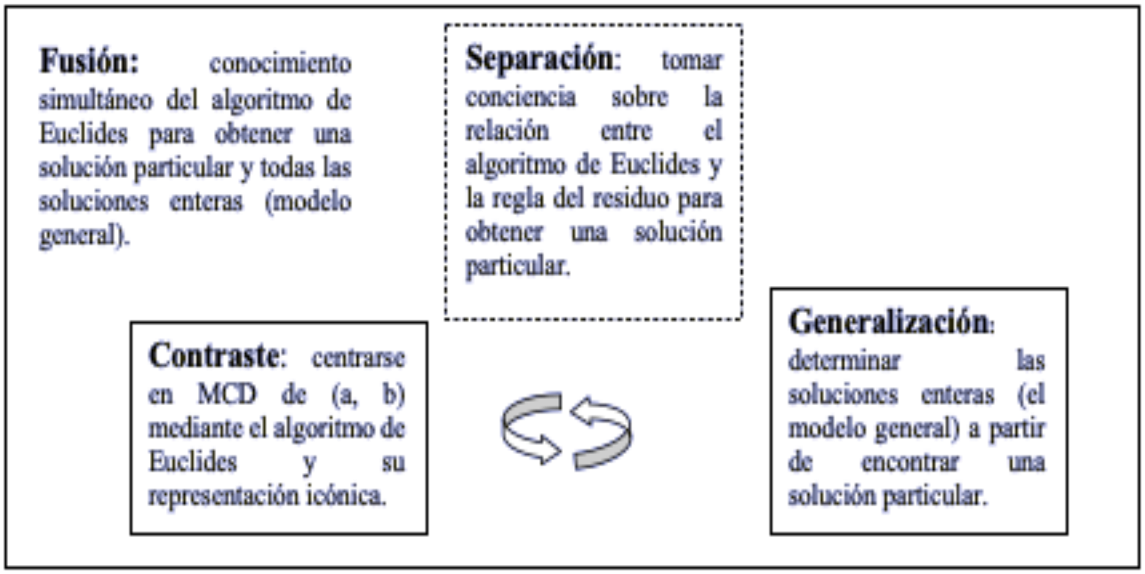
a) ¿Cuándo una ecuación del tipo ax + by = c, en la que *a* y *b* son números enteros diferentes de cero y c un número entero cualquiera, tiene solución entera?

- En caso de tener solución, cómo encontrarla (solución particular)
- ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación? (Modelo general)

De acuerdo a los planes y programas del bachillerato INEE (2017), la resolución de ecuaciones es un tema que se desarrolla en secundaria desde los primeros niveles y, que a su vez en el bachillerato es un elemento clave, que permite el estudio de los diversos conjuntos numéricos (naturales, enteros, racionales, irracionales e irracionales) y relaciones con otras disciplinas (p.198).

Es por ello, que para aprender álgebra con variación, los estudiantes, por un lado, necesitan comprender el concepto desde múltiples perspectivas (de lo concreto a lo abstracto, de lo específico a lo general) para adquirir la naturaleza y las conexiones de los conceptos mediante la eliminación de interferencias de fondo y prender las luces altas.

En ese sentido se diseñaron las actividades 4A y 4B (ver Anexo 1). En la Figura 3.17 se muestra la cuarta parte del modelo pedagógico que se ha implementado en esta tesis. Consiste en interacciones de variación que posteriormente se concretan en las actividades que aparecen más adelante en la tabla de contenido de las tareas 4A y 4B para determinar cuando una ecuacion diofántica lineal tiene solución y en caso de tenerla como encontrar una solución particular entera y finalmente obtener el modelo general que nos permita obtener todas las soluciones enteras. Esto es, en este cuarto episodio de enseñanza, al igual que en los anteriores la simultaneidad y el foco de atención han jugado roles críticos.



Fusión: conocimiento simultáneo del algoritmo de Euclides para obtener una solución particular y todas las soluciones enteras (modelo general).

Separación: tomar conciencia sobre la relación entre el algoritmo de Euclides y la regla del residuo para obtener una solución particular.

Contraste: centrarse en MCD de (a, b) mediante el algoritmo de Euclides y su representación icónica.

Generalización: determinar las soluciones enteras (el modelo general) a partir de encontrar una solución particular.

Figura 3.17. Una unidad de discernimiento para determinar **¿Cuántas soluciones tiene la ecuación?** ***(Modelo general)***

3.4.5.1 DISEÑO DE LA TAREA 4A

Gu, Huang y Marton (2004), enfatizan que el diseño de una actividad o serie de actividades puede incluir un andamiaje, el cual implica pequeñas variaciones que llevan a pequeños avances en el aprendizaje, graduados por las actividades que dirige el profesor.

Por ejemplo, en el proceso de "variación procedimental", el maestro diseña el modelo operativo del aspecto crítico para promover la formación del objeto de aprendizaje, andamia los problemas estratificados para formar estrategias resolución de problemas y adopta soluciones múltiples o variaciones para un problema o una solución para múltiples problemas para que los estudiantes focalicen su atención en las características criticas y adquieran experiencias particulares en la resolución de problemas con ecuaciones.

El diseño y contenido que constituye esta tarea fue seleccionado y variado al aplicar un patron de variación por contraste, separación y generalización al proponer una ecuación diofántica lineal (del tipo, id. Bezout) donde la característica crítica que varía es el término independiente *c* que ahora es igual a 1. De tal manera, que se pidio a los estudiantes visualizar el video tutorial (en YouTube) del algoritmo de Euclides y la identidad de Bezout para obtener una solución particular y posteriormente lograr discernir el aspecto crítico que es encontrar el modelo general para obtener todas las soluciones enteras de la ecuación.

En las tres tablas que aparecen a continuación (tabla 3.20, 3.21 y 3.22) se muestra un bosquejo detallado de las diferentes componentes de la tarea 1. Empezando por detallar cuáles fueron los aspectos y características criticas para determinar cuando una ecuación diofántica lineal tiene solución y en caso de tenerla como encontrar una solución entera particular y finalmente obtener el modelo general que nos permita obtener todas las soluciones enteras.

Aprendizaje Previsto	**Contenido**	**Evidencias**
Disernir cuando una ecuación del tipo $ax + by = c$, en la que a y b son números enteros diferentes de cero y c un número entero cualquiera, tiene solución entera. Discernir la aplicación del algoritmo de Euclides y la Identidad de Bezout, para encontrar una solución particular.	**Aspecto Crítico** Tiene Sol. **vs** No tiene Sol. Encontrar una solución particular ¿Cuántas soluciones tiene? (modelo general) **Características críticas** Algoritmo de Euclides Id. De Bezout Ec. diofántica donde c =1	Soluciones escritas de los alumnos en las hojas de trabajo. Fotografías.

Discernir la aplicación del modelo general a paritr de la solución particular para encontrar otras soluciones.	M.C.D. (525, 100) M.C.D. (66, 550) a) 127x - 52 y = 1	

Tabla 3.20. Aspectos y características críticas en una ecuación diofántica lineal para obtener una solución particular y el modelo general

En la siguiente tabla, se muestra la relación pedagógica entre los patrones de variación durante la primera parte del cuarto episodio de enseñanza.

Actividades de enseñanza-aprendizaje	**Patrones de Variación**	**Materiales y recursos didácticos**
Encontrar el M.C.D de dos números Aplicar el Algoritmo de Euclides Determinar si tiene soluciones enteras. Aplicar el algoritmo de Euclides y la identidad de Bezout para obtener una solución particular: Aplicar el modelo general a paritr de la solución particular para encontrar otras soluciones. $\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{\text{mcd}(a,b)}t \\ y = y_0 - \frac{a}{\text{mcd}(a,b)}t \end{cases}$ Comprobación de las divisiones D = d*q + r	Variación procedimental **Contraste** Variación en el término independiente *c* =1 **Separación** Variación en la obtención del M.C.D de (a, b) a partir del algoritmo de Euclides. **Generalización** Variación en la obtención de una solución particular al aplicar la identidad de Bezout. **Fusión** conocimiento simultáneo del algoritmo de Euclides y de la Id. de Bezout para obtener una solución particular y con ello todas las soluciones enteras (modelo general).	Hojas de trabajo Computadora Calculadora
Videos Tutoriales	https://www.youtube.com/watch?v=036pOZO0hV4 https://youtu.be/4Q5VMntI7Do https://youtu.be/jbH7fyqySqY	

Tabla 3.21. Patrones de variación en el cuarto episodio de enseñanza

Finalmente, en la tercera tabla que aparece a continuación se muestra las expectativas o los aprendizajes previstos (en términos de la contrastación y/o el discernimiento) y relación con el contenido de la Tarea 4A.

<table>
<tr><th colspan="2">Tiene Sol. <u>vs</u> No tiene Sol.
Encontrar una solución particular
¿Cuántas soluciones tiene la ecuación? <i>(modelo general)</i></th><th>El alumno debe contrastar y/o discernir</th></tr>
<tr><td rowspan="2">(525, 100)</td><td rowspan="2">(66, 550)</td><td>Dos pares de números, para encontrar el <i>M.C.D.</i></td></tr>
<tr><td>Aplicar el algoritmo de Euclides</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">127x - 52 y = 1</td><td>Una ecuación de primer grado con dos incógnitas donde <i>c</i> = 1</td></tr>
<tr><td>Tiene soluciones enteras</td></tr>
<tr><td colspan="2">
<table>
<tr><td>cocientes</td><td></td><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td><td>5</td></tr>
<tr><td>dividendo</td><td>127</td><td>52</td><td>23</td><td>6</td><td>5</td><td><u>1</u></td></tr>
<tr><td>Residuo</td><td>23</td><td>6</td><td>5</td><td>1</td><td>0</td><td></td></tr>
</table>
r = D - d*q

23= 127 – 2 (52)
6= 52 – 2 (23)
5= 23 – 3 (6)
1= 6 – 1 (5)
0= 5– 5 (1)
</td><td>Aplicar el algoritmo de Euclides y la la Id. de Bezout, para obtener una solución particular</td></tr>
<tr><td colspan="2">
1= 6 – 1(5)
1= 6 – 1[23 - 3(6)]
1= 6 – 23 + 3 (6)
1= 4 (6) – 23
1= 4 [52- 2 (23)] –23
1= 4 (52)– 8 (23) –23
1= 4 (52)– 9 (23)
1= 4 (52)– 9 [127 - 2(52)
1= 4 (52)– 9 (127) + 18 (52)
1= 22 (52)– 9 (127)
1= 127(-9) + 52 (22)

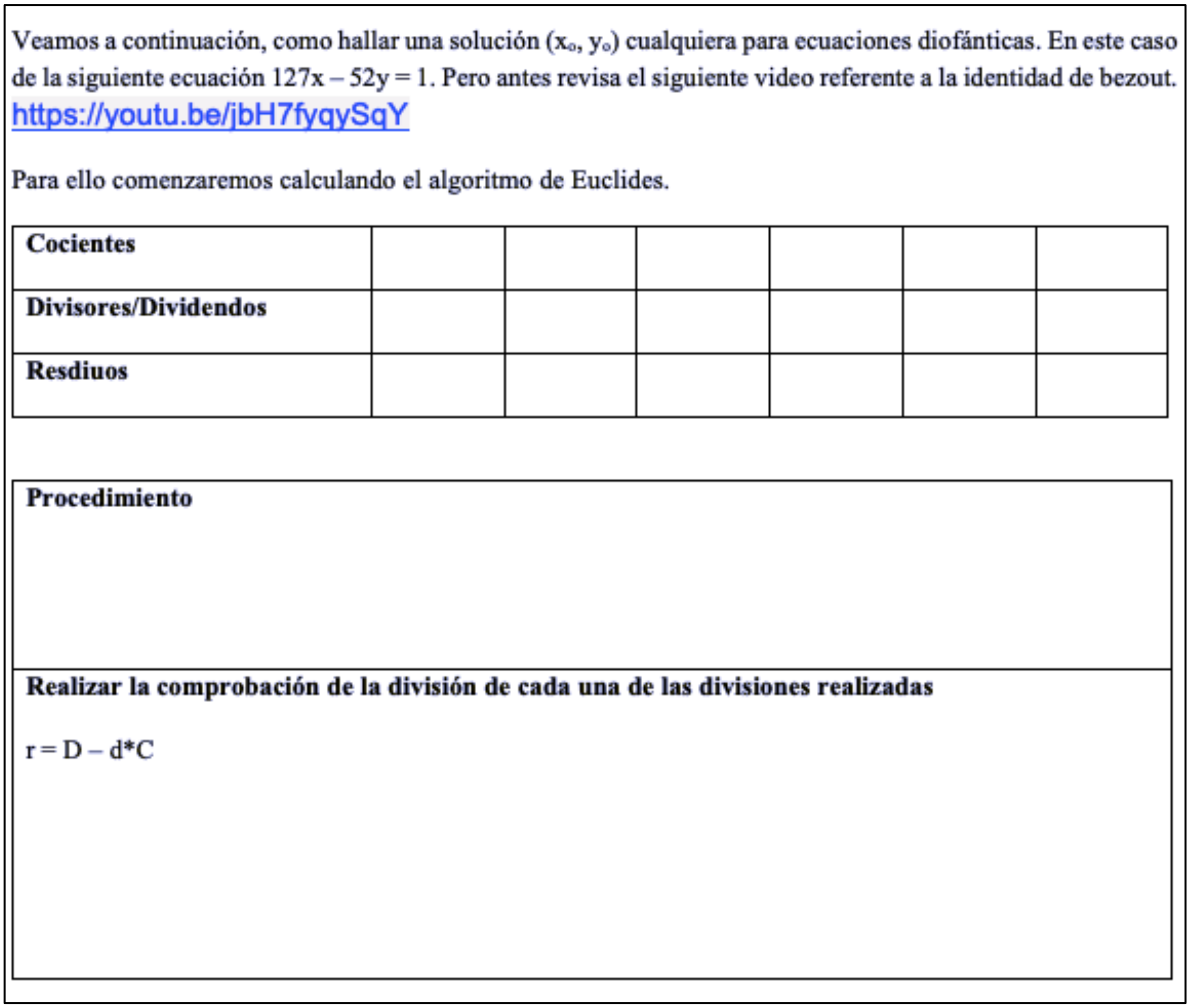
x_0= -9 y_0= -22

$x = -9 + \frac{(-52)}{1} t$ $x = -9 - 52t$

$y = -22 - \frac{(127)}{1} t$ $y = -22 - 127t$
</td><td>Aplicar la solución particular para obtener el modelo general y así otras soluciones enteras.</td></tr>
</table>

Tabla 3.22. El contenido de la Tarea 4A en relación contrastación o discernimiento

En concreto, todas las consideraciones teóricas enunciadas, quedaron finalmente vertidas en hojas simples de trabajo para los estudiantes, de las cuales en seguida, se muestra un extracto (ver las hojas de trabajo completas en el anexo 1).



Veamos a continuación, como hallar una solución (x_o, y_o) cualquiera para ecuaciones diofánticas. En este caso de la siguiente ecuación $127x - 52y = 1$. Pero antes revisa el siguiente video referente a la identidad de bezout.
https://youtu.be/jbH7fyqySqY

Para ello comenzaremos calculando el algoritmo de Euclides.

Cocientes						
Divisores/Dividendos						
Resdiuos						

Procedimiento

Realizar la comprobación de la división de cada una de las divisiones realizadas

$r = D - d*C$

Figura 3.18. Extracto de las hojas de trabajo asociadas a la tarea 4A

De acuerdo con Li, J. et al (2011), se cree que enseñar ecuaciones algebraicas basadas en variaciones apropiadas (representadas como un espacio de problemas estratificado multivariante que consiste en problemas que varían sistemáticamente y deliberadamente) puede ayudar a los estudiantes a comprender el concepto de ecuación y facilitar su desarrollo en representaciones y estrategias de resolución de problemas, haciendo que el aprendizaje de las ecuaciones algebraicas de los alumnos sea significativo.

Por lo tanto, no solo ayuda a los estudiantes a comprender los "Dos conceptos básicos" (conocimiento básico y habilidades básicas) del entrenamiento en ecuaciones algebraicas, sino que también mejora sus habilidades para resolver problemas.

3.4.5.2 DISEÑO DE LA TAREA 4B

Las exploraciones que se pueden realizar en ambientes dinámicos facilitan a los estudiantes la manipulación de las representaciones figúrales de los objetos geométricos, mediante herramientas como el arrastre, la medición, la verificación de propiedades, construcciones auxiliares, entre otras. Como resultado de dicha interacción, se descubren propiedades, se producen conjeturas y se pueden generar estrategias argumentativas que justifiquen la conjetura.

La geometría dinámica (en nuestro caso con Geogebra) enriquece la representación figural porque brinda mayor nivel de evidencia y por consiguiente ayuda en la transición del dibujo al objeto geométrico (Sandoval, 2005 y 2009). Proporciona a los estudiantes un entorno para que realicen construcciones basadas en definiciones y exploren e interpreten diferentes tipos de representación: la numérica a través de la medición, la figural mediante trazos, la verbal por medio de los comentarios, etiquetas, etcétera. En este aspecto, les brinda la oportunidad para analizar y discutir, en términos conceptuales, el significado de la situación geométrica en cuestión.

En ese sentido, de acuerdo a los planes y programas del bachillerato (INEE, 2017), el estudiante debe argumentar la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de tecnologías de la información y la comunicación (p.72).

La elección de este objeto de aprendizaje ha sido expuesta por la literatura que destaca la importancia de involucrar a los alumnos en experiencias que requieren la conexión de diferentes representaciones de conceptos matemáticos como un umbral para el aprendizaje (por ejemplo, Goldin 1998; NCTM 2000; Duval 2006; Askew et 1997; Swan 2007, 2011).

El diseñó de esta tarea 4B incluyó el empleo del software de geometría dinámica *Geogebra* el cuál tiene la potencialidad de no reducir el trabajo académico a practicar algoritmos, sino que interesó que éste ayudará a los estudiantes a descubrir, construir conceptos y técnicas focalizando su atención en encontrar puntos (x_o, $y_{o)}$, sobre la recta que que representa cada una de las ecuaciones dadas como posibles soluciones enteras y a partir de la localización de uno de los puntos encontrar el modelo general que permitiera obtener otras las soluciones enteras. En este caso se propuso una ecuación diofántica lineal con dos incógnitas (del tipo, general).

En las tres tablas que aparecen a continuación (tabla 3.23, 3.24 y 3.25) se muestra un bosquejo detallado de las diferentes componentes de la tarea 4B. Empezando por detallar cuáles fueron los aspectos y características criticas para determinar cuando una ecuacion diofántica lineal tiene solución y en caso de tenerla como encontrar una solución entera particular y finalmente obtener el modelo general que nos permita obtener todas las soluciones enteras.

Aprendizaje Previsto	**Contenido**	**Evidencias**
Dicernir cuando una ecuación del tipo *ax +by = c*, en la que *a* y *b* son números enteros diferentes de cero y *c* un número entero cualquiera, tiene solución entera. Encontrar una solución (*solución particular)* Encontrar otras soluciones (*modelo general*)	**Aspecto crítico** Tiene Sol. **<u>vs</u>** No tiene Sol. Encontrar una solución particular ¿Cuántas soluciones tiene? (modelo general) **Características Críticas** Ec. diofántica general Ecuación 5x+3y=16	Soluciones escritas de los alumnos en las hojas de trabajo. Fotografías.

Tabla 3.23. Aspectos y características críticas en una ecuación diofántica lineal para obtener una solución particular y el modelo general

En la siguiente tabla, se muestra la relación pedagógica entre los patrones de variación durante la segunda parte del cuarto episodio de enseñanza.

Actividades de enseñanza-aprendizaje	**Patrones de Variación**	**Materiales y recursos didácticos**
Encontrar el M.C.D de dos números Determinar si la ecuación propuesta tiene solución entera. Aplicar el algoritmo de Euclides o su representación gráfica (con geogebra) para obtener una solución particular. Encontrar otras soluciones aplicando la identidad de Bezout (*modelo general*). $\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{\mathrm{mcd}(a,b)}t \\ y = y_0 - \frac{a}{\mathrm{mcd}(a,b)}t \end{cases}$ Demostrar que cuando t = -3 es solución	Variación procedimental **Contraste** Variación simbolica e icónica **Separación** Variación en el M.C.D de (a, b) mediante el algoritmo de Euclides Variación en la localización de puntos en el plano cartesiano x_o, y_o, y su intersección entera como solución particular. **Generalización** Variación en el valor de t para demostrar que es una solución particular a partir del modelo general **Fusión** Conocimiento simultáneo del algoritmo de Euclides y de represnetación icónica para obtener una solución particular y con ello todas las soluciones enteras (modelo general).	Hojas de trabajo Computadora Calculadora Geogebra Excel

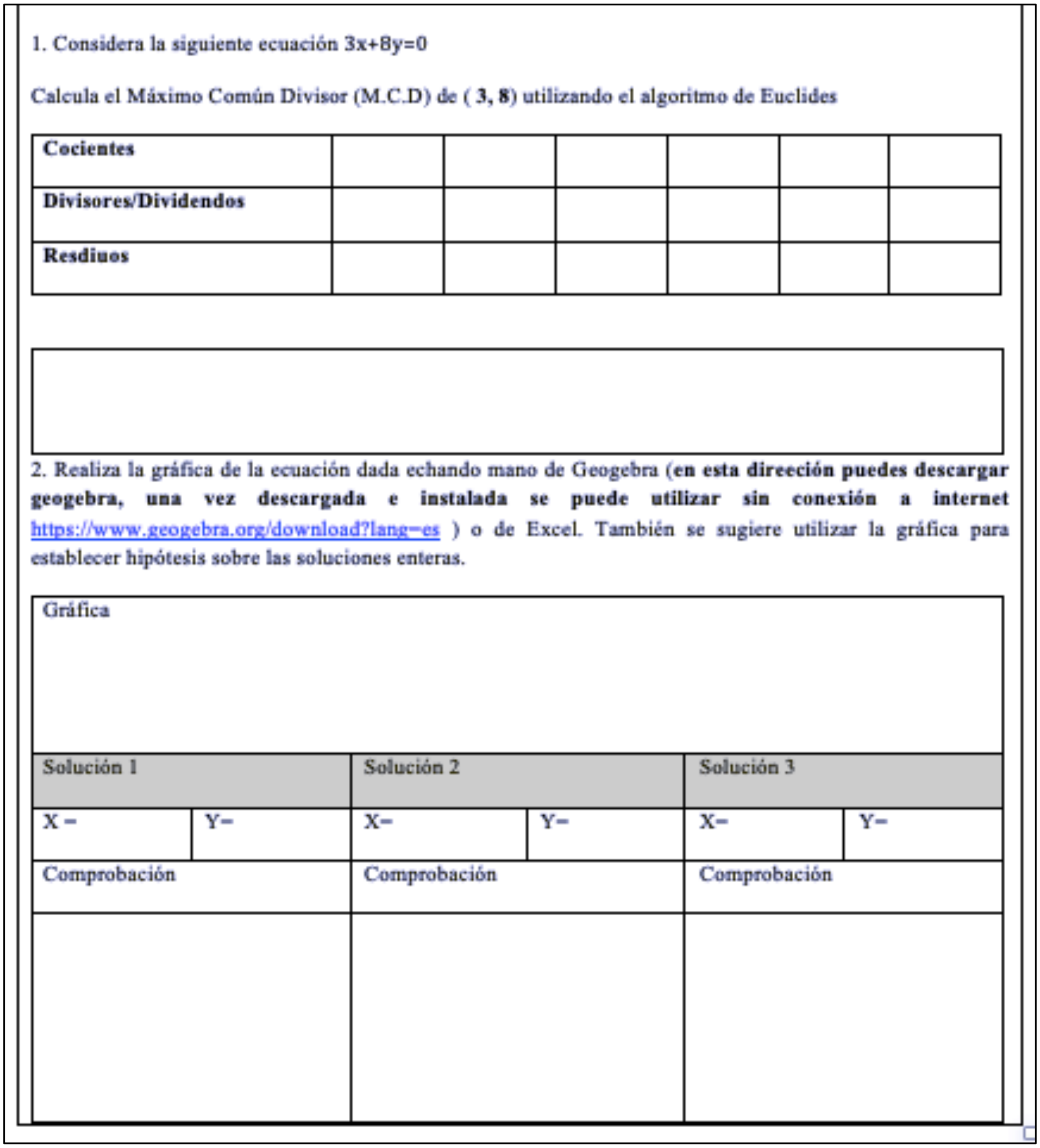
Tabla 3.24. Patrones de variación en el cuarto episodio de enseñanza

Finalmente, en la tercera tabla que aparece a continuación se muestra las expectativas o los aprendizajes previstos (en términos de la contrastación y/o el discernimiento) y relación con el contenido de la Tarea 4B.

Tiene Sol. vs No tiene Sol. **Encontrar una solución particular** **¿Cuántas soluciones tiene la ecuación? *(modelo general)***	**El alumno debe contrastar y/o discernir**
5x + 3y = 16	Una ecuación de primer grado con dos incógnitas (del tipo general), donde *c* = **16.**
	Tiene soluciones enteras Aplicar la conversión de representación símbolica a la icónica, mediante el uso de Geogebra, para obtener una solución particular.
$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{\text{mcd}(a,b)}t \\ y = y_0 - \frac{a}{\text{mcd}(a,b)}t \end{cases}$ Solución particular x_0= 2 y_0= 2 $x = 2 + \frac{3}{1}t$ x = 3+3t cuando t= -3 x = 3+3t x = 3+3(-3)= -7 $y = 2 + \frac{5}{1}t$ y = 2 - 5t cuando t= -3 y = 2 - 5t y = 2- 5(-3)= 17 5(-7) + 3(17) = 16 -35+ 51 = 16	Aplicar la solución particular para obtener el modelo general y así otras soluciones enteras. Aplicar el modelo general obtenido y demostrar que cuando t = -3, se tiene una solución entera.

Tabla 3.25. El contenido de la Tarea 4B en relación contrastación o discernimiento

En concreto, todas las consideraciones teóricas enunciadas, quedaron finalmente vertidas en hojas simples de trabajo para los estudiantes, de las cuales en seguida, se muestra un extracto (ver las hojas de trabajo completas en el anexo 1).



1. Considera la siguiente ecuación 3x+8y=0

Calcula el Máximo Común Divisor (M.C.D) de (**3, 8**) utilizando el algoritmo de Euclides

Cocientes						
Divisores/Dividendos						
Resdiuos						

2. Realiza la gráfica de la ecuación dada echando mano de Geogebra (**en esta dirección puedes descargar geogebra, una vez descargada e instalada se puede utilizar sin conexión a internet** https://www.geogebra.org/download?lang=es) o de Excel. También se sugiere utilizar la gráfica para establecer hipótesis sobre las soluciones enteras.

Gráfica					
Solución 1		Solución 2		Solución 3	
X =	Y=	X=	Y=	X=	Y=
Comprobación		Comprobación		Comprobación	

Figura 3.19. Extracto de las hojas de trabajo asociadas a la octava tarea

Los planes y programas del bachillerato (INEE, 2017), mencionan las habilidades digitales donde el alumno deberá utilizar adecuadamente las tecnologías de la información y la comunicación para investigar, resolver problemas, producir materiales y expresar ideas (p.514). En ese sentido, es que esta tarea aprovecha estas tecnologías para desarrollar ideas e innovaciones.

De acuerdo con Swan (2007, 2011) es válido considerar la perspectiva conexionista como una razón para construir tareas de aprendizaje. Específicamente, en el diseñó de tareas de aprendizaje para los alumnos, cuyo objetivo es ayudar "a apreciar la importancia de desarrollar imágenes mentales para los conceptos mediante la exploración de representaciones alternativas y las múltiples conexiones entre ellos" (Swan 2011, p. 64). Este objetivo es pertinente también para el diseño de tareas para la resolución de ecuaciones diofánticas lineales dos incógnitas presentadas en esta investigación.

3.4.6 UNIDAD DE DISCERNIMIENTO CINCO

Resolución de problemas con ecuaciones diofánticas lineales

De acuerdo con los planes y programas del bachillerato general (INEE, 2017), el cambio fundamental que se propone en el nuevo modelo educativo consiste en enfatizar el valor de uso del conocimiento matemático por parte del estudiante, esto significa, colocar a las prácticas sobre el objeto formal. Fortalcece el sentido de “lo propiamente matemático” en diversas situaciones de aprendizaje: se pretende una enseñanza más activa, realista y crítica que derive en aprendizajes más significativos en la vida del estudiante (p.66).

Mientras las situaciones de aprendizaje basadas en prácticas que favorecen la funcionalidad y transversalidad del contenido, el estudiantado amplía sus experiencias mediante acciones, actividades y prácticas en el trabajo de aula y mediante indagaciones dialógicas en contextos de la vida cotidiana (p.80). En ese sentido, Gracián (2013) señala que el interés que encierra la resolución de una ecuación diofántica lineal está en relación directa con la naturaleza de las incógnitas.

Por ejemplo, si lo que se plantea en una ecuación hace referencia al volumen de un líquido no importará, en principio, que la solución incluya cantidades fraccionarias; pero si se trata, por ejemplo, del número de personas que pueden asistir a una reunión, está claro que únicamente tendrán sentido las soluciones enteras, ya que carecería de sentido dividir a una persona en trozos.

El diseño de las tareas 5A y 5B trata de un abordaje muy cercano al que vive el estudiante en su vida cotidiana, es decir matemáticas en uso. A su vez, se considera que el significado del objeto de aprendizaje emerge mediante las características críticas y las variaciones aplicadas con ese próposito. En estas tareas se utilizó la variación conceptual ya su objetivo de es proveer a los estudiantes, los conceptos matemáticos desde múltiples perspectivas y experiencias.

Así pues, tambien se aplicó la variación procedimental, dado que su objetivo es proveer un proceso de formación etapa por etapa en el cual la experiencia de los estudiantes en la resolución de problemas se manifiesta por la variación de problemas y en la variedad de transferencia de estrategias (Lai & Murray, 2012).

En sintesis, se propone un trabajo con las matemáticas que sean funcionales al estudiante, que reconozca su entorno cotiadiano y retome de él experiencias para construir conocimiento en la escuela. Así tambien, que el conocimiento pueda ponerse en uso tanto en la escuela como en su vida diaria, es decir, se consolide como un saber con pleno valor de uso (INEE 2017, p.83).

En ambas tareas (5A y 5B) se presenta un problema, múltiples soluciones (OPMS), ya que en este tipo de variación su objetivo es fomentar las habilidades de los estudiantes en la resolución de problemas variando los métodos de solución de un problema.

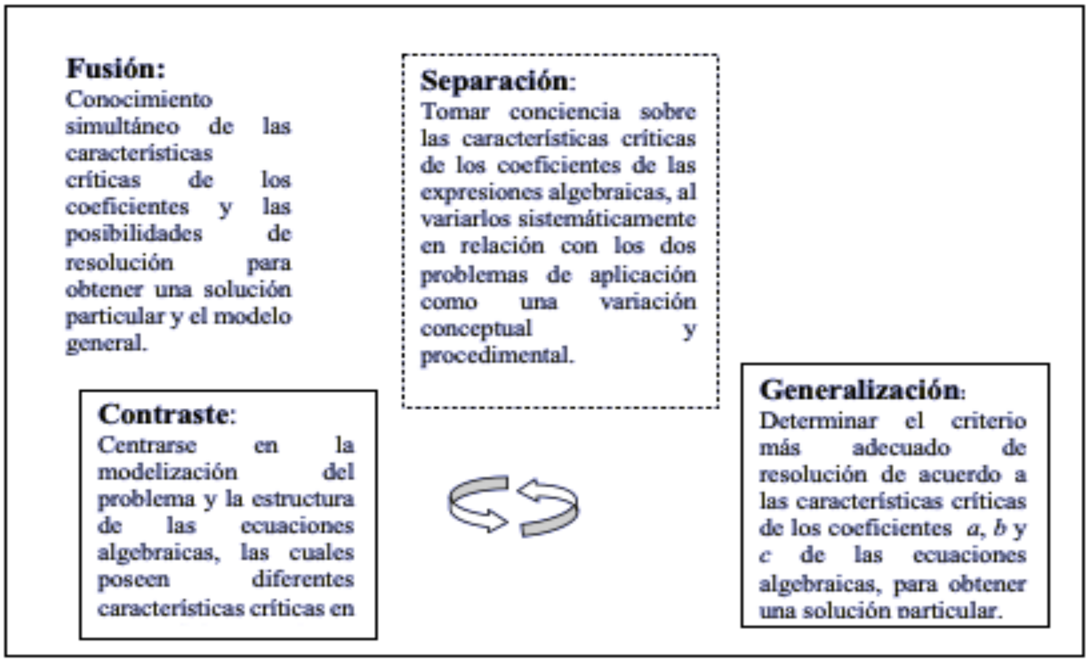
Episoio de enseñanza 5: Una ecuación lineal con dos incógnitas es una expresión de la forma $ax + by = c$ con a, b y $c \in Z$. Las tres cuestiones que vamos a responder son:

a) ¿Cuándo una ecuación del tipo $ax \pm by = \pm c$, en la que a y b son números enteros diferentes de cero y c un número entero cualquiera, tiene solución entera?

b) En caso de tener solución, cómo encontrarla (Solución particular)

c) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación? (Modelo general)

En la Figura 3.20 se muestra la quinta parte del modelo pedagógico que se ha implementado en esta tesis. Consiste en interacciones de variación que posteriormente se concretan en las actividades que aparecen más adelante en la tabla de contenido de las tarea 5A y 5B para determinar cuando una ecuacion diofántica lineal tiene solución y en caso de tenerla como encontrar una solución entera particular y finalmente obtener el modelo general que nos permita obtener todas las soluciones enteras. Así pues, en este quinto episodio de enseñanza, al igual que en los anteriores la simultaneidad y el foco de atención continúan jugando roles críticos.



Fusión:
Conocimiento simultáneo de las características críticas de los coeficientes y las posibilidades de resolución para obtener una solución particular y el modelo general.

Separación:
Tomar conciencia sobre las características críticas de los coeficientes de las expresiones algebraicas, al variarlos sistemáticamente en relación con los dos problemas de aplicación como una variación conceptual y procedimental.

Contraste:
Centrarse en la modelización del problema y la estructura de las ecuaciones algebraicas, las cuales poseen diferentes características críticas en

Generalización:
Determinar el criterio más adecuado de resolución de acuerdo a las características críticas de los coeficientes *a*, *b* y *c* de las ecuaciones algebraicas, para obtener una solución particular.

Figura 3.20. Una unidad de discernimiento para la aplicación de las ecuaciones diofánticas lineales

3.4.6.1 DISEÑO DE LA TAREA 5A

El Álgebra es, a la vez, un objeto de estudio en sí mismo y una forma de entender procesos de simbolización en matemáticas, ciencias y tecnologías: la fuerza del lenguaje algebraico radica en su capacidad de generalización que se expresa en el poder de la simbolización mediante variables y su manipulación, así la *variable* sirve para representar la edad de Pedro, la temperatura del cuerpo, el tiempo transcurrido, la conversión de moneda entre naciones, o la posición del móvil en una recta, pero también habla de manipulaciones de la variable en la construcción de múltiplos y submúltiplos, su doble, su mitad, o a través de los desplazamientos o traslados, o como un cambio de escala, entre otras (INEE 2017, p.163).

De este modo el estudiante estaría en condiciones de reconocer la importancia de las matemáticas para su vida, pues las estaría movilizando mediante el uso de un lenguaje para el reconocimiento de patrones, para arribar a su simbolización y la generalización que constituyen los elementos del álgebra básica.

Esta tarea 5A, se diseño para que los estudiantes lograran la construcción de ecuaciones diofántica lineales a partir de problemas de palabras, así como la interpretación, reescritura y simplificación de expresiones algebraicas, que de acuerdo con Herscovics y Linchevski 1994; Linchevski y Herscovics 1996; Sfard 1995, se denominan dificultades clave en el aprendizaje del álgebra; en ese sentido, la enseñanza con variación a través de "problemas de aplicación", poniendo en práctica todo tipo de representaciones, ayuda a los estudiantes a aprender cómo encontrar estrategias efectivas para las "relaciones cuantitativas" y para fusionar varios métodos de resolución.

Es por ello, que en el proceso de modelar ecuaciones, las representaciones ayudan a los estudiantes a profundizar gradualmente su comprensión de las preguntas: ¿La representación del lenguaje es útil para comprender el escenario?; ¿la representación gráfica es útil para visualizar la relación entre diferentes cantidades? y ¿la representación tabular es útil para establecer las relaciones cuantitativas?

En las tres tablas que aparecen a continuación (tabla 3.26, 3.27 y 3.28) se muestra un bosquejo detallado de las diferentes componentes de la tarea 5A. Empezando por detallar cuáles fueron los aspectos y características criticas para determinar cuando una ecuacion diofántica lineal tiene solución y en caso de tenerla como encontrar una solución entera particular y finalmente obtener el modelo general que nos permita obtener todas las soluciones enteras.

Aprendizaje Previsto	Contenido	Evidencias
Discernir la modelización del problema. Discernir cuando una ecuación del tipo $ax + by = c$, en la que a y b son números enteros diferentes de cero y c un número entero cualquiera, tiene solución entera. Encontrar una solución (*solución particular),* mediante la aplicación de cualquier método. Encontrar otras soluciones (*modelo general*), a partir de la solución particular.	**Aspecto crítico** Tiene Sol. **vs** No tiene Sol. Encontrar una solución particular Encontrar otras soluciones (modelo general) **Características Críticas** Ec. diofántica general Ecuación 3x+5y=4	Soluciones escritas de los alumnos en las hojas de trabajo. Fotografías.

Tabla 3.26. Aspectos y características críticas para la aplicación de las ecuaciones diofánticas lineales

En la siguiente tabla, se muestra la relación pedagógica entre los patrones de variación durante la primera parte del quinto episodio de enseñanza.

Actividades de enseñanza-aprendizaje	**Patrones de Variación**	**Materiales y recursos didácticos**
Encontrar la ecuación que modeliza el problema. Determianar si la ecuación propuesta tiene solución. Encontrar el M.C.D de (a, b). Una garrafa de 5 litros y otra de 3 litros de capacidad. ¿Cómo podemos utilizar las medidas exactas de estas garrafas para conseguir una tercera garrafa de 4 litos de manera exacta?  Elaborar la gráfica de la ecuación. Encontar una solución (solución particular). Encontrar otras soluciones (modelo general). Discernir que significa cuando la “y” es positiva y negativa.	Variación conceptual y procedimental **Contraste** Variación simbolica e iconica **Separación** Variación en las características críticas de los coeficientes *a, b* y del término independiente *c*. **Generalización** Variando los diferentes procesos de solución de un problema y asociando diferentes métodos de solución. **Fusión** Conocimiento simultáneo de las características críticas de los coeficientes y las posibilidades de resolución para obtener una solución particular y el modelo general.	Hojas de trabajo Computadora Calculadora Geogebra
Videos Tutoriales	https://youtu.be/s5MOQ197X2w	

Tabla 3.27. Patrones de variación en el quinto episodio de enseñanza

Finalmente, en la tercera tabla que aparece a continuación se muestra las expectativas o los aprendizajes previstos (en términos de la contrastación y/o el discernimiento) y relación con el contenido de la Tarea 5A.

Tiene Sol. vs No tiene Sol. **Encontrar una solución particular** **¿Cuántas soluciones tiene la ecuación? *(modelo general)***	**El alumno debe contrastar y/o discernir**
$3x+5y=4$	Modelizar el problema
	Una ecuación de primer grado con dos incógnitas (del tipo general).
	Tiene soluciones enteras

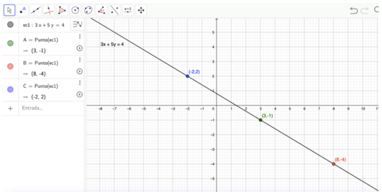
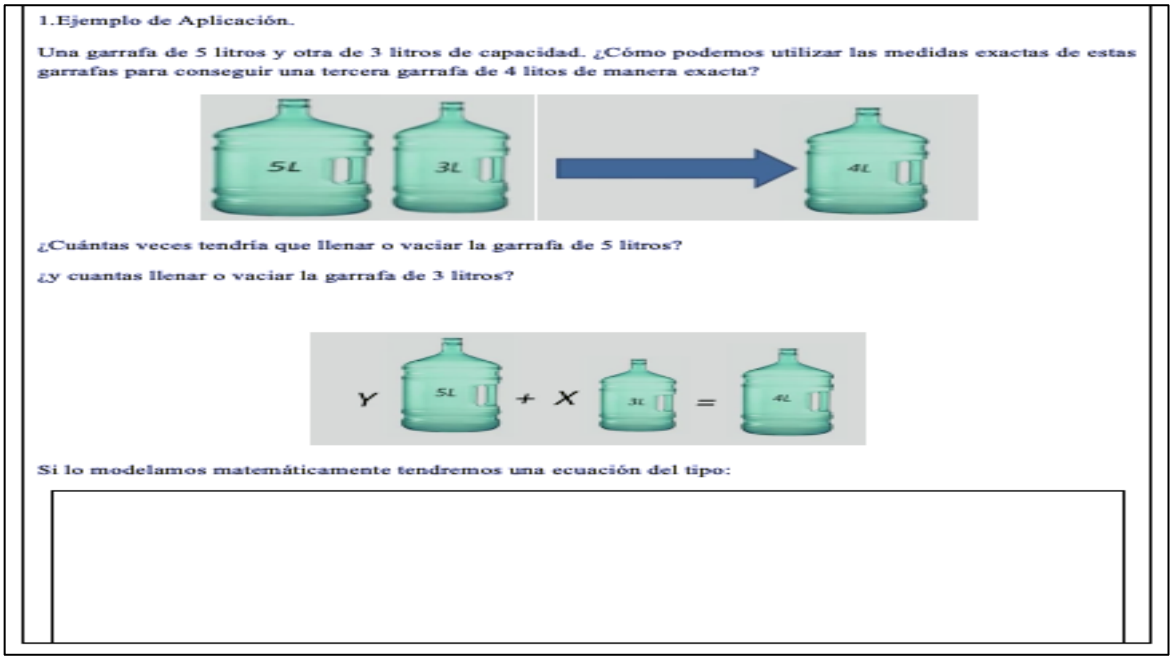
<table>
<tr>
<td>Cifras terminales
3x+5y=4
2 [3x+5y=4]
6x + 10y = 8
…8 …0 …8
6(3) + 10(-1) =8
18 - 10 = 8</td>
<td>
ec1 : 3 x + 5 y = 4
A = Punto(ec1) → (3, -1)
B = Punto(ec1) → (8, -4)
C = Punto(ec1) → (-2, 2)
 </td>
<td>Aplicar cualquier procedimiento (por ejemplo, la representación icónica, mediante el uso de Geogebra o símbolica mediante el criterio de cifras terminales), para obtener una solución particular..</td>
</tr>
<tr>
<td>Solución particular
$x_0 = 3$ $y_0 = -1$</td>
<td>Punto A (3, -1)
Punto B (8, -4)
Punto c (-2, 2)</td>
<td>Discernir que significa la “y” positiva y negativa.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Modelo general
$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{\text{mcd}(a,b)}t \\ y = y_0 - \frac{a}{\text{mcd}(a,b)}t \end{cases}$
Solución particular $x_0 = 3$ $y_0 = -1$
$x = 3 + \frac{5}{1}t$ x = 3 + 5t
$y = -1 - \frac{3}{1}t$ y = -1 - 3t</td>
<td>Aplicar la solución particular para obtener el modelo general y así otras soluciones enteras.</td>
</tr>
</table>

Tabla 3.28. El contenido de la Tarea 5A en relación contrastación o discernimiento

En concreto, todas las consideraciones teóricas enunciadas, quedaron finalmente vertidas en hojas simples de trabajo para los estudiantes, de las cuales en seguida, se muestra un extracto (ver las hojas de trabajo completas en el anexo 1).



1. Ejemplo de Aplicación.

Una garrafa de 5 litros y otra de 3 litros de capacidad. ¿Cómo podemos utilizar las medidas exactas de estas garrafas para conseguir una tercera garrafa de 4 litos de manera exacta?

¿Cuántas veces tendría que llenar o vaciar la garrafa de 5 litros?

¿y cuantas llenar o vaciar la garrafa de 3 litros?

Si lo modelamos matemáticamente tendremos una ecuación del tipo:

Figura 3.21. Extracto de las hojas de trabajo asociadas a la tarea 5A

3.4.6.2 DISEÑO DE LA TAREA 5B

Durante los últimos años, la enseñanza de las matemáticas en México ha experimentado cambios significativos; debido a las reformas educativas llevadas acabo en nuestro país, algunas características típicas de la educación matemática en el bachillerato se caracterizan por enseñar contenidos difíciles, enfatizando el rigor, la abstracción y la aplicación de las matemáticas sin contexto. Sin embargo, como resultado de la reforma educativa (INEE, 2017) en México, los contenidos de enseñanza están cambiando gradualmente para adaptarse al interés de los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas y para relacionarse con la vida real.

En ese sentido**,** partimos de la idea de que los objetos matemáticos son por naturaleza abstractos y que debemos atender a su complejidad. Para llevar a cabo esta tarea presentamos a nuestros estudiantes un problema modelizable mediante una ecuación diofántica lineal.

Estas situaciones favorecen, entre otras cosas, la construcción de las nociones de variable y generalización y ponen a los estudiantes en mejores condiciones para abordar lo algebraico. Sin embargo, la ecuación propuesta en esta tarea (del tipo, general) tiene una característica crítica que los estudiantes tienen que discernir la cuál limita a considerar obtener soluciones en números enteros positivos.

En las tres tablas que aparecen a continuación (tabla 3.29, 3.30 y 3.31) se muestra un bosquejo detallado de las diferentes componentes de la tarea 5B. Empezando por detallar cuáles fueron los aspectos y características criticas para determinar cuando una ecuacion diofántica lineal tiene solución y en caso de tenerla como encontrar una solución entera particular y finalmente obtener el modelo general que nos permita obtener todas las soluciones enteras.

Aprendizaje Previsto	Contenido	Evidencias
Discernir cuando una ecuación del tipo $ax + by = c$, en la que a y b son números enteros diferentes de cero y c un número entero cualquiera, tiene solución entera.	**Aspecto crítico** Tiene Sol. **vs** No tiene Sol. Encontrar una solución particular Encontrar otras soluciones	Soluciones escritas de los alumnos en las hojas de trabajo.
Discernir la característica crítica que limita a obtener sólo soluciones enteras positivas.	**Características críticas** Ec. diofántica general	Fotografías.
Encontrar una solución (*solución particular)*	Ecuación $2x+5y= 78$	
Encontrar otras soluciones (*modelo general*)	M.C.D de (2**, 5**)	

Tabla 3.29. Aspectos y características críticas para la aplicación de las ecuaciones diofánticas lineales

En la siguiente tabla, se muestra la relación pedagógica entre los patrones de variación durante la segunda parte del quinto episodio de enseñanza.

Actividades de enseñanza-aprendizaje	**Patrones de Variación**	**Materiales y recursos didácticos**
Encontrar la ecuación que modeliza el problema. Determinar si la ecuación propuesta tiene solución en números enteros. Encontrar el M.C.D de (a, b). Aldo ingresa a una papelería para comprar lápices de 2 pesos y correctores de 5 pesos; él dispone de 78 pesos para realizar dicha compra. Indique el número de formas que Aldo puede comprar, gastando todo el dinero que tiene, si debe comprar al menos un artículo de cada tipo. Elaborar la gráfica de la ecuación Emcontar una solución (solución particular) Encontrar otras soluciones (modelo general)	Variación conceptual y procedimental **Contraste** Variación simbolica e iconica **Separación** Variación en las características críticas de los coeficientes *a, b* y del término independiente *c*. **Generalización** Variando los diferentes procesos de solución de un problema y asociando diferentes métodos de solución (considerando la resticción a números enteros positivos). **Fusión** Conocimiento simultáneo de las características críticas de los coeficientes y las posibilidades de resolución para obtener una solución particular y el modelo general.	Hojas de trabajo Computadora Calculadora Geogebra Excel
Videos Tutoriales	https://youtu.be/C_h-mGMXvm4	

Tabla 3.30. Patrones de variación en el quinto episodio de enseñanza

Finalmente, en la tercera tabla que aparece a continuación se muestra las expectativas o los aprendizajes previstos (en términos de la contrastación y/o el discernimiento) y relación con el contenido de la Tarea 5B.

Tiene Sol. vs No tiene Sol. **Encontrar una solución particular** **¿Cuántas soluciones tiene la ecuación? *(modelo general)***	**El alumno debe contrastar y/o discernir**
2x+5y= 78	Modelizar el problema
	Una ecuación de primer grado con dos incógnitas (del tipo general).
	Tiene soluciones enteras
	Discernir que el problema limita a obtener soluciones en números enteros positivos.

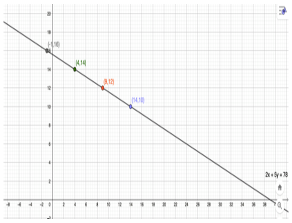
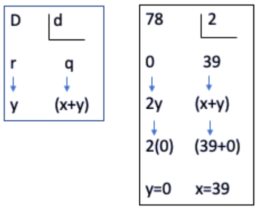
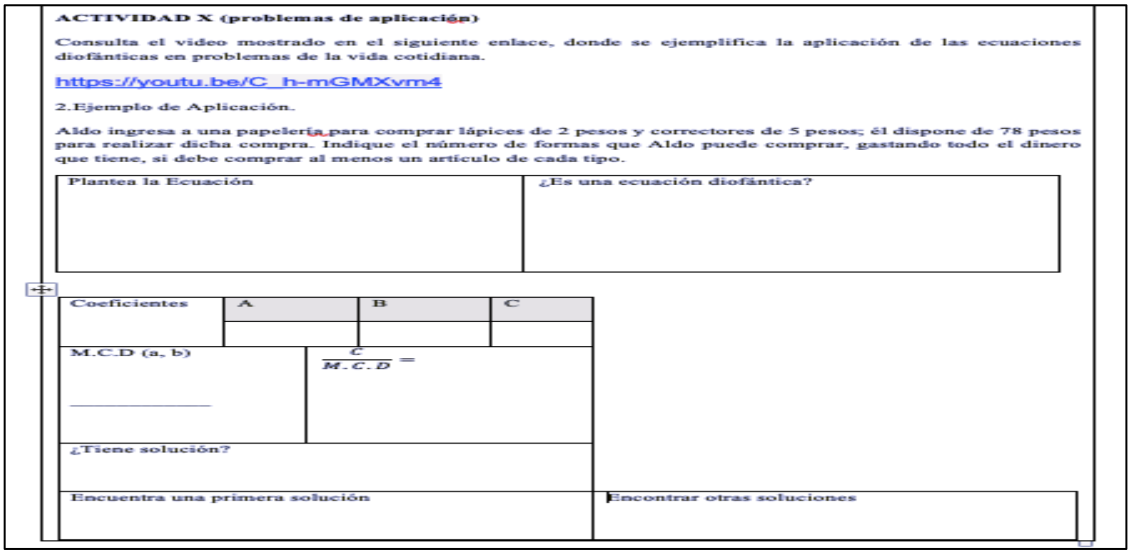
Cifras terminales	Gráfico	Criterio de la division	
$2x + 5y = 78$ $2\,[2x+5y= 78]$ $4x + 10y = 156$ …6 …0 …6 $4(9) + 10(12) = 156$ $36 + 120 = 156$ Solución particular $x_0 = 9 \quad y_0 = 12$	 Punto A (9, 12) Punto B (14, 10) Punto C (4, 14) Punto D (-1, 16)	Caso 2: $b > a$ $2x + 5y = 78$ $2x+(2y+ 3y) = 78$ $2(x+y)+3y = 78$ 	Aplicar cualquier procedimiento (la representación icónica, mediante el uso de Geogebra o símbolica), para obtener una solución particular (entera).
Modelo general $\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{\mathrm{mcd}(a,b)}t \\ y = y_0 - \frac{a}{\mathrm{mcd}(a,b)}t \end{cases}$ Solución particular $x_0 = 9 \quad y_0 = 12$ $x = 9 + \frac{5}{1}\,t \qquad x = 9 + 5t$ $y = 12 - \frac{2}{1}\,t \qquad y = 12 - 2t$			Aplicar la solución particular para obtener el modelo general y así otras soluciones enteras.

Tabla 3.31. El contenido de la Tarea 5B en relación contrastación o discernimiento

En concreto, todas las consideraciones teóricas enunciadas, quedaron finalmente vertidas en hojas simples de trabajo para los estudiantes, de las cuales en seguida, se muestra un extracto (ver las hojas de trabajo completas en el anexo 1).



ACTIVIDAD X (problemas de aplicación)

Consulta el video mostrado en el siguiente enlace, donde se ejemplifica la aplicación de las ecuaciones diofánticas en problemas de la vida cotidiana.

https://youtu.be/C_h-mGMXvm4

2.Ejemplo de Aplicación.

Aldo ingresa a una papelería para comprar lápices de 2 pesos y correctores de 5 pesos; él dispone de 78 pesos para realizar dicha compra. Indique el número de formas que Aldo puede comprar, gastando todo el dinero que tiene, si debe comprar al menos un artículo de cada tipo.

Plantea la Ecuación	¿Es una ecuación diofántica?

Coeficientes	A	B	C

M.C.D (a, b) ______________

$\frac{C}{M.C.D} =$

¿Tiene solución?

Encuentra una primera solución

Encontrar otras soluciones

Figura 3.22. Extracto de las hojas de trabajo asociadas a la tarea 5B

La aportación de este estudio es la propuesta y puesta a prueba de actividades de enseñanza-aprendizaje, sobre la enseñanza de resolución en números enteros de ecuaciones diofánticas lineales con dos incógnitas (EDL) a través de la conjunción de la teoría de la variación de Marton (2015), las unidades de discernimiento de Leung (2012) y de la metodología del experimento de enseñanza (Cobb et al. 2003), que incluyeron contrastes, variaciones y andamiajes cuidadosamente planeados.

Del análisis y diseño de los anteriores episodios de enseñanza se desprende que el funcionamiento científico y razonable de la enseñanza de las ecuaciones diofánticas lineales con variaciones radica en la comprensión adecuada de los aspectos y características críticas, de la *orientación de la variación, tipos de variación, niveles de variación y exploración de la variación*.

Al realizar la enseñanza con base a la teoría de la variación, se requiere que el maestro reconozca en qué nivel de pensamiento se encuentran los estudiantes y que sepa qué características de representación tienen los estudiantes. Este es el punto de partida para la enseñanza. En segundo lugar, se requiere que el maestro analice los aspectos criticos "variables e invariables" de lo que enseñará, es decir, los principios del concepto, las formas de pensar, etc. En tercer lugar, se requiere que el maestro comprenda las formas "variables e invariables" de pensar de los estudiantes, es decir, el mapeo de conjuntos, la relación de variables, el análisis de los programas, etc., en el aprendizaje de los aspectos críticos *variables e invariables*.

Finalmente, se requiere que tanto el profesor como los estudiantes utilicen un escenario razonable de "cambio de lo variable" en el menor tiempo posible, para motivar el desarrollo de los estudiantes desde las *representaciones concretas* a las *representaciones abstractas* para lograr eficazmente sus objetivos de aprendizaje, es decir, la captación y reflexión de los aspectos críticos *variables e invariables*, cualquier negligencia conducirá a la condición de *cambiar sólo para cambiar*.

CAPITULO IV. OBTENCIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS

Esta investigación se llevó a cabo a través de la conjunción de la teoría de la variación Marton, F. (2015) y de la metodología del experimento de enseñanza (Cobb et al. 2003) que fue parte del estudio, diseño e implementación de las actividades propuestas de enseñanza-aprendizaje.

En un primer momento la investigación se enfocó en el estudio, análisis y diseño de un conjunto de tareas, es decir tareas de aprendizaje que requirieron agrupar aspectos críticos (dimensiones de variación) del objeto de apendizaje (resolución de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas en números enteros) que, a su vez, tomaron valores (no necesariamente numéricos) que variaron, llamados características críticas.

En un segundo momento el trabajo se enfocó en la implementación del conjunto de tareas con los estudiantes. Para ello, se empleó una metodología constructivista a través de experimentos de enseñanza, según lo descrito por Cobb y Steffe (1983).

Por su parte, Kullberg, Kempe y Marton (2017), señalan que, mediante el análisis de las actividades de enseñanza-aprendizaje bajo el marco de la Teoría de la Variación se puede identificar lo que fue más fácilmente discernible por el estudiante, por haber sido adecuadamente enfocado y tematizado, y lo que no.

La Teoría de la Variación permitió, en primera instancia, centrarnos en el objeto de aprendizaje (la resolución en números enteros de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas) para diseñar e implementar tareas de enseñanza-aprendizaje de manera adecuada para buscar aprendizajes basados en la reflexión y que proporcionaran a los estudiantes experiencias significativas de discernimiento[3] de los aspectos y caracteríticas críticas, que apareecen en el aprendizaje de la resolución en números enteros de las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, mediante la presentación de los patrones de variación señalados

---

[3] Según el diccionario Merriam Webster (ver https://www.merriam-webster.com/dictionary/discern), ¨discern¨ tiene varias acepciones, entre ellas reconocer y percibir. De acuerdo con Leung (2012), "el discernimiento de características críticas ocurre bajo una sistemática interacción entre el que aprende y el objeto que será aprendido, y la variación es el agente que genera tal interación". (Referido por Leung a Marton, Runesson, & Tsui, 2004). Esto es, el discernimiento se pordíra definir como una experiencia de aprendizaje en donde tiene lugar una sistemática interacción entre el que aprende y el objeto por aprender, y en donde la variación es el agente que genera tal interacción.

por Marton (2015 p.49) a saber el contraste, la separación, la generalización y la fusión (ver página, 11).

En ese sentido, Marton (2015) considera que la gran mayoría de las fallas al entender el objeto de aprendizaje derivan de que el estudiante no observó diferencias que era necesario que percibiera. También advierte que, si bien el entendimiento no provoca una acción, una acción expresa el entendimiento.

Esto puede interpretarse como que los procedimientos de respuesta de los estudiantes a las tareas muestran las estructuras de variación del objeto de aprendizaje que discernieron y los procedimientos resolución que eligieron debido a dicho discernimiento. En sintesis, los procedimientos de respuesta de los estudiantes a las tareas diseñadas permiten identificar y caracterizar los diferentes niveles cognitivos estructurales del aprendizaje de los estudiantes en torno a la resolución en números enteros de las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, en particular de acuerdo a la taxonomia SOLO (Structure of the Observed Learning Outcome) propuesta por Biggs y Collins (1982).

El objeto de aprendizaje matemático principal en esta tesis es la búsqueda de las soluciones enteras (particular y general) de las ecuaciones diofanticas lineales del tipo ax + by = c*,* donde *a* y *b* son números enteros diferentes de cero y *c* un número entero cualquiera.

De este modo, el aprendizaje previsto en el conjunto de tareas de aprendizaje, es que los alumnos disciernan los aspectos criticos avanzando en el reconocimiento de las características críticas que a su vez abren diferentes dimensiones de variación y tipos de procedimientos o de trabajo matemático. Por ejemplo, el desarrollo de las propiedades de los números enteros y el algoritmo de Euclides son características críticas que es necesario que el estudiante aprenda a discernir para llegar a responder las siguientes preguntas*:*

1. ¿Cómo son los coeficientes en una **ecuación diofántica lineal** con dos incógnitas?
2. ¿Cuándo tiene solución entera? (M.C.D de (a, b))
3. En caso de tener solución, ¿cómo encontrarla? (Solución particular)
4. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación? (Modelo general)

En este capítulo cuatro se presenta y analiza todo lo elaborado por los alumnos en las hojas de trabajo. El diseño de las hojas de trabajo resultó de la aplicación de la teoría de la variación, la cuál de hecho también se aplica al análisis de las respuestas o procedimientos de los estudiantes. Además, tales respuestas y procedimientos permiten llevar a cabo una clasificación, utilizando la taxonomía SOLO, para identificar refinamientos y validación de concepciones sobre el objeto de estudio, logradas o incluidas en el aprendizaje previsto.

4.1 ANÁLISIS DE LOS DATOS

Leung (2012) propuso la idea de una unidad de discernimiento que representa una unidad de un proceso pedagógico impulsado por los cuatro tipos de conciencia (C, S, G y F) provocados en una interacción de variación. Según Leung, en una situación pedagógica, estos cuatro tipos de interacción de variación actúan juntos de manera concertada para generar discernimiento, como se muestra en la Figura 4.1.

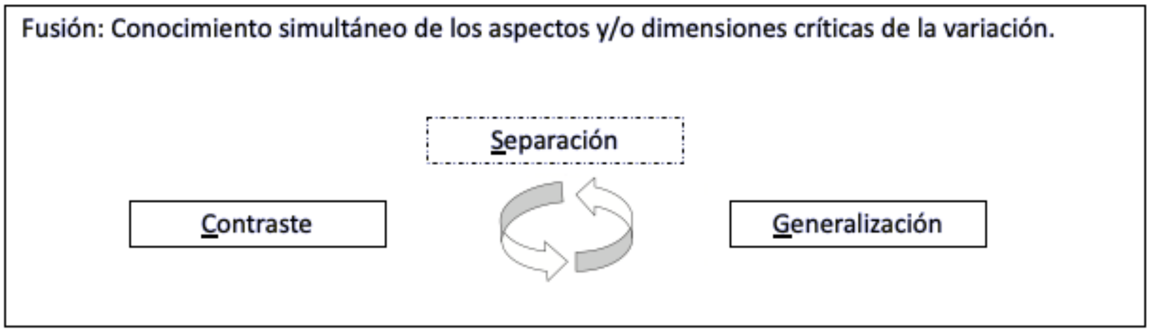


Figura 4.1. Una unidad de discernimiento impulsada por los tipos de interacción de variación

A continuación en la siguiente figura se presentan las cinco unidades de discernimiento que consideramos en este trabajo de tesis para la enseñanza de las ecuaciones diofánticas lineales con dos incógnitas apoyandonos en la extensión de la teoría de la variación hecha por Leung (2012).

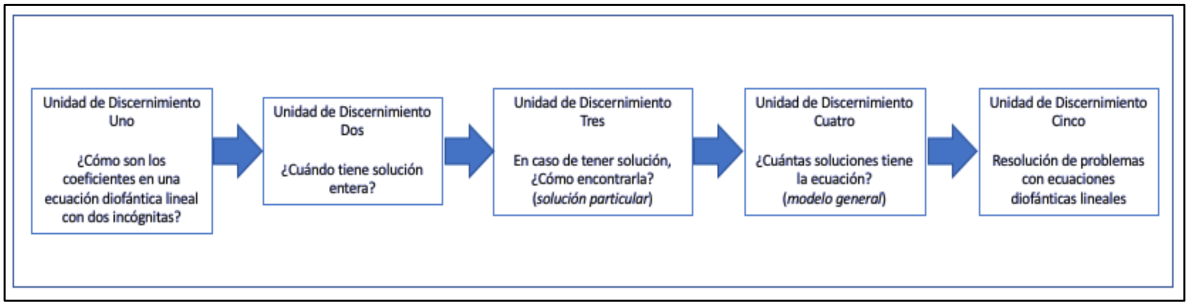


Figura 4.2. Unidades de discernimiento

Los datos obtenidos se analizaron para dar cuenta del nivel cognitivo estructural (a partir de la taxonomía SOLO) de su aprendizaje (aprendizaje vivido). La clasificación SOLO permitió identificar el nivel de estructura cognitiva de los estudiantes (en parejas) de la resolución en números enteros de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas de cada equipo de estudiantes.

En esta organización estructural del conocimiento, Biggs y Collis (1988) distinguen diferentes niveles de complejidad, a saber *Preestructural, Uniestructural, Multiestructural, Relacional y Abstracto Extendido*, que permiten analizar la calidad del aprendizaje desde los niveles más concretos hasta los más abstractos y complejos.

Los niveles más elevados de la taxonomía corresponden a un aprendizaje más profundo, a una interpretación personal del contenido que relaciona la tarea con situaciones alejadas del contexto inmediato, que establece relaciones con otros conocimientos relevantes y con materiales procedentes de diferentes fuentes de información. Contrariamente, los niveles inferiores de la taxonomía SOLO corresponden al tratamiento de la información de manera aislada y reproductiva.

Dicha taxonomía tiene las siguientes categorías:

- Pre-estructural: el estudiante aún no comprende.
- Uniestructural: identifica sólo un aspecto del concepto.
- Multiestructural: identifica varios aspectos del concepto, pero no tiene aún una visión completa.
- Relacional: tiene una visión completa del concepto conformada por los diferentes aspectos del concepto.

A medida que los estudiantes aprenden, los resultados de su aprendizaje muestran fases similares de creciente complejidad estructural. “Hay dos cambios principales -dice Biggs- los cuantitativos, a medida que aumenta la cantidad de detalles principales en la respuesta de los estudiantes y los cualitativos, a medida que los detalles se integran a un modelo estructural. Las fases cuantitativas del aprendizaje se producen primero; después, el aprendizaje cambia cualitativamente”.

4.1.1. UNIDAD DE DISCERNIMIENTO UNO

¿Cómo son los coeficientes en una ecuación diofántica lineal con dos incógnitas?

Hay muchos estudios que muestran que el concepto de ecuación es un desafío para los estudiantes (no sólo en bachillerato) debido a su incapacidad para operar espontáneamente con o sobre lo desconocido (Herscovics y Linchevski 1994; Sadovsky y Sessa 2005) y también debido a su malentendido del signo igual como un operador, es decir, como una señal para "hacer algo" en lugar de un símbolo relacional de equivalencia o igualdad de cantidades (Behr et al. 1980).

Por lo que, una pedagogía matemática que se basa en la variación es aquella que proporciona intencionalmente a los alumnos los medios para experimentar la variación a través de actividades diseñadas estratégicamente con el fin de crear un entorno de aprendizaje matemáticamente rico (Leung, 2010) que permite a los alumnos discernir el objeto de aprendizaje. El *objeto de aprendizaje* es un término especial en la teoría de la variación y no significa lo mismo que *objetivos de aprendizaje*, que apuntan al final del proceso de aprendizaje.

En cambio, el objeto de aprendizaje apunta al comienzo del proceso de aprendizaje y generalmente se refiere al foco de una situación de enseñanza, aquello a lo que se dirige el aprendizaje, es decir, *lo que se va a aprender* (Ling, 2012). Se define por sus aspectos críticos que deben ser discernidos para constituir el significado que se busca (Marton & Tsui, 2004). Entonces, como enfoque pedagógico, los patrones de variación son herramientas útiles para estructurar una enseñanza que haga posible el discernimiento del objeto de aprendizaje.

Marton (2009) describe la conciencia provocada por experimentar la diferencia (variación) como un contraste entre dos valores distintos. Una observación realizada por Ling (2012) fue que los profesores tenían una tendencia a poner mucho énfasis en el uso de ejemplos para mostrar similitudes. Sin embargo, según la teoría de la variación, basarse únicamente en las similitudes no es suficiente.

El contraste, por tanto, presupone que para saber lo qué es algo, hay que saber qué no es, es decir, discernir si algo satisface una determinada condición o no (Leung, 2012). La variación se trata de que los estudiantes perciban lo que cambia, lo que se mantiene constante y la regla subyacente que se percibe en el proceso (Leung, 2012).

ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES A LA TAREA 1[4]

Experiencia de Aprendizaje

Según Marton (2009), el contraste es una conciencia provocada por la experiencia de la diferencia. En el diseño de la Tarea 1, se trata de generar una conciencia provocada por una variación en un patron de contraste, en el sentido de que el maestro (quien esto escribe) proporciona tres pares diferentes de expresiones algebraicas (primera parte de la Tarea 1) para permitir a los alumnos discernir que una ecuación de primer grado con dos incógnitas y coeficientes enteros (*a, b* y *c*) no es lo mismo que aquella con una sola o más incógnitas, donde sus coeficientes no todos son números enteros y donde sus incógnitas no tienen exponentes mayores a 1.

Una vez que los estudiantes hacen esta distinción[5], se avanza hacia un 'contraste refinado' o separación (segunda parte de la Tarea 1), en donde el profesor atrae selectivamente la atención de los estudiantes ahora hacia la forma de escritura de las expresiones algebraicas. Al variar sistemáticamente las expresiones algebraicas, el signo de la operación y finalmente el exponente de una de las incógnitas, los alumnos van a poder (hipótesis) separar las características críticas de las expresiones que si corresponden a una ecuación de primer grado con dos incógnitas. De manera similar, dentro de la forma y estructura de las expresiones, los estudiantes van a poder separar y discernir rescribirla en el formato estándar, a saber, ax + by = c.

Por otro lado, la generalización es una actividad de verificación y elaboración de conjeturas que permite a los estudiantes comprobar la validez general de un patrón separado

---

[4] Ver tarea 1 en las hojas de trabajo para los estudiantes, las cuales aparecen en el Anexo 1 de esta tesis.

[5] Distinción basada en el reconocimiento de la estructura de las ecuaciones lineales, la palabra estructura en matemáticas se utiliza en ocasiones para referir a un conjunto cerrado bajo una o varias operaciones, cumpliendo varios axiomas. Según Castro, Rico y Romero (1997, p.362) este término consiste en “un conjunto de entes abstractos expresados simbólicamente, dotado de unas operaciones o modos de componerlos y de unas relaciones mediante las que se comparan dichos entes”. Desde un punto de vista más amplio, se puede decir que, en matemáticas, el término estructura se refiere a la forma en que una entidad se compone de partes, existiendo conexiones o relaciones entre las partes que componen dicha entidad (Hoch y Dreyfus, 2004).

(Leung 2012, p.435). En este caso, después de observar los vínculos entre la diferencia de la estructura de las expresiones algebraicas, se espera que los alumnos logren generalizar que la determinación de una ecuación de primer grado con dos incógnitas empieza por escribirla en el formato estándar ax + by = c.

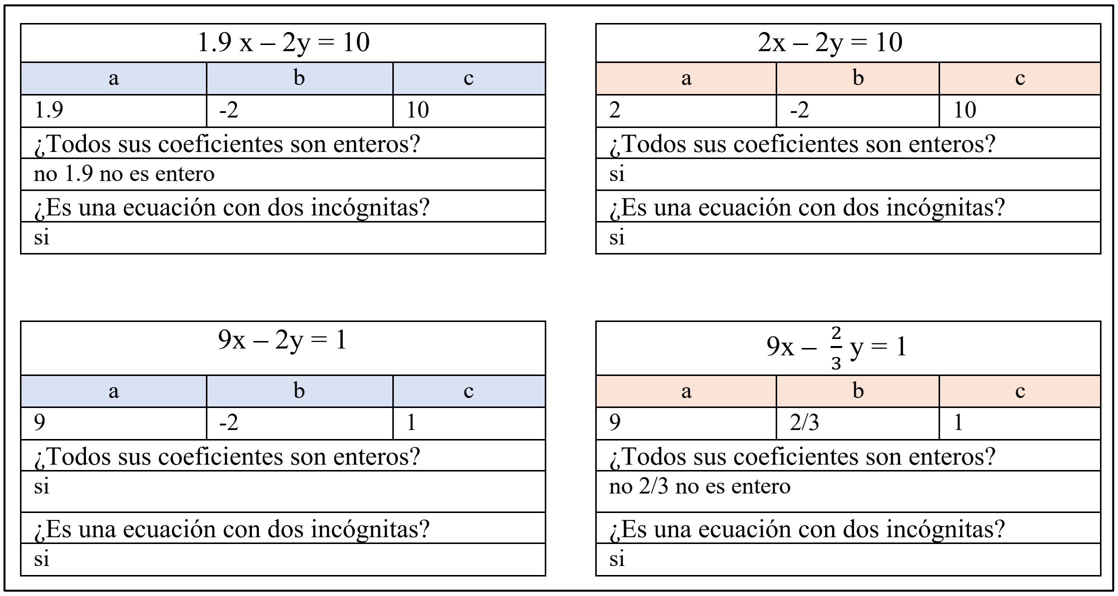
Finalmente, de acuerdo con Leung (2012, p.435), la fusión integra las características críticas o dimensiones de variación en un todo bajo una covariación simultánea. Al fusionar las características críticas separadas, puede aparecer un concepto completo. De tal manera que en la tercera parte de la Tarea 1, la variación se centró primero en la forma de escritura de las expresiones algebraicas y después en el cambio del exponente de alguna de las incógnitas.

Con ello, el maestro abre dimensiones de variación para que los alumnos integren (de ahí la fusión, F), a través del discernimiento, los aspectos críticos de esta tarea. Esto es, se reconoce la estructura algebraica de las expresiones, se identifican las manipulaciones (p.e simplificar, reducir términos semejantes, etc) que es posible realizar sobre ellas, considerando su estructura, y se elige la más eficiente de todas, la que les permita obtener el formato estándar ax + by = c, y de esa manera determinar si los coeficentes *a, b* y *c* son enteros y si se trata de una ecuación de primer grado con dos incógnitas.

Las respuestas que dieron los estudiantes en esta Tarea 1, se analizaron y se presentan enseguida para dar cuenta de los aspectos y características crítcas que lograron discernir. En ese sentido, encontramos que, después de experimentar en la primera parte de la tarea con tres pares de ecuaciones, los equipos E1, E3, E4, E6, E7 y E8 pudieron identificar los coeficientes *a* y *b*, así como el término independiente *c*, demostrando que discernieron con éxito la estructura de las ecuaciones, esto es, los elementos que la conforman y las relaciones entre ellos.

De igual manera, lograron dicernir si los coeficientes son enteros y si se trata de una ecuación de primer grado con dos incógnitas. Algunas de las respuestas de los equipos E1 (Nadia y Dafne) y E8 (Yarinka y Gabriel). Aparecen enseguida, en las figuras 4.3 y 4.4. Nótese que las respuestas del Equipo 1 (E1) están escritas con un procesador de texto y las del Equipo 8 (E8) aparecen escritas a mano.

Esto es así porque las integrantes del E1 tuvieron a la mano una computadora para hacer el trabajo y también lo entregaron por medio de un email. En cambio el E8 respondió las hojas de trabajo a mano y las entregaron personalmente. En efecto, ambas posibilidades ocurrieron: (i) por un lado la utilización de un equipo de cómputo, conectado a Internet; y, (ii) por otro lado, el trabajo hecho a mano y entrega presencial del producto, las cuales caraterizaron el trabajo de los estudiantes en proporciones 3/8 para el caso (i) de utilización de una computadora y conexión a Internet, y 5/8 para el caso (ii) de llenado a mano y entrega presencial del producto.



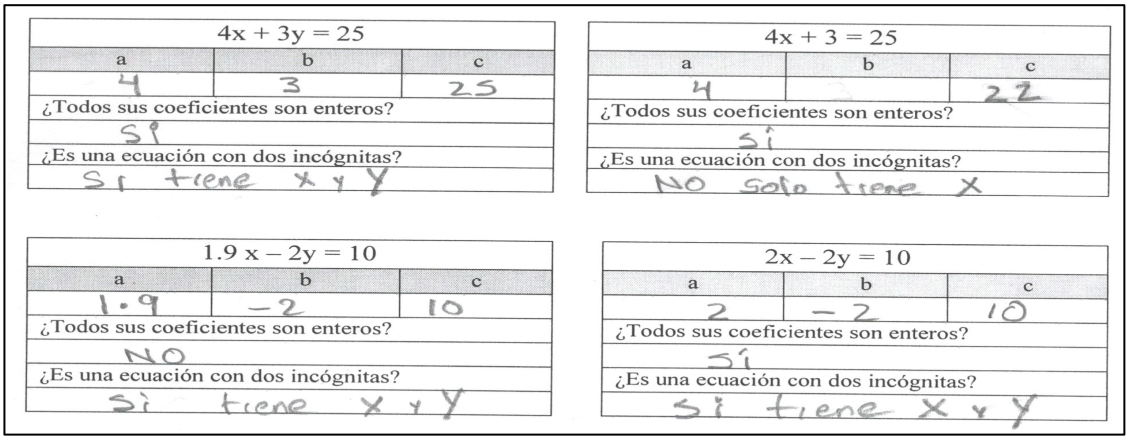
1.9 x – 2y = 10		
a	b	c
1.9	-2	10
¿Todos sus coeficientes son enteros?		
no 1.9 no es entero		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		
si		

2x – 2y = 10		
a	b	c
2	-2	10
¿Todos sus coeficientes son enteros?		
si		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		
si		

9x – 2y = 1		
a	b	c
9	-2	1
¿Todos sus coeficientes son enteros?		
si		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		
si		

$9x - \frac{2}{3} y = 1$		
a	b	c
9	2/3	1
¿Todos sus coeficientes son enteros?		
no 2/3 no es entero		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		
si		

Figura 4.3. Respuesta de Nadia y Dafné (E1)



4x + 3y = 25		
a	b	c
4	3	25
¿Todos sus coeficientes son enteros?		
Sí		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		
Si tiene x y Y		

4x + 3 = 25		
a	b	c
4		22
¿Todos sus coeficientes son enteros?		
Sí		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		
NO solo tiene X		

1.9 x – 2y = 10		
a	b	c
1.9	-2	10
¿Todos sus coeficientes son enteros?		
NO		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		
Sí tiene x y Y		

2x – 2y = 10		
a	b	c
2	-2	10
¿Todos sus coeficientes son enteros?		
Sí		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		
Sí tiene X y Y		

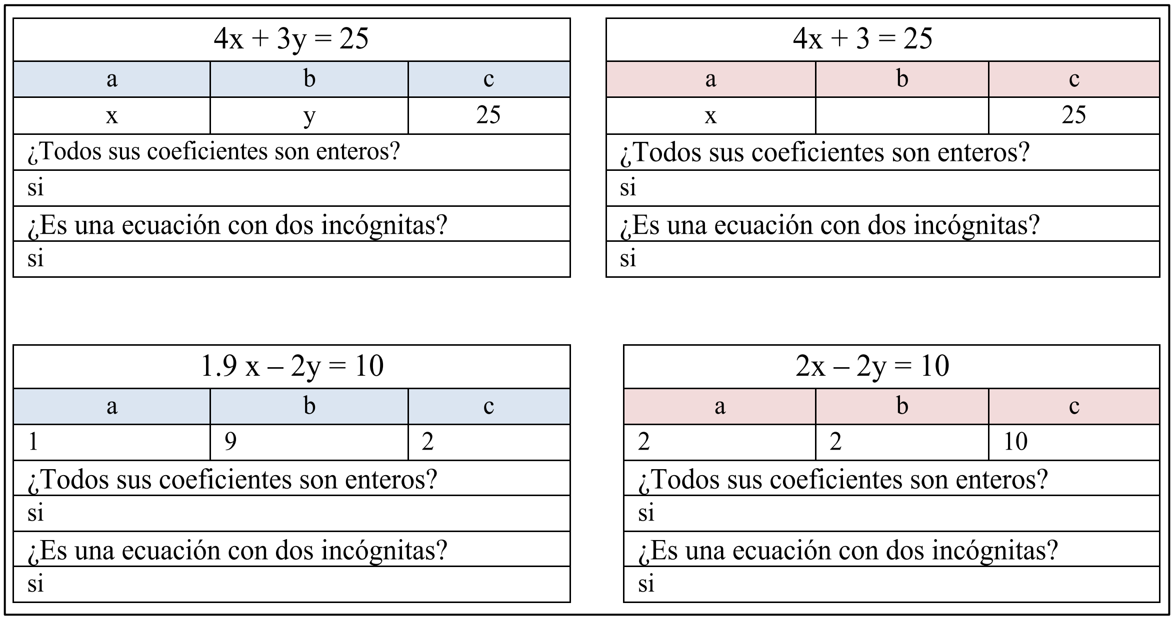
Figura 4.4. Respuesta de Yarinka y Gabriel (E8)

En relación con el discernimiento de los coeficientes enteros en una ecuación de primer grado con dos incógnitas (por parte de los estudiantes), Sfard (2001, p.111) considera que, si ser capaz de ver la estructura es útil en cualquier dominio del conocimiento, en matemáticas puede considerarse la esencia misma del aprendizaje.

En el caso de los equipos 2 (formado por América y Eduardo) y 5 (formado por Sergio y Jesús), sus respuestas muestran que no logran discernir adecuadamente los coeficientes *a*, *b* y el término independiente *c* en la mayoria de los casos, pues los integran con las variables o incógnitas de las ecuaciones, tomando el coeficiente y la incógnita o variable como un sólo término.

Tampoco focalizan su atención en la variación de las características críticas de las ecuaciones, a saber, la que se lleva acabo al hacer variar los coeficientes (enteros vs no enteros) y la estructura de las ecuaciones.

Al parecer, no establecen conexiones adecuadas entre sus conocimientos previos y el nuevo de las matemáticas, en este caso del álgebra. Por lo que, no logran discernir correctamente en que casos si se trata de una ecuación de primer grado con dos incógnitas y con coeficientes enteros. Las respuestas obtenidas en esta primera sección de preguntas de la Tarea 1, se presentan enseguida en las figuras 4.5 y 4.6.



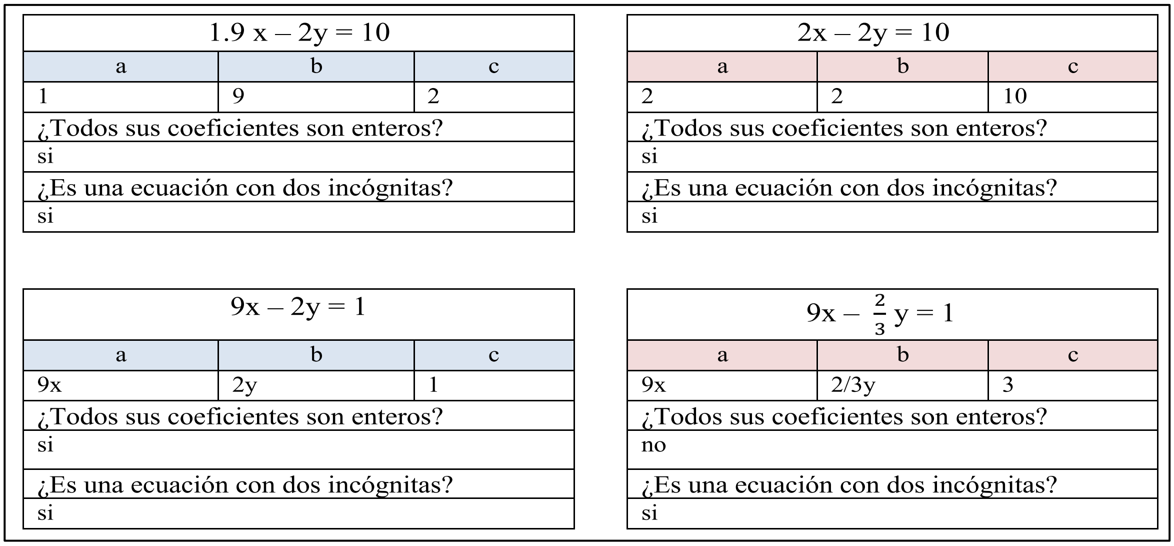
$4x + 3y = 25$		
a	b	c
x	y	25
¿Todos sus coeficientes son enteros?		
si		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		
si		

$4x + 3 = 25$		
a	b	c
x		25
¿Todos sus coeficientes son enteros?		
si		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		
si		

$1.9\ x – 2y = 10$		
a	b	c
1	9	2
¿Todos sus coeficientes son enteros?		
si		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		
si		

$2x – 2y = 10$		
a	b	c
2	2	10
¿Todos sus coeficientes son enteros?		
si		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		
si		

Figura. 4.5. Respuesta de America y Eduardo (E2)



1.9 x – 2y = 10		
a	b	c
1	9	2
¿Todos sus coeficientes son enteros?		
si		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		
si		

2x – 2y = 10		
a	b	c
2	2	10
¿Todos sus coeficientes son enteros?		
si		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		
si		

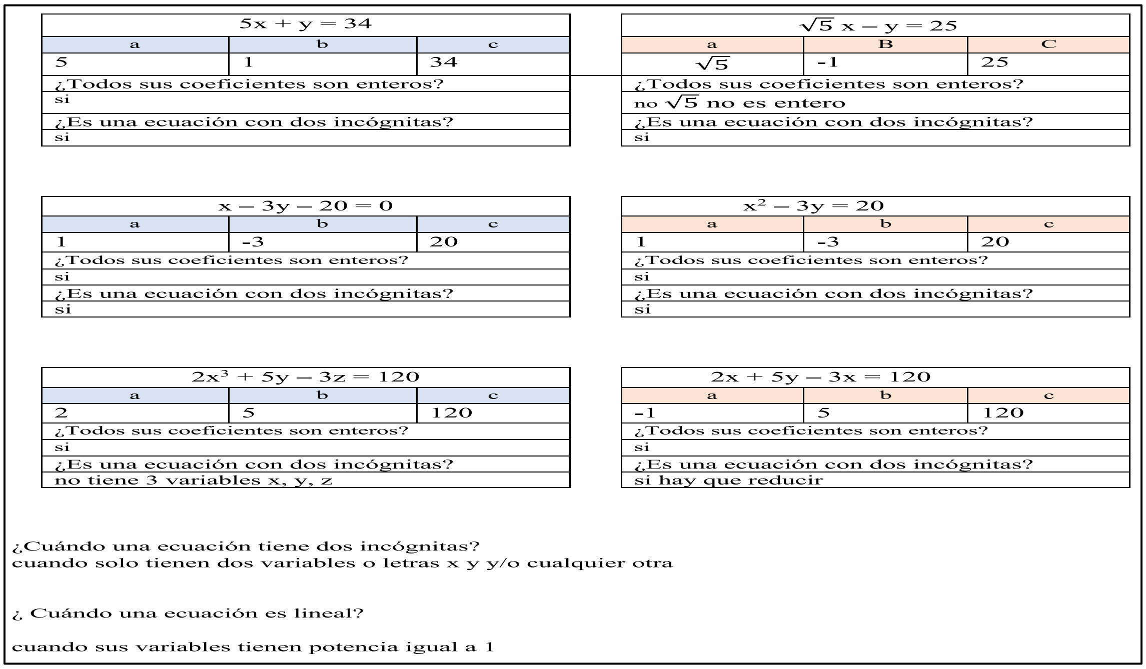
9x – 2y = 1		
a	b	c
9x	2y	1
¿Todos sus coeficientes son enteros?		
si		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		
si		

9x – $\frac{2}{3}$ y = 1		
a	b	c
9x	2/3y	3
¿Todos sus coeficientes son enteros?		
no		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		
si		

Figura 4.6 Respuesta de Sergio y Jesús (E5)

En la segunda parte de la Tarea 1, se presenta a los estudiantes nuevamente tres pares de ecuaciones algebraicas, en conjunto con contrastes más refinados, que permitieron avanzar en la separación de las características críticas de las ecuaciones y una mejor focalización de la estructura de las ecuaciones. En este caso, se realizan variaciones en los coeficientes *a, b* y el término independiente *c*, así como en la forma de escritura de las ecuaciones, además del exponente de una de las incógnitas en dos de las ecuaciones propuestas. De tal manera, que es sumamente importante que el alumno focalice su atención en observar con cuidado la variación en la estructura de las ecuaciones, la reconozca y la relacione con las manipulaciones que son válidas para ella.

Del análisis de las respuestas obtenidas de los estudiantes, tenemos que los equipos E1, E6 y E8 no sólo lograron identificar los coeficientes *a, b* y el término independiente *c*, si no que también determinaron correctamente si son enteros o no. Observamos en sus respuestas que pudieron discernir las manupulaciones válidas (p.e. la simplificación o reducción de términos semejantes, etc), para obtener el formato estandar ax+by= c, y de esta manera determinar si se trata o no de una ecuación de primer grado con dos incógnitas y coeficientes enteros. En las siguientes figuras (4.7, 4.8 y 4.9) se muestran las respuestas obtenidas por los equipos E1, E6 y E8 en esta segunda parte de la Tarea 1.



$5x + y = 34$		
a	b	c
5	1	34
¿Todos sus coeficientes son enteros?		
si		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		
si		

$\sqrt{5}\ x - y = 25$		
a	B	C
$\sqrt{5}$	-1	25
¿Todos sus coeficientes son enteros?		
no $\sqrt{5}$ no es entero		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		
si		

$x - 3y - 20 = 0$		
a	b	c
1	-3	20
¿Todos sus coeficientes son enteros?		
si		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		
si		

$x^2 - 3y = 20$		
a	b	c
1	-3	20
¿Todos sus coeficientes son enteros?		
si		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		
si		

$2x^3 + 5y - 3z = 120$		
a	b	c
2	5	120
¿Todos sus coeficientes son enteros?		
si		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		
no tiene 3 variables x, y, z		

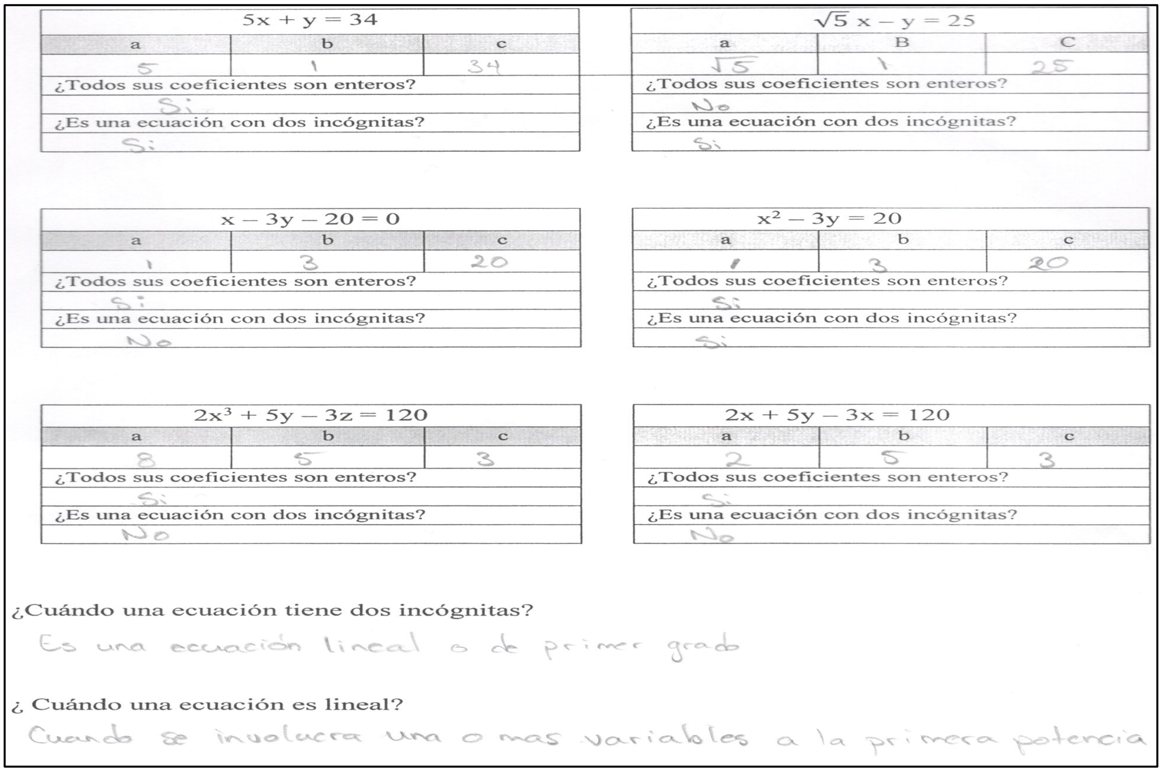
$2x + 5y - 3x = 120$		
a	b	c
-1	5	120
¿Todos sus coeficientes son enteros?		
si		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		
si hay que reducir		

¿Cuándo una ecuación tiene dos incógnitas?
cuando solo tienen dos variables o letras x y y/o cualquier otra

¿ Cuándo una ecuación es lineal?

cuando sus variables tienen potencia igual a 1

Figura 4.7. Respuesta de Nadia y Dafné (E1)



$5x + y = 34$		
a	b	c
5	1	34
¿Todos sus coeficientes son enteros?		
Si		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		
Si		

$\sqrt{5}\ x - y = 25$		
a	B	C
$\sqrt{5}$	1	25
¿Todos sus coeficientes son enteros?		
No		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		
Si		

$x - 3y - 20 = 0$		
a	b	c
1	3	20
¿Todos sus coeficientes son enteros?		
Si		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		
No		

$x^2 - 3y = 20$		
a	b	c
1	3	20
¿Todos sus coeficientes son enteros?		
Si		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		
Si		

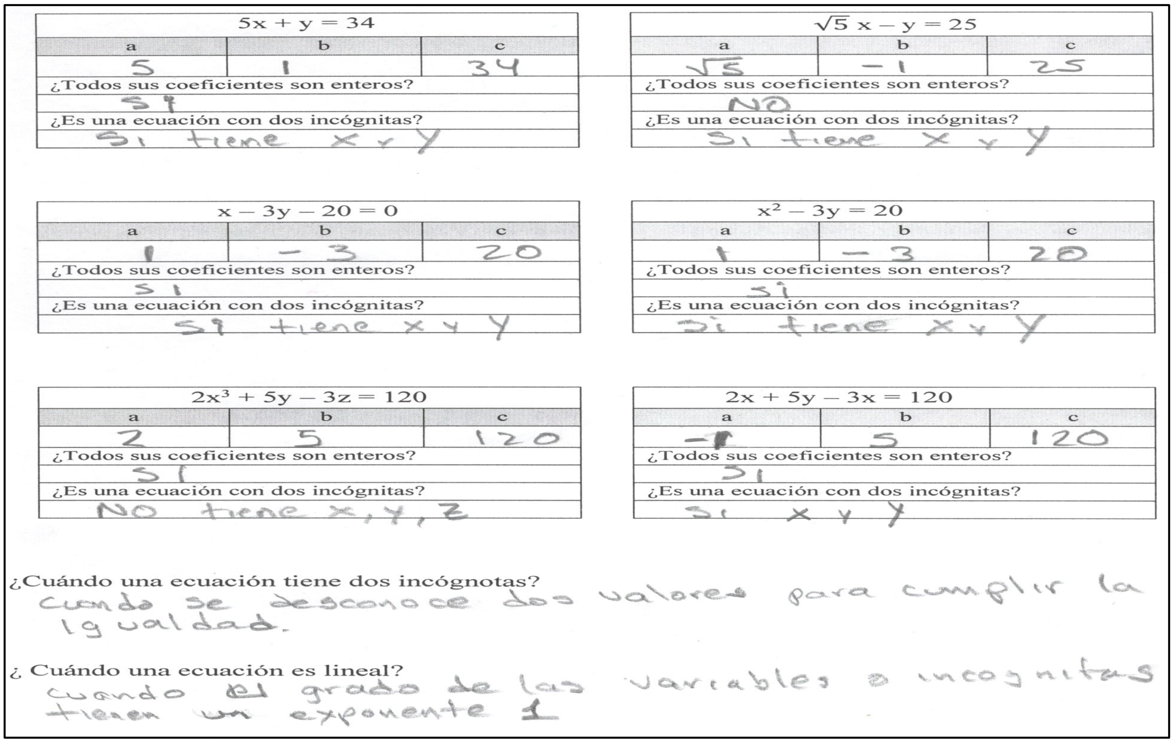
$2x^3 + 5y - 3z = 120$		
a	b	c
8	5	3
¿Todos sus coeficientes son enteros?		
Si		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		
No		

$2x + 5y - 3x = 120$		
a	b	c
2	5	3
¿Todos sus coeficientes son enteros?		
Si		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		
No		

¿Cuándo una ecuación tiene dos incógnitas?
Es una ecuación lineal o de primer grado

¿ Cuándo una ecuación es lineal?
Cuando se involucra una o mas variables a la primera potencia

Figura 4.8. Respuesta de Flor y Brenda (E6)



$5x + y = 34$

a	b	c
5	1	34

¿Todos sus coeficientes son enteros?
sí
¿Es una ecuación con dos incógnitas?
si tiene x y Y

$\sqrt{5}\,x - y = 25$

a	b	c
$\sqrt{5}$	−1	25

¿Todos sus coeficientes son enteros?
NO
¿Es una ecuación con dos incógnitas?
Si tiene x y Y

$x - 3y - 20 = 0$

a	b	c
1	−3	20

¿Todos sus coeficientes son enteros?
SI
¿Es una ecuación con dos incógnitas?
sí tiene x y Y

$x^2 - 3y = 20$

a	b	c
1	−3	20

¿Todos sus coeficientes son enteros?
sí
¿Es una ecuación con dos incógnitas?
Si tiene x y Y

$2x^3 + 5y - 3z = 120$

a	b	c
2	5	120

¿Todos sus coeficientes son enteros?
SI
¿Es una ecuación con dos incógnitas?
NO tiene x, y, z

$2x + 5y - 3x = 120$

a	b	c
−1	5	120

¿Todos sus coeficientes son enteros?
Si
¿Es una ecuación con dos incógnitas?
Si x y Y

¿Cuándo una ecuación tiene dos incógnotas?
cuando se desconoce dos valores para cumplir la igualdad.

¿ Cuándo una ecuación es lineal?
cuando el grado de las variables o incognitas tienen un exponente 1

Figura 4.9. Respuesta de Yarinka y Gabriel (E8)

En síntesis, se observó que variar las características críticas de la estructura de las ecuaciones ayudó a los estudiantes a profundizar su comprensión de lo que es una ecuación diofántica lineal o una ecuación de primer grado con dos incógnitas y coeficientes enteros.

Por otro lado, la palabra estructura en matemáticas se utiliza en ocasiones para referir a un conjunto cerrado bajo una o varias operaciones, cumpliendo varios axiomas. Según Castro, Rico y Romero (1997, p.362) este término consiste en *un conjunto de entes abstractos expresados simbólicamente, dotado de unas operaciones o modos de componerlos y de unas relaciones mediante las que se comparan dichos entes*.

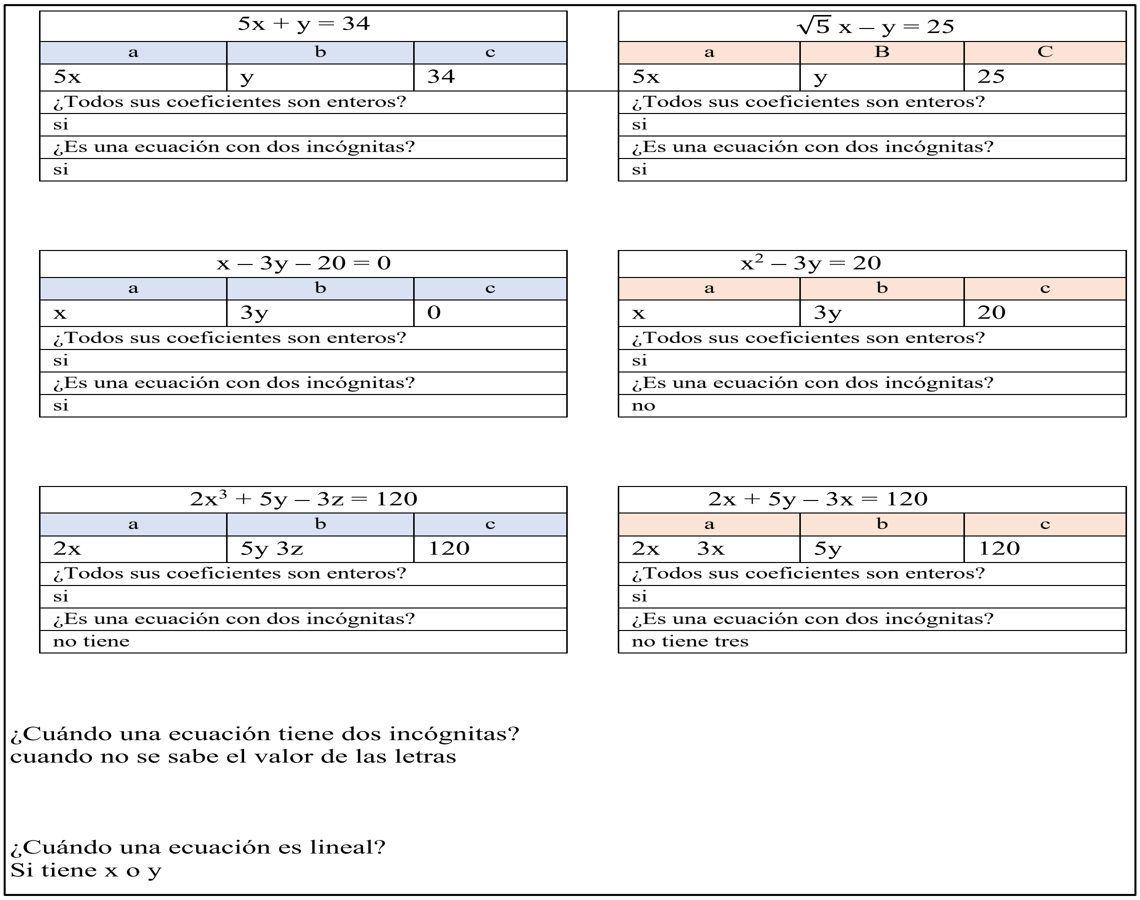
Desde un punto de vista más amplio, de acuerdo con Hoch y Dreyfus (2004), se puede decir que, en matemáticas, el término estructura se refiere a la forma en que una entidad se compone de partes, existiendo conexiones o relaciones entre las partes que componen dicha entidad.

En el caso del equipo E2 y E5, en la segunda parte de la Tarea 1, presentan dificultades desde el inicio para identificar nuevamente los coeficientes *a*, *b* y el término independiente *c*. Además, no focalizan su atención en las variaciones realizadas en la estructura de las ecuaciones. Por lo que no logran discernir y relacionar las manipulaciones que son válidas en las ecuaciones para obtener el formato estandar $ax + by = c$.

De esta forma, existe gran coincidencia entre diversos autores (Cerdán, 2010; Hoch & Dreyfus, 2005, 2006; Nortes & Nortes, 2010; Novotná & Hoch, 2008) en destacar la falta de capacidad de algunos estudiantes de educación secundaria y bachillerato (de 12 a 18 años) para aplicar las técnicas algebraicas básicas en contextos distintos de los que han experimentado. En especial se pone énfasis en las dificultades manifestadas por los alumnos para reconocer y generar formas equivalentes de expresiones algebraicas comprendiendo su significado.

Es de señalar que ambas capacidades, la de reconocer y la de generar dichas expresiones, están relacionadas con los objetivos de aprendizaje de la educación matemática en educación secundaria y bachillerato (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006; NCTM, 2000; INEE, 2017). Por ejemplo en nuestro caso en los planes y programas del bachilleraro general (INEE, 2017) en el eje llamado del pensamiento aritmético al lenguaje algebraico, en la sección de componentes; patrones simbolización y generalización: elementos del álgebra básica, uno de los contenidos centrales señala el uso de las variables y las expresiones algebraicas (p. 189).

Este eje profundiza y amplía los aspectos de número, variable y relación proporcional propios de la Educación Básica, para plantear al Álgebra como un lenguaje que permite generalizar y expresar simbólicamente a los números y sus operaciones, y que posibilite, a su vez, la modelación de fenómenos y el planteamiento y resolución de situaciones que exigen del manejo formal de un lenguaje simbólico dotado de significados. De tal manera que el álgebra es, a la vez, un objeto de estudio en sí mismo y una forma de entender procesos de simbolización en matemáticas, ciencias y tecnología.



$5x + y = 34$		
a	b	c
5x	y	34
¿Todos sus coeficientes son enteros?		
si		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		
si		

$\sqrt{5}\, x - y = 25$		
a	B	C
5x	y	25
¿Todos sus coeficientes son enteros?		
si		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		
si		

$x - 3y - 20 = 0$		
a	b	c
x	3y	0
¿Todos sus coeficientes son enteros?		
si		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		
si		

$x^2 - 3y = 20$		
a	b	c
x	3y	20
¿Todos sus coeficientes son enteros?		
si		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		
no		

$2x^3 + 5y - 3z = 120$		
a	b	c
2x	5y 3z	120
¿Todos sus coeficientes son enteros?		
si		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		
no tiene		

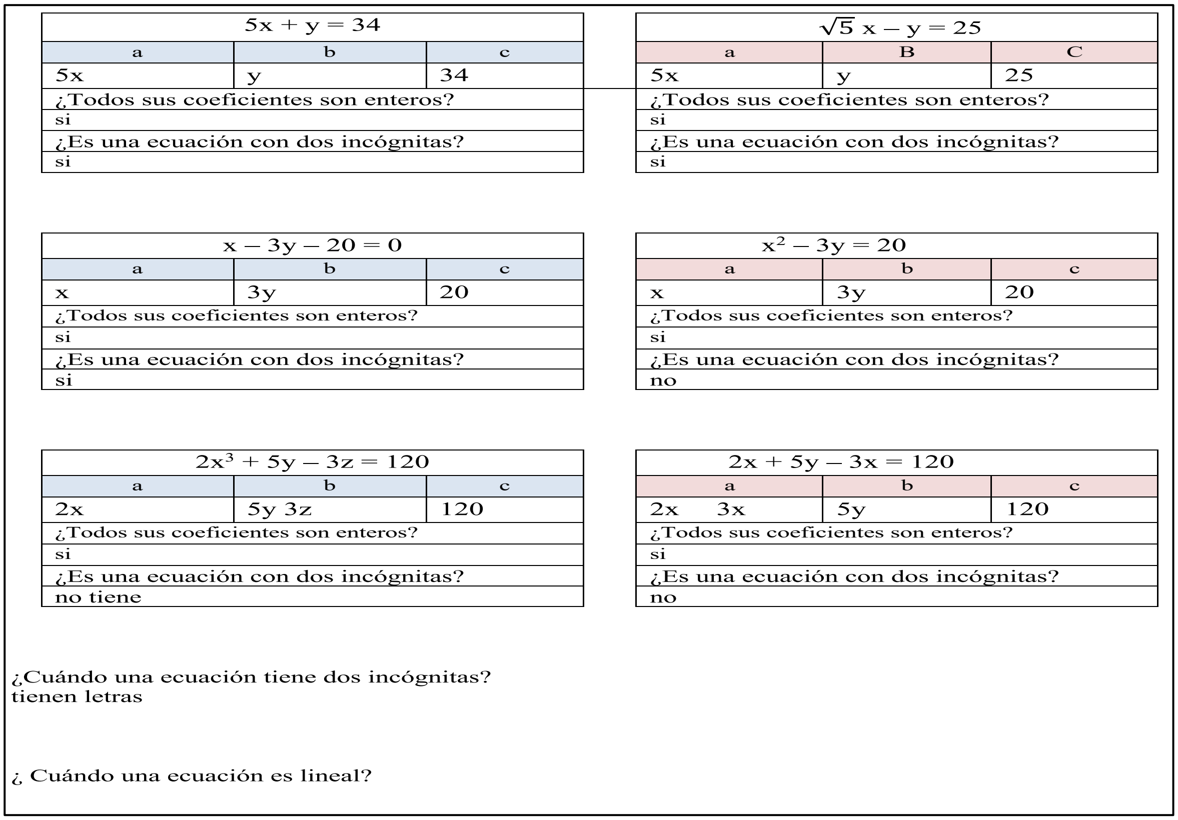
$2x + 5y - 3x = 120$		
a	b	c
2x 3x	5y	120
¿Todos sus coeficientes son enteros?		
si		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		
no tiene tres		

¿Cuándo una ecuación tiene dos incógnitas?
cuando no se sabe el valor de las letras

¿Cuándo una ecuación es lineal?
Si tiene x o y

Figura. 4.10. Respuesta de America y Eduardo (E2)

Finalmente, analizando en conjunto las respuestas del equipo de America y Eduardo (E2), y las del equipo de Sergio y Jesús (E5), que son bastante similares, podemos decir que no lograron discernir las variaciones en las características críticas de las ecuaciones lo que dio lugar a no poder determinar con bases matemáticas si son ecuaciones de primer grado con dos incógnitas y coeficientes enteros o no.



$5x + y = 34$

a	b	c
$5x$	y	34

¿Todos sus coeficientes son enteros?
si
¿Es una ecuación con dos incógnitas?
si

$\sqrt{5}\ x - y = 25$

a	B	C
$5x$	y	25

¿Todos sus coeficientes son enteros?
si
¿Es una ecuación con dos incógnitas?
si

$x - 3y - 20 = 0$

a	b	c
x	$3y$	20

¿Todos sus coeficientes son enteros?
si
¿Es una ecuación con dos incógnitas?
si

$x^2 - 3y = 20$

a	b	c
x	$3y$	20

¿Todos sus coeficientes son enteros?
si
¿Es una ecuación con dos incógnitas?
no

$2x^3 + 5y - 3z = 120$

a	b	c
$2x$	$5y$ $3z$	120

¿Todos sus coeficientes son enteros?
si
¿Es una ecuación con dos incógnitas?
no tiene

$2x + 5y - 3x = 120$

a	b	c
$2x$ $3x$	$5y$	120

¿Todos sus coeficientes son enteros?
si
¿Es una ecuación con dos incógnitas?
no

¿Cuándo una ecuación tiene dos incógnitas?
tienen letras

¿ Cuándo una ecuación es lineal?

Figura. 4.11. Respuesta de Sergio y Jesús (E5)

La reiterada percepción de las dificultades señaladas, así como otras puestas de manifiesto por los estudiantes en el aprendizaje del álgebra, han ocasionado un interés creciente en la investigación en educación matemática por conocer cuál es el conocimiento sobre el álgebra escolar que poseen o desarrollan los estudiantes tanto en secundaria como en el bachillerato y cómo éste se lleva a cabo (Demby, 1997; Hoch & Dreyfus, 2005, 2006; Kieran, 1989, 2006, 2007; Kirshner & Awtry, 2004; Sfard & Linchevsky, 1994; Ruano, Socas & Palarea, 2008; Trujillo, Castro & Molina, 2009).

Esta misma preocupación ha dado lugar al surgimiento del constructo "sentido estructural", que busca precisar las habilidades necesarias para hacer un uso eficiente, en tareas escolares, de las técnicas algebraicas aprendidas. En ese sentido, para Vega-Castro

(2013), los estudiantes que han desarrollado su **sentido de estructura** [6]actúan más de forma *estructural o conceptual*: analizan la estructura del objeto (sus partes y las relaciones entre ellas), para elegir la mejor estrategia para realizar la tarea que se les pide. Los estudiantes que no han desarrollado su sentido de estructura actúan más de forma *procesal o procedimental*: aplican probablemente el primer procedimiento que se les viene a la mente, dada la estructura que alcanzaron a percibir, sin analizar a fondo si la estructura percibida es correcta o cuál es el procedimiento (de reducción) que se deberían emplear para una mejor perpcepción de la estructura. Es el caso de los equipos E2 y E5, cuyas respuestas se presentaron arriba.

En la tercera parte de esta Tarea 1, se focalizo aún más en el análisis de la estructura de las ecuaciones. En este caso, al igual que en las partes anteriores de esta Tarea 1 se les pidio a los estudiantes identificar nuevamente los coefientes *a, b* y el término independiente *c*. Sin embargo, cabe destacar que en esta sección ninguno de los tres pares de ecuaciones propuestos se encuentran en formato estandar $ax + by = c$.

Por lo que, que debieron aplicar su sentido estructural para discernir y emplear las reglas básicas de la aritmética y álgebra en la manipulación de las ecuaciones para obtener el formato estándar, mismo que les permitio determinar si los coeficentes son enteros y a su vez, focalizar también su atención en los exponentes de las incógnitas para determinar simultaneamente si se trata de una ecuación de primer grado con dos incógnitas y coeficientes enteros o no.

Del análisis de las respuestas obtenidas en las hojas de trabajo de los estudiantes tenemos que en el caso de los equipos E1 y E8 si lograron discernir y aplicar correctamente las manipulaciones algebraicas para reorganizar o reducir los términos, obteniendo el formato estandar.

---

[6] El término "**sentido estructural**" refiere, de forma general, a una colección de habilidades relacionadas con transformar expresiones algebraicas, que permite a un alumno hacer un mejor uso de las técnicas algebraicas aprendidas (Linchevski & Livneh, 1999). Para Vega-Castro (2013), por ejemplo, el sentido estructural es un conjunto de capacidades necesarias para trabajar flexiblemente con expresiones algebraicas, que implican el uso combinado de conocimiento conceptual y procedimental.

De igual manera, focalizaron su atención en el exponente de una de las incógnitas el cuál es mayor a 1. Todo este conocimiento simultaneo de la variación y focalización de las características críticas, llevó a estos estudiantes a discernir la estructura de las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas con coeficentes enteros.

Por otro lado, Novotná y Hoch (2008) detectaron cierta correlación entre el nivel de sentido estructural y la habilidad en la manipulación de expresiones algebraicas puestos de manifiesto por los estudiantes. A mayor sentido estructural mayor habilidad para la manipulación de expresiones algebraicas. En seguida en las figuras 4.12 y 4.13 se muestran las respuestas obtenidas por los equipos E1 y E8.

$\frac{1}{3}(48x + 36y = 48)$		
a	b	c
16	12	16
¿Todos sus coeficientes son enteros?		
si		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		
si hay que dividir primero entre 3		

$23x + 4y - 7x = -3y + 15$		
a	b	c
16	7	15
¿Todos sus coeficientes son enteros?		
si		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		
si pero hay que reducir terminos semejantes		

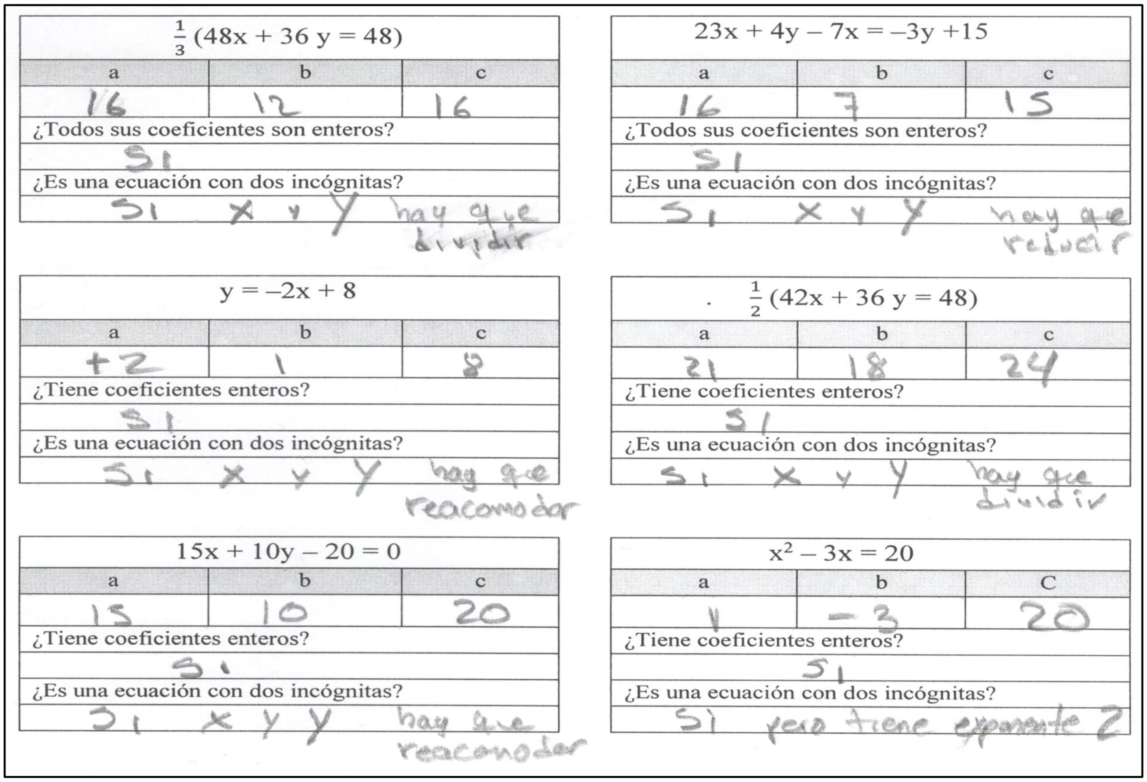
$y = -2x + 8$		
a	b	c
2	1	8
¿Tiene coeficientes enteros?		
si		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		
si pero hay que acomodarla		

. $\frac{1}{2}(42x + 36y = 48)$		
a	b	c
24	18	24
¿Tiene coeficientes enteros?		
si		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		
Si tambien hay que dividir primero entre 2		

$15x + 10y - 20 = 0$		
a	b	c
15	10	20
¿Tiene coeficientes enteros?		
si		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		
si		

$x^2 - 3x = 20$		
a	b	C
1	-3	20
¿Tiene coeficientes enteros?		
si		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		
Si pero tiene potencia 2		

Figura 4.12. Respuesta de Nadia y Dafné (E1)



$\frac{1}{3}$ (48x + 36 y = 48)

a	b	c
16	12	16

¿Todos sus coeficientes son enteros?

Si

¿Es una ecuación con dos incógnitas?

Si x y y hay que dividir

$23x + 4y - 7x = -3y + 15$

a	b	c
16	7	15

¿Todos sus coeficientes son enteros?

Si

¿Es una ecuación con dos incógnitas?

Si x y y hay que reducir

$y = -2x + 8$

a	b	c
+2	1	8

¿Tiene coeficientes enteros?

Si

¿Es una ecuación con dos incógnitas?

Si x y y hay que reacomodar

. $\frac{1}{2}$ (42x + 36 y = 48)

a	b	c
21	18	24

¿Tiene coeficientes enteros?

Si

¿Es una ecuación con dos incógnitas?

Si x y y hay que dividir

$15x + 10y - 20 = 0$

a	b	c
15	10	20

¿Tiene coeficientes enteros?

Si

¿Es una ecuación con dos incógnitas?

Si x y y hay que reacomodar

$x^2 - 3x = 20$

a	b	C
1	−3	20

¿Tiene coeficientes enteros?

Si

¿Es una ecuación con dos incógnitas?

Si pero tiene exponente 2

Figura 4.13. Respuesta de Yarinka y Gabriel (E8)

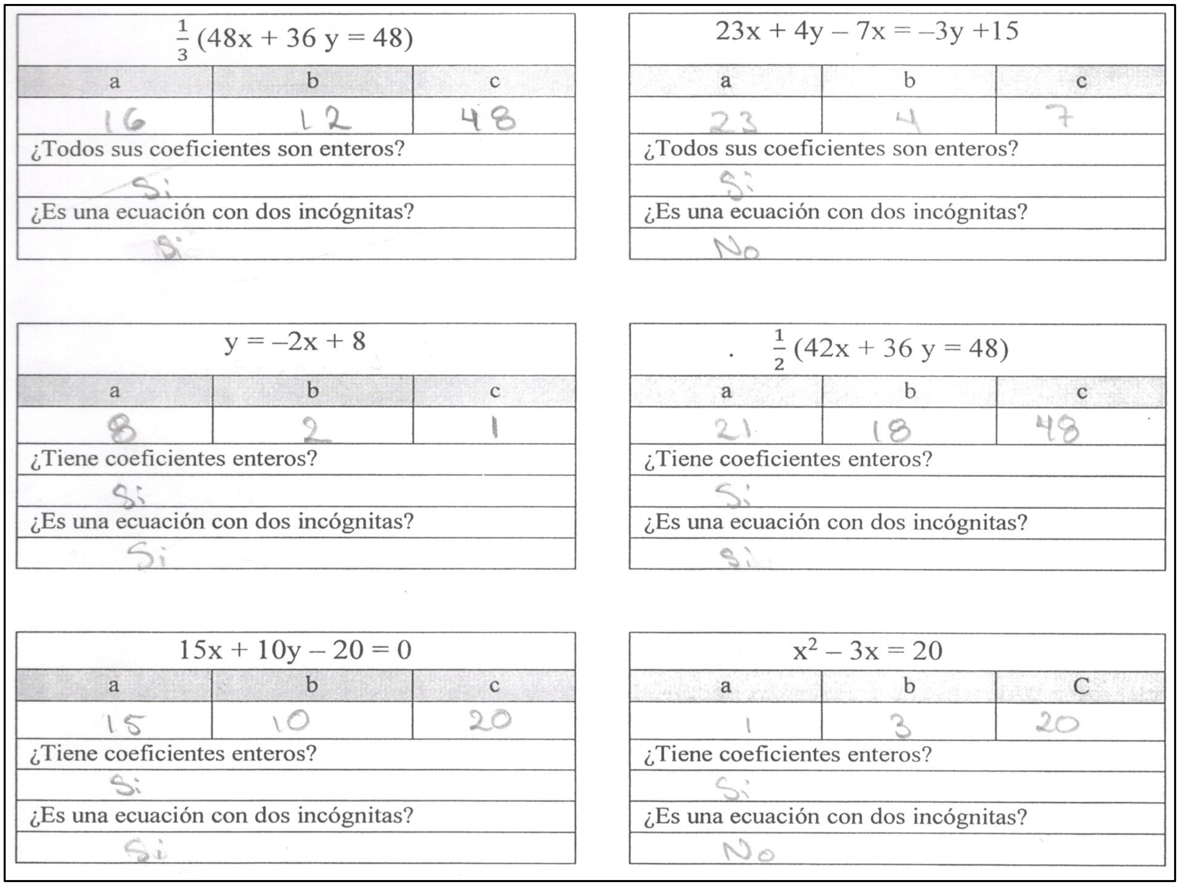
Al parecer, en efecto se activó el discernimiento de la estructura de las ecuaciones en juego en el contexto de la variación (aplicado en la formulación de cada parte de la Tarea 1). En síntesis, en el contexto de la variación se estaría entonces promoviendoel discernimiento de la estructura las ecuaciones y por ende, la habilidad en la manipulación de las expresiones algebraicas, pues los estudiantesde los Equipos E1 y E8 en sus respuestas transformaron, redujeron, y reacomodaron los términos de las ecuaciones.

En el caso del equipo E6 de Brenda y Flor, en los dos primeros pares de ecuaciones al parecer disciernen las manipulaciones que se deben realizar, pero no logran aplicarlas correctamente ya que cometen algunos errores en la ejecución de las divisiones, para simplificar los coeficientes.

Esto derivó en la obtención de un formato estandar incorrecto, por lo que no lograron determinar correctamente si los coeficentes *a, b* y el término independiente *c* son enteros o no. En el caso del tercer par de ecuaciones si logran discernir la estructura de las ecuaciones reorganizando los términos para identificar correctamente los coeficentes *a, b* y el término independiente *c*.

Así mismo, si focalizan su atención en el exponente (mayor que 1) de una de las incógitas. Sin embargo, en la ecuación que aparece en la izquierda del segundo renglón, se ve que las estudiantes no tranformaronla ecuaciónde manera adecuada para hacer evidente los coeficientes *a, b* y *c*. Es frecuente que en el trabajo con expresiones algébraicas los estudiantes actúen “sin pensar”, trasformando las expresiones por medio de técnicas algebraicas supuestamente aprendidas y donde ignoran sus significados.

Con este tipo de estudiantes es esencial lograr desarrollar la capacidad de recuperar los significados de las transformaciones de las expresiones. En realidad, en el trabajo que aquí se presenta se argumenta que el contexto de la variación permite que los estudiantes avancen en la manipulación algebraica de referencia. En seguida en la figura 4.14 se muestra las respuestas obtenidas por el equipo E6.



$\frac{1}{3}(48x + 36\ y = 48)$

a	b	c
16	12	48

¿Todos sus coeficientes son enteros?

Si

¿Es una ecuación con dos incógnitas?

Si

$23x + 4y - 7x = -3y + 15$

a	b	c
23	4	7

¿Todos sus coeficientes son enteros?

Si

¿Es una ecuación con dos incógnitas?

No

$y = -2x + 8$

a	b	c
8	2	1

¿Tiene coeficientes enteros?

Si

¿Es una ecuación con dos incógnitas?

Si

$\frac{1}{2}(42x + 36\ y = 48)$

a	b	c
21	18	48

¿Tiene coeficientes enteros?

Si

¿Es una ecuación con dos incógnitas?

Si

$15x + 10y - 20 = 0$

a	b	c
15	10	20

¿Tiene coeficientes enteros?

Si

¿Es una ecuación con dos incógnitas?

Si

$x^2 - 3x = 20$

a	b	C
1	3	20

¿Tiene coeficientes enteros?

Si

¿Es una ecuación con dos incógnitas?

No

Figura 4.14. Respuesta de Brenda y Flor (E6)

La apariencia externa de una expresión revela un orden interno determinado por las relaciones entre las partes que componen su estructura, según Hoch y Dreyfus (2004), señalan que se debe incluir en la mencionada colección de habilidades (sentido estructural[7]): la capacidad de ver una expresión algebraica como una entidad, el reconocer una expresión algebraica como una estructura previamente conocida, sus sub-estructuras, las conexiones mutuas entre estructuras, cuáles manipulaciones son posibles y, finalmente, cuál manipulación es más eficiente.

Continuando con el análisis en esta tercera parte de la Tarea 1, America y Eduardo (E2) continuan sin lograr identificar los coeficentes a, b y el término independiente c, no disciernen la estructura de las ecuaciones. Por lo que, no comprenden tampoco las transformaciones que son posibles realizar a las ecuaciones, por ejemplo la reducción de términos semejantes o la simplificación de las operaciones aritméticas como las divisiones de los coeficientes, para obtener el formato estandar $ax+by = c$, y determinar si las ecuaciones corresponden a una ecuación de primer grado con dos incógnitas y con coeficientes enteros.

Diversos estudios muestran que muchos alumnos poseen una pobre comprensión de las relaciones y estructuras matemáticas (Booth, 1982; Kieran, 1989; MacGregor, 1996; Schifter, 1999) y muestran una falta de relación entre sus conocimientos aritméticos y sus conocimientos algebraicos (Carpenter & Franke, 2001; Warren, 2001, 2004).

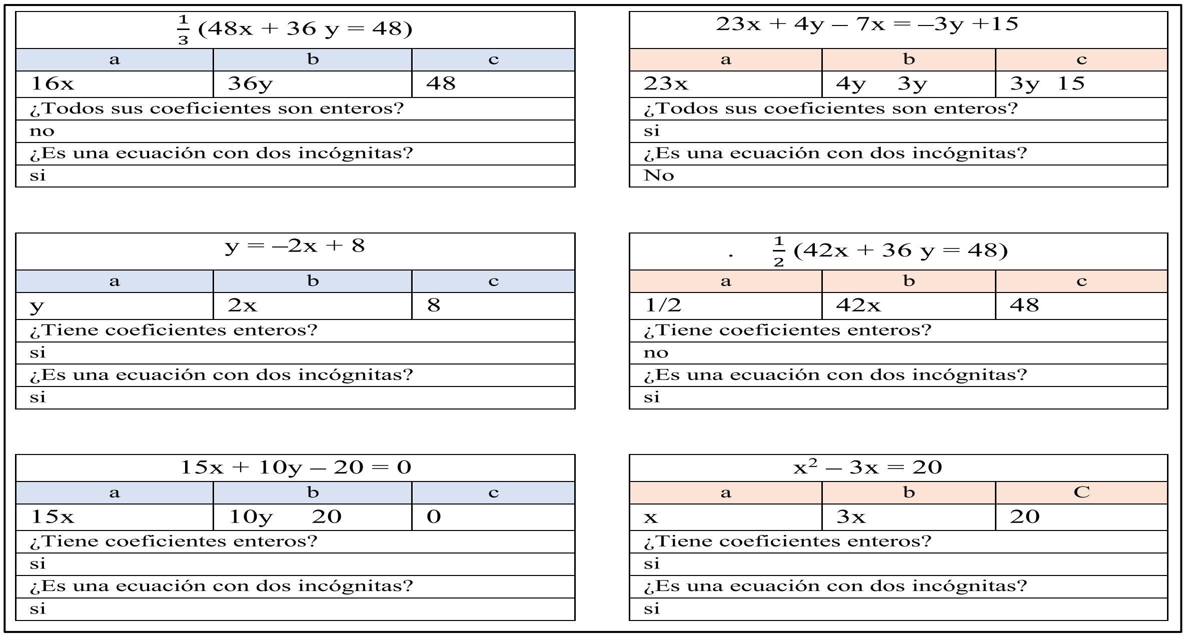
Dichos trabajos evidencian que esta forma tradicional de introducir el álgebra no es eficaz en el desarrollo de las habilidades de los alumnos para reconocer y usar la estructura matemática. A esto Kieran (1992) añade la comprensión del significado de las letras y el cambio de convenciones, como otras de las principales dificultades en la introducción del álgebra.

El énfasis de la enseñanza de la aritmética en "encontrar la respuesta" hace que los alumnos consigan desenvolverse con procesos intuitivos e informales evitando el uso y

---

[7] Para Vega-Castro (2013), por ejemplo, el sentido estructural es un conjunto de capacidades necesarias para trabajar flexiblemente con expresiones algebraicas, que implican el uso combinado de conocimiento conceptual y procedimental (véase Ascencio Gonzalez, Rebeca, & Eccius-Wellmann, Cristina, 2019).

reconocimiento de la estructura, que es esencial en el aprendizaje del álgebra (Kieran, 1989). Es el caso nuevamente del equipo E2. En seguida, en la figura 4.15 se muestra una parte de las respuestas obtenidas del equipo 2.



$\frac{1}{3}$ (48x + 36 y = 48)		
a	b	c
16x	36y	48
¿Todos sus coeficientes son enteros?		
no		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		
si		

23x + 4y – 7x = –3y +15		
a	b	c
23x	4y 3y	3y 15
¿Todos sus coeficientes son enteros?		
si		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		
No		

y = –2x + 8		
a	b	c
y	2x	8
¿Tiene coeficientes enteros?		
si		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		
si		

. $\frac{1}{2}$ (42x + 36 y = 48)		
a	b	c
1/2	42x	48
¿Tiene coeficientes enteros?		
no		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		
si		

15x + 10y – 20 = 0		
a	b	c
15x	10y 20	0
¿Tiene coeficientes enteros?		
si		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		
si		

x^2 – 3x = 20		
a	b	C
x	3x	20
¿Tiene coeficientes enteros?		
si		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		
si		

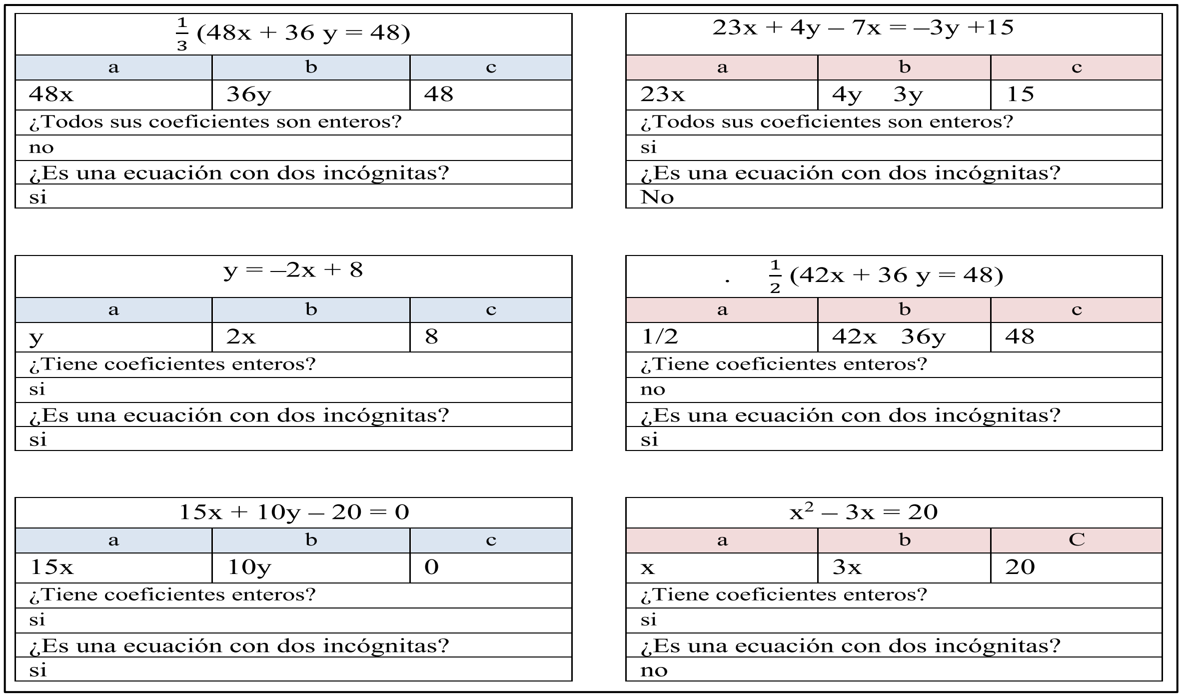
Figura. 4.15. Respuesta de America y Eduardo (E2)

En el equipo 5 (E5) de Sergio y Jesús, tampoco lograron identificar correctamente los coeficentes *a, b* y el término independiente *c*. Sólo logran separar lo que para ellos son los términos de las ecuaciones *ax, by* y *c*, sin discernir que tipo de manipulaciones (aritméticas o álgebraicas) son posibles realizar a las ecuaciones, para obtener el formato estandar ax+by=c, y de esta manera, determinar si los coeficentes *a, b* y el término independiente *c* son enteros o no.

Tampoco focalizan su atención en el exponente mayor a 1 de una de las incógnitas de las ecuaciones. Por lo que, finalmente no logran determinar si las ecuaciones corresponden o no a una ecuación de primer grado con dos incógnitas y con coeficientes enteros.

Respecto al análisis anterior de las respuestas obtenidas del equipo E5, los estudios también sugieren que muchos estudiantes tienen dificultades para comprender la sintaxis o la estructura de las expresiones algebraicas y no comprenden ni los procedimientos para transformar ecuaciones ni las razones por las cuales las transformaciones se realizan de la forma en que se realizan (National Mathematics Advisory Panel 2008; Pirie y Martin 1997).

En la siguiente figura 4.16 se muestran las respuestas obtenidas de Sergio y Jesús (E5).



$\frac{1}{3}(48x + 36\ y = 48)$		
a	b	c
48x	36y	48
¿Todos sus coeficientes son enteros?		
no		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		
si		

$23x + 4y - 7x = -3y + 15$		
a	b	c
23x	4y 3y	15
¿Todos sus coeficientes son enteros?		
si		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		
No		

$y = -2x + 8$		
a	b	c
y	2x	8
¿Tiene coeficientes enteros?		
si		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		
si		

. $\frac{1}{2}(42x + 36\ y = 48)$		
a	b	c
1/2	42x 36y	48
¿Tiene coeficientes enteros?		
no		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		
si		

$15x + 10y - 20 = 0$		
a	b	c
15x	10y	0
¿Tiene coeficientes enteros?		
si		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		
si		

$x^2 - 3x = 20$		
a	b	C
x	3x	20
¿Tiene coeficientes enteros?		
si		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		
no		

Figura. 4.16. Respuesta de Sergio y Jesús (E5)

Molina (2010), explica que, si al realizar una operación o resolver una ecuación los estudiantes emplean un procedimiento estándar aprendido, sin detenerse a analizar las características críticas del ejercicio en cuestión, trabajan bajo un enfoque procedimental. En cambio si realizan un análisis previo de las características críticas de las expresiones y de su estructura, y al llevar a cabo la actividad las toma en cuenta, entonces trabajan bajo un enfoque estructural.

Por tanto, es importante promover el hábito de la observación y el análisis de los aspectos y características críticas de las ecuaciones en los estudiantes antes de iniciar la manipulación, con el fin de fortalecer el enfoque estructural, que permita un trabajo más significativo con expresiones aritméticas y algebraicas, y evite algunas de las dificultades que los alumnos encuentran en el aprendizaje y transición entre ambas.

Todo nuestro análisis anterior sugiere que el objeto de aprendizaje vivido (presentado en las respuestas de los estudiantes obtenidas en las hojas de trabajo durante la experimentación de la Tarea 1) enfatizó en los aspectos y características críticas que lograron discernir los estudiantes en esta primera unidad de discernimiento, para la comprensión o reconocimiento de **los coeficientes en una ecuación diofántica lineal con dos incógnitas,** a través de la aplicación de la teoría de la variación (Marton, 2015). Otro de los resultados del análisis de las respuestas de los estudiantes se obtiene al categorizar su nivel cognitivo estructural de acuerdo a la clasificación SOLO[8]. En seguida, se muestra la tabla 4.2 donde se especifica dicha clasificación.

Nivel de razonamiento alcanzado (taxonomía SOLO)	Equipo	Criterio	Interpretación y análisis
Pre-estructural: No se domina ningún aspecto crucial de la tarea	E2 y E5	No logra identificar los coeficientes *a*, *b* y el término independiente *c* de las ecuaciones y logra determinar en algunos casos si son enteros, pero no entienden las manipulaciones que son posibles en las ecuaciones para llegar al formato estándar ax + by = c, y así, discernir si se trata de una ecuación de primer grado con dos incógnitas.	Las respuestas que proporcionan los alumnos ante una determinada tarea son erróneas o inexistentes. El estudiante aún no comprende
Uniestructural: Se domina sólo un aspecto crucial de la tarea		Identifica los coeficientes *a*, *b* y el término independiente *c* de las ecuaciones y logra determinar en algunos casos si son enteros, pero no entienden las manipulaciones que son posibles en las ecuaciones para llegar formato estándar ax + by = c, y así, discernir si se trata de una ecuación de primer grado con dos incógnitas.	El resultado del alumno, pese a poder ser cierto, sólo se centra en un determinado aspecto que, por otro lado, no tiene por qué ser relevante Identifica sólo un aspecto del concepto.
Multiestructural: Se dominan varios aspectos cruciales de la tarea	E3 y E6	Identifica los coeficientes *a*, *b* y el término independiente *c* de las ecuaciones, logra identificar si son enteros y en algunos casos logra manipular las ecuaciones para obtener el formato estándar ax + by = c, y así, discernir si se trata de una ecuación de primer grado con dos incógnitas.	En este caso el alumno es capaz de enumerar una serie de aspectos correctos, pero no va más allá Identifica varios aspectos del concepto, pero no tiene aún una visión completa.
Relacional:	E1, E4, E7 y E8	Identifica los coeficientes *a*, *b* y el término independiente *c* de las ecuaciones, logra manipular las expresiones para escribirla	El alumno no sólo identifica varios aspectos correctos,

---

[8] "The SOLO taxonomy by Biggs and Collis (1982) was inspired by Piagetian descriptions of qualitative differences in handling the same tasks and was intended to help in the analysis of student's responses to open-ended questions in school (Marton, 2015, p.115). The different categories refer to different ways of handling the same task, and basically, they consist in four different levels: in prestructural level, no crucial aspects of the task are mastered; in unistructural level, one crucial aspect of the task is mastered; in multistructural, several crucial aspects are mastered; finally, in relational level, several crucial aspects are related to each other. "(Hoyos et. al, 2020).

Relaciona entre si varios aspectos cruciales de la tarea		en el formato estándar ax + by = c, y focaliza su atención en los exponentes de las incógnitas para así, discernir si se trata de una ecuación de primer grado con dos incógnitas y coeficientes enteros.	sino que también es capaz de relacionarlos entre sí. Tiene una visión completa del concepto conformada por los diferentes aspectos del concepto.

Tabla 4.2. Clasificación SOLO del nivel de estructura cognitiva de los estudiantes en la Tarea 1

4.1.2 UNIDAD DE DISCERNIMIENTO DOS

¿Cuándo tiene solución entera?

Una vez que hemos analizado el aprendizaje vivido (a partir de las respuestas de los estudiantes en las hojas de trabajo) en la Tarea 1, referente a *cómo son los coeficientes en una ecuación diofántica lineal con dos incógnitas*. La cuestion que ahora vamos a analizar en esta unidad de discernimiento dos es: *¿cuando tiene solución entera*? Esto se llevará a cabo a partir del análisis de las respuestas de los estudiantes en su experimentación con las Tareas 2A y 2B.

ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES A LA TAREA 2A[9]

Experiencia de Aprendizaje

El diseño de la Tarea 2A consistió de tres partes, en la primera parte se presentaron algunos contrastes básicos, que permitieran a los estudiantes tener una mejor transición del aritmética al álgebra. Esto es al identificar algunas diferencias entre las dos ecuaciones propuestas, variando una característica crítica (los signos de operación de las ecuaciones) y manteniendo invariante los coeficientes *a*, *b* y el término independiente *c*.

En el diseño también se consideró que: los estudiantes continuen con la identificación de los coeficientes *a*, *b* y el término independiente *c* de las ecuaciones, encuentren el M.C.D de (a, b) y que focalicen su atención en el cociente de *c* / M.C.D de (a, b) como la característica crítica para determinar si la ecuación tiene o no soluciones enteras.

---

[9] Ver tarea 2A en las hojas de trabajo para los estudiantes, las cuales aparecen en el Anexo 1 de esta tesis.

En el caso de que alguna o las dos ecuaciones tengan solución entera, se solicitó a los estudiantes encontrar algunas soluciones enteras utilizando el método por tanteo, de tal manera que logren formular conjeturas sobre algunas posibles soluciones enteras y las prueben.

En la segunda parte de esta Tarea 2A, se avanzó hacia una variación por separación y generalización, al cambiar la estructura de la ecuación propuesta, donde los coeficientes *a* y *b* son ahora números pares y el término independiente *c* impar. De tal manera que focalizamos la atención de los estudiantes en el M.C.D de (a, b), el cuál es un número par y no divide de manera exacta al término independiente *c*. Por lo que, al solicitar a los estudiantes que realicen el cociente *c* / M.C.D de (a, b), es esencial que logren focalizar su atención en que el resultado es un número no entero, lo que significa que la ecuación no tiene solución entera.

Finalmente, en la tercera parte de esta Tarea 2A se proponen tres ecuaciones, donde lo que varia ahora es el término *by*, quedando invariante el coeficiente *a* y el término independiente *c*. Focalizando la atención de los estudiantes en las variaciones, para discernir que el M.C.D de (a, b) de una de las ecuaciones no divide de manera exacta al término independiente *c*, por lo que dicha ecuación no tiene solución en números enteros.

De lo escrito en las hojas de trabajo por los estudiantes, tenemos que, en la primera parte de esta Tarea 2A la mayoría de los equipos E1, E3, E4, E6, E7 y E8 lograron identificar la estructura [10]de las ecuaciones, demostrando que entienden que una ecuación en matemáticas se define como una igualdad establecida entre dos expresiones, en la cual puede haber una o más incógnitas que deben ser resueltas.

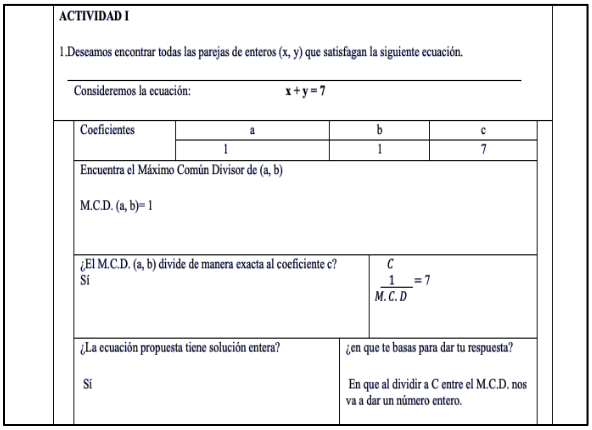
También observamos que, con base a estas experiencias de variación, los estudiantes de estos equipos identifican correctamente los coeficientes *a, b* y el término independiente *c*. Por lo que, no tuvieron problemas para encontrar el M.C.D de (a, b) en ambas ecuaciones.

De igual modo, lograron realizar el cociente c/M.C.D de (a, b) y notar que el resultado es un número entero en ambas ecuaciones. Al parecer ellos comienzan a tener una

---

[10] El término estructura se refiere a la forma en que una entidad se compone de partes, existiendo conexiones o relaciones entre las partes que componen dicha entidad (Hoch y Dreyfus, 2004).

vaga idea de que este resultado esta relacionado de alguna manera con que ambas ecuaciones tienen solución en números enteros. A continuación se muestran dos ejemplos de las respuestas escritas por los equipos E1 y E6.



ACTIVIDAD I

1.Deseamos encontrar todas las parejas de enteros (x, y) que satisfagan la siguiente ecuación.

Consideremos la ecuación: **x + y = 7**

Coeficientes	a	b	c
	1	1	7

Encuentra el Máximo Común Divisor de (a, b)

M.C.D. (a, b)= 1

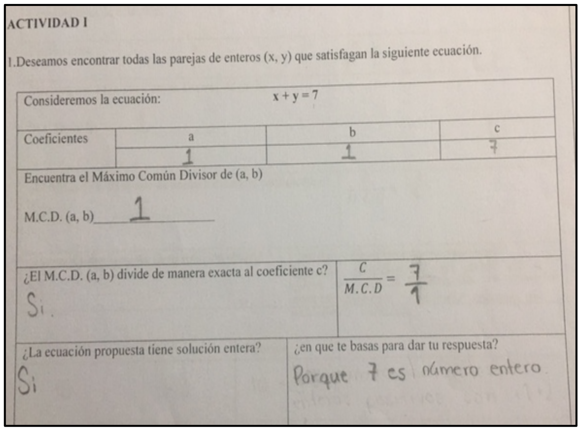
¿El M.C.D. (a, b) divide de manera exacta al coeficiente c?
Sí

$\frac{C}{M.C.D}$ 1 = 7

¿La ecuación propuesta tiene solución entera?
Sí

¿en que te basas para dar tu respuesta?
En que al dividir a C entre el M.C.D. nos va a dar un número entero.

Figura 4.17. Respuestas de Nadia y Dafné (E1)



ACTIVIDAD I

1.Deseamos encontrar todas las parejas de enteros (x, y) que satisfagan la siguiente ecuación.

Consideremos la ecuación: x + y = 7

Coeficientes	a	b	c
	1	1	7

Encuentra el Máximo Común Divisor de (a, b)

M.C.D. (a, b) 1

¿El M.C.D. (a, b) divide de manera exacta al coeficiente c?
Si.

$\frac{C}{M.C.D} = \frac{7}{1}$

¿La ecuación propuesta tiene solución entera?
Si

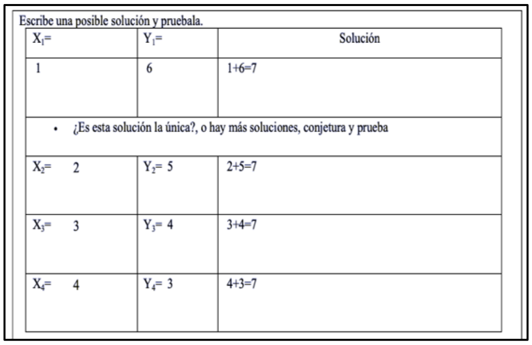
¿en que te basas para dar tu respuesta?
Porque 7 es número entero

Figura 4.18. Respuestas de Flor y Brenda (E6)

Una vez que los estudiantes intuyen que las ecuaciones propuestas en esta primera parte de la Tarea 2A si tienen solución en números enteros, pasaron a proponer algunas soluciones mediante tanteo y lograron encontrar un primer par de valores enteros (x_0, y_0) que satisface a cada una las ecuaciones.

Sin embargo, al cuestionarlos ¿Si era la única solución?, conjeturaron que no, que ambas ecuaciones pueden tener otras soluciones, lo que a su vez los llevó a buscar otros pares de números y probar que efectivamente son números enteros que satisfacen las respectivas ecuaciones.

Pirie y Martin (1997), señalan que si bien la ecuación algebraica desempeña un papel clave en el aprendizaje del álgebra, es un desafío para los estudiantes porque probablemente es la primera vez que realmente entienden el significado del signo igual obtenido de sus experiencias aritméticas anteriores. En las siguientes figuras 4.19 y 4.20 se muestran algunas respuestas obtenidas de los estudiantes de los equipos E1 y E3.



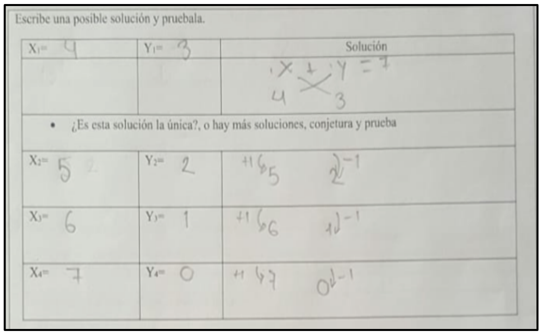
Escribe una posible solución y pruebala.

X_1=	Y_1=	Solución
1	6	1+6=7

- ¿Es esta solución la única?, o hay más soluciones, conjetura y prueba

X_2= 2	Y_2= 5	2+5=7
X_3= 3	Y_3= 4	3+4=7
X_4= 4	Y_4= 3	4+3=7

Figura 4.19. Respuesta de Nadia y Dafné (E1)



Escribe una posible solución y pruebala.

X_1= 4	Y_1= 3	Solución
		1x + 1y = 7 4 3

- ¿Es esta solución la única?, o hay más soluciones, conjetura y prueba

X_2= 5	Y_2= 2	+1 5 2 -1
X_3= 6	Y_3= 1	+1 6 1 -1
X_4= 7	Y_4= 0	+1 7 0 -1

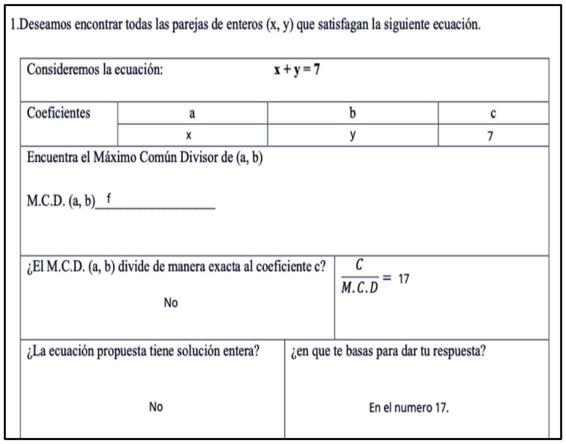
Figura 4.20. Respuesta de Ivan y Liliana (E3)

De acuerdo con Li et al., (2011), la esencia de un concepto puede ser resaltado contrastando formas estándar y no estándar, y las interpretaciones incorrectas del mismo pueden ser corregidas usando contraejemplos, como fue el caso de esta tarea.

Los equipos de trabajo E2 y E5 presentan dificultades como en la Tarea 1 ya que no han lograron identificar correctamente la estructura de las ecuaciones. Es decir, aún no han discernido que una ecuación se compone de partes, existiendo conexiones o relaciones entre las partes que la componen.

Por lo que, al no identificar correctamente los coeficientes *a, b* y el término independiente *c*, no lograron obtener el M.C.D de (a,b), al parecer aún no han discernido (desde los conocimientos previos de la aritmética) que el M.C.D es el mayor número que divide exactamente a dos o más números a la vez.

Como consecuencia de esto, las respuestas de estos estudiantes nos dan evidencia de que no han desarrollado un sentido estructural de las ecuaciones, por lo que nisiquiera tuvieron oportunidad de focalizar su atención en la característica crítica del cociente c/M.C.D de (a, b), que permite determinar si la ecuación diofántica lineal tiene o no soluciónes enteras. En las siguientes figuras 4.21 y 4.22 se muestran las respuestas escritas por los equipos E2 y E5.



1.Deseamos encontrar todas las parejas de enteros (x, y) que satisfagan la siguiente ecuación.

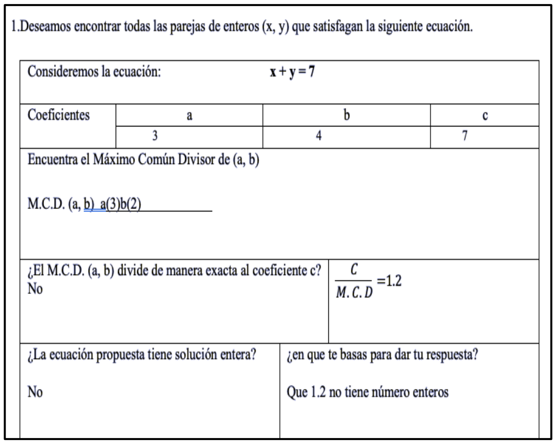
Consideremos la ecuación:	**x + y = 7**		
Coeficientes	a	b	c
	x	y	7

Encuentra el Máximo Común Divisor de (a, b)

M.C.D. (a, b)_f______________

¿El M.C.D. (a, b) divide de manera exacta al coeficiente c? No	$\frac{C}{M.C.D} =$ 17
¿La ecuación propuesta tiene solución entera? No	¿en que te basas para dar tu respuesta? En el numero 17.

Figura 4.21. Respuesta de Eduardo y America (E2)



1.Deseamos encontrar todas las parejas de enteros (x, y) que satisfagan la siguiente ecuación.

Consideremos la ecuación:	**x + y = 7**		
Coeficientes	a	b	c
	3	4	7

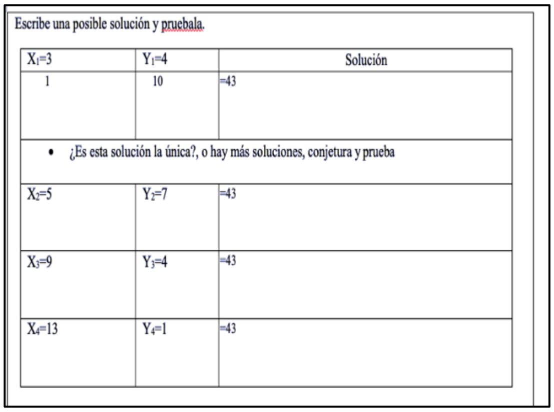
Encuentra el Máximo Común Divisor de (a, b)

M.C.D. (a, b) a(3)b(2)_____________

¿El M.C.D. (a, b) divide de manera exacta al coeficiente c? No	$\frac{C}{M.C.D}$ =1.2
¿La ecuación propuesta tiene solución entera? No	¿en que te basas para dar tu respuesta? Que 1.2 no tiene número enteros

Figura 4.22. Respuesta de sergio y Jesús (E5)

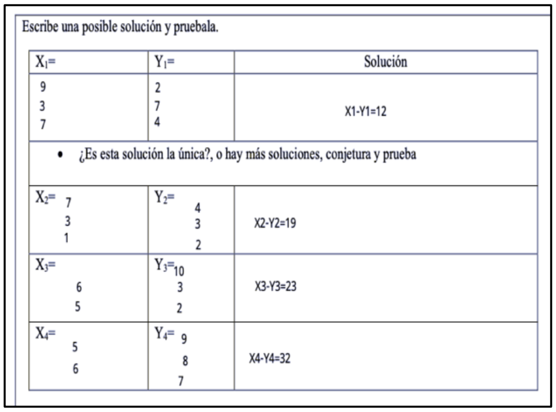
En el caso, cuando se les pide encontrar una solución posible y probarla, ambos equipos E2 y E5 anotan un primer par de números que no corresponde ni siquiera a la ecuación diofántica lineal propuesta y los siguientes pares escritos de igual manera, al parecer no tienen sentido. Lo que demuestra que no han discernido la tarea solicitada. En las siguientes figuras 4.23 y 4.24 se presentan las respuestas de estos dos equipos en esta sección.



Escribe una posible solución y pruebala.

X_1=3	Y_1=4	Solución
1	10	=43
• ¿Es esta solución la única?, o hay más soluciones, conjetura y prueba		
X_2=5	Y_2=7	=43
X_3=9	Y_3=4	=43
X_4=13	Y_4=1	=43

Figura 4.23. Respuesta de Eduardo y America (E2)



Escribe una posible solución y pruebala.

X_1=	Y_1=	Solución
9 3 7	2 7 4	X1-Y1=12
• ¿Es esta solución la única?, o hay más soluciones, conjetura y prueba		
X_2= 7 3 1	Y_2= 4 3 2	X2-Y2=19
X_3= 6 5	Y_3= 10 3 2	X3-Y3=23
X_4= 5 6	Y_4= 9 8 7	X4-Y4=32

Figura 4.24. Respuesta de sergio y Jesús (E5)

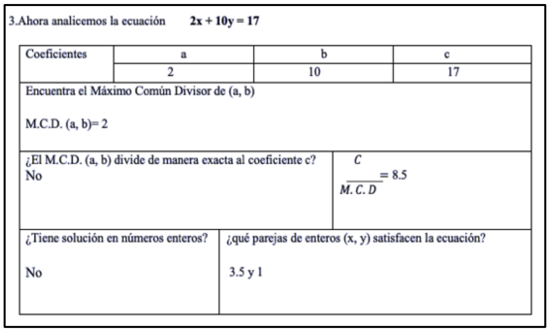
En la segunda sección de esta Tarea 2A, se propone la ecuación 2x + 10y =17 la cuál presenta una variación (por contraste, en los coeficientes *a* y *b* pares, mientras que *c* es impar) con respecto a las ecuaciones iniciales y se solicita a los estudiantes con base en el análisis de la sección anterior determinar si esta ecuación diofántica lineal tiene o no solución en números enteros y en caso de tenerla, encontrar un primer par de números enteros que sean solución. Esto al igual que en la primera sección utilizando el método por tanteo, formulando conjeturas y probandolas. De tal manera, que nuevamente el aprendizaje previsto es que focalicen su atención en la carácterística crítica del cociente c/M.C.D de (a,b), que determina matemáticamente si la ecuación tiene o no solución entera.

Desde la enseñanza con variación la ecuación diofántica 2x + 10y =17 no posee solución debido a que el M.C.D de (2, 10) = 2 y al realizar el cociente c/M.C.D de (a,b), el resultado es un número no entero. Es decir, no divide de manera exacta al término independiente c=17. Por lo que, la ecuación no tiene solución en números enteros.

En el caso de los equipos E1, E6, E7 y E8 logran discernir correctamente los coeficientes a, b y el término independiente c. Así mismo encuentran el M.C.D de (a, b) y realizan el cociente entre c y el M.C.D de (a, b) notando que no se obtiene un número exacto.

Sin embargo, al parecer no le pusieron mucha atención a esta carácterística, dejandola en segundo plano, ya que al intentar por el método de tanteo encontrar un par de números que sean solución de la ecuación propuesta, no logran encontrar alguno que satisfaga la ecuación; por lo que, focalizan nuevamente su atención en el cociente entre c y el M.C.D de (a, b), de las dos primeras ecuaciones propuestas en la primera parte de la Tarea 2A, comparandolos con el de esta última ecuación, notando que en las dos primeras el resultado del cociente es un número entero y en la tercera no lo es.

La focalización de esta característica crítica los llevo a discernir que cuando el cociente no da como resultado un número entero la ecuación propuesta no tiene solución, al menos no en los números enteros como interesa en este estudio. La siguientes figuras 4.25 y 4.26 son ejemplos de las respuestas escritas de los equipos E1 y E6.



3.Ahora analicemos la ecuación **2x + 10y = 17**

Coeficientes	a	b	c
	2	10	17

Encuentra el Máximo Común Divisor de (a, b)

M.C.D. (a, b)= 2

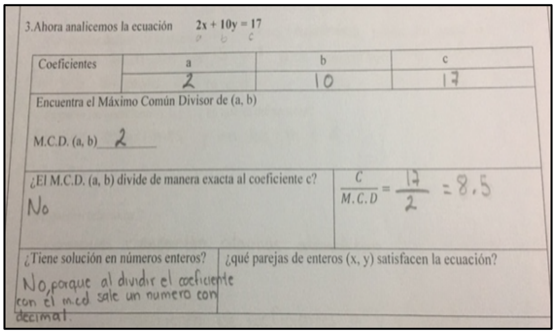
¿El M.C.D. (a, b) divide de manera exacta al coeficiente c?
No

$\frac{C}{M.C.D} = 8.5$

¿Tiene solución en números enteros?
No

¿qué parejas de enteros (x, y) satisfacen la ecuación?
3.5 y 1

Figura 4.25. Respuesta de Nadia y Dafné (E1)



3.Ahora analicemos la ecuación **2x + 10y = 17**
a b c

Coeficientes	a	b	c
	2	10	17

Encuentra el Máximo Común Divisor de (a, b)

M.C.D. (a, b) 2

¿El M.C.D. (a, b) divide de manera exacta al coeficiente c?
No

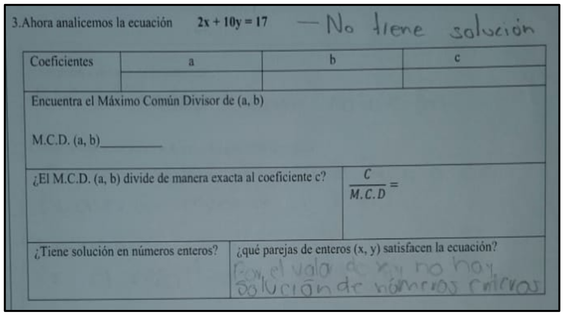
$\frac{C}{M.C.D} = \frac{17}{2} = 8.5$

¿Tiene solución en números enteros?
No, porque al dividir el coeficiente con el m.c.d sale un numero con decimal.

¿qué parejas de enteros (x, y) satisfacen la ecuación?

Figura 4.26. Respuesta de Flor y Brenda (E6)

Los equipos E3 y E4 lograron determinar que la ecuación no tiene solución en números enteros, pero no se ve claramente bajo que argumento se respaldan para afirmar su respuesta, ya que no hay eveidencia en las hojas de trabajo si realizaron o no las operaciones correspondientes. En las siguientes figuras 4.27 y 4.28 se muestran sus respuestas.



3.Ahora analicemos la ecuación **2x + 10y = 17** — No tiene solución

Coeficientes	a	b	c

Encuentra el Máximo Común Divisor de (a, b)

M.C.D. (a, b)__________

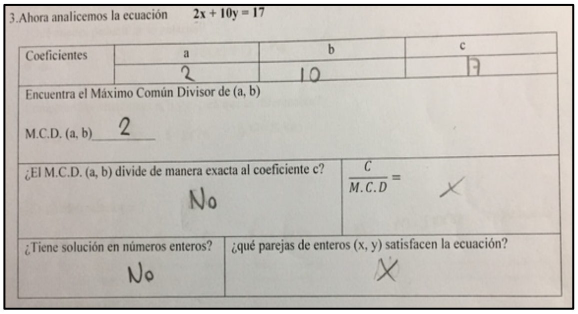
¿El M.C.D. (a, b) divide de manera exacta al coeficiente c?

$\frac{C}{M.C.D} =$

¿Tiene solución en números enteros?

¿qué parejas de enteros (x, y) satisfacen la ecuación?
Por el valor de x,y no hay Solución de números enteros

Figura 4.27. Respuesta de Ivan y Liliana (E3)



3.Ahora analicemos la ecuación **2x + 10y = 17**

Coeficientes	a	b	c
	2	10	17

Encuentra el Máximo Común Divisor de (a, b)

M.C.D. (a, b) 2

¿El M.C.D. (a, b) divide de manera exacta al coeficiente c?
No

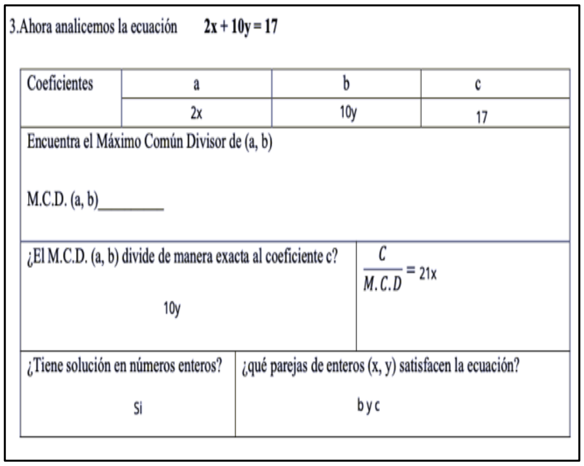
$\frac{C}{M.C.D} =$ X

¿Tiene solución en números enteros?
No

¿qué parejas de enteros (x, y) satisfacen la ecuación?
X

Figura 4.28. Respuesta de Monserrat y J. de Dios (E4)

Los equipos E2 y E5 tampoco en esta ocasión logran discenir que la ecuación propuesta no tienen solución en los enteros ya que presentaron dificultades nuevamente con la estructutra de la ecuación y con el M.C.D de (a,b) desde el inicio de la tarea. A pesar de ello, continuan realizando la tarea y contestando las preguntas, aunque de manera erronea sin llegar a un discernimiento y un argumento sólido, carecen de una comprensión conceptual completa. En las siguientes figuras 4.29 y 4.30 se presentan las respuestas de los equipos E2 y E5.



3.Ahora analicemos la ecuación **2x + 10y = 17**

Coeficientes	a	b	c
	2x	10y	17

Encuentra el Máximo Común Divisor de (a, b)

M.C.D. (a, b)________

¿El M.C.D. (a, b) divide de manera exacta al coeficiente c?

10y

$\frac{C}{M.C.D} = 21x$

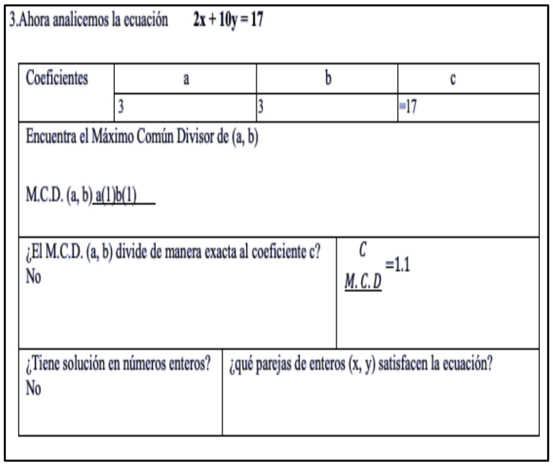
¿Tiene solución en números enteros?

Si

¿qué parejas de enteros (x, y) satisfacen la ecuación?

b y c

Figura 4.29. Respuestas de Eduardo y America (E2)



3.Ahora analicemos la ecuación **2x + 10y = 17**

Coeficientes	a	b	c
	3	3	=17

Encuentra el Máximo Común Divisor de (a, b)

M.C.D. (a, b) a(1)b(1)

¿El M.C.D. (a, b) divide de manera exacta al coeficiente c?
No

$\frac{C}{M.C.D} =1.1$

¿Tiene solución en números enteros?
No

¿qué parejas de enteros (x, y) satisfacen la ecuación?

Figura 4.30. Respuestas de sergio y Jesús (E5)

En la tercera y última sección de esta Tarea 2A, se propusieron ahora tres ecuaciones diofánticas lineales y al igual que en las secciones anteriores se continuo solicitando a los estudiantes identificar los coeficientes a, b y el término independiente c, así como encontrar el M.C.D de (a,b) y realizar el cociente c/M.C.D de (a,b) con la finalidad de focalizar nuevamente su atención en esta característica critica la cuál permite identificar de manera matemática (ya no por tanteo) cuál de las tres ecuaciones propuestas tiene o no solución en números enteros (aprendizaje previsto). Las ecuaciones propuestas fueron:

a) 2x – 5y = 9	**b) 2x – 6y = 9**	**c) 2x – 7y = 9**

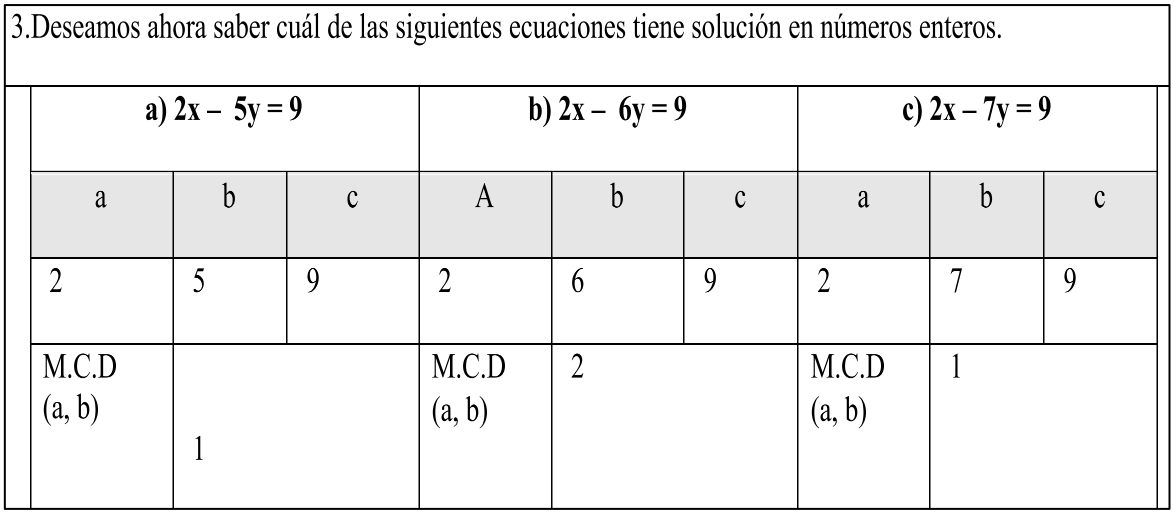
Tabla 4.3. Ecuaciones propuestas en la tarea 2A

Es importante destacar que en esta sección todos los estudiantes de los diferentes equipos notaron que en las tres ecuaciones el coeficiente $a = 2$ y el término independiente $c = 9$ (como *elementos invariantes*), y el signo de la operación es menos, mientras que lo que varía en cada una de ellas es el coeficiente *b*. Según Marton (2015), las actividades deben diseñarse de tal manera que los estudiantes estén sensibilizados para darse cuenta de las variaciones e invariaciones realizadas y que les dé la oportunidad de tomar conciencia de manera simultánea de las características críticas, en nuestro caso en las ecuaciones diofánticas lineales.

En el caso particular de los equipos E1, E4, E6, E7 y E8 logran al igual que en las secciones anteriores de las Tareas 1 y 2A identificar correctamente los coeficientes a, b y el término independiente c, así como obtener el M.C.D de (a,b) y realizar el cociente c/M.C.D de (a,b).

Al focalizar ahora primero su atención en el resultado de este cociente y notar que en el caso de las ecuaciones a) y c) el resultado es un número entero, disciernen que entonces estas ecuaciones si tienen solución en números enteros, mientras que en el cociente con la ecuación b) el resultado arroja un número no entero, por lo que ellos señalan que no se puede resolver al menos no en números enteros.

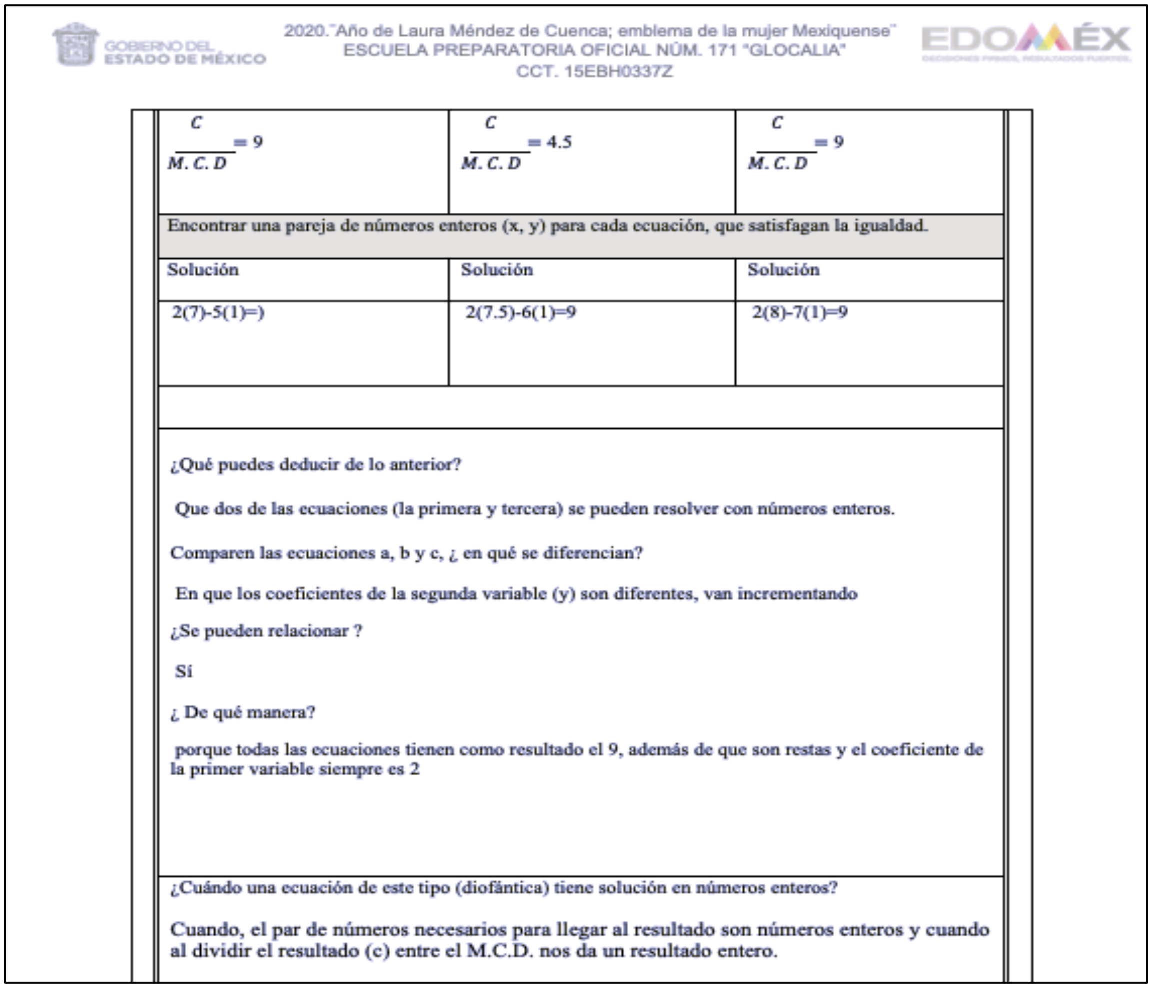
De esta experiencia de aprendizaje los estudiantes de estos equipos logran discernir que este tipo de ecuaciones sólo puede tener soluciones enteras sólo cuando *c* es divisible por el M.C.D de (a,b*)*, como lo señala Guelfond, (1979). En las siguientes figuras 4.31 y 4.32 se muestra un ejemplo de las respuestas del equipo E1.



3.Deseamos ahora saber cuál de las siguientes ecuaciones tiene solución en números enteros.

a) 2x – 5y = 9			**b) 2x – 6y = 9**			**c) 2x – 7y = 9**		
a	b	c	A	b	c	a	b	c
2	5	9	2	6	9	2	7	9
M.C.D (a, b)	1		M.C.D (a, b)	2		M.C.D (a, b)	1	

Figura 4.31. Respuestas de Nadia y Dafné (E1)



GOBIERNO DEL ESTADO DE MÉXICO

2020."Año de Laura Méndez de Cuenca; emblema de la mujer Mexiquense"
ESCUELA PREPARATORIA OFICIAL NÚM. 171 "GLOCALIA"
CCT. 15EBH0337Z

EDOMÉX

$\frac{C}{M.C.D} = 9$	$\frac{C}{M.C.D} = 4.5$	$\frac{C}{M.C.D} = 9$
Encontrar una pareja de números enteros (x, y) para cada ecuación, que satisfagan la igualdad.		
Solución	Solución	Solución
2(7)-5(1)=)	2(7.5)-6(1)=9	2(8)-7(1)=9

¿Qué puedes deducir de lo anterior?

Que dos de las ecuaciones (la primera y tercera) se pueden resolver con números enteros.

Comparen las ecuaciones a, b y c, ¿ en qué se diferencian?

En que los coeficientes de la segunda variable (y) son diferentes, van incrementando

¿Se pueden relacionar ?

Sí

¿ De qué manera?

porque todas las ecuaciones tienen como resultado el 9, además de que son restas y el coeficiente de la primer variable siempre es 2

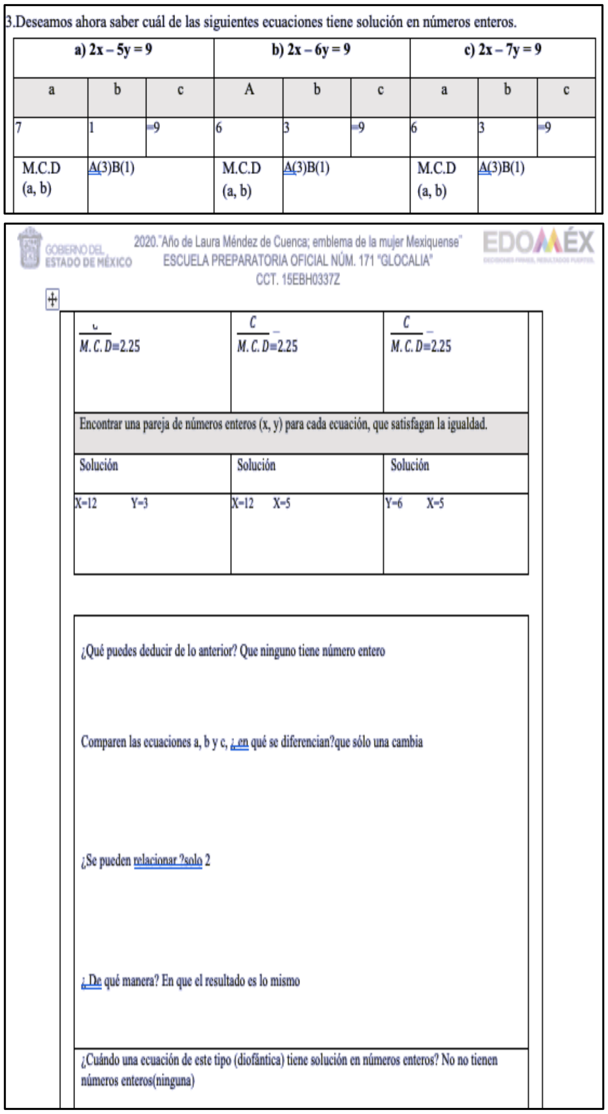
¿Cuándo una ecuación de este tipo (diofántica) tiene solución en números enteros?

Cuando, el par de números necesarios para llegar al resultado son números enteros y cuando al dividir el resultado (c) entre el M.C.D. nos da un resultado entero.

Figura 4.32. Respuestas de Nadia y Dafné (E1)

En el caso de los equipos E2 y E5 aún en esta tercera parte de la Tarea 2A continuan sin lograr entender los elementos de las expresiones y como se relacionan. En esta sección al menos logran focalizar su atención en las variaciones realizadas en las ecuaciones (p.e. que todas tienen el mismo signo y el mismo resultado).

Sin embargo, no logran discenir la caracteristica crítica de este conjunto de ecuaciones propuestas, esto debido a la falta de comprensión del M.C.D, de su relación con el término independiente *c* de las ecuaciones y de las propiedades de los números enteros. En las siguientes figuras 4.33 y 4.34 se presentan las respuestas obtenidas



3.Deseamos ahora saber cuál de las siguientes ecuaciones tiene solución en números enteros.

a) 2x – 5y = 9			b) 2x – 6y = 9			c) 2x – 7y = 9		
a	b	c	A	b	c	a	b	c
7	1	=9	6	3	=9	6	3	=9
M.C.D (a, b)	A(3)B(1)		M.C.D (a, b)	A(3)B(1)		M.C.D (a, b)	A(3)B(1)	

GOBIERNO DEL ESTADO DE MÉXICO

2020."Año de Laura Méndez de Cuenca; emblema de la mujer Mexiquense"
ESCUELA PREPARATORIA OFICIAL NÚM. 171 "GLOCALIA"
CCT. 15EBH0337Z

$\frac{C}{M.C.D}$=2.25	$\frac{C}{M.C.D}$=2.25	$\frac{C}{M.C.D}$=2.25
Encontrar una pareja de números enteros (x, y) para cada ecuación, que satisfagan la igualdad.		
Solución	Solución	Solución
X=12 Y=3	X=12 X=5	Y=6 X=5

¿Qué puedes deducir de lo anterior? Que ninguno tiene número entero

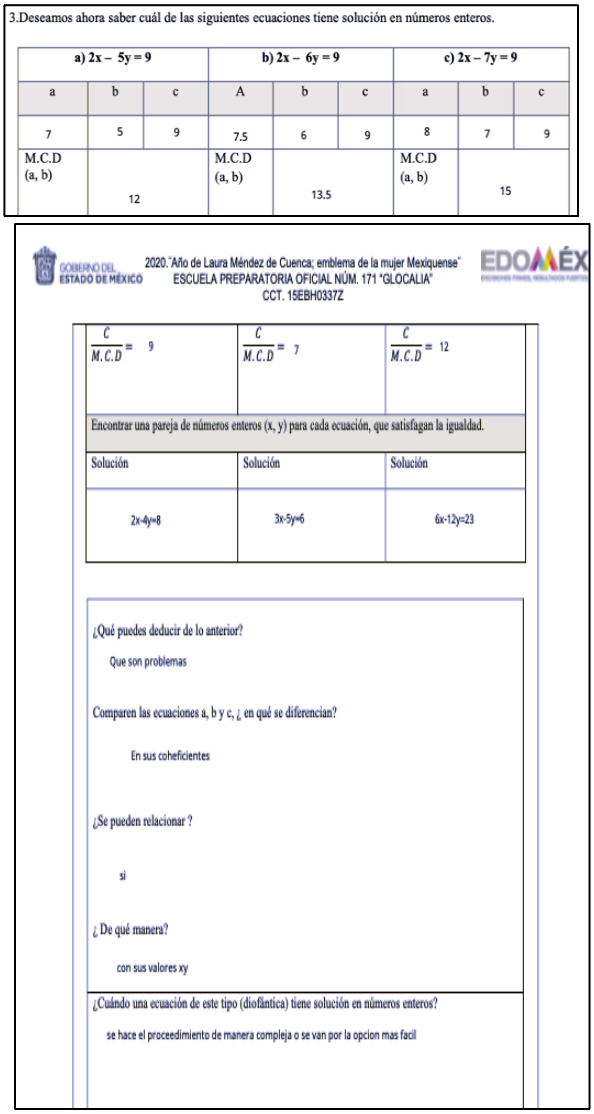
Comparen las ecuaciones a, b y c, ¿ en qué se diferencian?que sólo una cambia

¿Se pueden relacionar ?solo 2

¿ De qué manera? En que el resultado es lo mismo

¿Cuándo una ecuación de este tipo (diofántica) tiene solución en números enteros? No no tienen números enteros(ninguna)

Figura 4.33. Respuestas de America y Eduardo (E2)



3.Deseamos ahora saber cuál de las siguientes ecuaciones tiene solución en números enteros.

a) 2x – 5y = 9			b) 2x – 6y = 9			c) 2x – 7y = 9		
a	b	c	A	b	c	a	b	c
7	5	9	7.5	6	9	8	7	9
M.C.D (a, b)	12		M.C.D (a, b)	13.5		M.C.D (a, b)	15	

GOBIERNO DEL ESTADO DE MÉXICO

2020."Año de Laura Méndez de Cuenca; emblema de la mujer Mexiquense"
ESCUELA PREPARATORIA OFICIAL NÚM. 171 "GLOCALIA"
CCT. 15EBH0337Z

$\frac{C}{M.C.D}=$ 9	$\frac{C}{M.C.D}=$ 7	$\frac{C}{M.C.D}=$ 12
Encontrar una pareja de números enteros (x, y) para cada ecuación, que satisfagan la igualdad.		
Solución	Solución	Solución
2x-4y=8	3x-5y=6	6x-12y=23

¿Qué puedes deducir de lo anterior?

Que son problemas

Comparen las ecuaciones a, b y c, ¿ en qué se diferencian?

En sus coheficientes

¿Se pueden relacionar ?

si

¿ De qué manera?

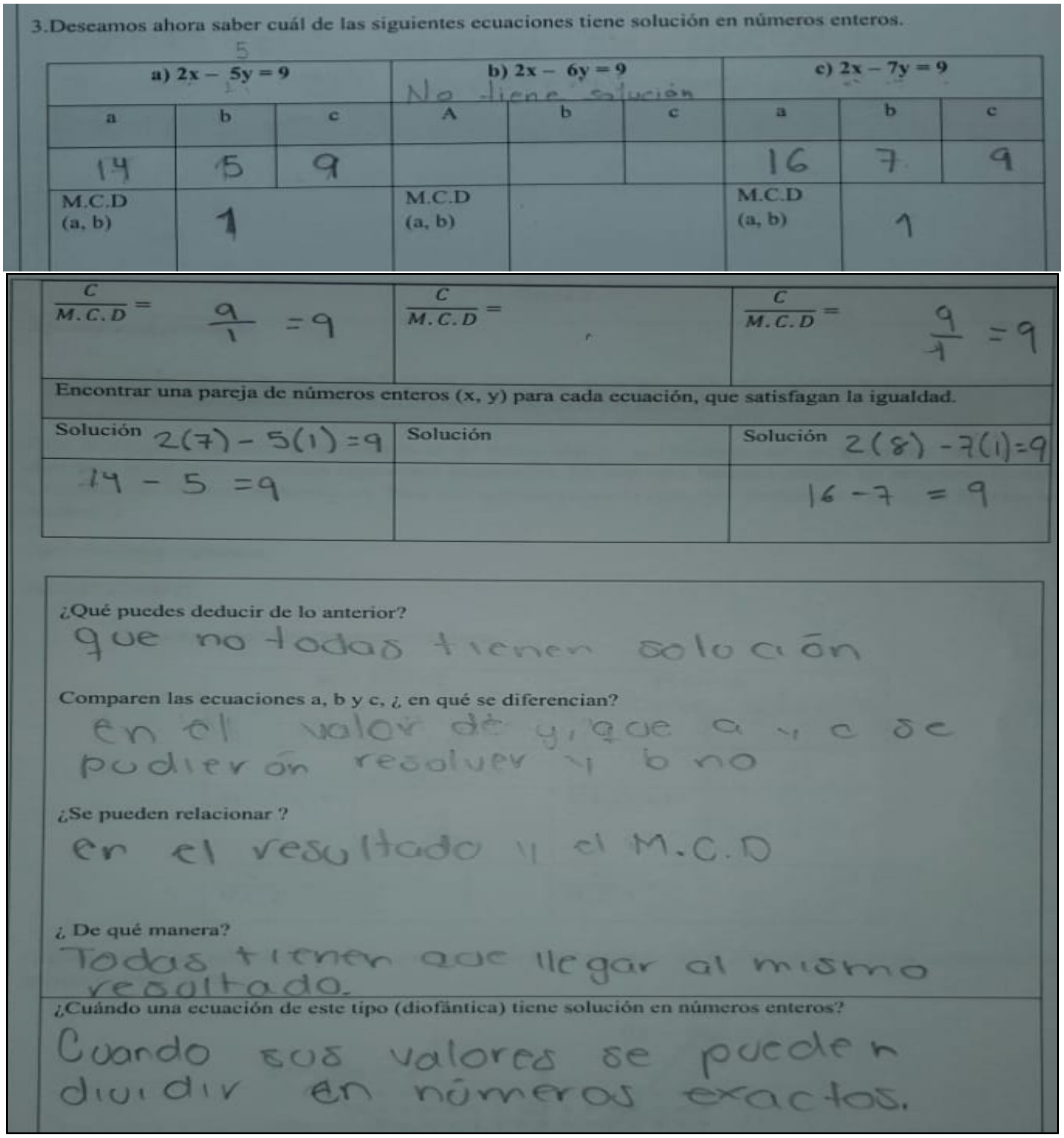
con sus valores xy

¿Cuándo una ecuación de este tipo (diofántica) tiene solución en números enteros?

se hace el procedimiento de manera compleja o se van por la opcion mas facil

Figura 4.34. Respuestas de Sergio y Jesús (E5)

En el caso del equipo E3, tuvo un pequeño retroceso en esta sección de la Tarea 2A, ya que no logra identificar correctamente los coeficentes *a, b* y el término independiente *c* de las ecuaciones. Sin embargo, si obtiene el M.C.D de (a, b) en las ecuaciones a) y c), y determina que la ecuación b) no tiene solución en números enteros. Por lo que, no esta claro si ha alcanzado el aprendizaje previsto o no. En la siguiente figura 4.35 se muestran las respuestas obtenidas del equipo E3.



3.Deseamos ahora saber cuál de las siguientes ecuaciones tiene solución en números enteros.

a) 2x − 5y = 9			b) 2x − 6y = 9 No tiene solución			c) 2x − 7y = 9		
a	b	c	A	b	c	a	b	c
14	5	9				16	7	9
M.C.D (a, b)	1		M.C.D (a, b)			M.C.D (a, b)	1	
$\frac{C}{M.C.D} =$	$\frac{9}{1} = 9$		$\frac{C}{M.C.D} =$			$\frac{C}{M.C.D} =$	$\frac{9}{1} = 9$	

Encontrar una pareja de números enteros (x, y) para cada ecuación, que satisfagan la igualdad.

Solución 2(7) − 5(1) = 9	Solución	Solución 2(8) − 7(1) = 9
14 − 5 = 9		16 − 7 = 9

¿Qué puedes deducir de lo anterior?

que no todas tienen solución

Comparen las ecuaciones a, b y c, ¿ en qué se diferencian?

en el valor de y, que a y c se pudierón resolver y b no

¿Se pueden relacionar ?

en el resultado y el M.C.D

¿ De qué manera?

Todas tienen que llegar al mismo resultado.

¿Cuándo una ecuación de este tipo (diofántica) tiene solución en números enteros?

Cuando sus valores se pueden dividir en números exactos.

Figura 4.35. Respuestas de Ivan y Liliana (E3)

Entre los errores más comunes que pueden cometer los estudiantes al contestar una tarea, hay algunos que tienen una relación más evidente con un sentido estructural poco desarrollado, es decir, que no distingan las estructuras que observan y/o no sepan cuáles son las manipulaciones válidas según dicha estructura, ni cuál de ellas es la más eficiente, que es el caso de los equipos E2, E5 y posiblemente E3.

Con las variaciones aplicadas a las ecuaciones presentadas a lo largo de las tres secciones de esta Tarea 2A y primera parte de la unidad de discernimiento dos, se ha presentado una propuesta que plantea el desarrollo de ideas básicas relacionadas con la aplicación de la teoría de la variación de Marton (2015) y con ello, focalizar la atención de los estudiantes en las caraterísticas críticas de las ecuaciones diofànticas lineales a partir de la implicación de los cuatro patrones de variación (C, S, G y F), para discenir cuando una ecuación de este tipo tiene solución en números enteros.

Esta es una manera novedosa (a partir de la teoría de la variación) de involucrar dichas ideas que, como en el caso Mexicano, son poco consideradas en los diferentes niveles escolares y en nuestro caso el bachillerato.

La mayor parte de los estudiantes participantes demostraron tener una mejor comprensión del concepto de ecuación y lograron sentar las bases para una mejor comprensión de lo que significan las soluciones de las ecuaciones. En esta tarea también se abrieron dos dimensiones de variación "*ecuaciones diofánticas*" y "*ecuaciones no diofánticas*", y las primeras se clasifican en "*ecuaciones diofánticas lineales con dos incógnitas por sólo tener solución en números enteros*".

Del análisis de las respuestas de los estudiantes en las hojas de trabajo de cada sección de esta Tarea 2A, se ha logrado evaluar la capacidad de respuesta de los estudiantes en una estructura jerárquica constituida por los cuatro niveles de la taxonomía SOLO considerados. Para ello, la clasificación se ha construido siguiendo los criterios recogidos en la tabla siguiente (Tabla 4.4).

Nivel de razonamiento alcanzado (taxonomía SOLO)	Equipo	Criterio	Interpretación y análisis
Pre-estructural: No se domina ningún aspecto crucial de la tarea	E2 y E5	No identifica los coeficientes *a, b* y el término independiente c de las ecuaciones. No encuentra el M.C.D de (a, b). Aplica el método del tanteo, pero no encuentra pares de números que satisfacen las ecuaciones y no focaliza su atención en el cociente entre c y el M.C.D de (a, b), para determinar si la ecuación tiene o no soluciones enteras.	Las respuestas que proporcionan los alumnos ante una determinada tarea son erróneas o inexistentes. El estudiante aún no comprende
Uniestructural: Se domina sólo un aspecto crucial de la tarea	E3	Identifica algunos de los coeficientes *a, b* y el término independiente c de las ecuaciones. No encuentra el M.C.D de (a, b).	El resultado del alumno, pese a poder ser cierto, sólo se centra en un determinado

		Aplica el método del tanteo, pero no encuentra pares de números que satisfacen las ecuaciones y tampoco focaliza su atención en el cociente entre c y el M.C.D de (a, b), para determinar si la ecuación tiene o no soluciones enteras.	aspecto que, por otro lado, no tiene por qué ser relevante Identifica sólo un aspecto del concepto.
Multiestructural: Se dominan varios aspectos cruciales de la tarea	E4	Identifica correctamente los coeficientes *a, b* y el término independiente c de las ecuaciones. Encuentra el M.C.D de (a, b). Aplica el método del tanteo, para encuentrar pares de números que satisfacen las ecuaciones, pero no focaliza su atención en el cociente entre c y el M.C.D de (a, b), para determinar si la ecuación tiene o no soluciones enteras.	En este caso el alumno es capaz de enumerar una serie de aspectos correctos, pero no va más allá Identifica varios aspectos del concepto, pero no tiene aún una visión completa.
Relacional: Relaciona entre si varios aspectos cruciales de la tarea	E1, E6, E7 y E8	Identifica correctamente los coeficientes *a, b* y el término independiente c de las ecuaciones. Encuentra el M.C.D de (a,b). Aplica el método del tanteo, para encontrar pares de números que satisfacen las ecuaciones y focaliza su atención en el cociente entre c y el M.C.D de (a,b), para determinar si la ecuación tiene o no soluciones enteras.	El alumno no sólo identifica varios aspectos correctos, sino que también es capaz de relacionarlos entre sí. Tiene una visión completa del concepto conformada por los diferentes aspectos del concepto.

Tabla 4.4. clasificación SOLO del nivel de estructura cognitiva de los estudiantes en la Tarea 2A

ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES A LA TAREA 2B[11]

Experiencia de Aprendizaje

En esta Tarea 2B, se presentaron dos ecuaciones diofánticas lineales con dos incógnitas, a saber con las cuales se abre una nueva dimensión de variación para los estudiantes, dado que las propuestas son ecuaciones del tipo, Identidad de Bezout (ax+by =1) y generales (ax+by = c donde c es ≠ de 0). De igual manera se aplica una nueva variación al presentar la representación gráfica de cada una de las ecuaciones y algunos puntos en el plano cartesiano (utilizando Geogebra), permitiendo tener un patrón de variación por contraste entre su representación símbolica y gráfica.

De igual manera que en la Tarea 2A, la tarea 2B se focalizó la atención de los estudiantes en la característica crítica del cociente c/M.C.D de (a, b), para discernir cuando

---

[11] Ver Tarea 2B en las hojas de trabajo para los estudiantes, las cuales aparecen en el Anexo 1 de esta tesis.

una ecuación diofántica lineal con dos incógnitas tiene o no solución entera. Para ello, al igual que en las tareas anteriores en un primer momento se solicitó identificar los coeficientes *a, b* y el término independiente *c*, así como encontrar el M.C.D de (a, b) y realizar el cociente c/M.C.D de (a, b), para determinar si las ecuaciones tienen o no solución entera.

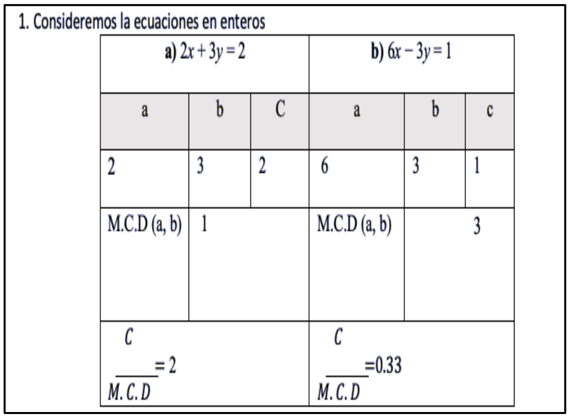
En un segundo momento se pidio a los estudiantes observar la gráfica de la ecuación 2x+3y =2 donde se localizan algunos puntos (x_o, y_o), tomar algunos y probar que son soluciones enteras de la ecuación.

Por otro lado, en el caso de la recta correspondiente a la ecuación 6x–3y =1, no se precisan los pares (x_o, y_o), que podrían corresponder a las soluciones. Por lo que, se les cuestionó si ¿tendría alguna? En este caso, se pidió a los estudiantes que conjeturarán y probarán.

Este diseño permitió a los estudiantes observar la relación entre cantidades y gráficos, y admitir diferentes puntos de vista y representaciones del concepto matemático (Heid, 1995; Yerushalmy & Chazan, 2008). La variación en la representación ayudó en la operatoria a realizar, prestando entonces atención (focalizando) plena a la ubicación de los puntos (x_o, y_o) como solución entera de las ecuaciones en sí mismas, sin que los cálculos los dispersarán.

Las respuestas de los estudiantes muestran el objeto de aprendizaje vivido y, por lo tanto, lo que fue posible discernir en esta tarea. En el primer momento de esta Tarea 2B, la mayoría de los equipos de trabajo E1, E2, E4, E6, E7 y E8 lograron identificar correctamente los coeficientes *a, b* y el término independiente *c,* de las expresiones sin problema. Encontraron el M.C.D de (a*, b*) y ahora si primero focalizaron su atención en la característica crítica del cociente entre *c* y el M.C.D de (a,b), para determinar si las ecuaciones propuestas tienen o no solución entera.

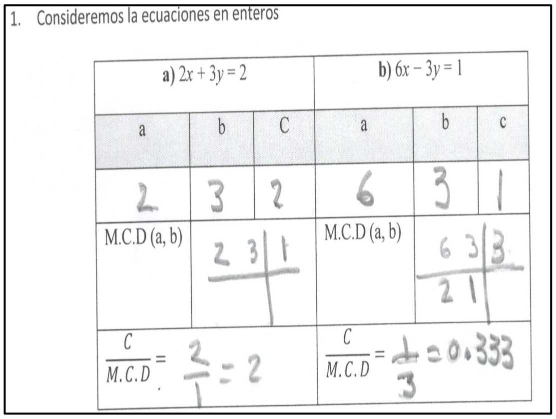
En las siguientes figuras (de la 4.36 a la 4.39) se muestran algunas evidencias de los procedimientos desarrollados y las respuestas registradas en las hojas de trabajo por estos equipos.



1. Consideremos la ecuaciones en enteros

a) $2x+3y=2$			b) $6x-3y=1$		
a	b	C	a	b	c
2	3	2	6	3	1
M.C.D (a, b)	1		M.C.D (a, b)	3	
$\frac{C}{M.C.D}=2$			$\frac{C}{M.C.D}=0.33$		

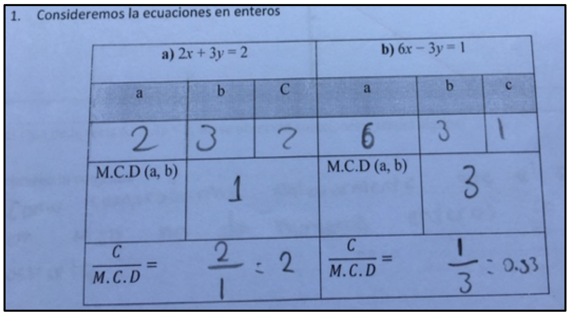
Figura 4.36. Respuestas de Dafné y Nadia (E1)



1. Consideremos la ecuaciones en enteros

a) $2x+3y=2$			b) $6x-3y=1$		
a	b	C	a	b	c
2	3	2	6	3	1
M.C.D (a, b)	2 3 | 1		M.C.D (a, b)	6 3 | 3 2 1	
$\frac{C}{M.C.D}=\frac{2}{1}=2$			$\frac{C}{M.C.D}=\frac{1}{3}=0.333$		

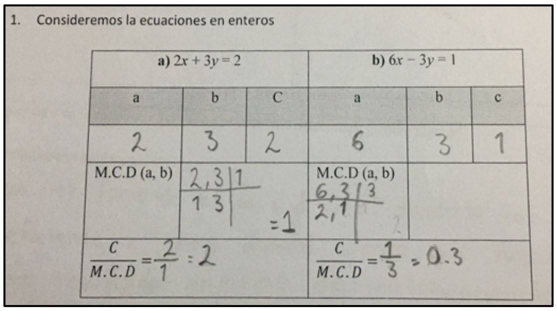
Figura 4.37. Respuestas de Yarinka y Gabriel (E8)



1. Consideremos la ecuaciones en enteros

a) $2x+3y=2$			b) $6x-3y=1$		
a	b	C	a	b	c
2	3	2	6	3	1
M.C.D (a, b)	1		M.C.D (a, b)	3	
$\frac{C}{M.C.D}=\frac{2}{1}=2$			$\frac{C}{M.C.D}=\frac{1}{3}=0.33$		

Figura 4.38. Respuestas de Monserrat y J. de Dios (E4)



1. Consideremos la ecuaciones en enteros

a) $2x+3y=2$			b) $6x-3y=1$		
a	b	C	a	b	c
2	3	2	6	3	1
M.C.D (a, b)	2,3 | 1 1 3 | =1		M.C.D (a, b)	6,3 | 3 2,1	
$\frac{C}{M.C.D}=\frac{2}{1}=2$			$\frac{C}{M.C.D}=\frac{1}{3}=0.3$		

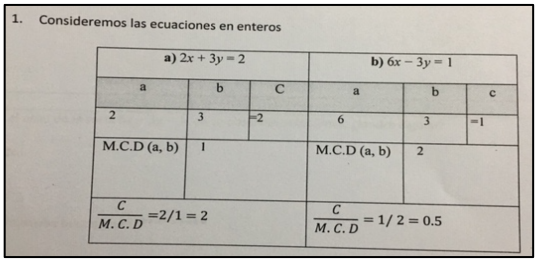
Figura 4.39. Respuestas de Flor y Brenda (E6)

El aprendizaje, desde el punto de vista de la teoría de la variación, implica diferenciación en lugar de acumulación (cf. Gibson y Gibson, 1955). Según Kullberg et al. (2017), en la teoría de la variación, comparar dos conceptos implica un patrón particular de variación llamado "contraste". Se podría argumentar que esto es similar a los contraejemplos, que a menudo se usan en matemáticas para justificar conjeturas y generalizaciones.

Los planes y programas del bachillerato (INEE, 2017) señalan que los alumnos deben interpretar situaciones reales, hipotéticas o formales que requieren de la utilización del pensamiento matemático. Deben Formular y resolver problemas, aplicando diferentes enfoques. Argumentando la solución obtenida de un problema con métodos numéricos, gráficos o analíticos (p. 108), como lo fue el caso en esta tarea.

En el caso del equipo E2, ahora si lograron identificar correctamente los coeficientes *a, b* y el término independiente *c* de las acuaciones. También obtienen correctamente el

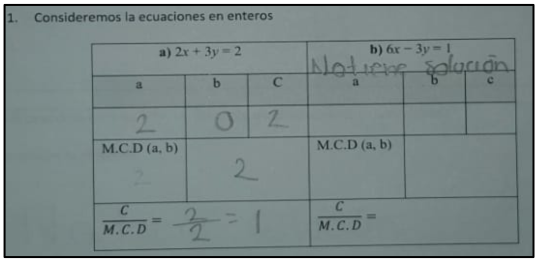
M.C.D de (a, b) de las dos ecuaciones. Sin embargo, en el equipo E3, a pesar de señalar correctamente que una de las ecuaciones no tiene solución, presentan dificultades tanto para identificar los coeficientes de las ecuaciones como para obtiener el M.C.D de cada una de ellas. Lo que demuestra al parecer que el confinamiento, la falta de interacción con el profesor y sus compañeros (aprendizaje en acción) por la situación de pandemia por COVID-19 impacto en estos estudiantes al presentar un retroceso en comprender la estructura de las ecuaciones y la tarea en si. En las figura 4.40 y 4.41 se presentan las respuestas obtenidas por estos equipos (E2 y E3).



1. Consideremos las ecuaciones en enteros

a) $2x + 3y = 2$			b) $6x - 3y = 1$		
a	b	C	a	b	c
2	3	=2	6	3	=1
M.C.D (a, b)	1		M.C.D (a, b)	2	
$\frac{C}{M.C.D}$ =2/1 = 2			$\frac{C}{M.C.D}$ = 1/ 2 = 0.5		

Figura 4.40. Respuestas de America y Eduardo (E2)



1. Consideremos la ecuaciones en enteros

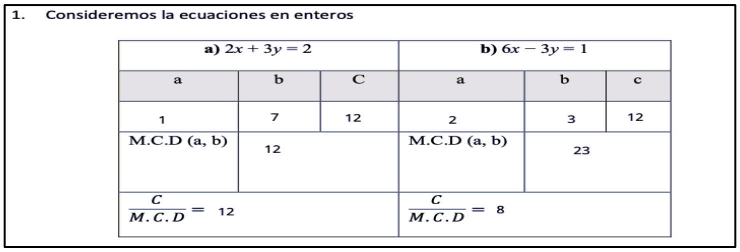
a) $2x + 3y = 2$			b) $6x - 3y = 1$ No tiene solución		
a	b	C	a	b	c
2	0	2			
M.C.D (a, b) 2	2		M.C.D (a, b)		
$\frac{C}{M.C.D} = \frac{2}{2} = 1$			$\frac{C}{M.C.D} =$		

Figura 4.41. Respuestas de Ivan y Liliana (E3)

El equipo E5 al igual que en la Tarea 1 y 2A continua sin lograr identificar correctamente los coeficientes de las ecuaciones y tampoco logra entender el concepto de MCD de (a, b). Por lo que, aunque contesta las actividades se ve claramente que carece de conocimientos previos consolidados.

En el caso de los equipos E2 y E5 al parecer es necesario primero reforzar el concepto de estructura de las ecuaciones, para posteriormente lograr focalizar su atención en aprender la característica crítica requerida, para determinar si una ecuación diofántica lineal con dos incógnitas tiene o no solución entera.

Consideramos que estos efectos se pudieron haber minimizado con el aprendizaje en acción que postula la teoría de la variación y que por situaciones de emergencia sanitaria por COVID-19 no se pudo llevar acabo. En la siguiente figura 4.42 se muestra las respuestas del equipo 5.



1. Consideremos la ecuaciones en enteros

a) $2x + 3y = 2$			b) $6x - 3y = 1$		
a	b	C	a	b	c
1	7	12	2	3	12
M.C.D (a, b)	12		M.C.D (a, b)	23	
$\frac{C}{M.C.D} =$ 12			$\frac{C}{M.C.D} =$ 8		

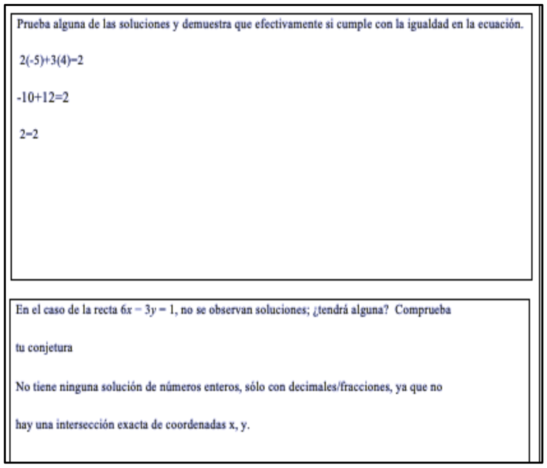
Figura 4.42. Respuestas de Sergio y Jesús (E5)

De acuerdo con Marton et al. (2004), el aprendizaje es un proceso en el que los alumnos desarrollan una determinada capacidad o una determinada forma de ver o experimentar; para ver algo de cierta manera, el alumno debe discernir ciertas características críticas del objeto de aprendizaje. De tal manera, que experimentar la variación es esencial para el discernimiento y, por lo tanto, es significativo para el aprendizaje del contenido.

Estos autores, argumentan que es importante atender lo que varía y lo que es invariable en una situación de aprendizaje. Por otro lado, de acuerdo con que señala Ausubel (1968), sólo estableciendo una conexión razonable y sustancial entre el conocimiento nuevo y antiguo de los alumnos puede tener lugar un aprendizaje significativo, y dicha conexión es razonable y esencial entre el conocimiento nuevo y algunos aspectos específicos de los conocimientos previos.

En la segunda sección de esta Tarea 2B, se les pidió a los estudiantes probar algunas de las soluciones presentadas (pares de x_0, y_0) en la recta de la ecuación 2x+3y =2 y demostrar que efectivamente cumplen con la igualdad en la ecuación. Así mismo, en el caso de la reprentación gráfica de la ecuación 6x–3y = 1, no se presentan las posibles soluciones a lo que se cuestiona ¿Tendrá alguna? En este caso, los estudiantes deben localizar en la representación gráfica de la ecuación algunos puntos (pares de x_0, y_0) que conjeturen que son soluciones de la ecuación y probrarlos.

En las siguientes figuras 4.43 y 4.44 se muestran las respuestas proporcionadas por los estudiantes de los equipos E1 y E8, dando cuenta del aprendizaje vivido alcanzado.



Prueba alguna de las soluciones y demuestra que efectivamente si cumple con la igualdad en la ecuación.

$2(-5)+3(4)=2$

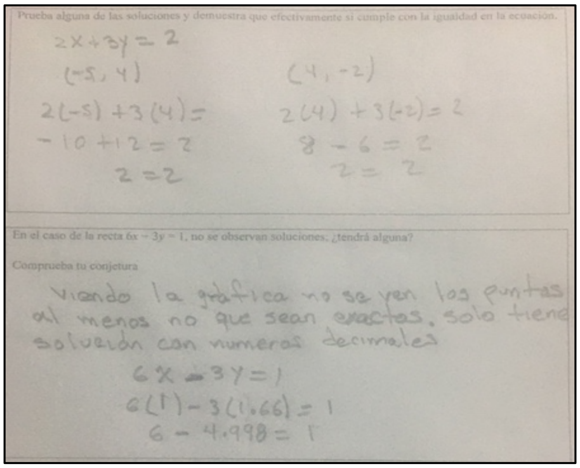
$-10+12=2$

$2=2$

En el caso de la recta $6x - 3y = 1$, no se observan soluciones; ¿tendrá alguna? Comprueba tu conjetura

No tiene ninguna solución de números enteros, sólo con decimales/fracciones, ya que no hay una intersección exacta de coordenadas x, y.

Figura 4.43. Respuestas de Dafné y Nadia (E1)



Prueba alguna de las soluciones y demuestra que efectivamente si cumple con la igualdad en la ecuación.

$2x+3y=2$

$(-5,4)$ $(4,-2)$

$2(-5)+3(4)=$ $2(4)+3(-2)=2$

$-10+12=2$ $8-6=2$

$2=2$ $2=2$

En el caso de la recta $6x - 3y = 1$, no se observan soluciones; ¿tendrá alguna?

Comprueba tu conjetura

Viendo la gráfica no se ven los puntos al menos no que sean exactos. solo tiene solución con numeros decimales

$6x-3y=1$

$6(1)-3(1.66)=1$

$6-4.998=1$

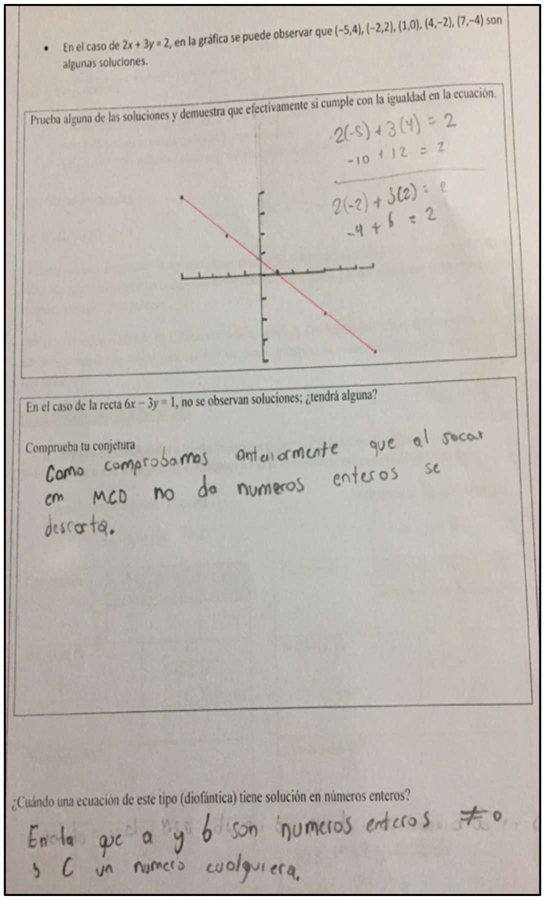
Figura 4.44. Respuestas de Yarinka y Gabriel (E8)

En ambos equipos los estudiantes identificarón los puntos fáciles de ver, lograron discenir que las soluciones enteras que corresponden a los pares $(x_0,y_0) \in Z$ de la recta $2x+3y=2$ ((−5,4), (−2,2), (1,0), (4,−2), (7,−4)) si son soluciones, ya que al realizar la sustitución algebraica compureban que cumplen con la igualdad. En el caso de la ecuación $6x-3y= 1$, lograron discernir que no tiene soluciones enteras, primero porque ahora si recurrieron a la característica crítica focalizada en las Tarea 1 y 2A del cociente entre *c* y el M.C.D de (a, b) como argumento para determinar si la ecuación tiene o no solución entera.

En este caso puesto que el M.C.D (6, 3) = 3 y el cociente 1/3 no es exacto. Segundo, discernieron que en la representación gráfica la condición de existencia de soluciones y el método para obtenerlas se basa en la localización de la intersección que corresponden a los pares de $(x_0, y_0) \in Z$ de la recta. Por lo tanto, esta tarea permitió que los estudiantes focalizaran su atención en la característica crítica para determinar si una ecuación diofántica lineal con dos incógnitas tiene o no solución y discernieran el procedimiento para obtener y comprobar las soluciones enteras desde dos perspectivas (numérica y gráfica).

De acuerdo con el INEE, (2017) el aprendizaje sustentado en la significación mediante el uso y el desarrollo del pensamiento matemático permite el conocimiento y la valoración de uno mismo, pues las racionalidades con las cuales argumentarán los procesos que conducen a un resultado serán consideradas y analizadas de manera conjunta. Este hecho promueve la actitud de sustentar una postura personal con base en los argumentos construidos para dar una respuesta matemática que no sólo refieran a la implementación de una operación y, o, regla, sino que se sustentan en una racionalidad contextualizada que fundamenta su argumentación.

Los equipos E2, E4, E6, y E7 lograron discenir que los pares $(x_0,y_0) \in Z$ de la recta $2x+3y=2$ $((-5,4), (-2,2), (1,0), (4,-2), (7,-4))$ si son soluciones al probar que si cumplen con la igualdad en la ecuación mediante la sustitución algebraica. Sin embargo, en el caso de la ecuación $6x-3y = 1$, no lograron discernir que en la representación gráfica las condiciones de existencia de soluciones y el método para obtenerlas se basa en la intersección que corresponden a los pares de $(x_0,y_0) \in Z$ de la recta y únicamente se quedaron con el argumento de que las ecuaciones diofánticas sólo tienen soluciones $x, y \in Z$ si y sólo si c/mcd (a, b) es exacto o entero. En las siguentes figuras 4.45 y 4.46 se muestran las respuestas obtenidas por los equipos E4 y E6.



- En el caso de $2x + 3y = 2$, en la gráfica se puede observar que (−5,4), (−2,2), (1,0), (4,−2), (7,−4) son algunas soluciones.

Prueba alguna de las soluciones y demuestra que efectivamente si cumple con la igualdad en la ecuación.

$2(-5) + 3(4) = 2$

$-10 + 12 = 2$

$2(-2) + 3(2) = 2$

$-4 + 6 = 2$

En el caso de la recta $6x - 3y = 1$, no se observan soluciones; ¿tendrá alguna?

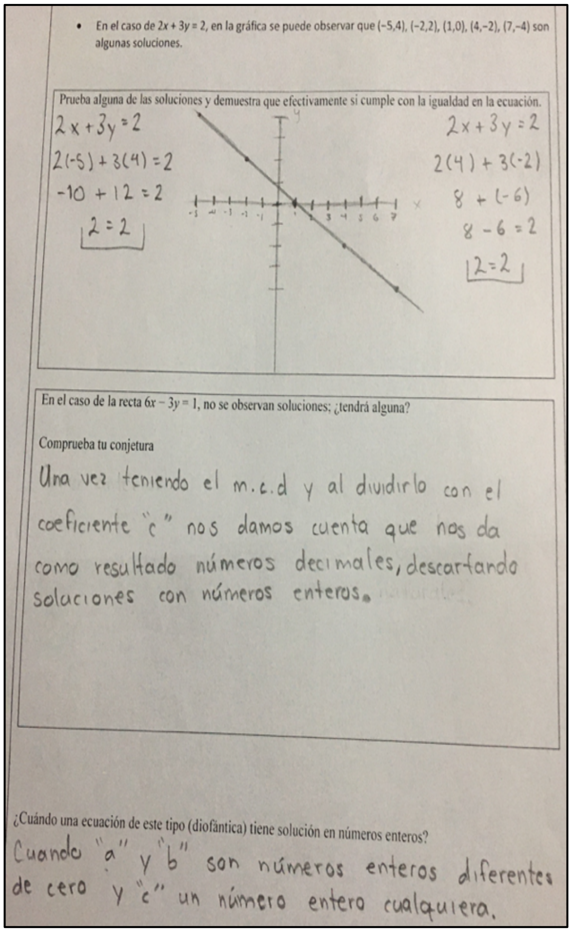
Comprueba tu conjetura

Como comprobamos antaiormente que al sacar em MCD no da numeros enteros se descarta.

¿Cuándo una ecuación de este tipo (diofántica) tiene solución en números enteros?

En la que a y b son numeros enteros ≠ 0 y C un numero cuolquiera.

Figura 4.45.Respuestas de Flor y Brenda (E6)



- En el caso de $2x + 3y = 2$, en la gráfica se puede observar que (−5,4), (−2,2), (1,0), (4,−2), (7,−4) son algunas soluciones.

Prueba alguna de las soluciones y demuestra que efectivamente si cumple con la igualdad en la ecuación.

$2x + 3y = 2$

$2(-5) + 3(4) = 2$

$-10 + 12 = 2$

$\boxed{2 = 2}$

$2x + 3y = 2$

$2(4) + 3(-2)$

$8 + (-6)$

$8 - 6 = 2$

$\boxed{2 = 2}$

En el caso de la recta $6x - 3y = 1$, no se observan soluciones; ¿tendrá alguna?

Comprueba tu conjetura

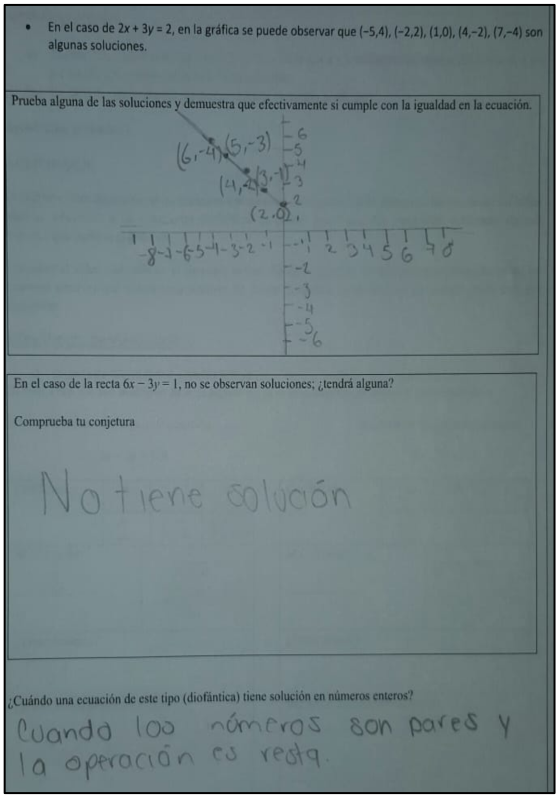
Una vez teniendo el m.c.d y al dividirlo con el coeficiente "c" nos damos cuenta que nos da como resultado números decimales, descartando soluciones con números enteros.

¿Cuándo una ecuación de este tipo (diofántica) tiene solución en números enteros?

Cuando "a" y "b" son números enteros diferentes de cero y "c" un número entero cualquiera.

Figura 4.46. Respuestas de Monserrat y J. de Dios (E4)

En el caso del equipo E3, no toman en cuenta los pares (x_0,y_0) señalados en la recta que representa a la ecuación 2x+3y= 2, para probar si son soluciones de la ecuación. Sin embargo, contestan correctamente que la ecuación 6x–3y= 1 no tiene solución entera. No obstante, en sus respuestas es evidente que aún no tienen consolidado el conocimiento, al no dar un argumento sólido. Finalmente en el equipo E5, continuan sin comprender la estructura y representación de las ecuaciones propuestas, ya que no lograron probar si los pares (x_0,y_0) $\in$ Z representados en la recta son soluciones de la ecuación 2x+3y =2, debido a la falta entendimiento al no saber que hacer con estos pares de (x_0,y_0). A continuación en las siguientes figuras 4.47 y 4.48 se muestran las respuestas de estos dos equipos.



- En el caso de $2x + 3y = 2$, en la gráfica se puede observar que (−5,4), (−2,2), (1,0), (4,−2), (7,−4) son algunas soluciones.

Prueba alguna de las soluciones y demuestra que efectivamente si cumple con la igualdad en la ecuación.

En el caso de la recta $6x - 3y = 1$, no se observan soluciones; ¿tendrá alguna?

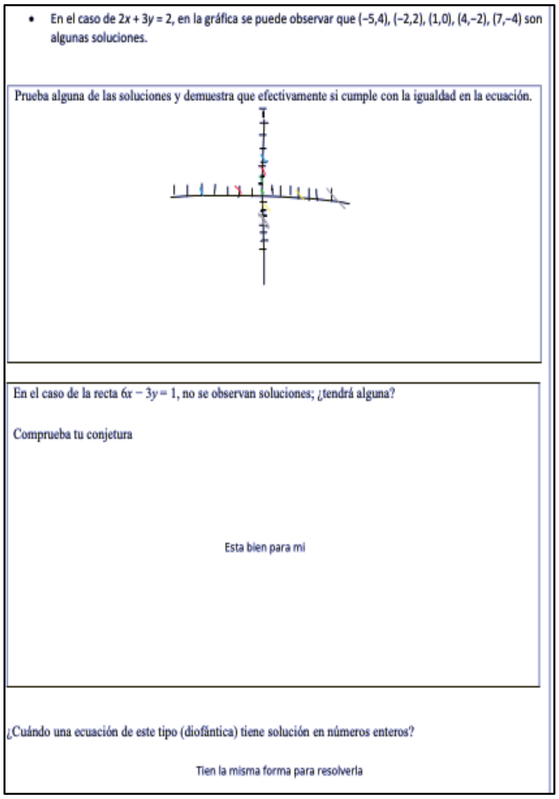
Comprueba tu conjetura

No tiene solución

¿Cuándo una ecuación de este tipo (diofántica) tiene solución en números enteros?

Cuando loo números son pares y la operación es resta.

Figura 4.47. Respuestas de Ivan y Liliana (E3)



- En el caso de $2x + 3y = 2$, en la gráfica se puede observar que (−5,4), (−2,2), (1,0), (4,−2), (7,−4) son algunas soluciones.

Prueba alguna de las soluciones y demuestra que efectivamente si cumple con la igualdad en la ecuación.

En el caso de la recta $6x - 3y = 1$, no se observan soluciones; ¿tendrá alguna?

Comprueba tu conjetura

Esta bien para mi

¿Cuándo una ecuación de este tipo (diofántica) tiene solución en números enteros?

Tien la misma forma para resolverla

Figura 4.86. Respuestas de Segio y Jesús (E5)

Dado que los objetos matemáticos son conceptuales e invisibles, el significado de las representaciones desempeña un papel importante en las matemáticas y en la educación matemática. La necesidad de representaciones para la comprensión fundamental de los conceptos matemáticos ya ha sido postulada por Duval (2006).

Por lo tanto, es importante que los alumnos trabajen desde el principio con múltiples representaciones del contenido matemático; de este modo, pueden beneficiarse de expresiones y puntos de vista complementarios de la materia y pueden mejorar y profundizar su comprensión (Ainsworth, 1999). Sin embargo, como profesor no basta con presentar múltiples representaciones a los alumnos. Es necesario que los alumnos construyan y comprendan las conexiones entre las diferentes representaciones y obtengan un modelo mental coherente (Seufert, 2003). Es el caso de los equipos E2, E3 y E5.

Del análisis de las respuestas de los estudiantes en las hojas de trabajo de cada sección de esta Tarea 2B, se ha logrado evaluar la capacidad de respuesta de los estudiantes en una estructura jerárquica constituida por los cuatro niveles de la taxonomía SOLO considerados. En la siguiente tabla 4.5 se muestra la clasificación de las respuestas obtenidas de los estudiantes en esta Tarea 2B.

Nivel de razonamiento alcanzado (taxonomía SOLO)	Equipo	Criterio	Interpretación y análisis
Pre-estructural: No se domina ningún aspecto crucial de la tarea	E5	No identifica los coeficientes a, b y el término independiente c de las ecuaciones, tampoco obtiene el M.C.D de (a, b). No demuestra que los pares de (x_0,y_0) propuestos de la ecuación 2x+ 3y= 2 cumplen con la igualdad y no logra discernir que en la gráfica de la ecuacion 6x – 3y =1 no se observan intersecciones (soluciones pares (*x*, *y*)) enteras. No relaciona el cociente ente c y el M.C.D de (a, b) para determeinar si la ecuación tiene o no soluciones enteras.	Las respuestas que proporcionan los alumnos ante una determinada tarea son erróneas o inexistentes. El estudiante aún no comprende
Uniestructural: Se domina sólo un aspecto crucial de la tarea	E3	Identifica algunos de los coeficientes *a, b* y el término independiente *c* de las ecuaciones. Obtiene el M.C.D de (a, b), pero no demuestra que los pares de (x_0,y_0) propuestos de la ecuación 2x+ 3y= 2 cumplen con la igualdad y no logra discernir que en la gráfica de la ecuacion 6x – 3y =1 no se observan intersecciones (soluciones pares (*x*, *y*)) enteras. No relaciona el cociente ente c y el M.C.D de (a, b) para determeinar si	El resultado del alumno, pese a poder ser cierto, sólo se centra en un determinado aspecto que, por otro lado, no tiene por qué ser relevante Identifica sólo un aspecto del concepto.

		la ecuación tiene o no soluciones enteras.	
Multiestructural: Se dominan varios aspectos cruciales de la tarea	E2, E4, E6, y E7	Identifica los coeficientes *a, b* y el término independiente *c* de las ecuaciones. Obtiene el M.C.D de (a, b), y demuestra que los pares de (x_0,y_0) propuestos de la ecuación 2x+ 3y= 2 cumplen con la igualdad. No logra discernir que en la gráfica de la ecuacion 6x – 3y =1 no se observan intersecciones (soluciones pares (*x*, *y*)) enteras, pero si relaciona el cociente entre *c* y el M.C.D de (a, b) para determinar si la ecuación tiene o no soluciones enteras.	En este caso el alumno es capaz de enumerar una serie de aspectos correctos, pero no va más allá Identifica varios aspectos del concepto, pero no tiene aún una visión completa.
Relacional: Relaciona entre si varios aspectos cruciales de la tarea	E1 y E8	Identifica los coeficientes *a, b* y el término independiente *c* de las ecuaciones. Obtiene el M.C.D de (a, b), y demuestra que los pares de (x_0,y_0) propuestos de la ecuación 2x+ 3y= 2 cumplen con la igualdad. Logra discernir que en la gráfica de la ecuacion 6x – 3y =1 no se observan intersecciones (soluciones pares (*x*, *y*)) enteras. Relaciona el cociente entre *c* y el M.C.D de (a, b) para determinar si la ecuación tiene o no soluciones enteras.	El alumno no sólo identifica varios aspectos correctos, sino que también es capaz de relacionarlos entre sí. Tiene una visión completa del concepto conformada por los diferentes aspectos del concepto.

Tabla 4.5. clasificación SOLO del nivel de estructura cognitiva de los estudiantes en la tarea 2B

De acuerdo con Leung, (2012) este proceso de *comprensión matemática* está secuenciado por una cadena de interacciones de variación donde la simultaneidad y el foco de atención juegan roles críticos.

Observese que el proceso consistió en una secuencia de interacciones de variación que aumenta en niveles sofisticados de contraste (percepción visual, propiedades, propiedades interrelacionadas) que reflejan la evolución de una idea que comienza desde una etapa primitiva hasta llegar a una etapa matemática más formal.

La conjunción de las Tareas 2A y 2B deja en claro que los tipos de variación y representación son muy importantes. La comprensión de las características críticas del objeto de aprendizaje no se puede hacer sin identificar, generalizar y abstraer varios tipos de ejemplos relacionados con los conceptos, ni se puede hacer sin juzgar y pensar en estos ejemplos. Li J., Peng A., Song N. (2011), señala que los tipos de variación utilizados en la enseñanza con variación deben centrarse en comprender las características críticas de los conceptos y surgir paso a paso de acuerdo con el nivel cognitivo de los estudiantes, y de ese modo garantizar una mejora sustancial de la calidad de aprendizaje de los estudiantes, en este caso para discernir cuando una ecuación de primer grado con dos incógnitas tiene o no solución entera.

4.1.3 UNIDAD DE DISCERNIMIENTO TRES

En caso de tener solución, ¿cómo encontrarla? (*solución particular)*

Para esta unidad de discerniento tres, se conjuntaron las Tareas 3A, 3B y 3C (ver Anexo 1) donde se utilizó la variación procedimental, ya que su objetivo es proveer un proceso de formación etapa por etapa en el cuál la experiencia de los estudiantes en la resolución de problemas (ecuaciones diofánticas lineales del tipo general) se manifiesta por la variación de problemas y en la variedad de transferencia de estrategias (Lai & Murray, 2012).

De acuerdo con Lim, (2007) cuando los docentes utilizan la variación procedimental con el uso de diversos métodos de solución para un problema dado, esta variación da a los estudiantes una amplia oportunidad de trabajar y perfeccionar sus habilidades matemáticas.

El aprendizaje previsto en esta unidad de discernimiento es que los estudiantes toda vez que ya han discernido la característica crítica para determinar cuando una ecuación diofántica lineal con dos incógnitas tiene o no solución entera, ahora logre discernir que en caso de tener solución, como encontrar una primera solución llamada solución particular. Para ello, en el diseño de estas tres tareas se tomó en cuenta tres criterios (procedimientos matemáticos), para encontrar una solución particular.

1. Criterio de Divisibilidad o Multiplicidad
2. Criterio de Cifras Términales
3. Cirterio de la División

ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES A LA TAREA 3A[12]

Experiencia de Aprendizaje

El aprendizaje previsto en esta Tarea 3A, nuevamente fue que los estudiantes lograrán disernir cuando una ecuación diofántica lineal con dos incógnitas del tipo $ax + by = c$, donde los coeficientes *a, b* son nuéros enteros y el término independiente *c* es diferente de cero (llamadas generales), tiene o no solución entera y en caso de tenerla como encontrar una primera llamada solución particular.

Para ello, se utilizó como procedimiento de solución el *Criterio de Divisibilidad o Multiplicidad*, donde se focalizó la atención de los estudiantes en discernir que la característica crítica para usar este criterio es cuando el término independiente *c* es divisible por alguno de los coeficientes *a* o *b*. En este caso, el valor de la otra variable deberá ser múltiplo también de *c*.

Para ello, se propusieron dos ecuaciones diofánticas lineales con dos incógnitas (del tipo, generales), donde se utilizó un patrón de variación por contraste, separación y generalización en un problema con múltiples cambios (OPMC, One Problem, Multiple Changes): donde se extiende el problema original variando las características críticas, cambiando los resultados y haciendo generalizaciones (Lai & Murray, 2012).

En esta Tarea 3A, al igual que en las anteriores, se solicitó a los estudiantes identificar primero los coeficientes *a*, *b* y el término independiente *c* de las ecuaciones, así como obtener el M.C.D de (a, b) y realizar el cociente *c*/M.C.D de (a, b), para determinar si ambas ecuaciones tienen solución entera o no. De acuerdo con Leung (2012), el contraste tambien consiste en discernir si algo satisface una determinada condición o no, es decir, si algo "es" o "no es".

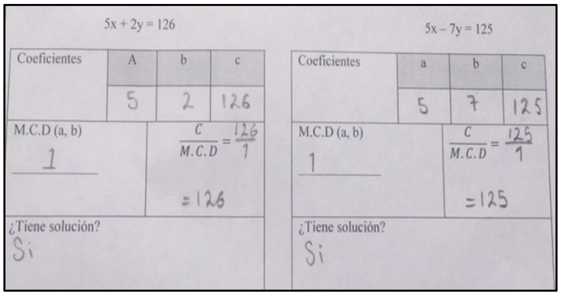
En esta tarea, los equipos E1, E4, E6, E7 y E8 identificaron corretamente los coeficientes *a*, *b* y el térnimo indepenidente *c* de las ecuaciones propuestas y obtuvieron el M.C.D de (a, b) en ambos casos.

De este modo, lograron discernir una de las caracteristicas críticas (analizada en las tareas anteriores) al realizar la división de *c*/M.C.D de (a, b) y ver que el resultado es un número entero. Por lo que, con este conocimiento previo determinaron que ambas ecuaciones

---

[12] Ver Tarea 3A en las hojas de trabajo para los estudiantes, las cuales aparecen en el Anexo 1 de esta tesis.

si tienen solución en números enteros. En las siguientes figuras (de la 4.49 a la 4.52) se muestran algunos ejemplos de las respuestas registradas en las hojas de trabajo.



$5x + 2y = 126$

Coeficientes	A	b	c
	5	2	126

M.C.D (a, b)
1

$\frac{C}{M.C.D} = \frac{126}{1}$
$= 126$

¿Tiene solución?
Si

$5x - 7y = 125$

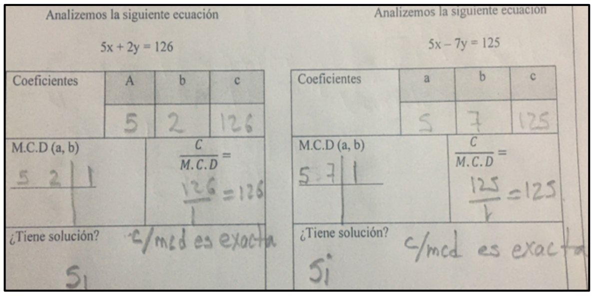
Coeficientes	a	b	c
	5	7	125

M.C.D (a, b)
1

$\frac{C}{M.C.D} = \frac{125}{1}$
$= 125$

¿Tiene solución?
Si

Figura 4.49. Respuestas de Dafné y Nadia (E1)



Analizemos la siguiente ecuación

$5x + 2y = 126$

Coeficientes	A	b	c
	5	2	126

M.C.D (a, b)
5 2 | 1

$\frac{C}{M.C.D} =$
$\frac{126}{1} = 126$

¿Tiene solución? c/mcd es exacta
Si

Analizemos la siguiente ecuación

$5x - 7y = 125$

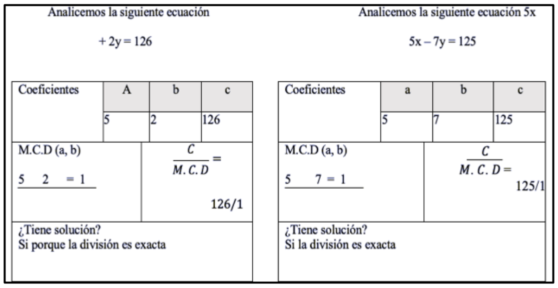
Coeficientes	a	b	c
	5	7	125

M.C.D (a, b)
5 7 | 1

$\frac{C}{M.C.D} =$
$\frac{125}{1} = 125$

¿Tiene solución? c/mcd es exacta
Si

Figura 4.50. Respuestas de Yarinka y Gabriel (E8)



Analicemos la siguiente ecuación

$+ 2y = 126$

Coeficientes	A	b	c
	5	2	126

M.C.D (a, b)
5 2 = 1

$\frac{C}{M.C.D} =$
126/1

¿Tiene solución?
Si porque la división es exacta

Analicemos la siguiente ecuación 5x

$5x - 7y = 125$

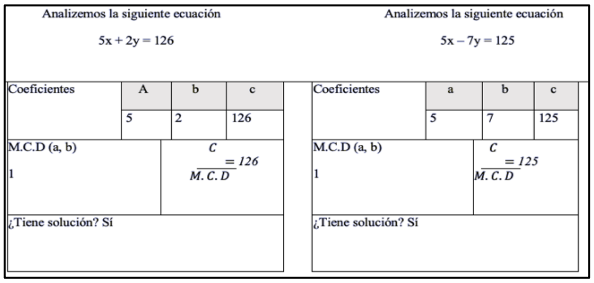
Coeficientes	a	b	c
	5	7	125

M.C.D (a, b)
5 7 = 1

$\frac{C}{M.C.D} =$
125/1

¿Tiene solución?
Si la división es exacta

Figura 4.51. Respuestas de Flor y Brenda (E6)



Analizemos la siguiente ecuación

$5x + 2y = 126$

Coeficientes	A	b	c
	5	2	126

M.C.D (a, b)
1

$\frac{C}{M.C.D} = 126$

¿Tiene solución? Sí

Analizemos la siguiente ecuación

$5x - 7y = 125$

Coeficientes	a	b	c
	5	7	125

M.C.D (a, b)
1

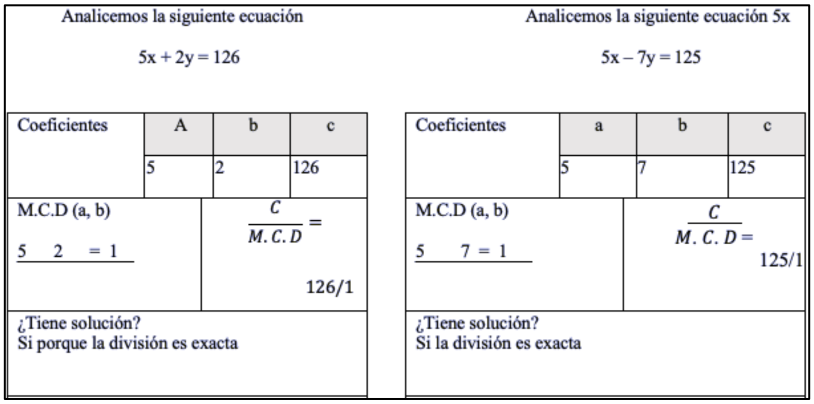
$\frac{C}{M.C.D} = 125$

¿Tiene solución? Sí

Figura 4.52. Respuestas de Jaqueline y Ariana (E7)

En el equipo E2, esta vez si logran identificar correctamente los coeficientes *a, b* y el término independiente *c* de las dos ecuaciones propuestas y obtener el M.C.D de (a, b). Esto supone al parecer que hay un avance respecto al desarrollo del sentido de estructura de las ecuaciones algebraicas focalizado desde las tareas anteriores, dado que en esta ocasión pudo haber ayudado el feedback proporcionado por el video tutorial sobre la aplicación del criterio de divisibilidad o multiplicidad a este tipo de ecuaciones y que, fue propuesto para esta tarea, con la finalidad de apoyar a los estudiantes dada la situación de confinamiento por la Pandemia de COVID-19.

Por otro lado, Watson y Mason (2006) sugieren que es la estructura del ejercicio en su conjunto, no los elementos individuales, que promueven la creación de sentido matemático común (p. 97), como lo fue en esta tarea. En la siguiente figura 4.53 se muestra un ejemplo de las respuestas del equipo 2 (E2).



Analicemos la siguiente ecuación

$5x + 2y = 126$

Coeficientes	A	b	c
	5	2	126

M.C.D (a, b)

5 2 = 1

$\frac{C}{M.C.D} =$ 126/1

¿Tiene solución?
Si porque la división es exacta

Analicemos la siguiente ecuación 5x

$5x – 7y = 125$

Coeficientes	a	b	c
	5	7	125

M.C.D (a, b)

5 7 = 1

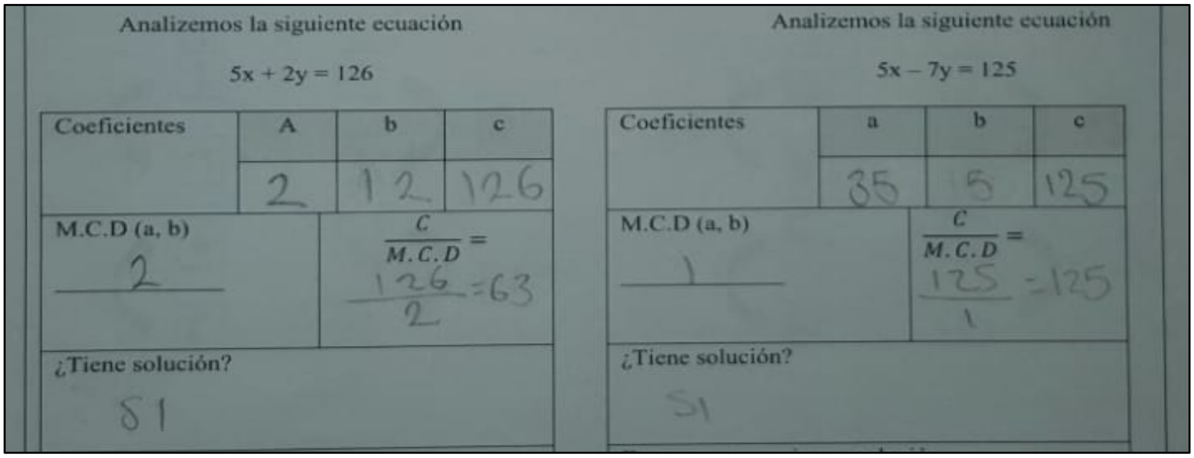
$\frac{C}{M.C.D} =$ 125/1

¿Tiene solución?
Si la división es exacta

Figura 4.53. Respuestas de America y Eduardo

El quipo 3, presenta nuevamente dificultades para identificar correctamente los coeficientes *a, b* y el término independiente *c* en ambas ecuaciones. Por lo que tampoco logran obtener el MCD de (a,b).

Sin embargo, responden que ambas ecuaciones si tienen solución en números enteros, pero sus respuestas no tienen fundamento ya que aún no han entendido la característica crítica de que las ecuaciones diofánticas sólo tienen soluciones $x, y \in Z$ si y sólo si c/M.C.D de (*a*, *b*) es exacto. En la siguiente figura 4.54 se muestran las respuestas obtenidas.



Analizemos la siguiente ecuación

$5x + 2y = 126$

Coeficientes	A	b	c
	2	12	126

M.C.D (a, b)

2

$\frac{C}{M.C.D} = \frac{126}{2} = 63$

¿Tiene solución?

SI

Analizemos la siguiente ecuación

$5x – 7y = 125$

Coeficientes	a	b	c
	35	5	125

M.C.D (a, b)

1

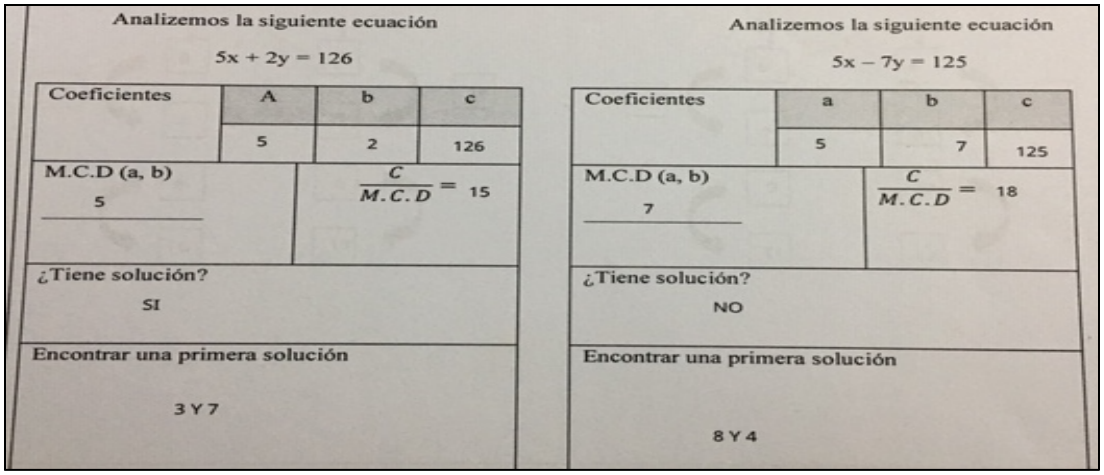
$\frac{C}{M.C.D} = \frac{125}{1} = 125$

¿Tiene solución?

SI

Figura 4.54. Respuestas de Ivan y liliana (E3)

En el equipo 5, si logran identificar correctamente los coeficientes *a*, *b* y el término independiente *c*, pero siguen sin lograr obtener el M.C.D de (a, b). Por lo que, continúan sin discernir las variaciones realizadas a las ecuaciones y por consiguiente las características críticas que se presentan en esta tarea para determinar si las ecuaciones tienen o no solución en números enteros. En la siguiente figura 4.55 se muestran las respuestas obtenidas.



Analizemos la siguiente ecuación

$5x + 2y = 126$

Coeficientes	A	b	c
	5	2	126

M.C.D (a, b) 5

$\frac{C}{M.C.D} = 15$

¿Tiene solución? SI

Encontrar una primera solución 3 Y 7

Analizemos la siguiente ecuación

$5x - 7y = 125$

Coeficientes	a	b	c
	5	7	125

M.C.D (a, b) 7

$\frac{C}{M.C.D} = 18$

¿Tiene solución? NO

Encontrar una primera solución 8 Y 4

Figura 4.55. Respuestas de de Sergio y Jesús (E5)

Como ya se menciono en la parte superior de este análisis de la Tarea 3A, en esta tarea se presentó como herramienta el video tutorial (en youtube) como un medio para la continuación del proceso de aprendizaje independiente debido a los efectos producidos por la pandemia de COVID-19 y el confinamiento santiario que sufre en este momento la población, que de acuerdo a Castillo y Carrillo (2012: 69), supera la limitación de la presencialidad obligatoria.

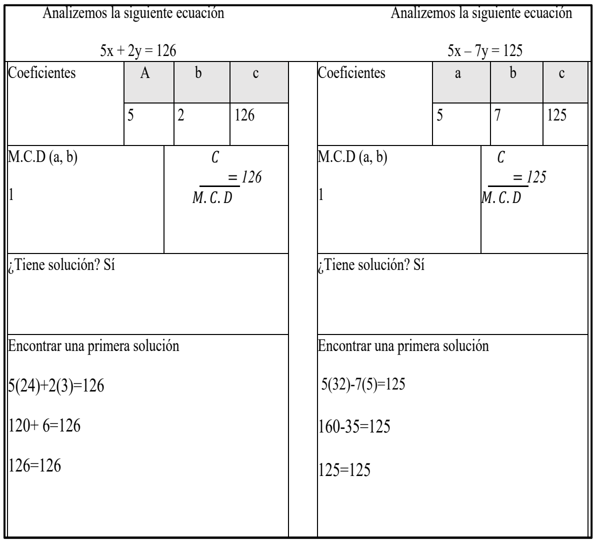
En ese esentido, el video tiene esa característica especial que ilustra lo que se está contando, de ver como se hace, poderlo grabar y después reproducir al antojo del usuario, permitiendo en este caso el discernimiento del criterio de divisibilidad o multiplicidad.

Los equipos (E1, E4, E6, E7 y E8), lograron identificar correctamente los coeficientes *a, b* y el término independiente *c,* de las expresiones sin problema. Encontraron el M.C.D de (a*, b*) y focalizaron su atención en la característica crítica del cociente entre c y el M.C.D de (a, b), para determinar si las ecuaciones propuestas tienen o no solución entera.

Aplicaron correctamente el Criterio de divisibilidad o multiplicidad al discernir que en el caso de la primera ecuación 5x +2y= 126 el coeficiente a = 5 no es múltiplo de 126, pero que b=2 si es múltiplo de 126; por lo que es necesario transformar el término 5x en múltiplo de 2, ya que de acuerdo a las propiedades de los números (un número par por otro número par da por resultado otro número par) al sumar los términos 5x + 2x el resultado deberá seguir siendo múltiplo de 2.

En el caso de la segunda ecuación 5x - 7y= 125 se aplica una variación en el término *bx* y *c* dejando invariante al término *ax*, también se aplica la variación del signo de la operación de más a menos (variación por contraste).

Los estudiantes de estos equipos nuevamente logran discernir que 5 es múltiplo de 125 y 7 no lo es. Por lo que, transforman el término 7y en múltiplo de 5, nuevamente de acuerdo a la propiedad de los números (un número impar por otro número impar será un número impar) al restar los términos 5x - 7y deberá ser múltiplo de 5. Con la aplicación de este procedimiento ellos encuentran una solución particular para ambas ecuaciones. En las siguientes figuras (de la 4.56 a la 4.59) se muestran las respuestas escritas por los estudiantes de estos equipos.



Analizemos la siguiente ecuación

5x + 2y = 126

Coeficientes	A	b	c
	5	2	126

M.C.D (a, b)
1

$\frac{C}{M.C.D} = 126$

¿Tiene solución? Sí

Encontrar una primera solución

5(24)+2(3)=126

120+ 6=126

126=126

Analizemos la siguiente ecuación

5x – 7y = 125

Coeficientes	a	b	c
	5	7	125

M.C.D (a, b)
1

$\frac{C}{M.C.D} = 125$

¿Tiene solución? Sí

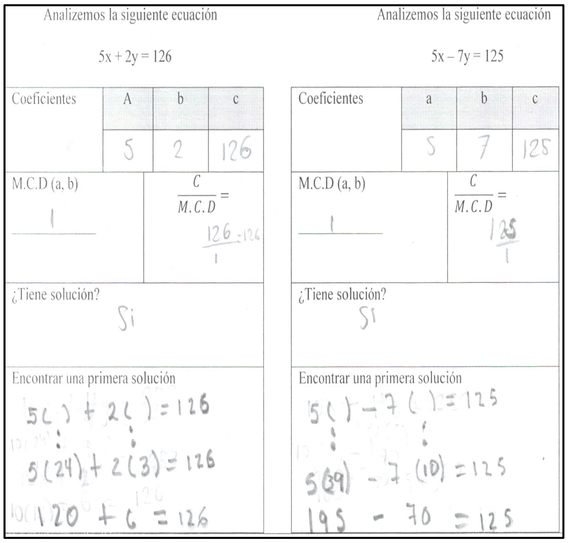
Encontrar una primera solución

5(32)-7(5)=125

160-35=125

125=125

Figura 4.56. Respuestas de Dafné y Nadia (E1)



Analizemos la siguiente ecuación

5x + 2y = 126

Coeficientes	A	b	c
	5	2	126

M.C.D (a, b)
1

$\frac{C}{M.C.D} =$
$\frac{126}{1}$ = 126

¿Tiene solución?
Si

Encontrar una primera solución

5( ) + 2( ) = 126

5(24) + 2(3) = 126

120 + 6 = 126

Analizemos la siguiente ecuación

5x – 7y = 125

Coeficientes	a	b	c
	5	7	125

M.C.D (a, b)
1

$\frac{C}{M.C.D} =$
$\frac{125}{1}$

¿Tiene solución?
Si

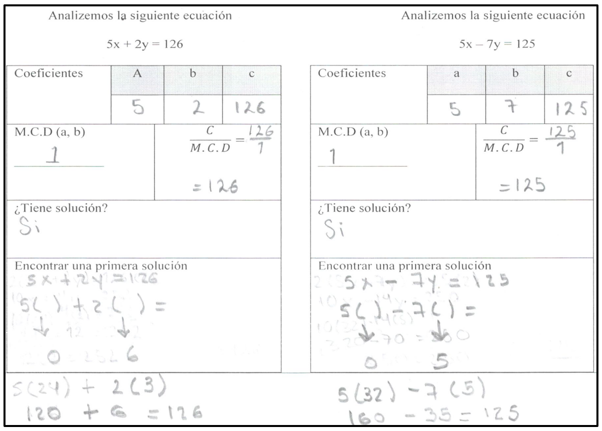
Encontrar una primera solución

5( ) – 7( ) = 125

5(39) - 7(10) = 125

195 - 70 = 125

Figura 4.57. Respuestas de Monserrat y J. de Dios (E4)



Analizemos la siguiente ecuación

5x + 2y = 126

Coeficientes	A	b	c
	5	2	126

M.C.D (a, b)
1

$\frac{C}{M.C.D} = \frac{126}{1}$
$= 126$

¿Tiene solución?
Si

Encontrar una primera solución
5x + 2y = 126
5( ) + 2( ) =
↓ ↓
0 6
5(24) + 2(3)
120 + 6 = 126

Analizemos la siguiente ecuación

5x – 7y = 125

Coeficientes	a	b	c
	5	7	125

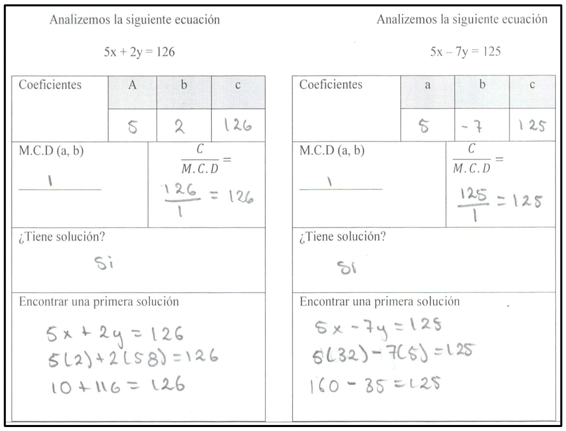
M.C.D (a, b)
1

$\frac{C}{M.C.D} = \frac{125}{1}$
$= 125$

¿Tiene solución?
Si

Encontrar una primera solución
5x − 7y = 125
5( ) − 7( ) =
↓ ↓
0 5
5(32) − 7(5)
160 − 35 = 125

Figura 4.58. Respuestas de Flor y Brenda (E6)



Analizemos la siguiente ecuación

5x + 2y = 126

Coeficientes	A	b	c
	5	2	126

M.C.D (a, b)
1

$\frac{C}{M.C.D} =$
$\frac{126}{1} = 126$

¿Tiene solución?
Si

Encontrar una primera solución
5x + 2y = 126
5(2) + 2(58) = 126
10 + 116 = 126

Analizemos la siguiente ecuación

5x – 7y = 125

Coeficientes	a	b	c
	5	-7	125

M.C.D (a, b)
1

$\frac{C}{M.C.D} =$
$\frac{125}{1} = 125$

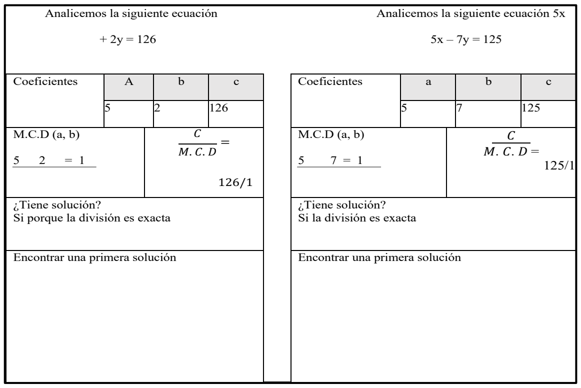
¿Tiene solución?
Si

Encontrar una primera solución
5x − 7y = 125
5(32) − 7(5) = 125
160 − 35 = 125

Figura 4.59. Respuestas de Jaqueline y Ariadna (E7)

Para el caso del equipo 2, logran identificar correctamente los coeficientes *a, b* y el término independiente *c*. Obtienen el M.C.D de (a,b), focalizando su atención en la característica crítica del coeciente c/M.C.D de (a,b), lo que les permite determinar que ambas ecuaciones si tienen solución en números enteros.

Sin embargo, al parecer no disciernen el criterio de divisibilidad o multiplicidad ya que no completan la tarea, por lo que en la sección de encontrar una solución particular dejan en blanco las hojas de trabajo. El equipo 5, sólo identifica correctamente los coeficientes *a, b* pero no así el término independiente *c*. Por lo que, no obtienen correctamente el M.C.D de (a, b) y tampoco disciernen el criterio de divisibilidad o multiplicidad. En sus respuestas se observa que siguen sin comprender la estructura de las ecuaciones. En las siguientes figuras 4.60 y 4.61 se muestran las respuestas de E2 y E5.



Analicemos la siguiente ecuación

+ 2y = 126

Coeficientes	A	b	c
	5	2	126

M.C.D (a, b)
5 2 = 1

$\frac{C}{M.C.D} =$
126/1

¿Tiene solución?
Si porque la división es exacta

Encontrar una primera solución

Analicemos la siguiente ecuación 5x

5x – 7y = 125

Coeficientes	a	b	c
	5	7	125

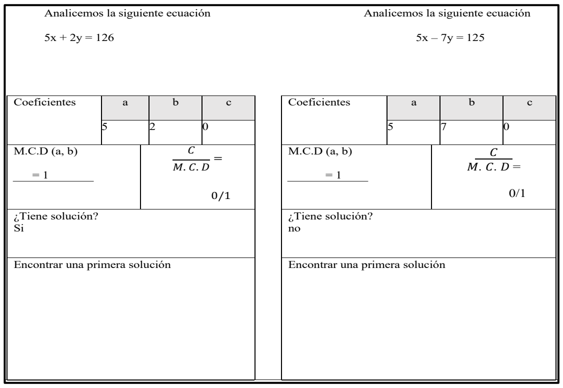
M.C.D (a, b)
5 7 = 1

$\frac{C}{M.C.D} =$
125/1

¿Tiene solución?
Si la división es exacta

Encontrar una primera solución

Figura 4.60. Respuestas de America y Eduardo (E2)



Analicemos la siguiente ecuación

5x + 2y = 126

Coeficientes	a	b	c
	5	2	0

M.C.D (a, b)
= 1

$\frac{C}{M.C.D} =$
0/1

¿Tiene solución?
Si

Encontrar una primera solución

Analicemos la siguiente ecuación

5x – 7y = 125

Coeficientes	a	b	c
	5	7	0

M.C.D (a, b)
= 1

$\frac{C}{M.C.D} =$
0/1

¿Tiene solución?
no

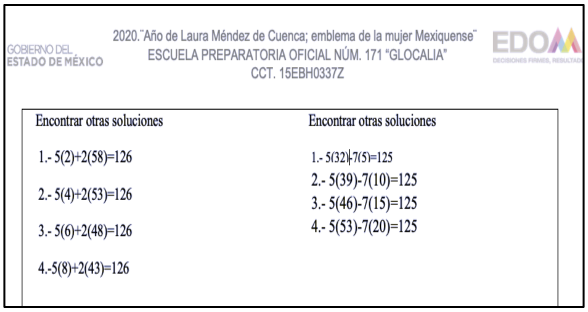
Encontrar una primera solución

Figura 4.61. Respuestas de Sergio y Jesús (E5)

En este caso nuevamente observamos la importancia de enfatizar en la enseñanza el "sentido estructural" que se refiere, de forma general, a una colección de habilidades relacionadas con transformar expresiones algebraicas, que permite a un estudiante hacer un mejor uso de las técnicas algebraicas aprendidas (Linchevski & Livneh, 1999).

En el último apartado de esta tercera tarea se solicita a los estudiantes encontrar otras posibles soluciones aplicando la regla aritmética mostrada en el video tutorial y probar que si cumplen con la igualdad en la ecuación.

Los equipos E1, y E6 encontraron otras soluciones en números enteros a las ecuaciones, especulamos que fue mediante tanteo y no aplicando la regla aritmética, debido a que no hay evidencia de su aplicación. En las siguientes figuras 4.62 y 4.63 se presentan las soluciones obtenidas por estos equipos.



GOBIERNO DEL
ESTADO DE MÉXICO

2020."Año de Laura Méndez de Cuenca; emblema de la mujer Mexiquense"
ESCUELA PREPARATORIA OFICIAL NÚM. 171 "GLOCALIA"
CCT. 15EBH0337Z

EDOMÉX
DECISIONES FIRMES, RESULTAD

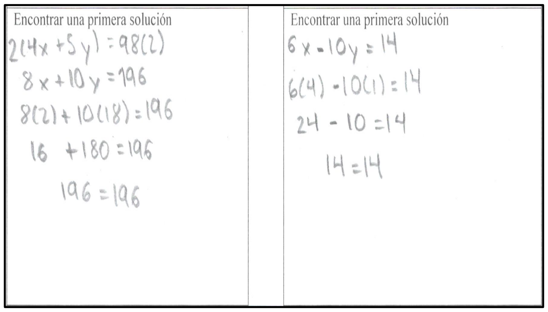
Encontrar otras soluciones

1.- 5(2)+2(58)=126
2.- 5(4)+2(53)=126
3.- 5(6)+2(48)=126
4.-5(8)+2(43)=126

Encontrar otras soluciones

1.- 5(32)-7(5)=125
2.- 5(39)-7(10)=125
3.- 5(46)-7(15)=125
4.- 5(53)-7(20)=125

Figura 4.62. Respuestas de Nadia y Dafné (E1)



Encontrar una primera solución

2(4x+5y)=98(2)
8x+10y=196
8(2)+10(18)=196
16 +180=196
196=196

Encontrar una primera solución

6x-10y=14
6(4)-10(1)=14
24-10=14
14=14

Figura 4.63. Respuestas de Flor y Brenda (E6)

En el caso de los equipos E7 y E8 si lograron encontrar una primera solución particular aplicando correctamente le criterio de divisibilidad o multiplicidad y también pudieron discernir la regla aritmética para obtener otras soluciones enteras ($x_o + a$) y (y_o +/- b). En las siguientes figuras 4.64 y 4.65 se muestran las soluciones encontradas.

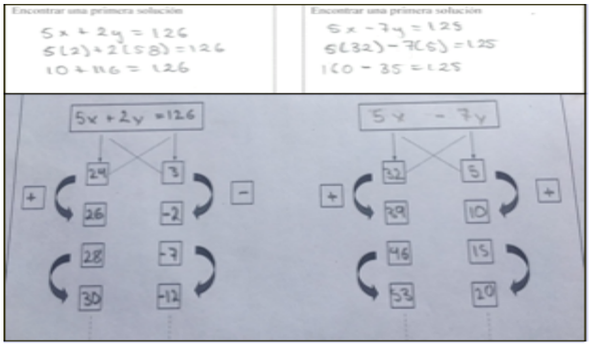


Figura 4.64. Respuestas de Jaqueline y Ariadna (E7)

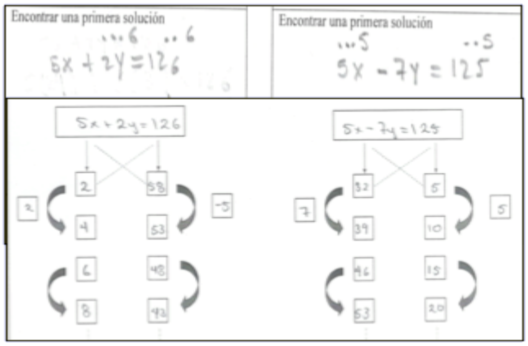


Figura 4.65. Respuestas de Yarinka y Gabriel (E8)

Dada la trascendencia y las dificultades que se dan en la transición de la aritmética al álgebra, resulta de primordial importancia enseñar a los estudiantes, en este caso del bachillerato aspectos centrales del desarrollo del pensamiento algebraico, como la construcción de los significados de las representaciones algebraicas y las relaciones entre sintaxis y semántica.

Por otro lado, proporcionar a los estudiantes herramientas y procedimientos para gestionar y articular los significados aritméticos y algebraicos puede ayudar a la construcción de los conocimientos necesarios para sus actividades de aprendizaje.

Nuestro análisis sugiere que el objeto de aprendizaje vivido plasmado en las hojas de trabajo de la mayoria de los estudiantes enfatizó la comprensión de las ecuaciones y su estructura a través de la aplicación del criterio de multiplicidad o divisibilidad para encontrar una solución particular. Es por ello, que en esta Tarea 3A se logro categorizar el nivel cognitivo estructural de acuerdo a la clasificación de la taxonomía SOLO. En la siguiente tabla 4.6 se presenta dicha clasificación.

Nivel de razonamiento alcanzado (taxonomía SOLO)	Equipo	Criterio	Interpretación y análisis
Pre-estructural: No se domina ningún aspecto crucial de la tarea	E3 y E5	No identifica los coeficientes *a, b* y el término independiente *c* de las ecuaciones. No obtiene el M.C.D de (a, b), y tampoco demuestra a través del cociente de c/M.C.D de (a, b) que ambas ecuaciones tienen solución en números enteros. No aplica el Criterio de Divisibilidad o Multiplicidad para obtener una primera solución (particular) y no discierne la regla aritmética ($x_o + a$) y (y_o +/- b) para obtener otras soluciones.	Las respuestas que proporcionan los alumnos ante una determinada tarea son erróneas o inexistentes. El estudiante aún no comprende.
Uniestructural: Se domina sólo un aspecto crucial de la tarea	E2	Identifica los coeficientes *a, b* y el término independiente *c* de las ecuaciones. Obtiene el M.C.D de (a,b), y demuestra a través del cociente de c/M.C.D de (a, b) que ambas ecuaciones tienen solución en números enteros. No aplica el Criterio de Divisibilidad o Multiplicidad para obtener una primera solución (particular), y no discierne la regla aritmética ($x_o + a$) y (y_o +/- b) para obtener otras soluciones.	El resultado del alumno, pese a poder ser cierto, sólo se centra en un determinado aspecto que, por otro lado, no tiene por qué ser relevante Identifica sólo un aspecto del concepto.

Multiestructural: Se dominan varios aspectos cruciales de la tarea	E4	Identifica los coeficientes *a, b* y el término independiente *c* de las ecuaciones. Obtiene el M.C.D de (a, b), demuestra a través del cociente de c/M.C.D de (a, b) que ambas ecuaciones tienen solución en números enteros. Aplica el Criterio de Divisibilidad o Multiplicidad para obtener una primera solución (particular), pero no discierne la regla aritmética ($x_o + a$) y (y_o +/- *b*) para obtener otras soluciones.	En este caso el alumno es capaz de enumerar una serie de aspectos correctos, pero no va más allá Identifica varios aspectos del concepto, pero no tiene aún una visión completa.
Relacional: Relaciona entre si varios aspectos cruciales de la tarea	E1, E6, E7 y E8	Identifica los coeficientes *a, b* y el término independiente *c* de las ecuaciones. Obtiene el M.C.D de (a,b), y demuestra a través del cociente de c/M.C.D de (a, b) que ambas ecuaciones tienen solución en números enteros. Aplica el Criterio de Divisibilidad o Multiplicidad para obtener una primera solución (particular), y discierne la regla aritmética ($x_o + a$) y (y_o +/- *b*) para obtener otras soluciones.	El alumno no sólo identifica varios aspectos correctos, sino que también es capaz de relacionarlos entre sí. Tiene una visión completa del concepto conformada por los diferentes aspectos del concepto.

Tabla 4.6. clasificación SOLO del nivel de estructura cognitiva de los estudiantes en la tarea 3A

ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES A LA TAREA 3B[13]

Experiencia de Aprendizaje

En el diseño de esta Tarea 3B se buscó encontrar nuevamente una solución particular en números enteros de las ecuaciones diofánticas lineales propuestas variando el procedimiento de solución ahora con el *Criterio de Cifras Terminales*, donde se focalizó la atención de los estudiantes en la característica critica para usar este método es discernir si uno de los coeficentes *a* o *b* terminan en *5,* si es el caso se multiplica por 2 ambos miembros de la ecuación y se analizan las cifras terminales de cada término, aplicando las propiedades de los números.

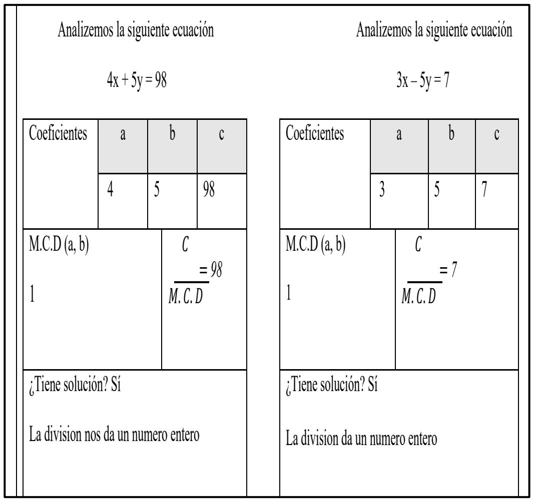
---

[13] Ver tarea 3B en las hojas de trabajo para los estudiantes, las cuales aparecen en el Anexo 1 de esta tesis

Para ello, en esta Tarea 3B se propusieron nuevamente dos ecuaciones diofánticas lineales con dos incógnitas (del tipo, generales), donde se utilizó un patrón de variación por contraste, separación y generalización, así como un problema con múltiples cambios (OPMC, One Problem, Multiple Changes), se extiende el problema original variando las condiciones, cambiando los resultados y haciendo generalizaciones, de acuerdo con Lai & Murray, (2012).

En la primera sección de esta tarea se continuó solicitando a los estudiantes la identificación de los coeficientes *a*, *b* y el término independiente *c*, así como el M.C.D de (a, b) y el cociente c/M.C.D de (a, b) para determinar si estas ecuaciones tienen o no solución en números enteros e identificar también si son ecuaciones diofánticas lineales con dos incógnitas.

Los equipos de trabajo E1, E4, E6, E7 y E8 lograron identificar correctamente los coeficientes de las ecuaciones, obtener el M.C.D de (a, b) y realizar el cociente c/M.C.D de (a, b), lo que les permitió determinar que en este caso que ambas ecuaciones si tienen solución en números enteros, y discernir que las dos son ecuaciones diofánticas lineales con dos incógnitas. En las siguientes figuras (de la 4.66 a la 4.69) se muestran las respuestas obtenidas**.**



Analizemos la siguiente ecuación

$4x + 5y = 98$

Coeficientes	a	b	c
	4	5	98

M.C.D (a, b)

1

$\frac{C}{M.C.D} = 98$

¿Tiene solución? Sí

La division nos da un numero entero

Analizemos la siguiente ecuación

$3x - 5y = 7$

Coeficientes	a	b	c
	3	5	7

M.C.D (a, b)

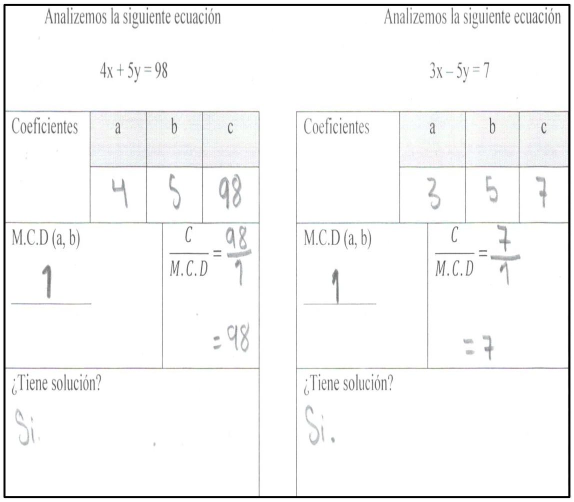
1

$\frac{C}{M.C.D} = 7$

¿Tiene solución? Sí

La division da un numero entero

Figura 4.66. Respuestas de Nadia y Dafné (E1)



Analizemos la siguiente ecuación

$4x + 5y = 98$

Coeficientes	a	b	c
	4	5	98

M.C.D (a, b)

1

$\frac{C}{M.C.D} = \frac{98}{1}$

$= 98$

¿Tiene solución?

Si.

Analizemos la siguiente ecuación

$3x - 5y = 7$

Coeficientes	a	b	c
	3	5	7

M.C.D (a, b)

1

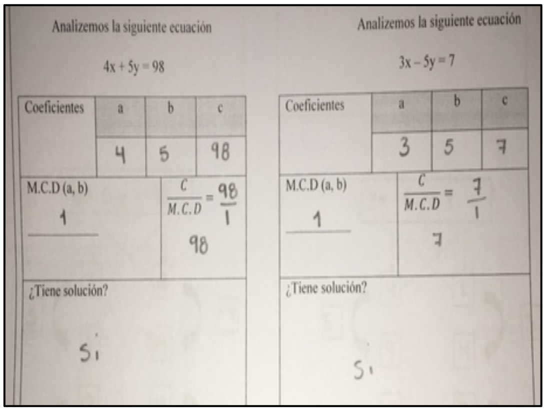
$\frac{C}{M.C.D} = \frac{7}{1}$

$= 7$

¿Tiene solución?

Si.

Figura 4.67. Respuestas de Flor y Brenda (E6)



Analizemos la siguiente ecuación

$4x + 5y = 98$

Coeficientes	a	b	c
	4	5	98

M.C.D (a, b): 1

$\frac{C}{M.C.D} = \frac{98}{1}$

98

¿Tiene solución? Si

Analizemos la siguiente ecuación

$3x - 5y = 7$

Coeficientes	a	b	c
	3	5	7

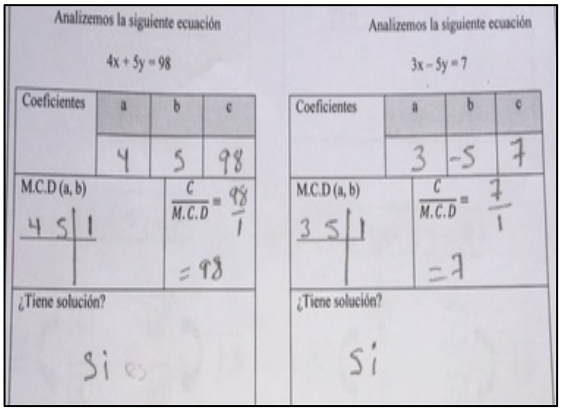
M.C.D (a, b): 1

$\frac{C}{M.C.D} = \frac{7}{1}$

7

¿Tiene solución? Si

Figura 4.68. Respuestas de Jaqueline y Ariadna(E7)



Analizemos la siguiente ecuación

$4x + 5y = 98$

Coeficientes	a	b	c
	4	5	98

M.C.D (a, b): 4 5 | 1

$\frac{C}{M.C.D} = \frac{98}{1}$

$= 98$

¿Tiene solución? Si

Analizemos la siguiente ecuación

$3x - 5y = 7$

Coeficientes	a	b	c
	3	-5	7

M.C.D (a, b): 3 5 | 1

$\frac{C}{M.C.D} = \frac{7}{1}$

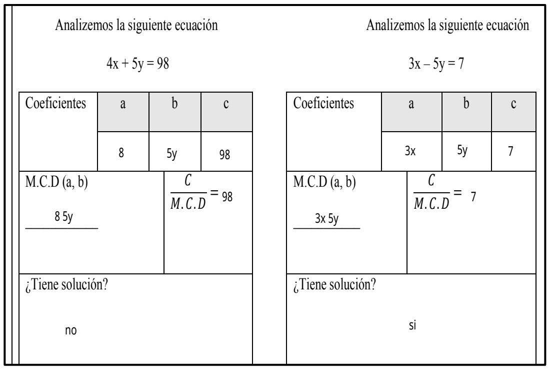
$= 7$

¿Tiene solución? Si

Figura 4.69. Respuesta de Yarinka y Gabriel (E8)

Los intentos deliberados de variar sistemáticamente ciertos aspectos y mantener ciertos aspectos invariantes pueden ayudar a los estudiantes a discernir nuevos aspectos de un objeto de aprendizaje y construir nuevos significados. Esta hipótesis está respaldada por varios estudios empíricos (Gu, 1991; Marton y Morris, 2002; Marton y Tsui, 2004).

En el caso de los equipos E2, E3 y E5 continuan sin identificar correctamente los coeficientes de las ecuaciones y tampoco logran obtener el M.C.D de (a, b). Por lo que, no han discernido cuando una ecuación diofántica tiene solución y sus respuestas parecen no tener ningún sustento. En las siguientes figuras (de la 4.70 a la 4.72) se presentan las respuestas de estos equipos.



Analizemos la siguiente ecuación

$4x + 5y = 98$

Coeficientes	a	b	c
	8	5y	98

M.C.D (a, b): 8 5y

$\frac{C}{M.C.D} = 98$

¿Tiene solución? no

Analizemos la siguiente ecuación

$3x - 5y = 7$

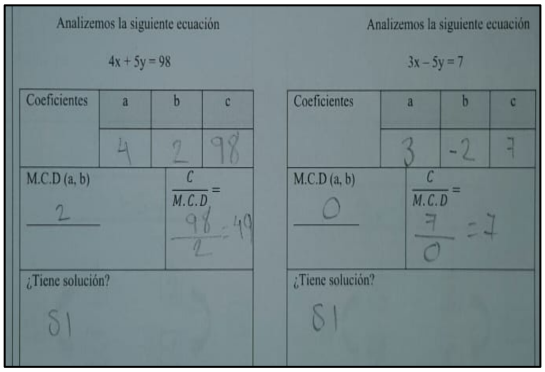
Coeficientes	a	b	c
	3x	5y	7

M.C.D (a, b): 3x 5y

$\frac{C}{M.C.D} = 7$

¿Tiene solución? si

Figura 4.70. Respuestas de America y Eduardo (E2)



Analizemos la siguiente ecuación

$4x + 5y = 98$

Coeficientes	a	b	c
	4	2	98

M.C.D (a, b): 2

$\frac{C}{M.C.D} = \frac{98}{2} = 49$

¿Tiene solución? SI

Analizemos la siguiente ecuación

$3x - 5y = 7$

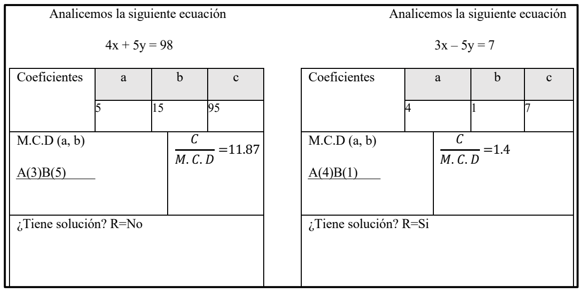
Coeficientes	a	b	c
	3	-2	7

M.C.D (a, b): 0

$\frac{C}{M.C.D} = \frac{7}{0} = 7$

¿Tiene solución? SI

Figura 4.71. Respuestas de Ivan y Liliana (E3)



Analicemos la siguiente ecuación

$4x + 5y = 98$

Coeficientes	a	b	c
	5	15	95
M.C.D (a, b) A(3)B(5)	$\frac{C}{M.C.D}$ =11.87		
¿Tiene solución? R=No			

Analicemos la siguiente ecuación

$3x – 5y = 7$

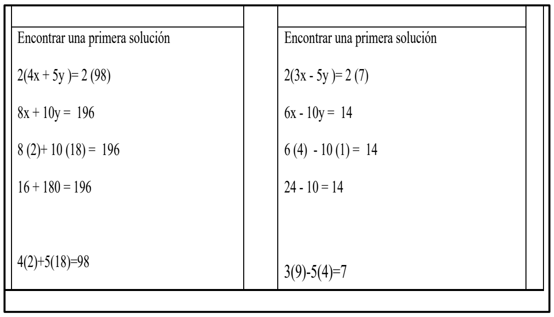
Coeficientes	a	b	c
	4	1	7
M.C.D (a, b) A(4)B(1)	$\frac{C}{M.C.D}$ =1.4		
¿Tiene solución? R=Si			

Figura. 4.72. Respuestas de Iván y Liliana (E9)

En la segunda sección de esta Tarea 3B, se les solicitó a los estudiantes encontrar una solución particular aplicando el criterio de cifras terminales. Para ello, se utilizó nuevamente el video tutorial que tiene un devenir bastante promisorio, tanto así que estos favorecen un aprendizaje significativo, al establecer nuevas relaciones que mejoran el proceso de enseñanza-aprendizaje (Márquez, 1995).

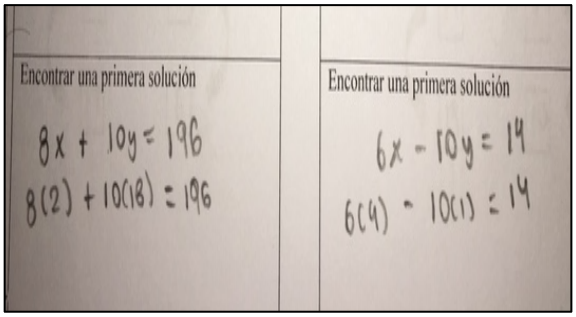
El video tutorial aportó la posibilidad de reforzar el proceso de enseñanza a los estudiantes que viven inmersos en este escenario de la pandemia por COVID-19 y el confinamiento sanitario, aumentando la posibilidad de continuar ampliando su conocimiento y en este caso sobre este criterio de cifras terminales.

Los equipos E1, E4, E6, E7 y E8 lograron discernir que el término 5y no varía en ambas ecuaciones y que es multiplo de 5, siendo esta la característica crítica para poder aplicar el criterio y obtener una solución particular**.** En las siguientes figuras (de la 4.73 a la 4.77) se muestran las respuestas obtenidas de los estudiantes en esta sección y donde se aprecia la aplicación de este criterio para obtener una solución particular.



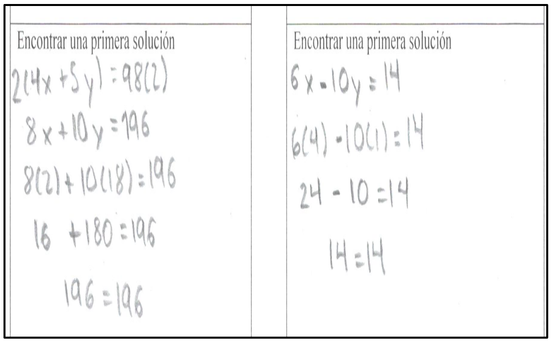
Encontrar una primera solución	Encontrar una primera solución
2(4x + 5y)= 2 (98)	2(3x - 5y)= 2 (7)
8x + 10y = 196	6x - 10y = 14
8 (2)+ 10 (18) = 196	6 (4) - 10 (1) = 14
16 + 180 = 196	24 - 10 = 14
4(2)+5(18)=98	3(9)-5(4)=7

Figura 4.73. Respuestas de Nadia y Dafné (E1)



Encontrar una primera solución	Encontrar una primera solución
8x + 10y = 196	6x - 10y = 14
8(2) + 10(18) = 196	6(4) - 10(1) = 14

Figura 4.74. Respuestas de Monserrat y J. de Dios (E4)



Encontrar una primera solución

$2(4x+5y)=98(2)$

$8x+10y=196$

$8(2)+10(18)=196$

$16+180=196$

$196=196$

Encontrar una primera solución

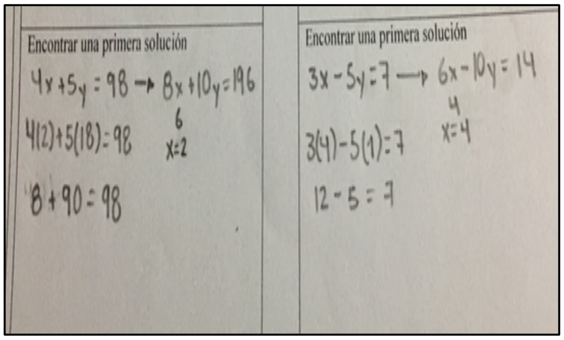
$6x-10y=14$

$6(4)-10(1)=14$

$24-10=14$

$14=14$

Figura 4.75. Respuestas de Flor y Brenda (E6)



Encontrar una primera solución

$4x+5y=98 \rightarrow 8x+10y=196$

6

$x=2$

$4(2)+5(18)=98$

$8+90=98$

Encontrar una primera solución

$3x-5y=7 \longrightarrow 6x-10y=14$

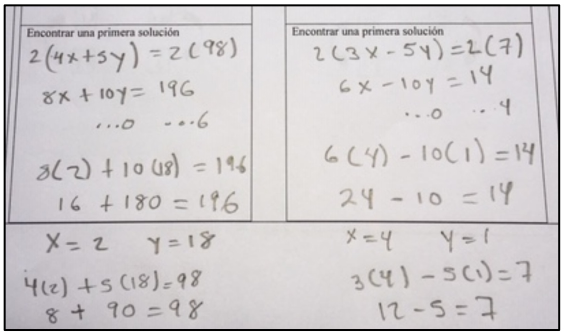
4

$x=4$

$3(4)-5(1)=7$

$12-5=7$

Figura 4.76. Respuestas de Jaqueline y Ariadna (E7)



Encontrar una primera solución

$2(4x+5y)=2(98)$

$8x+10y=196$

$\ldots 0 \quad \ldots 6$

$8(2)+10(18)=196$

$16+180=196$

Encontrar una primera solución

$2(3x-5y)=2(7)$

$6x-10y=14$

$\ldots 0 \quad \ldots 4$

$6(4)-10(1)=14$

$24-10=14$

$x=2 \quad y=18$

$4(2)+5(18)=98$

$8+90=98$

$x=4 \quad y=1$

$3(4)-5(1)=7$

$12-5=7$

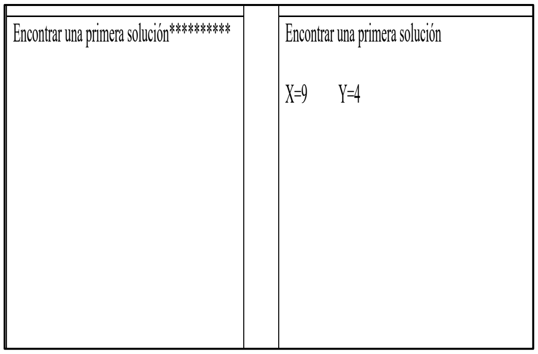
Figura 4.77. Respuestas de Yarinka y Gabriel (E8)

El aprendizaje, desde el punto de vista de la teoría de la variación, implica diferenciación en lugar de acumulación (cf. Gibson y Gibson, 1955). Por lo tanto, la teoría de la variación explica las condiciones del aprendizaje y explica las fallas de aprendizaje de una manera específica: cuando los alumnos no aprenden lo que se pretendía, no han discernido los aspectos y características críticas.

Por lo tanto, la idea central de la teoría de la variación es que el discernimiento es una condición necesaria del aprendizaje: qué aspectos atendemos o discernimos que son de importancia decisiva para la forma en que entendemos o experimentamos el objeto de aprendizaje.

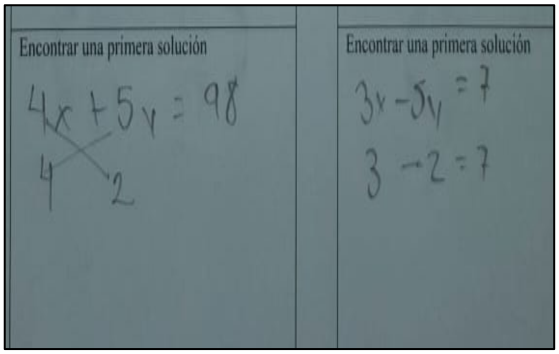
Los equipos E2, E3 y E5 no logran discernir la característica crítica de las dos ecuaciones propuestas. Es decir, no focalizan su atención en que en ambas ecuaciones el término *by* es multiplo de 5; por ello tampoco disciernen que de acuerdo al criterio de cifras terminales se debe multiplicar por 2 ambos miembros de la ecuación y analizar las cifras terminales de *a*, *b* y *c* aplicando las propiedades de los números.

Todo ello, a pesar del apoyo que les brindó el video tutorial de cifras terminales, el cuál tiene esa característica especial de ilustrar lo que se está contando, de ver como se hace, y después reproducirlo al antojo del usuario. El equipo E2 logra obtener una solución particular de la segunda ecuación, al parecer utilizando el método por tanteo. En el caso de los equipos E3 y E5 proponen algunas soluciones, también por tanteo, pero incorrectas. En las siguientes figuras 4.78, 4.79 y 4.80, se muestran las respuestas obtenidas por estos estudiantes.



Encontrar una primera solución**********	Encontrar una primera solución X=9 Y=4

Figura 4.78. Respuestas de America y Eduardo (E2)



Encontrar una primera solución

$4x+5y=98$

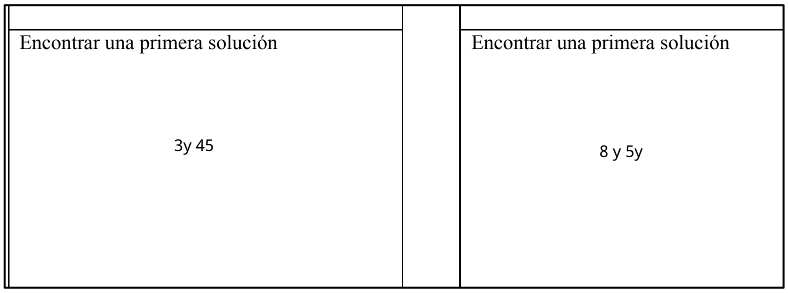
4 2

Encontrar una primera solución

$3x-5y=7$

$3-2=7$

Figura 4.79. Respuestas de Iván y Liliana (E3*)*



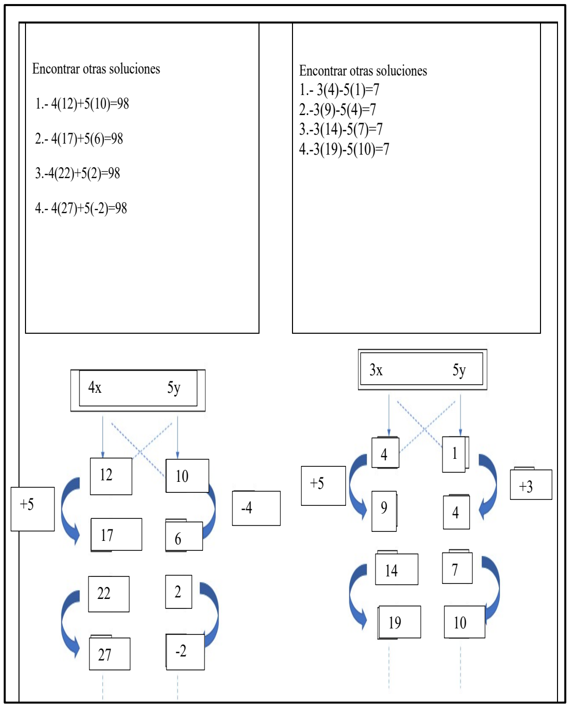
Encontrar una primera solución 3y 45	Encontrar una primera solución 8 y 5y

Figura 4.80. Respuestas de Sergio y Jesús (E5)

Finalmente, en la ultima sección de esta Tarea 3B, se focalizó la atención de los estudiantes para que discernieran que en caso de que una ecuación diofántica lineal tenga una solución particular entera, esta también deberá tener otras soluciones enteras. En ese sentido, que se les solicitó a los estudiantes que a partir de la solución particular encontrada con el criterio de cifras terminales, ahora encontraran otras soluciones aplicando el método aritmético y comprobarán que efectivamente si cumplen con la igualdad en cada una de las ecuaciones propuestas.

Los equipos E1, E4, E6, E7 y E8 al igual que en el criterio anterior de divisibilidad o multiplicidad lograron discernir y aplicar correctamente la regla aritmética ($x_o + a$) y (y_o +/- *b)* presentada también en el video tutorial para obtener otras soluciones de las ecuaciones.

De igual manera comprobaron que estas soluciones obtenidas si son solución de las ecuaciones. Por otro lado, Lo (2012) señala que para que los estudiantes logren darse cuenta de algo, deben discernirlo y poner en juego también sus conocimientos previos. Para ello, debe haber condiciones necesarias para que ocurra este discernimiento. En las siguientes figuras 4.81 y 4.82 se muestran algunas respuestas de los equipos E1 y E8.



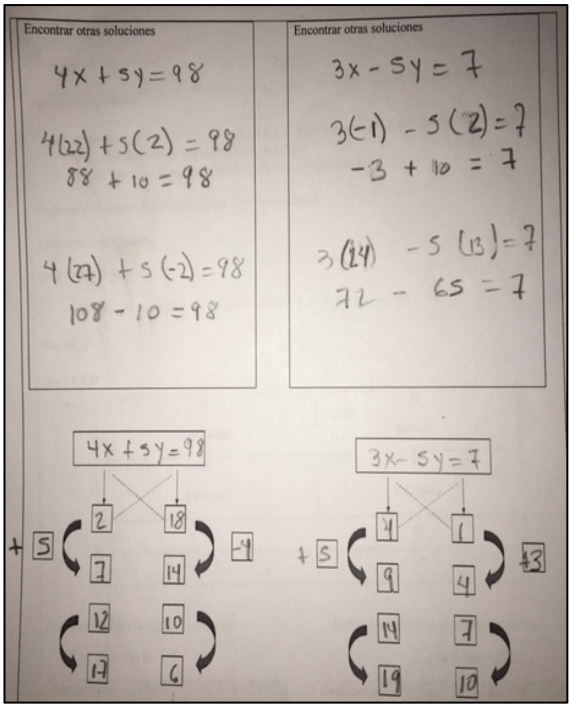
Encontrar otras soluciones

1.- 4(12)+5(10)=98
2.- 4(17)+5(6)=98
3.-4(22)+5(2)=98
4.- 4(27)+5(-2)=98

Encontrar otras soluciones

1.- 3(4)-5(1)=7
2.-3(9)-5(4)=7
3.-3(14)-5(7)=7
4.-3(19)-5(10)=7

Figura 4.81. Respuestas de Nadia y Dafné (E1)



Encontrar otras soluciones

4x+5y=98
4(22)+5(2)=98
88+10=98
4(27)+5(-2)=98
108-10=98

Encontrar otras soluciones

3x-5y=7
3(-1)-5(2)=7
-3+10=7
3(24)-5(13)=7
72-65=7

Figura 4.82. Respuestas de Yarinka y Gabriel (E8)

El equipo E2, a pesar de no discernir el criterio de cifras terminales, si logra aplicar correctamente la solución particular obtenida mediante tanteo, para obtener otras soluciones enteras a partir del método aritmético. En la siguiente figura 4.83 se muestra la respuesta de este equipo conformado por America y Eduardo.

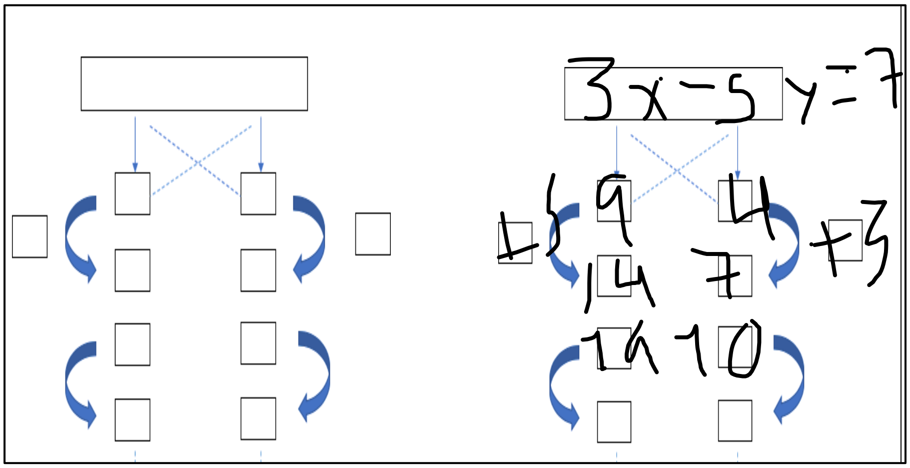


Figura 4.83. Respuesta de Ameria y Eduardo (E2)

En el caso del equipo 3, a pesar de intentar obtener una solución particular por tanteo no lo logran. Por lo que, al aplicar la regla aritmética no se logra obtener otras soluciones correctas. El equipo 5, deja inconclusa la actividad. En las siguientes figuras (4.84 y 4.85) se muestran las respuestas obtenidas de estos estudiantes.

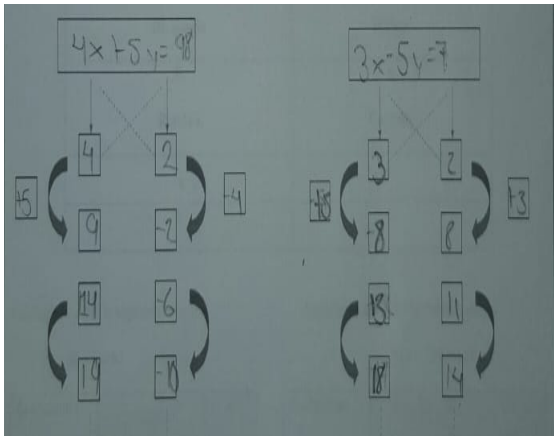


Figura. 4.84. Respuestas de Iván y Liliana (E3)

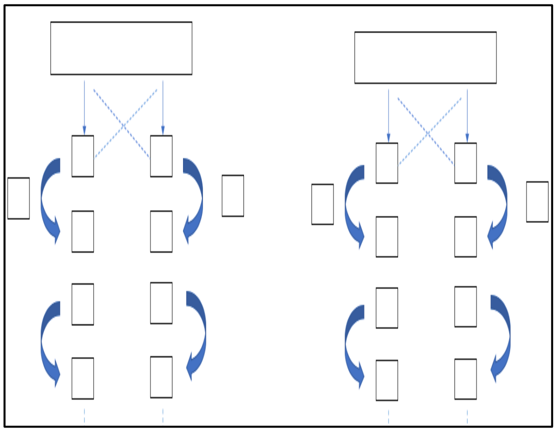


Figura 4.85. Respuesta de Sergio y Jesús (E5)

La presente Tarea 3B, adoptó un enfoque basado en la teoría de la variación y tuvo como objetivo que los estudiantes lograrán discernir y explorar las características críticas del criterio de cifras términales, para encontrar una solución particular de las ecuaciones diofánticas lieales con dos incógnitas.

Hernández, Martínez, Dafonseca y Rubio (2005, p.80) conciben a la taxonomia SOLO como una manera de clasificar y evaluar los resultados de una tarea de aprendizaje, a partir de una organización estructural de la misma. En la siguiente tabla 4.7, se muestra la clasificación correspondiente a esta tarea 3B.

Nivel de razonamiento alcanzado (taxonomía SOLO)	Equipo	Criterio	Interpretación y análisis
Pre-estructural: No se domina ningún aspecto crucial de la tarea	E3 y 5	No identifica los coeficientes *a, b* y el término independiente *c* de las ecuaciones. No obtiene el M.C.D de (a,b), y tampoco demuestra a través del cociente de c/M.C.D de (a, b)que ambas ecuaciones tienen solución en números enteros. No aplica el Criterio de Cifras Terminales para obtener una primera solución (particular) y no discierne la regla aritmética ($x_o + a$) y (y_o +/- *b*) para obtener otras soluciones.	Las respuestas que proporcionan los alumnos ante una determinada tarea son erróneas o inexistentes. El estudiante aún no comprende
Uniestructural: Se domina sólo un aspecto crucial de la tarea	E2	Identifica los coeficientes *a, b* y el término independiente *c* de las ecuaciones. Obtiene el M.C.D de (a, b) de (a,b), y demuestra a través del cociente de c/M.C.D de (a, b) que ambas ecuaciones tienen solución en números enteros. No aplica el Criterio de Cifras Terminales para obtener una primera solución (particular) y no discierne la regla aritmética ($x_o + a$) y (y_o +/- *b*) para obtener otras soluciones.	El resultado del alumno, pese a poder ser cierto, sólo se centra en un determinado aspecto que, por otro lado, no tiene por qué ser relevante Identifica sólo un aspecto del concepto.
Multiestructural: Se dominan varios aspectos cruciales de la tarea	E4	Identifica los coeficientes *a, b* y el término independiente *c* de las ecuaciones. Obtiene el M.C.D de (a,b), demuestra a través del cociente de c/M.C.D de (a, b) que ambas ecuaciones tienen solución en números enteros. Aplica el Criterio de Cifras Terminales para obtener una primera solución (particular), pero no discierne la regla aritmética ($x_o + a$) y (y_o +/- *b*) para obtener otras soluciones.	En este caso el alumno es capaz de enumerar una serie de aspectos correctos, pero no va más allá Identifica varios aspectos del concepto, pero no tiene aún una visión completa.
Relacional:	E1, E6, E7 y E8	Identifica los coeficientes *a, b* y el término independiente *c* de las	El alumno no sólo identifica varios aspectos correctos, sino que

Relaciona entre si varios aspectos cruciales de la tarea		ecuaciones. Obtiene el M.C.D de (a,b), y demuestra a través del cociente de c/M.C.D de (a, b) que ambas ecuaciones tienen solución en números enteros. Aplica correctamente el Criterio de Cifras Terminales para obtener una primera solución (particular) y discierne la regla aritmética ($x_o + a$) y (y_o +/- b) para obtener otras soluciones.	también es capaz de relacionarlos entre sí. Tiene una visión completa del concepto conformada por los diferentes aspectos del concepto.

Tabla 4.7. clasificación SOLO del nivel de estructura cognitiva de los estudiantes en la tarea 3B

ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES A LA TAREA 3C[14]

Experiencia de Aprendizaje

Como parte de esta tercera unidad de discernimiento, en el diseñó de esta Tarea 3C, centramos la atención de los estudiantes, primero en identificar los coeficientes *a, b* y el término independiente *c* de las ecuaciones propuestas.

Segundo en encontrar el M.C.D de (a, b) y el cociente c/M.C.D de (a, b), como la característica crítica para determinar si las ecuaciones tienen o no solución en números enteros y si son ecuaciones diofánticas lineales con dos incógnitas.

Tercero en encontrar una solución particular en números enteros de las ecuaciones diofánticas lineales (del tipo, generales) propuestas, utilizando como procedimiento ahora el *Criterio de la División*.

Es, pues, la comprensión del algoritmo de la división y las variaciones de las características críticas (variación en el término *by,* caso 1 y *2*) realizadas en las ecuaciones lo que los estudiantes debieron focalizar para resolver esta tarea y no tanto la destreza en los cálculos. Por lo que, aplicamos la variación procedimental: un problema, múltiples soluciones (OPMS), variando los diferentes procesos de solución de un problema y asociando diferentes métodos de solución (Lai & Murray, 2012).

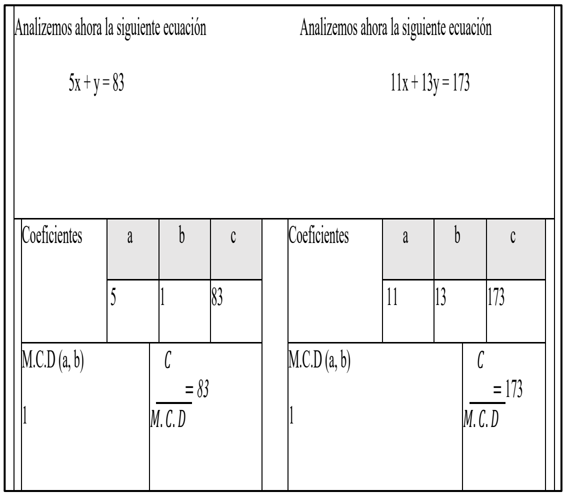
Los equipos E1, E4, E6, E7 y E8 lograron primeramente identificar correctamente los coeficientes *a, b* y el término independiente *c*. Segundo obtuvieron el M.C.D de (a, b) y

---

[14] Ver tarea 3C en las hojas de trabajo para los estudiantes, las cuales aparecen en el Anexo 1 de esta tesis

realizaron el cociente c/M.C.D de (a, b) para discernir que ambas ecuaciones propuestas si tienen solución en números enteros y son ecuaciones diofánticas lineales con dos incógnitas.

Por lo anterior, en esta tarea 3C, se observa ya un incremento del nivel de sentido estructural de las ecuaciones, mismo que les permite a los estudiantes realizar tareas algebraicas de formas más eficientes y menos propensas a errores. En las siguientes figuras 4.86, 4.87 y 4.88 se muestran algunas respuestas obtenidas de estos equipos.



Analizemos ahora la siguiente ecuación

$5x + y = 83$

Coeficientes	a	b	c
	5	1	83

M.C.D (a, b) 1 — $\frac{C}{M.C.D} = 83$

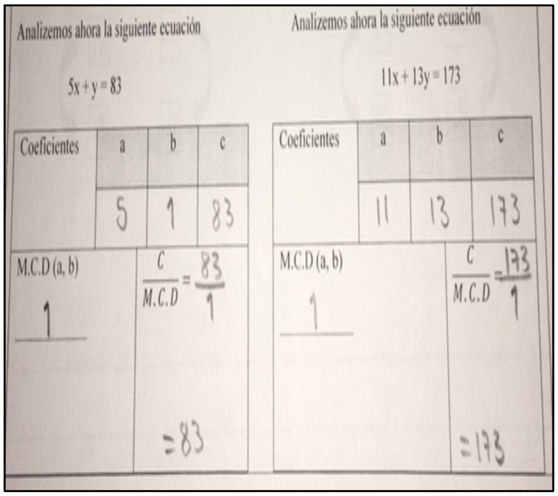
Analizemos ahora la siguiente ecuación

$11x + 13y = 173$

Coeficientes	a	b	c
	11	13	173

M.C.D (a, b) 1 — $\frac{C}{M.C.D} = 173$

Figura 4.86. Respuesta de Nadia y Dafné (E1)



Analizemos ahora la siguiente ecuación

$5x + y = 83$

Coeficientes	a	b	c
	5	1	83

M.C.D (a, b) 1 — $\frac{C}{M.C.D} = \frac{83}{1}$ $= 83$

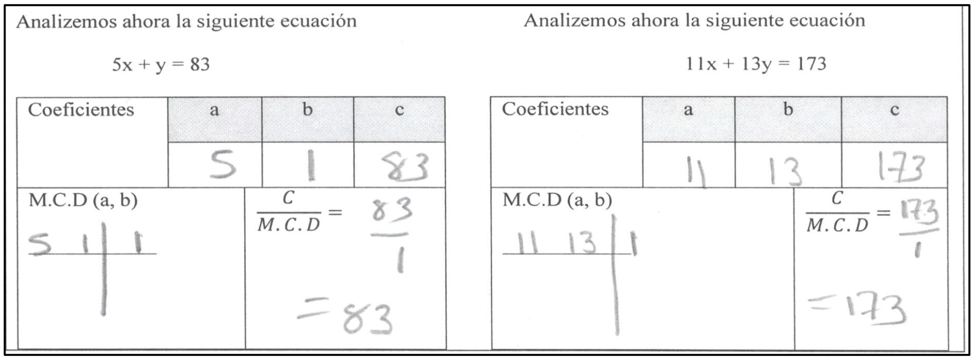
Analizemos ahora la siguiente ecuación

$11x + 13y = 173$

Coeficientes	a	b	c
	11	13	173

M.C.D (a, b) 1 — $\frac{C}{M.C.D} = \frac{173}{1}$ $= 173$

Figura 4.87. Respuesta de Flor y Brenda (E6)



Analizemos ahora la siguiente ecuación

$5x + y = 83$

Coeficientes	a	b	c
	5	1	83

M.C.D (a, b) 5 1 | 1 — $\frac{C}{M.C.D} = \frac{83}{1}$ $= 83$

Analizemos ahora la siguiente ecuación

$11x + 13y = 173$

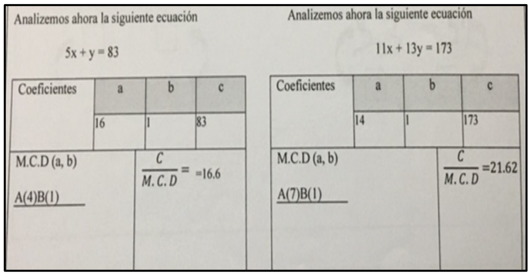
Coeficientes	a	b	c
	11	13	173

M.C.D (a, b) 11 13 | 1 — $\frac{C}{M.C.D} = \frac{173}{1}$ $= 173$

Figura. 4.88. Respuestas de Yarinka y Gabriel (E8)

En los equipos E2, E3 y E5, los resultados no son los esperados, al parecer la situación del confinamiento sanitario por la pandemia de COVID-19 y la falta de interacción entre los estudiantes y el profesor (desde la teoría del la variación el aprendizaje en acción), esta teniendo cada vez más efectos negativos en los estudiantes y su aprendizaje, ya que continúan sin poder identificar correctamente los coeficientes *a, b* y el término independiente *c* de las ecuaciones, en algunos casos sólo identifican 1 ó 2 de los coeficientes.

Como ya se menciono dentro del análisis de las tareas anteriores Kieran, (1989) señala que el énfasis de la enseñanza de la aritmética en "encontrar la respuesta" hace que los alumnos consigan desenvolverse con procesos intuitivos e informales evitando el uso y reconocimiento de la estructura, que es esencial en el aprendizaje del álgebra. Estos equipos continuan tratando de obtener el M.C.D de (a, b) aún de manera incorrecta, por lo que a pesar de responder que las ecuaciones si tienen solución nuevamente la acción se antepuso a la reflexión y sustento matemático En las siguientes figuras 4.89 y 4.90 se muestran las respuestas obtenidas de estos equipos en esta sección.



Analizemos ahora la siguiente ecuación

$5x + y = 83$

Coeficientes	a	b	c
	16	1	83

M.C.D (a, b)

A(4)B(1)

$\frac{C}{M.C.D} =$ =16.6

Analizemos ahora la siguiente ecuación

$11x + 13y = 173$

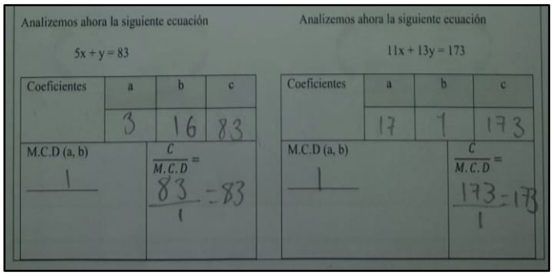
Coeficientes	a	b	c
	14	1	173

M.C.D (a, b)

A(7)B(1)

$\frac{C}{M.C.D}$ =21.62

Figura 4.89. Respuesta de América y Eduardo (E2)



Analizemos ahora la siguiente ecuación

$5x + y = 83$

Coeficientes	a	b	c
	3	16	83

M.C.D (a, b)

1

$\frac{C}{M.C.D} =$

$\frac{83}{1} = 83$

Analizemos ahora la siguiente ecuación

$11x + 13y = 173$

Coeficientes	a	b	c
	17	1	173

M.C.D (a, b)

1

$\frac{C}{M.C.D} =$

$\frac{173}{1} = 173$

Figura 4.90. Respuesta de Iván y Liliana (E3)

En la segunda sección de esta Tarea 3C, se solicitó aplicar el criterio de la división, para obtener una solución particular y a partir de ella encontrar otras soluciones aplicando el método aritmético. Nuevamente se utilizó como herramienta y medio de enseñanza el video tutorial sobre el desarrollo del criterio de la división que aporta esa posibilidad de reforzar el proceso de enseñanza a cualquier estudiante buscando, ampliar su conocimiento.

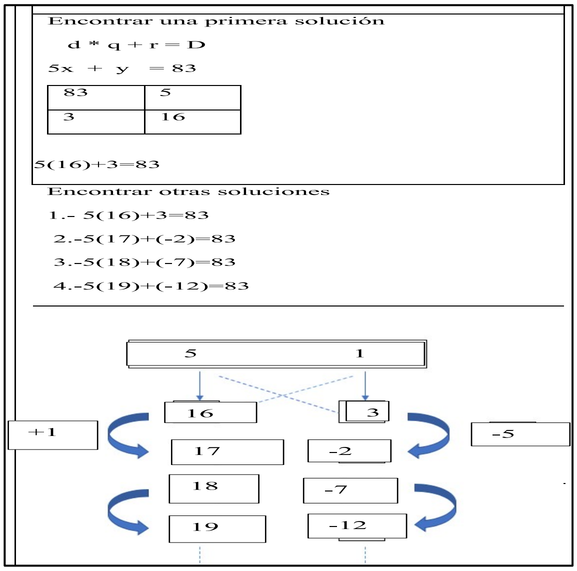
En este caso, YouTube se ha convertido en el favorito de los realizadores audiovisuales, y por ende, de quienes lo usan para enseñar y aprender a través del video tutorial.

Esta plataforma digital es aprovechada por los jóvenes, que continúan respondiendo desde los nuevos escenarios a los mismos retos y eventualidades que sortean cotidianamente (no sólo durante la pandemia por COVID-19). Es por ello, que en el campo educativo el video tutorial puede ser usado para el aprendizaje de idiomas, el uso de métodos investigativos, la realización de reseñas de libros o películas y hasta la ejecución de procesos matemáticos, como en nuestro caso.

En la primera ecuación propuesta a los estudiantes $5x + y = 83$, los equipos E1, E4, E6, E7 y E8 no presentan dificultades, ya que logran discernir que se trata de una ecuación correspondiente al caso 1 [15]. Es decir, donde el término *by* es menor que el término *ax;* por lo que proceden a la aplicación del algoritmo de la división, identificando correctamente cada uno de los elementos que lo constituyen y encontrando una solución particular.

Finalmente, aplican correctamente la regla aritmética para obtener otras soluciones enteras. Hoch y Dreyfus (2004 y 2005) señalaron algunas de las habilidades que engloba el sentido estructural en el contexto del álgebra escolar: ver una expresión o una sentencia algebraica como una entidad, reconocer una expresión o sentencia algebraica como una estructura conocida, dividir una entidad en subestructuras, apreciar las conexiones mutuas entre estructuras y reconocer qué transformaciones es posible realizar y cuáles de éstas son de utilidad, como fue el caso de los estudiantes de estos equipos.

En las siguientes figuras (de la 4.91 a la 4.94), se muestran las respuestas obtenidas de los estudiantes.



Encontrar una primera solución

d * q + r = D

5x + y = 83

83	5
3	16

5(16)+3=83

Encontrar otras soluciones

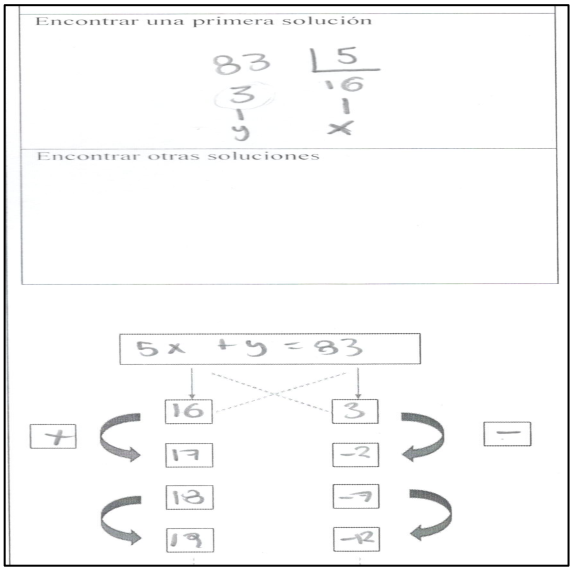
1.- 5(16)+3=83

2.-5(17)+(-2)=83

3.-5(18)+(-7)=83

4.-5(19)+(-12)=83

Figura 4.91. Respuestas de Nadia y Dafné (E1)



Encontrar una primera solución

83 |5
3 16
y x

Encontrar otras soluciones

Figura 4.92. Respuestas de Monserrat y J. de Dios (E4)

---

[15] Caso 1: $by < ax$, donde b = 1 o b < a, pero a < d)

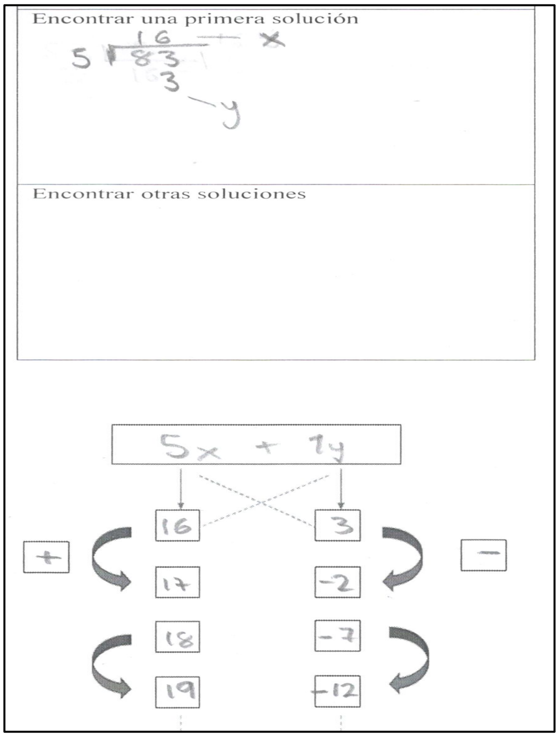


Figura 4.93. Respuesta de Flor y Brenda (E6)

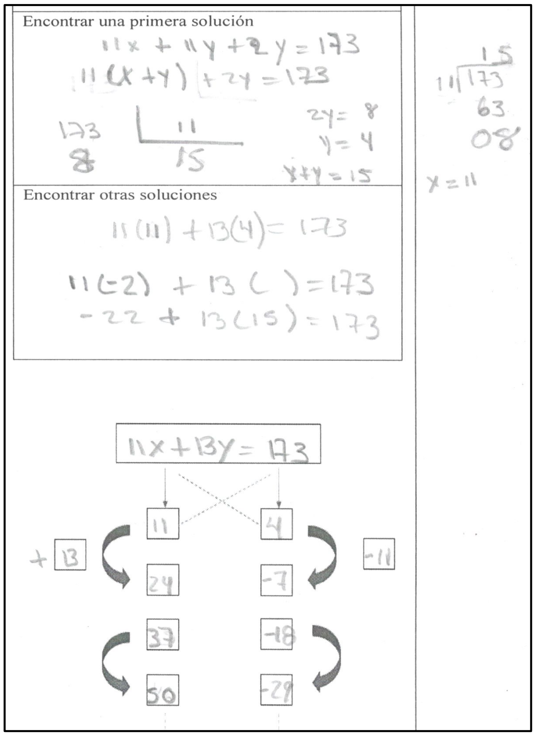
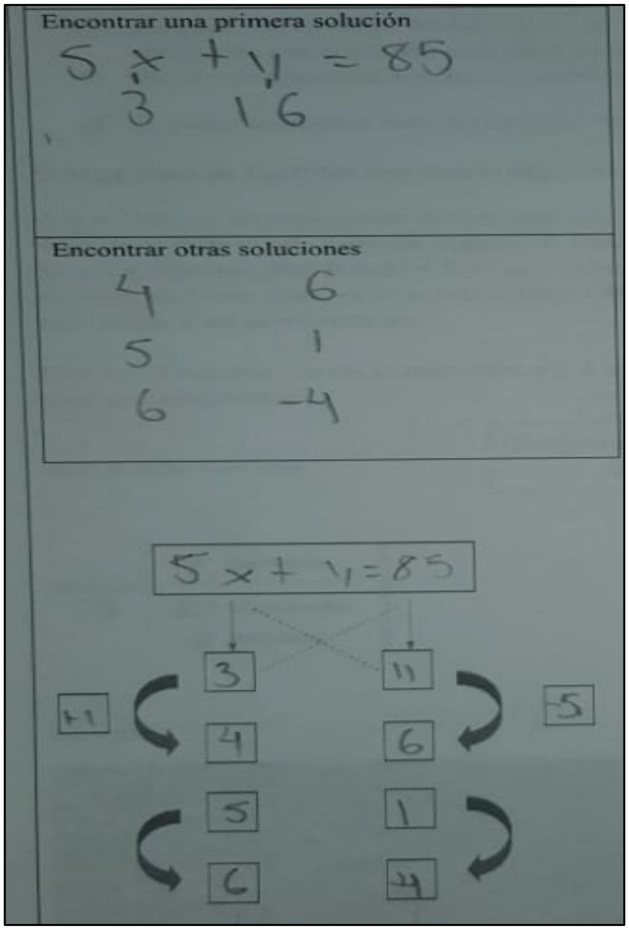


Figura 4.94. Respuesta de Yarinka y Gabriel (E8)

En relación con los equipos E2 y E5 tuvieron dificultades para entender el criterio de la división. Por lo que, no concluyeron la tarea dejandola en blanco. El equipo E3 continua intentando discernir una solución particular, unicamente aplicando el tanteo y no el criterio de la división.

Diversos estudios muestran que muchos alumnos poseen una pobre comprensión de las relaciones y estructuras matemáticas (Booth, 1982; Kieran, 1989; MacGregor, 1996; Schifter, 1999) y muestran una falta de relación entre sus conocimientos aritméticos y sus conocimientos algebraicos (Carpenter & Franke, 2001; Warren, 2001, 2004).

Por otro lado, Hoch y Dreyfus (2004) señala que la apariencia externa de una expresión revela un orden interno determinado por las relaciones entre las partes que componen su estructura. Sin embargo, en el caso de estos estudiantes no logran discernir ni el orden ni las relaciones presentadas en este criterio de la división y de la tarea en general. En la siguiente figura 4.95 se muestra la respuesta obtenida del equipo E3.



Encontrar una primera solución

5x + y = 85
3 16

Encontrar otras soluciones

4 6
5 1
6 -4

Figura 4.95. Respuesta de Ivan y Liliana (E3)

En el caso de la segunda ecuación propuesta 11x + 13y = 173, se realiza una variación en el término by, para que en esta caso corresponda al caso 2[16]. Es decir, cuando el término *by* es mayor que *ax,* se tiene que descomponer el término mayor en función del menor de los coeficientes, para posteriormente poder aplicar el criterio de la división *ax +(ay +by) = c.*

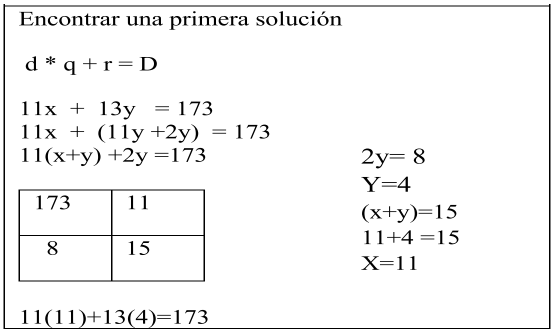
Los equipos E1, E4, E6, E7 y E8 lograron focalizar su atención en la variación realizada en el término *by,* el cuál es ahora mayor que el término *ax*. Por lo que, aplicaron correctamente la descomposición del término mayor en función del coeficiente menor y

---

[16] Caso 2: *by* > *ax donde es necsario* descomponer el término mayor en función del término menor *ax +(ay +by) = c*

factorizaron los términos comunes. Estos operaron de acuerdo con lo señalado por el video tutorial sobre el criterio de la división, por lo que, al parecer en estos estudiantes el video tutorial si favoreció y contribuyo a su aprendizaje, esto de acuerdo a lo que señala Fernández, Díaz, Del Carmen y Recio, (2013: 1994) al favorecer la realimentación, comprobación, aplicación, y demostración en resolución de ejercicios de una manera interactiva brindando un juego de iniciativas a través de organizadores gráficos y animaciones hacia la búsqueda de fundamentación científica y su ejecución, para conseguir además un aprendizaje significativo que implica un cambio en los esquemas de conocimientos que se poseen previamente los estudiantes, estableciendo nuevas relaciones entre dichos elementos, mejorando de esta manera el proceso de enseñanza-aprendizaje.

A continuación, en las siguientes figuras 4.96, 4.97 y 4.98 se presentan algunas de las respuestas obtenidas de los estudiantes.


Encontrar una primera solución

d * q + r = D

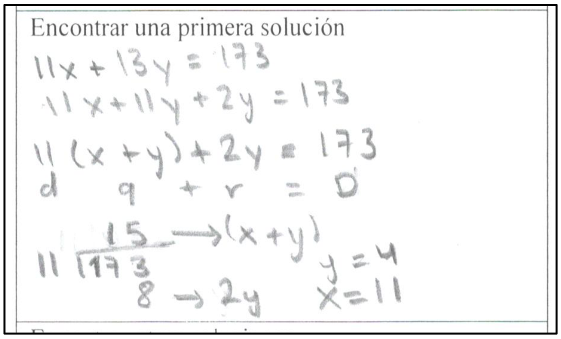
11x + 13y = 173
11x + (11y +2y) = 173
11(x+y) +2y =173

173	11
8	15

11(11)+13(4)=173

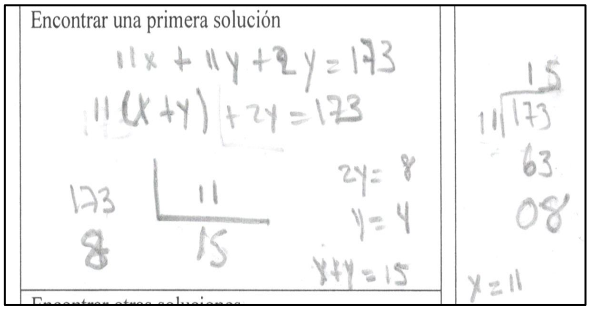
2y= 8
Y=4
(x+y)=15
11+4 =15
X=11

Figura 4.96. Respuesta de Nadia y Dafné (E1)


Encontrar una primera solución

11x + 13y = 173
11x+11y+2y = 173
11(x+y)+2y = 173
d q + r = D
15 →(x+y)
11|173
8 → 2y
y=4
X=11

Figura 4.97. Respuesta de Flor y Brenda (E6)


Encontrar una primera solución

11x + 11y +2y = 173
11(x+y) +2y = 173

173 |11
8 15

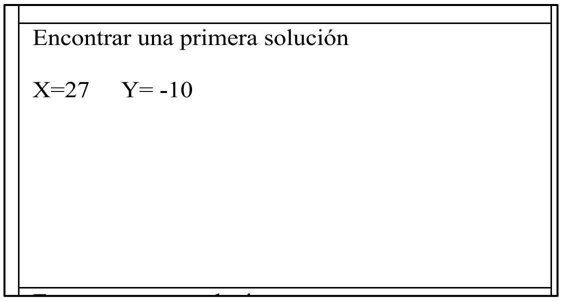
2y= 8
y= 4
x+y = 15

15
11|173
63
08

x=11

Figura 4.98. Respuesta de Yarinka y Gabriel (E8)

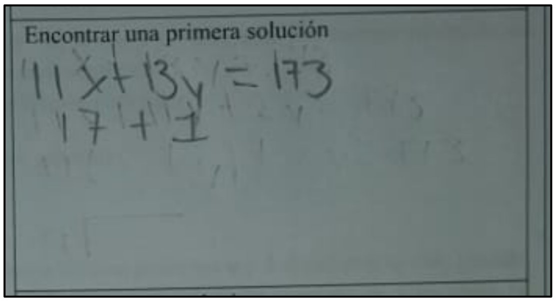
En esta Tarea 6 los equipos restantes E2, E3 y E5 al igual que con la primera ecuación continúan tratando de encontrar una solución particular aplicando simplemente el método por tanteo. Como se hace notar en sus respuestas no lograron discernir el criterio de la división y mucho menos focalizar su atención en la variación aplicada al término *by*. Por lo que, las soluciones escritas en las hojas de trabajo son incorrectas, al parecer no visualizaron el video tutorial propuesto sobre el criterio de la división. En seguida en las figuras 4.99 y 4.100 se muestra un ejemplo de sus respuestas.



Encontrar una primera solución

$X=27$ $Y= -10$

Figura 4.99. Respuesta de América y Eduardo (E2)



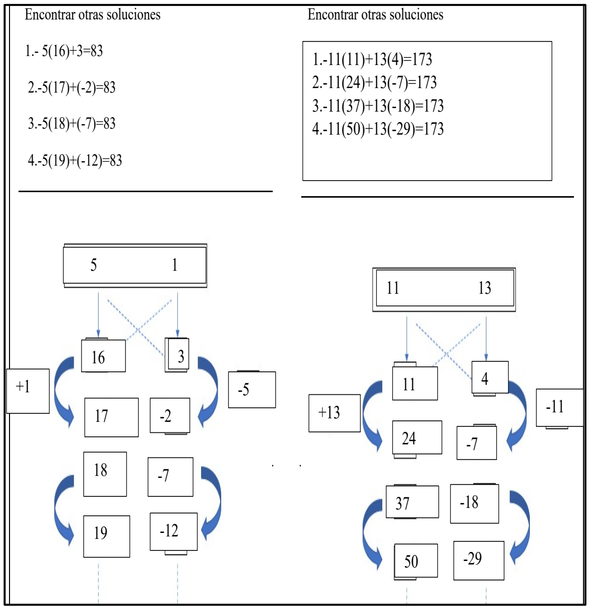
Encontrar una primera solución

$11x+13y=173$

$17+1$

Figura 4.100. Respuesta de Iván y Liliana (E3)

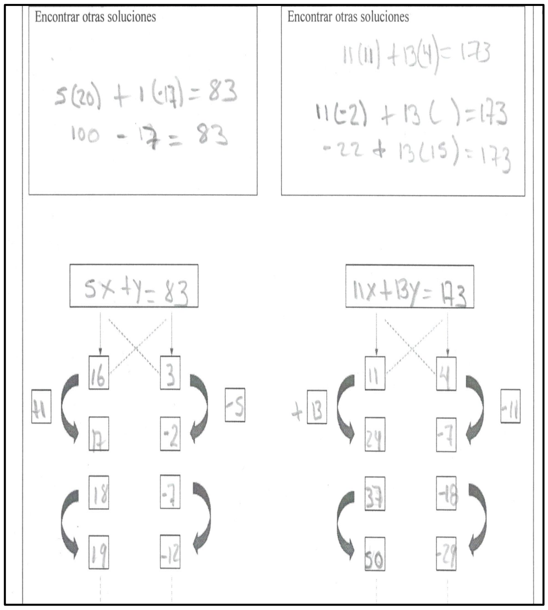
Para concluir con esta Tarea 3C, se solicito a los estudiantes encontrar otras soluciones en cada una de las ecuaciones. Nuevamente los equipos E1, E4, E6, E7 y E8 teniendo ya una solución particular, recurrieron correctamente la regla aritmética utilizada en las tareas anteriores, para obtener otras soluciones enteras $(x_o+b, y_o+/-a)$ y probaron que efectivamente satisfacen a cada una de las ecuaciones propuestas. En la siguientes figuras 4.101 y 4.102 se muestran algunas de las respuestas obtenidas.


Encontrar otras soluciones

1.- 5(16)+3=83
2.-5(17)+(-2)=83
3.-5(18)+(-7)=83
4.-5(19)+(-12)=83

Encontrar otras soluciones

1.-11(11)+13(4)=173
2.-11(24)+13(-7)=173
3.-11(37)+13(-18)=173
4.-11(50)+13(-29)=173


Encontrar otras soluciones

5(20) + 1(-17) = 83
100 - 17 = 83

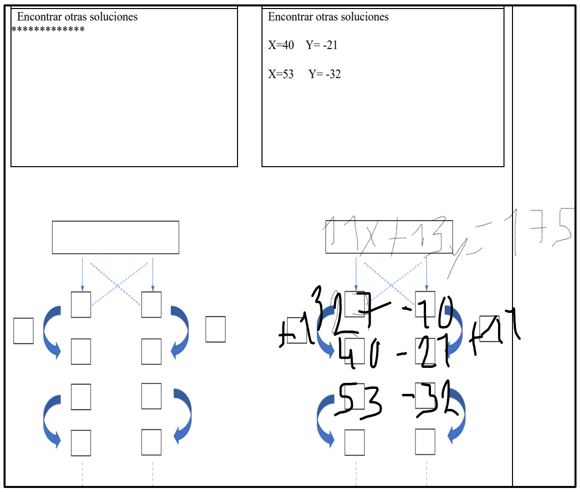
Encontrar otras soluciones

11(11) + 13(4) = 173
11(-2) + 13( ) = 173
-22 + 13(15) = 173

Figura 4.101. Respuestas Nadia y Dafné (E1)

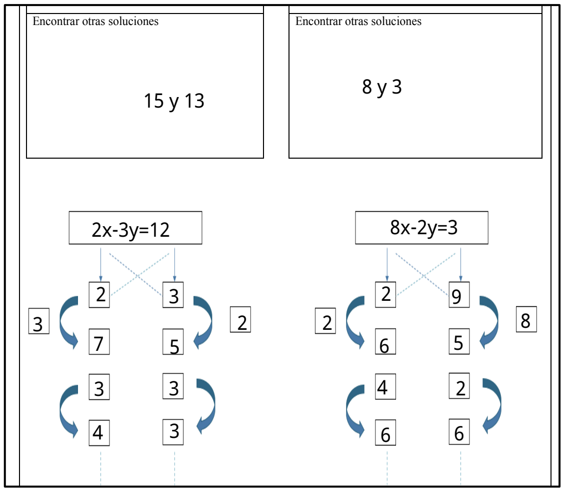
Figura 4.102. Respuestas Yarinka y Gabriel (E8)

En el equipo E2, intentaron encontrar otras soluciones, pero al parecer sólo aplicando el tanteo, pero no lograron encontrar alguna de manera correcta. El equipo E5 si aplica la regla aritmética (x_o+b, y_o+/-a) aunque de manera incorrecta y escribe ecuaciones que no corresponden a la tarea asignada En las siguientes figuras 4.103 y 4.104 se muestra las respuestas de estos estudiantes.


Encontrar otras soluciones
****

Encontrar otras soluciones

X=40 Y= -21
X=53 Y= -32


Encontrar otras soluciones

15 y 13

Encontrar otras soluciones

8 y 3

Figura 4.103. Respuesta América y Eduardo (E2)

Figura 4.104. Respuesta de Sergio y Jesús (E5)

En el caso del equipo E3, aplica correctamente la regla aritmética $(x_o+b, y_o+/-a)$. Sin embargo, al no lograr obtener desde un inicio una solución particular correcta, las soluciones encontradas no satisfacen las ecuaciones propuestas. A continuación en la siguiente figura 4.105, se muestra la respuesta obtenida.

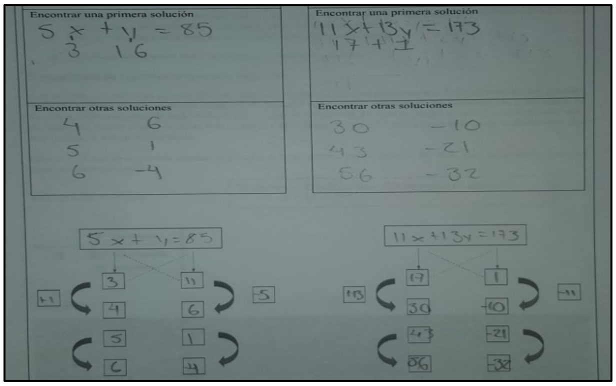


Figura 4.105. Respuesta de Iván y Liliana (E3)

Dentro de nuestro análisis se presentan las evidencias de las respuestas obtenidas (objeto de aprendizaje vivido) a través de las hojas de trabajo de los estudiantes en esta Tarea 3C, donde se focalizó en los aspectos y características críticas de las ecuaciones diofánticas lineales con dos incógnitas del tipo general y de la variación procedimental al aplicar el criterio de la división para obtener una solución particular entera.

De igual manera, se muestra el discernimiento logrado por los estudiantes al aplicar la regla aritmética para obtener otras soluciones enteras de las ecuaciones propuestas en esta tarea. Es por ello, que de igual manera que en las tareas anteriores en esta sexta tarea, se logro categorizar el nivel cognitivo estructural de los alumnos de acuerdo a la clasificación SOLO. En seguida, se muestra la tabla 4.2 donde se especifica dicha clasificación.

Nivel de razonamiento alcanzado (taxonomía SOLO)	Equipo	Criterio	Interpretación y análisis
Pre-estructural: No se domina ningún aspecto crucial de la tarea	E3 y E5	No logra identificar los coeficientes *a, b* y el término independiente *c* de las ecuaciones. No encuentra el M.C.D de (a,b) y no aplica la característica critica del cociente de c/M.C.D de (a, b) para determinar si	Las respuestas que proporcionan los alumnos ante una determinada tarea son erróneas o inexistentes. El estudiante aún no comprende

		las ecuaciones tienen o no solución entera. No discierne el Criterio de la División para obtener una primera solución (particular) y tampoco aplica la regla aritmética ($x_o + a$) y (y_o +/- b) para obtener otras soluciones.	
Uniestructural: Se domina sólo un aspecto crucial de la tarea	E2	Identifica algunos los coeficientes *a, b* y el término independiente *c* de las ecuaciones. No encuentra el M.C.D de (a, b) y no aplica la característica critica del cociente de c/M.C.D de (a, b) para determinar si las ecuaciones tienen o no solución entera. No discerne el Criterio de la División para obtener una primera solución (particular), pero aplica de manera incorrecta la regla aritmética ($x_o + a$) y (y_o +/- b) para obtener otras soluciones.	El resultado del alumno, pese a poder ser cierto, sólo se centra en un determinado aspecto que, por otro lado, no tiene por qué ser relevante Identifica sólo un aspecto del concepto.
Multiestructural: Se dominan varios aspectos cruciales de la tarea		Identifica los coeficientes *a, b* y el término independiente *c* de las ecuaciones. Encuentra el M.C.D de (a ,b) y aplica la característica critica del cociente de c/M.C.D de (a, b) para determinar si las ecuaciones tienen o no solución entera. Discerne el Criterio de la División para obtener una primera solución (particular), pero no aplica correctamente la regla aritmética (x_o + a) y (y_o +/- b) para obtener otras soluciones.	En este caso el alumno es capaz de enumerar una serie de aspectos correctos, pero no va más allá Identifica varios aspectos del concepto, pero no tiene aún una visión completa.
Relacional: Relaciona entre si varios aspectos cruciales de la tarea	E1, E4, E6, E7 y E8	Identifica los coeficientes *a, b* y el término independiente *c* de las ecuaciones. Encuentra el M.C.D de (a,b) y aplica la característica critica del cociente de c/M.C.D de (a, b) para determinar si las ecuaciones tienen o no solución entera. Discierne el Criterio de la División para obtener una primera solución (particular), y aplica correctamente la regla aritmética ($x_o + a$) y (y_o +/- b) para obtener otras soluciones.	El alumno no sólo identifica varios aspectos correctos, sino que también es capaz de relacionarlos entre sí. Tiene una visión completa del concepto conformada por los diferentes aspectos del concepto.

Tabla 4.8. clasificación SOLO del nivel de estructura cognitiva de los estudiantes en la tarea 3C

En la educación matemática se da gran importancia a la comprensión del conocimiento. En las experiencias de aprendizaje con estas tareas 3A, 3B y 3C utilizamos distintas variaciones a partir de los patrones de variación (contraste, separación, generalización y fusión). Así mismo, aplicamos variación conceptual y procedimental, para responder a la cuestión planteada inicialmente en esta unidad de discernimiento que fue ***¿cuando una ecuación diofántica lineal con dos incógnitas tiene solución?*** Y en caso de tenerla ***¿como encontrar una solución particular?.***

De acuerdo con Lai & Murray, (2012), el objetivo de aplicar en estas tareas la variación conceptual fue focalizar en los estudiantes, los aspectos y características críticas de los conceptos matemáticos desde múltiples perspectivas y experiencias. En el caso de la variación procedimental, su objetivo fue proveer un proceso de formación etapa por etapa en el cual la experiencia de los estudiantes con las carácterísticas críticas se manifiesta por la variación de problemas y en la variedad de transferencia de estrategias (Lai & Murray, 2012).

En particular, enfatizamos la atención de los estudiantes, en la variación procedimental con el uso de diversos métodos de solución para un problema dado (criterio de Divisibilidad o multiplicidad, criterio de cifras términales y criterio de la división). Según Lim (2007), esta variación da a los estudiantes una amplia oportunidad de trabajar y perfeccionar sus habilidades matemáticas. Li et al. (2011), señala que los tipos de variaciones usadas son muy importantes y deben enfocarse en la comprensión de conceptos y salir paso por paso de acuerdo al nivel cognitivo de los estudiantes y de este modo tener una substancial mejora de la calidad del aprendizaje de los estudiantes, como lo fue esta unidad de discernimiento tres.

4.1.4 UNIDAD DE DISCERNIMIENTO CUATRO

¿Cuántas soluciones tiene la ecuación? *(modelo general)*

Una vez que hemos analizado el aprendizaje vivido (a partir de las respuestas de los estudiantes en las hojas de trabajo) en las Tareas anteriores. Es decir, sintetizando en la unidad de discernimiento uno, se trabajó la cuestión sobre *¿cómo son los coeficientes en una ecuación diofántica lineal con dos incógnitas?*, en la unidad de discernimiento dos, sobre *¿cuando tiene solución entera?* y en la unidad de discermiento tres, sobre *¿como encontrar una solución particular?*

Ahora en esta unidad de discernimiento cuatro, responderemos a la cuestion ***¿Cuántas soluciones tiene la ecuación?*** **(*modelo general).*** Para ello, esta unidad de discernimiento cuatro estuvo compuesta por las tareas 4A y 4B.

ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES A LA TAREA 4A[17]

Experiencia de Aprendizaje

El diseño y contenido que constituye esta tarea 4A, fue seleccionado y variado al aplicar un patron de variación por contraste, separación y generalización al proponer una ecuación diofántica lineal (del tipo, id. Bezout) donde la característica crítica que varía es el término independiente *c* que ahora es igual a 1 (ax+by =1).

Al igual que en algunas de las tareas anteriores, en este caso se utilizó el videotutorial como herramienta de aprendizaje, que como señala Castillo y Carrillo (2012), ha permitido superar la presencia en la escuela facilitando la continuidad de adquirir el conocimiento de manera autónoma, dado la pandemia por COVID-19.

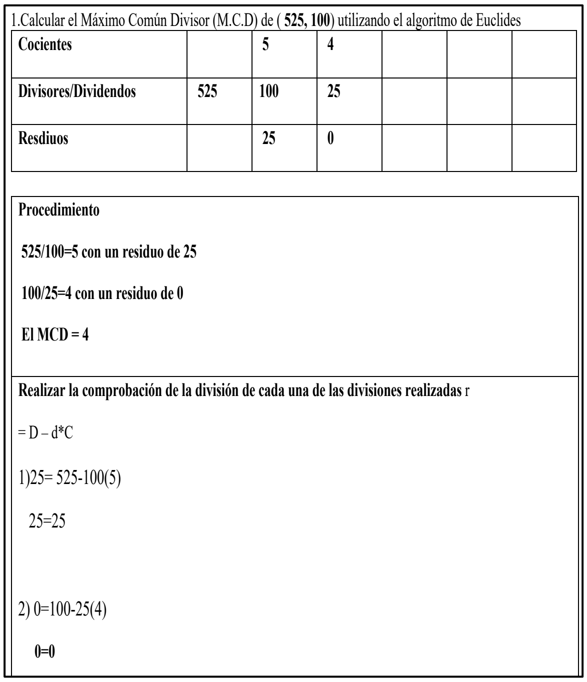
Con esto, los estudiantes pueden visualizar y discernir, por un lado el algoritmo de Euclides y por el otro la identidad de Bezout como un método más que les permitira encontrar una solución particular y posteriormente lograr discernir el aspecto crítico que es encontrar el modelo general para obtener todas las soluciones enteras de la ecuación propuesta.

En la primera sección de esta tarea 4A, se solicitó a los estudiantes aplicar el algoritmo de Euclides, tal como se decribe en el video tutorial, para encontrar el M.C.D. de dos pares de números dados.

En esta primera parte los equipos E1, E4, E6, E7 y E8 lograron discernir las características críticas del algoritmo de Euclides para obtener correctamente en ambos casos el M.C.D. de los dos pares de números asignados. Cabe destacar que en esta primera sección de esta tarea el equipo E3, que presentaban dificultades en general para discernir las tareas y procedimientos matemáticos, en esta ocasión si logra obtener el M.C.D de los números dados, al parecer el video tutorial n esta ocasión si tuvó buenos efectos. En seguida, en las siguientes figuras (de la 4.106 a la 4.110) se muestran las respuestas correspondientes a algunos de estos equipos.

---

[17] Ver tarea 4A en las hojas de trabajo para los estudiantes, las cuales aparecen en el Anexo 1 de esta tesis



1.Calcular el Máximo Común Divisor (M.C.D) de (**525, 100**) utilizando el algoritmo de Euclides

Cocientes		**5**	**4**			
Divisores/Dividendos	**525**	**100**	**25**			
Resdiuos		**25**	**0**			

Procedimiento

525/100=5 con un residuo de 25

100/25=4 con un residuo de 0

El MCD = 4

Realizar la comprobación de la división de cada una de las divisiones realizadas r

= D – d*C

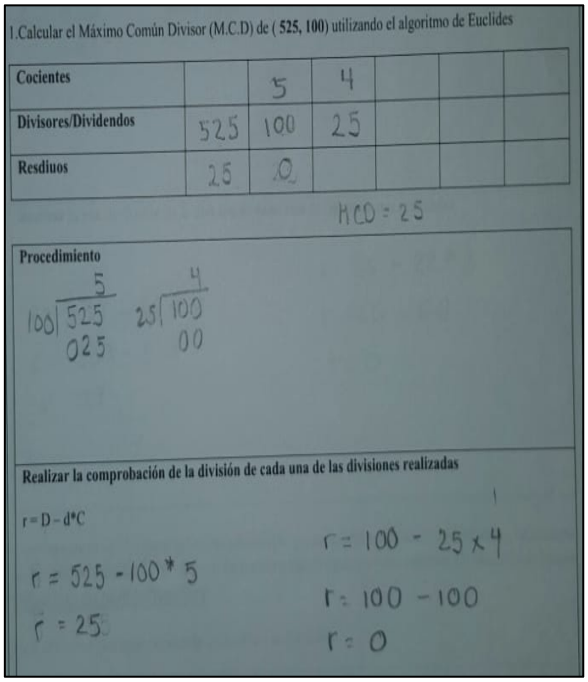
1)25= 525-100(5)

25=25

2) 0=100-25(4)

0=0

Figura.4.106. Respuestas de Nadia y Dafné (E1)



1.Calcular el Máximo Común Divisor (M.C.D) de (**525, 100**) utilizando el algoritmo de Euclides

Cocientes		5	4			
Divisores/Dividendos	525	100	25			
Resdiuos	25	0				

MCD = 25

Procedimiento

$$100\overline{)525}^{\,5} \quad 025 \qquad 25\overline{)100}^{\,4} \quad 00$$

Realizar la comprobación de la división de cada una de las divisiones realizadas

r = D – d*C

r = 525 - 100 * 5

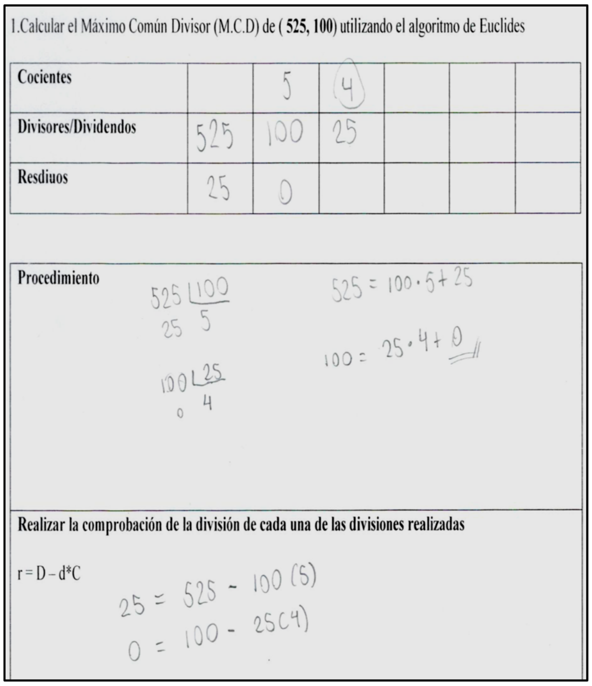
r = 25

r = 100 - 25 x 4

r = 100 - 100

r = 0

Figura 4.107. Respuestas de Ivan y Liliana (E3)



1.Calcular el Máximo Común Divisor (M.C.D) de (**525, 100**) utilizando el algoritmo de Euclides

Cocientes		5	4			
Divisores/Dividendos	525	100	25			
Resdiuos	25	0				

Procedimiento

525 |100

25 5

100 |25

0 4

525 = 100 · 5 + 25

100 = 25 · 4 + 0

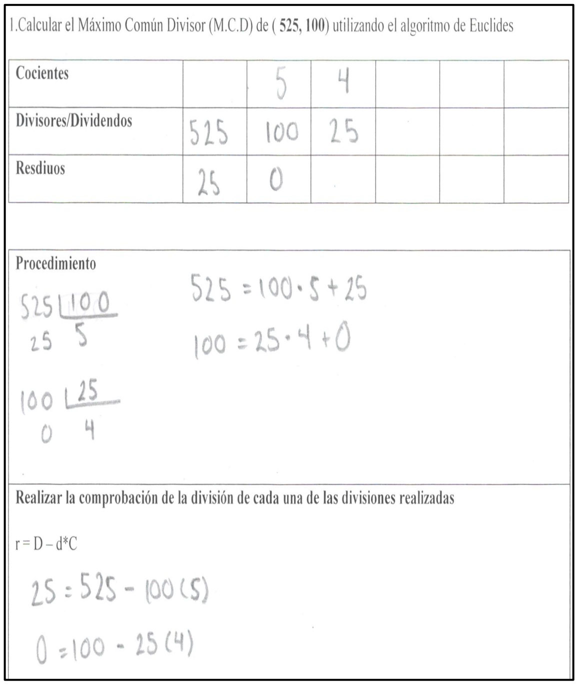
Realizar la comprobación de la división de cada una de las divisiones realizadas

r = D – d*C

25 = 525 - 100 (5)

0 = 100 - 25(4)

Figura 4.108. Respuestas de Monserrat y J. de Dios (E4)



1.Calcular el Máximo Común Divisor (M.C.D) de (**525, 100**) utilizando el algoritmo de Euclides

Cocientes		5	4			
Divisores/Dividendos	525	100	25			
Resdiuos	25	0				

Procedimiento

525 |100

25 5

100 |25

0 4

525 = 100 · 5 + 25

100 = 25 · 4 + 0

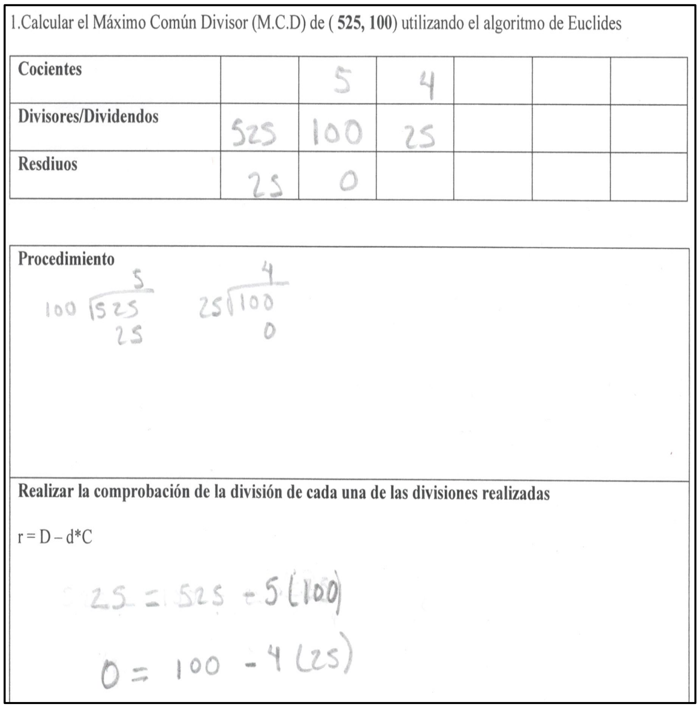
Realizar la comprobación de la división de cada una de las divisiones realizadas

r = D – d*C

25 = 525 - 100 (5)

0 = 100 - 25 (4)

Figura 4.109. Respuestas de Flor y Brenda (E6)



1.Calcular el Máximo Común Divisor (M.C.D) de (**525, 100**) utilizando el algoritmo de Euclides

Cocientes		5	4			
Divisores/Dividendos	525	100	25			
Resdiuos	25	0				

Procedimiento

100 | 525 = 5, 25

25 | 100 = 4, 0

Realizar la comprobación de la división de cada una de las divisiones realizadas

r = D – d*C

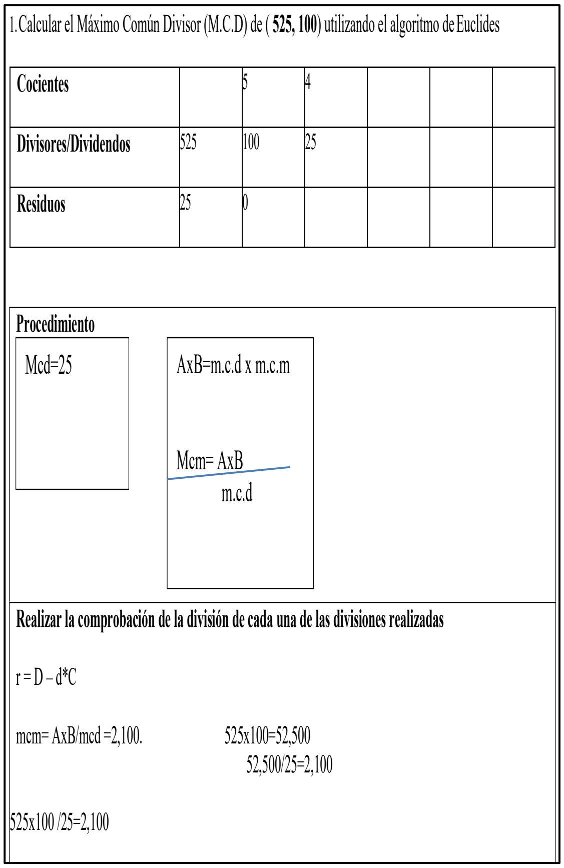
25 = 525 - 5(100)

0 = 100 - 4(25)

Figura 4.110. Respuestas de Yarinka y Gabriel (E8)

En el caso del equipo E2 de America y Eduardo, como el E5 de Sergio y Jesús al parecer compartieron respuestas ya que al visualizar sus respuestas son muy parecidas. De primera instancia todo indica que logran discernir en parte los aspectos críticos del algoritmo de Euclides, ya que pueden concretar la obtención del M.C.D del primer par de números asignados.

Sin embargo, en el segundo par de números que involucran una mayor grado de complejidad, aunque intentan seguir el algoritmo no logran obtener correctamente el M.C.D Posteriormente, al solicitarles aplicar la comprobación de la división mediante la regla del residuo, en ambos casos no lograron reliazarlas correctamente, debido a que presentan dificultades para identificar las partes de la división (dividendo, cociente, residuo, etc.), que les permitiría llevar acabo este procedimiento matemático y comprobar su resultado final. En las siguientes figuras 4.111 y 4.112 se muestran las respuestas de estos dos equipos.



1.Calcular el Máximo Común Divisor (M.C.D) de (**525, 100**) utilizando el algoritmo de Euclides

Cocientes		5	4			
Divisores/Dividendos	525	100	25			
Residuos	25	0				

Procedimiento

Mcd=25

AxB=m.c.d x m.c.m

Mcm= AxB
m.c.d

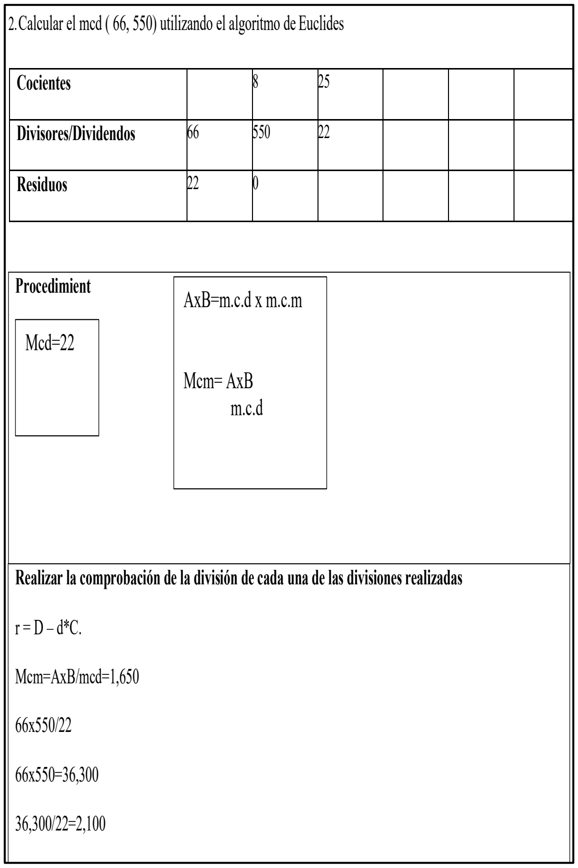
Realizar la comprobación de la división de cada una de las divisiones realizadas

r = D – d*C

mcm= AxB/mcd =2,100.
525x100=52,500
52,500/25=2,100

525x100 /25=2,100

Figura 4.111. Respuestas de America y Eduardo (E2)



2.Calcular el mcd (66, 550) utilizando el algoritmo de Euclides

Cocientes		8	25			
Divisores/Dividendos	66	550	22			
Residuos	22	0				

Procedimient

Mcd=22

AxB=m.c.d x m.c.m

Mcm= AxB
m.c.d

Realizar la comprobación de la división de cada una de las divisiones realizadas

r = D – d*C.

Mcm=AxB/mcd=1,650

66x550/22

66x550=36,300

36,300/22=2,100

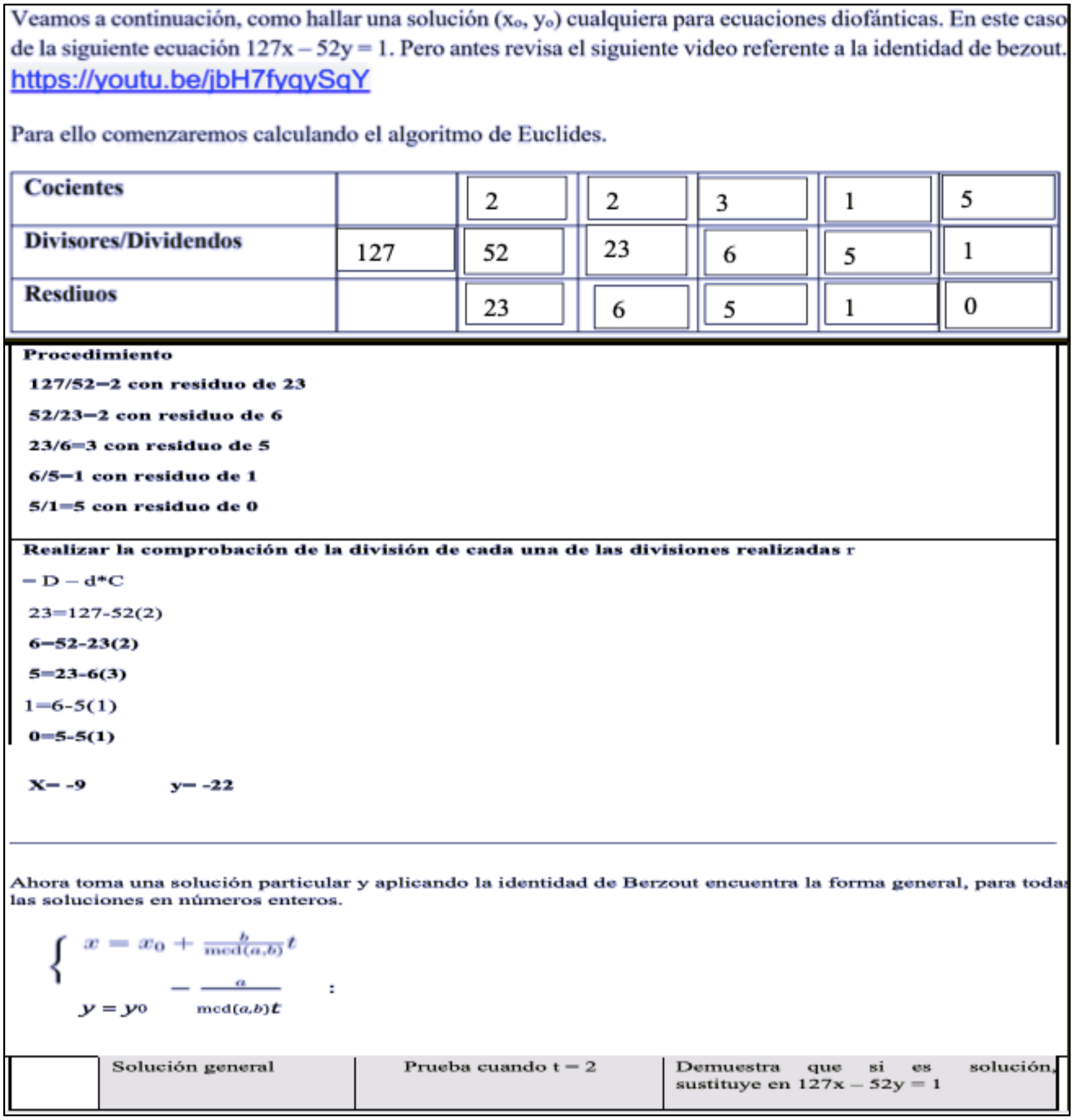
Figura 4.112. Respuestas de Sergio y Jesús (E5)

En la segunda sección de esta tarea 4A, se pidió a los estudiantes aplicar el algoritmo de Euclides y la identidad de Bezout para obtener una solución particular (entera) de la ecuación diofántica lineal (del tipo, id. Bezout) propuesta, donde la variación aplicada a dicha ecuación es en el término independiente *c* que ahora es igual a 1. Una vez encontrada lograr discernir la característica crítica que es encontrar el modelo general para obtener otras soluciones enteras de la ecuación.

En esta sección los equipos E1, E4, E6, E7 y E8 lograron obtener el M.C.D de los coeficientes *a* y *b* (127, 52) de la ecuación diofántica lineal $127x - 52y = 1$, pero sólo los equipos E1 y E8 lograron discernir del todo las características críticas del algoritmo de Euclides y de la Identidad de Bezout, para encontrar una solución particular. Lograron discernir que si x_0, y_0 es una solución particular de la ecuación, todas las soluciones están dadas por: $x = x_0 + (b/d)t$, $y = y_0 - (a/d)t$, para cualquier número entero t.

Banerjee y Subramaniam (2005), consideran que desarrollar un sentido estructural de las expresiones requiere el uso de procedimientos y reglas en situaciones y contextos variados, que le permitan a los estudiantes encontrarle el sentido a las relaciones entre los componentes de diversas expresiones que compartan los mismos aspectos estructurales. Como es el caso de esta tarea.

En las figuras 4.113 y 4.114 que se presentan en seguida se muestra un ejemplo de las respuestas del equipo E1 y E8.



Veamos a continuación, como hallar una solución (x_o, y_o) cualquiera para ecuaciones diofánticas. En este caso de la siguiente ecuación 127x – 52y = 1. Pero antes revisa el siguiente video referente a la identidad de bezout. https://youtu.be/jbH7fyqySqY

Para ello comenzaremos calculando el algoritmo de Euclides.

Cocientes		2	2	3	1	5
Divisores/Dividendos	127	52	23	6	5	1
Resdiuos		23	6	5	1	0

Procedimiento

127/52=2 con residuo de 23

52/23=2 con residuo de 6

23/6=3 con residuo de 5

6/5=1 con residuo de 1

5/1=5 con residuo de 0

Realizar la comprobación de la división de cada una de las divisiones realizadas r = D – d*C

23=127-52(2)

6=52-23(2)

5=23-6(3)

1=6-5(1)

0=5-5(1)

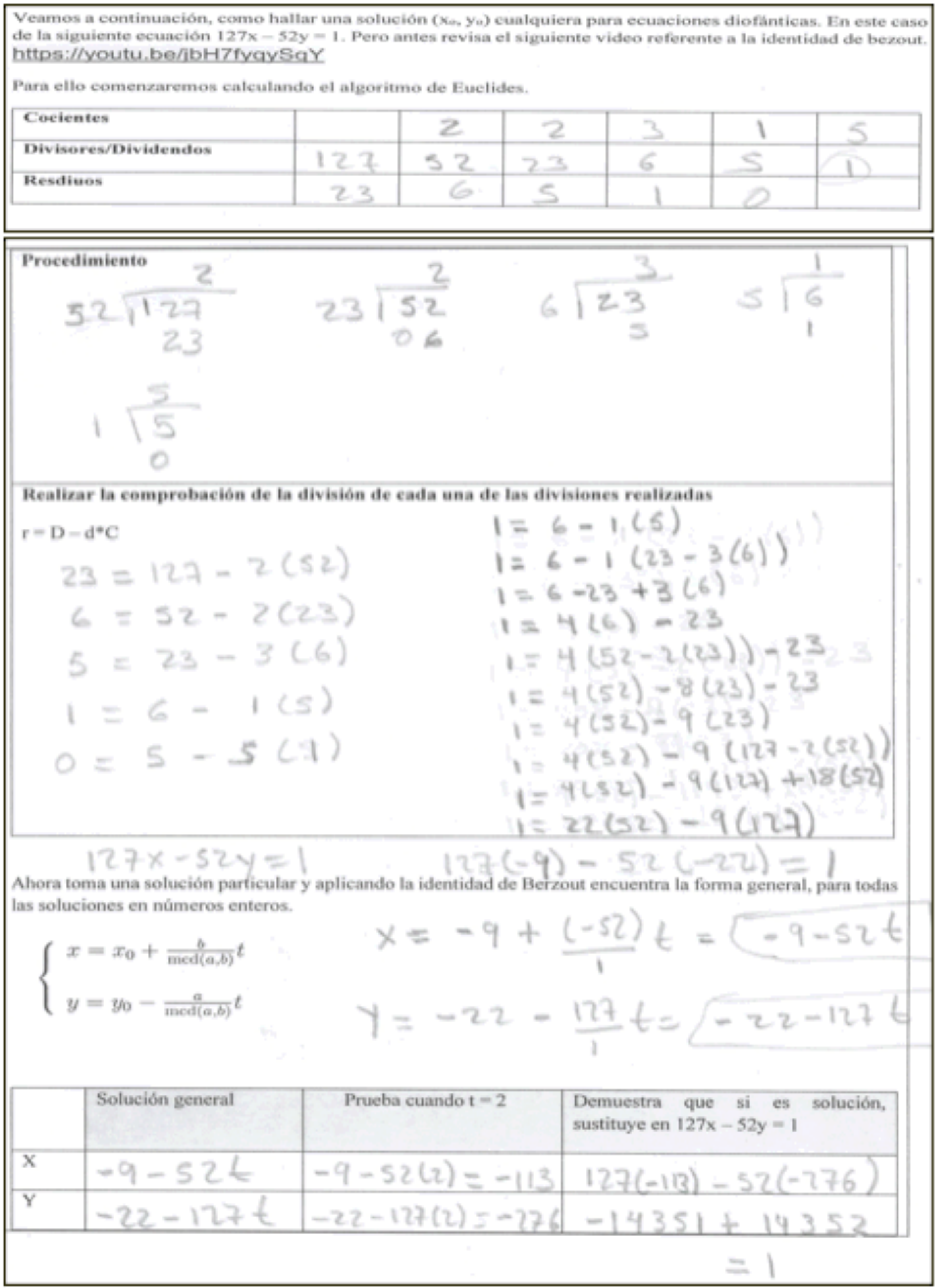
X= -9 **y= -22**

Ahora toma una solución particular y aplicando la identidad de Berzout encuentra la forma general, para toda las soluciones en números enteros.

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{\mathrm{mcd}(a,b)}t \\ y = y_0 - \frac{a}{\mathrm{mcd}(a,b)t} \end{cases} :$$

	Solución general	Prueba cuando t = 2	Demuestra que si es solución, sustituye en 127x – 52y = 1

Figura 4.113. Respuestas de Nadia y Dafné (E1)



Veamos a continuación, como hallar una solución (x_o, y_o) cualquiera para ecuaciones diofánticas. En este caso de la siguiente ecuación 127x – 52y = 1. Pero antes revisa el siguiente video referente a la identidad de bezout. https://youtu.be/jbH7fyqySqY

Para ello comenzaremos calculando el algoritmo de Euclides.

Cocientes		2	2	3	1	5
Divisores/Dividendos	127	52	23	6	5	①
Resdiuos	23	6	5	1	0	

Procedimiento

$$\begin{array}{r} 2 \\ 52\,\overline{)\,127} \\ 23 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \\ 23\,\overline{)\,52} \\ 06 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3 \\ 6\,\overline{)\,23} \\ 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ 5\,\overline{)\,6} \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ 1\,\overline{)\,5} \\ 0 \end{array}$$

Realizar la comprobación de la división de cada una de las divisiones realizadas

r = D – d*C

$23 = 127 - 2(52)$

$6 = 52 - 2(23)$

$5 = 23 - 3(6)$

$1 = 6 - 1(5)$

$0 = 5 - 5(1)$

$1 = 6 - 1(5)$

$1 = 6 - 1(23 - 3(6))$

$1 = 6 - 23 + 3(6)$

$1 = 4(6) - 23$

$1 = 4(52 - 2(23)) - 23$

$1 = 4(52) - 8(23) - 23$

$1 = 4(52) - 9(23)$

$1 = 4(52) - 9(127 - 2(52))$

$1 = 4(52) - 9(127) + 18(52)$

$1 = 22(52) - 9(127)$

$127x - 52y = 1$ $\qquad$ $127(-9) - 52(-22) = 1$

Ahora toma una solución particular y aplicando la identidad de Berzout encuentra la forma general, para todas las soluciones en números enteros.

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{\mathrm{mcd}(a,b)}t \\ y = y_0 - \frac{a}{\mathrm{mcd}(a,b)}t \end{cases}$$

$$x = -9 + \frac{(-52)}{1}t = \boxed{-9-52t}$$

$$Y = -22 - \frac{127}{1}t = \boxed{-22-127t}$$

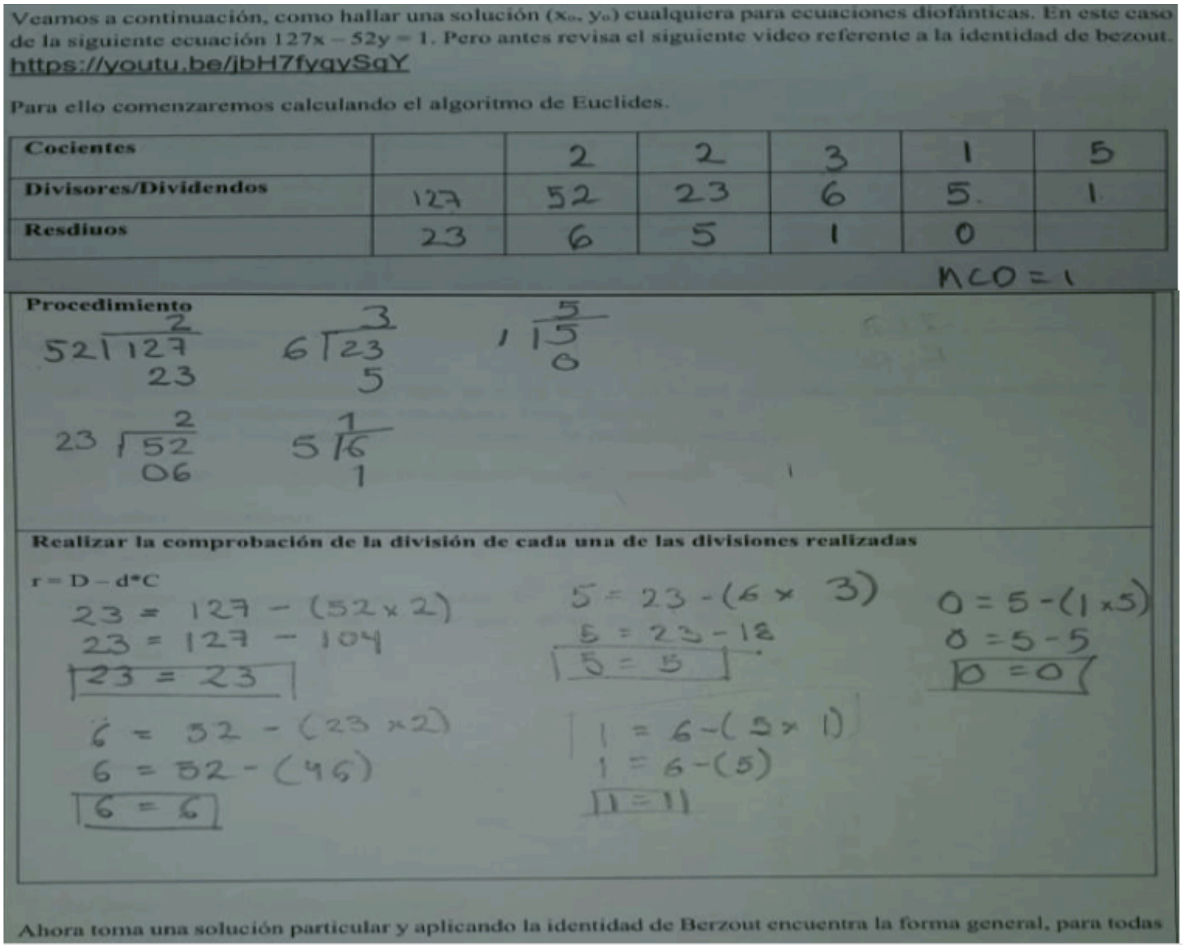
	Solución general	Prueba cuando t = 2	Demuestra que si es solución, sustituye en 127x – 52y = 1
X	$-9-52t$	$-9-52(2) = -113$	$127(-113) - 52(-276)$
Y	$-22-127t$	$-22-127(2) = -276$	$-14351 + 14352$

$= 1$

Figura 4.114. Respuestas de Yarinka y Gabriel (E8)

En el caso del equipo E3 de Iván y Liliana sus procedimientos y respuesta muestran que lograron discernir las características criticas del algoritmo de Euclides para encontrar que el M.C.D. de los coeficientes *a, b* de la ecuación.

Sin embargo, no lograron discernir las características criticas de la Identidad de Bezout, para obtener la solución particular (x_0, y_0) y con ella encontrar todas las soluciones enteras que están dadas por: $x = x_0 + (b/d)t$, $y = y_0 - (a/d)t$, para cualquier *t* entero. En la siguiente figura 4.115 se muestra las respuetas obtenidas por este equipo.



Veamos a continuación, como hallar una solución (x_0, y_0) cualquiera para ecuaciones diofánticas. En este caso de la siguiente ecuación $127x - 52y = 1$. Pero antes revisa el siguiente video referente a la identidad de bezout. https://youtu.be/jbH7fyqySqY

Para ello comenzaremos calculando el algoritmo de Euclides.

Cocientes		2	2	3	1	5
Divisores/Dividendos	127	52	23	6	5.	1
Resdiuos	23	6	5	1	0	

MCD = 1

Procedimiento

2
52 | 127
23

2
23 | 52
06

3
6 | 23
5

1
5 | 6
1

5
1 | 5
0

Realizar la comprobación de la división de cada una de las divisiones realizadas

r = D – d*C

23 = 127 – (52 × 2)
23 = 127 – 104
$\boxed{23 = 23}$

6 = 52 - (23 × 2)
6 = 52 - (46)
$\boxed{6 = 6}$

5 = 23 - (6 × 3)
5 = 23 - 18
$\boxed{5 = 5}$

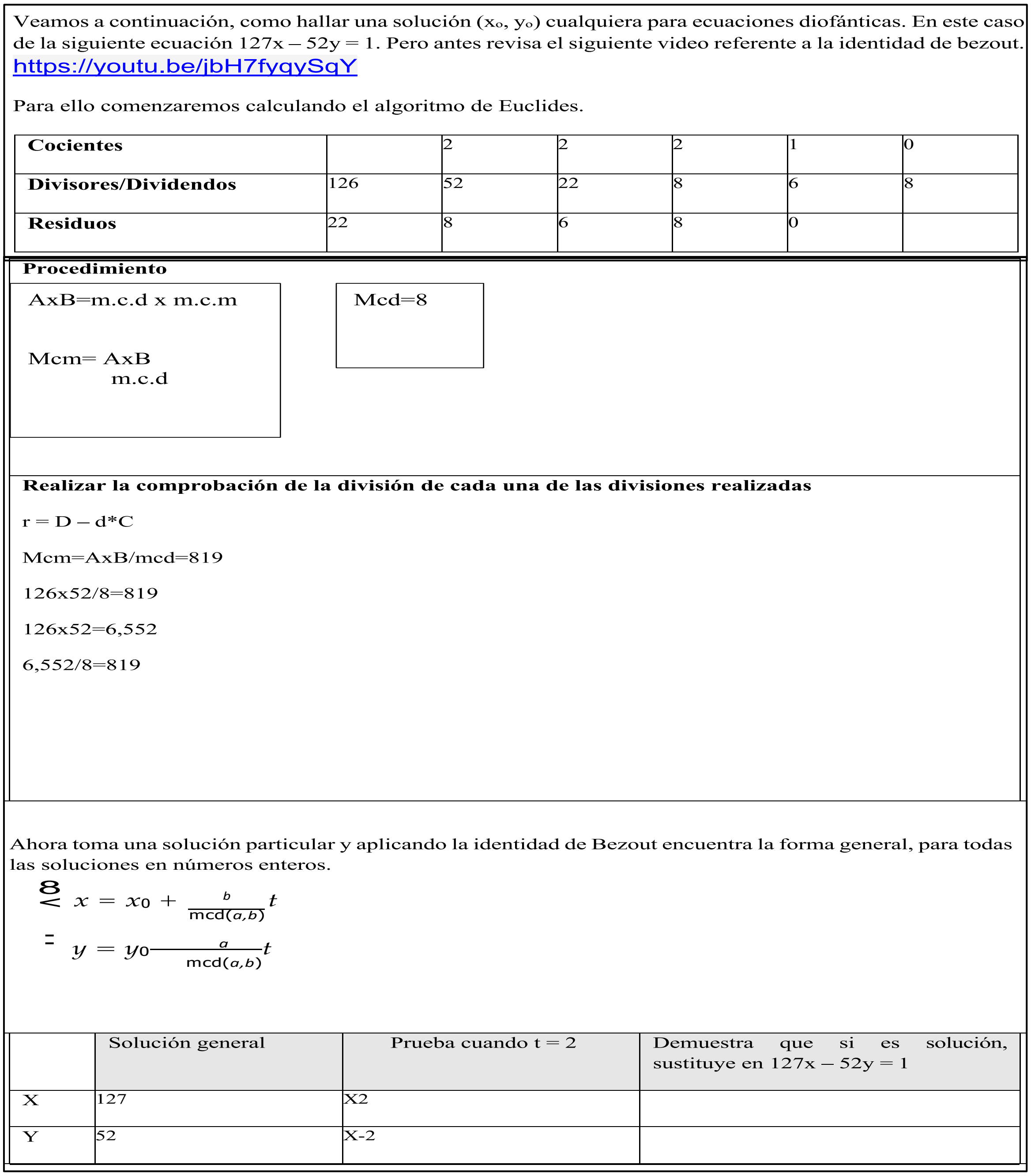
1 = 6 - (5 × 1)
1 = 6 - (5)
$\boxed{1 = 1}$

0 = 5 - (1 × 5)
0 = 5 - 5
$\boxed{0 = 0}$

Ahora toma una solución particular y aplicando la identidad de Berzout encuentra la forma general, para todas

Figura 4.115. Respuestas de Iván y Liliana (E3)

Los equipos E2 y E5 en esta tarea 4A, no lograron encontrar correctamente el M.C.D. de los coeficientes *a, b* cometiendo errores en las divisiones dentro del algoritmo de Euclides. También presentaron errores al aplicar la identidad de Bezout. De tal manera, que en sus procedimientos y respuestas se visualiza que no lograron discernir las características críticas de ambos precedimientos matemáticos. Por lo que, no llegaron a encontrar una solución particular (x_0, y_0) de la ecuación, ni el modelo general para obtener otras soluciones dejando en blanco esta parte de la tarea. En la siguientes figuras 4.116 y 4.117 se muestran las respuestas de los equipos 2 y 5.



Veamos a continuación, como hallar una solución (x_o, y_o) cualquiera para ecuaciones diofánticas. En este caso de la siguiente ecuación 127x – 52y = 1. Pero antes revisa el siguiente video referente a la identidad de bezout.
https://youtu.be/jbH7fyqySqY

Para ello comenzaremos calculando el algoritmo de Euclides.

Cocientes		2	2	2	1	0
Divisores/Dividendos	126	52	22	8	6	8
Residuos	22	8	6	8	0	

Procedimiento

AxB=m.c.d x m.c.m

Mcm= AxB
m.c.d

Mcd=8

Realizar la comprobación de la división de cada una de las divisiones realizadas

r = D – d*C

Mcm=AxB/mcd=819

126x52/8=819

126x52=6,552

6,552/8=819

Ahora toma una solución particular y aplicando la identidad de Bezout encuentra la forma general, para todas las soluciones en números enteros.

$$8 < x = x_0 + \frac{b}{\text{mcd}(a,b)}t$$

$$: y = y_0 - \frac{a}{\text{mcd}(a,b)}t$$

	Solución general	Prueba cuando t = 2	Demuestra que si es solución, sustituye en 127x – 52y = 1
X	127	X2	
Y	52	X-2	

Figura. 4.116. Respuestas de America y Eduardo (E2)

Veamos a continuación, como hallar una solución (x_o, y_o) cualquiera para ecuaciones diofánticas. En este caso de la siguiente ecuación 127x – 52y = 1. Pero antes revisa el siguiente video referente a la identidad de bezout.
https://youtu.be/jbH7fyqySqY

Para ello comenzaremos calculando el algoritmo de Euclides.

Cocientes		2	2	2	1	0
Divisores/Dividendos	126	52	22	8	6	8
Residuos	22	8	6	8	0	

Procedimiento

AxB=m.c.d x m.c.m

Mcm= AxB
m.c.d

Mcd=8

Realizar la comprobación de la división de cada una de las divisiones realizadas

r = D – d*C

Mcm=AxB/mcd=819

126x52/8=819

126x52=6,552

6,552/8=819

Ahora toma una solución particular y aplicando la identidad de Berzout encuentra la forma general, para todas las soluciones en números enteros.

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{\mathrm{mcd}(a,b)}t \\ y = y_0 - \frac{a}{\mathrm{mcd}(a,b)}t \end{cases}$$

	Solución general	Prueba cuando t = 2	Demuestra que si es solución, sustituye en 127x – 52y = 1
X	127	X2	
Y	52	X-2	

Figura 4.117. Respuestas de Sergio y Jesús

Entre los errores que puede cometer un estudiante al contestar un ejercicio, hay algunos que tienen una relación más evidente con un sentido estructural poco desarrollado, es decir, que no distinga las estructuras que observa y/o no sepa cuáles son las manipulaciones válidas según dicha estructura, ni cuál de ellas es la más eficiente.

Las actividades diseñadas incluyeron un énfasis en contrastes y variaciones que facilitaran a los alumnos discernir las diferencias estructurales y procedimentales que les permitieran evitar dichos errores. Kieran (2018) coincide en que desarrollar la capacidad de ver la estructura es un proceso largo que necesita reinventarse con cada nuevo objeto matemático que se observa.

De esta manera, se analizan las respuestas dadas por los estudiantes a la luz de la taxonomía SOLO y los enfoques del aprendizaje. En la siguiente tabla 4.9 se muestra la clasificación de los niveles de las respuestas dadas por los estudiantes en esta tarea 4A.

Nivel de razonamiento alcanzado (taxonomía SOLO)	Equipo	Criterio	Interpretación y análisis
Pre-estructural: No se domina ningún aspecto crucial de la tarea	E2 y E5	No discierne el algoritmo de Euclides para obtener el M.C.D de (a, b) y tampoco realiza la comprobación de las divisiones $D = d*q + r$. No identifica correctamente los coeficientes *a*, *b* y el término independiente *c* de la ecuación. No Aplica la identidad de Bezout para obtener una primera solución (particular). Por lo que, no obtiene el modelo general para encontrar todas las soluciones enteras de la ecuación.	Las respuestas que proporcionan los alumnos ante una determinada tarea son erróneas o inexistentes. El estudiante aún no comprende
Uniestructural: Se domina sólo un aspecto crucial de la tarea	E3	Discierne en parte el algoritmo de Euclides para obtener el M.C.D de (a, b), pero no realiza la comprobación de las divisiones $D = d*q + r$. Identifica algunos de los coeficientes *a*, *b* y el término independiente *c* de la ecuación. No Aplica la identidad de Bezout para obtener una primera solución (particular). Por lo que, no obtiene el modelo general para encontrar todas las soluciones enteras de la ecuación.	El resultado del alumno, pese a poder ser cierto, sólo se centra en un determinado aspecto que, por otro lado, no tiene por qué ser relevante Identifica sólo un aspecto del concepto.

Multiestructural: Se dominan varios aspectos cruciales de la tarea	E4, E6 y E7	Discierne el algoritmo de Euclides para obtener el M.C.D de (a, b) y realiza la comprobación de las divisiones D = d*q + r. Identifica correctamente los coeficientes *a, b* y el término independiente *c* de la ecuación. No Aplica la identidad de Bezout para obtener una primera solución (particular). Por lo que, no obtiene el modelo general para encontrar todas las soluciones enteras de la ecuación.	En este caso el alumno es capaz de enumerar una serie de aspectos correctos, pero no va más allá Identifica varios aspectos del concepto, pero no tiene aún una visión completa.
Relacional: Relaciona entre si varios aspectos cruciales de la tarea	E1 y E8	Discierne el algoritmo de Euclides para obtener el M.C.D de (a, b) y realiza la comprobación de las divisiones D = d*q + r. Identifica correctamente los coeficientes *a, b* y el término independiente *c* de la ecuación. Aplica la identidad de Bezout para obtener una primera solución (particular) y obtiene el modelo general para encontrar todas las soluciones enteras de la ecuación. $\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{\mathrm{mcd}(a,b)}t \\ y = y_0 - \frac{a}{\mathrm{mcd}(a,b)}t \end{cases}$	El alumno no sólo identifica varios aspectos correctos, sino que también es capaz de relacionarlos entre sí. Tiene una visión completa del concepto conformada por los diferentes aspectos del concepto.

Tabla 4.9. clasificación SOLO del nivel de estructura cognitiva de los estudiantes en la tarea 4A

ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES A LA TAREA 4B[18]

Experiencia de Aprendizaje

El diseño de esta tarea 4B, se incluyó el empleo del software de geometría dinámica *Geogebra* como herramienta de apoyo para la elaboración de la gráfica que representa la ecuación propuesta y que además tiene la potencialidad de no reducir el trabajo académico a practicar algoritmos, sino que interesó que éste ayudará a los estudiantes a descubrir, construir conceptos y técnicas mediante la focalización de la atención de los estudiantes en

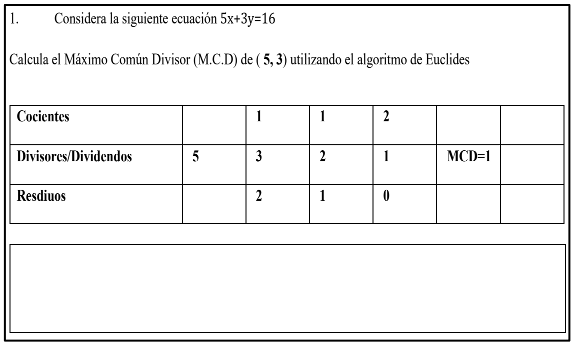
---

[18] Ver tarea 4B en las hojas de trabajo para los estudiantes, las cuales aparecen en el Anexo 1 de esta tesis

encontrar puntos (x_o, y_o), como soluciones enteras de la ecuación y a partir de una de ellas (solución particular) encontrar el modelo general que permita obtener otras soluciones enteras. En esta tarea se propuso una ecuación diofántica lineal con dos incógnitas (del tipo, general ax+by= c donde c ≠ 0).

La elección del objeto de aprendizaje en esta tarea destaca la importancia de involucrar a los alumnos en experiencias que requieren la conexión de diferentes representaciones de conceptos matemáticos como un umbral para el aprendizaje (por ejemplo, Goldin 1998; NCTM 2000; Duval 2006; Askew et 1997; Swan 2007, 2011).

En la primera parte de esta tarea 4B, se comenzó solicitando a los estudiantes obtener el MCD de los coeficientes *a, b* de la ecuación *5x+3y=16*, aplicando el algoritmo de Euclides. En el caso de los equipos E1, E3, E4, E6, E7 y E8 lograron identificar correctamente los coeficientes *a*, *b* y obtener su M.C.D. En las siguientes figuras (de la 4.118 a la 4.121) se muestran las respuestas obtenidas por parte de estos equipos.

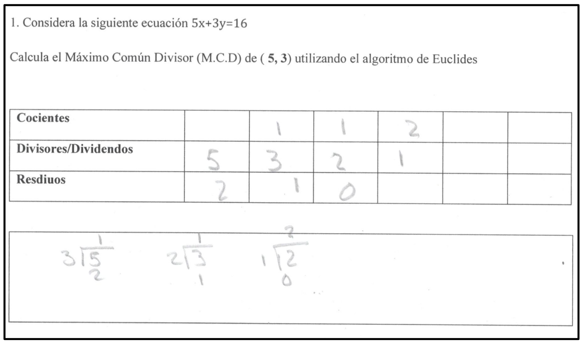


1. Considera la siguiente ecuación 5x+3y=16

Calcula el Máximo Común Divisor (M.C.D) de (**5, 3**) utilizando el algoritmo de Euclides

Cocientes		**1**	**1**	**2**		
Divisores/Dividendos	**5**	**3**	**2**	**1**	**MCD=1**	
Resdiuos		**2**	**1**	**0**		

Figura.4.118. Respuesta de Nadia y Dafné (E1)



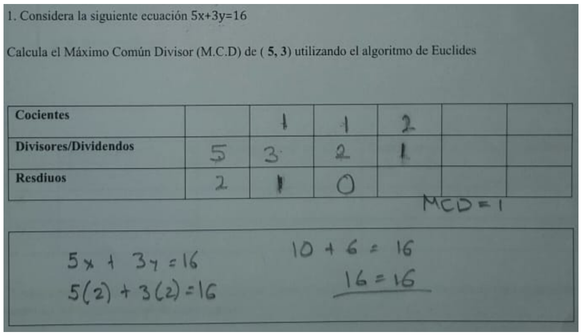
1. Considera la siguiente ecuación 5x+3y=16

Calcula el Máximo Común Divisor (M.C.D) de (**5, 3**) utilizando el algoritmo de Euclides

Cocientes		1	1	2		
Divisores/Dividendos	5	3	2	1		
Resdiuos	2	1	0			

$\begin{array}{r}1\\3\overline{)5}\\2\end{array}$ $\begin{array}{r}1\\2\overline{)3}\\1\end{array}$ $\begin{array}{r}2\\1\overline{)2}\\0\end{array}$

Figura.4.119. Respuesta de Yarinka y Gabriel (E8)



1. Considera la siguiente ecuación 5x+3y=16

Calcula el Máximo Común Divisor (M.C.D) de (**5, 3**) utilizando el algoritmo de Euclides

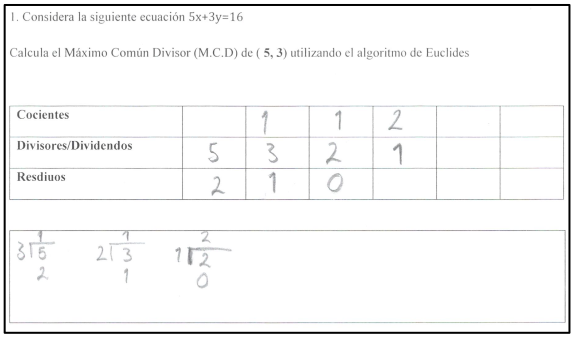
Cocientes		1	1	2		
Divisores/Dividendos	5	3	2	1		
Resdiuos	2	1	0			

MCD=1

$5x + 3y = 16$
$5(2) + 3(2) = 16$

$10 + 6 = 16$
$16 = 16$

Figura.4.120. Respuesta de Ivan y Liliana (E3)



1. Considera la siguiente ecuación 5x+3y=16

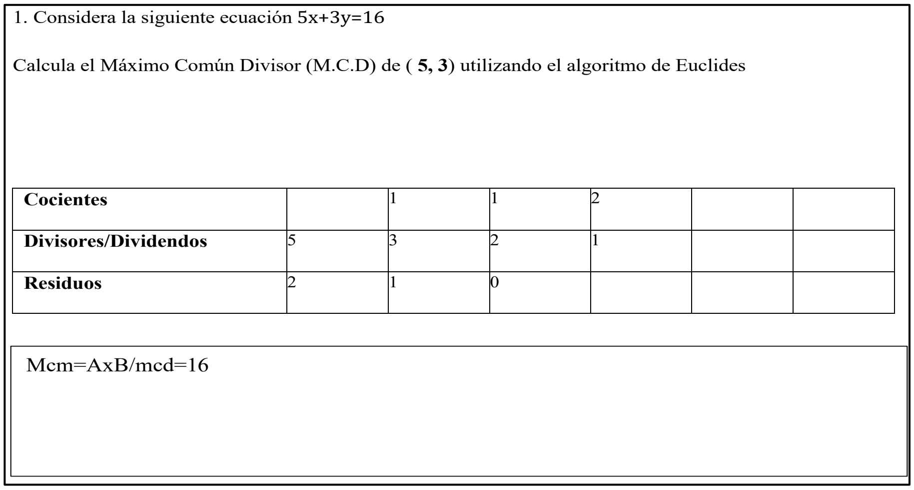
Calcula el Máximo Común Divisor (M.C.D) de (**5, 3**) utilizando el algoritmo de Euclides

Cocientes		1	1	2		
Divisores/Dividendos	5	3	2	1		
Resdiuos	2	1	0			

$\begin{array}{r}1\\3\overline{)5}\\2\end{array}$ $\begin{array}{r}1\\2\overline{)3}\\1\end{array}$ $\begin{array}{r}2\\1\overline{)2}\\0\end{array}$

Figura. 4.121. Respuesta de Flor y Brenda (E6)

En el caso del equipo E2 de America y Eduardo en esta tarea al parecer si logran aplicar correctamente el algoritmo de Euclides. Sin embargo, en su respuesta no especifican cuál es el M.C.D de los coefiecientes (5, 3) y se puede observar que colocan algo relacionado con el mcm que no tiene nada que ver con lo solicitado en esta Tarea 4B. En la siguiente figura 4.122 se muestra la respuesta obtenida de este equipo.



1. Considera la siguiente ecuación 5x+3y=16

Calcula el Máximo Común Divisor (M.C.D) de (**5, 3**) utilizando el algoritmo de Euclides

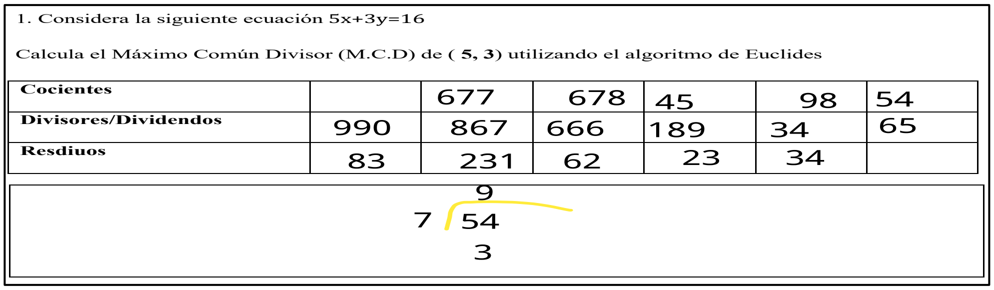
Cocientes		1	1	2		
Divisores/Dividendos	5	3	2	1		
Residuos	2	1	0			

Mcm=AxB/mcd=16

Figura. 4.122. Respuesta de America y Eduardo (E2)

Para el equipo E5 conformado por Jesús y Sergio se puede observar en su respuesta que no han logrado discernir por un lado, el concepto de M.C.D y por otro el algoritmo de Euclides, dado que los números que colocan en la tabla no corresponden a los coeficientes *a, b* de la ecuación planteada.

Es evidente que no han logrado focalizar las características críticas de las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. En la siguiente figura 4.123 se muestra la respuesta obtenida de este equipo.



1. Considera la siguiente ecuación 5x+3y=16

Calcula el Máximo Común Divisor (M.C.D) de (**5, 3**) utilizando el algoritmo de Euclides

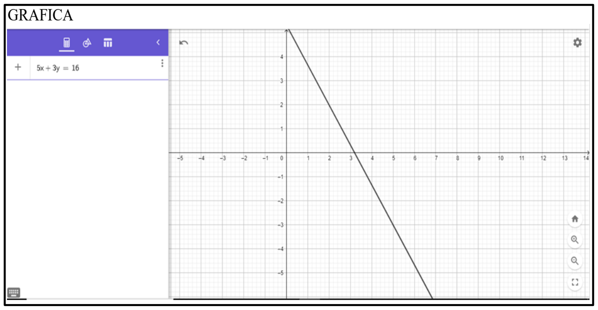
Cocientes		677	678	45	98	54
Divisores/Dividendos	990	867	666	189	34	65
Resdiuos	83	231	62	23	34	

9
7 | 54
3

Figura. 4.123. Respuesta de Jesús y Sergio (E5)

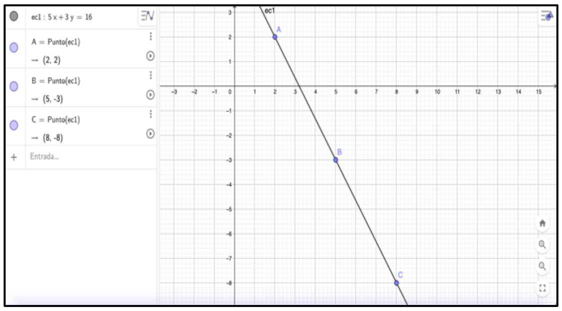
En la segunda parte de esta tarea 4B, se solicitó a los estudiantes echar mano del software de geometría dinámica Geogebra, para realizar la gráfica correspondiente a la ecuación y localizar un punto (x_0, y_0) en el plano que corresponda a una solución particular. Posteriormente, a partir de la solución particular obtener el modelo general que permita obtener otras soluciones.

Los equipos E1 y E8 discernieron el uso y manejo de Geogebra para realizar correctamente la gráfica. De esta manera, lograron obtener una solución particular mediante la localización de un punto (x_0, y_0) en la gráfica y comprobar que efectivamente cumple con la igualdad en la ecuación. Finalmente, ambos equipos obtienen el modelo general que les permitió encontrar otraslas soluciones enteras de la ecuación. En las siguientes figuras (de la 4.124 a la 4.127) se muestran las respuestas obtenidas de estos dos equipos.


GRAFICA

5x + 3y = 16

Figura. 4.124. Gráfica de Nadia y Dafné (E1)

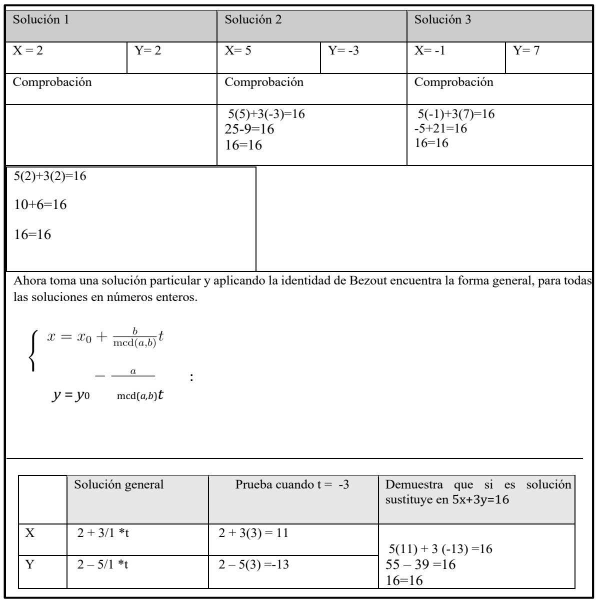

ec1 : 5 x + 3 y = 16

A = Punto(ec1)
→ (2, 2)

B = Punto(ec1)
→ (5, -3)

C = Punto(ec1)
→ (8, -8)

Figura. 4.125. Gráfica de Yarinka y Gabriel (E8)


Solución 1		Solución 2		Solución 3	
X = 2	Y= 2	X= 5	Y= -3	X= -1	Y= 7
Comprobación		Comprobación		Comprobación	
		5(5)+3(-3)=16 25-9=16 16=16		5(-1)+3(7)=16 -5+21=16 16=16	

5(2)+3(2)=16

10+6=16

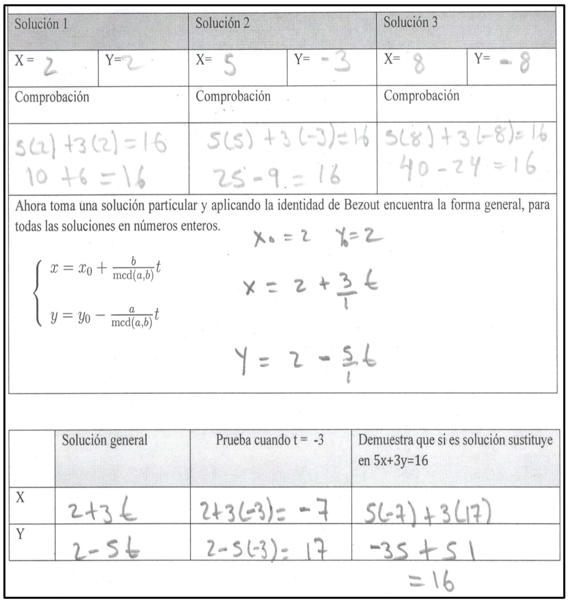
16=16

Ahora toma una solución particular y aplicando la identidad de Bezout encuentra la forma general, para todas las soluciones en números enteros.

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{\text{mcd}(a,b)}t \\ y = y_0 - \frac{a}{\text{mcd}(a,b)}t \end{cases} :$$

	Solución general	Prueba cuando t = -3	Demuestra que si es solución sustituye en 5x+3y=16
X	2 + 3/1 *t	2 + 3(3) = 11	5(11) + 3 (-13) =16 55 – 39 =16 16=16
Y	2 – 5/1 *t	2 – 5(3) =-13	

Figura. 4.126. Respuestas de Nadia y Dafné (E1)


Solución 1		Solución 2		Solución 3	
X = 2	Y=2	X= 5	Y= -3	X= 8	Y= -8
Comprobación		Comprobación		Comprobación	
5(2)+3(2)=16 10+6=16		5(5)+3(-3)=16 25-9=16		5(8)+3(-8)=16 40-24=16	

Ahora toma una solución particular y aplicando la identidad de Bezout encuentra la forma general, para todas las soluciones en números enteros.

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{\text{mcd}(a,b)}t \\ y = y_0 - \frac{a}{\text{mcd}(a,b)}t \end{cases}$$

$X_0 = 2$ $Y_0 = 2$

$x = 2 + \frac{3}{1} t$

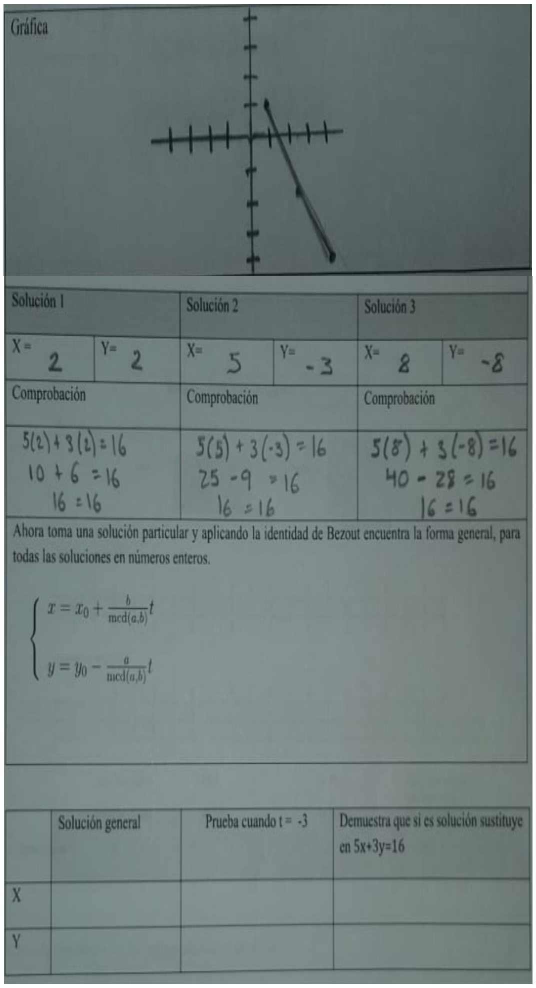
$Y = 2 - \frac{5}{1} t$

	Solución general	Prueba cuando t = -3	Demuestra que si es solución sustituye en 5x+3y=16
X	2+3t	2+3(-3)= -7	5(-7)+3(17)
Y	2-5t	2-5(-3)= 17	-35+51 =16

Figura. 4.127. Respuestas de Yarinka y Gabriel (E8)

En el caso del equipo E3, no utilizaron Geogebra, ellos decidieron realizar la gráfica de manera tradicional con papel y lápiz. En la gráfica no se presenta información sobre la localización de los puntos (x_0, y_0), pero se observa que logran identificar tres puntos y comprueban que son solución de la ecuación.

Sin embargo, no logran discernir el modelo general que les permita obtener otras soluciones enteras, dejando inconclusa la tarea. En los equipos E4, E6 y E7, tampoco utlizan el software Geogebra, al parecer ellos aplican el método por tanteo utilizado en la primera tarea encontrando algunas soluciones enteras distintas de la ecuación y a partir de una de ellas disciernen el modelo general para encontrar otras soluciones enteras de la ecuación. En las siguientes figuras 4.128 y 4.129 se muestran algunas de las respuestas obtenidas de estos equipos.



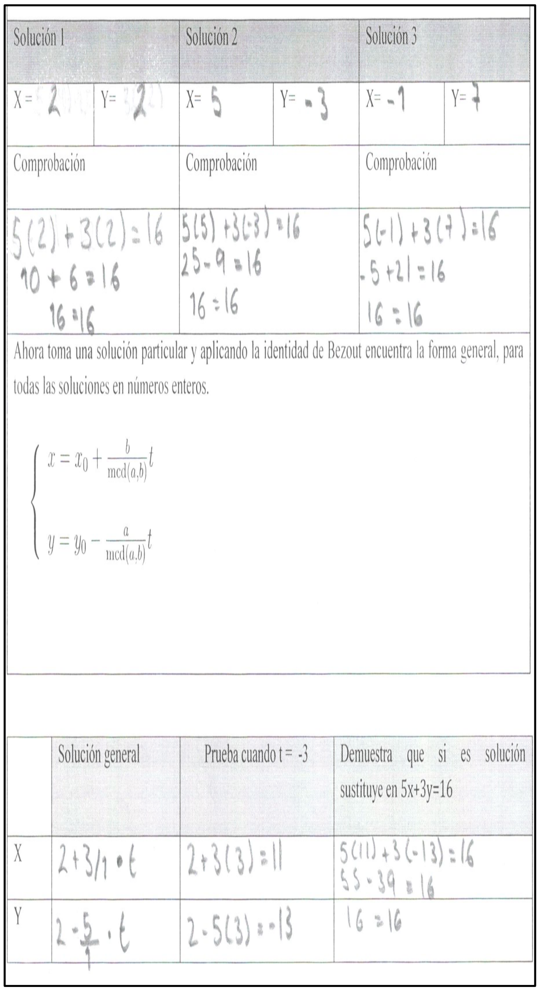
Solución 1		Solución 2		Solución 3	
X= 2	Y= 2	X= 5	Y= -3	X= 8	Y= -8
Comprobación		Comprobación		Comprobación	
5(2)+3(2)=16 10+6=16 16=16		5(5)+3(-3)=16 25-9=16 16=16		5(8)+3(-8)=16 40-28=16 16=16	

Ahora toma una solución particular y aplicando la identidad de Bezout encuentra la forma general, para todas las soluciones en números enteros.

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{\text{mcd}(a,b)}t \\ y = y_0 - \frac{a}{\text{mcd}(a,b)}t \end{cases}$$

	Solución general	Prueba cuando t = -3	Demuestra que si es solución sustituye en 5x+3y=16
X			
Y			

Figura. 4.128. Respuesta de Ivan y Liliana (E3)



Solución 1		Solución 2		Solución 3	
X= 2	Y= 2	X= 5	Y= -3	X= -1	Y= 7
Comprobación		Comprobación		Comprobación	
5(2)+3(2)=16 10+6=16 16=16		5(5)+3(-3)=16 25-9=16 16=16		5(-1)+3(7)=16 -5+21=16 16=16	

Ahora toma una solución particular y aplicando la identidad de Bezout encuentra la forma general, para todas las soluciones en números enteros.

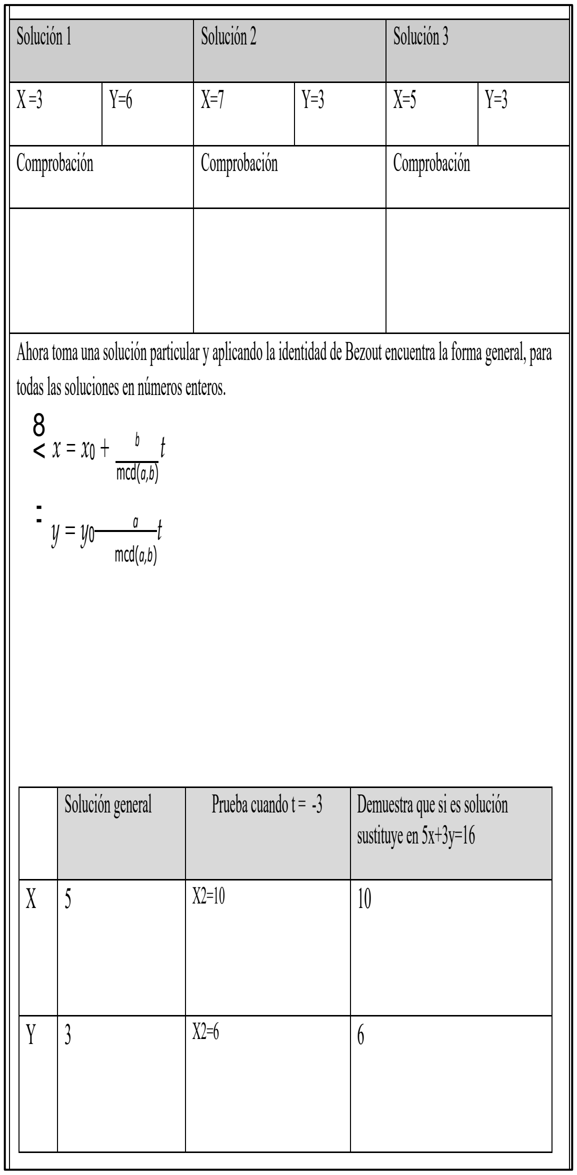
$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{\text{mcd}(a,b)}t \\ y = y_0 - \frac{a}{\text{mcd}(a,b)}t \end{cases}$$

	Solución general	Prueba cuando t = -3	Demuestra que si es solución sustituye en 5x+3y=16
X	$2+3/1 \cdot t$	2+3(3)=11	5(11)+3(-13)=16 55-39=16
Y	$2-\frac{5}{1} \cdot t$	2-5(3)=-13	16=16

Figura.4.129. Respuesta de Flor y Brenda (E6)

El equipo de America y Eduardo (E2) en esta sección de la tarea no realizan la gráfica correspondiente a la ecuación y al parecer intentan encontrar algunas soluciones de la ecuación por algún otro método (hipótesis, tal vez por tanteo), sin éxito.

Por lo que, las respuestas dadas no son soluciones de la ecuación, pese a su intento de resolver la tarea, esta no tiene sentido. El equipo de Sergio y Jesús (E5) si logran realizar la gráfica utilizando Geogebra. Sin embargo, los puntos que presentan no son soluciones a la ecuación. Por lo que, tampoco logran obtener el modelo general para obtener otras soluciones enteras. En las siguientes figuras 4.130 y 4.131 se muestran las respuestas obtenidas.



Solución 1		Solución 2		Solución 3	
X =3	Y=6	X=7	Y=3	X=5	Y=3
Comprobación		Comprobación		Comprobación	

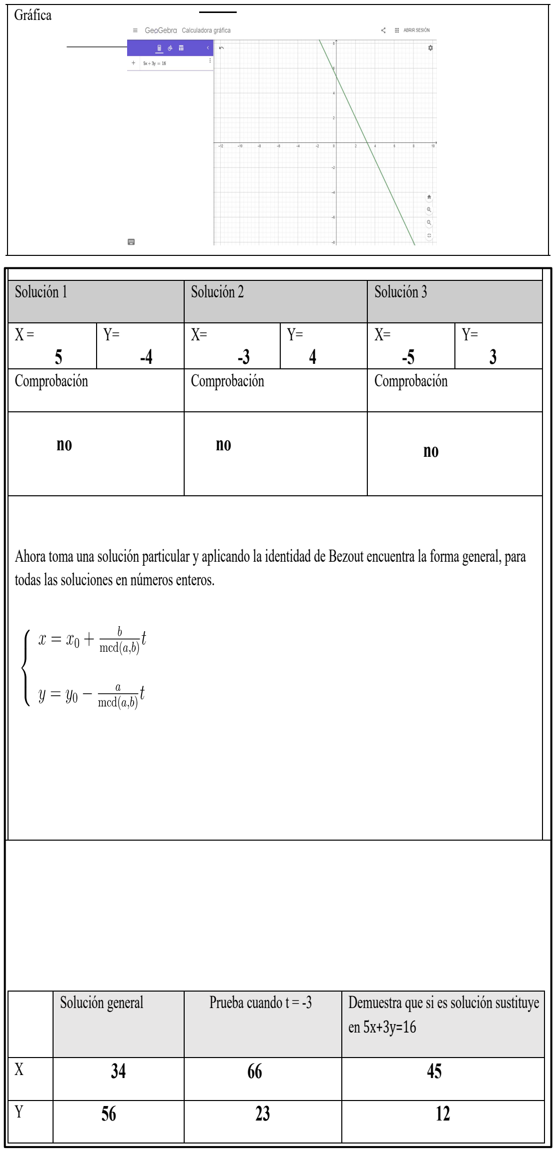
Ahora toma una solución particular y aplicando la identidad de Bezout encuentra la forma general, para todas las soluciones en números enteros.

8
< $x = x_0 + \frac{b}{\text{mcd}(a,b)}t$

: $y = y_0 - \frac{a}{\text{mcd}(a,b)}t$

	Solución general	Prueba cuando t = -3	Demuestra que si es solución sustituye en 5x+3y=16
X	5	X2=10	10
Y	3	X2=6	6

Figura.4.130. Respuestas de America y Eduardo (E2)



Gráfica

Solución 1		Solución 2		Solución 3	
X = 5	Y= -4	X= -3	Y= 4	X= -5	Y= 3
Comprobación		Comprobación		Comprobación	
no		**no**		**no**	

Ahora toma una solución particular y aplicando la identidad de Bezout encuentra la forma general, para todas las soluciones en números enteros.

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{\text{mcd}(a,b)}t \\ y = y_0 - \frac{a}{\text{mcd}(a,b)}t \end{cases}$$

	Solución general	Prueba cuando t = -3	Demuestra que si es solución sustituye en 5x+3y=16
X	**34**	**66**	**45**
Y	**56**	**23**	**12**

Figura.4.131. Respuestas de Sergio y Jesús (E5)

Nuestro análisis presenta las evidencias del objeto de aprendizaje vivido por los estudiantes, que enfatizó en los aspectos y características críticas de la resolución de las ecuaciones diofánticas lineales con dos incógnitas, a partir del algoritmo de Euclides y la identidad de Bezout para encontrar primero una solución entera particular y segundo del modelo general que permita obtener totras las soluciones enteras de la ecuación.

De esta manera, se analizan las respuestas dadas por los estudiantes a la luz de la taxonomía SOLO y los enfoques del aprendizaje. En la siguiente tabla 4.10 se muestran los niveles de la clasificación de las respuestas de los estudiantes en esta tarea 4B.

Nivel de razonamiento alcanzado (taxonomía SOLO)	Equipo	Criterio	Interpretación y análisis
Pre-estructural: No se domina ningún aspecto crucial de la tarea		No logra discernir el algoritmo de Euclides para obtener el M.C.D de (a, b), tampoco utiliza Geogebra para elaboarar la gráfia y localizar un punto que sea una solución particular, Por lo que, no logra discernirel modelo general para encontrar otras soluciones.	Las respuestas que proporcionan los alumnos ante una determinada tarea son erróneas o inexistentes. El estudiante aún no comprende
Uniestructural: Se domina sólo un aspecto crucial de la tarea	E2 y E5	Logra discernir el algoritmo de Euclides para obtener el M.C.D de (a, b), o utiliza Geogebra para elaboarar la gráfica, pero no logra localizar un punto que sea una solución particular, Por lo que, no logra discernir el modelo general para encontrar otras soluciones.	El resultado del alumno, pese a poder ser cierto, sólo se centra en un determinado aspecto que, por otro lado, no tiene por qué ser relevante Identifica sólo un aspecto del concepto.
Multiestructural: Se dominan varios aspectos cruciales de la tarea	E3, E4, E6 y E7	Logra discernir el algoritmo de Euclides para obtener el M.C.D de (a, b), no utiliza Geogebra para elaborar la gráfica, pero si encuentra una solución particular para discernir el modelo general y encontrar otras soluciones.	En este caso el alumno es capaz de enumerar una serie de aspectos correctos, pero no va más allá Identifica varios aspectos del concepto, pero no tiene aún una visión completa.
Relacional: Relaciona entre si varios aspectos cruciales de la tarea	E1, y E8	Logra discernir el algoritmo de Euclides para obtener el M.C.D de (a, b), utiliza Geogebra para elaborar la gráfica y localizar algunos puntos que sean solución (particular) de la ecuación y aplicar una de ellas para discernir el modelo general para encontrar otras soluciones. $\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{\text{mcd}(a,b)}t \\ y = y_0 - \frac{a}{\text{mcd}(a,b)}t \end{cases}$	El alumno no sólo identifica varios aspectos correctos, sino que también es capaz de relacionarlos entre sí. Tiene una visión completa del concepto conformada por los diferentes aspectos del concepto.

Tabla 4.10. clasificación SOLO del nivel de estructura cognitiva de los estudiantes en la tarea 4B

En esta unidad de discernimiento cuatro conformada por las tareas 4A y 4B fue importante comunicar u ofrecer a los estudiantes actividades que promovieran el desarrollo de técnicas que les permitieran transformar expresiones algebraicas, encontrar expresiones equivalentes, pasar de una forma de representación a otra (de la gráfica a la tabla, de la tabla a la expresión algebraica, etc.).

Todas éstas son fuentes importantes de significado matemático. En particular, enfatizamos la atención de los estudiantes, en la variación procedimental con el uso de diversos métodos de solución para un problema dado a través del algoritmo de Euclides y la identidad de Bezout. Li et al. (2011), señala que los tipos de variaciones usadas son muy importantes y deben enfocarse en la comprensión de conceptos y salir paso por paso de acuerdo al nivel cognitivo de los estudiantes, como lo fue esta unidad de discernimiento.

4.1.5 UNIDAD DE DISCERNIMIENTO CINCO

Resolución de problemas con ecuaciones diofánticas Lineales

Leung (2012, p.436) propuso la idea de una unidad de discernimiento que representa una unidad de un proceso pedagógico impulsado por los cuatro tipos de conciencia Contraste, Separación, Generalización y Fusión (C, S, G y F) provocados en una interacción de variación.

Según Leung, en una situación pedagógica, estos cuatro tipos de interacción de variación actúan juntos de manera concertada para generar discernimiento. En esta última sección se presenta el analisis de los resultados obtenidos referentes a la unidad de discermiento cinco que se conformo de las Tareas 5A y 5B, donde el aprendizaje previsto fue aplicar los conocimientos adquiridos sobre la resolución de las ecuaciones diofánticas lineales.

ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES A LA TAREA 5A[19]

Experiencia de Aprendizaje

Gracián (2013) señala que el interés que encierra la resolución de una ecuación diofántica lineal está en relación directa con la naturaleza de las incógnitas. Por ejemplo, si lo que se plantea en una ecuación hace referencia al volumen de un líquido no importará, en principio, que la solución incluya cantidades fraccionarias; pero si se trata, por ejemplo, del número de personas que pueden asistir a una reunión, está claro que únicamente tendrán sentido las soluciones enteras, ya que carecería de sentido dividir a una persona en trozos.

De este modo, el estudiante estaría en condiciones de reconocer la importancia de las matemáticas para su vida, pues las estaría movilizando mediante el uso de un lenguaje para el reconocimiento de patrones, para arribar a su simbolización y la generalización que constituyen los elementos del álgebra básica.

Esta tarea 5A, se diseño para que los estudiantes lograran discernir la construcción de una ecuación diofántica lineal con dos incógnitas a partir de un problema de palabras llamado las garrafas, así como su interpretación, reescritura y simplificación, que de acuerdo con Herscovics y Linchevski 1994; Linchevski y Herscovics 1996; Sfard 1995, se denominan dificultades clave en el aprendizaje del álgebra.

Los equipos E1, E4, E6, E7 y E8 lograron discernir correctamente el planteamiento la ecuación algebraica que representa el problema y notar que se trata de una ecuación diofántica lineal con dos incógnitas. Por lo que, estos estudiantes procedieron primero a identifcar los coeficentes a, b y el término independiente c de la ecuación; segundo, obtuvieron el M.C.D de (a, b) y tercero focalizaron su atención en la característica critica del cociente de c/M.C.D de (a, b) focalizada en las tareas anteriores, para comprobar que la ecuación que plantearon si tiene soluciones enteras.

En este caso estos equipos utilizaron correctamente la herramienta digital de Geogebra en la elaboración de la gráfica que representa a la ecuación. La localización de un punto en la representación gráfica les permitió encontrar una solución particular.

Cabe señalar que algunos equipos (E1 y E8), identificaron que la ecuación planteada tiene la característica crítica de que uno de sus coeficientes es 5, razón por lo que,

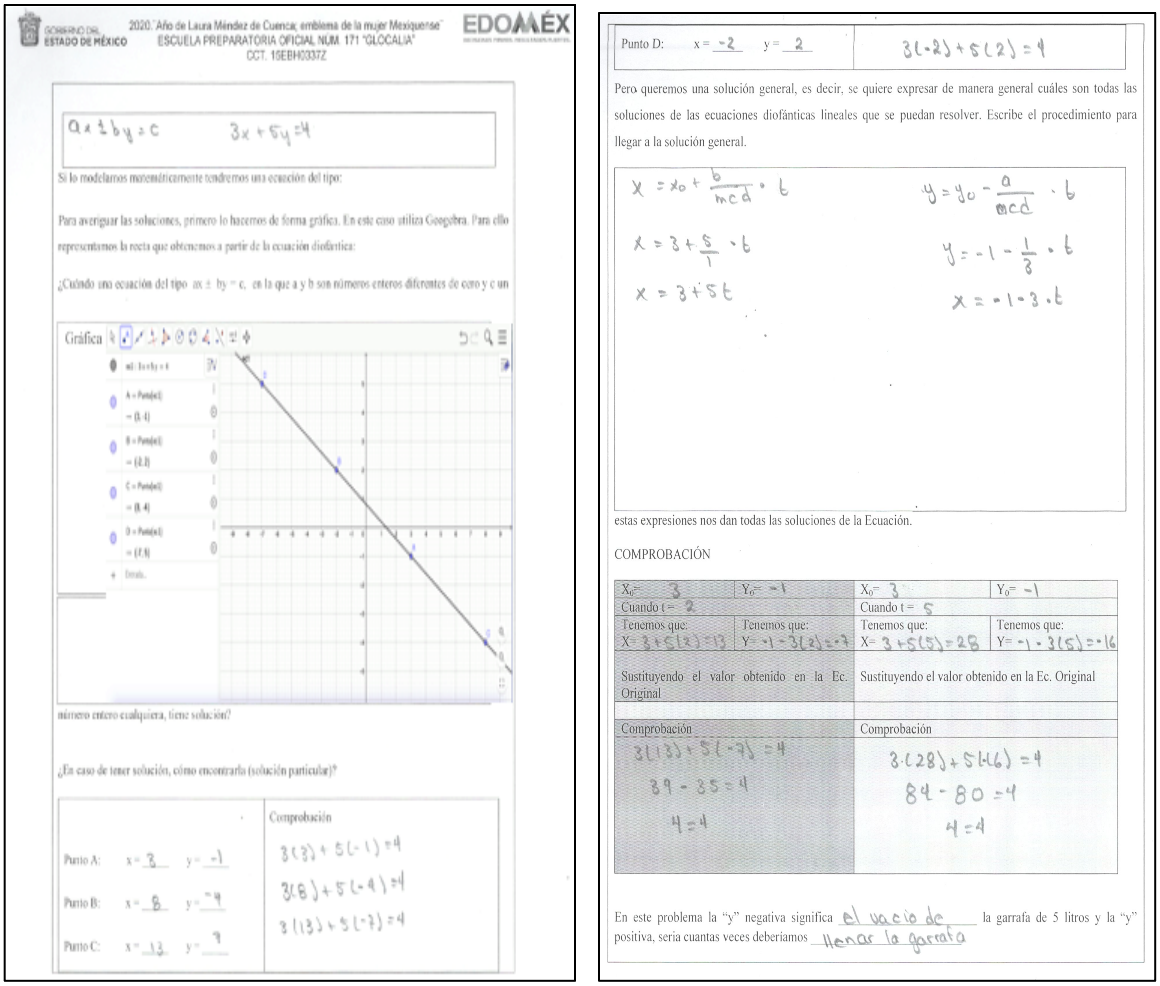
---

[19] Ver tarea 5A en las hojas de trabajo para los estudiantes, las cuales aparecen en el Anexo 1 de esta tesis

discernieron que también se podría aplicar el críterio de cifras terminales, para obtener una solución particular.

Sin embargo, sólo el equipo E1, decidio aplicar también dicho criterio y comparar la solución particular encontrada con este método, con la solución encontrada mediante la respresentación gráfica de la ecuación. En general, estos equipos utilizaron correctamente la solución particular, para obtener el modelo general y así encontrar otras soluciones enteras de la ecuación.

Finalmente, los estudiantes de estos equipos pudieron discernir que en este problema una característica crítica es que cuando la incógnita ¨*y*¨ es negativa significa vaciar y cuando es positiva significa agregar liquido de las garrafas. En la siguientes figuras 4.132, 4.133 y 4.134 se muestran las respuestas escritas de los equipos E4, E7 y E8 en esta tarea.



GOBIERNO DEL ESTADO DE MÉXICO
2020."Año de Laura Méndez de Cuenca; emblema de la mujer Mexiquense"
ESCUELA PREPARATORIA OFICIAL NÚM. 171 "GLOCALIA"
CCT. 15EBH0337Z
EDOMÉX

$ax \pm by = c \qquad 3x + 5y = 4$

Si lo modelamos matemáticamente tendremos una ecuación del tipo:

Para averiguar las soluciones, primero lo hacemos de forma gráfica. En este caso utiliza Geogebra. Para ello representamos la recta que obtenemos a partir de la ecuación diofántica:

¿Cuándo una ecuación del tipo $ax \pm by = c$, en la que a y b son números enteros diferentes de cero y c un número entero cualquiera, tiene solución?

¿En caso de tener solución, cómo encontrarla (solución particular)?

	Comprobación
Punto A: x = 3 y = -1	$3(3)+5(-1)=4$
Punto B: x = 8 y = -4	$3(8)+5(-4)=4$
Punto C: x = 13 y = 7	$3(13)+5(-7)=4$
Punto D: x = -2 y = 2	$3(-2)+5(2)=4$

Pero queremos una solución general, es decir, se quiere expresar de manera general cuáles son todas las soluciones de las ecuaciones diofánticas lineales que se puedan resolver. Escribe el procedimiento para llegar a la solución general.

$x = x_0 + \frac{b}{mcd} \cdot t \qquad y = y_0 - \frac{a}{mcd} \cdot t$

$x = 3 + \frac{5}{1} \cdot t \qquad y = -1 - \frac{1}{3} \cdot t$

$x = 3 + 5t \qquad x = -1 - 3 \cdot t$

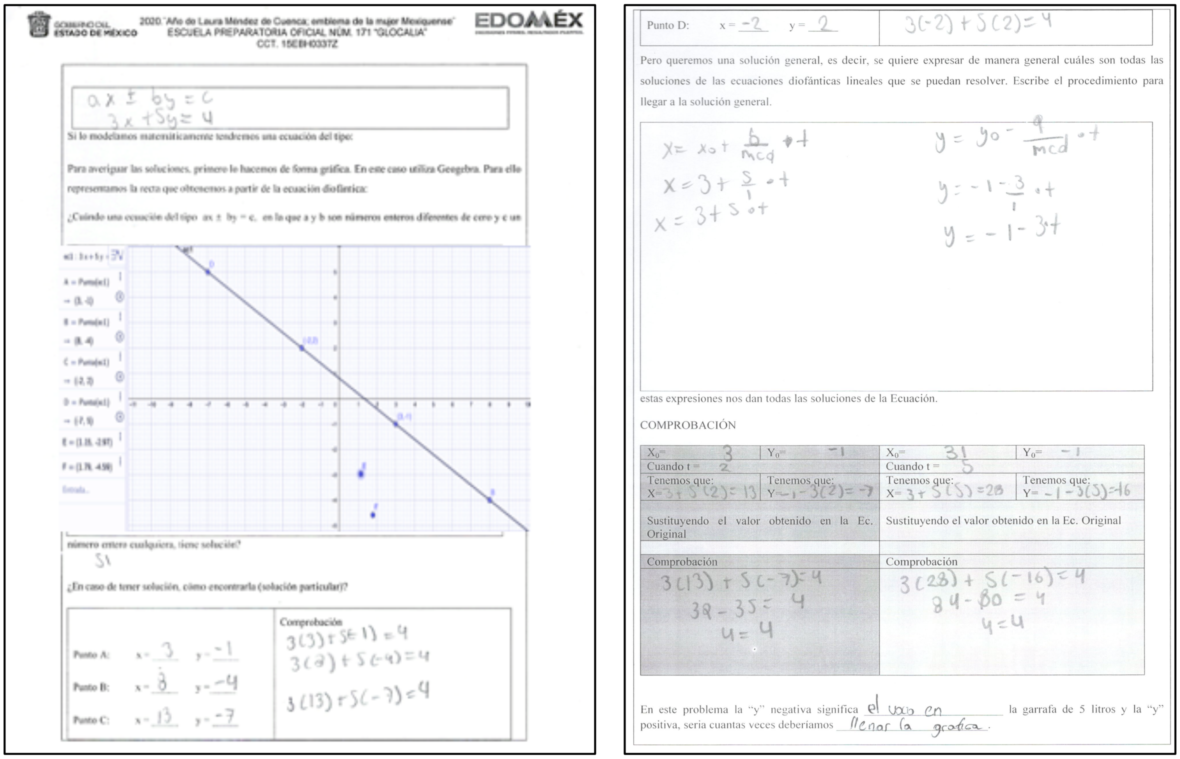
estas expresiones nos dan todas las soluciones de la Ecuación.

COMPROBACIÓN

X_0= 3	Y_0= -1	X_0= 3	Y_0= -1
Cuando t = 2		Cuando t = 5	
Tenemos que: X= $3+5(2)=13$	Tenemos que: Y= $-1-3(2)=-7$	Tenemos que: X= $3+5(5)=28$	Tenemos que: Y= $-1-3(5)=-16$
Sustituyendo el valor obtenido en la Ec. Original		Sustituyendo el valor obtenido en la Ec. Original	
Comprobación		Comprobación	
$3(13)+5(-7)=4$ $39-35=4$ $4=4$		$3\cdot(28)+5(-16)=4$ $84-80=4$ $4=4$	

En este problema la "y" negativa significa el vacio de la garrafa de 5 litros y la "y" positiva, seria cuantas veces deberíamos llenar la garrafa

Figura.4.132. Respuestas de Monserrat y J. de Dios (E4)



GOBIERNO DEL ESTADO DE MÉXICO
2020 "Año de Laura Méndez de Cuenca; emblema de la mujer Mexiquense"
ESCUELA PREPARATORIA OFICIAL NÚM. 171 "GLOCALIA"
CCT. 15EBH0337Z
EDOMÉX

$ax \pm by = c$
$3x + 5y = 4$

Si lo modelamos matemáticamente tendremos una ecuación del tipo:

Para averiguar las soluciones, primero lo hacemos de forma gráfica. En este caso utiliza Geogebra. Para ello representamos la recta que obtenemos a partir de la ecuación diofántica:

¿Cuándo una ecuación del tipo $ax \pm by = c$, en la que a y b son números enteros diferentes de cero y c un número entero cualquiera, tiene solución?

Si

¿En caso de tener solución, cómo encontrarla (solución particular)?

	Comprobación
Punto A: x = 3 y = -1	$3(3)+5(-1)=4$
Punto B: x = 8 y = -4	$3(8)+5(-4)=4$
Punto C: x = 13 y = -7	$3(13)+5(-7)=4$
Punto D: x = -2 y = 2	$3(-2)+5(2)=4$

Pero queremos una solución general, es decir, se quiere expresar de manera general cuáles son todas las soluciones de las ecuaciones diofánticas lineales que se puedan resolver. Escribe el procedimiento para llegar a la solución general.

$x = x_0 + \frac{b}{mcd} \cdot t$

$x = 3 + \frac{5}{1} \cdot t$

$x = 3 + 5 \cdot t$

$y = y_0 - \frac{a}{mcd} \cdot t$

$y = -1 - \frac{3}{1} \cdot t$

$y = -1 - 3 \cdot t$

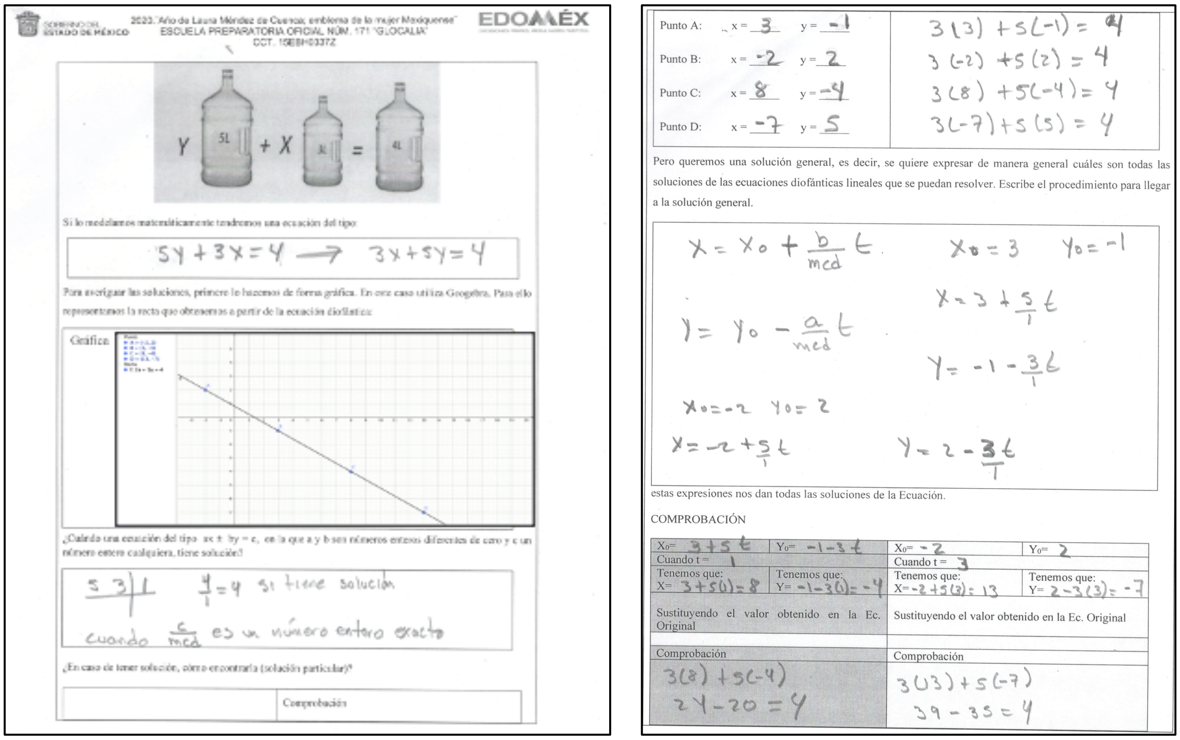
estas expresiones nos dan todas las soluciones de la Ecuación.

COMPROBACIÓN

$X_0 =$ 3	$Y_0 =$ -1	$X_0 =$ 3	$Y_0 =$ -1
Cuando t = 2		Cuando t = 5	
Tenemos que: X= $3+5(2)=13$	Tenemos que: Y= $-1-3(2)=-7$	Tenemos que: X= $3+5(5)=28$	Tenemos que: Y= $-1-3(5)=-16$
Sustituyendo el valor obtenido en la Ec. Original		Sustituyendo el valor obtenido en la Ec. Original	
Comprobación		Comprobación	
$3(13)+5(-7)=4$ $39-35=4$ $4=4$		$3(28)+5(-16)=4$ $84-80=4$ $4=4$	

En este problema la "y" negativa significa el vacío en la garrafa de 5 litros y la "y" positiva, seria cuantas veces deberíamos llenar la grafica.

Figura. 4.133. Respuestas de Jaqueline y Ariadna (E6)



GOBIERNO DEL ESTADO DE MÉXICO
2020 "Año de Laura Méndez de Cuenca; emblema de la mujer Mexiquense"
ESCUELA PREPARATORIA OFICIAL NÚM. 171 "GLOCALIA"
CCT. 15EBH0337Z
EDOMÉX

Si lo modelamos matemáticamente tendremos una ecuación del tipo:

$5y + 3x = 4 \longrightarrow 3x + 5y = 4$

Para averiguar las soluciones, primero lo hacemos de forma gráfica. En este caso utiliza Geogebra. Para ello representamos la recta que obtenemos a partir de la ecuación diofántica:

¿Cuándo una ecuación del tipo $ax \pm by = c$, en la que a y b son números enteros diferentes de cero y c un número entero cualquiera, tiene solución?

$5 \; 3 | 1$ $\quad \frac{4}{1} = 4$ si tiene solución

cuando $\frac{c}{mcd}$ es un número entero exacto

¿En caso de tener solución, cómo encontrarla (solución particular)?

	Comprobación
Punto A: x = 3 y = -1	$3(3)+5(-1)=4$
Punto B: x = -2 y = 2	$3(-2)+5(2)=4$
Punto C: x = 8 y = -4	$3(8)+5(-4)=4$
Punto D: x = -7 y = 5	$3(-7)+5(5)=4$

Pero queremos una solución general, es decir, se quiere expresar de manera general cuáles son todas las soluciones de las ecuaciones diofánticas lineales que se puedan resolver. Escribe el procedimiento para llegar a la solución general.

$X = X_0 + \frac{b}{mcd} t$ $\qquad X_0 = 3 \quad Y_0 = -1$

$X = 3 + \frac{5}{1} t$

$Y = Y_0 - \frac{a}{mcd} t$

$Y = -1 - \frac{3}{1} t$

$X_0 = -2 \quad Y_0 = 2$

$X = -2 + \frac{5}{1} t$ $\qquad Y = 2 - \frac{3}{1} t$

estas expresiones nos dan todas las soluciones de la Ecuación.

COMPROBACIÓN

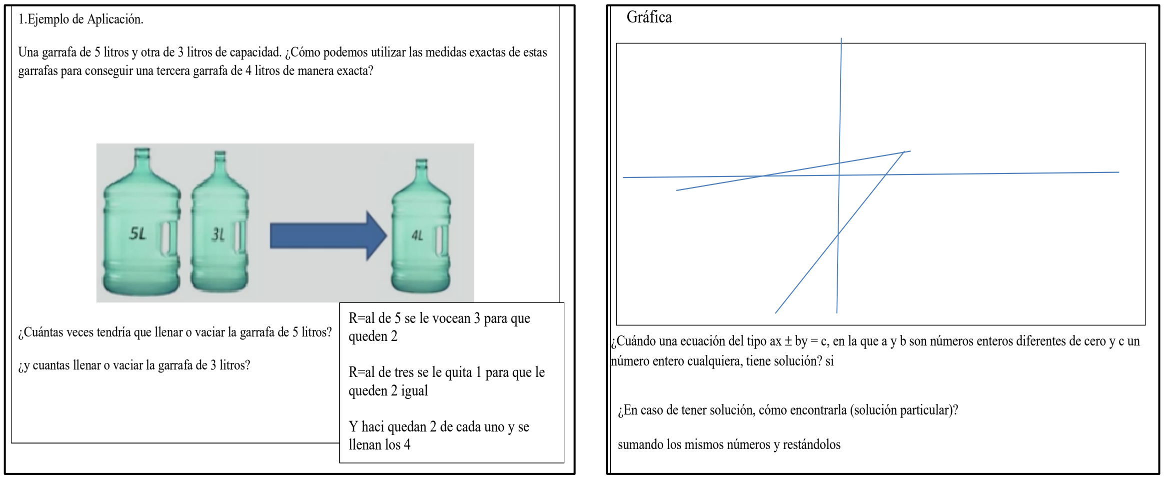
$X_0 =$ $3+5t$	$Y_0 =$ $-1-3t$	$X_0 =$ -2	$Y_0 =$ 2
Cuando t = 1		Cuando t = 3	
Tenemos que: X= $3+5(1)=8$	Tenemos que: Y= $-1-3(1)=-4$	Tenemos que: X= $-2+5(3)=13$	Tenemos que: Y= $2-3(3)=-7$
Sustituyendo el valor obtenido en la Ec. Original		Sustituyendo el valor obtenido en la Ec. Original	
Comprobación		Comprobación	
$3(8)+5(-4)$ $24-20=4$		$3(13)+5(-7)$ $39-35=4$	

Figura.4.134. Respuestas de Yarinka y Gabriel (E8)

De acuerdo con Li (2011), se cree que la enseñanza de las ecuaciones algebraicas basada en la teoría de la variación es apropiada (representadas como un espacio de problemas estratificado multivariante que consiste en problemas sistémicos y deliberadamente variables) ya que puede ayudar a los estudiantes a entender el concepto de ecuación y facilitar su desarrollo a través de multiples representaciones y estrategias de resolución de problemas, haciendo así que el aprendizaje de las ecuaciones algebraicas por parte de los estudiantes sea significativo.

De este modo, no sólo ayuda a los estudiantes a comprender los "dos fundamentos" (conocimientos básicos y habilidades básicas) del aprendizaje de las ecuaciones algebraicas, sino que también mejora su capacidad de resolución de problemas. Por otro lado, se cultiva y desarrolla la capacidad de razonamiento algebraico de los alumnos (es decir, la capacidad de imaginar, representar y pensar en las conexiones de los conocimientos algebraicos y las estrategias de resolución de problemas siguiendo determinados procedimientos y estructuras).

En el caso del Equipo (E2) de America y Eduardo, no lograron discernir la ecuación que permite modelar el problema planteado y como consecuencia tampoco realizar correctamente la gráfica. Por lo que, no identificaron ningún punto que fuera una posible solución de la ecuación y al parecer sólo intentaron aplicar el procedimiento de tanteo utilizado en la tarea 1. En las preguntas formuladas aplican deducciones sin argumentos matemáticos dando respuestas erróneas. En la siguiente figura 4.135 y 4.136 se muestra las respuestas dadas por este equipo.



1.Ejemplo de Aplicación.

Una garrafa de 5 litros y otra de 3 litros de capacidad. ¿Cómo podemos utilizar las medidas exactas de estas garrafas para conseguir una tercera garrafa de 4 litros de manera exacta?

¿Cuántas veces tendría que llenar o vaciar la garrafa de 5 litros?

¿y cuantas llenar o vaciar la garrafa de 3 litros?

R=al de 5 se le vocean 3 para que queden 2

R=al de tres se le quita 1 para que le queden 2 igual

Y haci quedan 2 de cada uno y se llenan los 4

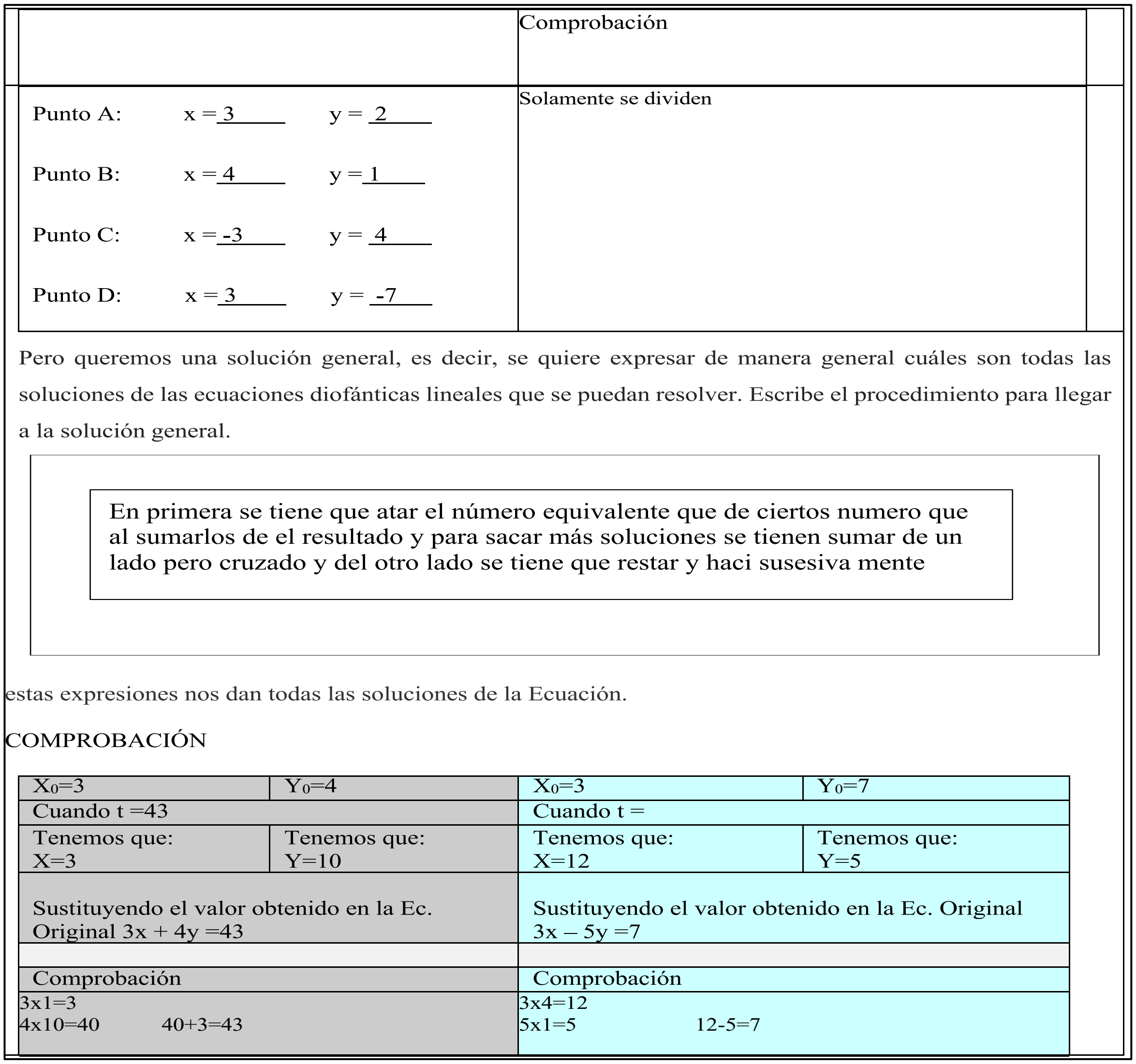
Gráfica

¿Cuándo una ecuación del tipo ax ± by = c, en la que a y b son números enteros diferentes de cero y c un número entero cualquiera, tiene solución? si

¿En caso de tener solución, cómo encontrarla (solución particular)?

sumando los mismos números y restándolos

Figura.4.135. Respuestas de América y Eduardo (E2)



	Comprobación
Punto A: x = 3 y = 2 Punto B: x = 4 y = 1 Punto C: x = -3 y = 4 Punto D: x = 3 y = -7	Solamente se dividen

Pero queremos una solución general, es decir, se quiere expresar de manera general cuáles son todas las soluciones de las ecuaciones diofánticas lineales que se puedan resolver. Escribe el procedimiento para llegar a la solución general.

En primera se tiene que atar el número equivalente que de ciertos numero que al sumarlos de el resultado y para sacar más soluciones se tienen sumar de un lado pero cruzado y del otro lado se tiene que restar y haci susesiva mente

estas expresiones nos dan todas las soluciones de la Ecuación.

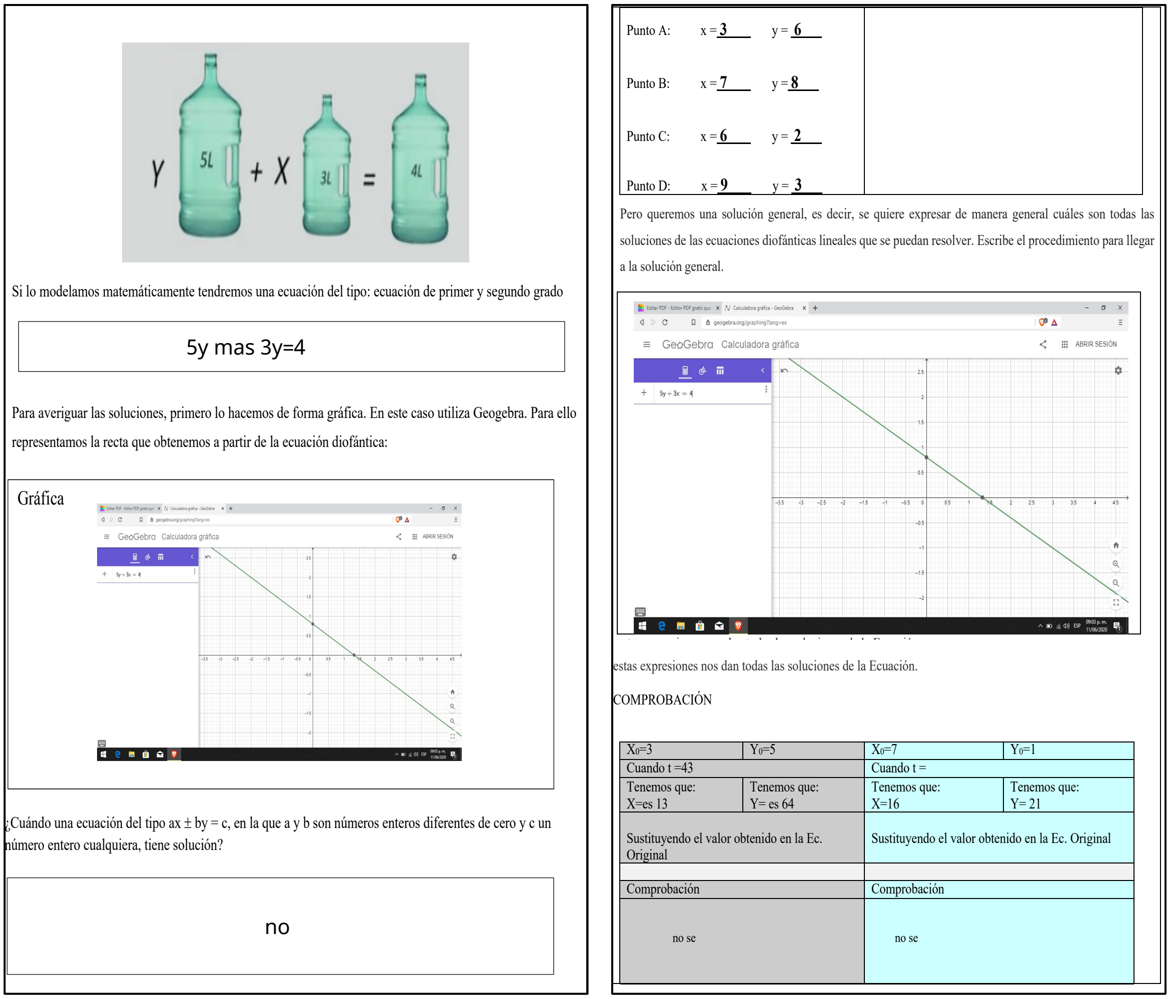
COMPROBACIÓN

X_0=3	Y_0=4	X_0=3	Y_0=7
Cuando t =43		Cuando t =	
Tenemos que: X=3	Tenemos que: Y=10	Tenemos que: X=12	Tenemos que: Y=5
Sustituyendo el valor obtenido en la Ec. Original 3x + 4y =43		Sustituyendo el valor obtenido en la Ec. Original 3x – 5y =7	
Comprobación		Comprobación	
3x1=3 4x10=40 40+3=43		3x4=12 5x1=5 12-5=7	

Figura. 4.136. Continuación de las respuestas de América y Eduardo (E2)

En el caso de Sergio y Jesús (E5), lograron plantear la ecuación que modela el problema y construir la gráfica utilizando correctamente Geogebra. Sin embargo, no identificaron puntos en la gráfica que representaran posibles soluciones a la ecuación. Por lo que, las respuestas dadas al igual que con el caso de America y Eduardo (E2) no tienen sustento matemático, ya que no focalizan su atención en las características criticas de la ecuación diofántica lineal planteada.

En la siguiente figura 4.137 se muestra las respuestas obtenidas.



Si lo modelamos matemáticamente tendremos una ecuación del tipo: ecuación de primer y segundo grado

5y mas 3y=4

Para averiguar las soluciones, primero lo hacemos de forma gráfica. En este caso utiliza Geogebra. Para ello representamos la recta que obtenemos a partir de la ecuación diofántica:

¿Cuándo una ecuación del tipo ax ± by = c, en la que a y b son números enteros diferentes de cero y c un número entero cualquiera, tiene solución?

no

Punto A: x = 3 y = 6

Punto B: x = 7 y = 8

Punto C: x = 6 y = 2

Punto D: x = 9 y = 3

Pero queremos una solución general, es decir, se quiere expresar de manera general cuáles son todas las soluciones de las ecuaciones diofánticas lineales que se puedan resolver. Escribe el procedimiento para llegar a la solución general.

estas expresiones nos dan todas las soluciones de la Ecuación.

COMPROBACIÓN

X_0=3	Y_0=5	X_0=7	Y_0=1
Cuando t =43		Cuando t =	
Tenemos que: X=es 13	Tenemos que: Y= es 64	Tenemos que: X=16	Tenemos que: Y= 21
Sustituyendo el valor obtenido en la Ec. Original		Sustituyendo el valor obtenido en la Ec. Original	
Comprobación		Comprobación	
no se		no se	

Figura. 4.137. Respuestas de Sergio y Jesús (E5)

La matemática es una de las herramientas mentales más influyentes para ser utilizada en la vida de un hombre durante siglos (Skemp, 1985). Los estudiantes necesitan adquirir conocimientos y habilidades matemáticas para competir y sobrevivir en la vida; estas habilidades incluyen razonamiento lógico, habilidades para resolver problemas y la capacidad de pensar de manera abstracta (INEE, 2017).

Por otro lado, en México se insta a los maestros a que incorporen varios enfoques de enseñanza en su enseñanza y aprendizaje, sin embargo, los informes de estudios locales (Rojano y Solares, 2017) han demostrado que la exposición y el ejercicio siguen siendo el enfoque de enseñanza más común adoptado por los maestros de matemáticas y esto se ve reflejado en los resultados de sus estudiantes.

Todo nuestro análisis anterior sugiere que el objeto de aprendizaje vivido (presentado en las respuestas de los estudiantes obtenidas en las hojas de trabajo durante la experimentación de esta Tarea 5A) enfatizó en las características críticas que lograron discernir los estudiantes sobre la aplicación de los conocimientos adquiridos en la resolución de las ecuaciones diofánticas linealesa través de la aplicación de la teoría de la variación (Marton, 2015).

En la siguiente tabla 4.10 se muestra la categorización de los niveles de las respuestas de los estudiantes en esta tarea 5A a partir de la taxonomía SOLO.

Nivel de razonamiento alcanzado (taxonomía SOLO)	Equipo	Criterio	Interpretación y análisis
Pre-estructural: No se domina ningún aspecto crucial de la tarea	E2	No logra discernir la ecuación que modela el problema, tampoco utiliza Geogebra para elaborar la gráfica y localizar un punto que sea una solución particular. Por lo que, no sólo no logra discernir el modelo general para encontrar otras soluciones, si no el problema en sí.	Las respuestas que proporcionan los alumnos ante una determinada tarea son erróneas o inexistentes. El estudiante aún no comprende
Uniestructural: Se domina sólo un aspecto crucial de la tarea	E5	Logra discernir la ecuación que modela el problema, utiliza Geogebra para elaborar la gráfica, pero no localiza al menos un punto que sea una solución particular. Por lo que, no logra discernir el modelo general para encontrar otras soluciones.	El resultado del alumno, pese a poder ser cierto, sólo se centra en un determinado aspecto que, por otro lado, no tiene por qué ser relevante Identifica sólo un aspecto del concepto.
Multiestructural: Se dominan varios aspectos cruciales de la tarea	E3	Logra discernir la ecuación que modela el problema, utiliza Geogebra para elaborar la gráfica y localiza al menos un punto como una solución particular. Por lo que, logra discernir el modelo general para encontrar otras soluciones.	En este caso el alumno es capaz de enumerar una serie de aspectos correctos, pero no va más allá Identifica varios aspectos del concepto, pero no tiene aún una visión completa.
Relacional: Relaciona entre si varios aspectos cruciales de la tarea	E1, E4, E6, E7 y E8	Logra discernir la ecuación que modela el problema, utiliza Geogebra para elaborar la gráfica y localiza varios puntos como solución particular. Por lo que, logra discernir el modelo general para encontrar otras soluciones e interpretar correctamente que significa la "y" negativa y positiva en el problema.	El alumno no sólo identifica varios aspectos correctos, sino que también es capaz de relacionarlos entre sí. Tiene una visión completa del concepto conformada por los diferentes aspectos del concepto.

		$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{\text{mcd}(a,b)}t \\ y = y_0 - \frac{a}{\text{mcd}(a,b)}t \end{cases}$	

Tabla 4.10. clasificación SOLO del nivel de estructura cognitiva de los estudiantes en la tarea 5A

ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES A LA TAREA 5B[20]

Experiencia de Aprendizaje

Para llevar a cabo esta tarea 5B, presentamos a nuestros estudiantes otro problema modelizable mediante una ecuación diofántica lineal con dos incógnitas. Estas situaciones favorecen, entre otras cosas, la construcción de las nociones de variable y generalización, y ponen a los estudiantes en mejores condiciones para abordar lo algebraico.

Sin embargo, la ecuación propuesta en esta tarea (del tipo, general) tiene una característica crítica que los estudiantes tienen que discernir, la cuál limita a considerar obtener soluciones unicamente en números enteros positivos.

En la primera parte de esta Tarea 5B, los equipos E1, E3, E6, E7 y E8 lograron discernir la ecuación que modeliza el problema planteado, discerniendo que se trata de una ecuación diofántica lineal con dos incógnitas. Estos equipos identifican correctamente los coeficientes *a, b* y el término independiente *c* de la misma. Lo que les permitió obtener el M.C.D de (a, b) y focalizar su atención en la característica crítica del cociente entre c/M.C.D de (a, b), para determinar que esta ecuación si tiene soluciones enteras.

En este problema algunos de estos equipos al parecer intentaron primero, el método del tanteo y segundo el método de cifras terminales, dado que lograron focalizar su atención en que otra vez uno de sus coeficientes es 5. De esta manera, encontraron una solución particular que satisface la ecuación.

En la segunda sección de esta tarea 5B, para el caso de encontrar otras soluciones enteras, aplicaron primero el método aritmético y posteriormente comprobaron sus soluciones mediante la realización de la gráfica en Geogebra y la localización de los puntos (x_0, y_0), demostrando que han alcanzado el aprendizaje previsto, al discernir las

---

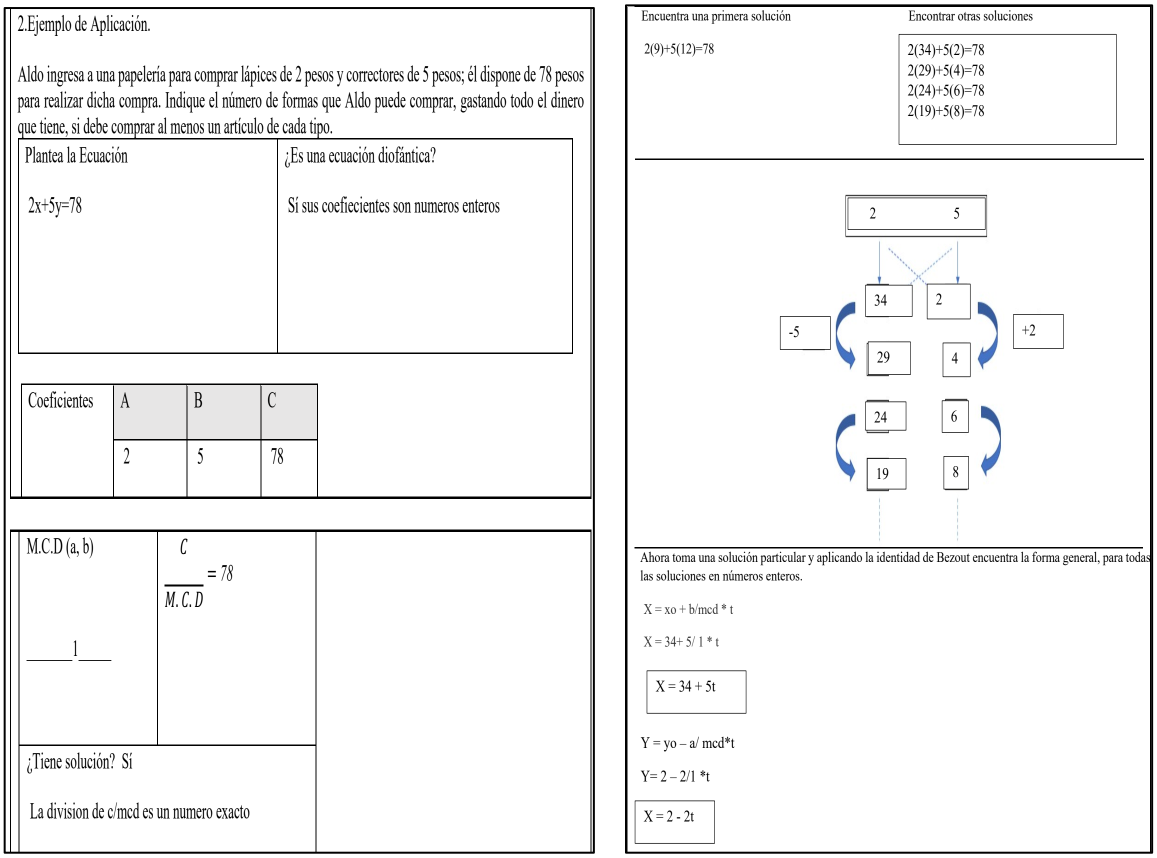
[20] Ver tarea 5B en las hojas de trabajo para los estudiantes, las cuales aparecen en el Anexo 1 de esta tesis

características críticas tanto de las ecuaciones diofánticas lineales con dos incógnitas, como de los procedimientos matemáticos planteados.

El término sentido estructural, junto a los de sentido numérico (Sowder, 1992), sentido operacional (Slavit, 1998) y sentido simbólico (Arcavi, 1994), son términos asociados a una visión de la enseñanza y del aprendizaje centrada en promover la comprensión de las matemáticas, que parte de la consideración de los alumnos como pensadores, como personas capaces de comprender los dominios matemáticos (Molina, 2006).

Estos constructos se enmarcan dentro de una concepción pedagógica del aprendizaje en la que se considera que un conocimiento no puede ser funcional sino en la medida en que es portador de sentido para quien lo posee, es decir, en la medida en que el sujeto es capaz de identificar un campo de aplicación de este conocimiento (Peltier, 2003).

En las siguientes figuras (de la 4.138 a la 4.142) se presentan las respuestas obtenidas por parte de estos equipos.



2.Ejemplo de Aplicación.

Aldo ingresa a una papelería para comprar lápices de 2 pesos y correctores de 5 pesos; él dispone de 78 pesos para realizar dicha compra. Indique el número de formas que Aldo puede comprar, gastando todo el dinero que tiene, si debe comprar al menos un artículo de cada tipo.

Plantea la Ecuación	¿Es una ecuación diofántica?
2x+5y=78	Sí sus coeficientes son numeros enteros

Coeficientes	A	B	C
	2	5	78

M.C.D (a, b)	$\frac{C}{M.C.D} = 78$
_____1____	
¿Tiene solución? Sí La division de c/mcd es un numero exacto	

Encuentra una primera solución	Encontrar otras soluciones
2(9)+5(12)=78	2(34)+5(2)=78 2(29)+5(4)=78 2(24)+5(6)=78 2(19)+5(8)=78

Ahora toma una solución particular y aplicando la identidad de Bezout encuentra la forma general, para todas las soluciones en números enteros.

X = xo + b/mcd * t

X = 34+ 5/ 1 * t

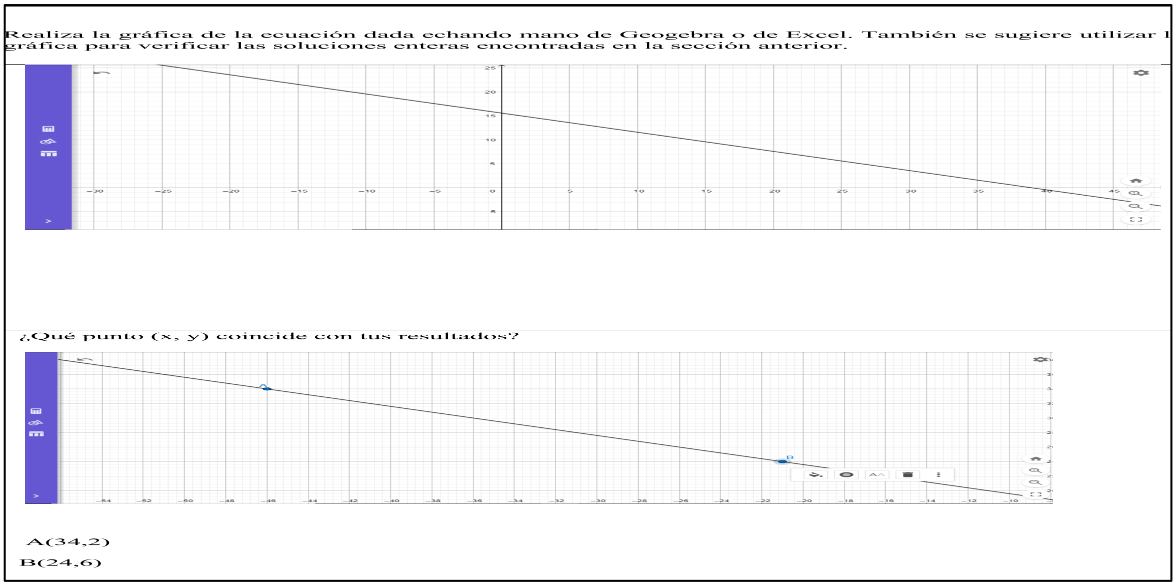
X = 34 + 5t

Y = yo – a/ mcd*t

Y= 2 – 2/1 *t

X = 2 - 2t

Figura. 4.138. Respuestas de Nadia y Dafné (E1)

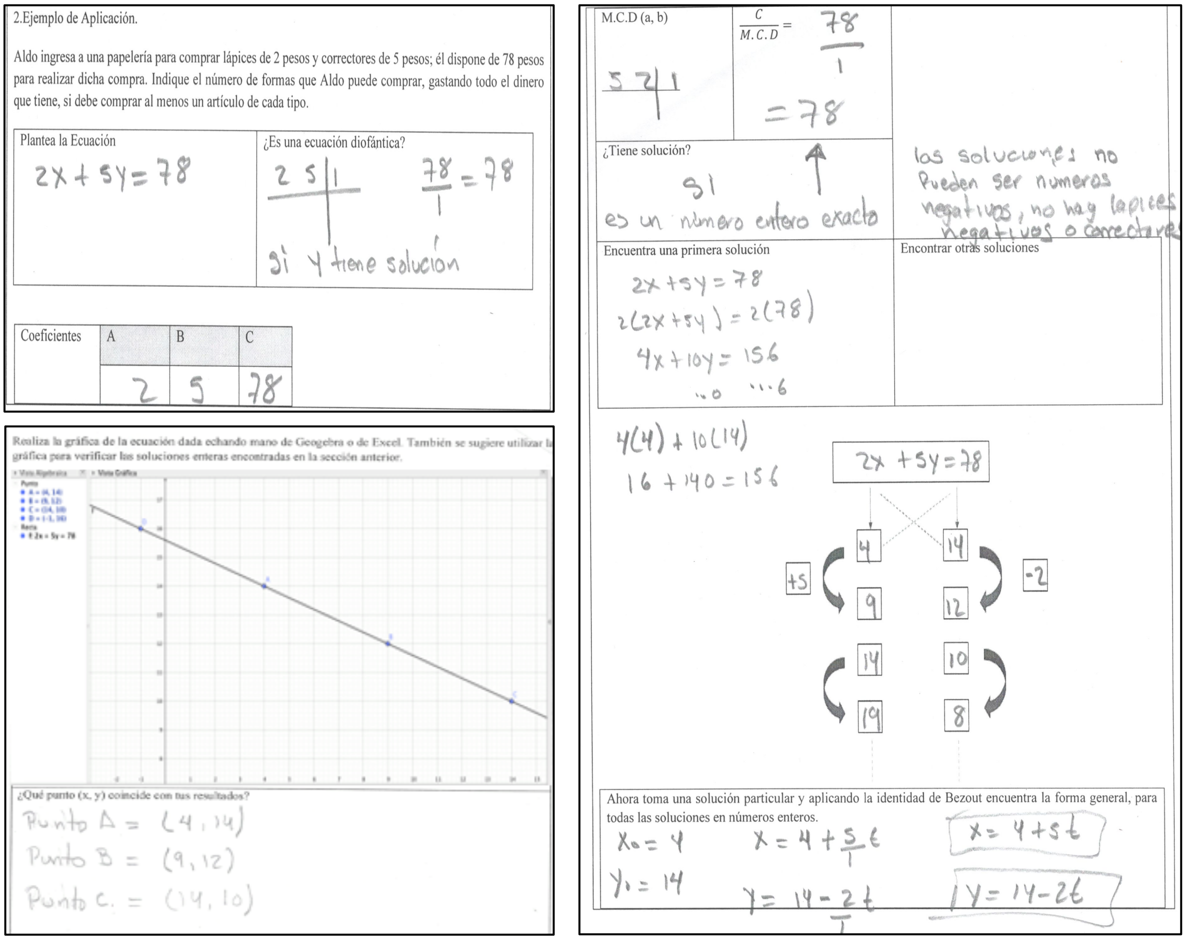


Realiza la gráfica de la ecuación dada echando mano de Geogebra o de Excel. También se sugiere utilizar l gráfica para verificar las soluciones enteras encontradas en la sección anterior.

¿Qué punto (x, y) coincide con tus resultados?

A(34,2)
B(24,6)

Figura. 4.139. Continuación de las respuestas de Nadia y Dafné (E1)



2.Ejemplo de Aplicación.

Aldo ingresa a una papelería para comprar lápices de 2 pesos y correctores de 5 pesos; él dispone de 78 pesos para realizar dicha compra. Indique el número de formas que Aldo puede comprar, gastando todo el dinero que tiene, si debe comprar al menos un artículo de cada tipo.

Plantea la Ecuación: $2x + 5y = 78$

¿Es una ecuación diofántica? $2 \; 5 \,|\, 1$ $\frac{78}{1} = 78$ si y tiene solución

Coeficientes	A	B	C
	2	5	78

Realiza la gráfica de la ecuación dada echando mano de Geogebra o de Excel. También se sugiere utilizar la gráfica para verificar las soluciones enteras encontradas en la sección anterior.

¿Qué punto (x, y) coincide con tus resultados?

Punto A = (4, 14)
Punto B = (9, 12)
Punto C. = (14, 10)

M.C.D (a, b): $5 \; 2 \,|\, 1$

$\frac{C}{M.C.D} = \frac{78}{1} = 78$

¿Tiene solución? si es un número entero exacto

los soluciones no Pueden ser numeros negativos, no hay lapices negativos o correctores

Encuentra una primera solución

$2x + 5y = 78$
$2(2x + 5y) = 2(78)$
$4x + 10y = 156$
..0 ...6

Encontrar otras soluciones

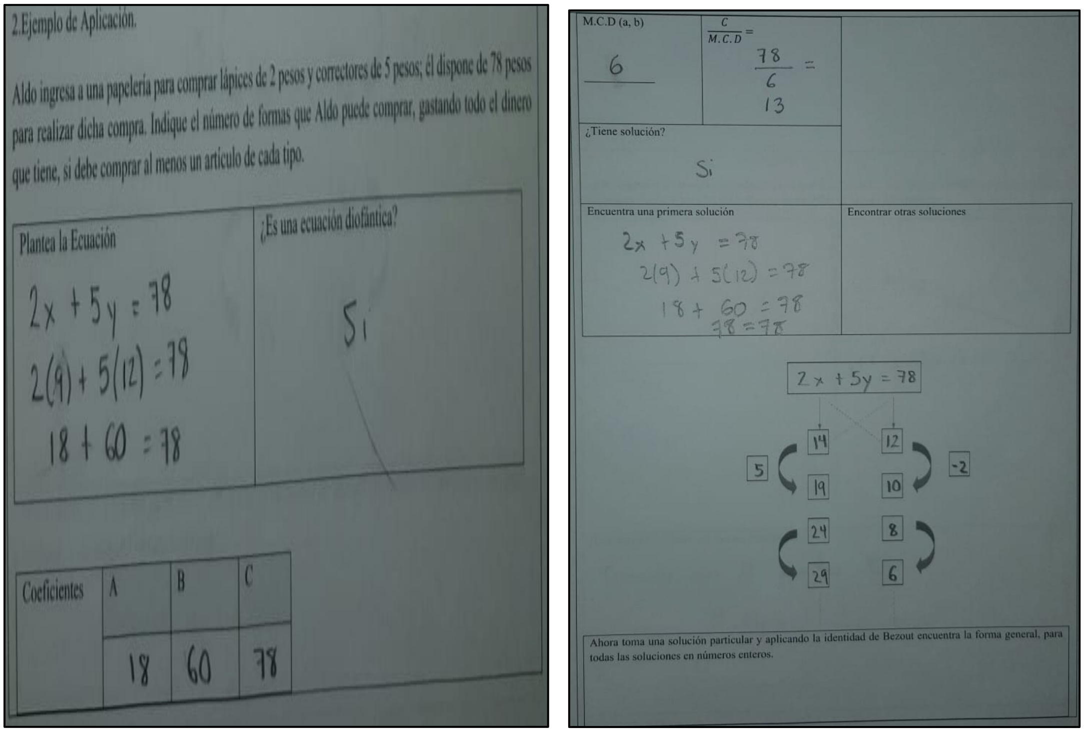
$4(4) + 10(14)$
$16 + 140 = 156$

$2x + 5y = 78$

Ahora toma una solución particular y aplicando la identidad de Bezout encuentra la forma general, para todas las soluciones en números enteros.

$X_0 = 4$ $x = 4 + \frac{5}{1}t$ $\boxed{x = 4 + 5t}$
$Y_0 = 14$ $y = 14 - \frac{2}{1}t$ $\boxed{y = 14 - 2t}$

Figura. 4.140. Respuesta de Yarinka y Gabriel (E8)



2.Ejemplo de Aplicación.

Aldo ingresa a una papelería para comprar lápices de 2 pesos y correctores de 5 pesos; él dispone de 78 pesos para realizar dicha compra. Indique el número de formas que Aldo puede comprar, gastando todo el dinero que tiene, si debe comprar al menos un artículo de cada tipo.

Plantea la Ecuación

2x + 5y = 78
2(9) + 5(12) = 78
18 + 60 = 78

¿Es una ecuación diofántica?

Si

Coeficientes	A	B	C
	18	60	78

M.C.D (a, b)

6

$\frac{C}{M.C.D} = \frac{78}{6} = 13$

¿Tiene solución?

Si

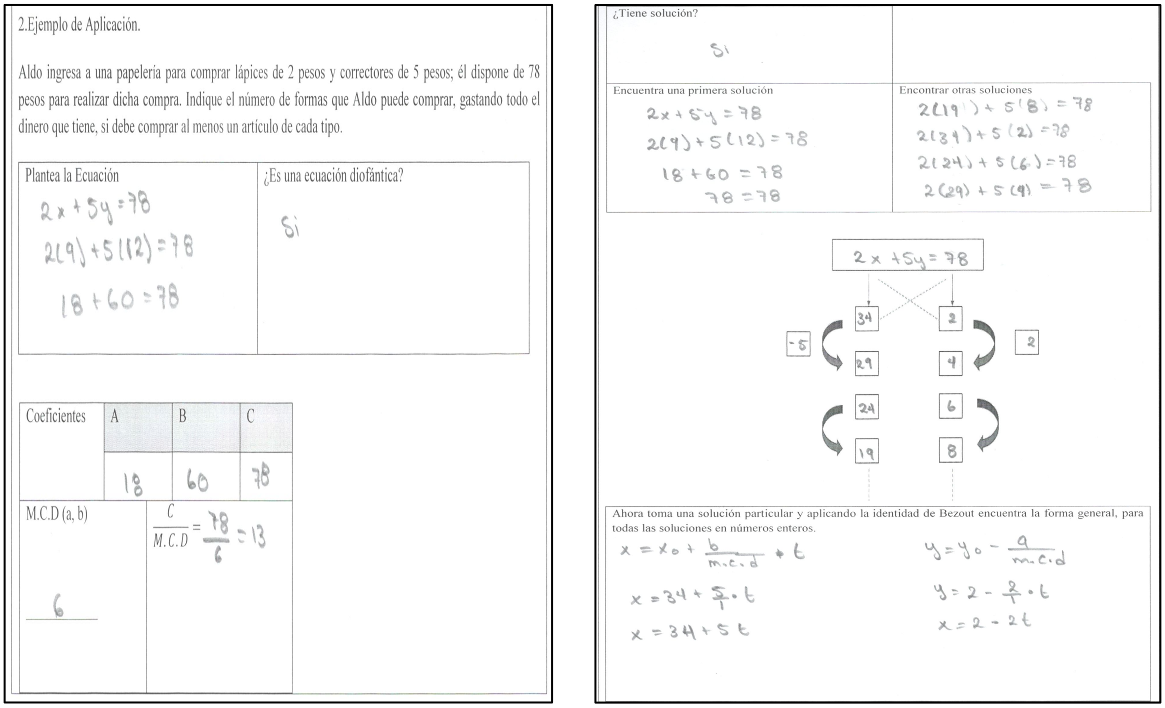
Encuentra una primera solución

2x + 5y = 78
2(9) + 5(12) = 78
18 + 60 = 78
78 = 78

Encontrar otras soluciones

Ahora toma una solución particular y aplicando la identidad de Bezout encuentra la forma general, para todas las soluciones en números enteros.

Figura. 4.141. Respuestas de Iván y Liliana (E3)



2.Ejemplo de Aplicación.

Aldo ingresa a una papelería para comprar lápices de 2 pesos y correctores de 5 pesos; él dispone de 78 pesos para realizar dicha compra. Indique el número de formas que Aldo puede comprar, gastando todo el dinero que tiene, si debe comprar al menos un artículo de cada tipo.

Plantea la Ecuación

2x + 5y = 78
2(9) + 5(12) = 78
18 + 60 = 78

¿Es una ecuación diofántica?

Si

Coeficientes	A	B	C
	18	60	78

M.C.D (a, b)

6

$\frac{C}{M.C.D} = \frac{78}{6} = 13$

¿Tiene solución?

Si

Encuentra una primera solución

2x + 5y = 78
2(9) + 5(12) = 78
18 + 60 = 78
78 = 78

Encontrar otras soluciones

2(19) + 5(8) = 78
2(34) + 5(2) = 78
2(24) + 5(6) = 78
2(29) + 5(4) = 78

Ahora toma una solución particular y aplicando la identidad de Bezout encuentra la forma general, para todas las soluciones en números enteros.

$x = x_0 + \frac{b}{m.c.d} \cdot t$

$x = 34 + \frac{5}{1} \cdot t$

$x = 34 + 5t$

$y = y_0 - \frac{a}{m.c.d}$

$y = 2 - \frac{2}{1} \cdot t$

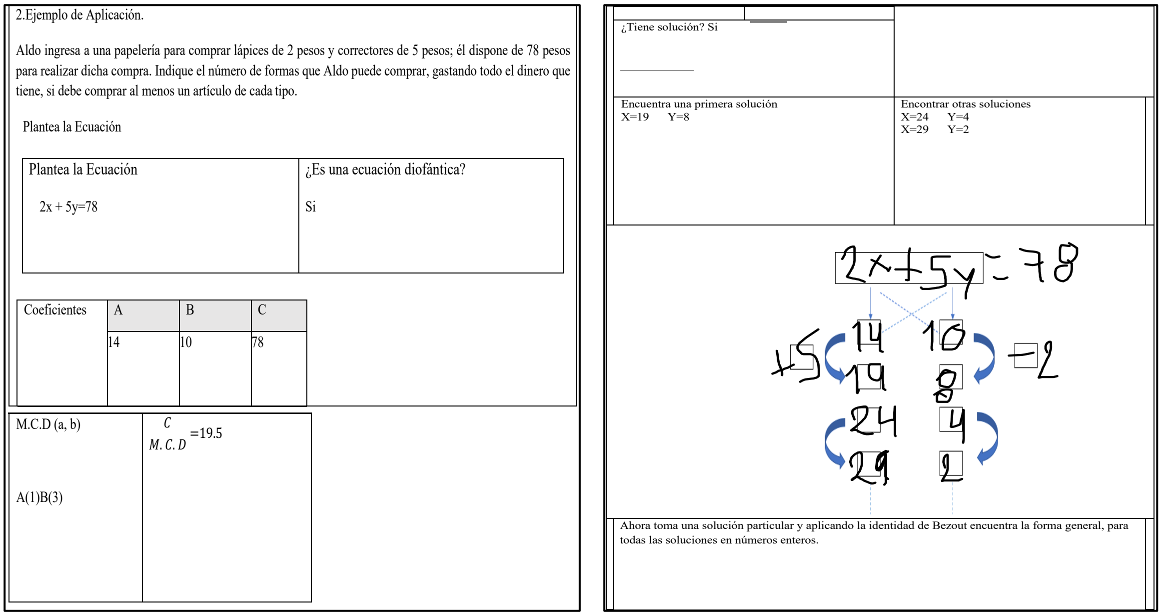
$x = 2 - 2t$

Figura. 4.142. Respuesta Jaqueline y Ariadna (E7)

El equipo de America y Eduardo (E2), esta vez lograron discernir la ecuación que modeliza el problema. Sin embargo, nuevamente no identifican correctamente los coeficentes *a, b* y el término independiente *c*, y por consecuencia el M.C.D de (a,b) y el cociente de c/M.C.D de (a, b) es incorrecto.

Por otro lado, cuando se les solicita encontrar una primera solución particular de la ecuación planteada, ellos aplican el método del tanteo correctamente y obtienen una primera solución.

Posteriormente aplican la regla aritmética para encontrar otras soluciones cometiendo un error (en una de las restas de x_0). A pesar del intento de solución no lograron discernir el modelo general y tampoco realizaron la gráfica de la ecuación para comprobar sus conjeturas. En la siguiente figura 4.143 se muestra las respuesta obtenidas del equipo 2.



2.Ejemplo de Aplicación.

Aldo ingresa a una papelería para comprar lápices de 2 pesos y correctores de 5 pesos; él dispone de 78 pesos para realizar dicha compra. Indique el número de formas que Aldo puede comprar, gastando todo el dinero que tiene, si debe comprar al menos un artículo de cada tipo.

Plantea la Ecuación

Plantea la Ecuación	¿Es una ecuación diofántica?
2x + 5y=78	Si

Coeficientes	A	B	C
	14	10	78

M.C.D (a, b) A(1)B(3)	$\frac{C}{M.C.D}$ =19.5

¿Tiene solución? Si

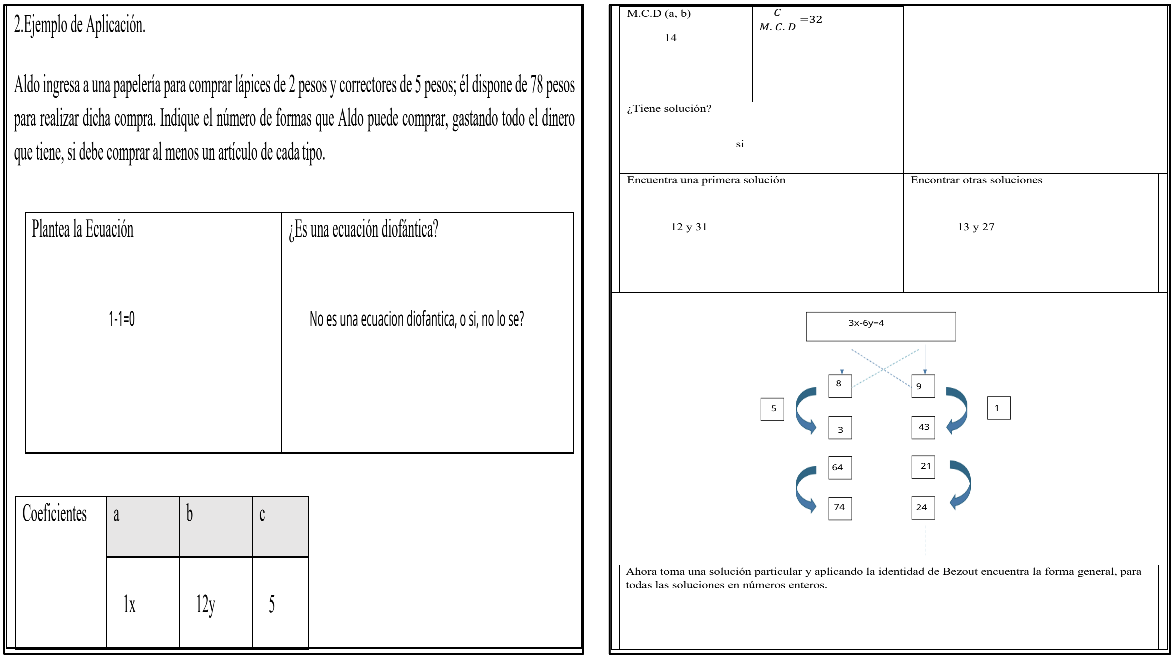
Encuentra una primera solución X=19 Y=8	Encontrar otras soluciones X=24 Y=4 X=29 Y=2

Ahora toma una solución particular y aplicando la identidad de Bezout encuentra la forma general, para todas las soluciones en números enteros.

Figura. 4.143. Respuestas de America y Eduardo (E2)

En esta Tarea 5B, Sergio y Jesús (E5), no lograron plantear la ecuación que modeliza el problema presentado. Por lo que, es evidente que no lograron discernir el problema y que las respuestas presentadas no tienen ningún argumento matemático sólido.

El análisis de las respuestas de estos euipos E2 y E5 nos conduce a plantear cuestiones abiertas de interés para avanzar en la comprensión del conocimiento algebraico necesario para un trabajo eficiente con expresiones algebraicas y de la forma en que diferentes componentes del mismo se ponen en juego en actividades algebraicas particulares. En las siguiente figura 4.144 se muestra las respuestas obtenidas del equipo E5.



2.Ejemplo de Aplicación.

Aldo ingresa a una papelería para comprar lápices de 2 pesos y correctores de 5 pesos; él dispone de 78 pesos para realizar dicha compra. Indique el número de formas que Aldo puede comprar, gastando todo el dinero que tiene, si debe comprar al menos un artículo de cada tipo.

Plantea la Ecuación	¿Es una ecuación diofántica?
1-1=0	No es una ecuacion diofantica, o si, no lo se?

Coeficientes	a	b	c
	1x	12y	5

M.C.D (a, b) 14	$\frac{C}{M.C.D}$ =32	
¿Tiene solución? si		
Encuentra una primera solución 12 y 31		Encontrar otras soluciones 13 y 27

Ahora toma una solución particular y aplicando la identidad de Bezout encuentra la forma general, para todas las soluciones en números enteros.

Figura. 4.144. Respuestas de Sergio y Jesús (E5)

El sentido estructural se manifiesta en este trabajo de tesis como un constructo importante y útil para profundizar en la complejidad de los aprendizajes necesarios para abordar tareas algebraicas escolares.

De esta manera, se analizan las respuestas dadas por los estudiantes a la luz de la taxonomía SOLO y los enfoques del aprendizaje. En la siguiente tabla 4.11 se muestra la clasificación de los niveles de las respuestas de los estudiantes a partir de la taxonomía SOLO en esta tarea 5B.

Nivel de razonamiento alcanzado (taxonomía SOLO)	Equipo	Criterio	Interpretación y análisis
Pre-estructural: No se domina ningún aspecto crucial de la tarea	E2	No logra discernir la ecuación que modela el problema, tampoco utiliza Geogebra o Excel para elaborar la gráfica y localizar un punto que sea una solución particular. Por lo que, no sólo no logra discernir el modelo general para encontrar otras soluciones, si no el problema en sí.	Las respuestas que proporcionan los alumnos ante una determinada tarea son erróneas o inexistentes. El estudiante aún no comprende
Uniestructural: Se domina sólo un aspecto crucial de la tarea	E5	Logra discernir la ecuación que modela el problema, utiliza Geogebra o Excel para elaborar la gráfica, pero no localiza al menos un punto que sea una solución particular. Por lo que, no logra discernir el modelo general para encontrar otras soluciones.	El resultado del alumno, pese a poder ser cierto, sólo se centra en un determinado aspecto que, por otro lado, no tiene por qué ser relevante Identifica sólo un aspecto del concepto.
Multiestructural: Se dominan varios aspectos cruciales de la tarea	E3	Logra discernir la ecuación que modela el problema, utiliza Geogebra o Excel para elaborar la gráfica y localiza al menos un punto como una solución particular. Por lo que, logra discernir el modelo general para encontrar otras soluciones.	En este caso el alumno es capaz de enumerar una serie de aspectos correctos, pero no va más allá Identifica varios aspectos del concepto, pero no tiene aún una visión completa.
Relacional: Relaciona entre si varios aspectos cruciales de la tarea	E1, E4, E6, E7 y E8	Logra discernir la ecuación que modela el problema, utiliza Geogebra o Excel para elaborar la gráfica y localiza varios puntos como solución particular. Por lo que, logra discernir el modelo general para encontrar otras soluciones e interpretar correctamente que significa la "y" negativa y positiva en el problema. $\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{\mathrm{mcd}(a,b)}t \\ y = y_0 - \frac{a}{\mathrm{mcd}(a,b)}t \end{cases}$	El alumno no sólo identifica varios aspectos correctos, sino que también es capaz de relacionarlos entre sí. Tiene una visión completa del concepto conformada por los diferentes aspectos del concepto.

Tabla 4.11. clasificación SOLO del nivel de estructura cognitiva de los estudiantes en la tarea 5B

Tomando como marco a la teoria de la variación de Marton (2015) y de Leung (2012) la unidad de discernimiento pedagogico, esta unidad conformada por las Tareas 5A y 5B tuvó como objetivo examinar hasta qué punto los estudiantes tenían oportunidad de desarrollar conceptos matemáticos, para lograr la construcción de ecuaciones diofántica lineales a partir de problemas de palabras, así como la interpretación, reescritura y simplificación de expresiones algebraicas.

4.4 DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

4.4.1 ¿CUÁL FUE LA VENTAJA DE LLEVAR ACABO LA CLASIFICACIÓN DE LAS RESPUESTAS OBTENIDAS DE LOS ESTUDIANTES A LO LARGO DE LAS TAREAS MEDIANTE LA TAXONOMÍA SOLO?

En este trabajo de tesis se ha presentado una propuesta que plantea el diseño e implementación de un conjunto de tareas de aprendizaje relacionadas con la resolución en números enteros de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas y coeficientes enteros, para plasmar el aprendizaje previsto y vivido de una manera novedosa a partir de la teoría de la variación de Marton (2015) que, como en el caso Mexicano, es poco considerada en los distintos niveles escolares y en nuestro caso en el bachillerato.

Además, se considera que la propuesta presentada es consonante con la variación y la focalización de los aspectos y características criticas del objeto de aprendizaje.

Por otra parte, y teniendo en cuenta el enfoque metodológico adoptado, el trabajo ejemplifica la conjugación de la utilización del experimento de enseñanza a través del diseño de cinco unidades de discernimiento de acuerdo con lo planteado por Leung, (2012) y con la incorporación de la taxonomía SOLO como una manera de clasificar y evaluar los resultados de una tarea de aprendizaje, a partir de una organización estructural de la misma. Es mediante esta clasificación que se describe esencialmente los diferentes niveles en los cuales se selecciona, se procesa y se comunica la información, desde un nivel que va de lo insuficiente a un nivel de experto escolarmente hablando. De esta manera, tanto los niveles sugeridos por la taxonomía SOLO, como los procesos que se consideraron, sirvieron como referente para valorar la experimentación realizada y sopesar los aciertos y dificultades encontradas.

De la clasificación realizada en cada una de las tareas integradas en las cinco unidades de discernimiento, en la Tabla 4.12, se presenta en un primer momento la síntesis de la clasificación de las respuestas de los estudiantes en las cuatro primeras unidades, de las cuales directamente se puede sentar varias ideas.

La primera, tiene que ver con la calidad de las respuestas obtenidas, por los equipos de estudiantes de la población indagada, allí se revela que los aprendizajes alcanzados por los equipos de America y Eduardo (E2) y Sergio y Jesús (E5) a lo largo de cada una de las tareas mayormente son a nivel preestructural o uniestructral, que de acuerdo a la taxonomía SOLO, significa que el número de elementos cruciales y relevantes para dar solución a la tarea, que utilizan los estudiantes, es de uno o dos, los cuales no logran relacionar y son nombrados bajo acciones como: identificar, nombrar, describir, etc., poniendo de manifiesto en los mismos, habilidades que sólo se atañen a los conocimientos básicos de matemáticas.

La segunda, es que las respuestas que proporcionan estos estudiantes en las unidades de discernimiento conforme aumentaba el nivel de complejidad de las tareas en las unidades 1, 2 y 3 pese a poder ser ciertas, sólo se centran en un determinado aspecto que, por otro lado, no tiene por qué ser relevante o crítico, dado que contienen datos informativos obvios, los cuales han sido extraídos directamente de los enunciados de la tarea. Incluso, no reconocen la estructura de las ecuaciones en su forma más simple, se confunden con un término compuesto como una única entidad. Por lo que, no lograron discernir que tipo de manipulaciones algebraicas son apropiadas en estas tareas.

La tercera, tiene que ver con las respuestas dadas en la unidad de discernimiento 4 (la de mayor complejidad) son centradas en aspectos irrelevantes, con contestaciones evasivas o vacias que hacen evidente la falta de dominio de las propiedades de los números y el algoritmo de Euclides.

De tal manera, que esta tarea tampoco logran focalizar su atención en las conexiones mutuas entre estructuras y reconocer qué transformaciones es posible realizar y cuáles de éstas son de utilidad para la obtención de una solución entera (particular) de las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas dadas.

Todo lo anterior nos indica que al parecer la práctica autónoma que llevaron a cabo los estudiantes para resolver las tareas, la falta de conocimientos previos consolidados y el confinamiento sanitario debido a la pandemia por COVID-19 realmente tuvo un impacto en su aprendizaje, ya que pese a que las tareas fueron diseñadas bajo el enfoque de la teoría de la variación (focalización de los aspectos y características críticas) y la implementación del entorno híbrido de aprendizaje (p.e. el uso de video tutoriales y geogebra), no se logro que estos dos equipos tuvieran un avance efectivo hacia los niveles multiestructural y relacional.

Esta discusión muestra que el objeto de aprendizaje previsto y el aprendizaje vivido, es decir lo que fue posible aprender en las tareas, había cambiado.

La siguiente Tabla 4.12 originada del análisis de cada una de las tareas sintetiza el cómo y por qué se relacionan o asocian estos niveles de clasificación de la taxonomía SOLO con las respuestas de los estudiantes obtenidas de las hojas de trabajo a lo largo de las unidades 1, 2, 3 y 4.

Unidades de discernimiento	TAREAS	NIVEL SOLO				EQUIPOS
		PRE-ESTRUCTURAL	UNI-ESTRUCTURAL	MULTI-ESTRUCTURAL	RELACIONAL	
Unidad Uno	1	E2, E5		E3, E6	E1, E4, E7, E8	Nadia y Dafne (E1)
Unidad Dos	2A	E2, E5	E3	E4	E1, E6, E7, E8	
	2B	E5	E3	E2, E4, E6, E7	E1, E8	America y Eduardo (E2)
Unidad Tres	3A	E3, E5	E2	E4	E1, E6, E7, E8	Ivan y Liliana (E3)
	3B	E3, E5	E2	E4	E1, E6, E7, E8	Monserrat y J. de Dios (E4)
	3C	E3, E5	E2		E1, E4, E6, E7, E8	Sergio y Jesús (E5)
Unidad Cuatro	4A	E2, E5	E3	E4, E6, E7	E1, E8	Flor y Brenda (E6)
	4B		E2, E5	E3, E4, E6, E7	E1, , E8	Jaqueline y Ariadna (E7)

Tabla 4.12. Consolidado de la clasificación SOLO de las respuestas dadas por los diferentes equipos de estudiantes en las unidades de discernimiento 1, 2, 3 y 4

Por otro lado, en el caso los equipos E3, E4, E6 y E7 en las unidades de discernimiento 1, 2 y 3 se encuentran en el nivel mutiestructural, logrando en ocasiones ascender al nivel relacional como es el caso de los equipos E4, E6 y E7, pese a que la complejidad de las tareas aumenta conforme se vanza en cada una de ellas.

En este caso los estudiantes son capaces de discernir una serie de características críticas correctamente, las cuales fueron focalizadas directamente en cada una de las tareas, através de la aplicación de los diferentes patrones de variación, de la variación en su representación y de la variación procedimental implementada a lo largo de las diferentes unidades de discernimiento.

Es decir, los estudiantes no sólo identifican varios aspectos correctos, sino que también son capaces de relacionarlos entre sí, allí las respuestas de los estudiantes dan cuenta de acciones como: identificar, transformar, probar, etc. las cuales demuestran habilidades que son propias del álgebra básica.

Sin embargo, en la unidad de discernimiento 4 (que consideramos la tarea más compleja), en particular en la tarea 4A, los estudiantes aún cuando proporcionan manifestaciones empíricas del manejo de las propiedades de los números presentan dificultades al operar con el algoritmo de Euclides al no lograr discernir la interpretación de la estructura de las expresiones y la realización de transformaciones que preserven la equivalencia, para obtener una solución particular entera de la ecuación de primer grado con dos incógnitas propuesta.

Y por último, los equipos E1 y E8 lograron mantenerse en cada una de las tareas de las cuatro unidades de discernimiento en el nivel relacional. Estos estudiantes no sólo identifican varios aspectos y características críticas correctamente, sino que también son capaces de relacionarlos entre sí, evidenciando que han desarrollado su sentido estructural.

Sus respuestas son extraídas tras el análisis de la situación planteada de las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas integrando la información en un todo comprensivo. Los resultados que presentan estos dos equipos se organizan formando una estructura.

Allí las respuestas de los estudiantes dan cuenta de acciones como: identificar, focalizar, aplicar, probar, argumentar, justificar, etc. las cuales manifiestan la utilización de un principio general y abstracto que puede ser inferido a partir del análisis sustantivo de la resolución de las ecuaciones diofánticas lineales con dos incógnitas y que es generalizable a otros contextos.

Por otro lado, en la tabla 4.13 se presenta la síntesis de la clasificación de las respuestas de los estudiantes en las primeras unidades de discernimiento que contribuyeron a consolidar las respuestas de la unidad de discernimiento 5, referente a la resolución de problemas de aplicación que tiene que ver con la construcción de ecuaciones a partir de problemas verbales, así como la interpretación, reescritura y simplificación de expresiones algebraicas, se menciona lo siguiente:

En el caso de los equipos E2 y E5 al igual que en las otras unidades, en esta unidad 5 sus respuestas los ubican en los niveles preestructural y uniestructural, dado que no lograron discernir los problemas con claridad y analizar adecuadamente las relaciones existentes en ambos problemas (verbales). Por lo que, no lograron obtener las ecuaciones diofánticas lineales que modelizan la situación y que permiten resolver los problemas.

Las respuestas en la mayoria de los equipos (E1, E4, E5, E6, E7 y E8) en esta unidad de discernimiento 5, muestran que el diseño y la focalización de los aspectos y características críticas de la resolución en números enteros de las ecuaciones diofánticas lineales con dos incógnitas ayudó a los estudiantes a formar procedimientos correctos de “resolución de problemas con ecuaciones” a lo largo de cada una de las tareas, las cuales aumentaban su nivel de complejidad hasta que pudieron usarlos más fácilmente.

Este diseño a partir de la aplicación de la teoría de la variación ayudó a estos estudiantes a recordar conocimientos previos, aplicar representaciones aprendidas y diseñar estrategias de resolución de problemas para sentar las bases para analizar y resolver preguntas y reducir sus dificultades de aprendizaje, posicionandolos en esta unidad 5 dentro del nivel estructural relacional.

En la siguiente tabla 4.13 se muestra nuevamente el consolidado de la clasificación SOLO de las respuestas dadas por los diferentes equipos de estudiantes en las unidades de discernimiento 1, 2, 3 y 5.

Unidades de discernimiento	TAREAS	NIVEL SOLO				EQUIPOS
		PRE-ESTRUCTURAL	UNI-ESTRUCTURAL	MULTI-ESTRUCTURAL	RELACIONAL	
Unidad Uno	1	E2, E5		E3, E6	E1, E4, E7, E8	**Nadia y Dafne (E1)**
Unidad Dos	2A	E2, E5	E3	E4	E1, E6, E7, E8	**America y Eduardo (E2)**
	2B	E5	E3	E2, E4, E6, E7	E1, E8	**Ivan y Liliana (E3)**
Unidad Tres	3A	E3, E5	E2	E4	E1, E6, E7, E8	**Monserrat y J. de Dios (E4)**
	3B	E3, E5	E2	E4	E1, E6, E7, E8	**Sergio y Jesús (E5)**
	3C	E2, E5	E2		E1, E4, E6, E7, E8	**Flor y Brenda (E6)**
Unidad Cinco	5A	E2	E5	E3	E1, E4, E6, E7, E8	**Jaqueline y Ariadna (E7)**
	5B	E2	E5	E3	E1, E4, E6, E7, E8	**Yarinka y Gabriel (E8)**

Tabla.4.13 Consolidado de la clasificación SOLO de las respuestas dadas por los diferentes equipos de estudiantes en las unidades de discernimiento 1, 2, 3 y 5.

4.4.2 ¿CUÁL FUE LA VENTAJA DE APLICAR LA TEORIA DE LA VARIACION EN LA RESOLUCIÓN EN NÚMEROS ENTEROS DE LAS ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCOGNITAS?

La investigación en torno a la resolución de las ecuaciones lineales en dos incógnitas produce que se puedan interpretar relaciones matemáticas entre ellas. En la reseña que en seguida haremos de sus resultados, interesa recalcar el nivel de dificultad encontrado en los estudiantes a raíz de la enseñanza convencional de las ecuaciones lineales con dos incógnitas, aún en estudiantes que cursan los primeros años del bachillerato.

En el bachillerato se aborda este concepto de manera muy general y a través de métodos convencionales. Es decir, mayormente aplicando el método de sustitución, donde la solución de una ecuación lineal con dos incógnitas es un par de valores (x, y) que hacen cierta la igualdad. En el método de sustitución lo que los estudiantes aprenden es que se debe despejar una de las incógnitas de la ecuación original y sustituir su valor en la otra incógnita. Por ejemplo: en el caso de la ecuación $2x+3y = 6$.

Los estudiantes notan que si despejan una incógnita las soluciones dependen del valor que le dan a la otra incógnita. Por lo que, proceden a despejar comunmente a la incógnita “x”.

$2x=6-3y$, entonces, $\boxed{x = \frac{6-3y}{2}}$

Las soluciones de la ecuación dependen de los valores que le den a la incógnita “y”. Si le dan el valor de n a “y” : $\boxed{x = \frac{6-3\,(n)}{2}}$

Sin embargo, la mayoría de los estudiantes mexicanos de bachillerato evaluados en la prueba Planea (2017), se ubican en el nivel I y II, y sólo el 8% cae en el nivel III, nivel en el que se puede considerar que queda ubicado la resolución de problemas que requieren el uso de ecuaciones. De tal manera, que estas y otras dificultades se agravan a medida que las ecuaciones se vuelven más complejas y cuando los estudiantes intentan resolver problemas verbales.

En la investigación sobre el aprendizaje y la enseñanza del álgebra escolar, Kieran (1992, p. 390) plantea estas preguntas: *¿Qué hace que la comprensión del álgebra escolar* *sea una tarea difícil para la mayoría? ¿Es el contenido del álgebra la fuente del problema? ¿O es la forma en que se enseña lo que hace que los estudiantes no puedan entender la materia?*

La propuesta de enseñanza –actual y usual en nuestro país– en la cual el álgebra se introduce desde la escuela secundaria, a través de las ecuaciones de primer grado con una incógnita, muestra que, a partir del conjunto de tareas que los alumnos realizan, elaboran una concepción según la cual la ecuación es una igualdad numérica y las letras son números a *develar* (Panizza, Sadovsky y Sessa, 1996).

Estos resultados coinciden, de alguna manera, con lo que ya había anticipado Kieran a propósito de las ecuaciones: *Presumimos que las concepciones primitivas de los niños de lo que es una ecuación no contienen, en general, la idea de que tengan términos literales a ambos lados del signo igual. Las ecuaciones de ese estilo carecen de sentido a la vista de la presunta concepción ingenua de los niños de una ecuación como un hecho numérico ligeramente disfrazado con la falta de algún componente* (Kieran y Filloy, 1989).

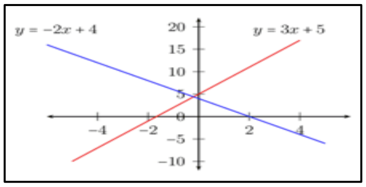
La influencia de dicha concepción en la comprensión de otros objetos de enseñanza que aparecen más adelante en el bachillerato como es el caso de las ecuaciones lineales con dos incógnitas, los estudiantes presentan dificultades en el tratamiento de objetos algebraicos con infinitas soluciones o aun con varias soluciones, objetos tales como ecuaciones con dos incógnitas que no estan están escritas en el formato estandar de ax +by = c, por ejemplo:

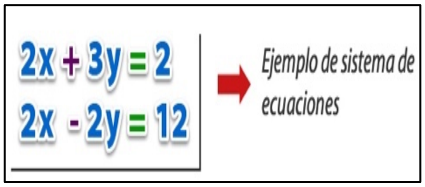
$\frac{1}{3}(48x + 36 y = 48)$	$23x + 4y – 7x = –3y +15$	$y = –2x + 8$	$15x + 10y – 20 = 0$

O con más incógnitas y ecuaciones de grado mayor que uno:

$x^2 – 3x = 20$	$2x^3 + 5y – 3z = 120$	$x^2 – 3y = 20$	$2x^3 + 5y^2 – 3x = 120$

Nuestra experiencia frente a grupo, el conocimiento del currículo y el análisis de los libros de texto usuales en el bachillerato en nuestro país, nos permiten afirmar que la escuela considera el objeto «ecuación lineal con dos incógnitas» en dos situaciones específicas: o bien como ecuación de la recta, donde la misma aparece entonces como «la etiqueta del dibujo de una recta» o bien como una de los componentes en los sistemas lineales de 2x2, por ejemplo:





Por otro lado, Panizza, M. & Sadovsky, P. & Sessa, C. (1999), señalan que la mayoría de los estudiantes enfrentan las ecuaciones lineales con dos incógnitas extendiendo conocimientos producidos sobre otros objetos: ecuaciones de una variable y sistemas lineales con dos variables. Lo que confirma la dificultad de comprensión de las ecuaciones lineales en dos incógnitas por parte de los estudiantes en el tramo escolar de 12 a 16 años.

En el caso de nuestra investigación que aquí se ha presentado, una vez que los estudiantes se enfrentan a ecuaciones fuera del formato estandar ax+by=c, la mayoría de los ellos no logran identificar y separar los coeficientes de las incógnitas. Incluso presentan dificultades para identificar si se trata o no de una ecuación con dos incógnitas, y cuando comienzan a manipularla -infructuosamente– para obtener el formato estandar, empiezan a tomar conciencia de que se trata de un objeto con el cuál nunca antes habían interactuado.

Regresando al trabajo de Panizza et. al. (1999), estos autores señalan que casi todos los alumnos que participaron en su investigación anticipaban que una ecuación como las que son de interés en este trabajo debia tener solución única. Estos autores se basan principalmente en dos cuestiones:

- Las representaciones que tienen los alumnos acerca de los problemas que se resuelven con ecuaciones, les hacen ver en el contexto del problema una justificación a la unicidad de las soluciones.

- Las representaciones de las letras como números ya determinados pero desconocidos contribuyen a que los alumnos busquen el valor de la “*x*” y el valor de la “*y*”.

Estos investigadores constataron que en la búsqueda de soluciones de las ecuaciones lineales con dos incógnitas, casi todos los estudiantes adaptan al nuevo objeto los procedimientos aprendidos para un objeto cercano: como los sistemas de ecuaciones. Los autores señalan que el procedimiento de solución de los estudiantes resulta incorrecto y a ese procedimiento le llaman *sustitución en sí misma* (p.456), y deriva en que los alumnos no ven, ni *a priori* ni a posteriori, que eso los conduce a una identidad.

Finalmente estos investigadores concluyen que desde las enseñanzas convencionales para la resolución de una ecuación lineal con dos incógnitas no se prepara a los estudiantes para enfrentar un número infinito de soluciones.

En contraste con ese acercamiento escolar tradicional a la resolución de ecuaciones lineales en dos incógnitas, nosotros, en este trabajo de tesis, deliberadamente abordamos el problema de que los estudiantes encontraran una primera solución entera llamada *solución particular*, enseguida encontraran otras soluciones enteras y finalmente llegarán al modelo o forma general para todas las soluciones en números enteros.

Fue el enfoque basado en la teoría de la variación de Marton (2015), lo que nos hizo concebir como situación adecuada de observación el diseño e implementación de tareas de aprendizaje sobre este tipo de ecuaciones, el cuál fue planteado a los estudiantes de segundo año de bachillerato.

En general, la idea, con respecto a la dinámica de trabajo a seguir, fue dejar a los jóvenes estudiantes experimentar, permitirles descubrir por ellos mismos, y ver qué encontraban de interesante en las tareas que se les proponian mientras se trataba, tanto como fuera posible, de que expresaran lo que aprendían y discernían de dichas tareas, con una intervención minima o nula de parte del profesor-investigador, quien esto escribe.

Algunos de los resultados obtenidos se presentan acontinuación, a manera de síntesis de este capítulo.

Entre los resultados de la investigación llevada a cabo resalta todo lo relativo a lo que los estudiantes discernieron al enfrentar las tareas que se les propusieron. En particular interesa presentar las distintas dificultades manifestadas por los estudiantes respecto de la resolución en números enteros de las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

En la primera unidad de discernimiento, se encontró que casi todos los estudiantes al inicio de la experimentación no le prestaban atención a la estructura de las ecuaciones y a las relaciones existentes entre los diferentes elementos que las conforman, confundian los coeficientes con las incógnitas e incluso las tomaban como uno sólo (pensaban que eran lo mismo).

Recuerdese que el texto de la unidad de discernimiento uno es el siguiente:

1. **¿Cómo son los coeficientes en una ecuación diofántica lineal con dos incógnitas?**

	TAREAS	ECUACIONES PLANTEADAS		PROCEDIMIENTO
Unidad de discernimiento 1	1	$4x + 3y = 25$	$4x + 3 = 25$	Reconocimiento de los coeficientes a,b y el término independiente
		$1.9\ x - 2y = 10$	$2x - 2y = 10$	
		$9x - 2y = 1$	$9x - \frac{2}{3}y = 1$	
		$5x + y = 34$	$\sqrt{5}\ x - y = 25$	
		$x - 3y - 20 = 0$	$x^2 - 3y = 20$	
		$2x^3 + 5y - 3z = 120$	$2x + 5y - 3x = 120$	
		$\frac{1}{3}(48x + 36\ y = 48)$	$23x + 4y - 7x = -3y + 15$	
		$y = -2x + 8$	$\frac{1}{2}(42x + 36\ y = 48)$	
		$15x + 10y - 20 = 0$	$x^2 - 3x = 20$	

Tabla 4.14. Ecuaciones presentadas a los estudiantes en la unidad de discernimiento uno

En la implementación de la teoría de la variación por constraste, separación y generalización realizada con los coeficientes *a, b* y *c*, con la escritura de las ecuaciones y con los exponentes de las incógnitas, se obtuvó, por un lado, que la mayor parte de los estudiantes (E1, E4, E6, E7 y E8) lograron focalizar su atención en las características críticas e identificaron a simple vista si se trataba o no de una ecuación de primer grado con dos incógnitas y con coeficientes enteros.

Por otro lado, realizaron manipulaciones algebraicas simples para obtener el formato estándar ax+by=c, y determinaron si se trataba o no de una ecuación del tipo señalado, lo que los introdujó al fortalecimiento del sentido estructural de las ecuaciones.

En el caso de los Equipos E2 y E5 presentaron muchas dificultades desde el inicio, igual para identificar la estructura de las ecuaciones y también para lograr realizar las manipulaciones algebraicas necesarias en la obtención del formato estandar. Fue claro que aún no tenian bases solidas ni ariméticas ni algebraicas, lo que no les permitió completar del todo correctamente la tarea y terminar de manera adecuada con esta unidad.

En relación con el texto de la unidad de discernimiento dos, se tiene lo siguiente:

2. **¿Cuándo tiene solución entera? (M.C.D de (a, b))**

	TAREAS	ECUACIONES PLANTEADAS		PROCEDIMIENTO
Unidad de discernimiento 2	2A	$\mathbf{x + y = 7}$ $\mathbf{x - y = 7}$ $\mathbf{2x + 10y = 17}$	$\mathbf{2x - 5y = 9}$ $\mathbf{2x - 6y = 9}$ $\mathbf{2x - 7y = 9}$	Tanteo
	2B	$\mathbf{2x + 3y = 2}$	$\mathbf{6x - 3y = 1}$	Método gráfico

Tabla 4.15. Ecuaciones presentadas a los estudiantes en la unidad de discernimiento dos

De los resultados más importantes de la observación empirica en esta unidad de discernimiento dos, se encontró que al solicitar a los estudiantes determinar si las ecuaciones dadas tienen o no solución entera, todos los estudiantes en instancia procedieron a buscar una solución aplicando el método por tanteo encontrandose con que no sólo se podía encontrar una solución entera única si no que notaron que podían encontrar otras soluciones.

Este método y la simplicidad de las dos primeras ecuciones dadas les permitió dejar en segundo plano, la estructura de las ecuaciones y los procedimientos algebraicos aprendidos en cursos anteriores (como la sustitución algebraica, para obtener una solución). Por lo que, en ese momento no focalizaron su atención en la característica crítica del cociente c/M.C.D de (a, b), evidenciando las marcas de la enseñanza convencional de sólo avocarse a resolver.

También se encontró que al pasar de la representación álgebraica a la gráfica, los equipos (E1, E4, E6, E7 y E8) presentaron cierta dificultad al localizar en la recta los puntos (x_o, y_o) que fueran posibles soluciones enteras de la ecuación $6x - 3y = 1$. Por lo que, nuevamente intentaron aplicar infructosamente el tanteo. Sin embargo, a pesar de muchos intentos no lograban encontrar soluciones.

Esto los hizo retoceder y revisar como se había procedido anteriormente, lo que los llevó a focalizar su atención en el papel del cociente c/M.C.D de (a, b), para determinar que la ecuación no tiene solución entera, debido a que el cociente de esa ecuación, a diferencia de las otras ya resueltas no da como resultado un número exacto. Esto sentó un precedente matemático, importante para determinar si las ecuaciones de este tipo tienen o no soluciones enteras.

Procediendo de la misma manera al inicio, los equipos E2, E3 y E5 se esforzaron en tratar de encontrar una solución por tanteo sin lograrlo. Ellos dejaron en segundo plano la representación gráfica de la recta de la ecuación $6x - 3y = 1$ y el cociente c/M.C.D de (a, b). Lo que confirma de acuerdo a Panizza et. al. (1999), que cualquiera que haya sido el trabajo realizado alrededor de las representaciones gráficas de la recta, esto no parece ser suficiente para que los alumnos puedan establecer una relación entre los puntos de la recta y las soluciones de la ecuación correspondiente.

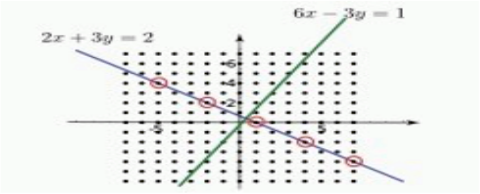
2x + 3y =2	6x – 3y =1
	
2x + 3y =2 MCD (a, b) = 1 $\frac{2}{1} = 2$ Soluciones; Puntos en la recta (x_0, y_0) ((−5,4), (−2,2), (1,0), (4,−2), (7,−4)).	6x – 3y =1 MCD (a, b) = 2 $\frac{1}{2} = 0.5$ Sin soluciones; No hay puntos de intersección entera en la recta (x_0, y_0)

Figura 4.145. Variación en la representación (de lo símbolico a lo gráfico)

Ahora para hacer la síntesis de lo obtenido en el caso de la unidad de discernimiento tres procederemos como en los dos casos anteriores comenzamos primero presentando el texto o enunciado de la misma:

3. En caso de tener solución, ¿cómo encontrarla? (solución particular)

	TAREAS	ECUACIONES PLANTEADAS		PROCEDIMIENTO
Unidad de discernimiento 3	3ª	**5x + 2y = 126**	**5x – 7y = 125**	Criterio de divisibilidad o multiplicidad
	3B	**4x + 5y = 98**	**3x – 5y = 7**	Criterio de cifras términales
	3C	**5x + y = 83**	**11x + 13y = 173**	Criterio de la división

Tabla 4.16. Ecuaciones presentadas a los estudiantes en la unidad de discernimiento tres

Entre los resultados más importantes encontrados en esta tercera unidad de discernimiento fue que la utilización del video tutorial (en youtube) como herramienta, sirvió para continuar con el trabajo empríco con los estudiantes dado el confinamiento sanitario por la pandemia por COVID-19.

Esto ayudó a los estudiantes de los equipos (E1, E4, E6, E7 y E8) a tener la posibilidad de reforzar el proceso de enseñanza-aprendizaje logrando, primero, mostrar de una manera simple y desde la aritmética (sin que intervengan maniplaciones algebricas complicadas) tres procedimientos matemáticos (variación procedimental) para encontrar una solución particular de las ecuaciones dadas.

Segundo presentar a través de esta herramienta visual la regla aritmética ($x_o + a$) y (y_o +/- *b)* para encontrar otras soluciones enteras, sin la necesidad de realizar maniplaciones algebraicas complicadas. De esta manera, se abrió una nueva dimensión de variación para la resolución en números enteros de las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

Otro resultado importante se dió con los equipos E2, E3 y E5 donde se evidenció que estos estudiantes se inclinan más por buscar resolver las tareas de manera fácil y rápida. Lo que los llevó nuevamente a tratar de aplicar el método por tanteo para encontrar las soluciones de las ecuaciones dadas, sin lograrlo.

Estos estudiantes dejaron en segundo plano los procedimientos matemáticos presentados en los tres videos tutoriales, aún cuando estos fueron aritméticos y no álgebraicos. Tampoco le dieron importancia a las diferentes representaciones utilizadas en las tareas (como la gráfica), para apoyarlos a encontrar una solución particular de las ecuaciones dadas.

Esto puede ser causa al parecer también de los efectos (el desintéres a las tareas escolares) que se presentaron en los estudiantes a raíz del confinamiento sanitario por la pandemia de Covid-19 y por la falta de interacción en el aula con sus compañeros y el profesor, que de acuerdo a la teoría de la variación esto es llamado aprendizaje en acción.

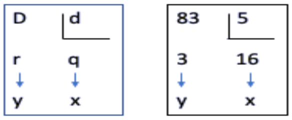
Criterio de Divisibilidad o Multiplicidad	Criterio de Cifras términales	Criterio de la División
5x + 2y = 126 2 es multiplo o divisor de 126 5 no es multiplo o divisor de 126 Convertir 5y como multiplo o divisor de 126 $5(2) + 2(58)= 126$ 10 + 116 = 126	4x + 5y = 98 2 [4x + 5y = 98] 8x + 10y = 196 Cifras terminales de cada término …6 …0 …6 8(2) + 10 (18) = 196 16 + 180 = 196	5x + y = 83  $5(16) + (3)= 83$ 80+ 3= 83

Figura 4.146. Ejemplo de los tres criterios aplicados en la resolución de cuaciones diofánticas lineales

Continuando ahora con la síntesis de lo obtenido en el caso de la unidad de discernimiento cuatro presentamos primero el texto o enunciado de la misma:

4 . ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación? (modelo general)

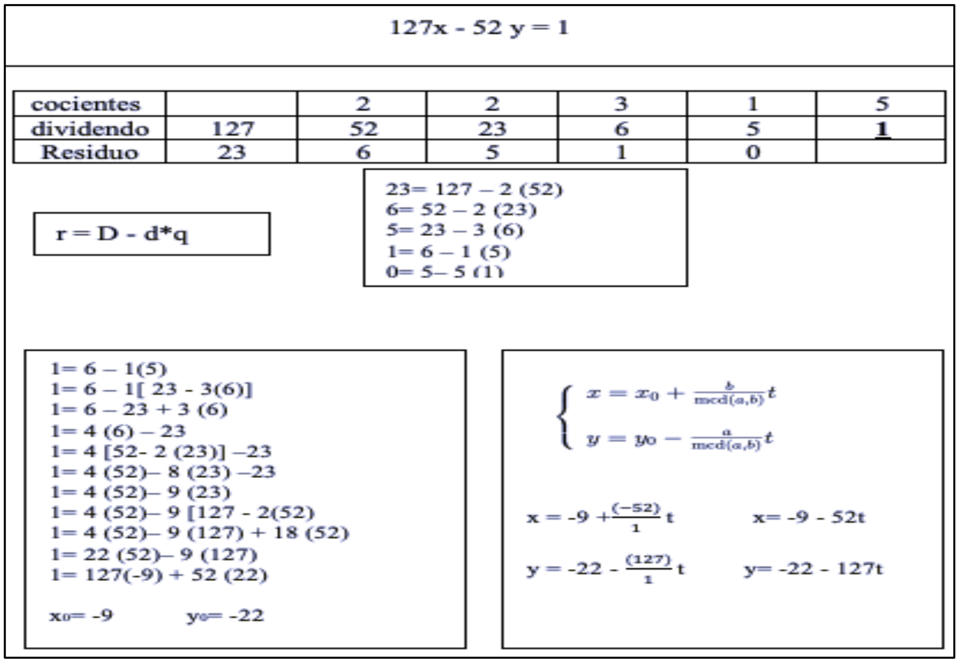
	TAREAS	ECUACIONES PLANTEADAS		PROCEDIMIENTO
Unidad de discernimiento 4	4A	MCD (525, 100) MCD (66, 550)	127x – 52y = 1	Algoritmo de Euclides
	4B	3x+8y=0		Algoritmo de Euclides y método gráfico

Tabla 4.17. Ecuaciones presentadas a los estudiantes en la unidad de discernimiento cuatro

En esta cuarta unidad de discernimiento los resultados más destacados que obtuvimos son que, cuando la carga cognitiva de una tarea es demasiado pesada, los estudiantes tienden a dividir su atención (efecto de atención dividida) y se centran en una sola forma de representación (Brünken y Leutner, 2001). En el caso de las Tareas de esta unidad de discernimiento, el algotrimo de Euclides y la identidad de Bezout representó una gran carga cognitiva en general para todos lo estudiantes.

Los equipos (E3, E4, E6 y E7) presentaron pocas dificultades al discernir el algotimo de Euclides, pero al final si logaron encontrar una solución particular de la ecuación dada del tipo ax+by=1. Sin embargo, donde tuvierón problemas fue al aplicar la identidad de Bezout y encontrar el modelo o forma general que permitiera encontrar todas las soluciones enteras de las ecuaciones dadas. Por lo que, en este caso ellos ya no optaron por aplicar el método por tanteo sino el método aritmético aprendido en las tareas anteriores encontrando otras soluciones enteras a las ecuaciones.

En el caso de los equipos (E2 y E5) por la carga cognitiva de las tareas desistieron y dejaron inclonclusas las hojas de trabajo. Finalmente sólo los equipos E1 y E8 que evidenciaron desde tareas anteriores tener un buen desarrollo de su sentido estructural lograron concretar de manera éxitosa las dos tareas, aplicando correctamente el algoritmo de Euclides y la identidad de Bezout para encontrar el modelo o forma general que les permitió encontrar todas las soluciones enteras a las ecuaciones dadas.



127x - 52 y = 1

cocientes		2	2	3	1	5
dividendo	127	52	23	6	5	1
Residuo	23	6	5	1	0	

r = D - d*q

23= 127 – 2 (52)
6= 52 – 2 (23)
5= 23 – 3 (6)
1= 6 – 1 (5)
0= 5– 5 (1)

1= 6 – 1(5)
1= 6 – 1[23 - 3(6)]
1= 6 – 23 + 3 (6)
1= 4 (6) – 23
1= 4 [52- 2 (23)] –23
1= 4 (52)– 8 (23) –23
1= 4 (52)– 9 (23)
1= 4 (52)– 9 [127 - 2(52)
1= 4 (52)– 9 (127) + 18 (52)
1= 22 (52)– 9 (127)
1= 127(-9) + 52 (22)

x_0= -9 y_0= -22

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{\text{mcd}(a,b)}t \\ y = y_0 - \frac{a}{\text{mcd}(a,b)}t \end{cases}$$

$x = -9 + \frac{(-52)}{1} t$ $x= -9 - 52t$

$y = -22 - \frac{(127)}{1} t$ $y= -22 - 127t$

Figura 4.147. Aplicación del algoritmo de Euclides y la Identidad de Bezout

Finalmente, se presenta la síntesis de la quinta unidad de discernimiento referente a la resolución de problemas de aplicación modelados por una ecuación de primer grado con dos incógnitas y de igual manera procederemos como en los casos anteriores comenzando primero presentando el texto o enunciado de la misma:

5. Resolución de problemas con ecuaciones diofánticas lineales

	TAREAS	PROBLEMAS PLANTEADOS	PROCEDIMIENTO
Unidad de discernimiento 5	Una garrafa de 5 litros y otra de 3 litros de capacidad. ¿Cómo podemos utilizar las medidas exactas de estas garrafas para conseguir una tercera garrafa de 4 litos de manera exacta?		Cualquiera de los utilizados en las tareas anteriores
	5A	**3x + 5y = 4**	
	Aldo ingresa a una papelería para comprar lápices de 2 pesos y correctores de 5 pesos; él dispone de 78 pesos para realizar dicha compra. Indique el número de formas que Aldo puede comprar, gastando todo el dinero que tiene, si debe comprar al menos un artículo de cada tipo.		
	5B	**2x + 5y = 78**	

Tabla 4.18. Problemas de aplicación que se resuelven con una ecuacion diofántica lineal

Los resultados más destacados encontrados en esta unidad discernimiento cinco se encontro que, el diseño y secuencia de las tareas con base en la teoría de la variación ilustró las dos formas de variación, a saber, la "variación conceptual" y la "variación procedimental", que se refieren a la comprensión de los conceptos desde múltiples perspectivas y al posterior despliegue gradual de las matemáticas.

Esto les permitió a los estudiantes (E1, E4, E6, E7 y E8) fortalecer el proceso de exploración de "resolución de problemas con ecuaciones", logrando de manera positiva aplicar los conocimientos y procedimientos matemáticos adquiridos a lo largo de las tareas anteriores.

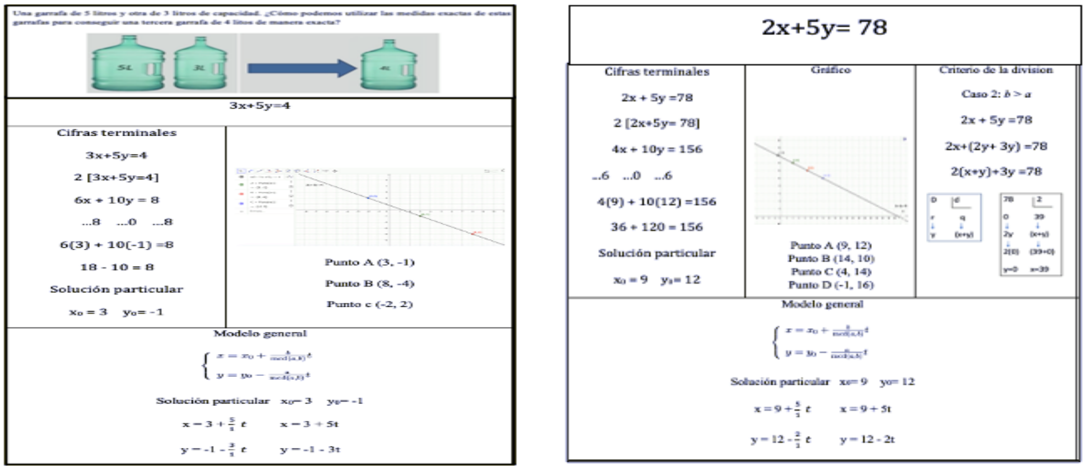
Como lo señala Li, J., Peng, A. & Song, N. (2011), en el proceso de modelar ecuaciones, las diferentes representaciones ayudan a los estudiantes a profundizar gradualmente en la comprensión de las preguntas: ¿la representación del lenguaje es útil para comprender el escenario?; ¿la representación pictórica o gráfica es útil para visualizar la relación entre diferentes cantidades?; y ¿la representación tabular es útil para establecer las relaciones cuantitativas?

Estos autores mencionan que una consideración y construcción tan amplia de relaciones cuantitativas ayudan a los estudiantes a comprender de manera global las operaciones y procedimientos de *resolución de problemas con ecuaciones*.

En el caso de los equipos E2 y E5, la construcción de ecuaciones a partir de problemas verbales, así como la interpretación, simplificación y resolución en números enteros de las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, representaron una temática difícil de comprender y una dificultad en el desarrollo del álgebra básica. Los resultados proporcionaron información sobre el bajo desarrollo del sentido estructural de los estudiantes al operar con expresiones algebraicas y, en particular, sobre cómo y qué visualizan de las subestructuras que componen una expresión algebraica.

Por otro lado, los resultados también mostraron que en todos los estudiantes y en particular con estos faltó la interacción con otros estudiantes y la ayuda del maestro a lo largo de la experimentación para formar procedimientos correctos de "resolución de problemas con ecuaciones" hasta que pudieran usarlos fácilmente.

De acuerdo a la teoría de la variación esta interacción llamada aprendizaje en acción podría haber ayudado a los estudiantes a recordar conocimientos previos, aplicar representaciones aprendidas y diseñar estrategias de resolución de problemas para sentar las bases para analizar y resolver preguntas y reducir sus dificultades de aprendizaje.



Una garrafa de 5 litros y otra de 3 litros de capacidad. ¿Cómo podemos utilizar las medidas exactas de estas garrafas para conseguir una tercera garrafa de 4 litos de manera exacta?

$3x+5y=4$

Cifras terminales

$3x+5y=4$

$2\ [3x+5y=4]$

$6x + 10y = 8$

$...8 \quad ...0 \quad ...8$

$6(3) + 10(-1) = 8$

$18 - 10 = 8$

Solución particular

$x_0 = 3 \quad y_0 = -1$

Punto A (3, -1)

Punto B (8, -4)

Punto c (-2, 2)

Modelo general

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{mcd(a,b)}t \\ y = y_0 - \frac{a}{mcd(a,b)}t \end{cases}$$

Solución particular $x_0 = 3 \quad y_0 = -1$

$x = 3 + \frac{5}{1}t \qquad x = 3 + 5t$

$y = -1 - \frac{3}{1}t \qquad y = -1 - 3t$

$2x+5y= 78$

Cifras terminales

$2x + 5y = 78$

$2\ [2x+5y= 78]$

$4x + 10y = 156$

$...6 \quad ...0 \quad ...6$

$4(9) + 10(12) = 156$

$36 + 120 = 156$

Solución particular

$x_0 = 9 \quad y_0 = 12$

Gráfico

Punto A (9, 12)
Punto B (14, 10)
Punto C (4, 14)
Punto D (-1, 16)

Criterio de la division

Caso 2: $b > a$

$2x + 5y = 78$

$2x+(2y+ 3y) = 78$

$2(x+y)+3y = 78$

Modelo general

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{mcd(a,b)}t \\ y = y_0 - \frac{a}{mcd(a,b)}t \end{cases}$$

Solución particular $x_0 = 9 \quad y_0 = 12$

$x = 9 + \frac{5}{1}t \qquad x = 9 + 5t$

$y = 12 - \frac{2}{1}t \qquad y = 12 - 2t$

Figura 4.148. Ejemplo de la resolución de problemas con ecuaciones diofánticas lineales

De manera concreta podemos decir que los resultados más importantes encontrados en la observación empirica de este trabajo de tesis son:

- Los estudiantes llegan y transitan el bachillerato con un bajo nivel acerca del entendimiento de la estructura de las ecuaciones y con un sentido estructural poco desarrollado. Esto es, que los estudiantes participantes mostraban un proceder más operacional que estructural, probablemente debido a las decisiones pedagógicas de sus profesores anteriores como lo señalan (Hoch 2003, Mason et al., 2009 y Skemp 1976).

- Los estudiantes tienen como concepción primaria que las ecuaciones sólo tienen una solución. Como lo señala Panizza, M. & Sadovsky, P. & Sessa, C. (1999), la ecuación lineal con dos incógnitas no es reconocida por los alumnos como un objeto que define un conjunto de infinitos pares de números.

- En los estudiantes prevalece lo aritmético antes que lo álgebraico y lo símbolico antes que lo gráfico. Esto lo podemos afirmar como resultado del análisis explícitamente de los efectos de las tareas concretas en términos de espacios de variación multidimensional y en conexión explícita con el conocimiento previo de los alumnos. Según Mayer (1997), los estudiantes también pueden obtener mejores resultados cuando aprenden con representaciones múltiples, sin embargo, hay pruebas prácticas y empíricas de que no siempre esto se implementa en la enseñanza convencional en el aula, como evidencian algunas de las respuestas obtenidas en este trabajo.

- El número de elementos, el contenido y la manipulaciones algebraicas, generan una carga cognitiva en las tareas. Brünken y Leutner, (2001) señalan que si la carga cognitiva es demasiado pesada, los estudiantes tienden a dividir su atención (efecto de atención dividida) y se centran en una sola forma de representación. Esto afecta en la focalización de los aspectos y características críticas del objeto de aprendizaje.

Y finalmente, algo que surgió a raiz de la suspensión de las clases por la situación de pandemia por COVID-19 y el confinamiento sanitario, es que para que los estudiantes logren discernir con exitó el objeto de aprendizaje, además de focalizar su atención en los aspectos y características críticas como lo señala Marton (2015), es fundamental el aprendizaje en acción que en palabras de Marton (2015) constituye la interacción entre los alumnos y el profesor o entre los alumnos y ellos mismos, y denota lo que es posible aprender en una situación particular dentro del aula escolar.

Es decir, un objeto de aprendizaje en acción denota un conjunto de experiencias que ofrece la interacción, que en este caso no se pudo llevar acabo y que es claro que tuvó consecuencias en el aprendizaje de los estudiantes.

CAPITULO V. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

En este apartado se enuncian las conclusiones del presente trabajo de tesis, misma que tuvo como eje central la exploración de la enseñanza de resolución en números enteros de ecuaciones diofánticas lineales con dos incógnitas (EDL) desde la teoría de la variación, a través de cinco unidades de discernimiento (Leung, 2012), las cuales implicaron episodios de enseñanza.

La aportación de este estudio es la propuesta y puesta a prueba de las tareas de enseñanza-aprendizaje, con base en la Teoría de la Variación (Marton, 2015) en ambientes híbridos, que fomentaron la focalización de los aspectos y cracterísticas críticas de las ecuaciones diofánticas lineales con dos incógnitas y como consecuencia el desarrollo del sentido estructural en estudiantes de bachillerato general, las cuales tuvieron un efecto positivo, como se presentó en el análisis y discusión de los resultados (ver capítulo IV).

La variación, como medio, puede ser una forma poderosa de ayudar a los estudiantes a desarrollar el pensamiento matemático, independientemente de cómo el contenido y el problema sean "variados" por el profesor. Además, también muestra que, para llevar a cabo mejor la enseñanza del álgebra con variación, las lecciones deben estar bien estructuradas y la variación debe ser elegida cuidadosamente.

Para comprender plenamente las dificultades de aprendizaje de los alumnos, los profesores deben adoptar un enfoque de indagación y considerarse a sí mismos como aprendices. Si todos los profesores se toman en serio las formas de ver el objeto de aprendizaje de los alumnos y adoptan un enfoque de investigación-acción para identificar las características críticas del objeto de aprendizaje, los alumnos tendrán mejores oportunidades de aprender y, para algunos alumnos, el aprendizaje que antes era imposible puede llegar a ser posible.

5.1 CONSIDERACIONES EN EL DISEÑO DE LAS TAREAS DE APRENDIZAJE

El proceso secuencial del diseño de las tareas de la resolución en números enteros de las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas en este trabajo de tesis nos enseñó que, a fin de preservar el papel central del trabajo "conceptual" (en nuestro caso, las propiedades y conexiones de los conceptos básicos de las propiedades de los números enteros y del álgebra), las tareas no debería sobrecargarse con elementos que pueden requerir "resoluciones complejas" mediante técnicas matemáticas (en nuestro caso, por manipulaciones y transformaciones algebraicas).

También discernimos que es beneficioso incluir una pequeña cantidad de elementos matemáticamente desafiantes, para que puedan crear una sensación de sorpresa para los estudiantes y servir de base para la comparación con otros elementos más estándar o convencionales (en nuestro caso, los diferentes procedimientos matemáticos y la representación gráfica de las ecuaciones cumplieron este rol).

La secuencia de las diferentes tareas y el aumento de la complejidad de las mismas, se formula como el proverbio "*a veces menos es más*" donde "*menos*" se refiere a: (1) al número de características críticas para su focalización y (2) el número de representaciones diferentes, y el "*más*", a las experiencias de focalización de los estudiantes.

Primero, observamos que la reducción en el número de características críticas para focalizar el objeto de aprendizaje enriqueció el espacio de variación vivido y evocó diferentes tipos de experiencias al ordenar las mismas características críticas.

En segundo lugar, observamos que la inclusión de las representaciones gráficas y simbólicas del conjunto de características críticas mejoró la experiencia de buscar propiedades estructurales y conexiones entre los conceptos convencionalmente representados.

Por otro lado, concluimos que los estudiantes tienden a tomar en la resolución de las tareas decisiones complicadas (y más significativas) partir de decisiones fáciles e inmediatas, por ejemplo, a partir de focalizar su atención en el cociente c/M.C.D de (a,b) para determinar una ecuación de primer grado con dos incógnitas tiene o no soluciones enteras.

Es decir, las decisiones fáciles de tomar pueden sobre-sombrear o apoyar el objeto de aprendizaje previsto; por lo tanto, se debe hacer un esfuerzo para focalizar su atención y organizar las decisiones de los estudiantes, de modo que sirvan como puntos de referencia en el camino hacia decisiones más significativas.

Dado que en prácticamente cualquier versión de las tareas que podamos pensar, los estudiantes probablemente siempre comenzarían considerando algunas características críticas fáciles de ver o de discernir.

5.2 CONCLUSIONES

Esta sección tiene el fin de enunciar las conclusiones del presente trabajo de tesis, misma que tuvo como eje central la exploración de la enseñanza de resolución en números enteros de ecuaciones diofánticas lineales con dos incógnitas (EDL) desde la teoría de la variación, a través de cinco unidades de discernimiento (Leung, 2012), las cuales implicaron 10 episodios de enseñanza.

La aportación de este estudio es la propuesta, puesta a prueba y el análisis de lo realizado por los estudiantes alrededor de las tareas de enseñanza-aprendizaje sobre la resolución de ecuaciones diofánticas lineales con dos incógnitas con base en la Teoría de la Variación (Marton, 2015) en ambientes híbridos.

Las tareas fomentaron la focalización de los aspectos y características críticas de las ecuaciones diofánticas lineales con dos incógnitas y como consecuencia el desarrollo del sentido estructural en estudiantes de bachillerato general. Dichas tareas tuvieron un efecto positivo en el aprendizaje de las ecuaciones diofánticas lineales, como se presentó en el análisis y discusión de los resultados (ver capítulo IV).

Así mismo, todo lo elaborado por los alumnos en las hojas de trabajo (aprendizaje vivido) fue objeto de análisis y clasificación. En concreto, utilizamos la taxonomía SOLO (Biggs y Collis, 1982), para analizar y reflexionar sobre los resultados observables del aprendizaje de los estudiantes que los sitúa en niveles de complejidad cognitiva ascendente (preestructural, uniestructural, multiestructural, relacional, abstracta ampliada) que van de un conocimiento superficial a un conocimiento más profundo.

En este trabajo los primeros cuatro niveles nos sirvieron para clasificar las respuestas de los estudiantes, con el fin de identificar refinamientos y validación de concepciones sobre el objeto de estudio, logradas o incluidas en el aprendizaje previsto.

La variación, como medio, puede ser una forma poderosa de ayudar a los estudiantes a desarrollar el pensamiento matemático, independientemente de cómo sean "variados" por el profesor el contenido y el problema. Además, el análisis lo elaborado por los estudiantes muestra que, para llevar a cabo mejor la enseñanza del álgebra con variación, las lecciones deben estar bien estructuradas y la variación debe ser elegida cuidadosamente.

Para comprender plenamente las dificultades de aprendizaje de los alumnos, los profesores deben adoptar un enfoque de indagación y considerarse a sí mismos como aprendices. Si todos los profesores se toman en serio las formas de ver el objeto de aprendizaje desde la perspectiva de los alumnos y adoptan un enfoque de investigación-acción para identificar las características críticas del objeto de aprendizaje, los alumnos tendrán mejores oportunidades de aprender y, para algunos alumnos, el aprendizaje que antes era imposible puede llegar a ser posible.

5.3 CONSIDERACIONES FINALES

Este trabajo de tesis corrobora y brinda evidencia empírica de la presencia de un sentido estructural poco desarrollado en probablemente en todos los estudiantes del bachillerato, lo que sugiere la necesidad de que el sentido estructural sea promovido desde las primeras etapas de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas; con actividades que tengan un diseño con una base similar a la presentada en este trabajo, en la que se tomen en cuenta los errores comunes que cometen los estudiantes, las características críticas propias de los temas algebraicos y la determinación de sus aspectos, así como los contrastes y los patrones de variación e invariación necesarios para tematizarlos, como propone la Teoría de la Variación (Marton, 2015).

El desarrollo del sentido estructural debe continuar durante toda la formación académica de los estudiantes, para que éstos aprovechen las ventajas que ofrece el adquirir este tipo de sentido a lo largo de su formación, para que lleguen mejor preparados a la universidad.

Con el diseño e implementación de las tareas de enseñanza-aprendizaje basadas en la Teoría de la Variación (Marton, 2015), se logró un avance significativamente mayor en cuanto a focalización de aspectos y características críticas de las ecuaciones diofánticas lineales con dos incógnitas, en particular los estudiantes lograron discernir:

1. Los coeficientes en una **ecuación diofántica lineal** con dos incógnitas
2. La existencia de soluciones enteras (el papel del M.C.D. de (a,b))
3. Como encontrar una solución particular (en el caso de que la haya)
4. El número de soluciones enteras que tiene una ecuación *(usando un modelo general)*

Los resultados obtenidos después de la intervención realizada son congruentes con lo que se ha reportado sobre lo complejo y tardado que resulta desarrollar el sentido estructural en los estudiantes, ya que requiere abstraer las relaciones dentro de una expresión y entre varias expresiones, como concluyeron Banerjee y Subramaniam (2005). Kieran (2018) coincide en que desarrollar la capacidad de ver la estructura es un proceso largo que necesita reinventarse con cada nuevo objeto matemático que se observa.

Por otro lado, también se logró que los estudiantes modificaran la concepción primaria de que las ecuaciones en estudio sólo tienen una solución. Como lo señala Panizza et al. (1999), la ecuación lineal con dos variables no es reconocida por los alumnos como un objeto que define un conjunto infinito de pares de números.

Este trabajo de tesis ha demostrado que la teoría de la variación es compatible con muchos principios de enseñanza que se promueven comúnmente. Los maestros pueden tener diferentes estilos, enfoques y personalidades de enseñanza, y las características de los estudiantes en cada clase también son diferentes, pero es posible que los mismos patrones de variación identificados puedan manifestarse mediante una variedad de estrategias de enseñanza y actividades de aprendizaje.

El uso de la Teoría de la Variación como principio rector del diseño pedagógico asegura que los docentes empleen una estrategia de enseñanza eficaz y tareas que se centren en el objeto de aprendizaje y sus aspectos críticos.

En las tareas usadas en la intervención con los estudiantes se incluyeron patrones de variación (contraste, separación, generalización y fusión) y andamiajes cuidadosamente planeados, los cuales mostraron ser significativamente más útiles para integrar intencionadamente el desarrollo del sentido estructural dentro del aprendizaje de la resolución en números enteros de las ecuaciones diofánticas lineales con dos incógnitas, en comparación con actividades tradicionales que no tienen ese diseño.

Aunque los resultados fueron obtenidos al trabajar con ecuaciones diofánticas lineales y sus prerequisitos, una hipótesis que se puede avanzar es que se pueden conseguirse resultados similares o mejores al elaborarse y probarse actividades con diseños semejantes a los usados en esta investigación, para diversos temas algebraicos. Por lo que, el aporte a la matemática educativa abarcaría el álgebra en general, no sólo las ecuaciones mencionadas.

Por otro lado, los estudiantes pueden ser ayudados en el aprendizaje del álgebra, si los profesores implementan apropiadamente la enseñanza con variación adoptando diferentes tipos de variación y niveles de representación de acuerdo con los objetivos de aprendizaje del álgebra, construyendo sobre el conocimiento y la habilidad existente de los estudiantes.

De acuerdo con Li (2011), se cree que los conceptos algebraicos se caracterizan por su funcionamiento concreto, su estructura abstracta y su amplia aplicación, y viceversa, por lo que el aprendizaje de los conceptos algebraicos debe centrarse en los aspectos operativos, estructurales y de aplicación.

En la enseñanza de las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas utilizando la teoría de la variación, podemos destacar estos pasos. En una primera fase, la enseñanza debe ser diseñada para promover la formación y asimilación de conceptos de los estudiantes a través de la variación, para obtener una formación inicial del concepto de ecuación.

Enseguida, se debe apoyar a los estudiantes en entender la naturaleza abstracta del concepto de ecuación. Finalmente, es necesario avanzar en las conexiones del concepto de ecuación dentro del sistema de conceptos algebraicos, para aclarar su posición y función en este sistema.

En una segunda fase, se pide a los alumnos que apliquen el concepto de ecuación para resolver problemas con variación sistémica. Esto conduce a hacer del concepto de ecuación un objeto operativo. Lo que permite experimentar la función estructural y enriquecer los pensamientos del concepto de ecuación a través de la operación y la reflexión de la formación del concepto de ecuación. Por lo tanto, al enseñar el concepto de ecuación con variación, es necesario construir la estructura de las componentes de una ecuación y desarrollar la capacidad de aplicación de este concepto y el pensamiento algebraico de los estudiantes.

La introducción y comprensión de los conceptos algebraicos, requiere proporcionar a los estudiantes varios ejemplos de diferentes tipos (homogéneos o heterogéneos) y explicaciones verbales, incluso con gráficos y conexiones entre símbolos para aumentar las representaciones algebraicas de los estudiantes. El número de ejemplos de cada tipo está sujeto al cambio de objetos didácticos, contenidos y entorno.

Estos ejemplos se establecen para ayudar a los estudiantes con su clasificación gradual, inducción, abstracción, comprensión profunda y aplicación de las variaciones. Por ejemplo, la introducción al concepto de ecuación necesita algunos ejemplos con ligeras diferencias en la forma, lo que facilita a los estudiantes identificar, inducir y resumir, en lugar de consumir demasiada energía de los estudiantes al estudiar a través de ejemplos. De hecho, el profesor debería ser flexible a la hora de decidir la cantidad y dificultad de los ejemplos según la teoría de la variación, dependiendo del nivel real de comprensión de los estudiantes para animarlos a lograr representaciones algebraicas relativamente abstractas en un futuro próximo.

Concluimos que el presente estudio es novedoso en dos aspectos. En primer lugar, analiza explícitamente los efectos de focalizar los aspectos y características críticas de tareas concretas (resolución en números enteros de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas) en términos de espacios de variación multidimensional y en conexión explícita con el conocimiento previo de los estudiantes.

Esta conexión aún no se ha analizado en estudios basados en la teoría de la variación del aprendizaje. En segundo lugar, en este estudio se intentó revelar no sólo el potencial de aprendizaje de las tareas, como han hecho un número considerable de estudios, sino también las experiencias reales de los estudiantes con diferentes versiones de tareas, lo que aumentó su complejidad, y el nivel de detalle fue más fino en relación con la toma de decisiones.

Y finalmente, algo que surgió a raiz de la suspensión de las clases por la situación de pandemia por COVID-19 y el confinamiento sanitario, es que para que los estudiantes logren discernir con exito el objeto de aprendizaje, además de focalizar su atención en los aspectos y características críticas como lo señala Marton (2015), es fundamental el aprendizaje en acción, lo que en palabras de Marton (2015) esta constituido por la interacción entre los alumnos y el profesor o entre los alumnos y ellos mismos, y denota lo que es posible aprender en una situación particular dentro del aula escolar.

Es decir, un objeto de aprendizaje en acción denota un conjunto de experiencias que ofrece la interacción, lo que en este caso esta bastante limitado, sin duda es más facil obtener evidencias de la interacción en las clases presenciales o teniendo a la mano otros medios, como los electrónicos. Por lo que, es probable que futuras investigaciones similares, estando sujetas a otras condiciones contribuyan a evaluar las fortalezas y fallas de este estudio, en aras de consolidar los hallazgos de la investigación que aquí sean presentado.

REFERENCIAS

Al-Murani, T. (2007). The deliberate use of variation to teach algebra: a realistic variation study. (Doctoral thesis). Oxford: University of Oxford.

Ascencio Gonzalez, Rebeca, & Eccius-Wellmann, Cristina. (2019). Desarrollo del sentido estructural en alumnos universitarios mediante el uso de la Teoría de la Variación en el manejo de expresiones algebraicas racionales. *Educación matemática*, *31*(2), 161-194. Epub 15 de junio de 2020.https://doi.org/10.24844/em3102.07

Askew, M., Brown, M., Rhodes, V., Wiliam, D., & Johnson, D. (1997). *Effective teachers of numeracy: Report of a study carried out for the Teacher Training Agency*. London: King's College, University of London.

Ávila, Alicia (2009), "¿Del cálculo oral al cálculo escrito? Constataciones a partir de una situación de proporcionalidad", en Judith Kalman y Brian Street (coords), *Lectura, escritura y matemáticas como prácticas sociales*, México, Siglo XXI/Centro de Cooperación Regional para la Educación de Adultos en América Latina y el Caribe (CREFAL), pp. 223-241.

Ausubel, D. P. (1968). *Educational Psychology: A Cognitive View*. New York: Holt, Rinehart & Winston.

Balcheff, N. (1988). Aspects of Proof in Pupils' Practice of School Mathematics. En D. Pimm (Ed.), *Mathematics, Teachers and Children* (pp. 216-235). London: Hodder y Stoughton.

Behr, M., Erlwanger, S., & Nichols, E. (1980). How children view the equal sign. *Mathematics Teaching*, *92*, 13–15.

Bell, A. W. (1976). "A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations". *Educational Studies in Mathematics*, 7, 23-40.

Biggs J. B. and Collis, K. F. (1982). *Evaluating the quality of Learning. The SOLO Taxonomy (Structure of the Observed Learning Outcome).* Academic Press, Inc.

Biggs, J.B., & Collis, K.F. (1991). Multimodal learning and the quality of intelligent behaviors. In H. Rowe (Ed.) Intelligence: *Reconceptualization and measurement*. Hillsdale, N.J.: Laurence Erlbaum.

Biggs, J. (2006), *Calidad del aprendizaje universitario*, Madrid: Editorial Narcea.

Booth, L. R.: 1981, 'Strategies and errors in generalized arithmetic', in C. Comiti and G. Vergnaud (eds.), *Proceedings of the Fifth International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, France pp. 140–146.

Booth, L. R (1982). Ordering your operations. *Mathematics in School 11* (3), 5–6.

Booth, L. R.: 1984, *Algebra: Children's Strategies and Errors*. Windsor, UK: NFER- Nelson.

Booth, L. R.: 1988, 'Children's difficulties in beginning algebra', in A. F. Coxford (ed.), *The Ideas of Algebra. K-12*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, pp. 20–32.

Brownell, W.A. (1935). Psychological considerations in the learning and teaching of arithmetic. En *The teaching of arithmetic: Tenth yearbook of NCTM*. New York: Columbia University Press.

Block, D. (2007). La apropiación de innovaciones para la enseñanza de las matemáticas por maestros de educación primaria. Revista Mexicana de Investigación Educativa, 12(33), 731-762.

Brünken, R., & Leutner, D. (2001). Aufmerksamkeitsverteilung oder Aufmerksamkeitsfokussierung? Empirische Ergebnisse zur "Split-Attention-Hypothese" beim Lernen mit Multimedia. *Unterrichtswissenschaft* (29), 357–366.

Burgell, F., & Ochoviet, C. (2015). Significados del signo de igual y aspectos de su enseñanza. Un estudio realizado con estudiantes de primer año de enseñanza secundaria y sus profesores. *Enseñanza de las Ciencias*, 33(3), 77. doi:10.5565/rev/ensciencias.1561.

Cai, J. & Nie, B. (2007). Problem solving in Chinese mathematics education: research and practice. ZDM–The International Journal on Mathematics Education, 39(5-6), 459–473.

Carpenter, T. P. & Franke, M. L. (2001). Developing algebraic reasoning in the elementary school: generalization and proof. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference. The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (pp.155-162). Melbourne, Australia: University of Melbourne.

Castells, M. (1999). La era de la información: *economía, sociedad y cultura* (Vol. 1). Madrid: Alianza editorial.

Castillo, D. J. y Carrillo, G. M. M. (2012). Asimilación de contenidos y aprendizaje mediante el uso de videotutoriales. *Enseñanza & Teaching,* 30(2), 63-79.

Castro Martínez, E., Rico Romero, L. y Romero Albaladejo, I. (1997).Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. *Enseñanza de las Ciencias*, 1997, 15(3), 361-371.

Cerdán, F. (2010). Las igualdades incorrectas producidas en el proceso de traducción algebraico: un catálogo de errores. *PNA 4* (3), 99–110.

Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics, 24,* 359-387.

Cheng, E. W. (2016). Learning through the variation theory: a case study. International Journal of Teaching and Learning in Higher Education, 28(2), 283– 292. Recuperado de https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1111116.pdf Education Research Group of Australasia (pp. 433–440). Singapore: MERGA.

Churchill, D. (2007). Towards a useful classification of learning objects. Education Technology Research and Development, 55, 479–497

Churchill, D. (2011). Conceptual model learning objects and design recommendations for small screens. Educational Technology & Society, 14(1), 203–216.

Churchill, D. (2013). Conceptual model design and learning uses. Interactive Learning Environments, 21(1), 54–67.

Churchill, D. (2014). Presentation design for “conceptual model” learning objects. British Journal of Education Technology, 45 (1), 136-148

Churchill, D., & Hedberg, G. (2008). Learning Object Design Considerations for Small-Screen Handheld Devices. Computers & Education, 50(3), 881-893.

Clark, R., Kirschner, P., & Sweller, J. (2012). The case for fully-guided instruction. *American Educator 36*(1), 6-11.

Cobb, Paul, Yackel, Ema, & Wood, Terry. (1993). Learning mathematics: Multiple perspectives theoretical orientation. In T. Wood, P. Cobb, E. Yackel, & D. Dillon (Eds.), *Rethinking e1ementar.vschool mathematics: Insights and issues. Journal for Research in Mathematics Education Monograph Series*. Number 6 pp. 21-32. Reston, VA: National Council of Teach- ers of Mathematics.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, 32(1), 9–13.

Cobb, P., & Steffe, L. P. (1983). The constructivist researcher as teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education*, *14*, 83–94.

Cochran-Smith, M., & Lytle, S.L. (2001). Beyond certainty: taking an inquiry stance on practice. In A. Lieberman, & L. Miller (Eds.), *Teachers caught in the action: professional development that matters* (pp. 45-58). New York: Teachers College Press.

Coe, R. y Ruthven, K. (1994). Proof practices and constructs of advanced mathematical students. *British Educational Research Journal, 20* (1), 41-53.

Davis, B. (2016, November 28). Keynote speech presented at The Art and Science of Math Education, Carleton University, Ottawa, Ontario, Canada.

Demby, A. (1997). Algebraic procedures used by 13-to-15-years-olds. *Educational Studies in Mathematics 33(1),* 45-70. DOI: 10.1023/A:10029633922234

Dienes, Z. (1960). Building up mathematics. London: Hutchinson Educational.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 101–131.

Dormolen, J. (1977). “Learning to understand what giving a proof really means”. *Educational Studies in Mathematics*, 8, 27-34.

Ekawati, R., & Lin, F. L. (2014). Designing Teacher Professional Development For Mathematics Teaching with Variation Theory. *Journal on Mathematics Education (JME)*, *5*(2),127-137.

Ekdahl, A.-L., & Runesson, U. (2015). Teachers' responses to incorrect answers on missing number problems in South Africa. In X. Sun, B. Kabur, & J. Novotná (Eds.), The twenty-third ICMI Study: Primary Mathematics Study on Whole Numbers. Macau, China, June 3–7.

Fernández, M. S.; Díaz, J. J.; Del Carmen, S. y Recio, C. E. (2013). El video tutorial como alternativa didáctica en el área de matemáticas. Uso de los recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/4582/1/SaucedoElvideoALME2013.pdf

Fernandez T. (2014). Secuencia Didáctica: Ecuaciones diofánticas y congruencias: sus relaciones. Consultada en: https://es.slideshare.net/terfer/secuencia-didctica-ecuaciones diofanticas congruencias. ***[fecha de Consulta 12 de Agosto de 2020].***

Fischbein, E. (1982), "Intuition and Proof", For the Learning of Mathematics, vol. 3, núm. 2.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. New York: Kluwer Academic/Plenum Publishers.

Gentner, D., & Markman, A. B. (1994). Structural alignment in com- parison: No difference without similarity. *Psychological science, 5*(3), 152–158.

Gentner, D. (2005). The development of relational category knowledge. In D. H. Rakison & L. Gershkoff-Stowe (Eds.), *Building object categories in developmental time* (pp. 245–275). Mahwah, NH: Erlbaum.

Gibson, J. J., & Gibson, E. J. (1955). Perceptual learning: Differentiation or enrichment? *Psychological Review, 62*(1), 32–41.

Goldin, G. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 137–165.

Goldenberg, P., & Mason, J. (2008). Shedding light on and with examples spaces. *Educational Studies in Mathematics, 69*(2), 183–194.

Gracián, E. (2013). Ecuaciones diofánticas y el teorema de Fermat. http://www.enriquegracian.com/articulos/ecuaciones-diofanticas-y-el-teorema-de-fermat Consultado 28/07/2013.

Gray, E. M. & Tall, D. O. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic. Journal for Research in Mathematics Education 26 (2), 115-141.

Greeno, J. G. 1982, *A Cognitive Learning Analysis of Algebra*. Paper presented at the AERA, Boston, MA.

Greeno, James & Collins, Allan. (2008). The Final Report of the National Mathematics Advisory Panel. *Educational Researcher*. 37. 618-623. 10.3102/0013189X08327997.

Große, C. S., & Renkl, A. (2007). Finding and fixing errors in worked examples: Can this foster learning outcomes? *Learning and Instruction, 17*(6), 612–634.

Guelfond, A. O. (1979). *Resolución de Ecuaciones en Números Enteros*. Moscú: Editorial Mir, Colección Lecciones Populares de Matemáticas. ISBN no posee.

Guo, J.-P., Pang, M. F., Yang, L.-Y., & Ding, Y. (2012). Learning from comparing multiple examples: On the dilemma of "similar" or "different". *Educational Psychology Review, 24*(2), 251–269.

Gu, M. (1999). *The Grand Educational Dictionary*. Shanghai: Shanghai Education Publishing House.

Gu, L., Huang, R., & Marton, F. (2004). Teaching with variation: A Chinese way of promoting effective mathematics learning. In L. Fan, N. Y. Wong, J. Cai, & S. Li (Eds.), *How Chinese learn mathematics: Perspectives from insiders*. Singapore: World Scientific Publishing.

Häggström, J. (2008). Teaching systems of linear equations in Sweden and China: What is made possible to learn? (Doctoral thesis). University of Gothenburg, Göteborg, Sweden. Recuperado de https://gupea.ub.gu.se/handle/2077/17286

Harel, G. (2013). Dnr-based curricula: The case of complex numbers. *Journal of Humanistic Mathematics*, 3(2), 2–61. doi:10.5642/jhummath.201302.03.

Harel, G. y Sowder, L. (1998). "Students' proof schemes: Results from exploratory studies". En A. Schonfeld, J. Kaput y E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III*. (Issues in Mathematics Education, Volume 7, pp. 234-282), American Mathematical Society.

Harel, G., & Soto, O. (2017). *Structural reasoning. International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 3(1), 225–242. doi:10.1007/s40753-016-0041-2

Hatala, R. M., Brooks, L. R., & Norman, G. R. (2003). Practice makes perfect: The critical role of mixed practice in aquisition of ECG interpretation skills. *Advances in Health Sciences Education, 8*(1), 17–26.

Heid, M. K. (1995). *Algebra in a Technological World. Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics Addenda Series, Grades 9-12*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Hernández, F., Martinez, P., Dafonseca, P., y Rubio, M. (2005). *Aprendizaje, competencias y rendimiento en Educación Superior*. Madrid: La Muralla.

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *27*(1), 59–78.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics (pp.1-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hoch, M., & Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: The effect of brackets. En M. Johnsen Hoines & A. Berit Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 49–56). Bergen, Norway.

Hoch, M. & Dreyfus, T. (2005). Students' difficulties with applying a familiar formula in an unfamiliar context. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 145– 152). Melbourne, Australia: University of Melbourne.

Hoch, M., & Dreyfus, T. (2006). Structure sense versus manipulation skills: an unexpected result. En J Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 305–312). Prague, Czech Republic.

Hodges, C., Moore, S., Lockee, B., Trust, T., & Bond, A. (2020). The difference between emergency remote teaching and online learning. *Educause Review*, *27*, 1–12. https://er.educause.edu/articles/2020/3/the-difference-between-emergency-remote-teaching-and-online-learning

Hoch, M. (2003). Structure sense. En M. A. Mariotti (Ed.), *Proceedings of the 3rd Conference for European Research in Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 1–3). Bellaria, Italia.

Hoch, M., & Dreyfus, T. (2007). Recognising an algebraic structure. En D. Pitta, P. Philipou, & G. Philipou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of European Research in Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 436–445). Larnaca, Cyprus.

Hoyles, C., Noss, R., Vahey, P., & Roschelle, J. (2013). Cornerstone mathematics: designing digital technology for teacher adaptation and scaling. *ZDM*, 45(7), 1057-1070.

Hoyos, V., Navarro, E., & Raggi, VJ. (2020). Hybrid environments of learning: potential for student collaboration and teacher efficiency. En Ana Donevska-Todorova, Eleonora Faggiano, Jana Trgalova, Zsolt Lavicza, Robert Weinhandl, et al.. Proceedings of the Tenth ERME Topic Conference (ETC 10) on Mathematics Education in the Digital Age (MEDA), 16-18 September 2020 in Linz, Austria. Sep 2020, Linz, Austria. 2020. hal-02932218

Huang, R., Gong, Z., & Han, X. (2016). Implementing mathematics teaching that promotes students' understanding through theory- driven lesson study. *ZDM, 48*(4), 425–439.

Huang, R. & Li, Y. (Eds.). (2017). Teaching and Learning Mathematics through Variation. Confusian Heritage Meets Western Theories. United States: Sense Publishers.

INEE (2017). *La educación obligatoria en México. Informe 2017*. México: INEE.

INEE (s.f). Planea. Resultados nacionales 2017. Educación Media Superior. *Lenguaje y Comunicación, Matemáticas*. Autor. Recuperado de http://publicaciones.inee.edu.mx/buscadorPub/P2/A/328/P2A328.pdf

Jamaliah Kamal (2001). A case study of mathematics teaching and the use of textbook in a rural primary school in Malaysia. Unpublished PhD thesis, University of East Anglia, UK.

Jaworski, B. (1994). Investigating mathematics teaching: A constructivist enquiry. London, UK: The Falmer Press.

Jing Jing, Ting, & Tarmizi, Rohani Ahmad, & Abu Bakar, Kamariah, & Aralas, Dalia (2017). The Adoption of Variation Theory in the Classroom: Effect on Students' Algebraic Achievement and Motivation to Learn. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 15(2),307-325. [fecha de Consulta 9 de Junio de 2020]. ISSN: Disponible en: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=2931/293152484004

Kieran, C.: 1988, 'Two different approaches among algebra learners', in A. F. Coxford (ed.), *The Ideas of Algebra. K-12*, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA; Lawence Erlbaum, Hillsdale, NJ, pp. 91–96.

Kieran, C. y Filloy Yague, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias* 7(3), pp. 229-240. Barcelona.

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. In S. Wanger & C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (Vol. 4, pp. 33–59). Reston, VA.: Lawrence Erlbaum Associates y NCTM.

Kieran, C. (1991). A procedural–structural perspective on Algebra Research. In F. Furinghetti (Ed), *Proceedings of the 15th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 245–253). Assisi, Italy: PME Program Committee.

Kieran, C.: 1992, 'The learning and teaching of algebra', in D. A. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Macmillan, New York: pp. 390– 419.

Kirshner, D. 1989, 'The visual syntax of algebra', *Journal for Research in Mathematics Education* 20, 274–287.

Kirshner, D. & Awtry, T. (2004). The visual salience of algebraic transformations. *Journal for Research in Mathematics Education* 35 (4), 224-257.

Kelly, A.E. y Lesh, R.A. (2000). *Handbook of research de- sign in mathematics and science education.* Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Kornell, N., & Bjork, R. A. (2008). Learning concepts and categories. *Psychological Science, 19*(6), 585–592.

Kullberg, A. (2012). Students' open dimensions of variation. *International Journal for Lesson and Learning Studies, 1*(2), 168–181.

Kullberg, A., Runesson Kempe, U., & Marton, F. (2017). What is made possible to learn when using the variation theory of learning in teaching mathematics? *International Journal on Mathematics Education*, 49(4), 559–569.

Lai, M. Y. & Murray, S. (2012). Teaching with procedural variation: a chinese way of promoting deep understanding of mathematics. International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 1–25.

Leung, A. (2010). Empowering learning with rich mathematical experience: reflections on a primary lesson on area and perimeter, *International Journal for Mathematics Teaching and Learning* [e-Journal]. Retrieved April 1, 2010, from http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/leung.pdf

Leung, A. (2012). Variation and mathematics pedagogy. In J. Dindyal, L.P. Cheng, & S.F. Ng (Eds.), *Proceedings of the 35th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 433–440). Singapore: MERGA. Available from http://www.merga.net.au/documents/Leung_2012_MERGA_35.pdf

Li, J., Peng, A. & Song, N. (2011). Teaching algebraic equations with variation in chinese classroom. En J. Cai & E. Knuth (Eds.), Early Algebraization. A Global Dialogue from Multiple Perspectives (pp. 529–556). United States: Springer.

Liebenberg, R., Sasman, M. & Olivier, A. (1999). From Numerical Equivalence To Algebraic Equivalence. *Mathematics Learning and Teaching Initiative (MALATI). Proceedings of the 1th Annual Congress of the Association for Mathematics Education of South Africa*. (Vol.2, pp. 1173-183). Por Elizabetn, South Africa: Port Elizabeth Technikon.

Lim, C. S. (2007). Characteristics of mathematics teaching in Shanghai, China: through the lens of a malaysian. Mathematics Education Research Journal, 19(1), 77–88.

Linchevski, L. & Herscovics, D. (1994). Cognitive obstacles in pre-algebra. In J. P. Ponte & J. F. Martos (Eds), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education.* (Vol. 3, pp. 176-183). Lisboa, Portugal: Universidad de Lisboa.

Linchevski, L., & Herscovics, N. (1996). Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: Operating on the unknown in the context of equations. *Educational Studies in Mathematics*, *30*, 39–65.

Linchevski, L., and Livneh, D. (1999). Structure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts, *Educational Studies in Mathematics*, 40, 2, 173- 196.

Linchevski, L. and Vinner, S.: 1990, 'Embedded figures and structures of algebraic expressions', in G. Booker, P. Cobb and T. N. Mendicuti (eds.), *Proceedings of the Fourteenth International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Mexico City, Mexico, 2, pp. 85–93.

Ling, M.L. (2012). *Variation theory and the improvement of teaching and learning*. Gothenburg, Sweden: Acta Universitatis Gothoburgensis. Available from http:// gupea.ub.gu.se/handle/2077/29645

Ling, L. M., & Marton, F. (2012). Towards a science of the art of teaching: Using variation theory as a guiding principle of pedagogical design. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 1(1), 7–22.

Lins, R. L. 1990, 'A framework of understanding what algebraic thinking is', in G. Booker, P. Cobb and T. N. Mendicuti (eds.), *Proceedings of the Fourteenth international Conference of the international Group for the Psychology of Mathematics Education*, Mexico City, Mexico, 2, pp. 93–101.

Lo, M. L. (2012). *Variation theory and the improvement of teaching and learning*. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

MacGregor, M. (1996). Aspectos curriculares en las materias aritmética y álgebra. *UNO Revista de Latinoamericana de Investigación en Mtemática Educativa 9, 65-69.*

Márquez, P. (1995). *Software educativo; guía de uso y metodología de diseño*. Barcelona: EMAestudio.

Marton, F. (2009, December). *Sameness and difference in learning*. Paper presented at the Swedish Research Links Symposium on Phenomenography and Variation Theory, University of Hong Kong, Hong Kong.

Marton, F., & Booth, S. (1997). *Learning and awareness*. Mahwah N.J.: Lawrence Erlbaum.

Marton, F. & Pang, M.F. (2006). On some necessary conditions of learning. *The Journal of the Learning Sciences*, 15, 193-220. https://doi.org/10.1207/s15327809jls1502_2

Marton, F., & Pang, M. F. (2013). Meanings are acquired from experiencing differences against a background of sameness, rather than from experiencing sameness against a background of difference: Putting a conjecture to the test by embedding it in a pedagogical tool. *Frontline Learning Research*, *1*(1), 24-41. https://doi.org/10.14786/flr.v1i1.16

Marton, F., Runesson, U. and Tsui, A.B.M. (2004). The space of learning. In F. Marton & A.B.M. Tsui (Eds), *Classroom Discourse and the Space of Learning* (pp.3-40). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, INC, Publishers.

Marton, F., & Tsui, A.B.M. (2004). *Classroom discourse and the space of learning*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Marton, F. (2015). *Necessary conditions of learning*. New York, NY: Routledge.

Mason, J., Stephens, M., & Watson, A. (2009). Appreciating mathematical structure for all. *Mathematics Education Research Journal*, 21(2), 10–32.

Mason, J., Burton, L. y Stacey, K. (1982). *Thinking Mathematically*. London: Addison-Wesley.

Martin,W. G., & Harel,G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. Journal for Researching Mathematics Education, 20, 41-51.

Martín, R. B. (2013). Contextos de aprendizaje. Formales, no formales e informales. IKASTORRATZA e-*Revista de Didáctica*, 12, 1-14.

Mason, J. (2017). Issues in variation theory and how it could inform pedagogical choices. In R. Huang & L. Yeping (Eds.), *Teach- ing and learning mathematics through variation. Confusian heritage meets western theories*. Boston, MA: Sense.

Matz, M. 1980, 'Building a metaphoric theory of mathematical thought', *Journal of Mathematical Behavior* 3 (1), 93–166.

Mayer, R. E. (1997). Multimedia learning: Are we asking the right questions? *Educational Psychologist*, *32*(1), 1–19. doi:10.1207/s15326985ep3201_1

Mayer, R. E. (2009). *Multimedia learning*. New York, NY: Cambridge Press.

Mhlolo, M. (2013). The merits of teaching mathematics with variation. Pythagoras, 34(2), 1–8
NCTM (National Council of Teachers of Mathematics). (2000). *Principles and standards for teaching mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Metz, M., Preciado Babb, A. P., Sabbaghan, S., & Davis, B. (2017). Using variation to critique and adapt mathematical tasks. In A. P. Preciado-Babb, L. Yeworiew, & S. Sabbaghan (Eds.) *Selected Proceedings of the IDEAS 2017 Conference*, (pp. 169-178). Calgary, Canada: Werklund School of Education.

Mok, I. A. C. (2009). *Learning of algebra inspiration from students' understanding of the distributive law*. Hong Kong, China: Hong Kong Association for Mathematics Education.

Mok, I. A. C., & Lopez-Real, F. (2006). A tale of two cities: A comparison of six teachers in Hong Kong and Shanghai. In D. Clarke, C. Keitel, & Y. Shimizu (Eds.), *Mathematics classrooms in 12 countries*: *The insiders' perspective* (pp. 237–246). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers B.V.

Molina, M. (2010). Una visión estructural del trabajo con expresiones aritméticas y algebraicas. *Revista Suma*, 65, 7–15.

Molina, Marta, Castro, Encarnación, Molina, José y Castro, Enrique. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(1), 75-88.

Mora, W (2014), Introducción a la teoría de números. Ejemplos y algoritmos, primera edición*, Revista digital matemática, educación e internet*, Recuperado de: *https://repositoriotec.tec.ac.cr/bitstream/handle/2238/6299/introducci%C3%B3n-teor%C3%ADan%C3%BAmeros.pdf?sequence=1&isAllowed=y*

Moritz, R.E. (1942). *Memorabilia Mathematica*. Washington: MAA Spectrum.

National Mathematics Advisory Panel (2008). *Foundations for Success: The Final Report of the National Mathematics Advisory Panel*. Washington, DC: U.S. Department of Education.

NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.*
Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics). (2000). Principles and standards for teaching mathematics. Reston, VA: NCTM.

Nortes, A. y Nortes, R. (2010). Resolución de Problemas de Matemáticas en las pruebas de acceso a la Universidad Errores significativos. *Education Siglo XXI 28* (1), 317-342.

Novotná, J. & Hoch, M. (2008). How Structure sense for algebraic expression or equations is related to structure sense for abstract algebra. *Mathematics Education Research Journal 20* (2), 93–104.

OCDE. (2015). PISA 2015 *Resultados Clave*. Autor. Recuperado de https://www.oecd.org/pisa/pisa-2015-results-in-focus-ESP.pdf

Ollesch, J. Grünig, F., Dörfler,T., & Heidelberg, M. (2017). Teaching mathematics with multimedia-based representations-what about teachers' competencies?. *CERME 10*, Feb 2017, Dublin, Ireland. ⟨hal-01950542⟩

Olteanu, C., & Olteanu, L. (2012). Equations, functions, critical aspects and mathematical communication. *International Education Studies*, 5(5), 69–78. doi:10.5539/ies.v5n5p69

Panizza, M., Sadovsky, P. & Sessa, C. (1996). The first algebraic learning: the failure of success. *Proceedings of PME 20*, 4, pp. 107-114. Valencia. España.

Panizza, M.; Sadovsky, P.; Sessa, C. (1999). "La ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito", *Enseñanza de las Ciencias*, 17 (3), pp. 453-461.

Pang, M.F. & Marton, F. (2005). Learning theory as teaching resource: Another example of radical enhancement of students' understanding of economic aspects of the world around them. *Instructional Science*, *33*(2), 159-191. https://doi.org/10.1007/s11251-005-2811-0

Pang, M. F., & Marton, F. (2007). The paradox of pedagogy: The relative contribution of teachers and learners to learning. *Iskolakultura*, 1(1), 1–29.

Park, K. (2006). Mathematics lessons in Korea: teaching with systematic variation. Tsukuba Journal of Educational Study in Mathematics, 25, 151–167.

Peeg, J., Gutiérrez, A. y Huerta, M. P. (1997). Assessing Reasoning Abilities in Geometry, en Villani, V. y Mammana, C. (eds.) (1998), *Perspectives on the teaching of Geometry for the 21st Century*. Collection: Publications del ICMI, Kluwer Academic Press, pp. 275-295.

Pillay, V. (2013). *Enchanting mathematics teachers' mediation of a selected object of learning through participation in learning study: The case of functions in grade 10 (unpublished doctoral thesis)*. University of Witwatersrand, Johannesburg.

Pink, D. (2011*). Drive: The surprising truth about what motivates us*. New York: Riverh

Pirie, S. y Martin, L. (1997). The equation, the whole equation and nothing but the equation! One approach to the teaching of linear equations. *Educational Studies in Mathematics*, 34(2), 159-181.

Porteous, K. (1994), "When Truth is Seen to be Necessary", *Mathematics in School*, vol. 23, núm. 5, pp. 2-5.

Rabinowitz, M. (1988). On teaching cognitive strategies: The influence of accessibility of conceptual knowledge. *Contemporary Educational Psychology*, 13(3), 229-235.

Ramírez, L. (2018). *La enseñanza de las ecuaciones lineales desde la variación* (Maestría). Instituto Politécnico Nacional Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, Unidad Legaria.Recuperado de https://mariosanchezaguilar.files.wordpress.com/2018/11/tesis_maestria_juan_luis_ramirez_lubianos_2018.pdf

Rittle-Johnson, B., Star, J. R., & Durkin, K. (2009). The importance of prior knowledge when comparing examples: Influence on conceptual and procedural knowledge of equation solving. *Journal of Educational Psychology, 101*(4), 836–852.

Rohrer, D., & Pashler, H. (2010). Recent research on human learning challenges conventional instructional strategies. *Educa- tional Researcher, 39*(5), 406–412.

Rojano, T. (2014). El futuro de las tecnologías digitales en la educación matemática: prospectiva a 30 años de investigación intensiva en el campo. *Educación Matemática*, *25 años*. México: Santillana, pp. 11-30.

Rojano Ceballos, M. T. y Solares Rojas, A. (coords.) (2017). *Estudio comparativo de la propuesta curricular de matemáticas en la educación obligatoria en México y otros países.* México: INEE-CINVESTAV.

Rowland, T. (2008). The purpose, design and use of examples in the teaching of elementary mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 69*(2), 149–163.

Ruano, R. M., Socas, M. M. y Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. PNA 2 (2), 61-74.

Runesson, U. (2005). Beyond discourse and interaction. Variation: A critical aspect for teaching and learning mathematics. *The Cambridge Journal of Education*, 35(1), 69–87.

Panizza, M. & Sadovsky, P. & Sessa, C. (1999). La ecuación lineal con dos variables : entre la unicidad y el infinito. *Enseñanza de las Ciencias* : revista de investigación y experiencias didácticas; Vol.: 17 Núm.: 3. 17. 10.5565/rev/ensciencias.4073.

Pérez Rufi, J. P. (mayo 2013). La actualidad en YouTube: claves de los vídeos más vistos durante un mes. Global Media Journal México, 9(17), pp. 44-62. Recuperado de https://gmjeiojstamiu.tdl.org/gmjei/index.php/GMJ_EI/article/view/43/43

Ruzlan Md. Ali (2007). Teacher talk in mathematics classroom: Questioning to stablish procedural competence. In U.H. Cheach, Y. Wahyundi. R. P. Devadason, K.T. Ng, J. A. Chavez & D.D. Mangao (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Science Mathematics Education* (pp.3422-352). Penang, Malaysia: SEAMEO Regional Centre for Education in Science and Mathematics.

Sánchez, G. L. A y Galvis, M. L. P. (2016). Fuera del aula: ambientes divertidos para un aprendizaje significativo. Recuperado de http://hdl.handle.net/10656/4777

Sandoval, I. (2005). *Estrategias argumentativas en la resolución de problemas geométricos en un ambiente dinámico.* Tesis de Doctorado en Ciencias, especialidad Mtemática Educativa del Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV-IPN.

Sandoval, I. (2009). La geométria dinámica como una herramienta de mediación entre el conocimiento perceptivo y el geométrico. *Educación Mtemática,* 21 (1), 109-127.

Sadovsky, P., & Sessa, C. (2005). The didactic interaction with the procedures of peers in the transition from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *59*, 85–112.

Schifter, D. (1999). Reasoning about operations. Early algebraic thinking in grades K–6. In L. V. Stiff & F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K*–12. NCTM Yearbook (pp.62-81). Reston, VA; NCTM.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, meta- cognition, and sense making in mathematics. En D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan Publishing Company.

Schoenfeld, A. H. (2008). Research methods in (mathematics) education. In L. English (Ed.), Handbook of International Research in Mathematics Education (Second edition, pp. 467–519). New York: Routledge. Recuperado de https://goo.gl/UGrzJy

Schnotz, W. (2002). Commentary - towards an integrated view of learning from text and visual displays. *Educational Psychology Review*, 14(1), 101-120.

Schnotz, W., & Bannert, M. (2003). Construction and interference in learning from multiple representation. *Learning and Instruction*, 13(2), 141-156.

Schnotz, W., & Kürschner, C. (2008). External and internal representations in the acquisition and use of knowledge: visualization effects on mental model construction. *Instructional Science*, 36(3), 175-190.

Schmidt, R. A., & Bjork, R. A. (1992). New conceptualizations of practice: common principles in three paradigms suggest new concept for training. Psychological Science, 3(4), 201–217.

Schwartz, D. L., & Bransford, J. D. (1998). A time for telling. Cognition and Instruction, 16(4), 475–522.
Sun, X. (2011). "Variation problems" and their roles in the topic of fraction division in Chinese mathematics textbook examples. Educational Studies in Mathematics, *76*(1), 65–85.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1–36.

Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *Journal of Mathematical Behavior*, *14*, 15–39.

Sfard, A. & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification: The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics 26* (2-3), 191-228. DOI: 10.10123/A:1003602322232.

Sfard, Anna. (2001). Equilibrar algo desequilibrado:los estándares del NCTM a la luz de las teorías del aprendizaje de las matemáticas.

Simon, Martin. (2000). Research on the development of mathematics teacher: The teacher development experiment. En Anthony Kelly y Richard Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 335-359). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20–16.

Skemp, R. R., 1985. PMP: A Progress Report, Proceedings of the 9th IGPME Conference, Utrecht, Netherlands, 447–452.

Steffe, L. (1991). The constructivist teaching experiment: Illustrations and implications. In E. von Glasersfeld (Ed), *Radical constructivism in mathematics education*, (pp. 177-194). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267-307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Swan, M. (2007). The impact of task-based professional development on teachers' practices and beliefs: A design research study. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10, 217–237.

Swan, M. (2011). Designing tasks that challenge values, beliefs and practices: A model for the professional development of practicing teachers. In O. Zaslavsky & P. Sullivan (Eds.), *Constructing knowledge for teaching secondary mathematics*. New York: Springer.

Sun, X. (2011a). "Variation problems" and their roles in the topic of fraction division in chinese mathematics textbook examples. *Educational Studies in Mathematics*, 76(1), 65–85.

Sun, X. (2011b). An insider's perspective: "variation problems" and their cultural grounds in chinese curriculum practice. *Journal of Mathematics Education,* 4(1), 101–114.

Steinberg, R. M., Sleeman, D. H. & Ktorza, D. (1990). Algebra students' knowledge of equivalence of equations. *Journal for Research in Mathematics Education 22* (2), 112–121.

Talmon, V. y Yerushalmy, M. (2004). Understanding dynamic behavior: Parent Child relations in dynamic geometry environment. *Educational Studies in Mathematics*. 57 (1), 91-119.

Tall, D., Thomas, M., Davis, G., Gray E. & Simpson, A. (2000). What is the object of the encapsulation of a process? *Journal of Mathematical Behavior 18* (2), 223–241.

Taylor, K., & Rohrer, D. (2010). The effects of interleaved practice. Applied Cognitive Psychology, 24(6), 837–848.

Trigueros, M. Lozano, M., Shulmaister, M., Sandoval, I., Jinich, E. y Cortés, M. (2014). *Matemáticas 3*. México: Santillana.Serie Horizontes.

Trujillo, P. A., Castro, E. y Molina, M. (2009). Un estudio de casos sobre el proceso de generalización. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación*

Matemática XIII (pp. 511–521). Santander: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Tossavainen, T. (2009). Who can solve 2x=1? – an analysis of cognitive load related to learning linear equation solving. *The Montana Mathematics Enthusiast 6*(3), 435-448.

Tossavainen, T., Attorps, I & Väisänen, P. (2011). On mathematics students' understanding of the equation concept. *Far East Journal of Mathematical Education*, *6*(2),127-147.

Tu, R. & Shen, W. (2010). Fundamental focuses of chinese mathematics: characteristics of mathematics teaching in China. *Journal of Mathematics Education*, 3(2), 160–169.

Vega-Castro, D. C. (2010). *Sentido estructural de estudiantes de bachillerato en tareas de simplificación de fracciones algebraicas que involucran igualdades notables* (Tesis de maestría no publicada). Universidad de Granada, Granada, España. Recuperado de http://digibug.ugr.es/handle/10481/23888.

Vega-Castro, D., Molina, M. y Castro, E. (2012). Sentido estructural de estudiantes de bachillerato en tareas de simplificación de fracciones algebraicas que involucran igualdades notables. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *15*(2), 233-258.

Vega-Castro, D. C. (2013). *Perfiles de alumnos de Educación Secundaria relacionados con el sentido estructural manifestado en experiencias con expresiones algebraicas* (Tesis de doctorado no publicada). Universidad de Granada, Granada, España. Recu- perado de http://digibug.ugr.es/handle/10481/31311

Watson, A., & Chick, H. (2011). Qualities of examples in learning and teaching. *ZDM, 43*(2), 283–294.

Watson, A., & Mason, J. (2006). Seeing an exercise as a single mathematical object: using variation to structure sense-mak- ing. Mathematical Teaching and Learning, 8(2), 91–111.

Wagner, S., Rachlin, S. L. & Jensen, R.J. (1984). *Algebra learning project: Final report.* Athens, Greece: University of Georgia.

Warren, E. (2001). Algebraic understanding and the importance of operation sense. In M. Heuvel–Penhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 399–406). Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.

Warren, E. (2004). Generalizing arithmetic: supporting the process in the early years. In M. Johnsen y A. Berit (Eds.), Proceedings of the 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 4 pp. 417-424). Bergen, Norway: Bergen University College.

Wong, N. Y. (2007). Hong Kong teachers' views of effective mathematics teaching and learning. *ZDM*, 39(4), 301-314.

Yerushalmy, M., & Chazan, D. (2008). Technology and curriculum design: The ordering of discontinuities in school algebra. *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 806-837). New York, NY: Routledge.

Zhang, X. (2005). China's mathematics teachers and teacher education. *Quaderni di Ricerca in Didattica*, 15, 51–54.

Zhang, Y. (2009). Variation for the improvement of teaching and learning project: An English case on teaching personal pronouns of English language. Hong Kong: School Partnership and Field Experience Office, the Hong Kong Institute of Education.

ANEXO 1

HOJAS DE TRABAJO PARA LOS ESTUDIANTES (AGRUPADOS EN PAREJAS)

Una ***ecuación*** es toda igualdad entre dos expresiones algebraicas, es decir, que contienen una o más letras que llamaremos i***ncógnitas***. ***Resolver*** una ecuación es buscar todos los valores de las incógnitas que satisfacen la igualdad. Dichos valores se llaman ***solución a la ecuación***. Si los miembros de la ecuación son polinomios se llama ***ecuación algebraica***.

Llamamos ***ecuación lineal diofántica*** con dos incógnitas a las ecuaciones que tienen la siguiente forma: $ax + by = c$ donde a, b, son números diferentes de cero y c un número cualquiera. El campo de sus posibles soluciones (x, y) pertenecen a los números enteros ($\mathbb{Z}$). En una ecuación lineal, ninguna de las variables tiene exponentes mayores a 1.

Tarea 1

1. Veamos inicialmente las siguientes ecuaciones y determinemos cuál de ellas pertenecen a las ecuaciones lineales con dos incógnitas y con coefiecientes enteros:

$4x + 3y = 25$		
a	b	c
¿Tiene coeficientes enteros?		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		

$4x + 3 = 25$		
a	b	c
¿Tiene coeficientes enteros?		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		

$1.9\ x - 2y = 10$		
a	b	c
¿Tiene coeficientes enteros?		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		

$2x - 2y = 10$		
a	b	c
¿Tiene coeficientes enteros?		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		

$9x - 2y = 1$		
a	b	c
¿Tiene coeficientes enteros?		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		

$9x - \frac{2}{3}\ y = 1$		
a	b	c
¿Tiene coeficientes enteros?		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		

¿Cuándo una ecuación tiene dos incógnitas?

¿Cuándo una ecuación tiene coeficientes enteros?

2. Veamos ahora estas otras ecuaciones y determinemos cuál de ellas pertenecen a las ecuaciones lineales con dos incógnitas y con coefiecientes enteros:

$5x + y = 34$		
a	b	c
¿Tiene coeficientes enteros?		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		

$\sqrt{5}\,x - y = 25$		
a	b	c
¿Tiene coeficientes enteros?		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		

$x - 3y - 20 = 0$		
A	b	c
¿Tiene coeficientes enteros?		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		

$x^2 - 3y = 20$		
a	b	c
¿Tiene coeficientes enteros?		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		

$2x^3 + 5y - 3z = 120$		
a	b	c
¿Tiene coeficientes enteros?		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		

$2x + 5y - 3x = 120$		
a	b	c
¿Tiene coeficientes enteros?		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		

¿Cuándo una ecuación tiene dos incógnitas?

¿Cuándo una ecuación es lineal?

¿Cómo son los coefientes en una ecuación diofántica lineal con dos incógnitas?

3. Finalmente, veamos las siguientes ecuaciones y determinemos cuál de ellas pertenecen a las ecuaciones lineales con dos incógnitas y con coefiecientes enteros:

$\frac{1}{3}(48x + 36\,y = 48)$		
A	b	c
¿Tiene coeficientes enteros?		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		

$23x + 4y - 7x = -3y + 15$		
a	b	c
¿Tiene coeficientes enteros?		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		

$y = -2x + 8$		
a	b	c
¿Tiene coeficientes enteros?		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		

. $\frac{1}{2}(42x + 36\,y = 48)$		
a	b	c
¿Tiene coeficientes enteros?		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		

$15x + 10y - 20 = 0$		
a	b	c
¿Tiene coeficientes enteros?		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		

$x^2 - 3x = 20$		
a	b	C
¿Tiene coeficientes enteros?		
¿Es una ecuación con dos incógnitas?		

¿Cuándo una ecuación tiene dos incógnotas?

¿Cuándo una ecuación es una ecuación es lineal?

¿Cuándo una ecuación es una ecuación diofántica lineal con dos incógnitas?

HOJAS DE TRABAJO PARA LOS ESTUDIANTES (AGRUPADOS EN PAREJAS)

Reciben el nombre de ecuaciones diofánticas aquellas ecuaciones polinómicas, con coeficientes enteros, cuyas soluciones son números enteros. Vamos a estudiar aquí las ecuaciones diofánticas del tipo $ax \pm by = \pm c$, en la que a y b son números enteros diferentes de cero y c un número entero cualquiera.

Tarea 2A

Aprendizaje previsto

a) ¿Cuándo una ecuación del tipo $ax \pm by = \pm c$, en la que a y b son números enteros diferentes de cero y c un número entero cualquiera, tiene solución entera?

Actividades Propuestas

Consulta el video mostrado en el siguiente enlace llamado **“**Introducción a las Ecuaciones Diofánticas”
https://youtu.be/oUXlqhktJGo

Para responder a la primera pregunta, resolveremos la siguiente tarea.

1. Encuentra las soluciones en números enteros de las siguientes ecuaciones utilizando el procedimiento de tanteo, formulando tus conjeturas y probandolas.

ACTIVIDAD II

1. Deseamos encontrar todas las parejas de enteros (x, y) que satisfagan la siguiente ecuación.

Consideremos la ecuación: $\mathbf{x + y = 7}$

Coeficientes	a	b	c

Encuentra el Máximo Común Divisor de (a, b)

M.C.D. (a, b)____________________

¿El M.C.D. (a, b) divide de manera exacta al coeficiente c?

$$\frac{C}{M.C.D} =$$

¿La ecuación propuesta tiene solución entera?

¿en que te basas para dar tu respuesta?

Escribe una posible solución y pruebala.

X_1=	Y_1=	Solución
¿Es esta solución la única?, o hay más soluciones, conjetura y prueba		
X_2=	Y_2=	
X_3=	Y_3=	
X_4=	Y_4=	

2. Ahora encuentra todas las parejas de enteros (x, y) que satisfagan la siguiente ecuación.

Consideremos la ecuación:	**x - y = 7**		
Coeficientes	a	b	c
Encuentra el Máximo Común Divisor de (a, b) M.C.D. (a, b)____________________			
¿El M.C.D. (a, b) divide de manera exacta al coeficiente c?	$\frac{C}{M.C.D} =$		
¿La ecuación propuesta tiene solución entera?	¿en que te basas para dar tu respuesta?		

X_1=	Y_1=	Solución
¿Es esta solución la única?, o hay más soluciones, conjetura y prueba		
X_2=	Y_2=	
X_3=	Y_3=	
X_4=	Y_4=	

Comparen las ecuaciones 1 y 2, ¿ en qué se diferencian?

¿Ambas tienen solución en números enteros?

¿Tienen las mismas soluciones?

3.Ahora analicemos la ecuación **2x + 10y = 17**

<table>
<tr><td rowspan="2">Coeficientes</td><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">Encuentra el Máximo Común Divisor de (a, b)
M.C.D. (a, b)__________</td></tr>
<tr><td colspan="2">¿El M.C.D. (a, b) divide de manera exacta al coeficiente c?</td><td colspan="2">$\frac{C}{M.C.D} =$</td></tr>
<tr><td>¿Tiene solución en números enteros?</td><td colspan="3">¿qué parejas de enteros (x, y) satisfacen la ecuación?</td></tr>
</table>

Consulta el video mostrado en el siguiente enlace, donde se detalla el procedimiento que sirve para resolver de forma aritmetica la ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. https://youtu.be/fZfmWyt0d8U

3.Deseamos ahora saber cuál de las siguientes ecuaciones tiene solución en números enteros.

<table>
<tr><th colspan="3">a) 2x – 5y = 9</th><th colspan="3">b) 2x – 6y = 9</th><th colspan="3">c) 2x – 7y = 9</th></tr>
<tr><td>a</td><td>B</td><td>c</td><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>M.C.D
(a, b)</td><td colspan="2"></td><td>M.C.D
(a, b)</td><td colspan="2"></td><td>M.C.D
(a, b)</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="3">$\frac{C}{M.C.D} =$</td><td colspan="3">$\frac{C}{M.C.D} =$</td><td colspan="3">$\frac{C}{M.C.D} =$</td></tr>
<tr><td colspan="9">Encontrar una pareja de números enteros (x, y) para cada ecuación, que satisfagan la igualdad.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Solución</td><td colspan="3">Solución</td><td colspan="3">Solución</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td></tr>
</table>

¿Qué puedes deducir de lo anterior?

Comparen las ecuaciones a, b y c, ¿en qué se diferencian?

¿Se pueden relacionar?

¿De qué manera?

¿Cuándo una ecuación de este tipo (diofántica) tiene solución en números enteros?

Tarea 2B

Aprendizaje previsto

a) ¿Cuándo una ecuación del tipo ax ± by = ± c, en la que a y b son números enteros diferentes de cero y c un número entero cualquiera, tiene solución entera?

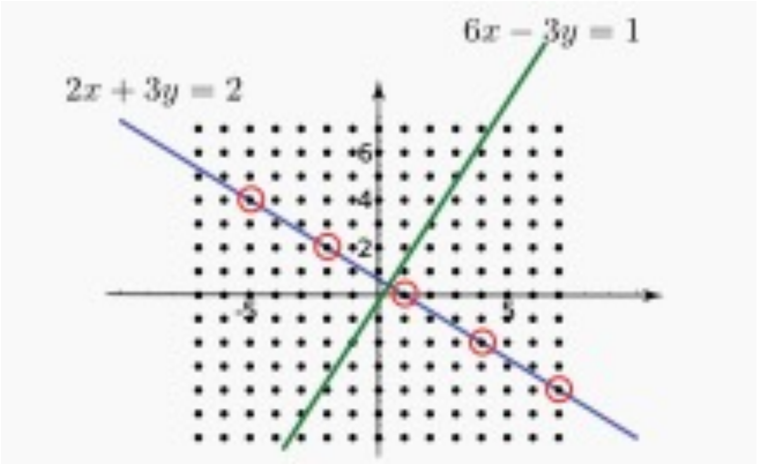
Otra forma de averiguar las soluciones es de forma gráfica, por ejemplo, con un programa de geometría dinámica en el cual se puedan representar ecuaciones. En este caso hemos utilizado un programa llamado Geogebra, de Markus Hohenwarter. Para ello, representamos la recta que obtenemos a partir de la ecuación diofántica:

Actividades propuestas
ACTIVIDAD III

1. Consideremos la ecuaciones en enteros

a) $2x + 3y = 2$			**b)** $6x - 3y = 1$		
a	b	c	a	b	c
M.C.D (a, b)			M.C.D (a, b)		
$\frac{C}{M.C.D} =$			$\frac{C}{M.C.D} =$		

Gráficamente, las soluciones enteras corresponden a los pares $(x, y) \in Z$ contenidos en la representación gráfica de cada recta.



- En el caso de $2x + 3y = 2$, en la gráfica se puede observar que (−5,4), (−2,2), (1,0), (4,−2), (7,−4) son algunas soluciones.

Prueba alguna de las soluciones y demuestra que efectivamente si cumple con la igualdad en la ecuación.

En el caso de la recta $6x - 3y = 1$, no se observan soluciones; ¿tendrá alguna?

Comprueba tu conjetura

¿Cuándo una ecuación de este tipo (diofántica) tiene solución en números enteros?

Tarea 3A

Aprendizaje previsto

a) Cuándo una ecuación del tipo ax ± by = ± c, en la que a y b son números enteros diferentes de cero y c un número entero cualquiera, tiene solución.
b) En caso de tener solución, cómo encontrarla (solución particular)

Actividades propuestas

ACTIVIDAD IV

El objetivo: Será determinar si las ecuaciones propuestas tienen solución en números enteros, de ser así hallar algunas soluciones a las ecuaciones diofánticas de primer grado con dos incógnitas, aplicando algunos métodos que agilicen el proceso.

Consultar el video mostrado en el siguiente enlace, donde se detallan los tres criterios (propiedades de los números enteros) que sirven para resolver de forma aritmetica la ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

https://youtu.be/v0le8CgcQJo

a) **Criterio de Divisibilidad o Multiplicidad** (ax ± by = c donde a o b son multiplos de c)

Se busca si a o b son multiplos de c, si alguno no lo es se convierte ese número a multiplo de c.

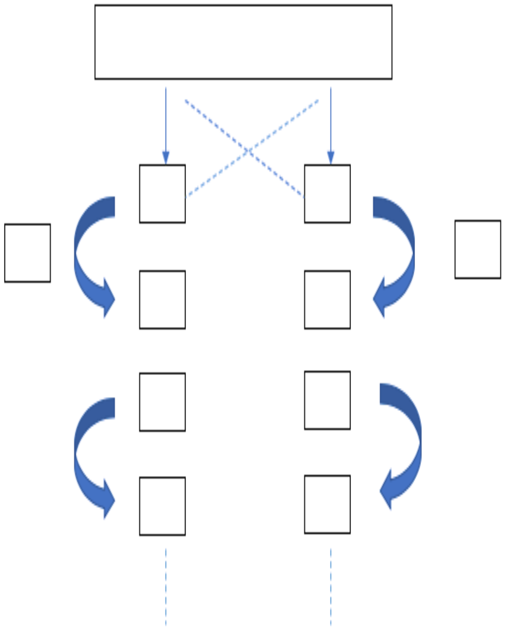
Analizemos la siguiente ecuación
5x + 2y = 126

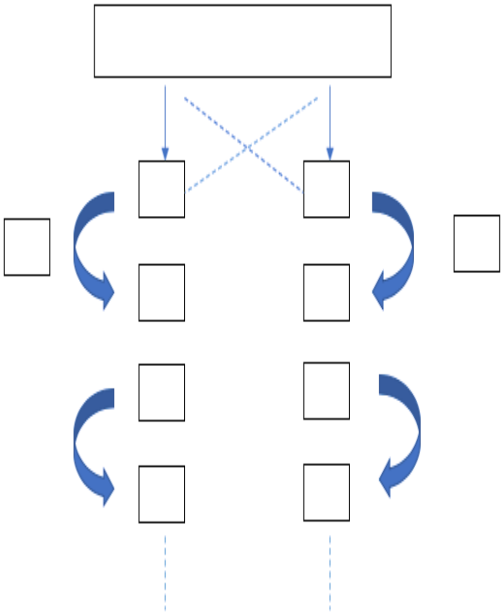
Coeficientes	a	b	C
M.C.D (a, b) ______________	$\frac{C}{M.C.D} =$		
¿Tiene solución?			
Encontrar una primera solución			
Encontrar otras soluciones			

Analizemos la siguiente ecuación
5x – 7y = 125

Coeficientes	a	b	c
M.C.D (a, b) ______________	$\frac{C}{M.C.D} =$		
¿Tiene solución?			
Encontrar una primera solución			
Encontrar otras soluciones			

Si has encontrado una solución particular, ahora puedes encontrar otras soluciones utilizando el método aritmético.





Tarea 3B

Aprendizaje previsto

a) Cuándo una ecuación del tipo $ax \pm by = c$, en la que a y b son números enteros diferentes de cero y c un número entero cualquiera, tiene solución.
b) En caso de tener solución, cómo encontrarla (solución particular)

Actividades propuestas

ACTIVIDAD V

a) **Criterio de Cifras Terminales (**$ax \pm by = c$ donde a o b es multiplo de 5)

Cuando uno de los coeficientes (a, b) sea multiplo de 5, se multiplica por 2 ambos términos de la ecuación. Ahora se analizan las cifras terminales de a, b y c de la ecuación.

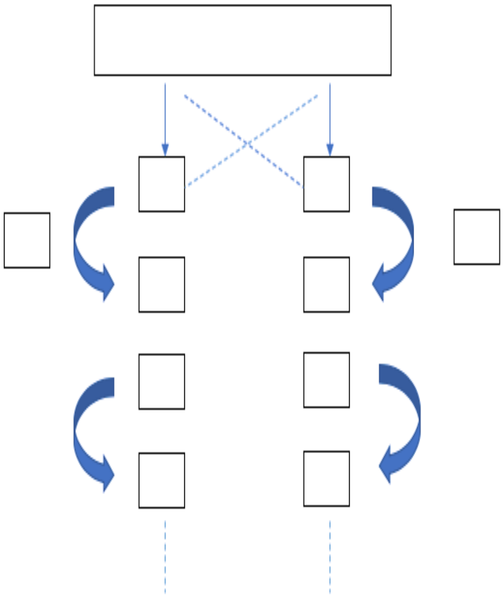
Analizemos la siguiente ecuación
$4x + 5y = 98$

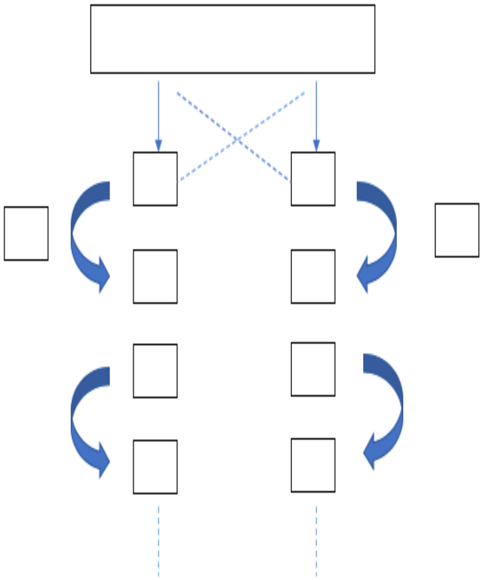
Coeficientes	a	b	c
M.C.D (a, b) ____________	$\frac{C}{M.C.D} =$		
¿Tiene solución?			
Encontrar una primera solución			
Encontrar otras soluciones			

Analizemos la siguiente ecuación
$3x – 5y = 7$

Coeficientes	a	b	c
M.C.D (a, b) ___________	$\frac{C}{M.C.D} =$		
¿Tiene solución?			
Encontrar una primera solución			
Encontrar otras soluciones			

Si has encontrado una solución particular, ahora puedes encontrar otras soluciones utilizando el método aritmético.





Tarea 3C

Aprendizaje previsto

a) ¿Cuándo una ecuación del tipo ax ± by = ± c, en la que a y b son números enteros diferentes de cero y c un número entero cualquiera, tiene solución?
b) En caso de tener solución, cómo encontrarla (solución particular)

Variación: Resolviendo ecuaciones con diferentes métodos

Actividades propuestas

ACTIVIDAD VI

a) **Criterio de la División** (ax ± by = c donde b = 1 o b < a, pero a < d)

Recordar

dq + r = D

D **Dividendo**	**d** **Divisor**
r **Residuo**	**q** **Cociente**
↓	↓
Y	**X**

Analizemos ahora la siguiente ecuación

$$5x + y = 83$$

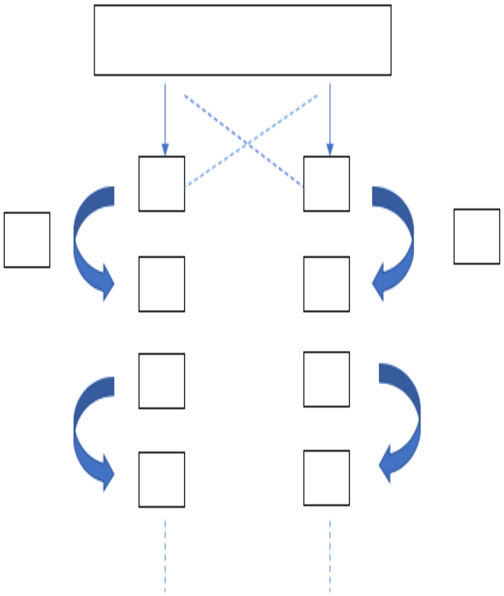
Coeficientes	A	b	c
M.C.D (a, b) ______________	$\frac{C}{M.C.D} =$		
¿Tiene solución?			
Encontrar una primera solución			
Encontrar otras soluciones			

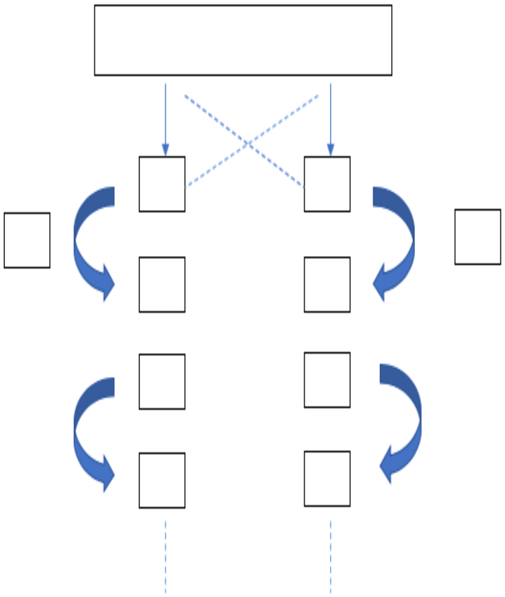
Analizemos ahora la siguiente ecuación

$$11x + 13y = 173$$

Coeficientes	a	b	c
M.C.D (a, b) ______________	$\frac{C}{M.C.D} =$		
¿Tiene solución?			
Encontrar una primera solución			
Encontrar otras soluciones			

Si has encontrado una solución particular, ahora puedes encontrar otras soluciones utilizando el método aritmético.





Tarea 4A

Aprendizaje previsto

b) ¿Cuándo una ecuación del tipo ax ± by = ± c, en la que a y b son números enteros diferentes de cero y c un número entero cualquiera, tiene solución entera?

c) En caso de tener solución, cómo encontrarla (solución particular)

d) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación? *(modelo general)*

El **algoritmo de Euclides** nos dice lo siguiente:

Para calcular el máximo común divisor entre dos números enteros positivos **a** y ***b*** dividimos el más grande, digamos ***a***, entre el más pequeño, digamos ***b***. Esta división nos proporcionará un cociente, c_1, y un resto, r_1. Si $r_1 = 0$, entonces ***M.C.D (a,b) = b.*** Si no es cero dividimos el divisor, c_1, entre el resto, r_1 obteniendo otro cociente, c_2, y otro resto, r_2. Si $r_2 = 0$, entonces ***M.C.D (a, b)*** = r_1. Si no es cero volvemos a dividir divisor entre resto. Y así sucesivamente.

Esto es, el máximo común divisor entre ***a*** y ***b*** es el último resto distinto de cero que obtengamos con el procedimiento anterior.

M.C.D (a,b) = *ax ± by*

Residuo = Dividendo – divisor por el cociente
r = D – d*C

Ejemplo:

ALGORITMO DE EUCLIDES

A= 1032
B= 180

COCIENTES		5	1	2	1	3
DIVISORES/ DIVIDENDOS	1032	180	132	48	36	12
RESTOS	132	48	36	12	0	

m.c.d = 12

Actividades propuestas

ACTIVIDAD VII

1. Consulta los videos mostrados en los siguientes enlaces, donde se detallan los procedimientos para obtener el Máximo Común Denominador (M.C.D) a través de aplicar el algoritmo de Euclides.

- https://www.youtube.com/watch?v=036pOZO0hV4
- https://youtu.be/4Q5VMntI7Do

2.Con base en la información y procedimientos mostrados en el video anterior:

1.Calcular el Máximo Común Divisor (M.C.D) de (**525, 100**) utilizando el algoritmo de Euclides

Cocientes						
Divisores/Dividendos						
Resdiuos						

Procedimiento

Realizar la comprobación de la división de cada una de las divisiones realizadas

r = D – d*C

2.Calcular el mcd (66, 550) utilizando el algoritmo de Euclides

Cocientes						
Divisores/Dividendos						
Resdiuos						

Procedimiento

Realizar la comprobación de la división de cada una de las divisiones realizadas
r = D – d*C

Veamos a continuación, como hallar una solución (x_o, y_o) cualquiera para ecuaciones diofánticas. En este caso de la siguiente ecuación 127x – 52y = 1. Pero antes revisa el siguiente video referente a la identidad de bezout. https://youtu.be/jbH7fyqySqY
Para ello comenzaremos calculando el algoritmo de Euclides.

Cocientes						
Divisores/Dividendos						
Resdiuos						

Procedimiento

Realizar la comprobación de la división de cada una de las divisiones realizadas
r = D – d*C

Ahora toma una solución particular y aplicando la identidad de Bezout encuentra la forma general, para todas las soluciones en números enteros.

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{\text{mcd}(a,b)}t \\ \\ y = y_0 - \frac{a}{\text{mcd}(a,b)}t \end{cases}$$

	Solución general	Prueba cuando t = 2	Demuestra que si es solución, sustituye en 127x – 52y = 1
X			
Y			

Tarea 4B

Aprendizaje previsto

a) ¿Cuándo una ecuación del tipo $ax \pm by = \pm c$, en la que a y b son números enteros diferentes de cero y c un número entero cualquiera, tiene solución?
b) En caso de tener solución, cómo encontrarla (solución particular)

c) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación? *(modelo general)*

Actividades propuestas

ACTIVIDAD VIII

1. Considera la siguiente ecuación $3x+8y=0$

Calcula el Máximo Común Divisor (M.C.D) de (**3, 8**) utilizando el algoritmo de Euclides

Cocientes						
Divisores/Dividendos						
Resdiuos						

2. Realiza la gráfica de la ecuación dada echando mano de Geogebra (**en esta direección puedes descargar geogebra, una vez descargada e instalada se puede utilizar sin conexión a internet** https://www.geogebra.org/download?lang=es) o de Excel. También se sugiere utilizar la gráfica para establecer hipótesis sobre las soluciones enteras.

Gráfica

Solución 1		Solución 2		Solución 3	
X =	Y=	X=	Y=	X=	Y=
Comprobación		Comprobación		Comprobación	

Ahora toma una solución particular y aplicando la identidad de Bezout encuentra la forma general, para todas las soluciones en números enteros.

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{\mathrm{mcd}(a,b)}t \\ \\ y = y_0 - \frac{a}{\mathrm{mcd}(a,b)}t \end{cases}$$

	Solución general	Prueba cuando t = -3	Demuestra que si es solución sustituye en 3x+8y=0
X			
Y			

Tarea 5A

Aprendizaje previsto

a) Cuándo una ecuación del tipo ax ± by = c, en la que a y b son números enteros diferentes de cero y c un número entero cualquiera, tiene solución.
b) En caso de tener solución, cómo encontrarla (solución particular)

c) Cuántas soluciones tiene la ecuación *(modelo general)*

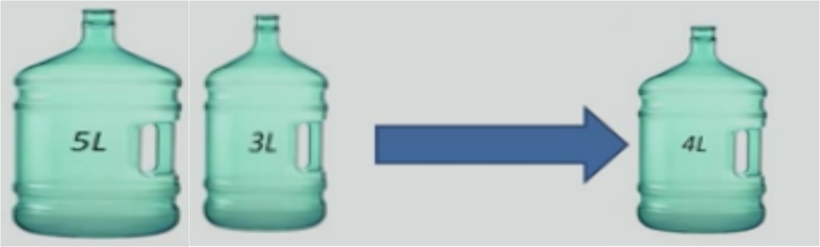
Actividades propuestas (problemas de aplicación)
ACTIVIDAD IX

Consulta el video mostrado en el siguiente enlace, donde se ejemplifica la aplicación de las ecuaciones diofánticas en problemas de la vida cotidiana.

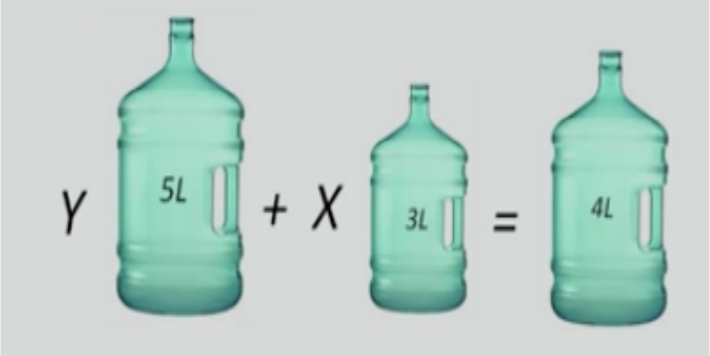
https://youtu.be/s5MOQ197X2w

1. Ejemplo de aplicación.

Una garrafa de 5 litros y otra de 3 litros de capacidad. ¿Cómo podemos utilizar las medidas exactas de estas garrafas para conseguir una tercera garrafa de 4 litos de manera exacta?



¿Cuántas veces tendría que llenar o vaciar la garrafa de 5 litros?
¿y cuantas llenar o vaciar la garrafa de 3 litros?



Si lo modelamos matemáticamente tendremos una ecuación del tipo:

Para averiguar las soluciones, primero lo hacemos de forma gráfica. En este caso utiliza Geogebra. Para ello representamos la recta que obtenemos a partir de la ecuación diofántica:

Gráfica

¿Cuándo una ecuación del tipo ax ± by = c, en la que a y b son números enteros diferentes de cero y c un número entero cualquiera, tiene solución?

¿En caso de tener solución, cómo encontrarla (solución particular)?

Punto A: x = _____ y = _____ Punto B: x = _____ y =_____ Punto C: x = _____ y = _____ Punto D: x = _____ y = ___	Comprobación

Pero queremos una solución general, es decir, se quiere expresar de manera general cuáles son todas las soluciones de las ecuaciones diofánticas lineales que se puedan encontrar. Escribe el procedimiento para llegar a la solución general.

Estas expresiones nos dan todas las soluciones de la Ecuación.

COMPROBACIÓN

X_0=	Y_0=	X_0=	Y_0=
Cuando t =		Cuando t =	
Tenemos que: X=	Tenemos que: Y=	Tenemos que: X=	Tenemos que: Y=
Sustituyendo el valor obtenido en la Ec. Original		Sustituyendo el valor obtenido en la Ec. Original	
Comprobación		Comprobación	

En este problema la “y” negativa significa ________________________ la garrafa de 5 litros y la “y” positiva, seria cuantas veces deberíamos __________________________.

Tarea 5B

Aprendizaje previsto

a) ¿Cuándo una ecuación del tipo $ax \pm by = c$, en la que a y b son números enteros diferentes de cero y c un número entero cualquiera, tiene solución?
b) En caso de tener solución, cómo encontrarla (solución particular)
c) Cuántas soluciones tiene la ecuación *(modelo general)*

Actividades propuestas

ACTIVIDAD X (problemas de aplicación)

Consulta el video mostrado en el siguiente enlace, donde se ejemplifica la aplicación de las ecuaciones diofánticas en problemas de la vida cotidiana.

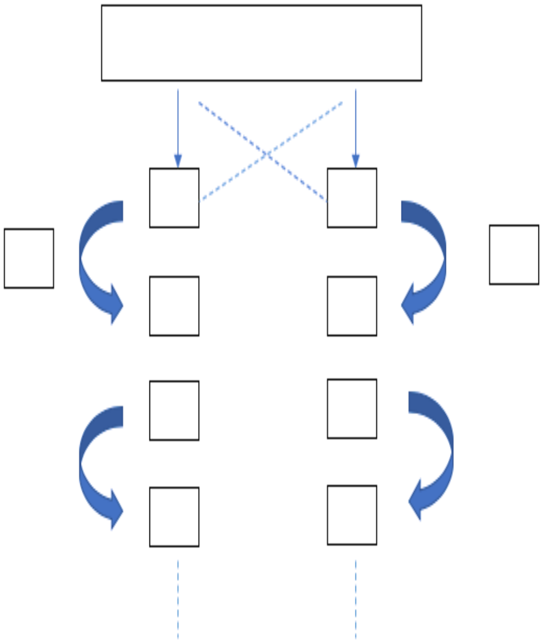
https://youtu.be/C_h-mGMXvm4

2.Ejemplo de Aplicación.

Aldo ingresa a una papelería para comprar lápices de 2 pesos y correctores de 5 pesos; él dispone de 78 pesos para realizar dicha compra. Indique el número de formas que Aldo puede comprar, gastando todo el dinero que tiene, si debe comprar al menos un artículo de cada tipo.

Plantea la Ecuación	¿Es una ecuación diofántica?

<table>
<tr><td rowspan="2">Coeficientes</td><td>A</td><td>B</td><td>C</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>M.C.D (a, b)
______________</td><td colspan="3">$\frac{C}{M.C.D} =$</td></tr>
<tr><td colspan="4">¿Tiene solución?</td></tr>
<tr><td colspan="4">Encuentra una primera solución</td><td>Encontrar otras soluciones</td></tr>
</table>



Ahora toma una solución particular y aplicando la identidad de Bezout encuentra la forma general, para todas las soluciones en números enteros.

Realiza la gráfica de la ecuación dada echando mano de Geogebra o de Excel. También se sugiere utilizar la gráfica para verificar las soluciones enteras encontradas en la sección anterior.

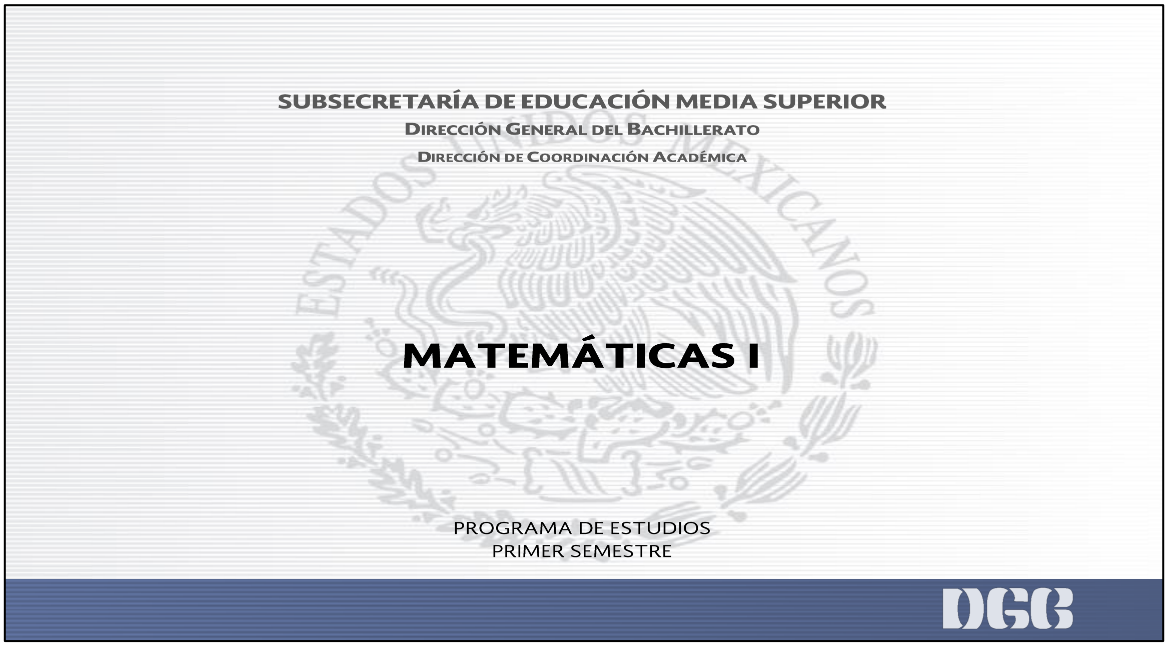
¿Qué punto (x, y) coincide con tus resultados?

ANEXO 2

ANEXO 2

Las ecuaciones diofánticas no tienen aplicación práctica en el currículo de secundaria y Bachillerato en México. En cambio su conocimiento y resolución es muy interesante pues muchas veces las soluciones deseadas a un problema son soluciones enteras.

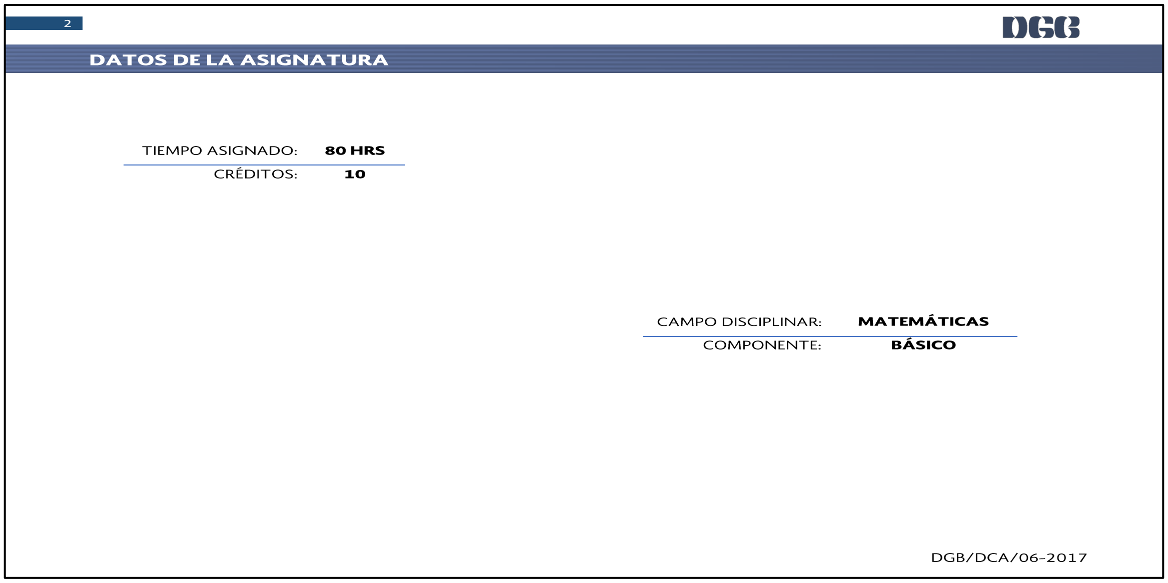
No es habitual que las Ecuaciones Diofántica Lineales (EDL) sea un contenido curricular (en México no figura de manera explícita en los documentos curriculares), tampoco es frecuente que en la escuela se presenten problemas con varias o infinitas soluciones. Sin embargo, en este anexo se resaltan los puntos que consideramos en el plan y programa de matemática I en los que se tiene relación y aplicación de este tipo de ecuaciones en el bachillerato.



SUBSECRETARÍA DE EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR
DIRECCIÓN GENERAL DEL BACHILLERATO
DIRECCIÓN DE COORDINACIÓN ACADÉMICA

MATEMÁTICAS I

PROGRAMA DE ESTUDIOS
PRIMER SEMESTRE

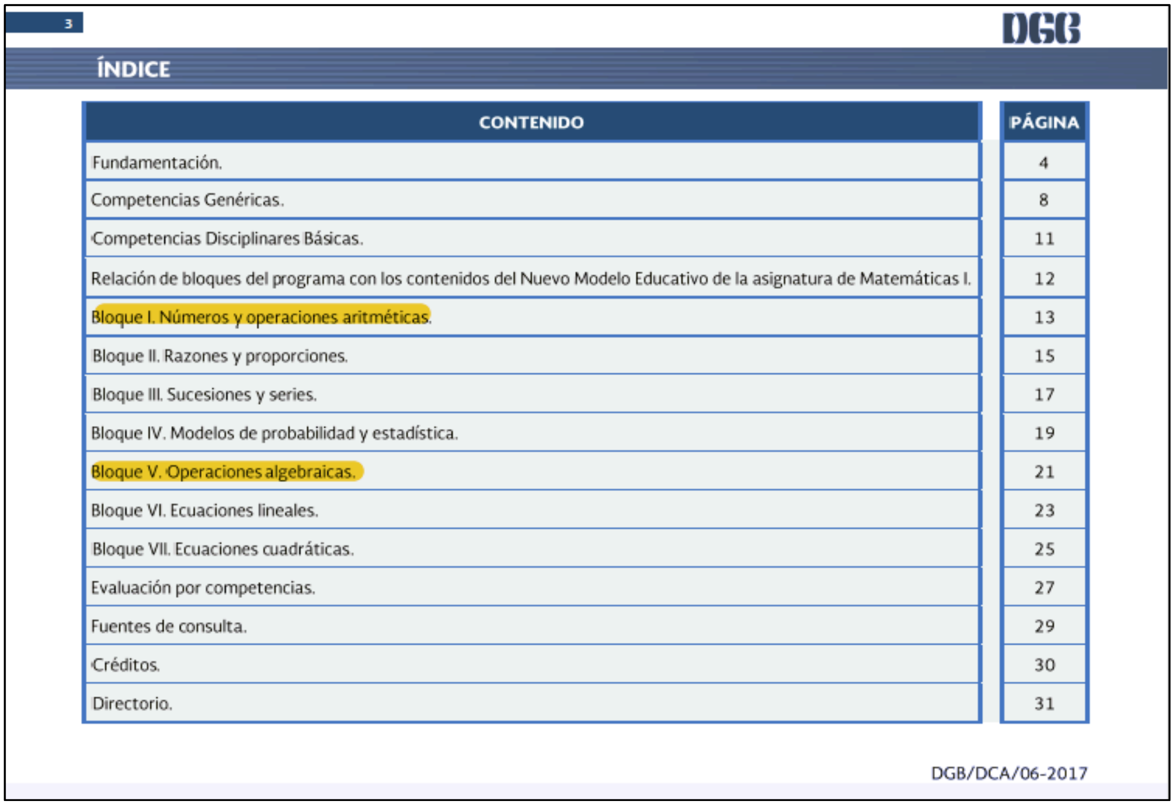


DATOS DE LA ASIGNATURA

TIEMPO ASIGNADO: **80 HRS**
CRÉDITOS: **10**

CAMPO DISCIPLINAR: **MATEMÁTICAS**
COMPONENTE: **BÁSICO**

DGB/DCA/06-2017



ÍNDICE

FUNDAMENTACIÓN

Teniendo como referencia el actual desarrollo económico, político, social, tecnológico y cultural de México, la Dirección General del Bachillerato dio inicio a la Actualización de Programas de Estudio integrando elementos tales como los aprendizajes claves, contenidos específicos y aprendizajes esperados, que atienden al Nuevo Modelo Educativo para la Educación Obligatoria. Además de conservar el enfoque basado en competencias, hacen énfasis en el desarrollo de habilidades socioemocionales y abordan temas transversales tomando en cuenta lo estipulado en las políticas educativas vigentes.

Considerando lo anterior, dicha actualización tiene como fundamento el Programa Sectorial de Educación 2013-2018, el cual señala que la Educación Media Superior debe ser fortalecida para contribuir al desarrollo de México a través de la formación de hombres y mujeres en las competencias que se requieren para el progreso democrático, social y económico del país, mismos, que son esenciales para construir una nación próspera y socialmente incluyente basada en el conocimiento. Ésto se retoma específicamente del objetivo 2, estrategia 2.1., en la línea de acción 2.1.4.,que a la letra indica: "Revisar el modelo educativo, apoyar la revisión y renovación curricular, las prácticas pedagógicas y los materiales educativos para mejorar el aprendizaje".

Asimismo, este proceso de actualización pretende dar cumplimiento a la finalidad esencial del Bachillerato que es: "generar en el estudiantado el desarrollo de una primera síntesis personal y social que le permita su acceso a la educación superior, a la vez que le dé una comprensión de su sociedad y de su tiempo y lo prepare para su posible incorporación al trabajo productivo"[1], así como los objetivos del Bachillerato General que expresan las siguientes intenciones formativas: ofrecer una cultura general básica; que comprenda aspectos de la ciencia; de las humanidades y de la técnica; a partir de la cual se adquieran los elementos fundamentales para la construcción de nuevos conocimientos; proporcionar los conocimientos, los métodos, las técnicas y los lenguajes necesarios para ingresar a estudios superiores y desempeñarse en éstos de manera eficiente, a la vez que se desarrollan las habilidades y actitudes esenciales para la realización de una actividad productiva socialmente útil.

Aunado a ello, en virtud de que la Educación Media Superior debe favorecer la convivencia, el respeto a los derechos humanos y la responsabilidad social, el cuidado de las personas, el entendimiento del entorno, la protección del medio ambiente, la puesta en práctica de habilidades productivas para el desarrollo integral de los seres humanos, la actualización del presente programa de estudios, incluye temas transversales que según Figueroa de Katra (2005)[2], enriquecen la labor formativa de manera tal que conectan y articulan los saberes de los distintos sectores de aprendizaje que dotan de sentido a los conocimientos disciplinares, con los temas y contextos sociales, culturales y éticos presentes en su entorno; buscan mirar toda la experiencia escolar como una oportunidad para que los aprendizajes integren sus dimensiones cognitivas y formativas, favoreciendo de esta forma una educación incluyente y con equidad.

---

[1] Diario Oficial de la Federación. (1982). México.

[2] Figueroa de Katra, L. (2005). Desarrollo curricular y transversalidad. *Revista Internacional Educación Global. Vol. 9.* Guadalajara, Jalisco. México. Asociación Mexicana para la Educación Internacional. Recuperado de: http://paideia.synaptium.net/pub/pesegpatt2/tetra_ir/tt_ponencia.pdf

De igual forma, con base en el fortalecimiento de la educación para la vida, se abordan dentro de este programa de estudios los **temas transversales**, mismos que se clasifican a través de ejes temáticos, de los cuales el personal docente seleccionará, ya sea uno o varios, en función del contexto escolar y de su pertinencia en cada bloque. Dichos temas no son únicos ni pretenden limitar el quehacer educativo en el aula, ya que es necesario tomar en consideración temas propios de cada comunidad. A continuación se presentan los cuatro ejes transversales:

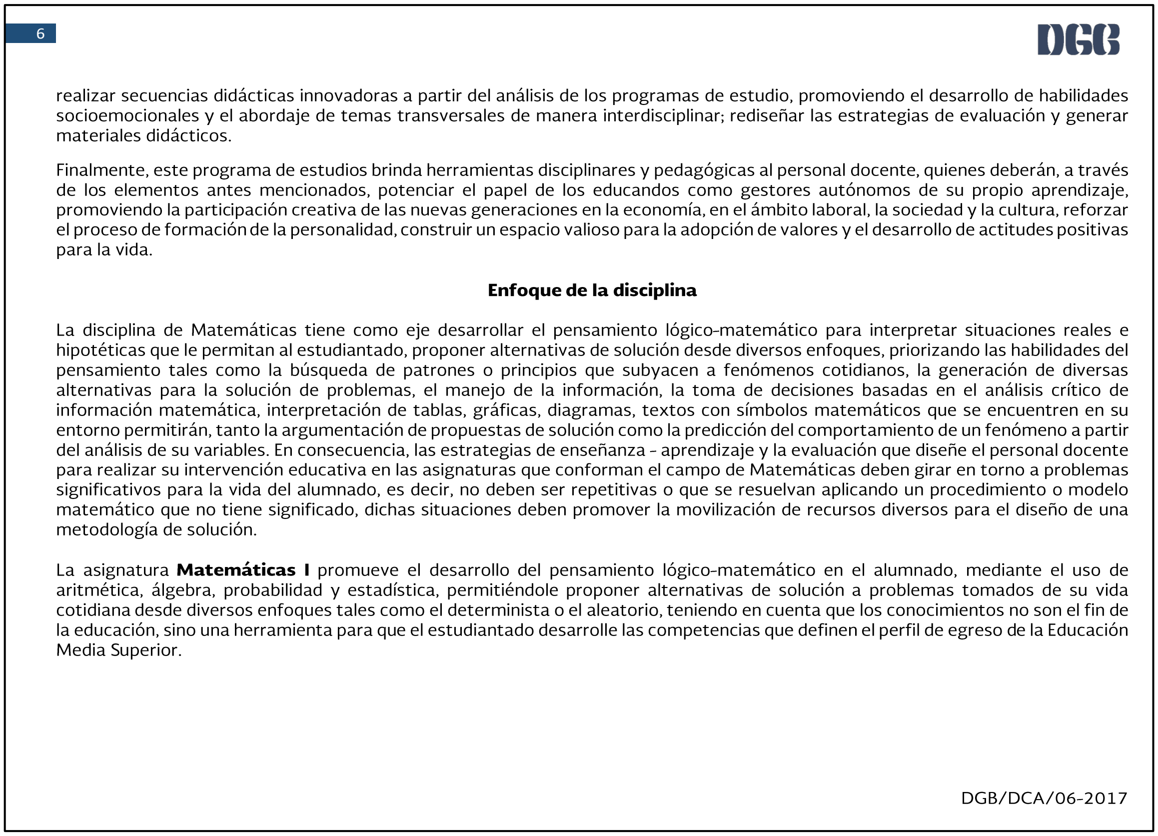
- **Eje transversal Social:** se sugiere retomar temas relacionados con la educación financiera, moral y cívica, para la paz (Derechos Humanos), equidad de género, interculturalidad, lenguaje no sexista, vialidad, entre otros.
- **Eje transversal Ambiental:** se recomienda abordar temas referentes al respeto a la naturaleza, uso de recursos naturales, desarrollo sustentable, reciclaje, entre otras.
- **Eje transversal de Salud:** se sugiere abordar temas relacionados con la educación sexual integral y reproductiva, cuidado de la salud, prevención y consumo de sustancias tóxicas, entre otras.
- **Eje transversal de Habilidades Lectoras:** se recomienda retomar temas relacionados con la lectura, comprensión lectora, lecto-escritura y lectura de textos comunitarios o en lenguas nativas, entre otros.

Asimismo, otro aspecto importante que promueve el programa de estudios es la **Interdisciplinariedad** entre asignaturas del mismo semestre, en donde diferentes disciplinas se conjuntan para trabajar de forma colaborativa para la obtención de resultados en los aprendizajes esperados de manera integral, permitiendo al estudiantado confrontarse a situaciones cotidianas aplicando dichos saberes de forma vinculada.

Por otro lado, en cada bloque se observa la relación de las competencias genéricas y disciplinares básicas, los conocimientos, las habilidades y actitudes que darán como resultado los aprendizajes esperados, permitiendo llevar de la mano al personal docente con el objetivo de generar un desarrollo progresivo no sólo de los conocimientos, sino también de aspectos actitudinales.

En ese sentido, el **rol docente** dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje, tiene un papel fundamental, como lo establece el Acuerdo Secretarial 447, ya que es el profesorado quien facilita el proceso educativo al diseñar actividades significativas que promueven el desarrollo de las competencias (conocimientos, habilidades y actitudes); propicia un ambiente de aprendizaje que favorece el desarrollo de habilidades socioemocionales del estudiantado, tales como la confianza, seguridad, autoestima, entre otras, propone estrategias disciplinares y transversales favoreciendo el uso de herramientas tecnológicas de la información y la comunicación; así como el diseño de instrumentos de evaluación que atiendan al enfoque por competencias.

Es por ello que la Dirección General del Bachillerato a través del **Trabajo Colegiado** busca promover una mejor formación docente a partir de la creación de redes de gestión escolar, analizar los indicadores del logro académico del estudiantado, generar técnicas exitosas de trabajo en el aula, compartir experiencias de manera asertiva, exponer problemáticas comunes que presenta el estudiantado respetando la diversidad de opiniones y mejorar la práctica pedagógica, donde es responsabilidad del profesorado:



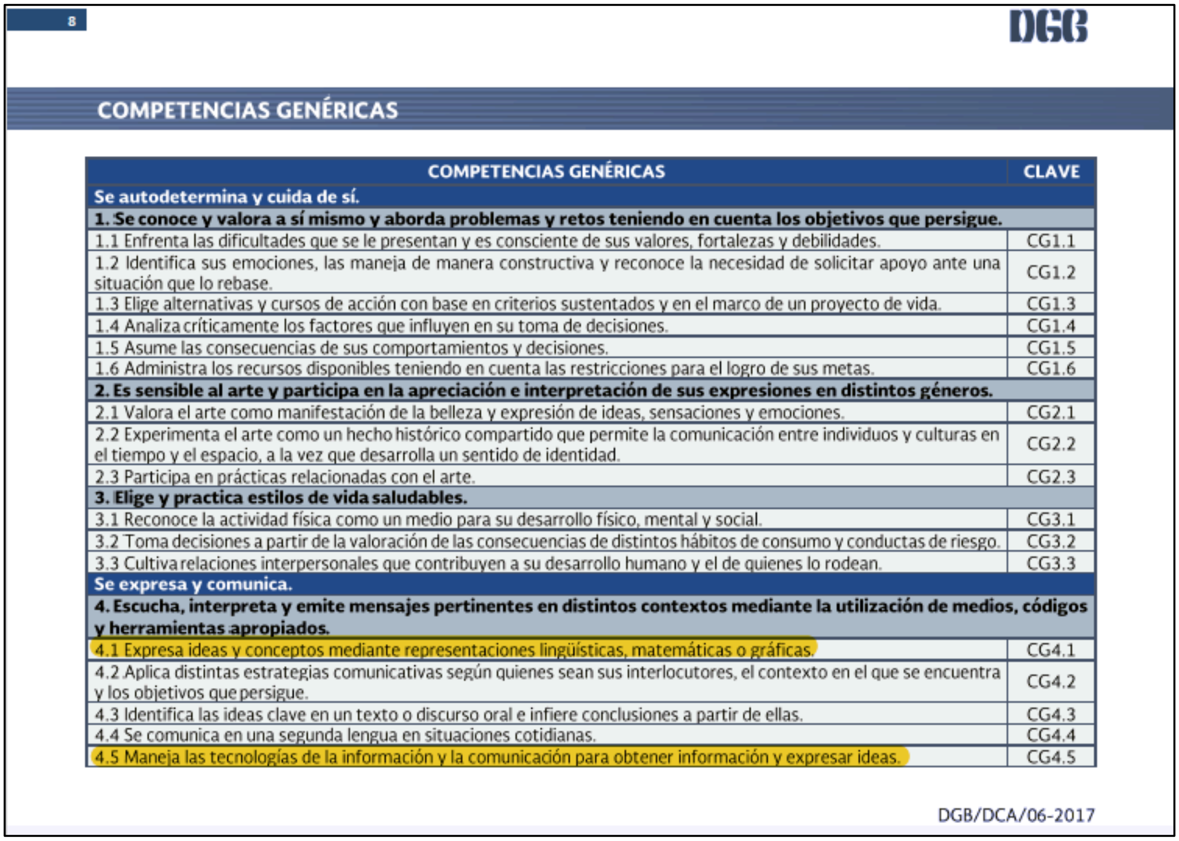
realizar secuencias didácticas innovadoras a partir del análisis de los programas de estudio, promoviendo el desarrollo de habilidades socioemocionales y el abordaje de temas transversales de manera interdisciplinar; rediseñar las estrategias de evaluación y generar materiales didácticos.

Finalmente, este programa de estudios brinda herramientas disciplinares y pedagógicas al personal docente, quienes deberán, a través de los elementos antes mencionados, potenciar el papel de los educandos como gestores autónomos de su propio aprendizaje, promoviendo la participación creativa de las nuevas generaciones en la economía, en el ámbito laboral, la sociedad y la cultura, reforzar el proceso de formación de la personalidad, construir un espacio valioso para la adopción de valores y el desarrollo de actitudes positivas para la vida.

Enfoque de la disciplina

La disciplina de Matemáticas tiene como eje desarrollar el pensamiento lógico-matemático para interpretar situaciones reales e hipotéticas que le permitan al estudiantado, proponer alternativas de solución desde diversos enfoques, priorizando las habilidades del pensamiento tales como la búsqueda de patrones o principios que subyacen a fenómenos cotidianos, la generación de diversas alternativas para la solución de problemas, el manejo de la información, la toma de decisiones basadas en el análisis crítico de información matemática, interpretación de tablas, gráficas, diagramas, textos con símbolos matemáticos que se encuentren en su entorno permitirán, tanto la argumentación de propuestas de solución como la predicción del comportamiento de un fenómeno a partir del análisis de su variables. En consecuencia, las estrategias de enseñanza - aprendizaje y la evaluación que diseñe el personal docente para realizar su intervención educativa en las asignaturas que conforman el campo de Matemáticas deben girar en torno a problemas significativos para la vida del alumnado, es decir, no deben ser repetitivas o que se resuelvan aplicando un procedimiento o modelo matemático que no tiene significado, dichas situaciones deben promover la movilización de recursos diversos para el diseño de una metodología de solución.

La asignatura **Matemáticas I** promueve el desarrollo del pensamiento lógico-matemático en el alumnado, mediante el uso de aritmética, álgebra, probabilidad y estadística, permitiéndole proponer alternativas de solución a problemas tomados de su vida cotidiana desde diversos enfoques tales como el determinista o el aleatorio, teniendo en cuenta que los conocimientos no son el fin de la educación, sino una herramienta para que el estudiantado desarrolle las competencias que definen el perfil de egreso de la Educación Media Superior.



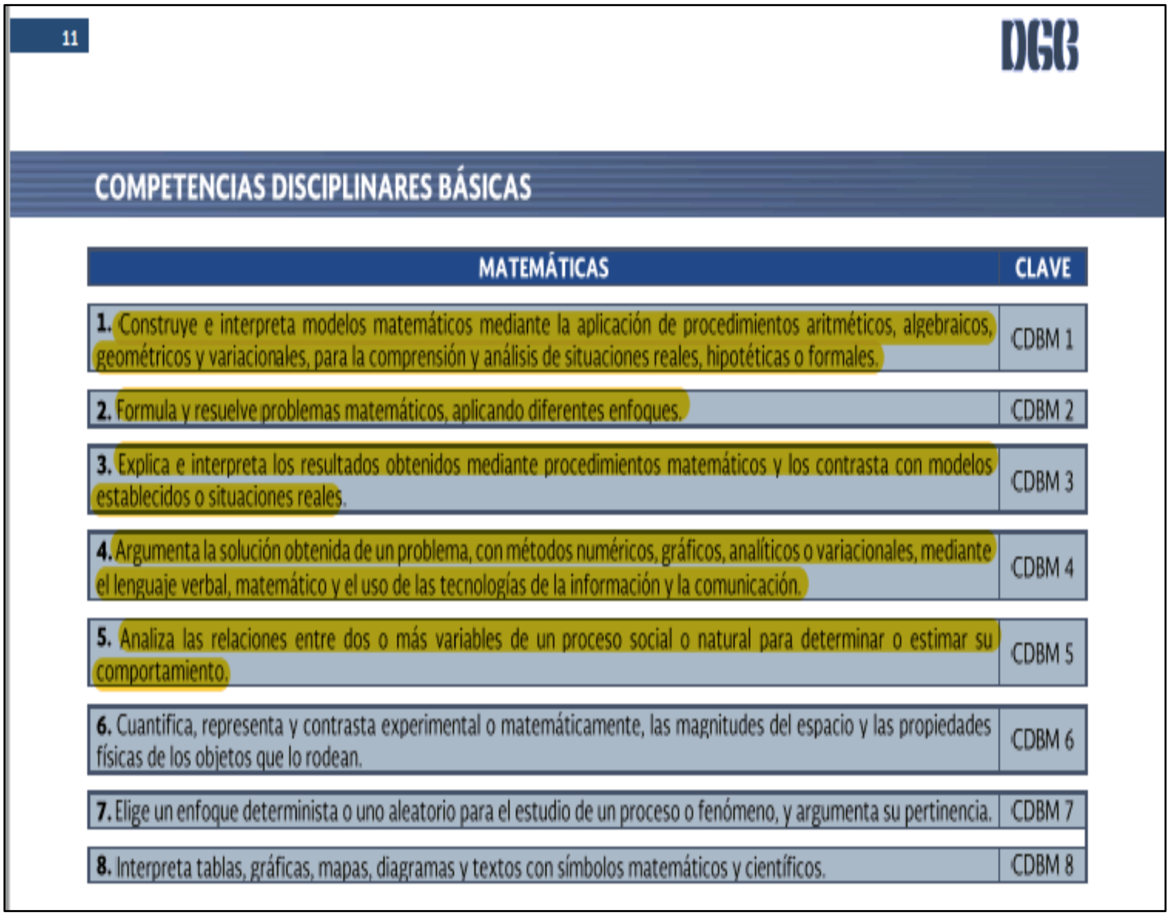
DGB

COMPETENCIAS GENÉRICAS

COMPETENCIAS GENÉRICAS	CLAVE
Se autodetermina y cuida de sí.	
1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.	
1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades.	CG1.1
1.2 Identifica sus emociones, las maneja de manera constructiva y reconoce la necesidad de solicitar apoyo ante una situación que lo rebase.	CG1.2
1.3 Elige alternativas y cursos de acción con base en criterios sustentados y en el marco de un proyecto de vida.	CG1.3
1.4 Analiza críticamente los factores que influyen en su toma de decisiones.	CG1.4
1.5 Asume las consecuencias de sus comportamientos y decisiones.	CG1.5
1.6 Administra los recursos disponibles teniendo en cuenta las restricciones para el logro de sus metas.	CG1.6
2. Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros.	
2.1 Valora el arte como manifestación de la belleza y expresión de ideas, sensaciones y emociones.	CG2.1
2.2 Experimenta el arte como un hecho histórico compartido que permite la comunicación entre individuos y culturas en el tiempo y el espacio, a la vez que desarrolla un sentido de identidad.	CG2.2
2.3 Participa en prácticas relacionadas con el arte.	CG2.3
3. Elige y practica estilos de vida saludables.	
3.1 Reconoce la actividad física como un medio para su desarrollo físico, mental y social.	CG3.1
3.2 Toma decisiones a partir de la valoración de las consecuencias de distintos hábitos de consumo y conductas de riesgo.	CG3.2
3.3 Cultiva relaciones interpersonales que contribuyen a su desarrollo humano y el de quienes lo rodean.	CG3.3
Se expresa y comunica.	
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.	
4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.	CG4.1
4.2 Aplica distintas estrategias comunicativas según quienes sean sus interlocutores, el contexto en el que se encuentra y los objetivos que persigue.	CG4.2
4.3 Identifica las ideas clave en un texto o discurso oral e infiere conclusiones a partir de ellas.	CG4.3
4.4 Se comunica en una segunda lengua en situaciones cotidianas.	CG4.4
4.5 Maneja las tecnologías de la información y la comunicación para obtener información y expresar ideas.	CG4.5

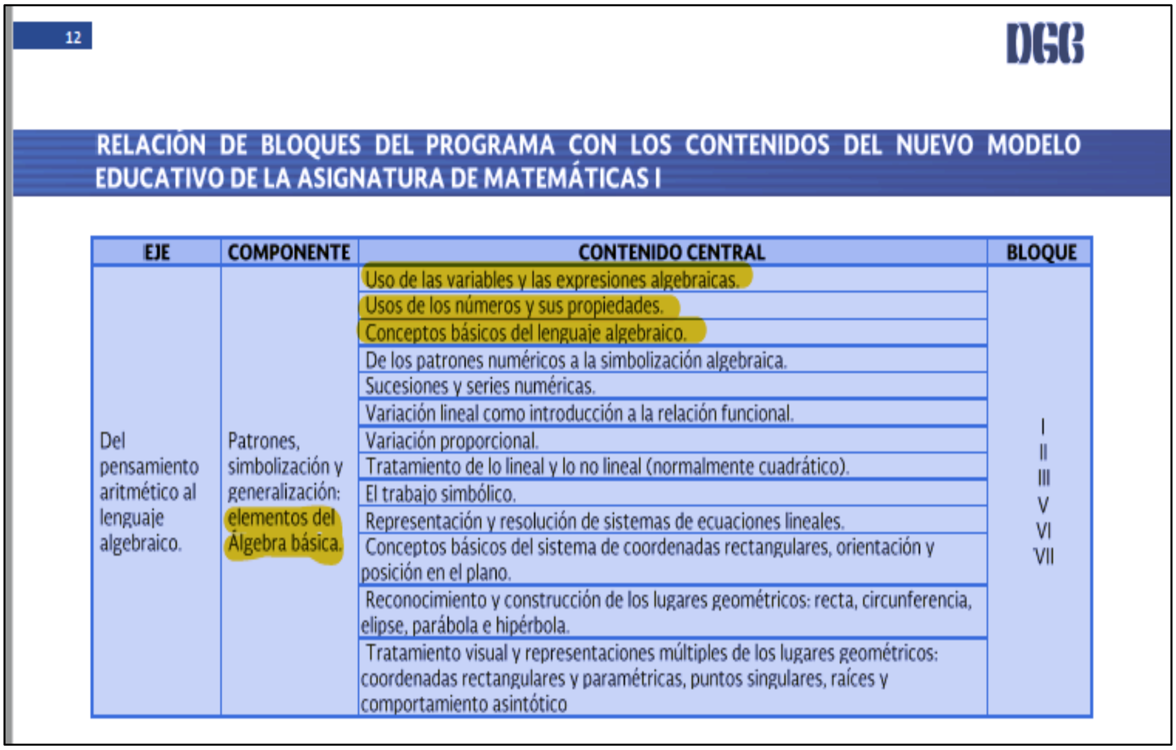
DGB

Piensa crítica y reflexivamente.	
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	
5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.	CG5.1
5.2 Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.	CG5.2
5.3 Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos.	CG5.3
5.4 Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.	CG5.4
5.5 Sintetiza evidencias obtenidas mediante la experimentación para producir conclusiones y formular nuevas preguntas.	CG5.5
5.6 Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.	CG5.6
6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.	
6.1 Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo a su relevancia y confiabilidad.	CG6.1
6.2 Evalúa argumentos y opiniones e identifica prejuicios y falacias.	CG6.2
6.3 Reconoce los propios prejuicios, modifica sus puntos de vista al conocer nuevas evidencias, e integra nuevos conocimientos y perspectivas al acervo con el que cuenta.	CG6.3
6.4 Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.	CG6.4
Aprende de forma autónoma.	
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.	
7.1 Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimiento.	CG7.1
7.2 Identifica las actividades que le resultan de menor y mayor interés y dificultad, reconociendo y controlando sus reacciones frente a retos y obstáculos.	CG7.2
7.3 Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.	CG7.3
Trabaja en forma colaborativa.	
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	
8.1 Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.	CG8.1
8.2 Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.	CG8.2
8.3 Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.	CG8.3



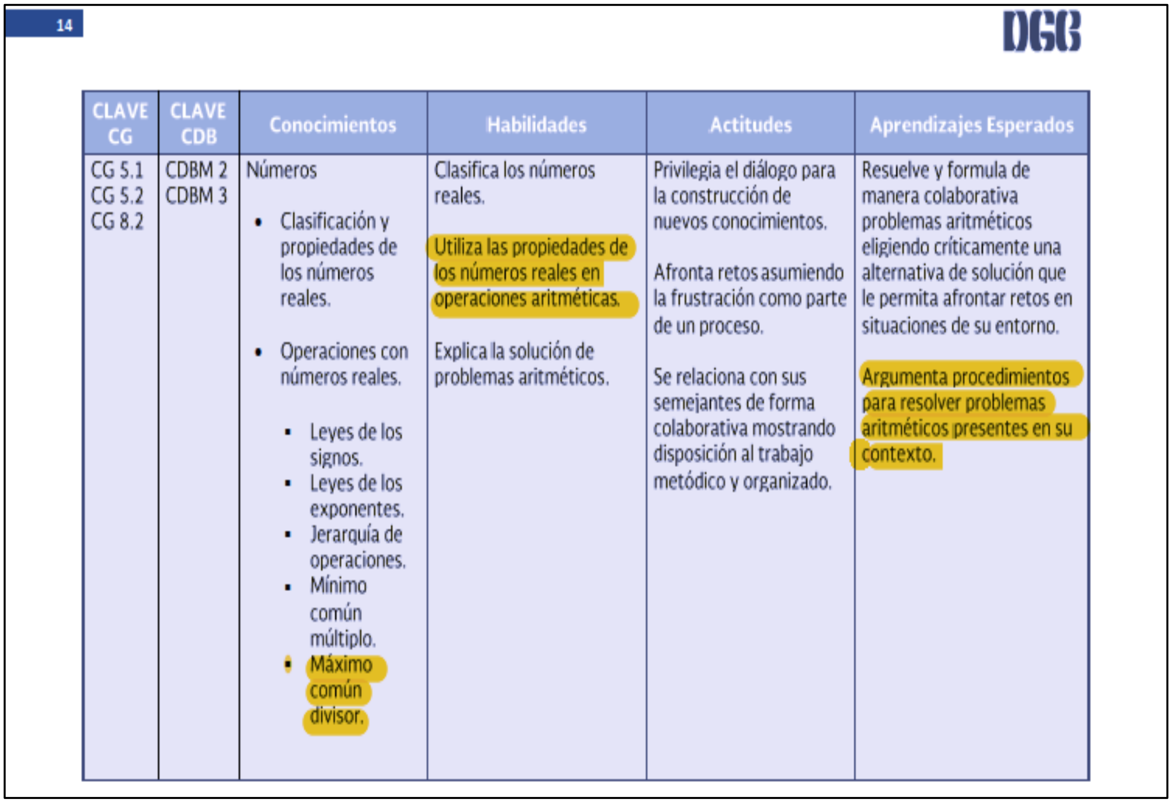
COMPETENCIAS DISCIPLINARES BÁSICAS

MATEMÁTICAS	CLAVE
1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.	CDBM 1
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.	CDBM 2
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.	CDBM 3
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.	CDBM 4
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.	CDBM 5
6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente, las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.	CDBM 6
7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.	CDBM 7
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	CDBM 8

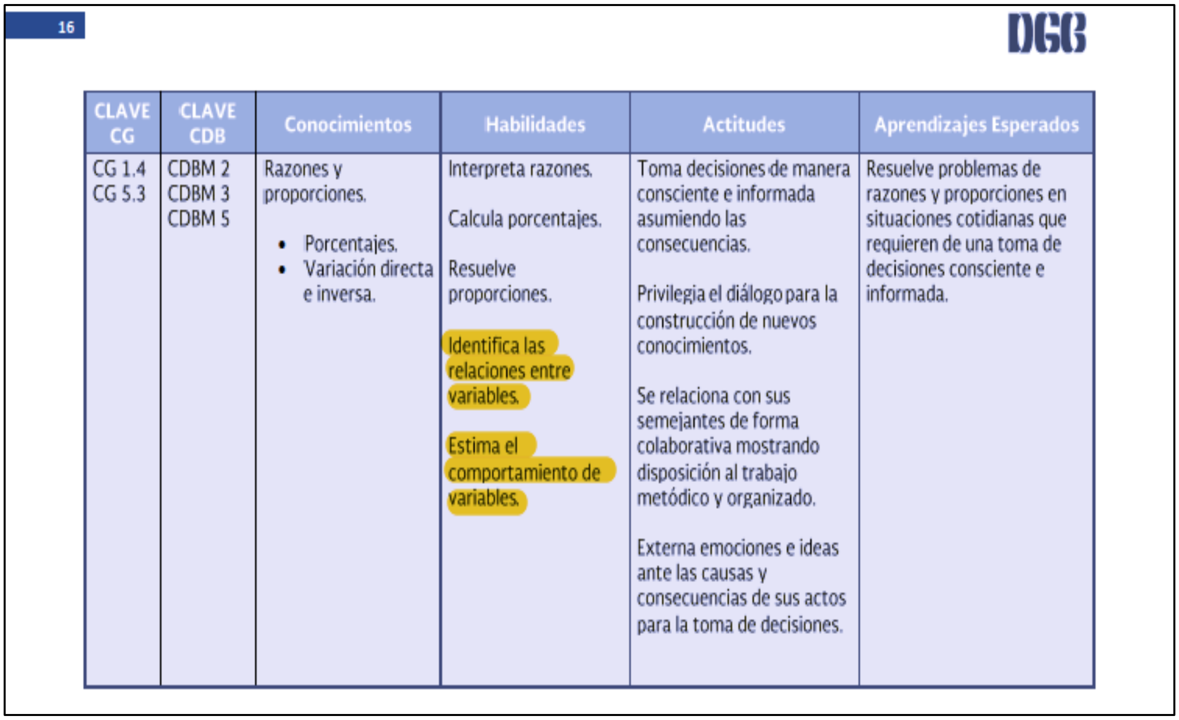


RELACIÓN DE BLOQUES DEL PROGRAMA CON LOS CONTENIDOS DEL NUEVO MODELO EDUCATIVO DE LA ASIGNATURA DE MATEMÁTICAS I

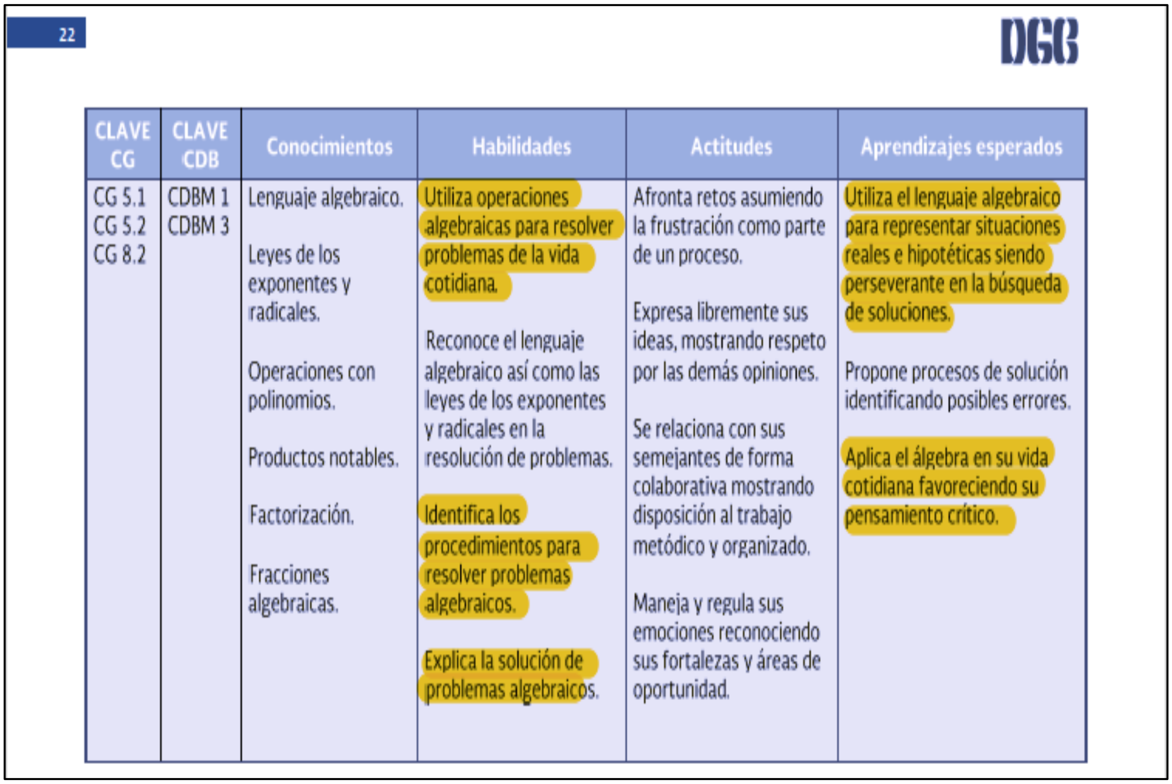
EJE	COMPONENTE	CONTENIDO CENTRAL	BLOQUE
Del pensamiento aritmético al lenguaje algebraico.	Patrones, simbolización y generalización: elementos del Álgebra básica.	Uso de las variables y las expresiones algebraicas.	I II III V VI VII
		Usos de los números y sus propiedades.	
		Conceptos básicos del lenguaje algebraico.	
		De los patrones numéricos a la simbolización algebraica.	
		Sucesiones y series numéricas.	
		Variación lineal como introducción a la relación funcional.	
		Variación proporcional.	
		Tratamiento de lo lineal y lo no lineal (normalmente cuadrático).	
		El trabajo simbólico.	
		Representación y resolución de sistemas de ecuaciones lineales.	
		Conceptos básicos del sistema de coordenadas rectangulares, orientación y posición en el plano.	
		Reconocimiento y construcción de los lugares geométricos: recta, circunferencia, elipse, parábola e hipérbola.	
		Tratamiento visual y representaciones múltiples de los lugares geométricos: coordenadas rectangulares y paramétricas, puntos singulares, raíces y comportamiento asintótico	



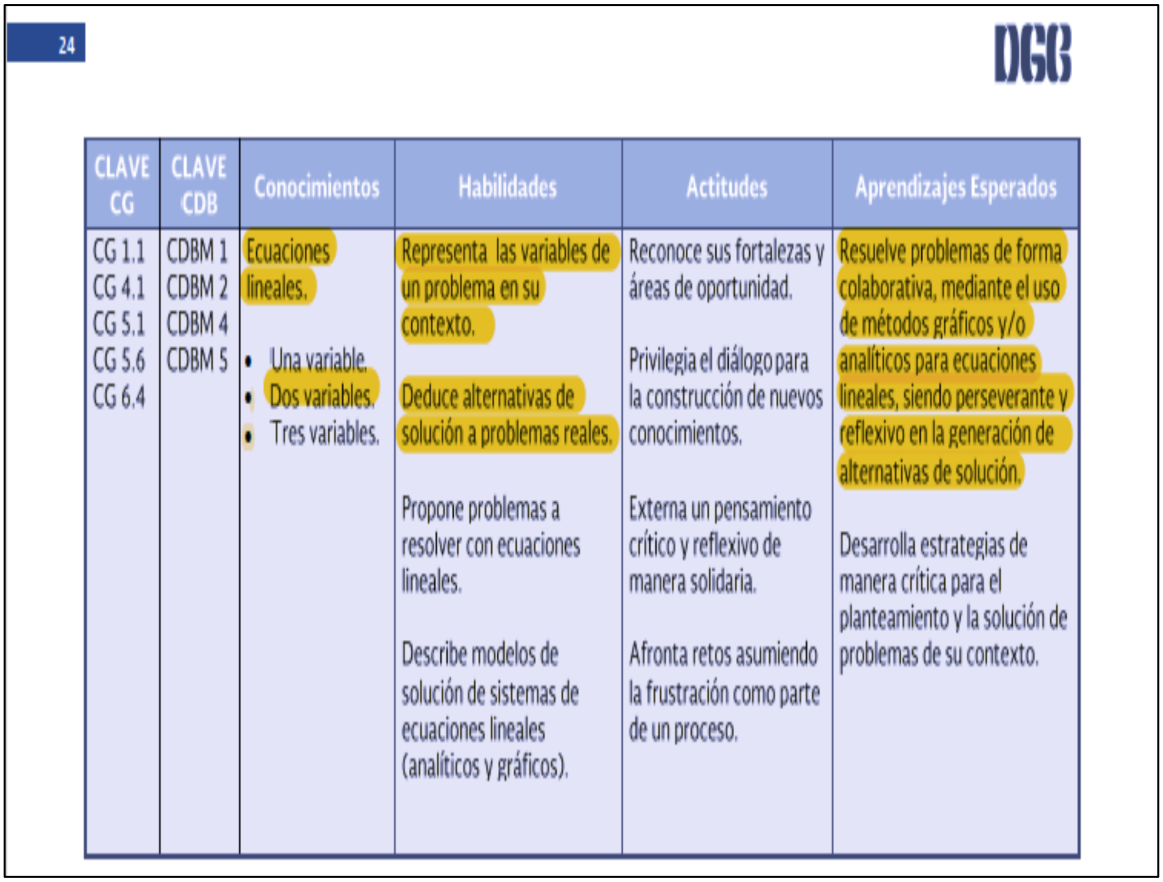
CLAVE CG	CLAVE CDB	Conocimientos	Habilidades	Actitudes	Aprendizajes Esperados
CG 5.1 CG 5.2 CG 8.2	CDBM 2 CDBM 3	Números • Clasificación y propiedades de los números reales. • Operaciones con números reales. ▪ Leyes de los signos. ▪ Leyes de los exponentes. ▪ Jerarquía de operaciones. ▪ Mínimo común múltiplo. ▪ Máximo común divisor.	Clasifica los números reales. Utiliza las propiedades de los números reales en operaciones aritméticas. Explica la solución de problemas aritméticos.	Privilegia el diálogo para la construcción de nuevos conocimientos. Afronta retos asumiendo la frustración como parte de un proceso. Se relaciona con sus semejantes de forma colaborativa mostrando disposición al trabajo metódico y organizado.	Resuelve y formula de manera colaborativa problemas aritméticos eligiendo críticamente una alternativa de solución que le permita afrontar retos en situaciones de su entorno. Argumenta procedimientos para resolver problemas aritméticos presentes en su contexto.



CLAVE CG	CLAVE CDB	Conocimientos	Habilidades	Actitudes	Aprendizajes Esperados
CG 1.4 CG 5.3	CDBM 2 CDBM 3 CDBM 5	Razones y proporciones. • Porcentajes. • Variación directa e inversa.	Interpreta razones. Calcula porcentajes. Resuelve proporciones. Identifica las relaciones entre variables. Estima el comportamiento de variables.	Toma decisiones de manera consciente e informada asumiendo las consecuencias. Privilegia el diálogo para la construcción de nuevos conocimientos. Se relaciona con sus semejantes de forma colaborativa mostrando disposición al trabajo metódico y organizado. Externa emociones e ideas ante las causas y consecuencias de sus actos para la toma de decisiones.	Resuelve problemas de razones y proporciones en situaciones cotidianas que requieren de una toma de decisiones consciente e informada.



CLAVE CG	CLAVE CDB	Conocimientos	Habilidades	Actitudes	Aprendizajes esperados
CG 5.1 CG 5.2 CG 8.2	CDBM 1 CDBM 3	Lenguaje algebraico. Leyes de los exponentes y radicales. Operaciones con polinomios. Productos notables. Factorización. Fracciones algebraicas.	Utiliza operaciones algebraicas para resolver problemas de la vida cotidiana. Reconoce el lenguaje algebraico así como las leyes de los exponentes y radicales en la resolución de problemas. Identifica los procedimientos para resolver problemas algebraicos. Explica la solución de problemas algebraicos.	Afronta retos asumiendo la frustración como parte de un proceso. Expresa libremente sus ideas, mostrando respeto por las demás opiniones. Se relaciona con sus semejantes de forma colaborativa mostrando disposición al trabajo metódico y organizado. Maneja y regula sus emociones reconociendo sus fortalezas y áreas de oportunidad.	Utiliza el lenguaje algebraico para representar situaciones reales e hipotéticas siendo perseverante en la búsqueda de soluciones. Propone procesos de solución identificando posibles errores. Aplica el álgebra en su vida cotidiana favoreciendo su pensamiento crítico.



CLAVE CG	CLAVE CDB	Conocimientos	Habilidades	Actitudes	Aprendizajes Esperados
CG 1.1 CG 4.1 CG 5.1 CG 5.6 CG 6.4	CDBM 1 CDBM 2 CDBM 4 CDBM 5	Ecuaciones lineales. • Una variable. • Dos variables. • Tres variables.	Representa las variables de un problema en su contexto. Deduce alternativas de solución a problemas reales. Propone problemas a resolver con ecuaciones lineales. Describe modelos de solución de sistemas de ecuaciones lineales (analíticos y gráficos).	Reconoce sus fortalezas y áreas de oportunidad. Privilegia el diálogo para la construcción de nuevos conocimientos. Externa un pensamiento crítico y reflexivo de manera solidaria. Afronta retos asumiendo la frustración como parte de un proceso.	Resuelve problemas de forma colaborativa, mediante el uso de métodos gráficos y/o analíticos para ecuaciones lineales, siendo perseverante y reflexivo en la generación de alternativas de solución. Desarrolla estrategias de manera crítica para el planteamiento y la solución de problemas de su contexto.