UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

SECRETARIA ACADÉMICA

COORDINACIÓN DE POSGRADO

DOCTORADO EN EDUCACIÓN

¿A qué se deben las respuestas erróneas de alumnos mexicanos en evaluaciones de matemáticas? Entre el sentido común y la argumentación matemática.

Tesis que para obtener el Grado de

Doctora en Educación

Presenta

Rosa María García Méndez

Directora de Tesis: **Dra. Mariana Luisa Sáiz Roldán**.

México, Distrito Federal

Octubre, 2011.

Resumen

Un aspecto poco atendido en las investigaciones respecto de los resultados obtenidos por estudiantes mexicanos en evaluaciones nacionales e internacionales, es el fenómeno de las respuestas erróneas en preguntas de opción múltiple o de respuesta abierta. Si bien se han realizado esfuerzos por explicar el bajo rendimiento y elevar la calidad del sistema educativo, la mayoría de las investigaciones desarrolladas al respecto parten del número de aciertos alcanzados antes que centrarse en las causas que generan el problema. Estas investigaciones, desde una perspectiva exógena al alumno, producen información para la toma de decisiones en el contexto educativo como son adecuaciones curriculares o incorporación de herramientas tecnológicas a la enseñanza. Sin embargo, difícilmente generan información aplicable a los procesos cognitivos de los estudiantes o al quehacer docente.

La investigación cuyos resultados se reportan en este documento, plantea un punto de vista endógeno al alumno desde el cual se busca rastrear en la mente del estudiante las causas que generaron los desaciertos.

Participaron en el estudio 74 alumnos de tres secundarias ubicadas en el Distrito Federal. Utilizamos 43 de los 102 reactivos liberados por el International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA por sus siglas en inglés.) en 1996 correspondientes a la prueba del Third International Mathematics and Science Study (TIMSS por sus siglas en inglés) 1995, particularmente los reactivos correspondientes a los contenidos de Fracciones, Sentido Numérico y Proporcionalidad. Para la toma de datos utilizamos tres instrumentos: dos cuestionarios y una entrevista, aplicados en dos fases distintas a lo largo de dos años.

En el desarrollo del estudio, que va desde la identificación de un desacierto hasta la exploración retrospectiva de las estrategias y procedimientos fallidos empleados en la

resolución de un problema, localizamos dos fuentes de origen para nuestras explicaciones del porqué de las respuestas erróneas. En principio definimos dos categorías para nuestras explicaciones: a) argumentación matemática y b) sentido común. Estas dos categorías surgieron al observar, por una parte, el uso del conocimiento aprendido de contenidos curriculares y por otra la adhesión al sentido común en la elección y desarrollo de una estrategia resolutiva.

Los rasgos característicos de la información colectada nos llevaron a identificar estrategias acompañadas por diversos procedimientos que los alumnos emplearon de forma fallida. La propia información permitió recuperar la razón de elección de estrategias y procedimientos a través de los razonamientos expuestos por los estudiantes durante la entrevista en la que participaron. Así surgió el grupo de categorías para el análisis con el que estudiamos las narraciones de los alumnos acerca de sus respuestas erróneas.

El intento por profundizar en los procesos de pensamiento de los estudiantes durante la resolución de los reactivos nos llevó a localizar un último rasgo por estudiar: el punto de inflexión, que se puede identificar entre el uso justificado de una estrategia y un mal producto. Se trata del lugar cognitivo en el que un procedimiento adecuado cambia de dirección para producir una respuesta errónea. Su localización involucra una oportunidad de mejora en el aprendizaje por ser un espacio que ofrece la posibilidad de re-modelar, a través de una re-mediación, la enseñanza en el salón de clase. La idea metodológica que seguimos en el análisis de la información, misma que nos facilitó la identificación del punto de inflexión, proviene de las aportaciones vygotskyanas acerca de la zona de desarrollo proximal y los procesos microgenéticos de aprendizaje, por lo que llamamos microgénesis a la cuarta categoría de análisis con la que estudiamos los conocimientos que los alumnos pusieron en juego para resolver los reactivos.

En breve, para el desarrollo de esta investigación estructuramos dos grupos de categorías: *Categorías de respuestas* y *Categorías de análisis*. Las categorías de respuestas son dos: 1) *Argumentación matemática* que alude al conocimiento adquirido merced a los procesos de escolarización destinados a comunicar contenidos curriculares y 2) *Sentido común* que se refiere a la experiencia cotidiana tanto del contexto educativo como del extraescolar. Las categorías de análisis, por su parte, se refieren a los actos realizados por los estudiantes durante la resolución de un examen. En este grupo estudiamos: 1) *Estrategias*, 2) *Procedimientos*, 3) *Razonamientos* y 4) *Procesos microcenéticos*.

Consideramos que los resultados de esta investigación cognitivocultural aportan información útil al profesor respecto del significado de los desaciertos ante una evaluación de aplicación masiva. Más aun, la profundidad que logramos en la exploración por el pensamiento de los estudiantes mientras resuelven un reactivo, nos da la oportunidad de ofrecer al maestro un reconocimiento de lo aprendido por el estudiante y el punto hasta dónde su conocimiento le permite llegar en la resolución de un reactivo, justo antes de tomar decisiones o acciones equivocadas. Pensamos que para los docentes la información recuperable con la metodología empleada en esta investigación, podría ayudarles a entender mejor los resultados de sus estudiantes y a facilitarles el trabajo en clase en dirección a subsanar las deficiencias en el aprendizaje.

Agradecimientos

Estoy profundamente agradecida con quienes me obsequiaron incontables horas de dedicación y paciencia a lo largo de todo mi proceso de doctorado, desde el germen de las ideas hasta concluir en este trabajo de investigación.

Dra. Mariana Luisa Sáiz Roldan. Gracias por sus saberes invertidos en mí, por las horas y las deshoras de trabajo, por su inagotable paciencia para dejarme experimentar aun contra todo sentido común, por la libertad para encontrar el camino. Gracias, sobre todo, por abrir la puerta a cualquier hora y escuchar las vicisitudes de estos cinco años compartidos y responder tan cálidamente.

Dr. Antonio Rivera Figueroa. Le comparto que atesoro en mi aprendizaje su siempre esclarecedor y nutritivo punto de vista académico. Gracias por las cuantiosas e inquietantes ideas concedidas a este trabajo, por las enorme cuenta en horas de apasionados diálogos sobre mis saberes y cómo robustecerlos, por confiar en que podría escribir sobre el hacer en la educación matemática, y por aceptar ideas de vuelta en esta última parte del camino.

Dra. Silvia Alatorre Frenk. Gracias por todas y cada una de sus aportaciones. En verdad su visión fresca sobre los primeros intentos de concretar este documento trajo la oportunidad de ver resultados ocultos a mi análisis, además de una organización más amable que hizo a la lectura más liviana. Gracias por tantas horas destinadas a la mejora y por la cajita de rayas y puntos que hermosearon notablemente el trabajo.

Dra. María Teresa Rojano Ceballos. Agradezco su tiempo dedicado a la lectura de este trabajo, sin embargo, mi deuda mayor con usted la he adquirido en las oportunidades de acercamiento a los fenómenos de aprendizaje en el laboratorio, en su sensibilidad para hallar preguntas por responder y en su confianza para permitirme explorar en todo ello.

Dra. Twiggy Ivonne Sandoval Cáceres. Gracias por dedicar tiempo en pensar maneras visuales de mejorar el texto, por cada idea discutida, y por toda la delicadeza para comunicar los productos de su lectura a este documento. Gracias por enriquecer mi formación académica y humana en esta parte del proceso.

Dra. María de Lourdes Guerrero Magaña. Agradezco la incondicionalidad a la lectura de este trabajo, sus sugerencias y comentarios para los que ni la distancia ni el tiempo fueron obstáculo. Gracias por su acompañamiento y complicidad en este tiempo de construir aprendizaje.

Dra. Verónica Hoyos Aguilar. Gracias por aceptar leer este trabajo y hacer posible que a final de cuentas llegara a sus manos como inicialmente fue mi deseo. Las charlas vividas me ayudaron a clarificar ideas y organizar pensamientos que, de otra manera habrían obscurecido mi comunicación a los lectores. Gracias por los consejos rumbo al examen, por el ensayo en la realidad y por la calidez de su trato.

Gracias infinitas a todos ustedes por mejorar lo mejorable en lo académico y en lo humano, por convencerme de que siempre hay nuevos horizontes a dónde mirar, por hacerme sentir que el horizonte es alcanzable.

Dedicatoria

Hoy me siento inmensamente feliz de compartir con mis amores el producto de cinco años de aprendizaje, trabajos, risas, incertidumbres, alegrías y errores. En estos años de evoluciones e involuciones, de cambios buenos y malos en los que hasta algunos nombres cambiaron, los afectos siempre crecieron.

Con toda la irreverencia en la forma, pero con el sentir a flor de piel dedico este esfuerzo, en el que participamos tantos, a mis otrora criaturas a quienes amo desde antes de conocerlos y porque el andar con ellos ha sido mejor que cualquier aventura. Por orden de aparición en mi libreto vital dedico este trabajo a Cali, Carlita o Carla Alejandra, como se le conoce en el mundo adulto, de quien aprendí la tolerancia y desesperación necesarias para moverme hacia mis proyectos pese a todo viento adverso. Su cándido andar por la vida, su generosidad con los desvalidos felinos, y su inagotable paciencia para restaurar lo que sea, han sido mi libro de texto.

Blanco de esta dedicatoria también es Rodrigo Alfonso, Poncho o Shusho como le decimos los cuates. Piloto de pruebas de vida siempre dispuesto a compartir lo que sabe y a aprender lo que no. Convencido confeso de que el límite es el pudor y no la ignorancia, se encargó de obligarme a resolver todos mis apuros tecnológicos a lo largo todo el proceso hasta terminar de escribir este documento y de la funcionalidad de mis pertenencias, de las tecnológicas a las personales. En verdad, su presencia ha sido mi práctica.

Destinatario de esta dedicatoria, es así mismo Juan Carlos, Jonás, o Poyo griego. Amante de la vida y el conocimiento, practicante de todo oficio, explorador de todos los riesgos junto a quien puedo recorrer palabras y caminos plagados de locuras y asombros. Maestro en poner a prueba mis aprendizajes en aplomo y decisiones rápidas, me ha hecho probar que después de la teoría y la práctica no hay más que hacerse competente en el oficio de vivir.

A ustedes tres que hacen de mi vida una aventura, un reto, un oasis, dedico este animado esfuerzo en agradecimiento por todas las horas arrebatadas a nuestra historia común. Los amo profundamente.

Antonio, con todo mi amor te dedico el fruto de tantas y tantas horas de voluntad por ver concluida esta investigación. Tu compañía en este período tan intenso de nuestras vidas me forjó en muchas cosas, a veces en la tristeza, a veces en el dolor, otras tantas en la alegría, muchísimas en la creatividad y el deseo por saber. Te agradezco el gimnasio que me proveíste, en él me descubrí músculos de tolerancia y fuerza mientras reduje al mínimo las expectativas sin fundamento. Gracias por ser un mal cómplice de mis frustraciones, por empujarme a la realidad, por crear situaciones de las que, con todo, salí fortalecida y serena, convencida de que la vida siempre me ofrecerá la fuerza del rayo y el aroma de un buen café mientras la tormenta pasa.

Porque acepté un día que las musas surgen del trabajo duro y constante, y porque nada fue más motivador que mirar cómo mis pensamientos evolucionaron a la par del esfuerzo y los aciertos, también me dedico este bello y perfectible trabajo.

Gracias a los chiquitos que participaron en esta investigación, a sus padres que nos permitieron entrar a sus vidas, a la directora y maestras entusiastas por ayudar a sus alumnos. Y también a quienes piensan que iniciamos un sendero de investigación por el que quieren caminar.

Contenido

0. El origen

A propósito del bajo rendimiento de los estudiantes mexicanos en evaluaciones nacionales e internacionales se han desarrollado investigaciones en busca de explicaciones al fenómeno y de mejoras al rendimiento escolar. En México, la diversidad de perspectivas de estudio organizadas por el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) incluye el contexto socioeconómico, la región geográfica donde los estudiantes viven y asisten a la escuela, el contexto sociocultural, la diversidad lingüística, el logro educativo y las brechas entre entidades y modalidades escolares (INEE, 2006a, INEE 2006b). Asimismo, se ha indagado sobre la incidencia de factores familiares y escolares en los resultados obtenidos (INEE 2005).

Otras investigaciones destacan la importancia de la traducción de pruebas (Solano, Contreras y Backhoff 2006), esencialmente en la parte relacionada con el conocimiento de los traductores acerca de los aspectos sutiles del uso del lenguaje. Por su parte Rivera, Guerrero, Sepúlveda y Alaizola (2006) enfatizan la importancia que se le debe dar al buen diseño de los reactivos que integran las pruebas, por ejemplo evitar que el alumno pueda responder por eliminación en una pregunta de opción múltiple, en lugar de resolver el problema planteado. Los autores también señalan que es importante cuidar el tiempo de respuesta de cada una de las preguntas del cuestionario.

Una línea diferente de trabajo, asociada al currículum, ha sido el análisis de la correspondencia entre las secuencias didácticas de los libros de texto y su evaluación mediante pruebas objetivas (García, 2005). Algunas investigaciones son de carácter comparativo, por ejemplo Ojeda (1999) reporta diferencias entre resultados obtenidos por estudiantes mexicanos y los obtenidos en otros países.

Varios de estos trabajos interesados en hallar explicaciones acerca del bajo rendimiento de los estudiantes mexicanos comparten dos características peculiares: Centran la atención en factores externos al alumno, y parten del logro alcanzado en los exámenes, es decir, de la cantidad de aciertos obtenidos. Estos estudios en general hacen sugerencias o recomendaciones para modificar las condiciones contextuales en que se desarrolla el aprendizaje, el refinamiento metodológico para la traducción de pruebas o la incorporación de tecnología digital como son las computadoras. Desde esa perspectiva, las sugerencias a profesores y autoridades educativas consisten en modificar el contexto educativo mediante decisiones como la adquisición de artefactos tecnológicos, antes que incorporar adecuaciones didácticas a la enseñanza o el aprendizaje, debido a la naturaleza exógena al alumno de las causas estudiadas como generadoras del pobre desempeño de los estudiantes.

Desde nuestro punto de vista, es necesario desarrollar investigaciones de naturaleza endógena al alumno, que busquen en la mente del estudiante aquello que lo lleva a producir errores en la resolución de un problema. Con el interés de encontrar orígenes del fenómeno y de aportar información útil al profesor en su tarea de enseñanza, consideramos conveniente trabajar desde una posición poco explorada: Partir de los desaciertos en las respuestas de los reactivos e indagar en retrospectiva, mediante un proceso reflexivo basado en la evaluación dinámica, los procesos empleados en la resolución de los reactivos y el origen del desacierto.

Alrededor de esta idea fue que decidimos buscar explicaciones al bajo rendimiento escolar en el aprendizaje, de modo que diseñamos una investigación cognitivo cultural con estudiantes de 2° grado de secundaria, centrada en identificar las estrategias, los procedimientos y los razonamientos que llevan al alumno a elegir una opción no correcta o emitir una respuesta errónea. Para realizar el estudio hemos utilizado los reactivos liberados por la International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA por sus siglas en inglés.) en 1996 correspondientes a la prueba del Third International Mathematics and Science Study (TIMSS por sus siglas en inglés) 1995, centrándonos particularmente en los contenidos de Fracciones, Sentido Numérico y Proporcionalidad.

Las razones de elección tanto de los reactivos del cuestionario del TIMSS 1995 como de los estudiantes del segundo grado de secundaria para este trabajo son diversas. En 1995 México participó en la evaluación internacional aplicada al grupo de población estudiantil del 8° grado, correspondiente a 2° de secundaria en nuestro país; sin embargo los resultados de esa participación se desconocen debido a la decisión de las autoridades competentes de retirarse del proceso antes de la emisión de resultados. Este hecho despertó el interés de algunos investigadores, más que por conocer las causas de la decisión, por tener una idea de los resultados que se habrían obtenido de ser publicados (Solano, Contreras y Backhoff, 2006). Otra razón es la existencia de un estudio cuantitativo realizado en Zacatecas (Ojeda, 1999) en el mismo nivel educativo, cuya intención es comparar los resultados de los estudiantes zacatecanos con los obtenidos por otros países en esa aplicación internacional. Con todo, la motivación más importante para nosotros ha sido encontrar explicaciones a las diferencias en el rendimiento entre nuestros estudiantes y los alumnos de pueblos geográfica y culturalmente distintos de México, desde nuestra propia manera de vivir la educación.

Como se verá a lo largo del desarrollo de esta investigación, procuramos abrir ventanas de observación al fenómeno de la elección de opciones no correctas o de emisión de respuestas erróneas. Para acceder a la información y describir el objeto de investigación acudimos, en ciertas partes del camino, a referentes teóricos y metodológicos probados como eficientes en trabajos de naturaleza cualitativa. En otras partes nuestras experiencias, luego de los traspiés cometidos, se constituyeron en el referente de exploración y análisis. Estos acercamientos enriquecieron nuestra comprensión del fenómeno en estudio y ampliaron nuestros horizontes de estudio.

¿Por qué el cuestionario del TIMSS? Es el capítulo inicial en el que compartimos el origen de la investigación: la discusión en torno a evaluaciones internacionales a propósito de los resultados de la evaluación del Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes (PISA por sus siglas en inglés) 2006, durante una deliciosa charla de café. En los antecedentes aparecen las ideas que dieron forma a la pregunta de investigación y los objetivos que la acompañan, así como investigaciones relacionadas con el tema que nos ilustraron sobre el contexto en el cual tiene cabida este trabajo.

A continuación El capítulo 2, *Evaluaciones. Una línea de trabajo*, explica la manera en la que la visión en evaluación se ha ido ajustando a lo largo del tiempo en función de los propósitos y necesidades de los sistemas educativos y, en tiempos recientes, a las necesidades de aprendizaje de los estudiantes. A partir de esta revisión obtuvimos una línea de exploración cercana a la evaluación dinámica, para estudiar los resultados del aprendizaje a través de pruebas escritas.

El tercer capítulo, *Voces lejanas, ideas presentes*, guarda una reseña de la travesía en investigaciones por las cuales se ha intentado explicar qué ocurre en la mente mientras se aprende. A través de diversas líneas de investigación la psicología ha adquirido conocimiento acerca de la manera en que ocurre el aprendizaje, y ha desarrollado herramientas de observación, medición, y análisis valiosas para el estudio del aprendizaje en educación. Motivados por la utilidad de las aportaciones psicológicas para el estudio de los fenómenos propios de la educación matemática, integramos el marco teórico que guía esta investigación interesada en hallar explicaciones a los resultados obtenidos de aprendizaje en la aplicación de pruebas masivas.

El capítulo 4 *¿Cómo encontrar la causa de los yerros?,* constituye el diseño metodológico que fuimos construyendo durante el desarrollo de la investigación, desde su génesis, las tomas de datos y el refinamiento de los instrumentos de acopio de información, hasta el diseño del instrumento de análisis con sus respectivas aplicaciones y productos.

Narraciones: ventanas mentales. El quinto capítulo se integra del análisis de la información colectada. Los datos para el estudio son producto de la aplicación de los instrumentos II y III a estudiantes de 2° de secundaria quienes, a través de sus narraciones, aportaron evidencias del uso erróneo de estrategias, procedimientos y razonamientos en la resolución de reactivos. El proceso microgenético es una ventana adicional hacia los procesos mentales en el aprendizaje a la que accedimos mediante acompañamiento a los alumnos para llegar desde su desacierto a la respuesta correcta. En el análisis de los datos encontramos que ésta ventana permite ver el punto de inflexión entre un buen procedimiento y un mal resultado, sitio mental que indica un punto a fortalecer en la enseñanza.

En el capítulo 6, *No está en los genes. Una mirada a la cultura* se inscriben los resultados de la investigación, mismos que sirvieron de base para responder las preguntas planteadas en el capítulo uno; igualmente se presentan los productos logrados con respecto a los objetivos propuestos, organizados de acuerdo con las categorías de trabajo.

Finalmente, el capítulo 7 *Enseñar-Enseñador* ofrece una síntesis de los hallazgos en relación con el uso inadecuado de estrategias y procedimientos asistidos por razonamientos equívocos, punto desde el que se posibilita una nueva mediación de conocimientos a través de la re-modelación de tareas cognitivas, de acuerdo con la orientación teórica a la que acudimos en esta investigación.

1. ¿Por qué el cuestionario del TIMSS[1]?

A pesar de que la práctica de evaluar es una constante de los sistemas educativos, los resultados de aplicaciones internacionales suelen propiciar debates sobre la eficacia tanto de los sistemas educativos como del proceso evaluativo, incluyendo sus instrumentos. Desde el año 2000 México, junto con otros países miembros de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), participa en el Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes (PISA, por sus siglas en inglés) con la aplicación de su prueba cuyo propósito es medir habilidades para la vida (OECD, 2000). La aplicación de esta evaluación a intervalos de tres años genera, cuando se publican sus resultados, un desbordamiento de noticias, cuestionamientos, toma de decisiones, o al menos comentarios en el ámbito educativo nacional. A propósito de los desalentadores resultados publicados después de la aplicación en 2006, surgió en nosotros el interés por saber si el bajo rendimiento también se hallaba presente en evaluaciones internacionales que miden el aprendizaje de contenidos curriculares.

[1] Nos referimos en particular a los reactivos de Fracciones, Sentido numérico y Proporcionalidad que formaron parte del examen TIMSS-1995 liberados por IEA en 1996.

El Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias (TIMSS, por sus siglas en inglés) es una evaluación diseñada por la Asociación Internacional para la Evaluación del Rendimiento Educativo (IEA, por sus siglas en inglés), para medir el aprendizaje de conocimientos curriculares e informar a las autoridades educativas de manera que puedan mejorar sus sistemas educativos (Beaton, 1996). Se trata de una prueba masiva de aplicación internacional en la que México participó en 1995, de la cual se desconocen los resultados por haberse retirado antes de la publicación en 1996. Algunas especulaciones respecto a la decisión del retiro derivaron en investigaciones sobre el rendimiento de los estudiantes en esa prueba. Solano, Contreras y Backhoff (2006) por ejemplo sugieren, que los posibles resultados se asociaban a dificultades en la adecuación de los reactivos al idioma. Con otro enfoque, Ojeda (1999) desarrolló una investigación cuantitativa aplicando los 102 reactivos liberados por el IEA de esa evaluación a una población zacatecana de 1113 alumnos de secundaria para mirar el rendimiento que lograban estudiantes mexicanos.

El instrumento aplicado en el estudio Zacatecas se integró con los 102 reactivos disponibles, organizados desde su aplicación en el estudio de 1995 en seis bloques de contenidos con tres formatos de respuesta como se muestra en la siguiente tabla:

Contenido	Formato de respuesta			Total
	Opción múltiple	Respuesta breve	Respuesta extendida	
Fracciones y sentido numérico	26	10	1	37
Geometría	16	1	0	17
Álgebra	13	3	2	16
Representación y análisis de datos. Probabilidad	10	1	1	12
Medición	7	3	2	12
Proporcionalidad	3	2	1	6
Total	75	20	7	**102**

Tabla 1.1 Organización de reactivos por formato de respuesta.

Existen además cuatro expectativas a medir en los reactivos: 1) Conocimientos, 2) Uso de procedimientos de rutina, 3) Solución de problemas, y 4) Procedimientos complejos.

A partir de los resultados obtenidos en la aplicación, Ojeda hace comparaciones pregunta por pregunta del promedio obtenido en Zacatecas con los alcanzados por Canadá y Estados Unidos y con el promedio internacional. El comparativo de los cuatro promedios deja ver situaciones peculiares en las respuestas, por ejemplo en el siguiente reactivo:

1.7. Carlos tenía $ 30.00 para comprar leche, pan y huevos. Cuando llegó a la tienda encontró que los precios eran los siguientes:

¿En cuál de los siguientes momentos tendría sentido usar una estimación en lugar de emplear números exactos?

A) Cuando Carlos trató de decidir si $30.00 era suficiente dinero.
B) Cuando el cajero anotó el total en la caja registradora.
C) Cuando Carlos preguntó cuánto debía pagar.
D) Cuando el cajero le regresó el cambio a Carlos.

Respuesta correcta: ***A***

Promedio Internacional		***Zacatecas***
64.7%		**36.5%**
Canadá	Estados Unidos	
85.7%	82.5%	

Imagen 1. Ítem 1.7. Tomado de Ojeda (1999) pág. 56.

Éste ítem es uno de los 37 correspondientes a Fracciones y sentido numérico diseñado con la expectativa de medir el conocimiento adquirido por los alumnos. Entre los porcentajes alcanzados en el promedio internacional y Zacatecas se observa una diferencia porcentual desfavorable para los alumnos zacatecanos de 28.2%, pero la diferencia con respecto a Canadá y Estados Unidos es mucho mayor, cercana al 50%. Más puntualmente aún Ojeda señala: a) El porcentaje de aciertos zacatecano es menor a cualquiera de los países participantes, y b) una tercera parte de la población participante consideró que el momento en que tiene sentido una estimación es el de pagar, opción C.

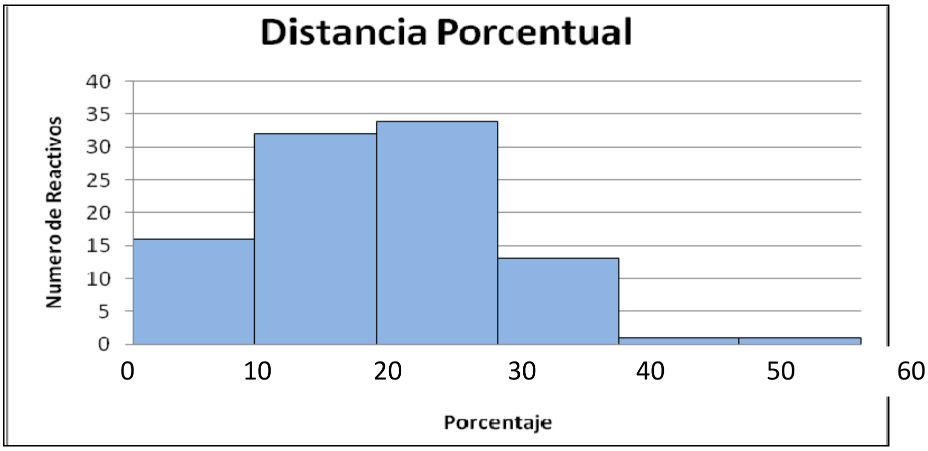
Los datos observados junto con los comentarios en este reactivo hicieron que nos preguntáramos las causas que produjeron tal resultado. Más allá de las posibles respuesta que pudiesen aportar los datos, hicimos algunas suposiciones sobre el origen del fenómeno, entre ellas una que alude a la diferencia en el tipo de actividades que los jóvenes participantes realizan en sus comunidades, lo que condujo a plantear nuevas interrogantes como ¿las prácticas culturales implicarán un sesgo en las respuestas? De ser así ¿de qué tipo?

Luego de una lectura cuidadosa a la pregunta con sus opciones de respuesta se hicimos algunas reflexiones en torno a qué conocimiento necesitaría el alumno para responder acertadamente el reactivo con la elección del inciso A. De esas reflexiones se desprende que por una parte, la respuesta correcta pareciera incorporar a la estimación como una manera de proceder con sentido para aplicar los conocimientos escolares; por otra, las tres opciones no correctas tienden a dejar fuera el uso de los datos numéricos presentes en la pregunta. Una tercera idea es que la pregunta pide al alumno tomar una decisión y que las decisiones suelen fundarse en vivencias más que en estimaciones aritméticas.

Las diversas interrogantes surgidas del ítem 1.7 por sí mismas sugerían la necesidad de un acercamiento cualitativo a los resultados de la investigación cuantitativa para encontrar explicaciones, de modo que con la intención de perfilar líneas de aproximación cualitativa (Bell, 1999) hicimos una exploración cuidadosa a los porcentajes de aciertos alcanzados en cada reactivo, y obtuvimos lo siguiente:

1) En cinco de los 102 reactivos, Zacatecas supera el porcentaje promedio internacional: un reactivo de álgebra con 3.8%, dos de fracciones y sentido numérico con 4.5% y 11.5%, uno de representación de datos con 1.5% y uno de proporcionalidad con 1.2% respectivamente.

2) En 97 de los 102 reactivos el promedio internacional supera al zacatecano con una variación porcentual entre 0.3% y 56.6%
3) La distancia porcentual en desventaja entre el promedio internacional y el zacatecano se comporta así:



Histograma 1. Distancia porcentual desfavorable para Zacatecas en 97 reactivos.

Se puede observar en esos datos que la mayoría de los reactivos arrojan una distancia desfavorable para los estudiantes zacatecanos de entre 10% y 30% con respecto al promedio internacional, y que además del aglutinamiento en esa diferencia porcentual hay casos extremos.

El ítem con peores resultados fue el 1.11, que quedó 56.6% por debajo del promedio internacional, como se ve en la siguiente figura.

1.11. ¿Qué número tiene cinco centenas, cuatro unidades y siete décimos?

A) 54.7 C) 547

B) 504.7 D) 5004.7

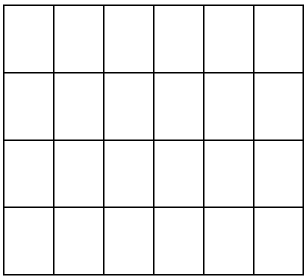
Respuesta correcta: ***B***

Promedio Internacional		***Zacatecas***
84%		**27.4%**
Canadá	Estados Unidos	
89.7%	90.9%	

Figura 1. Ítem 1.11. Tomado de Ojeda (1999), pág. 40.

El segundo resultado desventajoso más distante del promedio internacional es el ítem 3.18, que quedó 40.2% por debajo del promedio internacional.

3.18. Sombrea $\frac{5}{8}$ del total de la siguiente cuadrícula.



Respuesta correcta: ***15 cuadritos.***

Promedio Internacional		***Zacatecas***
51.5%		**11.3%**
Canadá	Estados Unidos	
65.7%	43.3%	

Figura 2. Ítem 3.18. Tomado de Ojeda (1999) pág. 115.

Se trata de un reactivo aparentemente simple siempre que el examinado note la demanda de sombrear una fracción equivalente a la expuesta.

En el extremo opuesto, con apenas 0.3% por debajo del promedio internacional, menos desfavorable que los anteriores ejemplos, se ubica el ítem 1.23.

1.23. ¿Cuál de los siguientes números representa al número 89.0638 redondeado a centésimos?

A) 100
B) 90
C) 89.1
D) 89.06
E) 89.064

Respuesta correcta: ***D***

Promedio Internacional		***Zacatecas***
45.4%		**45.1%**
Canadá	Estados Unidos	
70.3%	65.2%	

Figura 3. Ítem 23. Tomado de Ojeda (1999) pág. 52.

Entre los ejemplos extremos del promedio de aciertos logrados hay algo interesante: ambos tratan conocimientos del sistema de numeración decimal; mientras el contenido del ítem 1.11 requiere revisar generalidades de los números decimales como su lectura y escritura, el ítem 1.23 verifica conocimiento sobre redondeo en la expansión decimal. A simple vista los alumnos alcanzaron mejor puntaje en ideas generales que en aplicación de conocimientos más complejos, aunque ambos contenidos de aritmética se estudian en primer año de secundaria. Otro ejemplo en la búsqueda de nuestra línea de trabajo es que las diferencias porcentuales desventajosas más elevadas se aglutinan en los reactivos asociados a Fracciones y Sentido Numérico.

El proceso de revisión trajo consigo preguntas como ¿Por qué Zacatecas difiere porcentualmente tanto de Canadá, Estados Unidos, y el promedio internacional? ¿Qué elementos en los reactivos producen una variación tan amplia en la distancia porcentual de las respuestas? ¿Hay correspondencia curricular entre el TIMSS y el Plan y programas de estudio para secundaria en México? ¿Habrá influencia cultural en el bajo perfil registrado entre los estudiantes de Zacatecas? ¿Cuáles podrían ser las explicaciones al bajo rendimiento observado?

La pregunta ¿Hay correspondencia curricular entre el TIMSS y el Plan y programas de estudio para secundaria en México? es la única susceptible de ser respondida desde la propia investigación de Ojeda (1999) y el plan y programas de estudios para secundaria en México, es decir, sin que se requiera una investigación empírica adicional. Previamente a la aplicación en Zacatecas, Ojeda verificó la correspondencia del contenido de cada reactivo con los contenidos del currículum vigente para secundaria en ese momento. En este trabajo también verificamos la correspondencia entre los contenidos de los reactivos del estudio Zacatecas y los contenidos del currículum (Ver anexo 1) para secundaria inscritos en Programas de estudio (SEP, 2006) vigente al inicio de esta investigación.

Por la forma en que se presentan los resultados del TIMSS, número de aciertos alcanzados, hallar respuestas al resto de nuestras preguntas planteadas es una posibilidad fuera de alcance. Para encontrar explicaciones sobre el bajo perfil observado en la investigación de Ojeda, pensamos en diseñar un estudio cualitativo cuidadoso y profundo de las respuestas a la prueba del TIMSS, el que por su perspectiva tendría que ser acotado a un número de reactivos reducido, y a una manera diferente de ver la información, o en su caso, de recuperarla. A partir de esta formulación y del conocimiento del obstáculo que implica contar únicamente con el número de aciertos, se pensó en generar una metodología que permitiera rastrear desde el desacierto las causas que lo generan.

El diseño de investigación pensado con esas características queda inserto en un acercamiento cualitativo que incorpora, por su extensión y las razones surgidas de los resultados cuantitativos comentados, los reactivos de los bloques Fracciones, Sentido numérico, y Proporcionalidad. Decidimos hacerlo así porque la aritmética es fundamental en el desarrollo del pensamiento matemático y su conocimiento es plataforma para el aprendizaje de la matemática.

Aún en espera de condiciones similares a la de aplicación del TIMSS-1995, finales del ciclo escolar, para recoger información con el cuestionario acotado en Fracciones, Sentido numérico y Proporcionalidad e intentar responder nuestras preguntas, hicimos un piloteo con un grupo reducido de estudiantes de secundaria con el propósito de vislumbrar posibles respuestas. De ese ejercicio colectamos muchas respuestas erróneas coincidentes en la opción equivocada y en la explicación que los participantes dieron a su elección. A partir del cotejo de los desaciertos de los participantes en el piloteo notamos que si bien emitían respuestas erróneas, las estrategias empleadas podrían haberles llevado a resultados correctos de haber procedido adecuadamente durante todo el proceso de resolución. Con base en esta observación y en la información estudiada hasta ese momento formulamos la pregunta de investigación:

¿A qué se deben las respuestas erróneas de alumnos mexicanos al examen del TIMSS?

A través de cuya respuesta esperábamos conocer qué estrategias matemáticas, procedimientos fallidos y razonamientos erróneos llevan al alumno a un desacierto, cuando él piensa que sigue el camino correcto en la resolución de los reactivos de un examen.

El interés por dar respuesta a las interrogantes escritas párrafos atrás incluyó una búsqueda bibliográfica de trabajos relacionados con justificaciones a los resultados obtenidos por estudiantes mexicanos en evaluaciones de aplicación masiva, aún si éstas cubrían únicamente el ámbito nacional. Los productos de esa exploración realizada en dos periodos diferentes a través del desarrollo de esta investigación se inscriben en el siguiente apartado.

1.1 Respuestas documentales, un contexto de investigación

Durante la espera por el fin de cursos del ciclo escolar 2007-2008 hubo lugar al primer periodo de búsqueda documental de respuestas. Encontramos algunas líneas de investigación que en general atribuyen el bajo rendimiento a factores externos al alumno. INEE (2005, 2006a y 2006b) se inclina por situaciones contextuales escolares como las condiciones físicas y geográficas en las que se ubican las escuelas, y extraescolares como el nivel académico de las madres o las condiciones socioeconómicas de la radicación. Solano, et al (2006) ponen el acento en la traducción de reactivos. Rivera, et al (2006), revisan la pertinencia y formulación de los reactivos que integran las pruebas, y García (2005) en la correspondencia curricular. En ellas se observó una tendencia a tomar como punto de partida el número de aciertos obtenidos en las pruebas para referirse al rendimiento, con lo que las respuestas a las causas que producen desaciertos quedan fuera de foco.

Sin explicaciones a nuestras preguntas formuladas pero con algunos indicios sobre elementos en la resolución de los ítemes que podrían causar yerros en las respuestas al examen, provenientes del ensayo inicial que explicaremos en el capítulo cuatro, convenimos llevar a cabo la investigación poniendo atención en elementos que en la literatura revisada aun quedaban pendientes. Así, las estrategias a las que los estudiantes recurren para dar respuesta a los reactivos y el tipo de razonamiento empleado que les lleva a decidir por un procedimiento particular se convirtieron en objetos de estudio para nuestra exploración. También nos propusimos revisar el proceso por el que transita el alumno de la respuesta errónea a la correcta, siempre que la información recuperada en el estudio lo permitiera.

Esta tarea produjo los objetivos de trabajo que acompañan a la pregunta de investigación:

1. Identificar las estrategias, procedimientos y razonamientos que lleva a cabo el alumno para obtener una respuesta incorrecta.

2. Seguir el proceso microgenético por el que transita el alumno de la respuesta errónea a la correcta.

Mientras se integraban los insumos para la aplicación de la prueba, como el cuestionario con 43 preguntas, y se concertaba la participación de algunas secundarias, efectuamos nuevas exploraciones documentales sobre el tema. Dado el poco éxito logrado prolongamos la búsqueda bibliográfica en un segundo período desde la toma final de datos en el otoño 2009 hasta concluir el análisis de la información obtenida en la colecta de datos que se presenta en este documento. A lo largo de ese periodo se recuperaron resultados de investigación en los que las explicaciones a las respuestas incorrectas tratan el impacto de elementos realistas en la contextualización de pruebas (Cooper y Dunne, 2010), la necesidad de dar sentido a los problemas escolares para resolverlos adecuadamente (Palm, 2007), la descontextualización de la vida real, por parte de los alumnos, en los problemas propuestos en el medio escolar (Inoue, 2005), y un acercamiento a la superposición de la realidad con la escuela (García, Sáiz y Rivera, 2010). Sin embargo, lo que conduce a los desaciertos aún se halla poco atendido.

A manera de síntesis, en el siguiente apartado subrayamos la pregunta de investigación y los objetivos que la acompañan.

1.2 Pregunta y objetivos de investigación

Una característica importante de la investigación cualitativa es la forma de acercarse al fenómeno que se pretende describir. Como condición básica, los investigadores debieran observar la situación sin que medie hipótesis o supuesto alguno, de manera que la riqueza de la información aporte por si misma las líneas de exploración y de explicación sobre el fenómeno observado (Bell, 1999; Rojas, 1977; Cohen, Manion & Morrison, 2005). En un proceso paralelo al acercamiento, sugieren los autores mencionados, conviene formular la pregunta o las preguntas que guiarán la investigación, pues a medida que se profundiza en el fenómeno se delimitan los temas centrales a estudiar y el modelo metodológico que ha de seguirse para responder la interrogante central.

Como producto de la lectura cuidadosa de los reactivos del TIMSS-1995, de la información obtenida a partir del ensayo inicial al que dentro de la metodología expuesta en el capítulo cuatro llamaremos piloteo, y de la exploración documental respecto de las causas por las cuales los alumnos elijen una respuesta errónea, construimos la siguiente pregunta de investigación:

¿A qué se deben las respuestas erróneas de alumnos mexicanos al examen del TIMSS?

Pareciera redundante decir que el objetivo central de este trabajo es responder la pregunta de investigación, sin embargo, los datos del piloteo y la expectativa de responder nuestras preguntas iniciales contenidas en el primer apartado de éste capítulo, hicieron posible puntualizar los dos grandes objetivos a alcanzar:

1. Identificar las estrategias, procedimientos y razonamientos que lleva a cabo el alumno para obtener una respuesta incorrecta.

2. Seguir el proceso microgenético por el que transita el alumno de la respuesta errónea a la correcta.

En estas líneas recordamos las preguntas iniciales que ayudaron a delinear la naturaleza de la investigación por la que nos inclinamos y que motivaron el desarrollo de este trabajo.

1. ¿Por qué Zacatecas difiere porcentualmente tanto de Canadá y Estados Unidos, y del Promedio internacional?

2. ¿Qué elementos en los reactivos producen una variación tan amplia en la distancia porcentual de las respuestas?

3. ¿Habrá influencia cultural en el bajo perfil registrado?

4. ¿Cuáles podrían ser las explicaciones a los pobres resultados?

5. ¿Hay correspondencia curricular entre el TIMSS y el Plan y programas de estudio para secundaria en México?

Excepto por la quinta pregunta, que se respondió en el primer apartado de este capítulo, las cuatro primeras se concentraron en la pregunta guía, a través de cuya respuesta esperamos contestar cada una de las preguntas subyacentes.

Avanzar por el desarrollo de la investigación expuesta requiere del conocimiento de elementos específicos, como la visión y los recursos con que se trabaja en el terreno de las evaluaciones por el que se pretende transitar. El siguiente capítulo se pensó como un buen sitio para puntualizar sobre esos elementos.

2. Evaluación: Una línea de trabajo

Característicamente la investigación cualitativa se inicia en la observación de un fenómeno sobre el que se formulan interrogantes para cuya respuesta se requiere, más que la enunciación de hipótesis o la adhesión a teorías preconcebidas, una metodología flexible por la cual se abran ventanas de conocimiento respecto del hacer de las personas en su contexto (Taylor y Bogdan, 1990). Esta perspectiva holística invita al investigador a realizar un ejercicio de observación del fenómeno desde el entramado que lo genera.

Por su origen, esta investigación de corte cualitativo, nacida de los resultados de una evaluación internacional, se desarrolla en el terreno de las evaluaciones al aprendizaje. Siendo así, el estudio sobre el fenómeno de los desaciertos en la prueba del TIMSS, propone un rastreo por la visión, la tipología y algunos recursos con los que se trabaja en evaluación.

Los siguientes apartados muestran el acercamiento a dichos rasgos, considerados útiles para esta investigación.

2. 1 Un poco de historia

Aunque se tiene noticia del uso de cuestionarios por Sócrates y otros maestros griegos desde el siglo V a de C., la evaluación alcanza auge como instrumento de validación de conocimientos, a manera de práctica sistemática en los centros escolares, hasta finales del siglo XIX.

La primera evaluación del rendimiento escolar reconocida con ese estatus fue la realizada por Mann en 1845, para la cual se utilizaron tests de rendimiento con la intención de saber si en las escuelas de Boston educaban bien a sus estudiantes. Entre 1889 y 1897 Joseph Rice estudió los conocimientos de ortografía de 33000 alumnos, estudio que fue reconocido en Norteamérica como la primera evaluación formal de un programa educativo (Stufflebeam y Shinkfield, 1985). Con respaldo en esa experiencia, se llegó a consensuar que los test estandarizados significaron una mejor aproximación a la evaluación en el intento por hacer más eficiente la educación y que esta estuviera al alcance de un mayor número de estudiantes.

En los años cincuenta se plantearon por primera vez evaluaciones internacionales para valorar el rendimiento de los estudiantes en materias y grados específicos a manera de comparaciones entre distintos países. La utilidad de los resultados de esas aplicaciones es el referente de calidad de los sistemas educativos de los países participantes, así como la competitividad en los mercados internacionales (Zorrilla, 2003). En este contexto se crea en 1966 la Asociación Internacional para la Evaluación del Rendimiento Educativo (IEA), encaminado a desarrollar estudios sobre los sistemas educativos. El IEA ha desarrollado diversos estudios en matemáticas, comprensión lectora y ciencias, entre ellos el tercer estudio internacional en matemáticas y ciencias (TIMSS) con el objetivo de medir el aprendizaje de conocimientos curriculares (Beaton, et al, 1996), en el que México participó en 1995 junto con más de cuarenta países.

Por esa época, mitades de los noventa, la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) emprende el proyecto Program for International Student Assessment (PISA), con el objetivo de medir competencias (habilidades y destrezas) para la vida en comprensión lectora, matemáticas y ciencias (OCDE, 2000), prueba que privilegia el uso del conocimiento escolar en situaciones cotidianas más que el aprendizaje memorístico de información y su aplicación mecánica. Desde la primera aplicación en 2000, México ha participado en el proceso de evaluación programado para cada tres años.

Con el paso del tiempo, los resultados de comparaciones internacionales como TIMSS y PISA influyen cada vez más en la opinión pública y en las políticas educativas de los países participantes debido a que su desempeño en relación con el de otras naciones es un indicador de progreso académico (Zorrilla, 2003). México se ha interesado en mejorar la calidad de la enseñanza y el rendimiento de sus estudiantes; además de su participación en aplicaciones internacionales, ha auspiciado la creación de instituciones encargadas de evaluar, mediante los resultados del aprendizaje, la actuación del sistema educativo nacional.

A partir de 2002 el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) fue el encargado de la tarea de evaluar resultados de aprendizaje en la educación básica mexicana, fin para el que elaboró el Examen para la Calidad y el Logro Educativo (EXCALE). Desde 2005 la Dirección General de Evaluación aplica la prueba Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares (ENLACE). Otras pruebas de aplicación a gran escala que anualmente resuelven los estudiantes mexicanos son: Factor de Aprovechamiento Escolar, Prueba Estatal de Aprovechamiento, Laboratorio de Medición de la Calidad de la Educación, y al final de la primaria el Instrumento Diagnóstico de Alumnos de Nuevo Ingreso a Secundaria (IDANIS) (Díaz, 2007).

Todo este despliegue de aplicaciones masivas alberga una suposición: Se evalúa para generar información que permita mejorar la comprensión que se tiene de un aspecto de la educación, el aprendizaje. Pero fundamentalmente se evalúa para retroalimentar el funcionamiento del sistema educativo, como se observa en las reformas y modificaciones a los planes y programas de estudio.

La tarea prácticamente imposible de realizar desde la perspectiva de las pruebas a gran escala es transformar los resultados personalizados de aprendizaje de los alumnos en mejoras al rendimiento académico. Si bien la publicación individualizada del puntaje alcanzado por cada estudiante, como en la prueba ENLACE, señala los temas generales en los que el alumno requiere reforzamiento, la posibilidad de corregir los falsos cognados se desdibuja debido a su falta de localización pues hacerlo requiere un trabajo más delicado y profundo, en nuestra idea, aprovechando recursos que la evaluación en pequeña escala ofrece.

2.2 Visión, tipología y algunos recursos

Hasta este punto se ha seguido una pista de las evaluaciones aplicadas a gran escala. El producto esperable de ellas es información, también a gran escala, del funcionamiento del sistema educativo cuyos destinatarios básicamente son:

a) Las autoridades educativas, quienes podrán emplearla para realizar refinamientos en planes y programas de estudio y en las estrategias de formación y actualización docente.

b) La sociedad, a quien se pretende explicar el sistema educativo, la viabilidad de sus exigencias, y la canalización de los apoyos que puedan aportar a la mejora del sistema.

Hay otros destinatarios a quienes apenas unas décadas atrás se empiezan a mirar como posibles transformadores de los resultados desfavorables para situar al sistema educativo en mejores posiciones: los docentes y los alumnos. Este viraje se asocia de alguna manera con la visión actual de la evaluación, pues en otros momentos el enfoque que regía tales procesos generaba información difícil de traducir en actos concretos en el aula.

2.2.1 Evolución

La historia de la evaluación corre liada a la medición. La evaluación procura ir contra la intuición, el juicio personal y la falta de objetividad de los sistemas de calificación, intentando en cambio promover mediciones sistemáticas y objetivas, con lo que sus productos aportarían información a los responsables del sistema educativo para ayudar a la toma de decisiones informadas (Amigues, 2005). En cierto sentido también se procura ayudar al profesor en el trabajo de valoración de los aprendizajes de sus estudiantes, pero la información que recibe de la evaluación como medición apenas podría apoyar decisiones generales sobre su trabajo en clase.

Aunque ha sido un camino largo, como se puede apreciar en la línea de tiempo (ver figura 2.1), al paso del tiempo la información proveniente de las evaluaciones se ha ido perfilando en algo más parecido a una orientación sobre cómo resolver dificultades en el aula a condición de modificar el enfoque con el que se aplican las pruebas y se interpretan los resultados. Esto se puede apreciar en la visión que guarda cada uno de los períodos por los que la evaluación del aprendizaje ha atravesado.

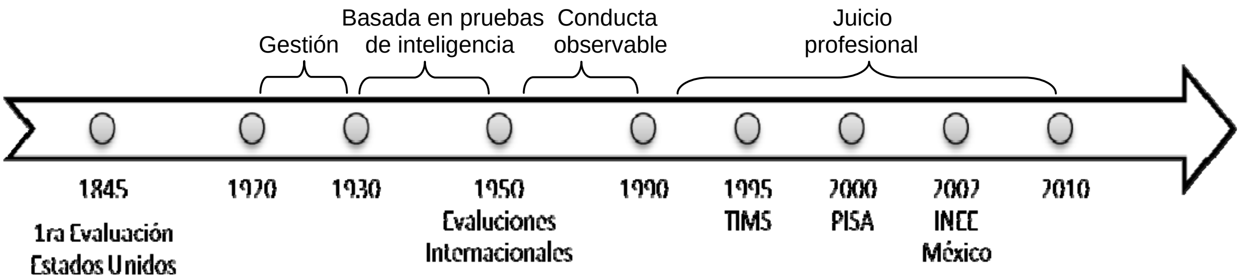


Figura 2.1. Línea de tiempo de evaluación.

Evaluación basada en pruebas de inteligencia. Es un periodo entre los años veinte y treinta en el que la evaluación se basó en medición de conocimientos y aptitudes a través de la aplicación de test (Amigues, 2005). La posición adoptada en ése periodo consiste en introducir racionalidad a los juicios intuitivos e informales empleados hasta ese momento en la medición de los aprendizajes. El fundamento para introducir la racionalidad fueron los avances en la psicología de donde provinieron técnicas de construcción de pruebas, técnicas de medición y el uso de parámetros preestablecidos. Sin embargo, dada la influencia generada por la medición de la inteligencia en los trabajos desarrollados en la universidad de Stanford, este enfoque centrado en instrumentos propiciaba un sesgo en la manera de evaluar de la época acercándola al campo de la selección de estudiantes y de la orientación profesional.

Evaluación de la conducta observable. Abarcó de la segunda mitad de los años treinta a la década de los cincuenta. Conocido como pedagogía por objetivos, tiende a sustituir la medición por una contabilización de los objetivos alcanzados (Stufflebeam y Shinkfield, 1985). La evaluación desde este enfoque ofrece al profesor una referencia común y objetiva (los objetivos de estudio) aplicable a todos los estudiantes, sin que su proceso de evaluar el aprendizaje se considerara subjetivo o intuitivo. Para Ralf Tyler, impulsor de este movimiento, el proceso de evaluación consistía en determinar en qué medida los objetivos de educación podrían ser alcanzados por el programa de estudios, en términos de conducta observable. Esta visión implicaba una dificultad pedagógica importante en el proceso de refinamiento de los objetivos de enseñanza y la definición de éstos en términos de comportamiento.

Proceso de juicio-profesional. Para Stufflebeam y Scriven, promotores del enfoque imperante en los años sesenta y principios de los setenta, la evaluación se mira como un proceso que media la toma de decisiones luego de proporcionar información útil para un fin, como elegir el método de aprendizaje de un contenido (Stufflebeam y Shinkfield, 1985). La idea fundamental de esta perspectiva en evaluación es la mejora del funcionamiento del sistema de información, para la toma de decisiones en los sistemas educativos. Stufflebeam se inclina hacia la producción de información para toma de decisiones sobre proyectos o acciones educativas, en tanto Scriven se centra en los consumidores, se interesa menos en la definición de objetivos de aprendizaje privilegiando los efectos de la formación en los consumidores, el maestro y el alumno. En el México de los setenta, la adhesión a las ideas de Cronbach sobre la búqueda de información para fundamentar la toma de decisiones dejaba ver un proceso de enjuiciamiento sobre el porcentaje en el que se alcanzaban los objetivos de enseñanza por el profesor y el alumno (Rodríguez y García, 1976), haciendo visible el interés por el producto.

Evaluación como gestión. En México, desde principios de los años noventa, la evaluación educativa tiene una orientación hacia el control sobre el servicio educativo (Díaz, 2007). En esta perspectiva de evaluación los principales actores de la educación: directivos, docentes y alumnos, se consideran insumos; y los efectos de los actos de todos ellos pueden exteriorizarse como aprendizajes o productos. De los resultados se espera información para la rendición de cuentas, la toma de decisiones y la gestión de apoyos para la mejora del sistema educativo.

El enfoque evaluativo de gestión, por otro lado, aporta apenas una pálida idea sobre formas eficientes de resolver los problemas del aula debido a que cuando los productos o aprendizajes se miden con las respuestas de los estudiantes en pruebas a gran escala como las internacionales, la oportunidad de mejoras en la formación se limita. Este matiz refleja una visión de la evaluación cercana al enjuiciamiento del trabajo docente (Ahumada, 2005) en lugar de un instrumento de trabajo para elevar la calidad educativa. Además, el momento en el que se mira el producto de la enseñanza, al final de los procesos o de los espacios temporales predeterminados, hace que los fallos en el continuo de enseñanza y de aprendizaje en lo individual prácticamente sean incorregibles.

Otro rasgo visible de la evaluación como gestión o de rendición de cuentas, es que desde el logro en el número de aciertos se exponen deficiencias del sistema, cuando un punto de interés por resaltar serían las oportunidades de progreso en el aprendizaje. El efecto, que parece derivar de la exposición de las deficiencias, es el énfasis puesto en la preparación o el entrenamiento para la resolución de pruebas, como se deduce de la cantidad de exámenes a gran escala que los alumnos de educación básica tienen que responder en un año, hasta seis aplicaciones masivas según se mencionó en el apartado anterior.

Ciertamente lo expuesto en estos párrafos tiene utilidad en niveles sociales alejados de los sujetos productores de la información, los docentes y los alumnos, pero es una información poco relevante en el contexto del aprendizaje dada su naturaleza cuantitativa. Se puede conocer el número de aciertos y compararlos con otras escuelas, con otras comunidades. Se puede saber el número de desaciertos e igualmente compararlos y hacer especulaciones respecto de qué se enseñó o se aprendió mal, pero cómo se sabe qué causó tal resultado, y cómo remediarlo demanda poseer información no recuperada, auténticamente útil para los profesores y sus estudiantes. Esta colección de visiones apunta a que las evaluaciones muestran resultados del proceso educativo, no el proceso ni los factores que intervienen en él (Ahumada, 2005).

Desde una perspectiva didáctica y constructivista, la evaluación de los aprendizajes se enfoca en la comprensión y mejora del proceso educativo (Ahumada, 2005), constituye una poderosa herramienta para transformar las prácticas educativas en aquello que cada estudiante en lo particular requiere (Clarke, 1997), y, si bien se avanza lentamente desde el salón de clase, es una excelente oportunidad de fortalecimiento del rendimiento escolar. Esta visión de la evaluación se acerca con mayor sutileza al tipo de evaluación necesaria para estudiar el fenómeno de las respuestas erróneas propuesto en esta investigación, sin embargo tiene una limitante: puede efectuarse durante el proceso de aprendizaje, en tanto que nuestra atención se halla puesta en los resultados de un proceso, cuando éste ya ha concluido.

Otra forma de ver a la evaluación, lejos de la rendición de cuentas y más allá de la herramienta transformadora de la enseñanza, es como una herramienta de análisis retrospectivo que favorece la reflexión sobre el proceso de aprendizaje. La evaluación dinámica (Hernández, 2006) emergida de las teorías constructivistas ofrece una guía que, con las adecuaciones pertinentes, puede generar la información necesaria para responder las interrogantes de esta investigación. Según Hernández esta manera de evaluar el aprendizaje de los estudiantes se efectúa a continuación de la emisión de una respuesta o la resolución de un problema en la clase, con el fin de corroborar el procedimiento aparentemente desplegado. El docente es el encargado de verificar mediante cuestionamientos o solicitud de explicaciones o procedimientos sobre el despliegue de los alumnos, aun si su respuesta es correcta.

Decidimos adherirnos a la guía que representa la evaluación dinámica por la flexibilidad de su aplicación, haciendo algunas modificaciones dado nuestro objeto de estudio: el desacierto. En cierto sentido esta investigación se convierte en una evaluación de los resultados de otra evaluación, por tomar sus resultados como punto de partida en la búsqueda de explicaciones a la elección de una opción no correcta o la emisión de una respuesta errónea. Tiene además una componente temporal peculiar: a diferencia de los tipos de evaluaciones conocidos generalmente, se puede aplicar de manera diferida a los cursos escolares siempre y cuando se haga inmediatamente después de la resolución de una prueba.

Antes de entrar al detalle metodológico del uso que se hizo de este recurso, se trae a consideración la tipificación de las evaluaciones con la intención de evidenciar la necesidad de extrapolar sus recursos en un espacio temporal diferente.

2.2.2 Tipología

La clasificación de los tipos de evaluación de los aprendizajes se puede hacer desde diversos niveles de autoridad (Casanova, 1998; Amigues, 2005; Fernández, 2005, Ander-Egg, 1999). Por la utilidad e importancia de sus productos se hacen evaluaciones a instituciones, planes de estudio, docentes y estudiantes, bajo criterios específicos. Los tipos más conocidos son: Intencionalidad, momento, agente evaluador, extensión, comparación.

Los criterios de intencionalidad y momento se encuentran asociados a la temporalidad en la que sucede el proceso de aprendizaje.

Intencionalidad: Dependiendo de qué se quiere saber del proceso, se divide en:

Diagnóstica. Cuando se quieren saber los conocimientos de los alumnos al inicio de un proceso de enseñanza para determinar un punto de partida.

Formativa. Cuando se quiere saber qué mejorar en el proceso educativo en marcha, a fin de conseguir los objetivos previstos. Se aplica al final de periodos intermedios preestablecidos dentro de un curso con un lapso mayor de tiempo. Es una estrategia propuesta para mirar cómo va ocurriendo el proceso.

Sumativa. Cuando se quiere conocer el resultado de un proceso de aprendizaje o una etapa de él.

Momento: Por su instante de aplicación en el proceso de aprendizaje, agrupa las evaluaciones en:

Inicial. Se aplica al inicio del proceso para tomar datos de las condiciones de los estudiantes. Sirve de referente para determinar los progresos en el aprendizaje contrastando el inicio con el final.

Procesual. Se realiza en el continuo en el que se desarrolla el proceso de aprendizaje; es sistemática y tiene como propósito hacer mejoras durante el proceso.

Final. Se efectúa la final del proceso para valoración del aprendizaje alcanzado. Los datos colectados al final del periodo de tiempo previsto para valoración se contrastan con los de la evaluación inicial.

Diferida. Se aplica transcurrido un periodo de tiempo terminada la experiencia educativa. Se utiliza para verificar la permanencia de los aprendizajes.

Otros tipos de evaluación tienen que ver con el desarrollador, la dimensión y el uso que se le da.

Agente evaluador: Se refiere a las personas o instituciones encargadas de efectuar el proceso evaluativo.

Internas: Las realizan personas que participan directamente en el proceso educativo. A su vez suelen subdividirse en autoevaluaciones, heteroevaluaciones y coevaluaciones. Autoevaluación cuando evaluador y evaluado son la misma persona, heteroevaluación la hacen sujetos distintos al evaluado dentro de la misma institución como el maestro al alumno, y la coevaluación es un ejercicio entre alumnos de valoración de los aprendizajes logrados.

Externas: Las realizan sujetos ajenos a la institución académica, en general para valorar la calidad y funcionamiento del proceso educativo en una institución académica.

Extensión: Por la dimensión de los contenidos que abarcan, se organizan en:

Parcial: se centra en valorar el aprendizaje de una parte específica de contenidos.

Global: Incluye todos los contenidos de aprendizaje previstos para un curso o periodo particular.

Comparación: Cuando se contrasta con un referente ajeno a la propia evaluación.

Referidas a la norma: se compara contra un nivel determinado por el logro de otro grupo similar.

Referidas a criterio: Cuando el rasero o estándar a partir del cual se valora el aprendizaje se establece con anterioridad. El producto de la evaluación se compara con resultados deseables previamente establecidos.

En cualquiera de sus tipos o técnicas de aplicación, lo que se recupera de la evaluación es el producto del aprendizaje (Ander-Egg, 1999), no el proceso (Ahumada, 2005). De acuerdo con la postura cognitiva de Shunk (1997) la naturaleza inferencial del aprendizaje hace que su verificación sólo se logre a través del producto sin que sea posible verificar la manera cómo ocurrió, pues el proceso se da al interior del sujeto.

Como se puede observar, el tipo de evaluación necesaria para el desarrollo de este estudio queda fuera del listado de las opciones a disposición del profesor o de las autoridades del sistema educativo, sin embargo nuestra propuesta, consideramos, puede ofrecer al docente orientación puntual sobre los fallos en el proceso de aprendizaje, con lo que se espera contribuir a la mejora de los resultados para el estudiante.

En esta investigación, se ha mencionado, empleamos recursos de una evaluación internacional y un concepto de evaluación, emergido de las teorías constructivistas, en el que se busca mejorar el aprendizaje desde su propio proceso (Clarke, 1997). De la prueba del TIMSS 1995 utilizamos los reactivos de fracciones, sentido numérico y proporcionalidad, y de la evaluación dinámica su idea general adaptada a la metodología diseñada para este estudio.

Reunidos estos elementos para desarrollar la exposición del trabajo efectuado, queda por explicar el referente de análisis con el que se tratará la información colectada de la aplicación del instrumento acotado del TIMSS 1995. Las razones de elección y las ideas que entrarán en juego se exponen en el siguiente capítulo.

3. Voces lejanas, ideas presentes

Este capítulo pretende aclarar el motivo por el cual decidimos valernos de un referente de análisis articulado de componentes de las teorías cognitivas y la socio histórica del aprendizaje. La línea cognitivo cultural se erige como guía para analizar la información recuperada en la aplicación del instrumento acotado del TIMSS 1995 y de los instrumentos diseñados en el desarrollo de esta investigación, dirigidos a localizar las causas que generan respuestas erróneas.

Debido a que la raíz de los elementos teóricos a que se acudirá en el análisis proviene de la psicología del aprendizaje, antes de revisar los pormenores de la perspectiva elegida damos un breve recorrido por el trayecto de la investigación en el aprendizaje desde los albores de la filosofía y la psicología hasta, en el último siglo, el surgimiento de diversas líneas de investigación de entre las cuales la educación matemática ha tomado herramientas para indagar por el pensamiento de los aprendientes.

La historia que se rememorará en los siguientes apartados refiere los antecedentes de las teorías que enmarcan la presente investigación. Se explica también de qué manera los constructos cognitivista e histórico cultural aportan a este trabajo elementos de análisis de la evidencia recopilada en relación con las estrategias, procedimientos y razonamientos que llevan al estudiante a emitir, o seleccionar, una respuesta errónea ante un examen de conocimientos sobre contenidos curriculares. De igual forma las vertientes señaladas aportaron componentes propios para el estudio de las causas que llevaron al estudiante a tomar decisiones equivocadas.

Como se expresó en el capítulo introductorio, esta investigación parte de los resultados de una evaluación internacional que pretende medir lo que los alumnos aprendieron durante un proceso de escolarización a lo largo de ocho años. La prueba del TIMSS mide aprendizaje de contenidos, por lo que para el desarrollo de este capítulo se ha elegido al aprendizaje como hilo conductor para esclarecer la elección teórica en este entramado de constructos teóricos.

"Aprender es un cambio perdurable en la conducta o en la capacidad de conducirse de manera dada como resultado de la práctica o de otras formas de experiencia" (Shuell, 1986 en Shunk, 1997, pag. 2). Esta expresión, señala Shunk, involucra desde un acercamiento cognoscitivo tres criterios de definición del aprendizaje: *Cambio conductual*, *Perdurabilidad del cambio* y *Génesis en la práctica u otras formas de experiencia*, y le confiere una naturaleza inferencial basada en sus productos.

Aunque la definición de Shuell es una entre la diversidad teórica, la consideramos una aproximación útil en esta investigación por adherirse al posicionamiento cognoscitivo y porque ayuda a exponer de manera puntual dificultades en evaluación. Los criterios enunciados en la definición indican que el aprendizaje ha ocurrido cuando una práctica o una experiencia generan un cambio permanente en la conducta. Así, la evaluación del aprendizaje se enfoca en las expresiones verbales y escritas y en la conducta observable del aprendiente.

Evaluar el aprendizaje desde este acercamiento deja al descubierto dos desventajas: 1) El aprendizaje se infiere del comportamiento, y 2) La ausencia de modificación observable en la conducta no necesariamente implica ausencia de aprendizaje.

Inferir el aprendizaje desde la observación de la conducta es una desventaja para el alumno, pues la observación directa sobre la conducta efectuada para resolver un problema o responder una pregunta borra de escena los procesos cognoscitivos y afectivos subyacentes, de modo que una evaluación sumativa o final basada en una observación directa muestra el resultado del aprendizaje sin evidenciar aquello que lo produce.

Otra desventaja para el estudiante es que la ausencia de conducta observable podría ocultar un aprendizaje en proceso o una interferencia en él, con lo que la posibilidad de ayuda y de progreso se aleja de su alcance.

Una línea de interés en esta investigación consiste en proporcionar al profesor información acerca de qué produce en el alumno la elección de una opción incorrecta o una respuesta errónea en un examen para evaluar el aprendizaje. Interesa aportar tal información debido a que, como se dijo en el capítulo dos, los resultados de evaluaciones masivas centran su atención en el resultado del aprendizaje; en otras palabras, en la conducta observable. Se considera que proporcionar información al respecto podría aportar vías de acceso para mejorar los procesos de aprendizaje y consecuentemente sus resultados.

En los siguientes apartados hacemos un breve paseo histórico por las ideas filosóficas y psicológicas que dieron origen a la teoría que apoya la metodología de esta investigación, y da forma tanto al análisis como a las sugerencias finales.

3.1 Voces lejanas, ideas presentes

Como concepto dinámico y fin último de la educación, el aprendizaje emerge en diversas manifestaciones a través del desarrollo cultural. Uno de los más lejanos registros asociados al aprendizaje humano lo integran los libros de los sueños, contenidos en tablillas, escritos en Asiria entre los años 6000 y 5000 a. C. (Hothersall, 2007). Si bien estas inscripciones se consideran narrativas de la sociedad mesopotámica, también constituyen registros psicológicos por su contenido (Silva, 1984; Hothersall, 2007): descripción de sueños de muerte, pérdida de dientes o cabellos, y vergüenza de hallarse desnudo en público. Estos elementos facilitaron al hombre acceder al conocimiento de su psique y con ello a ideas respecto al cómo se aprende. Este antiguo deseo por conocer el funcionamiento de la psique es un elemento que recurrentemente aparece a lo largo de la historia hasta el desarrollo de las teorías de aprendizaje.

Siglos más tarde los antiguos mundos griego, romano y egipcio aportaron ideas específicas sobre el aprendizaje, la memoria, y la naturaleza y ubicación de la mente.

Las ideas entonces en boga fueron producto de los progresos que los pensadores de esa época realizaron en las matemáticas, la filosofía y la naturaleza del universo.

En medicina, una discusión importante trataba sobre la ubicación de la mente en el cuerpo humano. Alrededor del año 500 antes de nuestra era, Alcmeón, quien estudiaba cosas de medicina y fisiología por considerar que ambas tratan las cosas humanas (Laercio, 2004), diseccionaba animales para estudiar su cuerpo y cerebro. Enseñó su método de disección y observación a sus discípulos entre los que se encontraba Hipócrates, quien fue su sucesor y la figura más importante de la medicina en ese período. Además de los adelantos en materia de medicina, a través de sus observaciones, Hipócrates llegó a la conclusión correcta de que el lado derecho del cerebro rige el lado izquierdo del cuerpo y viceversa. Entre muchas aportaciones hipocráticas a la medicina, la psiquiatría y la psicología, se encuentran las primeras descripciones claras de problemas conductuales y motivacionales. Conducta y motivación son elementos de estudio actuales en las teorías psicológicas del aprendizaje.

Por esa misma época Demócrito genera una teoría de la percepción en la que se explica que el contenido de la mente es resultado de la experiencia, pues los objetos del mundo externo (al aprendiente) emitían haces de átomos que impactaban la mente del receptor y producían las percepciones; así, una figura rectangular emitía átomos rectangulares que formaban un ícono en la mente, tal como un objeto amargo emitía un haz de pequeños y delgados átomos angulares.

Sócrates por su parte ideó un método de enseñanza para facilitar el aprendizaje por medio del descubrimiento. El Método socrático consistía en plantear interrogantes al pupilo con la intención de llevarlo a la verdad, ilustrando las imperfecciones en su razonamiento. Esta idea perfila una postura racionalista en el aprendizaje, a la cual se adhieren algunas teorías recientes.

Con la misma tendencia racionalista, Platón, convencido de la falta de fiabilidad de la información sensorial, consideró que el conocimiento deriva de los procesos del razonamiento a partir de las sensaciones. Platón reconoció diferencias individuales en términos de habilidades, capacidades, talentos y aptitudes, en una postura nativista en el sentido de suponer carácter hereditario a características humanas morfológicas y a la inteligencia.

En su tratado sobre la memoria y la reminiscencia, Aristóteles muestra su postura empirista del aprendizaje cuando asume que los recuerdos son el contenido de la mente y reflejan nuestras experiencias del mundo, por lo que sin la experiencia la mente estaría en blanco. El tratado explica que la memoria es producto de tres procesos asociativos: 1) Similaridad: los objetos, sucesos y personas se vinculan por sus semejanzas; 2) contraste: los objetos, sucesos y personas se vinculan por sus diferencias relativas; 3) contigüidad: las cosas se asocian si ocurren juntas en el tiempo y el espacio (Hothersall, 2007). Luego esos tres principios de asociación se complementan con la frecuencia de repetición de la experiencia y con la facilidad de asociación. Para Aristóteles el locus del pensamiento es el corazón vivo.

Para el año 200, Galeno, médico de la corte del emperador Marco Aurelio Antonio sabía, por sus observaciones a los cuerpos de los gladiadores romanos, que el corazón no era el asiento de la llama biológica, aquello “divino” que daba vida al hombre. Pensaba en cambio que de la sangre fluyente del corazón destilaba la sustancia espiritual responsable del movimiento y las sensaciones, que las enfermedades del alma surgían de las pasiones y que éstas se regían por una potencia irracional dentro del hombre que se negaba a obedecer a la razón. La liberación de tales pasiones ocurría tras la lucha personal por aprender de ellas y auto conocerse.

Las ideas de los pensadores mencionados continuaron vigentes hasta el Renacimiento, en que algunas de ellas iniciaron una metamorfosis. En 1666 Newton aporta a la ciencia sus conocimientos sobre la refracción de la luz, hecho con el que pone en relieve el valor de los métodos experimentales para entender la naturaleza. Esta aportación es tomada por filósofos empiristas británicos como argumento para estudiar a la conciencia mediante la “refracción” de los elementos que la componen. Este fue el modelo de la mente que algunos integrantes de la primera generación de psicólogos adoptaron a final del siglo XIX en el estudio del aprendizaje.

La primera mitad del siglo XVII vio surgir ideas como la prueba final de la existencia*: Cogito ergo sum* [pienso luego existo] que según Descartes implica el acto de pensar. Tal prueba trae para él dos preguntas importantes: ¿Dónde pensamos? y ¿Cómo pensamos? La respuesta cartesiana explica que se piensa en la mente y que ésta controla al cuerpo, con lo que reconoce un dualismo entre mente y cuerpo, y una convergencia de ambos en un sitio físico alojado en el cerebro. El dualismo expuesto por Descartes separa tanto las funciones de las dos componentes como las leyes bajo las que operan. La mente, en ese contexto, contenía dos tipos de ideas: innatas, que son con las que se nace y no dependen de la experiencia, y las que provienen de la experiencia individual basadas en recuerdos de sucesos pasados.

Locke (Hothersall, 2007) por su parte, en desacuerdo con la postura cartesiana sobre las ideas innatas, abriga el método experimental y de observación de Newton sobre su demostración de la refracción, misma que tomó como modelo para su propia obra. Locke sostenía que todas las personas nacen con el mismo potencial, por lo que la educación jugaría un papel central en el aprendizaje. Consideraba que la experiencia era generadora de saber. Lo único innato que poseemos según su idea es el dolor y la pérdida de placer, sin embargo, gracias a la experiencia se aprende a evitar los objetos asociados con esas consecuencias. Un punto de convergencia entre las ideas de Aristóteles y Locke es la *tabula rasa* o la hoja en blanco respectivamente, con la que se comparaba la mente de los sujetos previo al aprendizaje, idea que priorizaba la experiencia organizada culturalmente como medio de transmisión de conocimientos.

En oposición a la idea empirista de Locke en la que los contenidos mentales provienen de la experiencia, Leibniz reconoce que los humanos podrían ser empíricos en tres cuartas partes de sus mentes, pero que las verdades necesarias e innatas se encuentran en el intelecto, que constituye la cuarta parte más importante: la racional. La idea de Leibniz sobre el tema de la mente era que Dios había construido el cuerpo y la mente humanos como dos relojes paralelos que coinciden, se influyen mutuamente y garantizan su armonía futura (Hothersall, 2007): una dualidad mente cuerpo con ideas, tendencias y disposiciones innatas. La psicología gestalt [de la percepción, la psicofísica y la resolución de problemas] que emerge en el siglo XX se vio influenciada por las ideas de este matemático alemán.

El siglo XVIII trajo nuevas aportaciones sobre el aprendizaje. En las ciencias, los primeros estudios del sistema nervioso central realizados en los nervios que surgen de la médula espinal dan fundamentos para explicar el arco reflejo, con lo que se hace posible repetir una conducta refleja para su estudio. Este aislamiento fisiológico de sensación y movimiento proporcionaría a la psicología el paradigma estímulo-respuesta. En ese siglo se logra la localización de las funciones del cerebro por observaciones y mediante estimulación directa, con lo que se hace posible el reforzamiento de conductas mediante estimulación eléctrica directa (Hothersall, 2007). Dados tales avances se esperaba hallar el fundamento cerebral del aprendizaje y la memoria, aunque a mediados del siglo XX los esfuerzos por localizar funciones psicológicas, como aprendizaje, memoria e inteligencia en el funcionamiento del cerebro, terminaron por abandonarse.

Desde la filosofía, Hume se inclina por la asociación causal entre impresiones e ideas, ambos contenidos mentales. En este enfoque empirista sentir es casi todo; las sensaciones generan impresiones y las impresiones ideas. Cuando se da la conexión causal entre impresiones e ideas se da una idea simple, luego las ideas simples se combinan en la mente formando ideas complejas. Hume creía necesario desarrollar una nueva ciencia de la naturaleza humana distinta de la filosofía, dado que la naturaleza humana es parte de la naturaleza, proponía que la nueva ciencia emplearía los métodos de las ciencias naturales. Tal propuesta preparó el camino para el establecimiento de la psicología como ciencia de la mente por Wundt en el siguiente siglo.

La postura sobre los elementos básicos de la mente, sensaciones e ideas, es adoptada por James Mill en el siglo XIX. La aportación al desarrollo de la psicología por este autor fue *Analysis of the Phenomena of the Human Mind,* en ella agregó a los cinco sentidos básicos propuestos por Aristóteles –vista, olfato, gusto, oído, tacto- el sentido muscular [sensaciones de los músculos], las sensaciones desorganizadas [derivadas de las cosquillas y la comezón], y las sensaciones del canal alimentario (Hothersall, 2007). Mill consideraba que las sensaciones propias de los ocho sentidos enlistados se constituían en los elementos primarios de la conciencia. Siguiendo con el constructo adoptado sobre las sensaciones como generadoras de ideas, Mill explica el pensamiento como la asociación de ideas.

Para el hijo de Mill, John Stuart, la teoría de su padre parece lineal e incompleta, por lo que agrega un concepto más complejo de mente activa y productiva; así, la mecánica mental se convierte en una química mental que se ejemplifica con la explicación que el agua es más que la suma de las propiedades del hidrógeno y el oxígeno. JS Mill propuso un análisis de causa y efecto de variables en una química sobre la actividad mental en la que educación, clase social, y tamaño de la familia entre otras, podrían ayudar a verificar su intuición de que diferentes experiencias en los niños causan caracteres morales distintos, lo que sospechaba había ocurrido con él mismo. Esta aportación a la psicología precede la metodología de estudios longitudinales en la psicología del desarrollo.

El nacimiento de la psicología como ciencia experimental se fija con el establecimiento del primer laboratorio de investigación psicológica en 1879 por Wilhelm Wundt. Los conocimientos sobre el hombre con los que se contaba en la época incitaron a Wundt a pensar que la psicología debería tener tres subdivisiones: 1) Ciencia inductivista experimental, 2) Ciencia que estudia los procesos mentales superiores como la religión, el lenguaje, los mitos y las costumbres, y 3) Ciencia integradora de los hallazgos psicológicos y otras ciencias (Hothersall, 2007). Dado que los procesos a estudiar en la segunda subdivisión quedaban fuera de experimentación por su complejidad, y que la tercera rama integraría los hallazgos de la psicología experimental con otras ciencias, como actualmente ocurre con las investigaciones en el aprendizaje de las matemáticas, centró su trabajo en el laboratorio fortaleciendo la subdivisión conductista experimental.

La obra de Wundt parte del rechazo a que los fenómenos de la psique pudiesen ser explicados en términos exclusivamente fisiológicos o mediante reflexiones filosóficas (Rodríguez, 2010), creía que estudiar la naturaleza de los fenómenos psicológicos requería de la convergencia entre filosofía y fisiología en una ciencia nueva con un método experimental propio, lo que le lleva a ubicar a la psicología entre la ciencias físicas y las sociales, y a estudiar la experiencia consciente mediante la introspección analítica.

Los trabajos desarrollados en el laboratorio de Wundt son adaptaciones de la fisiología a la psicología. Los eventos conscientes se producían bajo condiciones de estimulación (Hothersall, 2007) estrictamente controladas para tener la posibilidad de reproducirlos. A diferencia de la introspección tradicional en la psicología, realizada por el propio sujeto, la introspección analítica se realiza por experimentadores que controlan las variables generadoras de la experiencia. Con este método se estudiaron percepciones, sensaciones, asociaciones, tiempo de reacción, atención y atención selectiva, entre otros.

Todo el vaivén entre empirismo y racionalismo, adquirido e innato, y los obstáculos en el surgimiento de la psicología como ciencia, parece haber tenido un sesgo de dificultades metodológicas para estudiar el aprendizaje. Muchos de estos problemas fueron salvados empleando las aportaciones provenientes de la filosofía, la medicina, las matemáticas, la física, la fisiología, y la propia psicología entre otras, con las cuales se trazó el camino por el cual la psicología logró el estatus de ciencia con un método de estudio propio.

Una vez establecida como ciencia, la psicología diversifica sus líneas de investigación. Surgen entonces, además de los avances en otras áreas como el psicoanálisis y la psicología profunda, algunas ramas como la experimental, la reflexológica, la gestalt y la cognitiva, por mencionar algunas ligadas al aprendizaje. En ellas el posicionamiento juega un papel importante, pues indica el rumbo que seguirán las investigaciones en el fenómeno del aprendizaje. Una propuesta racionalista daría prioridad al pensamiento esperando con ello que el aprendiente elabore conocimiento con la menor participación del exterior, en tanto que la empirista procuraría aportar la mayor cantidad de recursos disponibles para que el alumno experimente el aprendizaje y se apropie de él.

3.2 Génesis psicológica de las teorías del aprendizaje

Los avances alcanzados en la psicología de la Alemania decimonónica fueron el preámbulo del desarrollo de la investigación psicológica del aprendizaje. En la última década del siglo XIX algunos estudiantes de Wundt emigraron a los Estados Unidos con ideas nuevas sobre el estudio de la conducta. Edward Titchener centró su trabajo en determinar los elementos que conforman la estructura de la mente, analizar la conciencia y reducirla a sus elementos básicos a la manera como Newton lo hiciera con la refracción de la luz; pensaba que los procesos mentales debían observarse, cuestionarse y describirse en términos de hechos observables (Shunk, 1997). Aunque su aportación ayudó a acelerar la diferenciación entre psicología y fisiología, su idea estructuralista de la mente trascendió escasamente de la nota histórica. Hugo Müsterberg, en cambio, se interesó en estudiar las funciones de la mente: cómo aprendemos, percibimos, juzgamos y recordamos (Hothersal, 2007). Se interesó en la experimentación en laboratorio, pero dio prioridad a la investigación empírica y sus aplicaciones, trabajo que desarrolló durante las últimas tres décadas de su vida concluida en 1916.

Otro avance importante lo representó la psicología gestalt, nacida en 1912, que inicialmente se interesaba por la percepción, abarcando más tarde el aprendizaje (Shunk, 1997). Gestalt alude a una experiencia perceptual completa atendiendo a cuatro principios básicos: 1) pensamiento holístico; el todo es más que la suma de sus partes, 2) fenómenos, como el tema de la psicología, 3) metodología de experimentación de fenómenos parecidos a la realidad con un número reducido de sujetos, e 4) isomorfismo de los procesos psicológicos y los biológicos particularmente cerebrales. Bajo esos principios Wertheimer, Koffka y Kölher buscaban renovar el sistema psicológico propuesto por Titchener. Con este nuevo enfoque, los psicólogos de la gestalt estudiaron el mundo perceptual humano, los métodos de enseñanza empleados en la época, y el aprendizaje.

En relación con los métodos de enseñanza Wertheimer se opuso a la memorización y a las técnicas de solución de problemas que hacían hincapié en la aplicación mecánica de principios o fórmulas. Como alternativa propuso considerar al problema en su conjunto. Sobre el aprendizaje Kölher estudió la actividad cognitiva de primates de donde derivó el aprendizaje por insight, que se refiere a un comportamiento en la resolución de problemas en el que desde el planteamiento se observa en el resolutor una organización estructural de la situación y un nuevo planteamiento del problema.

El Funcionalismo, primera corriente psicológica estadounidense sobre el estudio del aprendizaje, tuvo influencia del estructuralismo y la gestalt. Aunque ésta corriente impulsada por Titchener y Müsterberg (Shunk, 1997) quedó en el pasado, sus aportaciones sobre el estudio del aprendizaje contribuyeron notablemente a seguir la línea del estudio de la mente durante el aprendizaje.

3.2.1 De la turba felina al aprendizaje humano

Además de las observaciones a primates, el estudio del aprendizaje se nutre de los resultados de investigaciones con diversos organismos entre los que se cuentan pollos, palomas, ratas, perros y gatos.

Los inicios del siglo XX fueron muy fructíferos en investigación sobre conducta y aprendizaje. En Rusia, Iván Pavlov trabajaba en la búsqueda de ventanas para observar el funcionamiento de los sistemas fisiológicos cardiaco, digestivo y cortical. Sus investigaciones en perros lo llevaron a producir la ventana fisiológica deseada, misma que consistía en una bolsa con la que se viviseccionaba el esófago para ver funcionar el aparato digestivo cuando el alimento ingerido por el perro no llegaba al estómago. Pavlov observó que aún cuando el alimento se desviaba de su destino, el estómago producía jugos gástricos, fenómeno al que denominó estímulo psíquico.

A partir de esa observación sus investigaciones sobre estímulos se volvieron más sistemáticas por considerar que estudiar los estímulos y las respuestas revelarían secretos de los hemisferios cerebrales. Bajo condiciones controladas empleó estímulos condicionados (EC) -timbres, campanas, metrónomos- para obtener reflejos condicionados (RC) y la extinción del reflejo (Shunk, 1997). En este surgimiento del conductismo en la línea del condicionamiento clásico, también reconoció la existencia de diferencias individuales determinadas por factores genéticos y la influencia del ambiente o la educación.

Antes de Pavlov se contaba con algunas descripciones de condicionamiento, Lope de Vega, en su obra *El capellán de la virgen* describe la solución de un monje a un problema conductual:

> San Ildefonso solía regañarme y castigarme muchas veces. Me sentaba en el suelo y me hacía comer con los gatos del monasterio. Estos felinos eran tan granujas que se aprovechaban de mi penitencia. Me volvían loco, robándome suculentos bocados. De nada servía ahuyentarlos. Pero hallé una forma de afrontar a las bestias para disfrutar mis alimentos cuando me castigaran. Los metí a todos en un costal y, en una noche obscura como boca de lobo, los puse bajo un arco. Primero estornudaba y luego les daba una zurra. Aullaban y chillaban como un órgano infernal. Aguardaba un rato y repetía la operación, primero un estornudo y luego una zurra. Finalmente observé que incluso sin pegarles, las bestezuelas gemían aullaban como el mismo demonio cuando yo estornudaba. Luego los solté. De allí en adelante, siempre que tenía que comer en el suelo, echaba un vistazo a mi alrededor. Si algún animal se acercaba a mi comida todo lo que tenía que hacer era estornudar, y vaya que el gato salía despavorido (Bousfield, 1955 en Hotersall, 2007 pag. 480).

En esos primeros años el funcionalismo en la psicología norteamericana surge con los trabajos de John Dewey, quien trata de fusionar la filosofía y la psicología experimental. Su trabajo al respecto expuso el concepto de arco reflejo psicológico [adaptado de la fisiología] como una unidad coordinada que debía considerarse un todo en el que las ideas y las respuestas ocurren en un contexto funcional. Entonces el comportamiento y la consciencia se deben entender en términos de su papel en la adaptación del organismo al entorno. En esta postura se nota la influencia de la gestalt. Para Dewey la psicología era el fundamento de una teoría y práctica educativas sólidas. Un buen sistema educativo para él debía satisfacer cuatro necesidades psicológicas básicas del niño: conversación, curiosidad, construcción y expresión artística (Hothersall, 2007). Estuvo interesado en un tipo de escuela que estimulara a pensar, explorar y aprender, lejos de los métodos de memorización de la enseñanza de la época.

En la misma línea de investigación James R. Angell pensaba que el funcionalismo explica el cómo y el porqué de la consciencia en tanto describe las operaciones de la mente y las funciones de la consciencia en condiciones de vida reales. Angell, influenciado por las ideas de Darwin (Hothersall, 2007), se interesó especialmente en la evolución de la inteligencia y la historia del instinto. Realizó experimentos acerca de aprendizaje de ratas en laberintos centrando la atención en claves sensoriales empleadas para recorrerlos. John B. Watson, uno de sus alumnos destacados, continuaría con las investigaciones y las llevaría al aprendizaje humano.

Edward Thorndike configura uno de los antecedentes de la psicología conductista norteamericana con su aportación de la ley del efecto. Las primeras investigaciones de este psicólogo trataron de mostrar cómo la mente se podría leer mediante las expresiones inconscientes emitidas por el sujeto a quien se le intentaba leer la mente (Hothersall, 2007). La hipótesis tras el experimento era que los niños veían las expresiones faciales más fácilmente que los adultos, razón por la cual el estudio se hizo con niños de entre 3 y 6 años, y consistía en que el chico en turno observara a Thorndike mientras pensaba en una letra, un número o un objeto y luego dijera el resultado de la lectura de la mente. El resultado del experimento fue insuficiente para sostener la hipótesis, pero un detalle del procedimiento experimental dejó un antecedente importante: el uso de la recompensa. Efectivamente, por cada adivinación correcta se proporcionaba un dulce al participante. Luego del intento fallido y el desacuerdo de las autoridades escolares Thorndike tuvo que considerar otras opciones de investigación. Sin opción administrativa ni recursos económicos por el momento, el siguiente tópico fue el comportamiento instintivo e inteligente de los pollos.

La recompensa fue un elemento valioso en la experimentación. Los pollos tendrían que encontrar el camino de salida de laberintos para poder acceder al alimento, agua y compañía de otros pollos. Según Thorndike, el aprendizaje logrado para salir del laberinto corresponde a la asociación del placer por recibir la recompensa.

Luego del trabajo realizado con pollos en Harvard, en Columbia se hizo de siete gatos cachorros y seis gatos jóvenes quienes se convirtieron en sus sujetos de experimentación. Para esta turba diseñó 15 cajas problema que requerían diferentes respuestas de escape, entre las que se contaba empujar un pedal o jalar una cuerda. El experimento consistía en poner un gato hambriento al interior de una caja y dejarlo escapar cuando diera la conducta esperada para obtener alimento. Thorndike observó que la primera vez en la caja los gatos emitían muchas conductas fortuitas antes de lograr el escape, a lo que llamó “ensayo y error” y que éste disminuía con el entrenamiento para lograr un escape rápido y fácil. Al fenómeno observado con los gatos le llamó ley del efecto (Shunk, 1997), en la que una situación estímulo [caja-problema] generaba una asociación con la respuesta, de irritación ante la imposibilidad de escape con lo que la asociación se debilitaba o de satisfacción dado el acceso al alimento con lo que se reforzaba. Así, las respuestas seguidas de un refuerzo se asociaban al estímulo con lo que se lograba mayor probabilidad de ocurrencia cuando el estimulo se presentara nuevamente.

Antes de llevar la investigación a la educación Thorndike trabajó con aprendizaje en perros y peces. En educación, bajo la consideración de que la inteligencia era una combinación de habilidades y capacidades, creó un test de inteligencia con cuatro subtests (Shunk, 1997): Completar frases, aritmética, vocabulario y seguir instrucciones, utilizado para medir capacidades y habilidades de los estudiantes de diversas instituciones.

Medir la inteligencia contaba para la época del funcionalismo con antecedentes en la craneometría de Broca (Hothersall, 2007). Se trataba de una medición basada en la forma del cráneo de la persona en estudio, muchos ya muertos, poco confiable para las necesidades de la educación.

La última década del siglo XIX trajo a Francia el establecimiento de la educación primaria obligatoria para todos los niños de 6 a 14 años, junto con el problema de la selección para avanzar al siguiente nivel educativo (Shunk, 1997). Otro problema colateral era la inclusión de niños que no aprendían y la manera de ayudarlos.

En 1903 Alfred Binet fue contratado por el ministro de educación pública de Francia para que estudiara el problema y lo resolviera (Hothersall, 2007). Parte de la solución fue hacer un examen médico pedagógico a los alumnos cuyos profesores los consideraran reacios a la educación. La prueba producto de dos años de intentos consistía en un grupo de test ordenado por niveles de edad de tres a trece años, se aplicaba bajo condiciones controladas y se evaluaba según la edad del niño. A un niño de cinco años, por ejemplo, se le aplicaba el test para 5 años, si sus resultados quedaban sobre el 75%

se consideraba con nivel mental de 5 años. Este caso es un ejemplo en el que la edad cronológica y el nivel mental coinciden, por lo que se le considera con una inteligencia general normal y no requiere de atención especial. En poco tiempo la escala de Binet (Stanford-Binet/Binet & Simón) se aplicó masivamente (Lewontin, Rose y Kamin, 1987), aunque no siempre con fines favorables al desarrollo de la educación o en favor del aprendizaje.

3.2.2 El prisma teórico

Como se ha descrito, simultáneamente ocurrieron desarrollos experimentales en torno al aprendizaje animal. Sucedió particularmente así por el interés en mostrar que la psicología contaba con un método científico que permitía repetir la experimentación con los mismos resultados conductuales las veces que fuese necesario; sin embargo el interés en los procesos implicados en el aprendizaje humano estaba presente. Los conocimientos acumulados entonces empujaron la investigación hacia la conducta humana.

3.2.2.1 Conductismo

Esta línea psicológica busca explicar la conducta en el contexto de la adaptación del organismo humano con su ambiente. Para las teorías relacionadas con el aprendizaje, el estudio del comportamiento en la línea conductista fluye por dos vertientes: El condicionamiento clásico y el condicionamiento operante.

A) *Condicionamiento clásico*

Influenciado por las investigaciones de Pavlov, John B. Watson empezó por estudiar la conducta de ratas en laberintos: entrenó a cuatro de ellas para recorrer un laberinto antes de recibir alimento. Cuando logró un entrenamiento eficiente inició estudios de sensibilidad en los roedores entrenados provocándoles ceguera, sordera, anosmia (ausencia de olfato), y falta de sensibilidad por quitarles los bigotes. Sus sujetos experimentales lograron recorrer el laberinto exitosamente (Hothersall, 2007). Más tarde estudió el comportamiento y la orientación en golondrinas y gaviotas. También experimentó en laboratorio y en campo con monos, perros, ranas y peces.

Watson vio en estas prácticas, y las de sus antecesores, cómo la psicología se acercaba a una ciencia experimental objetiva de las ciencias naturales. Hallar la línea divisoria entre el hombre y los otros animales desde esa perspectiva sería una tarea muy compleja. La introspección tampoco aportaba elementos en dirección al entendimiento del comportamiento humano. Estas reflexiones llevaron a Watson a señalar que la tarea de la psicología tendría que cambiar del estudio de la mente al del comportamiento y sus metas debían ser observar, pronosticar y controlar el comportamiento humano y de otros animales.

El método de estudio propuesto para la tarea psicológica fue el reflejo condicionado. El cambio de sujeto de estudio a humano llevó a Watson a percatarse de la débil presencia de reflejos instintivos en comparación con los animales, por lo que pensó conveniente renunciar al estudio de los instintos. Los hábitos adquiridos en los ambientes de crianza se convirtieron en su interés (Hothersall, 2007). Hizo publicaciones sobre la crianza y cuidado infantil, trabajó en la superación de los temores, y logró una exitosa carrera comercial basada en su capacidad para predecir y controlar el comportamiento. Las primeras incursiones de Watson en la publicidad le dejaron ver al consumismo como una vía de explotación para la venta de productos. Fue el primero en usar encuestas demográficas diseñadas para poblaciones predeterminadas de consumidores y ofrecer muestras gratuitas a cambio del llenado de cuestionarios de opinión. Motivó y manipuló el consumo mediante campañas publicitarias. Pese a todo, quiso volver al laboratorio aunque nunca se le ofreció la oportunidad. Respecto a las ideas con las que fortaleció al conductismo como el modelado de conducta y la influencia del ambiente, trascienden en el trabajo de BF Skinner.

B) Condicionamiento operante

Skinner pudo intuir la importancia del ambiente en el aprendizaje, sin embargo las limitaciones tecnológicas y el estado en el que se encontraba el conocimiento acerca de la psique le mantuvieron en el estatus de estudio de la conducta como fenómeno observable y medible. Influenciado por los trabajos de Pavlov y Watson trabajó en los reflejos condicionados. Aceptaba la base neurológica del comportamiento pero consideraba que la psicología de la conducta tenía como objeto de estudio la totalidad del organismo más allá que de sus partes. Opinaba que las variables causales del medio inmediato y del historial del organismo eran el foco de análisis en el estudio de la conducta. Su postura empirista de alguna manera involucra la historia vivida por el sujeto. Para Skinner el aprendizaje es la reclasificación de las respuestas en una situación compleja en la que intervenían la conducta y las causas que la generaban, y el condicionamiento se entendía como el fortalecimiento de la conducta a resultas de la aplicación del reforzamiento (Shunk, 1997). Un suceso reforzador en educación puede ser una calificación alta, el otorgamiento de tiempo libre, el encomio, y se le considera así únicamente al producir la conducta esperada. Otra forma positiva de emplear el refuerzo podría ser la extinción de una conducta indeseada.

La aplicación de la teoría skinneriana en el aprendizaje como producto de la enseñanza, indica que se logra más eficiencia cuando 1) los maestros presentan el material en pequeños pasos, 2) los alumnos responden de manera activa, 3) los maestros dan retroalimentación inmediata a la participación activa del alumno, y 4) se respeta el ritmo de avance de los estudiantes. Skinner se interesó también por la elaboración de máquinas de enseñar y por la instrucción programada en la que se involucran los cuatro elementos señalados. Los diseños tecnológicos de Pressey para máquinas de exámenes de opción múltiple en los años 20, de exámenes con respuesta libre de Skinner, y de aplicación de test por Crowder en los años 60, pueden considerarse antecedentes de incorporación de la tecnología a la enseñanza y el aprendizaje.

A grandes rasgos el conductismo se guía por las ideas y aportaciones de sus precursores: Pavlov, Watson, y Thorndike. En esta corriente el aprendizaje implica una modificación relativamente permanente del comportamiento observable de los organismos como producto de la práctica. Se logra cuando se exhibe una respuesta apropiada ante la presentación de un estímulo ambiental específico y se refuerza para elevar la probabilidad de ocurrencia en el futuro. Las condiciones ambientales son la causa determinante del aprendizaje, por lo que son controlables desde el exterior del sujeto aprendiente. Aplicado a la educación, el conductismo podría ser un recurso para regular la conducta y lograr en el estudiante la respuesta deseada ante la presencia de un estímulo.

3.2.2.2 Cognitivismo

Desde ésta perspectiva teórica el aprendizaje se describe como la adquisición de conocimiento a través de acciones realizadas sobre la información que se recibe del exterior tales como: almacenamiento, uso, organización, reconocimiento, recuperación, y comprensión. Se produce cuando la información es almacenada en la memoria de una manera organizada y significativa, influenciada por los pensamientos, las actitudes, los valores, y las creencias propias del medio.

En el aprendizaje cognitivo social Albert Bandura analiza la conducta humana dentro de un marco de reciprocidad triádica en el que la conducta, los factores personales cognoscitivos y el ambiente interactúan y se influyen (Shunk, 1997). La idea central es que el aprendizaje humano se da en el medio social a través de la observación a los otros, de manera que se adquieren conocimientos, reglas, creencias, habilidades, estrategias y actitudes, por lo que la modelación es un punto central en el proceso de adquisición y modificación de la conducta. Un punto de partida en la teoría de Bandura es el estudio de la agresión y las fuentes que favorecen el aprendizaje, como las personas que modelan conductas agresivas para quienes las aprenden (Pozo, 2006). En su trabajo, desarrollado alrededor de 1960, halló que la teoría conductista terminaba por dar una explicación simplista de fenómenos complejos como la agresión, entre otras causas por omitir la influencia del ambiente. A este respecto sugirió que el ambiente es la causa del comportamiento pero que el comportamiento es también causa del ambiente, además de reconocer la existencia de interacciones entre el ambiente, el comportamiento y los fenómenos psicológicos de la persona.

El proceso para aprender según el modelo de Bandura involucra la habilidad para abrigar imágenes en la mente y en el lenguaje. Las imágenes recuperadas del modelado marcan la acción a seguir en la actividad del procesamiento de información para transformar la estructura de la conducta en representaciones simbólicas. Según este autor el aprendizaje puede ocurrir en acto o de manera vicaria. En acto sucede como consecuencia de las acciones, si la consecuencia del acto es exitosa se retiene, pero en caso contrario se perfecciona o se descarta. El aprendizaje vicario consiste en observar o escuchar modelos en personas, símbolos, fábulas, etcétera, que ofrecen al aprendiente el modelado de conducta sin tener que ser ejecutada personalmente. En este proceso, el modelamiento es crucial debido a que mediante el modelado del comportamiento y gracias a la observación del aprendiente se logran modificaciones conductuales, cognoscitivas, afectivas, seguimiento de reglas, desarrollo de habilidades motoras y autoeficiencia.

Por la línea del procesamiento de información el énfasis se pone en los procesos internos -mentales- que median entre estímulos y respuestas. Supone que el procesamiento ocurre en el espacio entre la recepción del estímulo y la producción de respuesta, que el procesamiento es análogo a las computadoras, y que participa en todas las actividades congnoscitivas: percibir, repasar, pensar, resolver, recordar, imaginar. Bajo este modelo la memoria tiene un funcionamiento dual con una memoria de trabajo o a corto plazo en la que se recibe la información del exterior de manera superficial en la conciencia inmediata. En la memoria a largo plazo en cambio se organiza la información, se almacena y abarca material adicional al que se puede acceder con facilidad debido a su organización por contenidos. Otro concepto importante en esta línea es la elaboración que alude al proceso de añadir a la información ejemplos, detalles, inferencias, y todo aquello que facilite la vinculación de los conocimientos nuevos con los ya adquiridos.

Jerome Bruner aporta a esta corriente teórica el modelo del crecimiento cognoscitivo. El modelo propone que el desarrollo intelectual del hombre se determina por el uso de los avances en tecnología comunicativa para acceder a la actividad mental (Shunk, 1997). Los avances tecnológicos así vistos dependen de las mayores facilidades lingüísticas y de la exposición a la educación sistemática (Bruner, 1996, 1999). En cuanto a la representación del conocimiento hay tres formas dentro de una secuencia de desarrollo: en acto, icónico y simbólico. En acto, el conocimiento se representa mediante respuestas motoras de manipulación del medio; icónico implica la capacidad de reproducir la imagen de objetos ausentes, transformarlos y reflexionar en sus propiedades; simbólico implica el empleo de sistemas simbólicos como en la notación matemática que facilitan el entendimiento de conceptos abstractos como la variable x en la expresión $3x$, y es el último modo de representación en desarrollarse. Para Bruner decir que el conocimiento tiene varias formas de ser representado significa que los profesores deben variar sus actividades de acuerdo con el desarrollo de sus estudiantes, así antes de que el niño comprenda la notación matemática debería ser expuesto a las operaciones aritméticas en acto (con objetos) y en forma icónica (con ilustraciones). Insistía también en que la educación es un medio para fomentar el desarrollo cognitivo (Bruner, 2001).

Otra aportación cognitivista de Bruner es el aprendizaje por medio del descubrimiento que en términos prácticos significa obtener uno mismo los conocimientos mediante formulación y prueba de hipótesis antes que la recepción de la enseñanza del profesor, mejor aun si se realiza a través de una actividad dirigida.

Para el modelo cognitivo conexionista el cerebro funciona como una máquina. El aprendizaje se genera en la corteza cerebral y las diferentes partes del cerebro cumplen funciones de decodificación y representación de la información. En esta corriente teórica la memoria juega un papel central y su uso se clasifica en sensorial, a corto plazo, de trabajo y a largo plazo, atendiendo al momento en el que interviene en los procesos de procesamiento durante la elaboración del conocimiento.

Aprendizaje significativo por recepción es otra vertiente de esta corriente teórica. David Ausubel afirma que la adquisición de conocimiento temático es ante todo una manifestación de aprendizaje por recepción cuando el contenido por aprender se presenta en forma más o menos final, pidiendo al alumno que lo incorpore a su estructura cognoscitiva de modo que pueda disponer de él para su reproducción, la relación con otros aprendizajes, y para solucionar problemas en el futuro (Shunk, 1997). El modelo requiere de mucha ayuda para el aprendiente vía lecciones bien organizadas, conceptos ejemplificados de formas diversas que discurran de lo simple a lo complejo por pequeños pasos y diseñados unos sobre otros, de modo que los discípulos tengan conocimientos previos para beneficiarse de la enseñanza.

En educación la aplicación de estas ideas apuntan a desarrollar los procesos cognitivos de los estudiantes, a la autorregulación del aprendizaje y a aprender a aprender. En relación con la enseñanza se pretende animar al alumno a utilizar estrategias de aprendizaje pertinentes para sus respectivos desarrollos.

3.2.2.3 Constructivismo

Los desacuerdos entre los estudiosos del aprendizaje por las maneras de explicar el fenómeno a partir de procesos básicos, derivaron en el interés por estudiar los procesos complejos que participan en el pensamiento. Se percibe en la corriente cognitivista la noción de que el pensamiento ocurre en un contexto y que la cognición es una construcción del individuo basada en sus experiencias. En el constructivismo se pone en relieve la aportación del individuo en lo que aprende, tanto como las interacciones sociales en la adquisición de habilidades y conocimientos.

El constructivismo es una postura argumentativa sobre la forma en que los sujetos elaboran o construyen una parte importante de lo que aprenden (Shunk, 1997). En esta línea teórica hay un distanciamiento de la influencia del medio sobre el sujeto y de la mente como el sitio en el que se aprende, en cambio se aproxima al supuesto de que el aprendizaje ocurre en un contexto. Otro supuesto es que los individuos son participantes activos en la construcción de su conocimiento, es decir, que para entender el material el aprendiente debe redescubrir por sí mismo los principios básicos del conocimiento en aprendizaje. Aunque en el constructivismo el centro de atención difiere del conductismo y del cognitivismo, incorpora muchos de sus conceptos y aportaciones.

Algunas expresiones de esta corriente teórica son el constructivismo exógeno, el constructivismo dialéctico y el constructivismo endógeno. Exógeno se refiere a la reconstrucción de las estructuras del mundo externo, resalta la influencia del exterior en la construcción del conocimiento, de las experiencias, de la enseñanza y de la exposición a modelos para facilitar al aprendiente hacer el reflejo de la realidad. El constructivismo dialéctico apela al conocimiento como producto de las interacciones del individuo y su entorno, sin que prive el peso del exterior o de la mente. El constructivismo endógeno implica privilegiar la coordinación de actos cognoscitivos sobre la influencia del exterior a favor del desarrollo, como lo explica Piaget en su desarrollo teórico, en el que el carácter innato de las estructuras del sistema nervioso, la experiencia física, la transmisión social y las leyes probabilistas de equilibrio explican el acercamiento gradual a experimentar estados de conciencia particulares.

Según Piaget, aprender consiste en construir nuevos conocimientos a partir de lo que se conoce, del desarrollo y de la maduración mediante procesos de asimilación, acomodación y equilibrio que propician la estructuración de esquemas cognitivos confrontados con nuevos conocimientos, obstáculos cognitivos y búsqueda de equilibrio hasta alcanzar el cambio conceptual. Es una actividad mental que tiene que ver con la creación de significados a partir de las propias experiencias del estudiante y de su nivel de maduración, en la que se filtra del mundo exterior lo que se requiere para producir su propia y única realidad: "*es cierto que sólo con ocasión de las acciones ejercidas sobre los objetos se construyen las estructuras lógicas y hemos insistido en el hecho de que la fuente de las operaciones lógicas no es otra que la acción misma, la cual no puede naturalmente producirse si no es aplicada a los objetos*"(Piaget, 1977 pag. 182.)

La corriente constructivista reconoce que las experiencias individuales y directas con el medio ambiente son críticas para que el ser humano interprete y cree significados. Se interesa en la creación de herramientas cognitivas que reflejan la sabiduría de la cultura en la cual se utilizan, así como en las experiencias y los deseos de los individuos, por lo que el aprendizaje debe incluir actividad (ejercitación), concepto (conocimiento) y cultura (contexto). En la educación el constructivismo procura potenciar el desarrollo del alumno y promover su autonomía moral e intelectual hasta alcanzar el pensamiento racional.

3.2.2.4 Socio histórico o histórico cultural

De regreso a la psicología de Wundt, su visión respecto de la psicología fisiológica, en la que la experimentación forma la base del estudio de la conducta, no opacó su interés en lo que llamó Volkerpsychologie que define como el estudio de la producción cultural humana. Consideraba que esta segunda visión haría frente a la necesidad de estudiar los procesos mentales superiores (Cole, 1999), convirtiéndolos en el objeto de estudio de esa psicología cultural.

Si bien los enfoques revisados incluyen factores ambientales o de la cultura en sus desarrollos teóricos, la importancia que se da a la cultura en los procesos mentales es mínima de acuerdo con la visión de Wundt, al menos en Estados Unidos. El cambio esperado por Wundt ocurrió en la Unión Soviética (Shunk, 1997) donde recibió eco a sus inquietudes en la formulación de la teoría histórico cultural por Vigotsky y sus colaboradores, quienes estudiaron las aportaciones de esa disciplina en el tema del aprendizaje, entre ellas los trabajos de Dewey, James y Piaget, para desarrollar una nueva teoría centrada en las prácticas sociales.

De acuerdo con esta perspectiva cultura y desarrollo se entretejen en el aprendizaje, y se influyen recíprocamente sin fusionarse. El interés en este enfoque se halla en los procesos de cambio tras la transformación de la naturaleza por el humano. El aprendizaje y el pensamiento se dan como actos de la conciencia influenciados por el entorno.

Vygotsky contribuyó notablemente al desarrollo de esta línea constructivista con su teoría histórico cultural o socio cultural. En ella el aprendizaje es un cambio cognoscitivo en el que convergen factores personales y sociales, tanto filogenéticos como ontogenéticos, a través del uso de instrumentos culturales, fundamentalmente el lenguaje. En el aprendizaje participan el desarrollo natural del sujeto –filogénesis- en interacción con la línea cultural –ontogénesis-. Las interacciones sociales son ocasión del uso de instrumentos culturales mediadores entre novato (aprendiente) y experto mientras propician la transmisión cultural en un acto al que Vygotsky llamó Ley de doble formación; del experto al novato y del novato a su conciencia. Este acto transcurre en la Zona de Desarrollo Próximo, distancia que existe entre el nivel real de desarrollo del niño manifestada por él de manera autónoma o espontánea, y el nivel de desarrollo potencial mostrado gracias al apoyo de otra persona o mediador (Shunk, 1997). La zona de desarrollo es un lugar mental en el que el nivel de desarrollo del aprendiente puede desplazarse siempre que ese nivel de desarrollo experimente una ampliación.

En esta teoría el instrumento cultural por antonomasia es el lenguaje. Su adquisición atraviesa por la producción de conceptos que inicia con la formación de pseudoconceptos en un proceso que va de la organización de objetos por rasgos comunes con base en aspectos concretos, visibles y asociativos, a la organización por ensayo y error de objetos en función del campo visual, atravesando por la etapa de sincretismo en la que se hacen colecciones de objetos en cúmulos desorganizados. Una vez logrados los pseudoconceptos se transforman en conceptos psicológicos formados por categorías usadas por los adultos.

El propósito educativo en esta perspectiva teórica es promover el desarrollo sociocultural e integral del alumno a través de la educación, como un hecho substancial del desarrollo humano en el proceso de la evolución histórico cultural del hombre. Para los seguidores de esta línea se considera que los procesos de desarrollo dependen de los procesos educacionales.

3.3 Aprendizaje cognitivo cultural

Como instrumento de análisis del aprendizaje, la psicología aporta algunos elementos para estudiar al sujeto en lo individual, sin embargo, el estudio de fenómenos colectivos como la incidencia de desaciertos en las pruebas masivas, tiene mejores oportunidades de acercamiento desde las teorías psicológicas del aprendizaje, particularmente en años recientes con la línea cultural como se ilustra en los siguientes párrafos.

A finales de los años ochenta los marcos teóricos en la literatura de la Educación Matemática experimentan una tendencia a centrarse en los orígenes sociales de los conocimientos y de la conciencia (Lerman, 2001). En esa línea las teorías psicológicas del aprendizaje ofrecen un referente de investigación importante por su convergencia con el objeto de estudio: El cambio en la mente.

Por un lado, las teorías constructivistas asumen al individuo como participante activo en la construcción de su conocimiento sustentado en el propio redescubrimiento de los principios básicos del contenido en aprendizaje. Por otra parte, la teoría socio histórica, pugna por explicar al aprendizaje como un cambio cognoscitivo en el que convergen factores personales y sociales, biológicos e históricos, a través del uso de instrumentos culturales, fundamentalmente el lenguaje. Pese a las diferencias en acercamiento, ambas vertientes reconocen la importancia de las interacciones con la cultura en favor del cambio en la mente del aprendiente.

Lerman separa el constructivismo de la línea cultural y la ubica como un momento de acción en lugar de un proceso independiente. Se adhiere al posicionamiento de Wertsch en cuanto a que el objetivo del enfoque sociocultural consiste en explicar las relaciones entre la acción humana y las acciones humanas en la propia cultura (Wertsch, 1988), partiendo del supuesto que la cultura es producción de los otros, y de que el lenguaje es la vía de transmisión de conocimiento. Justifica su posicionamiento cultural aludiendo a las aportaciones de: a) psicología del lenguaje discursivo, b) psicología cultural, e 3) investigación cultural, mismas que se describen a continuación.

a) Psicología del Lenguaje discursivo. Por esta línea, la idea central indica que nos preceden la cultura, el lenguaje y sus significados, por haber nacido en un mundo constituido discursivamente del que recibimos todo el conocimiento del mundo a través del lenguaje y la comunicación en todas sus formas. Crecer en una cultura significa aprender cómo nos constituye el género, la clase, la etnia, el color, la religión, la lengua, las creencias, las costumbres, etcétera. Sin las aportaciones de los otros en la cultura y sin el potencial individual para beneficiarse de esas aportaciones, el hombre no se desarrollaría como un ser humano, aunque cada ser humano sea un producto único. Desde el punto de vista de esta línea psicológica los fenómenos de la psique existen y deben estudiarse en el mundo cultural del que provienen.

b) Psicología cultural. Se trata de una argumentación teórica que propone el uso de artefactos psicológicos, lenguaje, palabra y materiales conceptuales, como el fundamento de la actividad en la práctica cotidiana. Los artefactos lingüísticos se consideran producto de la historia cultural humana y se emplean para el desarrollo de la mente, la conciencia y la propia cultura. Para esta línea, Vygotsky formuló una tesis central en la que la estructura y el desarrollo de los procesos psicológicos humanos surgen culturalmente a través de la mediación por el uso de dichos artefactos.

c) Investigación sociocultural. Es el recurso teórico metodológico previsto para explicar las relaciones entre la acción humana y las acciones culturales.

Para Lerman, su posicionamiento evidencia la razón por la que las aportaciones de la teoría socio histórica constituyen una poderosa herramienta explicativa de los procesos áulicos implicados en el aprendizaje de las matemáticas, hecho que justifica el incremento en el desarrollo de investigaciones de corte sociocultural, debido a la posibilidad de extraer del discurso explicaciones a los fenómenos del aprendizaje de las matemáticas.

El aprendizaje según Lerman (2001) se puede ver como la reorganización cognitiva de la persona producida por factores sociales, físicos y hasta del contexto, ubicada en las prácticas sociales y la manera en que las herramientas físicas y culturales median la actividad mental. Descrito de esta manera, la tarea de los investigadores en educación matemática consiste en estudiar el enlace de la psique individual con las acciones grupales en el aula considerando historia y cultura, siempre que se acuda a la psicología cultural como marco de referencia en la investigación de los fenómenos asociados al aprendizaje.

El método de trabajo en la línea cultural incorpora recursos intelectuales de la sociología, la antropología y los estudios culturales. Como ya se dijo, interesa lograr explicaciones respecto de la forma en que la conciencia se constituye a través del discurso. Para ese efecto Lerman adopta la posición Vigotskyana por ofrecer la oportunidad de integrar en el análisis miradas de lo macro y lo micro de los procesos de pensamiento en el aprendizaje de las matemáticas durante la interacción en la zona de desarrollo próximo. Esta posición implica un enfoque particular en el lenguaje como mediador en el desarrollo de la consciencia, aquello que separa al humano del resto de los animales.

Nuestra investigación, que inquiere la causa por la que se muestra haber aprendido algo distinto a lo que se enseña, se centra en la rememoración que el alumno logra acerca de un momento de acción ocurrido en el pasado inmediato, la producción de un desacierto en un examen de conocimientos sobre contenidos curriculares.

Atendiendo a la argumentación de Lerman, las aportaciones de la psicología del aprendizaje, y la naturaleza de la investigación desarrollada en nuestro trabajo, decidimos incorporar elementos de las corrientes teóricas cognitivista y sociocultural porque sus aportaciones al esclarecimiento del aprendizaje humano constituyen una guía para buscar explicaciones a la distancia entre el producto del aprendizaje recuperado mediante evaluación y los resultados esperados en la enseñanza.

De las teorías cognitivistas se toman conceptos desarrollados por J. Bruner y del enfoque sociocultural constructos generados por L.S. Vygotsky. Como se verá, Bruner ofrece una idea respecto de cómo la cultura y la psicología popular interfieren en el aprendizaje de contenidos escolares, lo que sugiere una explicación al rendimiento escolar, en tanto Vygostky contribuye con un lugar dónde es posible localizar el punto de inflexión en el que el camino a la respuesta correcta vira en otra dirección.

3.3.1 Bruner

Emergida del cognitivismo, la psicología cultural propone que la experiencia y las acciones humanas son moldeadas por la influencia del hombre y que el hombre recíprocamente moldea las acciones humanas y la experiencia. Bruner concuerda con la psicología cultural en que la ubicación del origen y funcionamiento de los procesos mentales se encuentra en los acontecimientos vividos cotidianamente (Bruner, 1990); sin embargo, propone que el estudio de la organización de esos acontecimientos es tarea de la psicología popular pues de la cultura popular emerge el sistema sobre el cual las personas ordenan su experiencia en el mundo social, su conocimiento sobre él y sus transacciones con él (Cole, 1999). Así mismo, en las narraciones de los individuos Bruner encuentra el reflejo de las experiencias propias de las actividades cotidianas en donde localiza la conexión de acontecimientos con sus espacios temporales, y con ello lo que se encuentra en el núcleo del pensamiento humano, como las circunstancias en las cuales ocurre.

Bajo estas ideas la psicología popular intenta explicar cómo trabajan la mente y las estructuras narrativas canónicas, o la representación de acontecimientos, en los procesos de creación de significados de las personas a sus actividades cotidianas. Dicho de otra manera, intenta explicar el funcionamiento del sentido común.

En educación, la interacción entre la mente y las estructuras narrativas dará sentido a los actos de los estudiantes en sus procesos de aprendizaje (Bruner, 2001). Esta concepción teórica nos lleva a suponer que a partir del discurso proveniente de las justificaciones a las respuestas erróneas de los estudiantes sea posible hallar explicación al fenómeno desde dos vertientes: 1) la narración expuesta desde aquello que en nuestro contexto cultural se conoce como sentido común proveniente de la experiencia vivida cotidianamente en tanto ser social, y 2) la narración expuesta desde la argumentación matemática basada en los aprendizajes escolares.

Cada una de las vertientes descritas da origen a una de las dos categorías de respuesta con las que analizaremos la información que se obtenga en el desarrollo de la investigación. Tenemos entonces sentido común y argumentación matemática. La categoría sentido común obtiene su justificación de las ideas brunerianas comentadas en los párrafos anteriores.

En relación con la categoría argumentación matemática Bruner también provee justificación si admitimos el supuesto de que en la adquisición del lenguaje se encuentra explícito en el intento de comunicar o de conseguir que se hagan las cosas con palabras (Bruner, 1983). Es decir, en el ámbito de la educación matemática se pretende que el alumno adquiera lenguaje matemático a través de la comunicación de conceptos y de la realización de actos mediada por palabras. Sin embargo, por los resultados en las evaluaciones se intuye que en las prácticas de enseñanza, pese la intencionalidad de comunicar el conocimiento, el uso de la palabras resulta poco eficiente cuando el significado de los conceptos empleados es ambiguo.

La adquisición del lenguaje matemático, aun mediada por la experiencia escolar, también requiere de arreglos en la comunicación de conceptos por parte del adulto, pues los signos se relacionan más lentamente con elementos lingüísticos que los conceptos.

La tarea del docente en la adquisición del lenguaje matemático, en su calidad de agente cultural, es ajustar los conceptos empleados en la participación del conocimiento para facilitar al alumno la creación de relaciones y el desarrollo de nuevas pautas de comunicación. Lo anterior es importante porque a través de expresiones verbales, señala Bruner, la escuela efectúa un proceso de aculturación que lleva al alumno a utilizar el lenguaje como instrumento de pensamiento (Linaza, 2007).

En la aculturación académica se comparten también las formas de aplicar los conocimientos a situaciones reales o hipotéticas, escolares o extraescolares, de manera no siempre consciente por el enseñante. Estas formas de proceder, en educación matemática, se pueden clasificar como estrategias, procedimientos y razonamientos, sobre los que Bruner ilustra:

> **Estrategias.** Una estrategia es una idea general que proporciona al alumno vías para resolver un problema o una pregunta. La idea general hace referencia a un encadenamiento de decisiones o un conjunto de reglas aplicadas en la utilización de información que sirve para lograr ciertos fines u obtener ciertos resultados (Bruner, 1983). Las estrategias se pueden inferir a partir de la secuencia de actos realizados para alcanzar un fin, asimismo se pueden conocer a través de la verbalización del sujeto que las empleó en caso de que las tuviese concientes. Y cuando el alumno tiene poca conciencia de las reglas que ha seguido, también es posible seguir una idea general en la narración de sus actos pese a lo confuso de sus verbalizaciones.
>
> **Procedimientos.** Se constituyen por la serie de pasos o actos a través de los que el estudiante llega a la resolución del problema o a la respuesta de la pregunta que se le presenta. Un supuesto en la teoría de Bruner (1983) relacionado con los procedimientos, es que provienen de las experiencias vividas por los alumnos de manera que sus mentes construyen representaciones de esas experiencias guiados por su propio conocimiento. La aplicación de los procedimientos se encuentra vinculada a la elección de la estrategia elegida en una situación, pues

las decisiones que se toman o la aplicación de reglas que intervienen en la búsqueda de respuesta, incitan a la ejecución de actos en la dirección planteada.

Razonamientos. El razonamiento es un proceso de manipulación del conocimiento con objeto de adecuarlo a nuevas tareas (Bruner, 1988). En él se analiza la información para ordenarla de un modo que permita extrapolarla, interpolarla o convertirla en otra cosa. Para nuestro propósito el razonamiento es una actividad mental en la que se interrelacionan la alfabetización matemática y la realización de actos físicos en la ejecución de una tarea matemática a la que se trae lo aprendido en la escuela o en la experiencia cotidiana. En esta actividad mental, el razonamiento, según Bruner la descontextualización tiene un papel importante; descontextualización (Wertsch, 1988) es el proceso mediante el que el significado de los signos se vuelve cada vez menos dependiente del contexto espacio-temporal en el que son utilizados, como cuando la cantidad de objetos concretos se vuele un objeto abstracto en sí mismo en lugar de un significado ligado a un determinado número de objetos, con lo que se hace posible hablar de cuatro sin necesidad de especificar cuatro qué. El razonamiento y la descontextualización están asociados en el sentido de que descontextualizar los signos y sus significados permite al sujeto hablar de ellos en otros contextos, aplicarlos a otros contextos.

Para Bruner las tres formas de proceder ante la presencia de una situación nueva por resolver tienen origen en los tres sistemas de representación que operan en el pensamiento durante el desarrollo de la inteligencia humana y cuya interacción es crucial para este desarrollo. En los párrafos siguientes se ejemplifica la manera de proceder de acuerdo con cada sistema de representación.

1) Representación enactiva, por la que se representan cosas mediante acción física. Ante la exposición de la división de un entero en partes iguales dentro de la secuencia didáctica para enseñar fracciones, el aprendiente podría tener dificultad para describir la

partición que ha presenciado, sin embargo puede representar mediante movimiento físico la acción de partir un objeto cuando quiera referirse a tal idea.

2) Representación icónica, que emplea una imagen o un esquema independiente de la acción para representar una cosa con la que guarda algún parecido. En la comparación de fracciones suele ocurrir que algunos estudiantes recurren a dibujar enteros fraccionados con partes sombreadas y emplearlos como elementos de cotejo. Ésta forma de proceder ejemplifica el uso de imágenes para representar un conocimiento.

3) Representación simbólica consiste en representar un ente mediante un símbolo arbitrario que en su forma no tiene relación con el objeto representado, va más allá de la acción y de la imagen. Mientras en las formas menos avanzadas se hace referencia a la acción para recuperar la idea de partición o a la imagen de un entero fraccionado, en éste sistema el alumno puede representar una fracción como un número $\frac{p}{q}$.

Visualizar la operación de los tres sistemas, por ejemplo, nos llevaría a reconocer que tener la imagen del cubo en la mente no es lo mismo que hacer el cubo aunque la imagen pueda proporcionar un esquema para organizar secuencialmente las acciones. Con apoyo en estos sistemas de representación se espera localizar en algún caso el momento de desarrollo en el aprendizaje por el que atraviesa el estudiante, pese a no ser el propósito central de la investigación.
Finalmente el reflejo de las estrategias, los procedimientos, y los razonamientos que se localicen en las narraciones de los estudiantes respecto de sus respuestas erróneas, será el material que se estudie bajo el rubro de nuestras tres categorías de análisis: Estrategias, procedimientos, razonamientos.

3.3.2 Vygotsky

La perspectiva histórico cultural de Vygotsky, aporta elementos valiosos a la investigación en educación matemática. Entre ellos se cuentan la acción instrumentada por las herramientas culturales provenientes del lenguaje, las funciones mentales superiores que se desarrollan en la escuela a propósito de la comunicación de saberes, la zona de desarrollo próximo donde tiene lugar el aprendizaje, la ley de doble formación que explica la apropiación cultural por medio del lenguaje, y el significado de las palabras que forman el lenguaje, todos de un valor notable como puerta de acceso a la cultura cuando desde ella se dice qué aprender, de qué manera, cuándo tendrá que hacerse, y cuáles son los fines ulteriores de la adquisición de conocimientos a través del discurso pedagógico, porque ofrecen ventanas de observación al fenómeno y espacios de acción en el acto. Estos constructos influyeron el trabajo de Bruner, como se ha visto en el enriquecimiento de su teoría, e influyen el posicionamiento de Lerman por razones similares.

Lerman opina que en el plano del estudio de lo que ocurre en la mente durante el aprendizaje, el movimiento sociocultural supera tanto la histórica dualidad mente-cuerpo como la discusión racionalista-empirista como ningún otro acercamiento teórico. Esta es una de las razones por las cuales, dice, la postura cultural explica mejor los fenómenos en el aprendizaje de las matemáticas, tales como pensar matemáticamente o hablar con su lenguaje. Basado en este saber y en su experiencia en la investigación en educación matemática, Lerman (2001) sugiere buscar el hacer de la mente en los datos que los estudiantes aportan sobre su aprendizaje, más allá del discurso del aula, en una visión holística de su actividad cognitiva.

En esta investigación el concepto de zona de desarrollo próximo proporciona un sitio en la actividad mental en el que es posible observar, en la verificación de los aprendizajes de las matemáticas, una evocación del funcionamiento de la ley general del desarrollo cultural. Esta ley dice que cualquier función en el desarrollo cultural de los niños aparece dos veces o en dos planos: Primero en el plano social y luego en el plano psicológico. Para efectos de la investigación primero entre el alumno y el maestro como agente cultural que comunica el conocimiento, y luego al interior del alumno al aprender.

El espacio de actividad mental que da lugar a la zona de desarrollo próximo es el producto de una secuencia entre el proceso de aprendizaje y el de desarrollo. En el proceso de aprendizaje el alumno recibe del maestro conocimientos escolares a través del discurso pedagógico mientras en el desarrollo el alumno se ha apropiado del conocimiento y ampliado su oportunidad de adquirir nuevos conocimientos. La secuencia ocurre atravesada por la interiorización del conocimiento que transforma el proceso mental mismo y cambia su estructura y función, esta es la causa por la que el aprendizaje no coincide con el desarrollo debido a que uno favorece al otro, uno precede al otro (Shneuwly y Bronkart, 2008). En esta idea subyace una explicación al por qué la enseñanza y el desarrollo del alumno no son procesos paralelos, se piensa que el desarrollo de los procesos psicológicos superiores propios de la mente escolarizada tiene lugar después de la enseñanza.

Es importante comentar que para encontrar sentido a las narraciones de los estudiantes tendremos que ser cuidadosos con los significados que asignan a las palabras, pues a través de ellas es posible conocer los atributos de los objetos mentales que el aprendiente ha interiorizado y la manera en que opera con ellos.

Vygotsky (1995) propuso como método para entender la palabra y el pensamiento el análisis del significado de la palabra. La propuesta se debe a que las palabras forman lenguaje cuya función primaria es la comunicación seguida de la transmisión racional e intencional de la experiencia y del pensamiento a los otros. El lenguaje por su parte da lugar a formas superiores de intercambio humano y posibilita el reflejo del pensamiento sobre una realidad conceptualizada, y es una herramienta de adquisición de saberes (Wertsch, 1988; Dubrovsky, 2000). Atendiendo esa idea revisaremos en la exteriorización discursiva de los estudiantes los significados con los que hacen frente a la resolución de un planteamiento bajo la suposición de que de existir fallos en la comunicación educativa, por diferencias en el nivel de uso y comprensión de significados entre maestros y alumnos, localizaríamos una de las causas de producciones erróneas en el examen.

El último concepto por explicar, que da nombre a la cuarta categoría de análisis, es **Microgénesis.** Se trata de un término que hace referencia al desarrollo localizado en un espacio temporal breve como aquel en el que ocurre una percepción, un pensamiento, un objeto de imaginación o una expresión. Microgénesis se puede ver como un despliegue dinámico entre lo que se sabe y la producción final después de una experiencia, lo que se hace con el "germen" para alcanzar el desarrollo. En el proceso educativo mirar lo que el alumno hace con lo aprendido durante el proceso de respuesta (Rosenthal, 2002).

En esta investigación funciona como un medio para mirar en retrospectiva qué de lo que hizo el alumno con lo que aprendió, lo llevó a una respuesta errónea. El uso de ese medio se caracteriza por proporcionar los medios de exteriorización del proceso de desarrollo, provocando de manera artificial las respuestas que normalmente se ocultan en la respuesta final. En otras palabras, mediante los recursos subyacentes a la entrevista provocaremos en el estudiante la verbalización del pensamiento implicado en la respuesta a las preguntas del instrumento presentado.

Elegimos el método microgenético porque ofrece los medios para actualizar o externalizar visiblemente el desarrollo de representaciones internas y los mecanismos que las construyen (Werner, 1956), en un proceso que puede ocurrir en lapsos de tiempo muy pequeños, por ejemplo en segundos, y porque parte de la reconstrucción del proceso evolutivo de capacidades superiores que ya se han automatizado o fosilizado (Vygotsky, 1978). El análisis microgenético además tiene ventajas: 1) el cambio puede observarse directamente mientras está ocurriendo. 2) permite estudiar varios aspectos del cambio como la secuencia de los comportamientos, la rapidez de su ocurrencia, el grado de generalización, las diferencias individuales y sus causas, 3) facilita la detección de la variabilidad del comportamiento de los individuos ante tareas o circunstancias idénticas o similares, 4) es flexible porque se puede usar para estudiar diferentes conceptos y desde distintas posiciones teóricas (Bermejo, 2005).

En resumen, las ideas contenidas en este apartado dan forma al ensamble teórico cognitivo cultural adoptado en ésta investigación como referente a partir del que se delinean las dos categorías de respuestas localizadas y se explican las cuatro categorías de análisis con las que se estudian los datos. La propia orientación cognitivo cultural favoreció la creación del guión de entrevista y la rejilla de análisis, mismos que se describirán en capítulo 4, herramientas de trabajo con las que esperamos alcanzar los objetivos de investigación propuestos en el capítulo 1.

Con todos los componentes necesarios dispuestos, procedimos a realizar el estudio de las causas que llevan a los estudiantes a producir desaciertos ante una prueba de conocimiento. La metodología desplegada para ese efecto se describe en el siguiente capítulo.

4. ¿Cómo encontrar la causa de los yerros?

El propósito de este capítulo es describir la metodología desarrollada durante el proceso de obtención de datos para la investigación objeto de esta tesis. Los datos colectados provienen de la aplicación de tres instrumentos a tres grupos de estudiantes de 2° de secundaria del Distrito Federal.

Los instrumentos I, II y III (ver anexos 2 y 4), centrados en los contenidos matemáticos de *Fracciones, Sentido numérico* y *Proporcionalidad* correspondientes a la prueba del TIMSS 1995, son producto de las aproximaciones al fenómeno en estudio: la elección de una respuesta errónea. Los acercamientos a que nos referimos son el estudio Zacatecas (Ojeda, 1999) y nuestra aplicación inicial en el Distrito Federal, de los cuales recuperamos aquellos reactivos cuyo elevado porcentaje de desaciertos nos llevó a considerarlos ejemplares para ser estudiados minuciosamente. Se trata de un cuestionario extenso sobre los contenidos matemáticos mencionados, un cuestionario depurado y un guión de entrevista.

Participaron en el estudio 74 estudiantes de 2° de secundaria del Distrito Federal: cuatro en el piloteo del instrumento I, sesenta en la aplicación del instrumento I, y diez en la aplicación de los instrumentos II y III.

Los datos se registraron en los cuadernillos de los cuestionarios I y II, y las entrevistas individualizadas se grabaron en audio. El corpus de datos para el análisis que aparecerá en el siguiente capítulo lo integran las transcripciones de las diez entrevistas grabadas.

Diseñamos la estrategia metodológica en diferentes etapas según se desarrollaba la investigación, inicialmente bajo nuestras propias determinaciones y en la última etapa con la intervención y apoyo condicional de la directora de una de las secundarias participantes. Mariana Sáiz y Antonio Rivera supervisaron las actividades alrededor del refinamiento y la aplicación de cada instrumento. Además de hacer sugerencias, la directora determinó algunas condiciones para la aplicación del instrumento II, y el desarrollo de la entrevista estuvo a mi cargo.

Finalmente, la orientación teórica que fortaleció el refinamiento de los instrumentos de acopio y análisis de los datos, es producto de los trabajos desarrollados por J. Bruner y L.S. Vigotsky, expuestos en el capítulo 3.

4.1 Fase 1: Construcción del camino hacia el fenómeno.

Comentamos en el apartado introductorio la existencia de dos fases a través de las cuales se desarrolló esta investigación sobre el desacierto. La fase 2 se explica en el apartado 4.2. En cuanto a la fase 1 queremos compartir que además de haber sido muy accidentada debido a la ausencia de investigaciones en la misma dirección, determinó el camino que tendríamos que recorrer para acercarnos a los sucesos mentales durante la ocurrencia del fenómeno en estudio.

En otras palabras, en este apartado hacemos el recuento de los tropiezos con los que nos encontramos para explorar los procesos mentales puestos en juego ante la resolución de un reactivo, y las soluciones propuestas con las que, al final de un año de intentos logramos un método adecuado para acercarnos a nuestro objeto de estudio.

4.1.1 Selección y análisis del instrumento I.

La elección del primer instrumento de recogida de datos, al que llamaremos *Cuestionario I*, consistió en la selección de los ítems asociados a los contenidos matemáticos de fracciones, sentido numérico y proporcionalidad, realizada a partir de los 102 ítems liberados por IEA en 1996. El Cuestionario I (ver anexo 2) integra 43 reactivos de los cuales 30 corresponden al formato de opción múltiple con cuatro o cinco opciones cada uno, y los 13 restantes al formato de respuesta breve.

Dado que la publicación del TIMSS se encuentra en idioma inglés, decidimos utilizar la traducción al español realizada por Ojeda (1999) para su investigación.

Una vez integrado el cuestionario analizamos los dos aspectos que consideramos centrales de los ítems: el enunciado y las opciones de respuesta. Respecto al enunciado que configura cada reactivo revisamos cuidadosamente la construcción, poniendo especial atención en los términos empleados en la redacción, con la intención de verificar que la traducción realizada por Ojeda salvara las sutilezas del lenguaje a que hacen referencia Solano, et al. (2006), sin perder el sentido del cuestionamiento. Analizamos también todas las opciones de cada uno de los ítems de opción múltiple (ver anexo 3) con el objeto de dibujarnos una idea de lo que los diseñadores tomaron en cuenta para la elaboración del reactivo como posibles dificultades en el aprendizaje.
El procedimiento para la exploración de los ítems incluyó un análisis para y determinar qué saber matemático necesitan los alumnos para llegar a la respuesta correcta.

Con toda la información recabada en el trabajo de exploración fue posible familiarizarnos con el instrumento en aspectos como los saberes supuestos que los estudiantes manifestarían en la elección de sus respuestas, según la visión de los diseñadores, y los procedimientos matemáticos con los que se llega a la respuesta correcta.

Ilustramos la exploración a los reactivos con un ejemplo: Consideremos la pregunta número diecinueve de nuestro instrumento I (ver figura 4.1):

19. ¿Qué número es el más grande?

A) $\frac{4}{5}$ B) $\frac{3}{4}$

C) $\frac{5}{8}$ D) $\frac{7}{10}$

Respuesta correcta: A

Porcentaje de respuestas acertadas: Canadá 56.8 %,

Estados Unidos 39.4 %, Zacatecas **12.9** %

Figura 4.1. Pregunta 19 del instrumento I, tomada de Ojeda (1999), pag. 78.

El análisis realizado a esta pregunta y sus cuatro opciones de respuesta muestra que para responder acertadamente se requiere de una estrategia de comparación en la que es necesario conocer propiedades de las desigualdades. Las estrategias a las que el alumno puede recurrir son:

1. Productos cruzados. Uno de los criterios de comparación es el llamado “el de los productos cruzados”. Específicamente, si se desea averiguar cuál de dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ es mayor, es suficiente comparar los productos ad y bc. Si $ad < bc$ entonces podemos afirmar que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Si por el contrario, $ad > bc$ entonces $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$. Por ejemplo, si deseamos averiguar cuál de las fracciones $\frac{4}{5} y \frac{5}{8}$ es mayor, calculamos $4 \cdot 8 = 32$ y $5 \cdot 5 = 25$. Dado que $4 \cdot 8 > 5 \cdot 5$, podemos concluir que
$$\frac{4}{5} > \frac{5}{8}.$$
Una buena aplicación de esta estrategia de comparación para decidir cuál de las cuatro fracciones
$$A)\frac{4}{5}; B)\frac{3}{4} : C)\frac{5}{8} y D)\frac{7}{10}$$
es mayor, requiere un mínimo de 3 comparaciones.

2. Comparar fracciones comunes. Una segunda estrategia consiste en expresar todas las fracciones con un común denominador y entonces comparar los numeradores resultantes, en este caso hemos de hallar un común denominador de las cuatro fracciones, el cual puede ser el mínimo común múltiplo de los denominadores. En este problema tenemos

$$\frac{4}{5}=\frac{32}{40},\quad \frac{3}{4}=\frac{30}{40},\quad \frac{5}{8}=\frac{25}{40},\quad \frac{7}{10}=\frac{28}{40}$$

Si comparamos los numeradores de las fracciones, obtenemos

$$\frac{32}{40}>\frac{30}{40}>\frac{28}{40}>\frac{25}{40}$$

Por lo tanto, si recuperamos los denominadores originales tenemos

$$\frac{4}{5}>\frac{3}{4}>\frac{7}{10}>\frac{5}{8}.$$

3. Comparar fracciones decimales. Una tercera estrategia de comparación consiste en expresar cada fracción en forma decimal

$$\frac{4}{5}=0.80$$
$$\frac{3}{4}=0.75$$
$$\frac{5}{8}=0.625$$
$$\frac{7}{10}=0.7$$

Comparando estas expansiones decimales obtenemos:

$$0.80>0.75>0.625>0.7$$

La aplicación de esta estrategia requiere primero realizar las divisiones para obtener las expansiones decimales y es necesario que el alumno sepa comparar números escritos en forma decimal.

Recuperando las fracciones originales obtenemos

$$\frac{4}{5}>\frac{3}{4}>\frac{7}{10}>\frac{5}{8}.$$

4. Uso del recurso gráfico. Una cuarta estrategia a la que recurren los estudiantes, por supuesto no eficiente, es la técnica de la partición de pasteles, es decir, la representación gráfica de las fracciones (ver Figura 4.2) como se muestra a continuación:

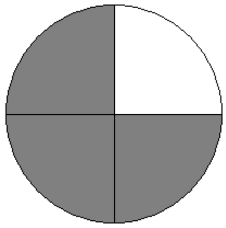


Figura 4.2. Ejemplo de representación gráfica de fracciones, partición de la unidad en cuartos.

> Esta representación icónica requiere de la división de una figura, usualmente circular, en partes iguales. Vale la pena observar que este procedimiento difícilmente podemos llevarlo a cabo, pues la división de un círculo o una figura regular en partes iguales es prácticamente imposible, sobre todo si se hace a mano alzada. Por lo anterior es fácil suponer que la comparación entre fracciones con denominadores diferentes, como en el caso que nos ocupa, difícilmente puede considerarse una estrategia de resolución adecuada.

En relación con el tiempo requerido para responder los ítems del examen TIMSS 1995, el IEA considera suficiente un minuto para los de opción múltiple, y dos minutos para los de respuesta breve. Considerando la explicación expuesta uno podría hacerse la pregunta ¿Es suficiente un minuto para responder un ítem como el anterior con cualquiera de las tres estrategias válidas?

En cuanto a las razones que el estudiante puede tener para elegir una u otra opción distinta de la correcta, encontramos lo siguiente: Para la opción B) $\frac{3}{4}$, el estudiante asocia denominador más chico con fracción más grande, en tanto que para el inciso D) $\frac{7}{10}$, relaciona denominador más grande con fracción más grande. A este respecto, Kieren (1985) reporta que en el aprendizaje de las fracciones existen dificultades con la unidad, la parte y las relaciones entre ellas.

4.1.2 Piloteo con entrevista exploratoria del Instrumento I

Concluida la exploración del instrumento, reactivo a reactivo, decidimos aplicarlo a un número pequeño de estudiantes de segundo grado de secundaria con una doble finalidad: 1) proyectar el tipo de respuesta que podríamos conseguir, y 2) generar ideas para diseñar el instrumento de análisis de las respuestas erróneas.

El piloteo se realizó en el verano de 2008. Participaron en él cuatro estudiantes a quienes nos referiremos como Claudia, Diana, Pamela y Diego. Todos ellos fueron contactados a través de la práctica profesional privada, hecho que facilitó tanto su participación voluntaria como la obtención de información acerca de sus historias de vida (ver tabla 4.1), misma que consideramos podría ser de ayuda para entender sus decisiones respecto a la elección de las respuestas vertidas en el cuestionario.

Tabla 4.1. Antecedentes de vida de los participantes

Sujeto	Semblanza
Claudia	Tiene 14 años, estudia el 2° grado en una escuela secundaria diurna. Es la primogénita de una familia con tres hijos. Su mamá es maestra de secundaria y su papá es ingeniero cursando estudios de maestría, además es maestro en la escuela nacional de educadoras. Su responsabilidad más importante es para con la escuela.
Diana	Cursa 2° de secundaria Técnica. Es la mayor de 2 hijas. Sus padres cursaron estudios a nivel licenciatura, su mamá es ama de casa y su papá es propietario de una empresa de mantenimiento a equipo de cómputo. Ha participado en diversos concursos de matemáticas, impulsada generalmente por sus padres. Su responsabilidad más importante es con su formación académica.
Pamela	Estudia 2° en una secundaria Diurna. Tiene una hermana 6 años menor a quien cuida durante las tardes. Ambos padres trabajan fuera de casa, su mamá terminó el bachillerato y su papá la secundaria. Aunque sus padres le señalan como prioridad su formación académica [en la que tiene calificaciones superiores a 8], su principal responsabilidad es el cuidado de su hermana y el suministro de lo que ambas requieran para sus tareas escolares.
Diego	Asiste al 2° grado en una secundaria diurna en el turno vespertino. Es hijo único. Su mamá terminó secundaria antes que él naciera y posteriormente cursó bachillerato; actualmente trabaja en un despacho. Su papá terminó secundaría, trabaja como chofer. Diego padeció diversos problemas de salud desde su nacimiento hasta los 10 años. Cursó la primaria en 4 diferentes escuelas por cambios de domicilio de la familia. Para sus padres lo más importante es que asista a una escuela cercana a su domicilio, menos importante es el nivel académico de la escuela o el aprovechamiento de su hijo.

Las condiciones para la aplicación individualizada consistieron únicamente en informarles que disponían de tiempo ilimitado, y que al finalizar se les harían algunas preguntas acerca de sus respuestas.

El procedimiento atravesó la siguiente secuencia: a) proporcionar al alumno un ejemplar del *cuestionario I* para su resolución (ver anexo 2), b) concluida la resolución del test localizar de inmediato las respuestas erróneas seleccionadas por el participante, c) preguntar la razón por la cual había elegido esa respuesta.

Como producto de la exploración, en relación con la doble finalidad del estudio: proyectar el tipo de respuesta que podríamos obtener y generar ideas para diseñar el instrumento de análisis, hallamos lo siguiente.

1. *Proyectar el tipo de respuesta que podríamos conseguir.*

A partir de las respuestas de los estudiantes justificando la elección de una opción no correcta o una respuesta errónea [no se les notificó que la respuesta era incorrecta] en la entrevista exploratoria, se identificaron dos vertientes de justificación; la argumentación matemática propia de los aprendizajes escolares y la argumentación matemática influenciada por el sentido común fundamentada en sus experiencias de vida tanto escolares como extraescolares.

Diana, por ejemplo, emitió una respuesta a la pregunta 25 (ver figura 4.3) que, sin ser la correcta, evidencia cierto conocimiento matemático con una argumentación escolar adecuada.

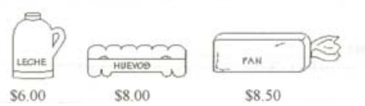
25. Escribe 0.28 como una fracción reducida (simplificada) Respuesta: ______________________________
Respuesta correcta: 7/25. Respuesta de Diana: ¼

Figura 4.3. Pregunta 25 del Instrumento I

Diana respondió ¼ en la pregunta 25 del Cuestionario I. Cuándo se le pidió explicar la razón de su respuesta dijo que 0.28 era casi 0.25 y que eso correspondía a la fracción ¼.

Otra línea de respuestas surgió de la elección de Pamela, quien nos llevó a buscar en el sentido común originado en la experiencia de vida (Bruner, 1983), la explicación a su respuesta. En la pregunta 4 (ver figura 4.4) Pamela eligió la opción B.

4. Carlos tenía $ 30.00 para comprar leche, pan y huevos. Cuando llegó a la tienda encontró que los precios eran los siguientes:



¿En cuál de los siguientes momentos tendría sentido usar una estimación en lugar de emplear números exactos?

A. Cuando Carlos trató de decidir si $30.00 era suficiente dinero.
B. Cuando el cajero anotó el total en la caja registradora.
C. Cuando Carlos preguntó cuánto debía pagar.
D. Cuando el cajero le regresó el cambio a Carlos.

Respuesta correcta: A. Respuesta de Pamela: D

Figura 4.4. Pregunta 4 del Instrumento I

Su argumentación por la elección de esa opción fue:

“M*i mamá siempre me da suficiente [dinero] para lo que me encarga y yo tengo que fijarme en que me den bien el cambio, porque si no me castiga”.*

Obviamente Pamela respondió incorrectamente el problema, sin embargo se puede entender que se debió a que creó, a partir de él, un nuevo problema apegado a su contexto de vida. Esta manera de responder podría a simple vista parecer un indicio de problemas en el aprendizaje, pero un tratamiento más delicado de la situación permitió ver una razón subyacente distinta; concluida la entrevista se realizó con ella un ejercicio de reflexión con el que pudo llegar a la respuesta correcta entendiendo que la pregunta estaba formulada en un contexto hipotético. Se puede apreciar entonces que la realidad experimentada en la vida extraescolar cotidiana se superpone a una cuidadosa lectura y comprensión del enunciado del problema.

Explicaciones como las de Diana y Pamela enfatizaron la importancia de fijar la atención en el origen de las argumentaciones emitidas por los estudiantes, pues en ellas se pueden hallar las causas de la inclinación por una respuesta específica. Particularmente llamó nuestra atención el contexto histórico de ambas estudiantes, del que se sospecha una experiencia de vida diferenciada por las prácticas culturales familiares, y un impacto en el uso de sus conocimientos escolares en situaciones problemáticas hipotéticas.
Con ambos tipos de justificación, de los cuales se ha expuesto un ejemplo, se logró una mejor imagen del tipo de respuestas que podríamos obtener en una aplicación a un número mayor de estudiantes, al tiempo que establecimos las categorías de respuestas, mismas que contribuyen en la organización del análisis de las narraciones que justifican las respuestas al cuestionario. Las categorías de esta primera fase de aproximación al fenómeno en investigación se muestran en el siguiente recuadro:

Categorías de respuestas (fase I)
I.1 Argumentación matemática I.2 Sentido común

Figura 4.5 Categorías de respuestas

Argumentación matemática es uno de los dos elementos de clasificación de respuestas emitidas por los estudiantes. Se relaciona con el tipo de razonamiento que el estudiante dice haber empleado en la resolución de un reactivo. Se distingue en la narración de procedimientos y razonamiento por incluir aprendizajes matemáticos presumiblemente adquiridos de la enseñanza de contenidos conceptuales, procedimentales o actitudinales del currículum oficial para la educación básica.

Sentido común es la segunda forma de clasificar las narraciones sobre la forma de resolver un reactivo. En ésta categoría se incluyen las explicaciones sobre razonamientos y procedimientos en las que se identifican saberes culturales provenientes de la escuela y del contexto extraescolar que sirven de herramienta al alumno para resolver un cuestionamiento. Entre los saberes identificables se encuentran consignas escolares o extraescolares, reglas, falsos cognados, creencias, indicaciones paternas, e intuiciones.

2. *Generar ideas para diseñar el instrumento de análisis de las respuestas erróneas emitidas por los alumnos.*

Esta segunda finalidad del piloteo del cuestionario I se cumplió satisfactoriamente pues en las narraciones de los estudiantes se recuperaron estrategias y procedimientos con los que llegaron a la elección de la respuesta no correcta. Con los razonamientos, el tercero de los recursos por identificar, el hallazgo fue algo más fructífero de lo esperado porque además de confirmar la presencia de los tres elementos obtuvimos información para refinar la entrevista.

En relación con la pregunta ¿Por qué elegiste esta respuesta?, notamos que la interpelación ocasionaba un dejo de duda en los participantes. De alguna manera la consulta les hacía suponer que su respuesta era incorrecta, pese a haber evitado notificarles que lo fue. La parte positiva de este episodio es que nos hizo notar la poca pertinencia de la pregunta, de manera que decidimos replantearla antes de la aplicación de los instrumentos II y III.

Como ya se dijo en el capítulo 1, nuestro interés primario en esta investigación consiste en identificar las estrategias, los procedimientos, y los razonamientos que llevan al alumno a elegir una respuesta errónea, siguiendo lo más puntualmente posible con la descripción bruneriana. Dado que los recursos expuestos por los estudiantes en la resolución del test fueron coincidentes con tal expectativa, decidimos organizar nuestras categorías de análisis según se muestra en el recuadro que se presenta a continuación:

Categorías de análisis (fase I)
1.1 Estrategias 1.2 Procedimientos 1.3 Razonamientos

Figura 4.6. Categorías de análisis.

Estrategias es el primer componente de las categorías de análisis, producto del piloteo. De acuerdo con Bruner (1983), estrategia es una idea general referida a un encadenamiento de decisiones o un conjunto de reglas aplicadas en la utilización de información disponible que proporciona vías para resolver un problema o una pregunta. Su elección puede ser inferida de los actos realizados o la narración de los actos realizados para responder un reactivo. Bajo esta categoría se inscriben los nombres a los que subyacen las ideas de resolución de los ítems.

Procedimientos es la segunda categoría de éste grupo. Para Bruner los procedimientos se constituyen por la serie de pasos o actos a través de los que el estudiante llega a la resolución del problema o a la respuesta de la pregunta que se le presenta, mismos que provienen de las experiencias vividas y conocimientos elaborados por los alumnos. Acorde a la explicación bruneriana la aplicación de los procedimientos se encuentra vinculada a la elección de la estrategia de resolución pues las decisiones que se toman o la aplicación de reglas que intervienen en la búsqueda de respuesta se rigen por una idea general. Esta categoría se encuentra subsumida a la anterior. En el análisis **Procedimientos** se nutre de las narraciones de los alumnos en las que se localizan los pasos desarrollados para obtener una respuesta.

Razonamientos. La tercera categoría hace referencia a un proceso de manipulación del conocimiento con objeto de adecuarlo a nuevas tareas (Bruner, 1988). En él se analiza la información para ordenarla de un modo que permita extrapolarla, interpolarla o convertirla en otra cosa. Para nuestro propósito el razonamiento es una actividad mental en la que se interrelacionan la alfabetización matemática y la realización de actos físicos en la ejecución de una tarea matemática a la que se trae lo aprendido en la escuela o en la experiencia cotidiana. Como categoría de análisis la empleamos para estudiar las justificaciones de los estudiantes a su proceder en la resolución de un reactivo, y se alimenta de las narraciones que hacen explicita la argumentación.

Con las vertientes de justificación a las respuestas erróneas emitidas por los estudiantes entrevistados en el piloteo del instrumento I, integrados a las categorías de respuesta y de análisis, reunimos los elementos con los que se estudiarían las causas que generan los desaciertos de los estudiantes del grupo de 2° año al cual se aplicó el *Instrumento I*.

Nuestro procedimiento diseñado para estudiar las causas de las respuestas erróneas requirió la elaboración de una rejilla de análisis basada en las aportaciones teóricas brunerianas, en ésta primera fase, así como de las justificaciones emitidas por los alumnos entrevistados. Con la intención de clarificar el procedimiento proponemos el análisis de la respuesta emitida por Diego al reactivo 35 expuesto en la figura 4.7.

35. Sombrea $\frac{5}{8}$ del total de la siguiente cuadrícula:

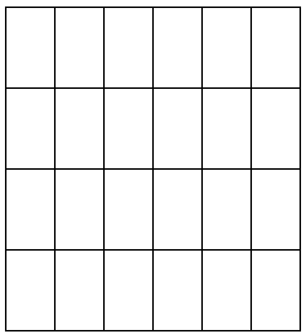
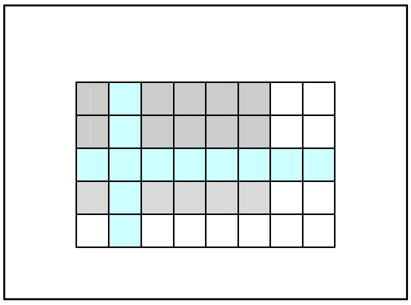


Figura 4.7. Ítem 35 del Instrumento I.

La respuesta producida por Diego fue:



Una vez identificada la respuesta como errónea preguntamos a Diego ¿Por qué diste esa respuesta?, grabamos su narración acerca del dibujo realizado, y posteriormente hicimos el análisis de los datos empleando la rejilla elaborada para ese fin.

La *Rejilla de Análisis* (Ver Figura 4.8) es el instrumento que construimos para estudiar las respuestas erróneas a los reactivos seleccionados del TIMSS 1995, en busca de las causas que generaron los desaciertos. Como ya dijimos, su estructura incorpora dos categorías de respuestas; Argumentación matemática y Sentido común que se encuentran en un mismo nivel horizontal, por ser independientes una de la otra, mientras cruzan los niveles verticales de las categorías de análisis. Por su parte las categorías de análisis se incorporan en una jerarquía vertical descendente que permite ver en primer nivel las Estrategias, en el segundo nivel los Procedimiento asociados a las estrategias y en el tercer nivel los razonamientos que justifican las estrategias y procedimientos elegidos. No queremos comunicar que los razonamientos sean posteriores al proceder, decidimos ubicarlos en el tercer nivel debido a que la reflexión en relación con el uso de los conocimientos adquiridos se hizo visible hasta la entrevista, una vez solucionado el reactivo.

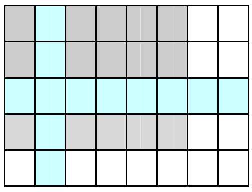
	Argumentación matemática	**Análisis**	**Sentido común**
Estrategias		Emplea el recurso gráfico para responder la pregunta:  El sombreado en gris corresponde a la cuadrícula que se proporciona en el ítem para responder la pregunta. La fila y columnas en blanco son el agregado para obtener los cuadritos faltantes. Los cuadritos en azul corresponden a la respuesta emitida.	Uso del Recurso gráfico
Procedimientos		Incrementar una fila y dos columnas. Sombrear 12 cuadritos; 5 en vertical y 8 en horizontal, según su percepción icónica. Al parecer el alumno no reconoce que cada parte de la cuadricula representa $\frac{1}{24}$, ni la equivalencia 1:3 en $\frac{3}{8}$. Parece desconocer la conexión entre la unidad de referencia y la fracción que se pide sombrear. Como se observa, el alumno parte de su percepción icónica sin considerar los significados convencionales de numerador y denominador.	D: En esta [señala la cuadrícula] faltaban cuadritos para los dos lados. Se los puse y ya.
Razonamientos.		Diego sabe que cada cifra involucrada en la fracción representa partes de la unidad. Menos claro parece quedarle el significado de la cifra en la fracción lo que queda plasmado en la representación gráfica. Representa al numerador en forma vertical y al denominador en horizontal.	D: [en las fracciones] 5/8 se representa con cinco partes arriba y 8 abajo.

Figura 4.8 Rejilla de análisis. Respuesta de Diego al reactivo 35 del Instrumento I.

En la *Rejilla de análisis* se localizan tres columnas y tres filas. La columna de la izquierda, *Argumentación matemática*, se utiliza para registrar el segmento de discurso de los alumnos correspondiente a cualquiera de las tres categorías de análisis siempre que sigan una argumentación matemática basada en el aprendizaje escolar. La columna de la derecha *Sentido común* guarda las explicaciones de los estudiantes acerca de cualquiera de las categorías de análisis que provengan del sentido común recuperado de la experiencia cotidiana dentro o fuera de la escuela. La columna central *Análisis* contiene nuestros comentarios de exploración por la narración correspondiente ya sea que se originen de los aprendizajes curriculares o de la experiencia cotidiana.

En cuanto a las filas de la rejilla, la denominada *Estrategias* registra la idea general de resolución bajo una estrategia, elegida por los alumnos para resolver el problema. La fila *Procedimientos* contiene paso por paso el desarrollo que el alumno expresa haber llevado a cabo para responder al reactivo y elegir una opción o emisión de su respuesta. La fila *Razonamientos* guarda las partes del discurso en las que los estudiantes expresan sus justificaciones para proceder como lo hicieron.

Se observa en la rejilla, con el análisis a la respuesta, cómo Diego acude a su sentido común para resolver un problema escolar, razón por la que decidimos registrar la respuesta en esa columna bajo la categoría Sentido común. Si bien es cierto que pudo haber aprendido de experimentar la enseñanza escolarizada, su respuesta apela a decisiones prácticas "aprendidas" de la experiencia cotidiana que guardan tintes de argumentos matemáticos como la partición de la unidad y la manera de representar partes mediante sombreados.

En cuanto a las categorías de análisis, por su respuesta y la manera en que procedió inferimos que la estrategia empleada es el uso del recurso gráfico. Su procedimiento, dibujar lo que falta para poder sombrear, y su razonamiento también se consideraron de Sentido común.

Un rasgo interesante de esta respuesta es que permite apreciar el hecho de que la representación icónica antecede a la representación simbólica (Bruner, 1964, citado en

Shunk, 1997), por lo que puede suponerse que el aprendizaje de fracciones comunes se encuentra en proceso.

Una vez organizada toda la información y experiencia obtenida del piloteo decidimos efectuar la aplicación del *Instrumento I* a un grupo de estudiantes de 2° de secundaria en la propia escuela a la que asisten.

4.1.3 Aplicación del Instrumento I

Además de lo expuesto en el apartado anterior, el espacio temporal transcurrido entre el piloteo y la aplicación del instrumento I dio ocasión para verificar la correspondencia de los contenidos evaluados en el instrumento del TIMSS 1995 con los que se enseña en el currículum vigente para la educación básica (ver anexo 1). Verificado lo anterior se fijaron como propósitos para esta fase de la investigación; 1) contrastar nuestros resultados con los obtenidos por Ojeda, y 2) localizar las respuestas erróneas más populares. Este segundo propósito tiene una finalidad específica: reducir el número de ítems que integrarían el guión de entrevista.

El siguiente paso fue conseguir acceso en escuelas secundarias para la aplicación del instrumento. Como era de esperarse, el criterio para la elección de la escuela surgió de las respuestas obtenidas en el piloteo. La opción elegida por Pamela, expuesta en el apartado anterior, nos llevó a preguntarnos si en realidad las opciones no correctas eran malas respuestas, y si el sentido común sería un factor de impacto a la hora de decidir por una opción, de tal manera que en esta parte nuestras reflexiones se volcaron al estrato cultural que la semblanza de vida de Pamela reflejaba, en contraste con el de Diana. Pensamos entonces en buscar alguna secundaria cuyos alumnos pudiesen tener un nivel socioeconómico y unas responsabilidades similares a las de Pamela, además de una escuela en la que tales características fuesen opuestas. Finalmente se agregó un tercer grupo que corresponde a una escuela particular con una perspectiva de trabajo autónomo para los estudiantes.

La aplicación se realizó en otoño de 2008. Participaron un total de 60 estudiantes de tres secundarias diferentes de la Ciudad de México, dos localizadas en el sur y una en el norte. Las escuelas participantes en orden de aplicación fueron:

- Colegio Olof Palme. Se trata de un colegio privado ubicado en la zona sur de la ciudad. Cuenta con los tres niveles de educación básica; preescolar, primaria y secundaria. El número de alumnos por grupo es reducido y se procura que la atención sea personalizada. La disciplina es muy importante para la directora de esta institución.

- Centro escolar Hermanos Revueltas. Ésta escuela privada, localizada en la zona sur del Distrito Federal, cuenta con jardín de niños, primaria, secundaria y colegio de ciencias y humanidades. Todos los niveles de esta institución se rigen bajo la perspectiva de escuela alternativa en la que la autodeterminación es la principal característica.

- Secundaría técnica No. 9 Walter Cross Buchanan. La modalidad a la que pertenece esta escuela pública situada en el norte de la ciudad, hace que los estudiantes tengan contacto con la realidad laboral del país, por lo que la cercanía con el contexto cultural de sus alumnos es más estrecha que en las otras dos escuelas participantes.

Iniciamos la fase de aplicación estableciendo contacto con la directora del Colegio Olof Palme. En la negociación del acceso ella revisó el instrumento y valoró el propósito del estudio. Junto con su autorización aportó las siguientes recomendaciones:

a) Incluir un espacio en la carátula del test para el nombre de los estudiantes. La razón argüida fue que en su experiencia, ésa es la manera de comprometer a los chicos a hacer su mejor esfuerzo en la resolución del examen, lo que aportaría resultados similares a los que se obtienen de evaluaciones reales en lugar de productos de una situación relajada que no reflejaría la real. Otra razón dada fue que de ser necesario en el futuro, pese a guardar el anonimato, se podría localizar con facilidad a los estudiantes.

b) Aplicación del instrumento por una autoridad institucional de la escuela. La razón: dar seriedad a las respuestas y de alguna manera asegurar un buen desempeño por los alumnos. Esta parte también serviría para la retroalimentación que la directora solicitó al finalizar la aplicación en su escuela.

Participaron los 17 alumnos que en ese momento cursaban el segundo grado de toda la secundaria. La aplicación corrió a cargo de la directora de la escuela, quien otorgó tiempo libre para la resolución de los 43 reactivos; más tarde notificó que el mayor tiempo empleado en la resolución fue de una hora.

Con la intención de hacer las aplicaciones en las condiciones lo más parecidas posible, se optó por seguir las recomendaciones en las dos escuelas restantes, sin embargo en una secundaria sólo fue posible aplicar la primera recomendación, la segunda tuvo ajustes debido al estilo de trabajo que sigue.

Acudimos al Centro escolar Hermanos Revueltas con la autorización de su director y la indicación precisa del profesor de grupo a quien debíamos dirigirnos para la siguiente aplicación. En esta ocasión se entregaron los ejemplares al profesor para su distribución en la clase, pero debido a su petición expresa permanecimos en el salón observando el proceso. Por principio su indicación al grupo fue que se trataba de un examen que no afectaría su calificación, con lo que liberó a los alumnos para decidir autónomamente colaborar o no con el estudio. Aunque participaron los 28 integrantes del grupo, se notó poco interés por parte de todos.

Finalmente obtuvimos la contribución de una maestra de la secundaria técnica no. 9, quien luego de que se le explicaron los pormenores de la investigación, estuvo de acuerdo en aplicar a sus 15 estudiantes el cuestionario I, aprovechando el período de exámenes que tenía en puerta. Esta vez, como en el colegio Olof Palme, el proceso fue totalmente ciego para nosotros pues únicamente se le entregó el paquete con los 15 ejemplares y unos días más tarde ella los devolvió resueltos.

4.1.3.1 Primeros resultados

Al inicio de este apartado se explicó que la aplicación del instrumento I tenía propósitos definidos en relación con la fase en la que se encontraba el estudio, de manera que tan pronto colectamos la totalidad de los ejemplares resueltos de las tres escuelas participantes nos dimos a la tarea de sistematizar y procesar la información contenida en ellos. Para tal efecto registramos los resultados de cada escuela, atendiendo a las respuestas emitidas por cada uno de los jóvenes. Más tarde decidimos concentrar los resultados de todos los participantes de las tres escuelas en un solo documento.

Las tablas (ver anexo 3) obtenidas con los datos de la aplicación del instrumento I facilitaron una rápida percepción visual tanto de los puntajes alcanzados por los estudiantes, como de la frecuencia con que se elegía cada una de las opciones incorrectas en los reactivos de opción múltiple o la frecuencia de las respuestas erróneas en las preguntas abiertas.

El desarrollo de esta fase produjo los datos requeridos para cubrir los objetivos fijados al inicio de la aplicación del instrumento I:

1. *Contrastar los resultados de esta investigación con los obtenidos por Ojeda.*

Interesaba en esta fase verificar la consistencia entre los resultados obtenidos en la investigación Zacatecas y los datos recabados en Ciudad de México, particularmente por corroborar la correspondencia curricular de ambos estudios y con ello la vigencia del instrumento. Tras el procesamiento de la información verificamos uno a uno los porcentajes alcanzados en cada ítem hallando que, pese a algunas variaciones sutiles, en general son consistentes entre sí, de modo que el resultado confirmó la utilidad del instrumento. Un ejemplo de lo anterior se muestra en la imagen 4.9:

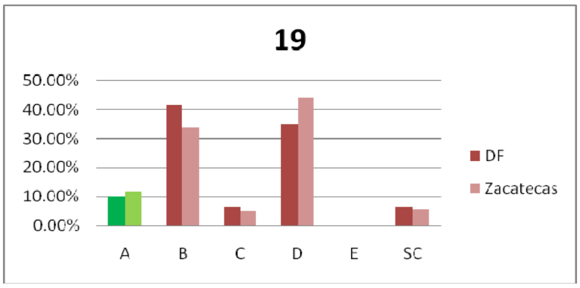
19. ¿Qué número es el más grande? A) $\frac{4}{5}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{5}{8}$ D) $\frac{7}{10}$	 Incidencia de opciones de respuesta **10.0 %**
Respuesta correcta: A Porcentaje respuestas correctas TIMSS 1996: Canadá 56.8, E.U. 39.4, Promedio internacional 38.9 Aplicación Ojeda (Zacatecas, México 1999) **12.9.** Nuestra aplicación: **10.0**	

Figura 4.9. Pregunta 20 tomada de Ojeda (1999), pag. 78, y Tabla de respuestas de aplicación a 60 alumnos.

En relación con el ítem que se comenta a continuación, consideramos pertinente advertir que en la traducción de Ojeda detectamos que se cambió la palabra “patrón” de la versión en inglés por la palabra “modelo” a la versión en español (ver Figura 4.10).

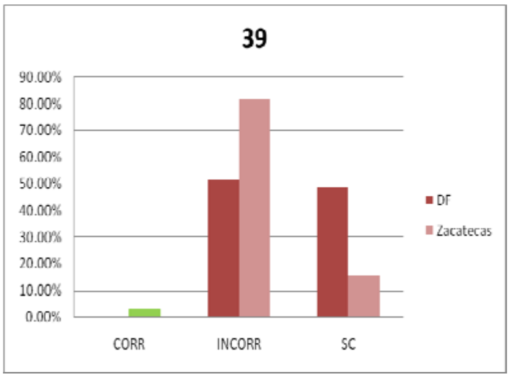
T2. Two boxes of square-shaped cardboard pieces are available to make a larger pattern. There are 4 small squares in each piece. All pieces in Box 1 look like  All pieces in Box 2 look like  In the required pattern, for every piece from Box 2 there are 2 pieces from Box 1. What fraction of the small squares in the required pattern will be black? Answer: ____________________	**39.** Dos cajas contienen piezas cuadradas de cartulina para construir un modelo más grande. Hay 4 pequeños cuadros en cada pieza. Todas las piezas de la caja 1 son de esta forma  Todas las piezas de la caja 2 son de esta forma  Para formar el modelo, por cada pieza de la caja 2 debe haber 2 piezas de la caja 1. Construido el modelo ¿Qué fracción de los cuadros pequeños será de color negro? Respuesta: _______________________	
Respuesta Correcta: 1/3 o cualquier fracción equivalente. Porcentaje de respuestas correctas en TIMSS 1996: Canadá 6.5, USA 5.4, Internacional 7.4 Aplicación de Ojeda (Zacatecas, México 1999): 4.1; Nuestra aplicación 0.0		

Figura 4.10. Traducción al español de la pregunta T2. Tomado de TIMSS mathematics ítems pag. 124, y tabla de respuestas de aplicación a 60 alumnos.

Señalamos el caso debido a lo interesante de los resultados. Se trata de un problema en el que los porcentajes de aciertos de los países participantes en la aplicación del TIMSS 1995 son tan bajos como los alcanzados en la aplicación mexicana, y más bajos aún en la nuestra, lo que induce a buscar en el enunciado la existencia de una dificultad para precisar el significado que se quiere comunicar. Preguntas como ésta refuerzan nuestro interés en estudiar los significados que nuestros estudiantes asocian a los conceptos matemáticos.

2. *Localizar las respuestas erróneas más populares.*

El sorprendente pero esperado porcentaje de 0.0 logrado por nuestros participantes en el ítem 39, comentado párrafos atrás, realza el corte cualitativo de esta investigación en la que se buscan las causas que llevan a elegir una respuesta errónea. Para hallarlas consideramos fundamental explorar por los pensamientos de los examinados mientras responden un problema, acto del que se pueden tener indicios mediante un cuestionamiento o diálogo directo durante el proceso de respuesta, de acuerdo con el desarrollo teórico de Bruner.

Llevar a cabo la exploración de la manera como la visualizamos implica algunos obstáculos por zanjar que la aplicación del instrumento dejó en claro. Por una parte nos interesa que los alumnos hayan cursado 2° grado de secundaria o estén a punto de terminarlo para asemejar las condiciones de aplicación del TIMSS 1995, lo cual ocurrió en esta aplicación hecha en el espacio temporal adecuado. Por otro lado determinamos que recuperar los procesos empleados para llegar a la respuesta errónea requería entrevistar a los estudiantes inmediatamente después de haber resuelto el instrumento, hecho irrealizable en esta etapa debido al procedimiento efectuado; la aplicación por una autoridad de la escuela, la entrega diferida de los test y la posterior verificación de respuestas.

Un tercer factor fue la diversidad de las respuestas erróneas y sus elevados porcentajes de incidencia. Aun cuando el objetivo de localizar las respuestas erróneas más populares se cumplió satisfactoriamente, se detectó un nuevo problema: el guión que proyectábamos seguir incluiría todas las preguntas cuya respuesta emitida por los alumnos seleccionados para entrevista hubiese sido errónea, pero con estos resultados la perspectiva cambió. Aunque ningún chico respondió erróneamente los 43 ítems, los desaciertos oscilaron entre 2 y 42 por lo que, si bien había una fuente importante de datos para estudiar, también se entreveían entrevistas largas, probablemente extenuantes para los alumnos, que podrían favorecer el olvido de los procesos utilizados en el examen.

Conscientes que la distancia temporal implica un obstáculo en la recuperación de los recuerdos sobre los procesos desarrollados durante la resolución del examen, que la cantidad de ítems del instrumento I hacían de él un anacrónico guión de entrevista, y que el periodo adecuado de aplicación había prescrito, decidimos refinar el guión de entrevista y el proceso de aplicación.

4.2 Fase 2: Frente al fenómeno, cristales para mirar

Contrario a la expresión popular “ninguna segunda parte es mejor”, nuestra experiencia dejó en claro que en la investigación en educación mientras más intentos hagamos mejores serán las aproximaciones. La segunda fase entonces fue un nuevo intento basado en el aprendizaje sobre nuestros propios tropiezos, intento que nos llevó a reconocer el fenómeno de los desaciertos con tal profundidad que logramos una descripción de los procesos mentales, en función de las categorías de respuestas y de análisis ya expuestas.

Una mejor segunda parte en nuestra investigación es la fase 2 inscrita en éste apartado. En ella logramos acercarnos exitosamente a nuestros sujetos de estudio, y obtener de sus narraciones respecto a la resolución del examen II (ver anexo 4) la información necesaria para responder la pregunta de investigación.

4.2.1 Selección del instrumento II

El verano de 2009 era el siguiente período viable de aplicación. En él los alumnos de la generación siguiente asemejarían las condiciones del TIMSS, tendríamos un instrumento refinado por aplicar y un guión de entrevista más preciso.

Aprovechamos las experiencias y la información de la aplicación anterior para el refinamiento del instrumento. Partimos de un análisis a los 43 items, esta vez realizado sobre los rasgos comunes entre reactivos. Por ejemplo los ítems 4,5,13,18,22 y 23 del instrumento I (ver figura 4.11), clasificados por el TIMSS en el contenido Fracciones y Sentido Numérico, expresan problemas a cuya solución se puede llegar mediante un ejercicio de estimación.

Nos parece pertinente comentar que el reactivo 4, aún cuando en su enunciado incluye el término estimación, para nosotros presenta un problema de decisión. En nuestro ejercicio personal de resolución del cuestionario I nos percatamos de que elegir la respuesta correcta requiere de tomar una decisión respecto del momento en que es conveniente estimar sin que para ello sea necesario mediar con un cálculo poco preciso para reunir elementos hacia la elección de una opción. Más tarde, corroboramos en el piloteo que a pesar de las operaciones o los cálculos a que los participantes acudieron, terminaron por decidir entre las opciones cuál podría ser la más útil dada su experiencia personal. De manera peculiar refiriéndose a situaciones cotidianas del contexto extra escolar, como las actividades de compra venta realizadas como colaboración en las tareas familiares.

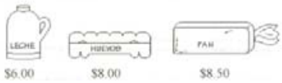
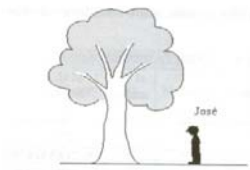
4. Carlos tenía $ 30.00 para comprar leche, pan y huevos. Cuando llegó a la tienda encontró que los precios eran los siguientes:  ¿En cuál de los siguientes momentos tendría sentido usar una estimación en lugar de emplear números exactos? A) Cuando Carlos trató de decidir si $30.00 era suficiente dinero. B) Cuando el cajero anotó el total en la caja registradora. C) Cuando Carlos preguntó cuánto debía pagar. D) Cuando el cajero le regresó el cambio a Carlos.	**5**. José tiene 1.5 m de estatura. Aproximadamente ¿Qué altura tiene el árbol?  A)4 m C) 8 m B)6 m D) 10 m	**13**. Un bloque de 200 hojas idénticas de papel tiene 2.5 cm de grosor. ¿Cuál es el grueso de una hoja de papel? A)0.008 cm C) 0.05 cm B)0.0125 cm D) 0.08 cm
18.Un centímetro de este mapa representa 8 kilómetros en la realidad.  Aproximadamente ¿A qué distancia están Calera y Zacatecas? A)4 Km C) 35 Km B)16Km D) 50 Km	**22**. El jardín de Laura tiene 84 surcos de col. En cada surco hay 57 coles ¿Cuál de estas representa la mejor manera de calcular cuantas coles son en total? A)100x50=5000 C) 80x60=4800 B)90x60=5400 D) 80x50=4000	**23**. El corazón de un ser humano late 72 veces por minuto. ¿De acuerdo con esto, cuantas veces late el corazón en una hora? A)420 000 C) 4 200 B) 42 000 D) 420

Figura 4.11. Itemes 4,5,13,18,22, y 23 del instrumento I.

Con este proceso los ítems se clasificaron, según los contenidos de *Fracciones y sentido numérico* y *Proporcionalidad* en 11 grupos:

Fracciones y sentido numérico	*Proporcionalidad*
FSN 1 Estimación	
FSN 2 Nomenclatura	P1 Proporcionalidad
FSN 3 Porcentajes	
FSN 4 Redondeo	
FSN 5 Operaciones	
FSN 6 Ordenación de números	
FSN 7 Operaciones en contextos diversos	
FSN 8 Conversión	
FSN 9 Fracciones en contexto gráfico	
FSN 10 Aritmética del reloj	

Figura 4.12 Grupos de contenidos matemáticos incluidos en los ítemes.

Los ítems se distribuyeron entonces de la siguiente forma:

Grupo	Contenido	Ítems
FSN 1	Estimación	4,5,13,18,22,23
FSN 2	Nomenclatura	6
FSN 3	Porcentajes	9,29
FSN 4	Redondeo	10,31,42
FSN 5	Operaciones	7, 11,14, 17, 21,24,30, 38
FSN 6	Ordenación de números	3, 19, 32,41
FSN 7	Operaciones en contextos diversos	1,2,8, 15,28,33,34,37
FSN 8	Conversión	25
FSN 9	Fracciones en contexto gráfico	27,35
FSN 10	Aritmética del reloj	40
P1	Proporcionalidad	12,16,20, 26, 36,39, 43

Tabla 4.2 Número de ítemes por grupo de contenidos matemáticos.

El siguiente paso fue la elección de los ítems para conformar el instrumento II. Primero verificamos el porcentaje de respuestas erróneas de los ítems y la distribución de la elección en las opciones de respuesta (ver figura 4.13).

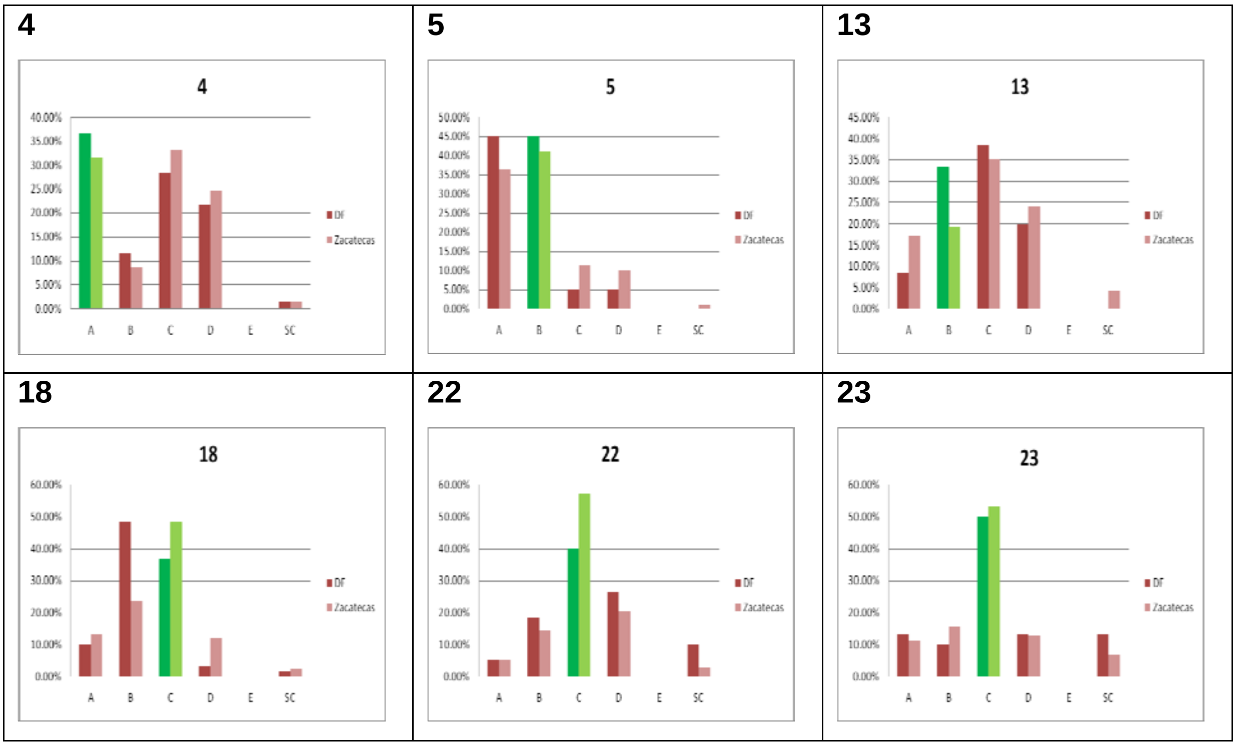


Figura 4.13. Distribución de % de respuestas de los ítems 4,5,13,18,22 y 23.

En el grupo *Estimación* los porcentajes de respuestas erróneas fueron: ítem 4, 63%; ítem 5, 55%, ítem 13, 66%, ítem 18, 63%, ítem 22, 60%, ítem 23, 50%, con la distribución por opciones que se muestra en la figura 4.10. El impacto visual nos llevó a considerar el ítem 5 como el candidato para integrar el instrumento II por la distribución que registró en sus opciones de respuesta. Finalmente revisamos las estrategias empleadas en el piloteo para justificar las respuestas y decidimos que éste sería el reactivo del grupo *Estimación* que aparecería en el *Instrumento II.*

Todo este procedimiento se realizó para cada uno de los ocho grupos que reunían más de un ítem. En el caso de los grupos formados por un único ejemplar, se integró directamente al cuestionario para obtener el producto final (ver anexo 4, instrumento II) con el que se haría la siguiente aplicación.

4.2.2 Diseño del instrumento II: Guión de entrevista

Párrafos atrás comentamos la sensación de duda de los participantes del piloteo en la entrevista exploratoria, al plantear la pregunta *¿Por qué elegiste esta respuesta?*, con la que se intentaba conocer las estrategias los procedimientos, y los razonamientos empleados para llegar a una respuesta errónea o elegir una opción no correcta. La tendencia de los participantes a emitir una justificación [recordemos a Pamela hablando de “mi mamá…”] en lugar de explicar los procesos que desarrollaron, reveló la poca eficacia de preguntar ¿Por qué?, cuando en realidad el estudio se interesa en el cómo, que por los significados y usos del lenguaje en nuestra cultura denota la explicación de un proceso. Estas reflexiones llevaron a modificar el cuestionamiento de manera que en él se incorporara la palabra *cómo. A*sí, la pregunta que acompañaría a cada uno de los ítems respondidos erróneamente sería *¿Cómo lo supiste?*

Reunidos los elementos descritos en los apartados 4.4 y 4.5 de este capítulo, instrumento II y pregunta guía, se diseñó el guión de entrevista. Este *instrumento III* característicamente es fugaz y maleable por lo que concretar un ejemplar previo a la toma de datos es prácticamente imposible, sin embargo se puede usar en tantas entrevistas como se desee pues su maleabilidad genera un instrumento personalizado en cada aplicación. Esto ocurre porque el guión para cada participante se halla sujeto a sus respuestas erróneas emitidas en el instrumento II. En otros términos, el guión sólo se puede elaborar inmediatamente después de haberse resuelto el instrumento II y únicamente se puede aplicar en ese momento, pues diferir la aplicación implica el riesgo de que el entrevistado olvide los procesos que empleó.

4.2.3 Aplicación del instrumento III: Guión de entrevista

Llegado el verano 2009 acudimos nuevamente con la directora del Colegio Olof Palme solicitando autorización para aplicar los instrumentos II y III. Esta vez las condiciones serían distintas pues el proceso planeado para la toma de datos requería de la intervención directa del investigador, especialmente en el desarrollo de la entrevista, y de un grupo reducido de alumnos, lo que suponíamos facilitaría el procedimiento. Notificados los pormenores, la directora aceptó que participaran 10 de sus estudiantes que en esos momentos terminaban el 2° grado, pero debido a la carga de trabajo por el cierre del año escolar nos pidió aplazar la toma hasta el inicio del siguiente ciclo.

Seis semanas más tarde, una mañana de agosto, nos presentamos a las 6:50 am en las instalaciones del colegio para iniciar el procedimiento. Con el objeto de elegir a los participantes al azar, la directora propuso que trabajáramos con los 10 primeros estudiantes de tercer grado que esa mañana llegaran a la escuela, sugerencia aceptada por considerarla conveniente. Quince minutos más tarde inició la aplicación dirigida por la secuencia: 1) Distribución de ejemplares del instrumento II, 2) resolución del cuestionario, 3) desarrollo de entrevista.

Aplicación

Conviene decir que para los estudiantes esta aplicación fue sorpresiva, pues se les informó que responderían un examen y que concluido éste se les haría una entrevista individual, hasta que se encontraron reunidos con la directora. En el proceso se emplearon dos salones contiguos, el salón de música y la sala de maestros. En la sala de música la directora distribuyó los exámenes y permaneció durante todo el tiempo que los alumnos emplearon para resolver el instrumento II. Tan pronto un alumno anunciaba haber concluido era enviado, con su examen en mano, a la sala de maestros para ser entrevistado.

El protocolo de la entrevista iniciaba con un saludo y la aclaración de que el examen no contaba para calificación, por lo que podrían responder libremente sin preocuparse de sus locuciones. Así mismo se les pidió autorización para grabar en audio sus respuestas, petición a la que todos accedieron. La siguiente parte requirió la memorización previa de las 11 respuestas correctas al cuestionario II por parte de la investigadora, quien, dicho lo anterior, abría el cuadernillo del test que traía consigo cada alumno para identificar las preguntas que habían sido respondidas erróneamente sin hacer ningún tipo de marca sobre el ejemplar, de manera que los jóvenes ignoraban que se les cuestionaba sobre sus desaciertos.

Cada charla discurrió en el orden que marcan los ítems del instrumento II, tomando solamente aquellos respondidos erróneamente. Cada reactivo fue leído completamente al alumno, incluyendo la opción elegida, haciendo hincapié en que ésa era su respuesta y una vez centrada su atención se le cuestionaba *¿Cómo lo supiste?*

Finalizado el protocolo los alumnos eran enviados a sus salones de clase sin que tuviesen oportunidad de comunicarse entre ellos hasta terminar con todas las entrevistas.

Productos

Consideramos exitosa la aplicación de la entrevista por los datos que obtuvimos de ella. Por una parte logramos grabar narraciones en las que claramente se identifican las estrategias, los procedimientos y los razonamientos que los alumnos desplegaron para llegar a una respuesta errónea. Por otra parte, el rumbo que siguió a los discursos facilitó rastrear en los procesos de pensamiento de los alumnos el punto de inflexión en el que los falsos cognados o los saberes culturales modificaban los procesos de resolución, haciendo que determinaran elegir una respuesta equivocada. Más aún, en varios casos fue posible acompañar al alumno, a través de un proceso reflexivo, desde el punto de inflexión hasta la respuesta correcta.

Con toda esta riqueza de información nos inclinamos por hacer una ampliación a la rejilla de análisis (ver figura 4.5) exhibida en el apartado 4.2 de este capítulo.

La nueva versión ampliada (ver figura 4.15) quedó establecida como el instrumento con el que realizaríamos el análisis de los datos colectados. Para ejemplificar el análisis mostramos la respuesta de Cuautli al reactivo No. 9 del instrumento I, o 3 del instrumento II (ver figura 4.14).

9. Si el precio de un producto aumenta de 60 centavos a 75 centavos ¿Cuál es el porcentaje de incremento en el precio?

A) 15% C) 25%
B) 20% D) 30%

Respuesta correcta ***C***

Figura 4.14 reactivo 9 instrumento I, 3 del instrumento II.

Cuautli eligió el inciso A como respuesta correcta, 15%. Inmediatamente después de concluir el examen fue entrevistado y sus respuestas grabadas en audio, de dónde recuperamos las narraciones inscritas en la rejilla de análisis (ver Figura 4.15).

Microgénesis es la sección complementaria de la rejilla de análisis, en la que se agregó la fila *Proceso,* donde se registran las narraciones que muestran el trayecto por el que el alumno transita desde el punto de inflexión a partir del cual el proceso de pensamiento vira la dirección hacia un desacierto, y en su caso el trayecto para ir de la respuesta errónea a la correcta. En esta sección complementaria, como en la primera sección de la rejilla, la fila Proceso se entrecruza con las columnas, *Argumentación matemática*, Análisis y Sentido común, explicadas en el apartado 4.2.

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias	Dividir		
Procedimientos	C: Por qué lo dividí, bueno el 100% es 60 y lo dividí entre 5,	Sabe que 60 centavos corresponden al 100% de la base sobre la que se hace el incremento. Divide la base entre 5, obtiene 12, luego elije la opción A) 15% que en porcentaje es el número más cercano a 12.	
Razonamientos	C: [...], bueno, sí entre 5 para ver cuánto era el porcentaje y ya el resultado.	Parece haber una *confusión* en las cifras que elije para operar. Se refiere a la base como porcentaje por lo que al operar con ella supone que obtendrá el porcentaje. Por otra parte, pareciera que luego de obtener el porcentaje haría otra operación que finalmente omite.	
Microgénesis			
Proceso	E: Sesenta entre cinco ¿cuánto es? C: ¿Sesenta entre cinco? No sé…como doce o …[inaudible] E: A ver, dime qué acabas de decir. Yo te oí 12, muy bien, entonces si 60 es 100% entonces, más o menos lo dividiste entre 5 y te salió 12 y entonces ya lo acercaste a la cantidad más próxima. Vamos a pensarlo de otro modo. Me gusta que veas esto; que sesenta es igual al cien por ciento. Sabiendo lo anterior ¿Treinta cuánto sería? C: La mitad o ¿no? E: La mitad, es decir el cincuenta por ciento ¿Sí? y la mitad del 50 ¿cuánto sería? C: Quince. E: Entonces ese quince ¿qué porcentaje es? C: La cuarta parte. E: O sea… C: El quince por ciento. E: ¿A poco? ¿Cuánto es la mitad del 50%? C: Veinticinco ¡Ah, no! la mitad de 50 es 25 E: Entonces ¿cuánto sería aquí? C: Veinticinco por ciento. E: ¿Te fijaste por qué? Por qué si 60 es el 100% y 30 es el 50%, quince ¿Cuánto dijiste que era? C: El veinticinco por ciento.	La entrevistadora parte de los conocimientos de Cuautli [60 corresponde al 100%] para acompañarlo a deducir la respuesta correcta. Se observa que en el proceso Cuautli pierde la atención. La investigadora logra recuperar la atención de Cuautli en la partición del porcentaje y el monto inicial. Cuautli reconoce su equivocación. Finalmente llega al resultado correcto. La entrevistadora verifica la obtención de la respuesta correcta.	

Figura 4.15. Rejilla de análisis. Fase 2

Con el producto de la aplicación de los instrumentos II y III en nuestro haber, iniciamos el análisis de la información colectada. El siguiente capítulo da cuenta de esa tarea.

5. Narraciones: Ventanas mentales

El objetivo medular del análisis es determinar las causas que llevan al alumno a elegir una respuesta errónea en una evaluación y los procesos que desarrolla para llegar a ella. A lo largo de las siguientes páginas mostramos el resultado del análisis de las locuciones emitidas por los estudiantes durante las entrevistas personalizadas que se desarrollaron al concluir la resolución del instrumento II.

Nuestro corpus de análisis integra diez entrevistas transcritas tamizadas por la rejilla (Ver anexo 5) detallada en el capítulo 4. El hilo conductor del estudio inicia con la identificación de la estrategia empleada en la resolución del problema planteado en el reactivo por cuya respuesta se cuestiona. A continuación se localiza el procedimiento que el alumno refiere haber desarrollado, se analiza y se clasifica por sus rasgos en una de las dos opciones disponibles. En caso de expresar un razonamiento o justificación que determine la elección final, éste se registra, atendiendo a su origen, en el espacio correspondiente.

En muchos casos la charla en torno a la respuesta a un ítem se prolongó más allá de estrategias, procedimientos y razonamientos involucrados en la producción de un desacierto ante la resolución de un reactivo. Esa parte de la entrevista consistía en la indagación sobre los conocimientos de los alumnos que favorecieron la elección de los procedimientos, y en hacerles una devolución intencionada a corregir el fallo detectado en el aprendizaje.

Cuando los registros en las transcripciones lo permitieron rastreamos el origen del falso cognado que interfería en las decisiones y se buscaba el punto de inflexión para llevar al alumno de la respuesta errónea a la correcta. Mediante el análisis al segmento de discurso emitido por los niños en el proceso microgenético determinamos la categoría a la que corresponde el argumento subyacente: argumentación matemática o sentido común, con lo que decidimos el espacio en el que se registró dentro de la sección microgénesis de la rejilla.

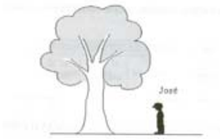
Los nombres que aparecen en las tablas de análisis y en las citas de este capítulo guardan el anonimato de los diez alumnos entrevistados. Los seudónimos fueron elegidos por ellos mismos al inicio de la entrevista respondiendo la pregunta ¿si tuvieras la oportunidad de cambiarte el nombre, cuál te pondrías?

Los hallazgos del proceso se organizan análogamente al orden en el que aparecen los contenidos en el instrumento II.

5. 1 Análisis de respuestas

En este apartado incluimos aquello que el alumno tendría que saber o haber realizado para llegar a la respuesta correcta en cada reactivo, como referente para contrastar con sus respuestas erróneas. Así mismo se muestran las estrategias, los procedimientos, los razonamientos y los procesos microgenéticos desplegados durante las entrevistas personalizadas**.**

5.1.1 Ítem 1. Contenido: Estimación



José tiene 1.5 m de estatura.
Aproximadamente ¿Qué altura tiene el árbol?

A) 4 m C) 8 m
B) 6 m D) 10 m

Respuesta Correcta: B

La solución del problema requiere estimar las veces que la altura de la figura del niño cabe en la del árbol, tener presente que la altura de José es de 1.5 metros y operar con ambos datos como sumandos o como multiplicadores.

Cinco de los diez estudiantes a quienes se les aplicó el *instrumento II* respondieron erróneamente el ítem. La tabla 5.1 muestra los hallazgos en relación con las causas que derivaron en la elección de la opción no correcta.

Tabla 5.1. Concentrado de respuestas erróneas al ítem 1

	Argumentación matemática	**Análisis**	**Sentido común**
Estrategias		5/5 Uso del Recurso Gráfico	
Procedimientos			1/5 Trazar una línea del niño al árbol 2/5 Medir con los dedos 2/5 Observar y estimar
Razonamientos			1/5 Ajustar la percepción visual a una opción de respuesta. 2/5 El árbol es más o menos el doble del niño 1/5 Validar la percepción por evocación de la realidad
		Microgénesis	
Proceso	1/5 Omite la estatura de José en la estimación.		

En la tabla se observa que los estudiantes recurren a la ***Estrategia***:

Uso del recurso gráfico. Consiste en generar una representación icónica mental o física a partir de la información que se presenta en el ítem y se acompaña de actos físicos, registrados o no, como medio para dar respuesta al cuestionamiento. En este ítem el desarrollo de la estrategia consistió en trasladar la altura de José al árbol mediante un recurso físico. Entre los desarrollos que los chicos desplegaron para transferir la medida distinguimos tres distintos ***Procedimientos*****:**

A) Trazar una línea de la altura de José al árbol.
B) Medir la altura de José con los dedos y sobreponerla a la altura del árbol para saber cuántas veces cabe.
C) Observar la altura de José para después calcular cuántas veces cabe en el árbol sin mediar acciones físicas evidentes.

Como se puede apreciar la estrategia desplegada se origina en el sentido común de los participantes, pues aún teniendo intermediaros como la regla, lápiz y papel, para transferir la medida eligen hacerlo de esta manera.

La elección de la opción no correcta fue justificada con los siguientes ***Razonamientos***:
A) Ajustar la percepción a una opción de respuesta, que lleva a estimar que la altura del niño cabe un poco más de dos veces en el árbol, e identificar la opción más cercana al dato generado.
B) Considerar que el árbol es el doble del niño, lo que lleva a ajustar la altura del niño a 2 metros y decidir responder 4 metros.
C) Validar la percepción por evocación de la realidad. Este tercer razonamiento parte del sentido común, debido a que el estudiante considera que los árboles no podrían tener una magnitud mayor a la elegida. Afirmación que parece provenir de su experiencia de vida.

Los dos primeros razonamientos se relacionan con aprendizajes escolares, pero no necesariamente con el conocimiento matemático. En el caso A con la idea de que en los ítems de opción múltiple una de las opciones es correcta por lo tanto hay que localizarla, y en el caso B redondear los números fraccionarios para operar con ellos. Estos dos razonamientos se consideran producto del sentido común. En el tercer razonamiento, C, también considerado de origen en el sentido, se privilegia la experiencia personal acerca de la altura de los árboles. Sería difícil asegurar que la experiencia referida por el estudiante es extraescolar, tanto como tasarla por vivida en el contexto escolar, sin embargo claramente apela a una percepción no mediada por la enseñanza formal.

Microgénesis

En el análisis a las respuestas para esta pregunta, recuperadas de las entrevistas, fue posible indagar con mayor profundidad por los conocimientos de Zoe. En la conversación detectamos que el desarrollo de su procedimiento le proporcionó los datos adecuados para saber cuántas veces cabe la altura de José en el árbol, con lo que su estimación, la valoración aproximada sobre la medición que realizó (Peterson y Hashisaki, 1998), le llevaría a responder correctamente la pregunta, tal como se puede leer en el segmento de entrevista que se muestra a continuación (ver anexo 5, Zoe.),

> E. Ok, entonces, eso quiere decir que José cabe más o menos…
> Z. Ajá, como cuatro.
> E. Como cuatro veces. Claro, si cabe cuatro veces por 1.5 más o menos ¿cuánto es eso? [Zoe permanece en silencio aparentemente haciendo una operación mental] ¿Cuatro por uno y medio?
> Z. Tres punto cinco. O algo así.
> E. Ajá. Bueno.

Sin embargo, contar con una opción que guarda las veces que José [el personaje del reactivo] cabe en el árbol termina por interferir en el proceso de resolución del problema por considerar que ha llegado a la respuesta correcta, dejándolo inconcluso. Por otra parte, el proceso registrado en la sección micrógenesis permite localizar una dificultad en la operación con decimales.

5.1.2 Ítem 2. Contenido: Nomenclatura

3. ¿Qué número tiene cinco centenas, cuatro unidades y siete décimos?

A) 54.7 C) 547

B) 504.7 D) 5004.7

Respuesta Correcta: B

Responder adecuadamente esta pregunta requiere que los estudiantes sepan el nombre que ocupan las posiciones dentro del sistema de numeración decimal, y que lean el enunciado con atención.

Tabla 5.2. Concentrado de respuestas erróneas al ítem 2

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias		4/5 Reconocimiento de patrones 1/5 Aplicación de reglas o algoritmos	
Procedimientos	4/5 Correlación entre los números que aparecen en las opciones y las cifras nombradas con las posiciones en el enunciado. 1/5 evoca sistemas figurativos		
Razonamientos	4/5Asociar las cifras mencionadas con las cifras escritas en las opciones, sin incluir el cero por no mencionarse. 1/5 Asociar las cifras nombradas en el enunciado del ítem con los sistemas figurativos evocados.		
Microgénesis			
Proceso	2/5 omitir valor posicional del cero 1/5 confusión en los términos décimos y decenas 1/5 nombre de la posición 1/5 significado de conceptos		

De los diez alumnos participantes, cinco eligieron alguna de las opciones erróneas. En la tabla 5.2 se puede apreciar que las elecciones de los alumnos son producto de la aplicación y el uso de una de estas dos ***Estrategias:***

Reconocimiento de patrones. Reside en descubrir un criterio de construcción de una serie o una regularidad en los datos, que facilitan asociaciones entre cuestionamiento y respuesta. Los estudiantes que emplearon esta estrategia desarrollaron el ***Procedimiento:***

A) Correlación entre los números que aparecen en las opciones y las cifras nombradas con las posiciones en el enunciado. Quienes eligieron este procedimiento, asociaron cinco centenas, cuatro unidades y siete décimos con los dígitos cinco, cuatro y siete sin verificar la posición decimal que deberían ocupar, o verificaron las posiciones sin tomar en cuenta el sitio ocupado por el cero.

Aplicación de reglas o algoritmos. Corresponde a la toma de una decisión reflexiva en torno a la aplicación de reglas o algoritmos en los que podría estar presente una serie de operaciones mentales o aritméticas por desarrollar. Quien se apegó a esta idea general desplegó el ***Procedimiento***:

A) Evocación de sistemas figurativos. Quien decidió por este procedimiento intentó recuperar de su registro de memoria las posiciones que deberían ocupar las cifras de acuerdo con su aprendizaje, en los primeros años de primaria, de los sistemas figurativos en los que existe una regla de asociación valores, código de colores y posiciones.

Los procedimientos empleados en ambos estrategias recuperan aprendizajes y recursos que se enseñan en la escuela, por lo que su origen se clasifica como argumentación matemática.

Los procedimientos detectados en la resolución de este ítem se justificaron con los siguientes ***Razonamientos:***

A) Asociar las cifras mencionadas con las cifras escritas en las opciones, sin incluir el cero por no mencionarse. Este razonamiento que se recupera en el siguiente segmento de entrevista con Miguel Ángel:

> M. Porque decía cinco, cuatro y siete, pero vi que decía décimos y entonces vi que tenían punto siete las demás y entonces escogí esta [A) 54.7].

B) Asociar las cifras nombradas en el enunciado de ítem con los sistemas figurativos evocados. Este razonamiento implica un ejercicio de memoria en el que se busca asociar nombre, color y posición, y relacionarlo con los signos escritos en las opciones.

El primer tipo de razonamiento, además de relacionar, integra una elección de respuesta por eliminación. En ella los estudiantes parten de palabras o conceptos claves que les permiten seguir una línea para descartar las opciones que consideran inviables. La palabra pensada como clave en este reactivo es *décimos.* De las cuatro opciones de respuesta que ofrece el ítem tres incluyen décimos, lo cual favorece la eliminación de la opción con el número entero, y por otra parte el enunciado excluye la mención de las cero decenas en el número, por lo que la presencia de ceros en las opciones figura como criterio de eliminación. Para los participantes que sólo relacionaron los nombres con los signos sin atender la posición, la respuesta fue el número entero.

Respecto al segundo razonamiento, éste parece seguir un entramado complejo de asociaciones entre diversos aprendizajes adquiridos a lo largo de todo el proceso de escolarización, que en el momento muestran lagunas de conocimiento.

El alumno hace un esfuerzo por recordar la correspondencia entre los colores y las posiciones sin lograr una imagen clara. En la práctica privada con estudiantes de segundo y tercer grado de primaria, he observado que el cambio de una unidad a otra de orden superior mediada por agrupaciones de fichas, [cartones, donas, ábacos o cualquier otro material manipulable] implica un problema cognitivo pues con el cambio de color y no con el tamaño se intenta hacer comprender al alumno que cada diez de un valor-color equivalen a una de otro valor-color. Hay otros recursos utilizados en los materiales de enseñanza del segundo grado, por ejemplo el trabajo con los mangos (SEP, 2000. pag. 38), que si bien van de unidades a centenas, mostrando mangos como unidad, agrupaciones de diez mangos en una bolsa y agrupaciones de cien mangos en una caja con diez bolsas dentro, no suelen ser mencionados por los niños.

Microgénesis

Los razonamientos de los entrevistados dieron oportunidad de prolongar la entrevista y hallar, en los cinco casos, el punto de inflexión que los llevó a elegir una opción incorrecta. En estas charlas detectamos la siguientes dificultades: a) omisión del valor del cero cuando éste ocupa un sitio en la escritura de los signos que conforman un número, 2) confusión entre los términos décimos y decenas, 3) conocimiento difuso del nombre que se asigna a la posición dentro del sistema de numeración decimal, y 4) confusiones en el significado de conceptos asociados con la partición decimal de la unidad.

Así mismo, en dos de las cinco charlas, fue posible acompañar al alumno en el proceso de ir de una respuesta errónea a la correcta recordando los nombres de las posiciones mediante un esquema. Lo anterior se aprecia en el segmento de entrevista con Ricardo:

> E: Entonces aquí tenemos los décimos, aquí tenemos las unidades, y aquí tenemos las decenas [muestra con un esquema la posición de las unidades] ¿Verdad? Luego por acá tenemos las centenas y dice que sí tenemos 5 centenas 4 unidades y 7 décimos [Coloca en el esquema los números de acuerdo con la posición que les corresponde] ..., [Ricardo expresa sorpresa] ¿Qué pasó? ¿Cuál habría sido?
> R: Esta no [actitud pensativa]…
> E: Cinco centenas, cuatro unidades, no tenemos decenas, y 7 décimas…
> R: ¡Ah! Es la B.

Este proceso se desarrolló tomando como referencia los conocimientos de Ricardo en relación con el punto decimal, en lo que se podría considerar la zona de desarrollo próximo.

5.1.3 Ítem 3. Contenido: Porcentajes

3. Si el precio de un producto aumenta de 60 centavos a 75 centavos ¿cuál es el porcentaje de incremento en el precio?

A)	15%	C)	25%
B)	20%	D)	30%

Porcentaje quiere decir partes por cien, se refiere al número de partes que interesan de una cantidad fraccionada en cien partes iguales y se acompaña del signo %. Estos conocimientos son tema de enseñanza en el tercer ciclo de la escuela primaria y suelen hallarse aplicaciones de ellos en diversas situaciones cotidianas en la cultura en las que los estudiantes participan. Hallar la solución a este problema demanda del alumno identificar la cantidad base sobre la cual se calcula el porcentaje, entender que el incremento en el precio corresponde a una cantidad distinta al porcentaje pero que se relaciona con él, y saber que el porcentaje es una cantidad que corresponde proporcionalmente a la cantidad partida en cien.

De la aplicación de nuestro instrumento II a los diez estudiantes se recuperaron ocho respuestas erróneas. Los hallazgos en relación con este reactivo se muestran en la tabla 5.3.

Tabla 5.3. Concentrado de respuestas erróneas al ítem 3

	Argumentación matemática	**Análisis**	**Sentido común**
Estrategias		7/8 Operar 1/8 Aplicación de reglas o algoritmos	
Procedimientos	2/8 calcular diferencia entre 60 y 75 y decidir tomándola como porcentaje 4/8 sumar a la base los números que faltan para obtener el monto, localizada la cantidad faltante elegir la opción 1/8 Construir una regla de tres con los datos disponibles		1/8 dividir la base por algún número
Razonamientos	6/8 la diferencia de centavos corresponde al porcentaje de incremento 1/8 el porcentaje es una parte proporcional de la base y este se obtiene mediante regla de tres.		1/8 obtener un dato para verificar opción
Microgénesis			
Proceso	1/8 dividir la base entre 5 1/8 hacer algo con los datos establecer regla de tres 1/8 estimación (Miguel A)		

El seguimiento a las explicaciones de los ocho estudiantes permitió detectar que en la resolución del problema emplearon dos diferentes ***Estrategias:***

Operar Comprende la aplicación de operaciones aritméticas como un acto mecánico poco reflexivo. El desarrollo de esta estrategia se realizó a través de los ***Procedimientos*:**

A) Dividir la base por algún número. Identificar la base, es decir, la cantidad de referencia que se ha partido en cien partes iguales y dividirla por un número. En el caso que se cita a continuación (ver anexo 5, Cuautli) Cuautli eligió el número cinco como divisor,

> C. Por qué lo dividí, bueno el 100% es 60 y lo dividí entre 5,…

su elección se percibe como una estimación por verificar de alguno de los porcentajes en las opciones de respuesta, tal vez el 20% por ser una quinta parte del 100%, sin embargo el resultado de la división, 12, le lleva a elegir la opción más cercana: 15%.

B) Calcular la diferencia entre los números mencionados en el enunciado. Se obtiene la diferencia entre 75 y 60 o entre 60 y 75, una vez conocida se verifica su correspondencia con alguna de las opciones. Proceder de esta manera por una parte da lugar a la resolución parcial del problema, y por otra, refuerza la percepción de que la diferencia corresponde al porcentaje.

C) Sumar a la base los números que faltan para llegar al monto. Identificar la base y el monto, obtener el incremento agregando a la base la cantidad necesaria para obtener el monto, y comparar el incremento con las opciones de respuesta.

Aplicación de reglas o algoritmos. Corresponde a la toma de una decisión reflexiva en torno a la aplicación de reglas o algoritmos en los que podría estar presente una serie de operaciones mentales o aritméticas por desarrollar. La aplicación de esta estrategia discurrió por el ***Procedimiento:***

A) *Construir una regla de tres con los datos disponibles*. Visualizar los datos numéricos del problema, establecer relaciones entre los datos localizados, operar con ellos para obtener un nuevo dato, elegir una respuesta. La idea subyacente en este procedimiento radica en la suposición de que es posible reunir los elementos del enunciado en una expresión que guarde la proporcionalidad entre los elementos que la integran.

En relación con el origen de las estrategias, ambas, *Operar* y *Aplicación de reglas o algoritmos* se relaciona estrechamente con la argumentación matemática proveniente de los aprendizajes escolares.

Los procedimientos desplegados en las estrategias aplicadas a la resolución de este reactivo fueron justificados por los alumnos con los siguientes ***Razonamientos:***

A) *Obtener un dato para verificar opción.* De la identificación de la base como la cantidad correspondiente al 100% es posible obtener, mediante división, el porcentaje de incremento.

B) *La diferencia de centavos corresponde al porcentaje de incremento.* La diferencia que se suma a la base para alcanzar el monto se valida con una de las opciones de respuesta que contienen el dato.

C) *El porcentaje es una parte proporcional de la base y este se obtiene mediante regla de tres*. La regla de tres es una manera fácil de operar con los datos del enunciado para hallar la respuesta. Este razonamiento se puede seguir en el diálogo (ver anexo 5, Atilio) con Atilio:

> A: Pues, se supone que hice una regla de tres. Iba a hacer una ecuación pero dije no, se me va a dificultar mucho y entonces este, me fui como por el camino fácil. Entonces el 1 como que representa el 100 y el 20 representa lo que aumentó.
>
> E: ¡Ah, ya! Ok, entonces el 1 que es el 100 sería ¿60?
>
> A: O sea, sí. Lo que ya era el precio normal.

Del diálogo se puede extraer que Atilio tiene conocimientos acerca del porcentaje y las relaciones de proporcionalidad subyacentes, pero tiene dificultad para determinar las variables con las que debe operar. En su procedimiento: multiplicar 75 x100 y dividir por 60 de dónde obtuvo 12.5 para luego elegir la opción B) 20%, se percibe desacuerdo con el resultado obtenido y la presencia de una intuición acerca de la proporción en la que se incrementó la base.

Microgénesis

La intención de explorar más detalladamente por los razonamientos de los entrevistados se cumplió en tres de los ocho casos. Aunque el punto de partida con los tres chicos es diferente; dividir la base, hacer con los datos una regla de tres, o estimar cuánto podría ser el porcentaje sin hacer operaciones, todos localizaron la cantidad base para el cálculo del porcentaje. Desde ese punto Atilio desarrolló un proceso de bipartición simultáneo de cantidades y porcentajes para llegar a la respuesta correcta, como se aprecia en el siguiente diálogo (ver anexo 5, Atilio):

> E: Entonces teníamos aquí que 75 x 100 entre 60 según lo que hiciste y además le quitaste ceros y toda la cosa ¿verdad? Pues está bien que le quitaras ceros ahí, pero no le quitaste acá, ¿te fijaste?
> A: Sí, Ok.
> E: ¿Sí viste? Que le quitaste aquí los dos [señala las cifras escritas], bueno luego se los volviste agregar.
> A: Bueno, es que se supone que, porque tenía un punto aquí porque era de centavos.
> E: Porque era de centavos. Ah mira, ¡qué interesante! Vamos a suponer que 60 centavos, sin que le pongas el signo ni el punto ni nada, nada más 60, ese es el 100 %. Vamos a hacer un cálculo mental fuerte y vamos a pensar ¿cuánto sería el 50% de 60?
> A: 30
> E: Exacto, 30. Porque es la mitad ¿no? y ¿la mitad de 30?
> A: 20, no, 15: 15.
> E: 15 exacto. ¿Eso cuánto sería, ese qué porcentaje sería?
> A: El 25 %.

En este acompañamiento identificamos también dificultad para operar con números decimales.

5.1.4 Ítem 4. Contenido: Redondeo

4. Cuál de los siguientes números representa al número 89.0638 redondeado a centésimos?

A) 100
B) 90
C) 89.1
D) 89.06
E) 89.064

Respuesta correcta: D

Responder correctamente la pregunta demanda del alumno saber que redondear tiene que ver con quitar en un número una unidad de orden inferior para ajustarlo a una de orden superior, así como reconocer el lugar que ocupan las cifras por su posición en la expansión decimal del sistema de numeración decimal.

En las respuestas a este ítem encontramos que cinco de los diez participantes respondieron erróneamente. La tabla 5.4 concentra la información acerca de sus desarrollos.

Tabla 5.4. Concentrado de respuestas erróneas al ítem 4

	Argumentación matemática	**Análisis**	**Sentido común**
Estrategias		Aplicación de reglas o algoritmos	
Procedimientos	3/5 Migrar a la unidad de orden superior inmediata 1/5 Migrar a decena 1/5 Migrar a décimos		
Razonamientos	2/5 lectura rápida		
Microgénesis			
Proceso	3/5 confusión de conceptos décimos y decenas/ centésimos y centenas		1/5 estado anímico

Las vías elegidas por los cinco alumnos para responder este ítem quedaron integradas en una única ***Estrategía:***

<u>***Aplicación de reglas o algoritmos.***</u> Corresponde a la toma de una decisión reflexiva en torno a la aplicación de reglas o algoritmos en los que podría estar presente una serie de operaciones mentales o aritméticas por desarrollar. En las respuestas a este ítem se engloban los intentos por ir de una unidad de un orden menor a otra dos posiciones mayor, mediante la aplicación de una regla. La estrategia se desarrolló mediante tres distintos ***Procedimientos:***

A) Migrar a la unidad de orden superior inmediata. Quienes siguieron este procedimiento ajustaron el número a la unidad de orden superior inmediata prescindiendo de los diezmilésimos.
B) Migrar a decena. El procedimiento consistió en ajustar el número a las decenas ignorando la expansión decimal.
C) Migrar a décimos. Quien tomó este medio para responder la pregunta ajustó el número a décimos por leer la instrucción “redondea a centésimos”.

Proceder de la forma como lo hicieron los cinco entrevistado permite ver que el redondeo es un concepto conocido por ellos y que lo ejecutan con facilidad, sin embargo las dificultades asociadas con la nomenclatura de la expansión decimal les llevaron a cometer equivocaciones que justificaron bajo el ***Razonamiento:***

A) Lectura rápida. Surge del reconocimiento de un error en la elección de la posición de la unidad a la que se pide ajustar el número. La rapidez en la lectura se asocia con rapidez en la respuesta poco reflexiva, quizá automatizada como sugiere Vygotsky (1978), de eliminar la última cifra del número para ajustarla a la unidad de orden mayor inmediata. Un ejemplo de ello se puede observar en el segmento de charla sostenida con Héctor (ver anexo 5, Héctor) que se transcribe a continuación:

> H. […], y como primero no lo leí así con calma, yo nada más leí redondeado entonces por eso lo subí a 64 [89.064]. Pero y redondeado a centésimas sería el D, que sería 89.06.

Tanto las estrategias como los procedimientos y los razonamientos desplegados en la obtención de la respuesta a este ítem, muestran ser producto de una argumentación matemática.

Microgénesis

Buscando profundizar en las causas que originaron la respuesta errónea localizamos el punto de inflexión en el proceso de cuatro estudiantes a quienes acompañamos en la recuperación de la respuesta correcta. La exploración inició con la lectura lenta y cuidadosa de la pregunta para fijar un punto de partida, mismo que se encontró en la nomenclatura. Un ejemplo de ello se muestra en el segmento de entrevista con Gabriela (ver anexo 5, Gabriela) aquí transcrito:

> E. ¡Exacto!, tu leíste rápido y no te fijaste en lo de centésimos. No importa, en este momento dime cuál es la respuesta correcta.
>
> G. ¿Centésimos?
>
> E. Centésimos, bueno, entonces vamos haciéndolo. No dice aquí que redondees a la centena siguiente, dice a la centésima.
>
> G. ¿A la centésima?
>
> E. ¿Sabes qué son los centésimos?
>
> G. No.
>
> E. En nuestro sistema decimal el valor posicional en los decimales se localiza así, fíjate. Después del punto [Escribe sobre el espacio en blanco del examen 0. _ _ _] se ubican los décimos, en el primer lugar los décimos ¿y luego?
>
> G. Luego los centésimos,
>
> E. ¿Y luego?
>
> G. Los milésimos.
>
> E. Y después los diezmilésimos y así, pero por lo pronto tenemos décimos, centésimos y milésimos. Entonces ¿cuál es?
>
> G. La B) 89.06

Asociadas con la nomenclatura, encontramos dificultades en:

1) El significado de los conceptos; nos referimos a confusiones entre décimos y decenas, y centésimos y centenas. Esta situación lleva a los estudiantes, por un lado a redondear en la parte entera del número pese a la indicación de hacerlo en la parte decimal. Por otro lado la inseguridad que se tiene respecto al significado de los conceptos los puede llevar a un bloqueo que le impida zanjar la duda, como ocurrió con Gerardo (ver anexo 5, Gerardo):

> E. […] redondeado a centésimos ¿Cómo lo supiste?
> G. [Silencio prolongado]
> E. ¿Qué es redondear?
> G. Es como [silencio]…
> E. ¿Cómo supiste que esa era la respuesta correcta? ¿Qué pensaste?
> G. Pensé en que …Empecé a calcular.
> E. ¿Cómo?
> G. [Silencio]
> E. Empezaste a calcular ¿qué calculaste?
> G. El…
> E. ¿Ya no te acuerdas?
> G. No
> E. No importa, está bien.

De acuerdo con la respuesta elegida por Gerardo, se puede decir que ni el concepto de redondeo ni la acción de redondear le causaron problemas en el procedimiento de respuesta como lo hizo el concepto centésimos.

2) El lugar que ocupan los decimales en el sistema de numeración decimal. Aunque en la parte central del análisis de las respuestas erróneas a la pregunta en cuestión vimos argumentaciones matemáticas propias de los aprendizajes escolares exclusivamente curriculares, en esta sección del análisis hicimos un hallazgo interesante relacionado con la cultura, que si bien es parte las vivencias académicas se apega más a la cultura

popular. A continuación el segmento de entrevista con Héctor (ver anexo 5, Héctor) que ejemplifica lo dicho:

> E: ¿Por qué lo leíste rápido?
> H: Para acabar rápido.
> E: Para acabar rápido y mira, de todos modos…
> H: No, y aparte como que me puse nervioso porque lo empecé a leer y no, no sé, me puse nervioso y ya no leí centésimos y entonces me fui con la finta de los milésimos.
> E: En situaciones de examen ¿usualmente te pones nervioso?
> H: A veces.
> E: ¿A veces?
> H: A veces en los semestrales
> E: ¡Ah! ¿Por qué?
> H: Porque, como son más, más preguntas, y como es todo lo que hemos visto, hasta esos seis meses, es este… No sé hay algunas cosas que las estudio pero otras no, y esas son las que luego vienen en el examen. Entonces por eso me pongo nervioso.

En la vida cotidiana suele ocurrir que los padres o cuidadores de los estudiantes enfaticen la importancia de estudiar intensamente antes de los exámenes y también de exaltar la inconveniencia de ponerse nervioso mientras se los resuelve. Se insiste tanto en esto último que con frecuencia ocurre el efecto contrario, con lo que el estado anímico puede interferir negativamente en el procedimiento de respuesta.

5.1.5 Ítem 5. Contenido: Operaciones

5. Divide $\frac{8}{35} \div \frac{4}{15} =$

Respuesta: ______________________________

La división de fracciones se realiza a través de un método que incorpora tres pasos; multiplicar el numerador de la primera fracción con el denominador de la segunda para obtener el nuevo numerador, multiplicar el denominador de la primera por el numerador de la segunda fracción para obtener el nuevo denominador, y de ser posible simplificar la nueva fracción. Para responder correctamente este ítem los alumnos necesitan saber que la división de fracciones se resuelve mediante dos multiplicaciones, cuáles son los elementos de las fracciones que deben multiplicarse, y por último, aunque no hay una indicación expresa al respecto, saber simplificar.

Entre los resultados de la aplicación del instrumento II encontramos que dos de los diez participantes emitieron respuestas erróneas y dos más obtuvieron la fracción correcta sin simplificarla. Aunque la respuesta es válida en estos dos casos llamó nuestra atención la ausencia de simplificación, de modo que decidimos averiguar la causa.

Los productos del análisis al proceder de estos alumnos se registran en la tabla 5.5.

Tabla 5.5. Concentrado de respuestas erróneas al ítem 5

	Argumentación matemática	**Análisis**	**Sentido común**
Estrategias		Operar Ensayo y error	
Procedimientos	1/2Multiplicar numeradores y denominadores		1/2 Operaciones diversas
Razonamientos			1/2 Hay más de una operación
Microgénesis			
Proceso	½ Mezcla de procedimientos		

Encontramos en las explicaciones de los estudiantes a la resolución de la división de fracciones las ***Estrategias:***

Operar. Comprende la aplicación de operaciones aritméticas como un acto mecánico poco reflexivo. El uso de esta estrategia generó el desarrollo del ***Procedimiento:***

A) Multiplicar numeradores y denominadores. Media en este procedimiento el recuerdo de la forma de operar con la que se efectúa la multiplicación de fracciones, sin recordar que los multiplicadores dentro de la división son otros.

<u>Ensayo y error.</u> Con base en una idea difusa sobre reglas o algoritmos ejecutar rutinas, acompañadas de un acto reflexivo insuficiente de conocimientos, que generan aproximaciones a la resolución de problemas e interrogantes. La ruta seguida en esta estrategia surgió del ***Procedimiento:***

A) Operaciones diversas. En él inicialmente se efectúa una división de fracciones adecuada, enseguida se agregan cuentas auxiliares para resolver otras operaciones fraccionarias. Zoe elige este procedimiento para resolver la división (ver anexo 5, Zoe):

> Z. […] Primero pues sé que era multiplicando [señala el numerador de la primera fracción con el denominador de la segunda fracción] y luego dije ay, ya no más voy a…
>
> E. ¿Multiplicado cómo?
>
> Z. Bueno, como se hacen las multiplicaciones: cruzado de 8 por 15 por ejemplo.
>
> E. Si [invitación a continuar]…
>
> Z. El 35 por el 4 y luego ya sumarlo, y así igual multiplicarlo [señala la fracción $4\frac{4}{20}$] y luego es restarlo, y así se saca …

Desplegar esta diversidad de cálculos se explicó bajo el ***Razonamiento:***

A) Hay más de una operación. Surge de la impresión, tal vez visual, de que la nueva fracción producto de la división es insuficiente para considerarla solución o emitir la respuesta, por lo que es necesario realizar cálculos adicionales (Anexo 5, Zoe).

> Z. Pues me tardé mucho porque no me acordaba cómo eran las divisiones de fracciones, porque sí me cuesta trabajo…

E. [silencio]

Z. […] pero eso es para las multiplicaciones o suma, o quién sabe qué. Ya después ya dije: no pues le voy a hacer el intento. La verdad nada más lo hice así porque…[silencio] y ya después para convertirlo en ceros. Y ya.

La intuición de Zoe es correcta en el sentido de que podría hacerse una simplificación, pero su desconocimiento le hace tomar otra dirección. El origen de esta respuesta se halla en el sentido común auspiciado por prácticas escolares.

Microgénesis

El intento por explorar la profundidad de los pensamientos de los estudiantes mientras resolvían el examen, facilitó la identificación de las dificultades:

1) Simplificación de fracciones. El trabajo hecho desde primaria, en algunos casos, parece no ser firmemente aprendido, pues su evocación en la transición de la respuesta errónea a la correcta fluye lento y con titubeos. A continuación un extracto de la entrevista con Miguel Ángel como ejemplar (ver anexo 5, Miguel):

E. […] ¿Sabes cómo se simplifica, o no?

M: Sí, sí.

E: ¿Sí? ¿Cómo se simplifica?

M: Bueno acá el 120 es hasta … ¿Tienen que ser los dos?

E: Los dos.

M: Mmh, pues la mitad ¿no?

E: Puede ser la mitad que [de ciento veinte] son sesenta, y…

M: Este [señala el denominador 140] ¿setenta?

E: Sí setenta. Muy bien. Vamos a hacer un truco. ¿Sabes que dividir o multiplicar por diez es como quitar ceros o aumentar ceros?

M: Sí.

E: ¿Se puede?

M: Sí.

E: Se puede. Entonces lo que sí vas a hacer es dividir esto entre 10, ¿verdad? ¿Qué fracción nos quedó?

M: Este, 7. No, ¡ah! Seis séptimos.

E: ¡Muy bien!

2) Procedimientos para operar con fracciones. A lo largo de la primaria hay una gran cantidad de trabajo con fracciones, sin embargo surgen en la resolución de este ítem confusiones asociadas a los métodos de resolución de operaciones con fracciones.

5.1.6 Ítem 6. Contenido: Ordenación de números

6. ¿Qué número es el más grande?

A) $\frac{4}{5}$ B) $\frac{3}{4}$

C) $\frac{5}{8}$ D) $\frac{7}{10}$

Para responder acertadamente esta pregunta se requiere que el estudiante conozca alguna de las siguientes estrategias de comparación: 1) Productos cruzados. Saber entre dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ cual es mayor comparando los productos ad y bc. Si $ad < bc$ entonces $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Si por el contrario, $ad > bc$ entonces $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$. En la resolución de este ítem, bajo este criterio de comparación el alumno tendría que saber que se requieren al menos tres comparaciones. 2) Expresar todas las fracciones con un común denominador. Saber hallar el denominador común entre cuatro fracciones y entonces comparar los numeradores resultantes. 3) Expresar cada fracción en forma decimal. Es necesario saber convertir la fracción en expansión decimal, saber constituir la división con los datos de la fracción, saber dividir con números decimales y saber comparar decimales.

Concentramos en la tabla 5.6 el producto del tamizado hecho con las respuestas de los nueve estudiantes que eligieron una opción incorrecta a esta pregunta.

Tabla 5.6. Concentrado de respuestas erróneas al ítem 6

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias		8/9 Reconocimiento de patrones 1/9 Uso del recurso gráfico	
Procedimientos			1/9 localizar numerador menor 4/9 localizar denominador menor 1/9 localizar denominador mayor 2/9 localizar fracción con números de mayor valor [eliminación y orden] 1/9 hacer representación icónica [mental]
Razonamientos			1/9 relación inversa: a numerador menor fracción mayor 4/9 relación inversa: a denominador menor fracción mayor 1/9 relación directa: a denominador mayor fracción mayor 2/9 los números más grandes corresponden a la fracción mayor 1/9 comparar imágenes
Microgénesis			
Proceso	1/9 conceptos y significados 3/9 uso de reglas 2/9 iconogramas		

Como ya se dijo nueve de los diez alumnos participantes en la aplicación del instrumento II eligieron una opción incorrecta. Esto lo hicieron acudiendo a una diversidad de formas de pensar asociadas a las siguientes ***Estrategias:***

Reconocimiento de patrones. Reside en descubrir un criterio de construcción de una serie o una regularidad en los datos, que facilitan asociaciones entre cuestionamiento y respuesta. En la selección de opciones a la pregunta se omite la relación existente entre los números del cociente. Esta manera de responder la pregunta se detectó en los ***Procedimientos:***

A) *Localizar el numerador menor.* Es un ejercicio de búsqueda entre los numeradores de las fracciones disponibles para encontrar el dígito de menor valor. Ya situado el dato se selecciona la opción que lo contiene.

B) *Localizar el denominador menor*. Se realiza una exploración entre los denominadores con la intención de ubicar la cifra más pequeña y tan pronto se dispone de ella se le otorga el estatus de fracción mayor.

C) *Localizar el denominador mayor.* Comprende la detección del número de más valor entre los denominadores y la designación de número mayor.

D) Localizar la fracción con dígitos de mayor valor. El despliegue hecho para responder este ítem inició por la exploración de las cifras en los cocientes, luego en una ordenación mental de los datos iniciando por los de menor valor hasta llegar a los de mayor valor. Este procedimiento se extrajo de la conversación sostenida con Gerardo (ver anexo 5, Gerardo):

> G. Porque primero lo empecé a ordenar de menor a mayor, éste primero [señala la opción B], luego éste [indica en inciso A].

Llama la atención el fenómeno "visual" que propician la fracciones involucradas en el ítem al ordenarlas por número, pues ya sea atendiendo al numerador [3,4,5,7], al denominador [4,5,8,10], o a ambas cifras, se llega al mismo resultado: *Número más grande* D) $\frac{7}{10}$. Para los estudiantes de secundaria referirse a un número generalmente es referirse a enteros. La idea de que una fracción también es un número parece asimilarse hacia el bachillerato, así que para chicos con el estatus de conocimiento que muestra Gerardo la dificultad podría estar en ese punto más que en el concepto de fracción o en los recursos de comparación sobre los cuales muestra tener dominio. Quizá preguntar por la fracción mayor en lugar de hacerlo por el número mayor habría generado un resultado distinto.

<u>Uso del recurso gráfico</u>. Consiste en generar una representación icónica mental o física a partir de la información que se presenta en el ítem y se acompaña de actos físicos, registrados o no, como medio para dar respuesta al cuestionamiento. Fueron detectados en el desarrollo del ***Procedimiento:***

A) *Hacer representación icónica [mental].* Se trazan figuras para representar las fracciones involucradas en las opciones de respuesta, se comparan las imágenes y se elige la que se percibe como de mayor valor. La ocurrencia de este procedimiento fue favorecida por la evocación de procedimientos asociados al aprendizaje del concepto de fracción en los primeros años de primaria. Zoe (ver anexo 5, Zoe) explica su desarrollo en el siguiente pasaje:

> Z. […] Bueno, primero empecé a hacer circulitos así [con el dedo índice hace contornos de círculos atravesados por líneas sobre el examen], me acordé que en la primaria había que dibujar.

Hasta este momento de la entrevista ella confía en la técnica iconográfica que suele emplearse en la enseñanza del concepto de fracciones en los primeros años de la escuela primaria. Se trata de la partición a mano alzada de figuras geométricas como círculos, cuadros o rectángulos, conocida como partición de pasteles. Por supuesto la técnica difícilmente puede ser válida como criterio de comparación.

Tras la gama de procedimientos exhibida en la resolución a este problema, analizamos las respuestas buscando las causas productoras de los cinco trayectos mencionados, encontrando que éstos se apoyaron en cuatro ***Razonamientos:***

A) Los números más grandes corresponden a la fracción mayor. Siguiendo con el orden de los números naturales, aquella fracción con los dígitos mayores debe ser la mayor. Un extracto de la charla con Gerardo (ver anexo 5, Gerardo) lo ejemplifica:

> E. […]Y ¿en qué te fijaste para ordenar? ¿En los dos números de la fracción, en un número de la fracción, en qué te fijaste para hacer ese orden?
> G. Para saber nada más puse primero… empecé a ver qué número de estos era el más grande que los demás [señala todos los incisos] y me di cuenta que éste [tocando el inciso B] es el más chico y éste [indica el inciso A] el segundo, y pues ya.

B) Relación inversa:

1. a numerador menor fracción mayor. El valor de la fracción se determina por el valor del numerador en una relación en la que a mayor numerador fracción más chica y a menor numerador fracción más grande. Encontramos un ejemplo de esta idea en las respuestas de Eduardo (ver anexo 5, Eduardo):

> L. Es que, en una fracción siempre que el número [señala el 3] numerador es más grande, la fracción es más chica.
> E. ¿El de arriba?
> L. Sí, el de arriba.

2. a denominador menor fracción mayor. Una manera de reconocer la magnitud de una fracción es mirando el denominador, si este es un dígito pequeño la fracción es grande. Atilio (ver anexo 5, Atilio) ilustra el origen de tal afirmación:

> At. Bueno, nuestra maestra de taller de mate del año pasado nos dijo que el número de abajo, mientras más pequeño era, más grande era.

C) *Relación directa: a denominador mayor fracción mayor.* Mientras más partes del entero fraccionado se toman más grande es la fracción. La reproducción de una regla aprendida sustenta esta falsa concepción de Ricardo (ver anexo 5, Ricardo):

R: Porque éste, el número 5 que esta acá arriba era el más grande de acá [señala los numeradores de todas las fracciones] y los de abajo [se refiere a los denominadores] o sea, el de abajo era el más grande que el 10, pero como el de arriba es cinco y era el más grande. ¡Ah, No! Ya me equivoqué.
E: A ver, ¿Qué pensaste, por qué me estás diciendo que el de arriba y el de abajo? ¿Tienen algún significado en especial?
R: Bueno es que yo tomo clases particulares, ¿No? Y me dijo mi maestra que el número de arriba cuando es más grande siempre ese número va a ser el más grande. Bueno, va a ser la fracción más grande, nada más que aquí me hice bolas.

D) *Comparar imágenes.* Es posible comparar fracciones a través de las imágenes que las representan, al estilo de la usanza en el trabajo por enseñarlas. Zoe (ver anexo 5, Zoe) evoca su proceso de elaboración del concepto como herramienta válida para resolver el problema:

Z. Como me enseñaban, así [dibuja un círculo atravesado por una línea] como si fuera un círculo y luego ya dividirlo, éste ya es medio [señalando el trazo sobre el examen. A continuación traza otra línea], y así serían cuartos y así. Y así empecé a dividirlos pero ¡no me salió bien!. Entonces ya me acordé que en la primaria decían que el más grande era el más chico…
E. Sí [sugiriendo que continúe con la explicación]...
Z. Y pues por eso. Marqué esa, porque esa era la fracción más chica.
E. Porque la más chica es el más grande.
Z. Sí, porque así vale más.
E. Muy bien.

La charla con Zoe evidencia la ineficiencia de su estrategia y su migración al uso de reglas aprendidas en ciclos más recientes. Pese al cambio, su acto irreflexivo de elección le lleva a un desacierto.

El sentido común fundado en la confianza que los alumnos depositan en reglas enunciadas por sus profesores y, quizá, los conocimientos relacionados con los números enteros, parecen ser el origen de las respuestas a este reactivo en el que todos los entrevistados acudieron al sentido común.

Microgénesis

Con la atención centrada en las ideas imbricadas tras cada respuesta, procuramos motivar extensiones en la charla para encontrar el punto de inflexión en los saberes de los alumnos que los llevaron a responder dudosamente. Entre los cambios de una estrategia a otra, el uso irreflexivo de reglas (Moskal y Magone, 2000), y las dudas expuestas en los procedimientos, logramos persuadir a seis de los nueve chicos que respondieron con desacierto a seguir un proceso para llegar a la respuesta correcta. La ruta marcada incluyó el reconocimiento de un punto de partida y el uso de la estrategia *Expresar cada fracción en forma decimal*.

En algunos casos el proceso fue exitoso aunque extenuante. He aquí el caso de Gabriela (ver anexo 5, Gabriela):

> G. Por ejemplo, en un entero si pones un medio [traza una línea horizontal que divide la figura en dos partes, señala una de las partes], ésta es la mitad, pues es más grande. Un cuarto pues ya son partecitas.
> E. ¿Más chicas?
> G. Y cuándo va el número más grande en esta parte [señala el denominador]
> E. Mientras más grande sea el denominador…
> G. Más chicas son las partes.
> E. Ok, entonces por eso tú pensaste que tres cuartos es el número más grande.
> G. Ajá.
> E. ¿Y si dibujaras para compararlos?
> G. Ajá.
> E. Aquí tienes ésta [Traza una línea vertical en el dibujo anterior y sombrea tres de las cuatro partes]
> G. [Dibuja otro círculo, más pequeño que el anterior, dividido en cinco partes y sombrea cuatro]

E. ¿Cuál es mayor, ésta [señala la figura que representa tres cuartos] o ésta [señala la figura que representa cuatro quintos]?
G. Ésta [Observa las figuras representativas de ambas fracciones, señala la figura representativa de tres cuartos]
E. ¿Y si dibujaras esta fracción [señala la fracción siete décimos]?
G. [Dibuja un circulo más pequeño que el representativo de tres cuartos, traza líneas para dividirlo en diez partes que quedan de distintos tamaños] No me salió muy bien.
E. No importa.
G. [Sombrea siete de las diez partes, observa la figura las tres figuras] ¿Son siete? Éste es el más grande ¿verdad?
E. ¿Ya empezaste a dudar?
G. No porque…lo de aquí [señala uno de los séptimos “chicos” representados] lo dividí de acá [señala uno de los séptimos “grandes”], siento que ésta es más grande.
E. No sé si recuerdes, es posible que por ahí de sexto te hayan enseñado a usar productos cruzados para comparar fracciones, ése es un método. Esta [dibujar] es otra estrategia que aquí parece causar problema ¿cierto?
G. ¿Qué causa problema?
E. Los dibujos, como que en este problema los dibujos no te dejan ver muy claramente la diferencia.
G. No. Sí, pero porque no están …
E. Porque no están bien hechos, desde luego. Hay otra manera. Podrías, por ejemplo, convertir a decimales esas fracciones. ¿Sabes cómo?
G. Dividiendo.
E. Ajá.
G. Entonces…
E. No hagas ahora todas las divisiones, te voy a decir el resultado, sólo dime ¿si dividieras en esta fracción [señala tres cuartos], qué dividirías allí?
G. Tres entre cuatro.
E. Correcto, exacto. Y tu resultado sería 0.75. Aquí [señala la fracción cinco octavos] obtendrías un resultado de 0.625. Si las comparas ¿cuál es mayor?
G. Ésta [señala tres cuartos igual a 0.75]

E. De esta otra [señala la fracción diete décimos] se obtiene 0.70, ahora compárala con la mayor de las anteriores y dime ¿cuál es mayor?... entre 0.70 y 0.75.

G. Pues, 0.75.

E. Y, ¿0.625 es mayor o menor que 0.75?

G. Menor, ¿0.625 así? Pues hay que tomar hasta el tercer número.

E. Exacto. Tu estrategia aquí sería rellenar de ceros los lugares que no están ocupados para poderlos comparar, ¿no?

G. Sí.

E. Entonces tenemos 0.700, 0.750 y 0.625, ¿Cuál es mayor?

G. Pues 0.750

E. Ajá, pero qué te crees, que nos falta dividir cuatro entre cinco, ¿eso cuánto da?

G. ¿Lo hago?

E. Sí.

G. [divide 4 entre 5, dentro del gnomon agrega un cero delante del cuatro y un punto sobre el radical. Escribe un 8 sobre el gnomon, luego un cero debajo de cuarenta y un cero más junto al ocho] Me dan ochenta.

E. Sí, entonces, ¿cuál es la fracción mayor?

G. La A.

Gabriela llega a la respuesta correcta tras el colapso de su estrategia de comparar imágenes. En otros casos el intento fallido nos permitió localizar dificultades, como ocurrió con Fernanda (ver anexo 5, Fernanda):

E: Entonces los denominadores más pequeños hacen fracciones más grandes y, si partimos un pastel entre 10 y uno entre 4 ¿de cuál prefieres?

F: El de 4.

E: El de 4 porque te toca más pastel ¿no? [Fernanda asiente], así que ¿el numerador no te sirvió para nada?

F: Pues sí hubiera servido si hubiera tenido un cuatro ahí [Fernanda señala el denominador de la fracción siete décimos]

E: En el denominador, para comparar. Ah, ok. Aquí la cuestión que las fracciones, todas, son de distintos tamaños ¿verdad? Son distintas formas. Ok, Bueno.

Al parecer, Fernanda se da cuenta que en fracciones con el mismo denominador el numerador sería el referente para comparar, sin embargo, en este problema, dada la diversidad de denominadores no considera importante al numerador.

Los procesos dieron oportunidad a reflexionar acerca del uso de reglas y de imágenes, con lo que los jóvenes estuvieron dispuestos a probar otros recursos. También dieron ocasión de registrar dificultades en la comprensión de conceptos y de significados de conceptos, como expresa Eduardo (ver anexo 5, Eduardo):

> E. ¿Qué significa el de abajo?
> L. El número en que lo repartes.
> E. Exactamente, eso significa ¿Y el de arriba que significa?
> L. El de arriba, no, no sé cómo se dice…
> E. Bueno, como puedas decirlo, aunque no sepas cómo se dice bien.
> L. Como si fueran pasteles, son tres pasteles y los tres divididos en cuatro.
> E. ¿Los puedes pintar?
> L. Sí [procede a dibujarlos].
> E. ¡Ah! Tres pasteles divididos cada uno en 4 partes! Ok.

Esta explicación permite ver una interpretación equivocada de las partes de la fracción.

5.1.7 Ítem 7. Contenido: Operaciones en contextos

7. La familia Martínez utiliza cerca de 6000 L de agua por semana. Aproximadamente, ¿Cuántos litros de agua usarán por año?

A) 30 000
B) 240 000
C) 300 000
D) 2 400 000
E) 3 000 000

Una condición importante para responder el ítem es conocer la distribución del tiempo en el calendario anual por meses, semanas y días. La estimación del gasto de agua en este problema requiere que el alumno identifique la operación que debe realizar con los datos consumo semanal y número de semanas del año, además de redondear.

Siete de los diez participantes eligieron alguna de las opciones incorrectas, las estrategias, los procedimientos y los razonamientos que los llevaron a ellas se registran en la tabla 5.7 :

Tabla 5.7. Concentrado de respuestas erróneas al ítem 7

	Argumentación matemática	**Análisis**	**Sentido común**
Estrategias		7/7 Operar	
Procedimientos	1/7 gasto semanal por semanas 1/7 gasto semanal por días del año		3/7 gasto semanal por semanas 1/7 gasto semanal por días del año 1/7 gasto semanal por mes
Razonamientos			3/7 obtener número de semanas 4/7 asociar un número al año
Microgénesis			
Proceso			

Todos los alumnos coincidieron en la idea general necesaria para resolver el problema, ésta consistió en aplicar la ***Estrategia:***

<u>Operar</u> Comprende la aplicación de operaciones aritméticas como un acto mecánico poco reflexivo. Para el caso deriva de la operación principal efectuada con los datos del enunciado; el suscrito respecto al consumo de agua y el que los estudiantes aportaron mediante el desarrollo de los ***Procedimientos:***

A) Gasto semanal por semanas. Se obtiene el número de semanas del año multiplicando las semanas del mes por los meses del año. En seguida se multiplica el consumo mensual por el dato recuperado.

B) *Gasto semanal por días del año.* Hacer una multiplicación con el número proporcionado en el enunciado [sin considerar que corresponde a una semana] por el número de días que contiene el año.
C) *Gasto semanal por mes.* Primero se calcula el consumo semanal [considerando el dato del enunciado como consumo diario], luego se calcula el número de días del mes multiplicando los días de la semana por las semanas que contiene mes y por último el dato obtenido se multiplica por el consumo.

Encontramos en estos procedimientos la generación de datos fuera de la realidad debido al desconocimiento de la distribución del tiempo en el calendario. Estos procedimientos fueron favorecidos por diversos ***Razonamientos:***

A) *Obtener número de semanas.* El dato del consumo se presenta por semana de modo que es necesario recuperar el número de semanas por año. Una manera de hacerlo es multiplicando el número de semanas del mes por los meses del año, como Eduardo (ver anexo 5, Eduardo):

> E. ¿Qué es esto [señala la operación borrosa sobre el examen]? Estos son los 6000 litros de agua y ¿esto qué es? [señalando el multiplicador 132]
> L. Las semanas del año.
> E. ¡Ah! Tú lo multiplicaste por las semanas de año. ¿Cuántas semanas tiene un año?
> L. Tiene 132.
> E. ¿Cómo las sacaste?
> L. Multiplicando los meses
> E. ¿Cuántos meses tiene el año?
> L. 22 [sic].

Miguel Ángel (ver anexo 5, Miguel) por su lado sigue el mismo razonamiento con datos distintos:

> E: ¿Cómo hiciste para saber que ésta era la respuesta correcta?

> M: Ah. Es que agarré, bueno, primero puse un determinado número de semanas. No es igual y algún mes tiene cuatro, pero sé que…Con la base de tres fui sacando las semanas y los meses que eran. Un año tiene doce meses y así.

Los razonamientos de ambos chicos parecen iguales en principio, pero en el conocimiento de información en ambos es diferente; Eduardo cree que el mes tiene seis semanas y el año veintidós meses, en cambio Miguel Ángel sabe que hay doce meses en un año y que algunos meses tiene cuatro semanas. Este saber, que en la realidad los meses tienen más o menos semanas, lleva a pensar que el promedio mensual es de tres, operando así con datos equivocados.

B) *Asociar un número de días al año.* Dado que la estimación del consumo de agua se pide anual y se cuenta con el dato del consumo, se busca un número que represente el año. Lo primero es evocar que el año cuenta 365 días, pero también ocurre que el procedimiento se prolongue intentando trabajar con la misma unidad de tiempo convirtiendo el consumo semanal en diario empleando operaciones equivocadas, como hizo Ricardo (ver anexo 5, Ricardo):

> E; Entonces tú hiciste aquí un montón de operaciones que luego borraste y lo que hiciste fue multiplicar 6000 litros x 365 días, ¿no? Y entonces te dio una cantidad grande, porque son números muy grandes los que usaste, claro. Operaste como si cada día la familia gastara 6000 litros en vez de cada semana
> R: Seis mil por siete y me salió cuarenta y seis mil.
> E: Entonces ¿por qué la hiciste con un número tan grandote?
> R: Es que… iba a hacer también la división pero como que se me hizo obvio más ésta, la multiplicación, porque saldría un número más grande.

Aunque en los programas de estudio a lo largo de la educación básica se trabaja con la partición del tiempo y el calendario, para algunos chicos parecieran ser insuficientemente tratados; por lo que al presentarse como contexto en un problema, la resolución de éste transita de los conocimientos escolares en la parte del uso de operaciones a un conocimiento popular adquirido fuera de la escuela. Pareciera que el conocimiento de la partición del tiempo tiene más sentido cuando se asocia al contexto extraescolar, por lo que el sentido común subyace con mayor frecuencia las respuestas de este reactivo.

Microgénesis

Con los siete chicos fue posible prolongar la conversación sobre sus conocimientos de la organización del tiempo, que para todos los casos fue el origen del error en sus procedimientos. El proceso que se siguió para llevarlos de la respuesta errónea a la correcta consistió en localizar un punto de partida para obtener el número de semanas útil, 48 o 52 , y con ello corregir los datos de las operaciones. Un ejemplo de lo anterior es el diálogo con Fernanda (ver anexo 5, Fernanda):

> E: Esto son días [Señala el resultado de la multiplicación 6000 x 365]. ¿Tú sabes cuántas semanas tiene un año?...¿No?
>
> F: No.
>
> E: ¿Sabes cuántos meses tiene un año?
>
> F: Doce.
>
> E: Doce ¿Sabes cuántos días tiene una semana?
>
> F: Siete
>
> E: Siete, sí. A ver, vamos a pensar y ¿cuántas semanas tendrá un mes? ¿Has pensado en eso?
>
> F: ¿Cuatro?
>
> E: ¿Más o menos?
>
> F: Cuatro.
>
> E: Y ¿cómo lo sabes?
>
> F: Por el calendario.
>
> E: ¡Por el calendario! Fíjate que eso está muy interesante, porque si tu sabes que un mes tiene cuatro semanas y que el año tiene 12 meses, más ó menos cuantas semanas tiene el año ¿qué tendrías que hacer?
>
> F: Multiplicar 12 x 4.
>
> E: Ajá, eso sería 48, si multiplicas 12 x 4. .., en realidad el año tiene 52 semanas, pero vamos a suponer que más o menos fuesen 48 semanas. Si tú hubieses multiplicado 6 000 x 48 habrías tenido una cantidad parecida a ésta [señala el inciso C].

F: Ah.

E. ¿Dónde aprendiste cuántos meses tiene el año?, ¿en la escuela o en la casa?

F: En mi casa

E: En tu casa. Y ¿los días de la semana?

F: Así, desde pequeña también

E: También. Otra guía para saber más o menos, cuántas semanas tiene el año es, usando lo que tú sabes: que el año tiene 365 días y sabiendo que la semana tiene siete días, pero tú no sabes cuantas semanas tiene el año. Tienes 365 días entre 7 días de cada semana. Aquí te tendría que resultar algo

Miguel Ángel (ver anexo 5, Miguel) además exteriorizó una dificultad con la selección de la operación auxiliar adecuada:

E: ¿Cuántos días tiene un año?

M: ¿Cuántos días? Sí, 365.

E: Sí. Y ¿Qué operación tendrías que hacer para saber cuántas semanas tiene un año?

M: Este…

E: Si es que habría que hacer una operación desde luego.

M: O sea, ¿cuántas semanas?

E: Ajá. Tú sabes que el año tiene 365 días y que la semana tiene siete días y lo que queremos saber es cuántas semanas tiene el año. ¿Qué podríamos hacer con toda esa información?

M: ¿Una regla de tres? No ¿verdad?

E: No. Algo más simple.

M: ¿División?

E: Ajá, ¿Qué dividirías?

Para Miguel Ángel la regla de tres parece resolver más de un problema, aunque ésta no es parte de los contenidos escolares inscritos en el currículum.

5.1.8 Ítem 8. Contenido: Proporcionalidad

8. Dos cajas contienen piezas cuadradas de cartulina para construir un modelo más grande. Hay 4 pequeños cuadros en cada pieza.

Todas las piezas de la caja 1 son de esta forma

Todas las piezas de la caja 2 son de esta forma

Para formar el modelo, por cada pieza de la caja 2 debe haber 2 piezas de la caja 1.

Construido el modelo ¿Qué fracción de los cuadros pequeños será de color negro?

Respuesta: ____________________________

Llegar a la respuesta del problema planteado en este ítem requiere que el alumno tenga presentes varios datos de manera simultánea mientras desarrolla actividades y operaciones como el armado y el conteo. Primero saber el significado matemático de la palabra modelo; segundo, asumir que se presenta una muestra de cada tipo de pieza y que se habla de un número indeterminado de cajas; tercero, entender que en la construcción base se involucran sólo tres piezas; cuarto, que la fracción de cuadros negros en cada pieza de la construcción es proporcional a la construcción con tres piezas; y quinto, que la proporcionalidad entre las fracciones guarda una relación de equivalencia.

Ocho de nuestros diez participantes emitieron respuestas erróneas producto de los desarrollos cuyo registro guardamos en la tabla 5.8:

Tabla 5.8. Concentrado de respuestas erróneas al ítem 8

	Argumentación matemática	**Análisis**	**Sentido común**
Estrategias		3/8 Operar 5/8 Uso del recurso gráfico	
Procedimientos	5/8 contar los cuadros negros 1/8 armar una fracción 1/8 elegir un número 1/8 seguir instrucciones		
Razonamientos	4/8 observar la partición de la pieza 2/8 responder algo 1/8 cuadritos en cuadros		1/8 hacer analogía
Microgénesis			
Proceso			

Los datos registrados en el análisis muestran el desarrollo de dos ***Estrategias:***

<u>Operar</u> Comprende la aplicación de operaciones aritméticas como un acto mecánico poco reflexivo.

De acuerdo con el número de piezas empleadas se desarrollaron los siguientes ***Procedimientos:***

A) Contar los cuadros negros. Observar la partición de la pieza elegida y la cantidad de partes sombreadas en ella.

- Por ejemplo se toma como base la pieza 2:  A partir de su observación y el conteo de las partes que la componen los alumnos emiten respuestas como 2 o 2/4.

B) Sumar las partes sombreadas de la construcción con tres piezas sin contar el total de las partes.

- Respuestas emitidas bajo esta idea: 4, 4/4.

C) Armar una fracción. Localizar los datos numéricos involucrados en el enunciado, luego integrar una fracción con ellos.

- Los datos “Para formar el modelo, por cada pieza de la caja 2 debe haber 2 piezas de la caja 1.” Parecen sugerir a los estudiantes la posibilidad de “armar fracciones” como: ½, 2/2, 2/1.

D) Elegir un número. Responder un número en particular luego de observar las piezas.

<u>Uso del recurso gráfico</u>. Consiste en generar una representación icónica mental o física a partir de la información que se presenta en el ítem y se acompaña de actos físicos, registrados o no, como medio para dar respuesta al cuestionamiento. En este caso se empleó el ***Procedimiento:***

A) Seguir instrucciones. Dibujar la construcción con tres piezas, contar las partes sombreadas, y sumarlas las veces necesarias.

El desarrollo de estos cinco procedimientos partió de los ***Razonamientos:***

A) Observar la partición de la pieza. Si la pieza está partida en cuatro y tiene dos partes sombreadas la fracción correspondiente es un medio.
B) Responder algo. Usar los datos del enunciado para integrar una respuesta.
C) Cuadritos en piezas. Atendiendo a todas las indicaciones del enunciado las piezas cuadradas tienen cuatro pequeños cuadros, por lo que en el modelo expuesto hay 4 cuadros con cuatro cuadritos integrados.
D) Hacer analogía. Los cuadros de las piezas pueden parecerse a un mosaico con cuatro cuadros dentro y con varios de ellos se puede llenar cajas.

Este seguimiento por las respuestas de los alumnos permite ver que las estrategias y los procedimientos desplegados se apegan a las prácticas escolarizadas del trabajo con fracciones. Una excepción es la analogía con los mosaicos en la que de la dificultad para “imaginar” la construcción con tres piezas sen supera con el uso de un referente familiar en busca de sentido.

Microgénesis

Acompañamos a siete alumnos en el proceso de ir de la respuesta errónea a la correcta usando el recurso gráfico. En el trayecto encontramos algunas dificultades:

A) Integrar toda la información del enunciado, como se mira en este segmento de la charla con Atilio (ver anexo 5, Atilio)

> E: ¿Cómo supiste esa? ¡Cuéntamelo todo!
> At: Ah pues, ahí, es que nada más la hice al aventón. Se me llenó la cabeza de números y dije ¡Ay ya, un medio! Porque se supone que de… o sea; usé un poquito de lógica según yo, porque si de la una se utilizaban dos y de la otra uno, pues la fracción era un medio, según yo.

Otro ejemplo lo encontramos en el discurso de Gerardo (ver anexo 5,Gerardo):

> E: Tú respuesta es cero. Me podrías decir ¿cómo supiste esa respuesta?
> G. Pues…[silencio].
> E. ¿Por qué pensaste que es cero? ¿Pensaste que no va a tener ningún cuadrito negro?
> G. [Permanece en silencio, al parecer un poco angustiado por no hallar la respuesta].
> E. ¿Te parece difícil la pregunta?
> G. Sí.
> E. ¿Qué es lo que te parece difícil?
> G. Esta parte [señala la indicación de cómo formar el modelo], casi no le entendí.
> E. Ah! Bien, lo que no entendiste son las indicaciones para formar el modelo.

B) Decodificar el significado matemático de la palabra modelo. Este resulta ser un concepto difuso en palabras de Cuautli (ver anexo 5, Cuautli):

E: […] ¿Entiendes qué es eso de hacer un modelo?

C: Pues sí.

E: ¿Qué es?

C: Pues hacer algo de lo que vas hacer después, o…pues sí, hacer un modelo.

C) Diferenciar significados, como piezas y cuadrito, que se consideraron sinónimos. El mismo pasaje con Cuautli muestra la confusión:

E: Bueno, podríamos decir que es el cómo vamos hacer las figuras con tres piezas ¿podría ser algo así?

C: Pero nada más que ocupa tres piezas y son cuatro.

E: Y ¿Son cuatro?

C: Si, dice que son cuatro en cada caja.

E: Hay cuatro pequeños cuadros en cada pieza. Ésta es una pieza completa [señala una de las figuras del examen] y cada una tiene cuatro cuadritos. ¿Qué te molesta de esta pregunta?

C: Nada.

E: ¿Nada te desagrada de esta pregunta?

C: No.

D) Simplificación de fracciones. En el acompañamiento con Gerardo (ver anexo 5, Gerardo) fuimos desde la construcción de la figura hasta la respuesta correcta en un proceso complicado que expuso su dificultad para simplificar fracciones:

E. Fíjate en lo que tenemos. Tenemos tres piezas pegadas, ahora contemos cuantas partes tenemos: 1, 2, 3, 4; 1,2,3,4 y 1,2,3,4. ¿Eso es cierto?

G. Sí.

E. ¿Cuántas tenemos en total?

G. 12.

E. Y ahora ¿cuántas negritas tenemos?

G. 4.

E. ¡Cuatro! Cuatro negritas de las 12 que tenemos. 12 es el total, esa podría ser nuestra unidad completa, ¿te parece? Digamos que partimos la unidad en 12 partes iguales.

¿Recuerdas qué indica el número de debajo de la fracción [Dibuja una línea y debajo de ella coloca el número doce]?

G. Si, el número de partes en que se dividió el entero.

E. Y el número de arriba nos indica cuantas partes estás tomando del entero ¿es así?

G. Sí.

E. ¿Cuántas partes estás tomando?

G. Cuatro.

E. Entonces anótalo en la fracción.

G. [Escribe 4 sobre la línea]

E. Y ésa es nuestra fracción. La podríamos hacer más chiquita [se refiere a número de menor denominación]. Por ejemplo podríamos decir: si dividiéramos el 4 entre cuatro ¿cuánto resultaría? Si tuviéramos 4 dulces para repartirlos entre cuatro niños ¿Cuántos dulces le tocan a cada niño?

G. Uno.

E. Uno [dibuja una línea junto a la línea de la fracción cuatro doceavos y anota sobre ella el número 1]. Pero ahora tenemos doce dulces y cuatro niños. ¿Cuántos dulces le tocan a cada niño?

G. [Permanece con la mirada fija en el examen y en silencio prolongado]

E. Tenemos doce dulces [dibuja 12 bolitas sobre el examen y las cuenta señalando una por una]; 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11 y 12. Y tienes cuatro [dibuja 4 “monitos”]1,2,3,4. Y ahora los repartimos. Hazlo tú

G. [traza líneas que van de las bolitas representativas de los dulces a los muñequitos] Tres.

E. O sea que todo nuestro montón de dulces lo repartimos ¿entre cuántos niños?

G. Cuatro.

E. Y les tocó a…

G. Tres.

E. Entonces nuestra fracción la dividimos entre cuatro y nos quedó [anota bajo la línea de la fracción el número 3] un tercio. Y tu respuesta correcta debió haber sido un tercio ¿de acuerdo?

G. Sí.

En los pasajes mostrados, especialmente los de Cuautli y Gerardo, se percibe una incomodidad por no saber el procedimiento adecuado. Ellos decidieron armar la figura mental aunque no había prohibición explícita de hacerlo en concreto, lo que nos hace suponer problemas para manipular objetos abstractos. También notamos un estado anímico desfavorable en la charla sobre este reactivo, nerviosismo y ansiedad posiblemente generados en el desconocimiento, y que finalmente cedió al llegar a la respuesta correcta.

5.1.9 Ítem 9. Contenido: Conversión

9. Escribe 0.28 como una fracción reducida (simplificada) Respuesta: ______________________________

Hallar la respuesta correcta a este ítem requiere que el estudiante sepa convertir la expresión decimal en una fracción decimal, y simplificar fracciones.

Colectamos ocho respuestas erróneas a la petición inscrita en este reactivo, mismas que registramos en la tabla 5.9:

Tabla 5.9. Concentrado de respuestas erróneas al ítem 9

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias		7/8 Operar 1/8 Reconocimiento de patrones	
Procedimientos	1/8 Recorrer, bipartir y armar 2/8 cambiar punto por línea 2/8 reducción parcial 1/8 interpretar significados 1/8 operar con los datos 1/8 comparar saberes		
Razonamientos	1/8 ajustar datos 1/8 equivalencia de signos 2/8 reducir una vez 1/8 seguir instrucciones 1/8 aplicar procedimientos 1/8 responder todo. 1/ 8 evocación de reglas		
Microgénesis			
Proceso			

Como se observa, los estudiantes recurrieron a dos diferentes ***Estrategias:***

Operar. Comprende la aplicación de operaciones aritméticas como un acto mecánico poco reflexivo. Se usa bajo los siguientes ***Procedimientos:***

A) *Recorrer, bipartir y armar*. Consiste en aplicar la estrategia para encontrar el mínimo común múltiplo de las fracciones a un número decimal. Comprende las acciones recorrer el punto decimal dos lugares para “hacerlo” número entero, colocar en un esquema en forma de “T” al lado izquierdo el número 28 e iniciar la bipartición del número colocando el resultado en el lado derecho el número. Continuar la bipartición de ambos números en el esquema hasta obtener 2 y 4 con los que forma la fracción.

B) Cambiar punto por línea. Eliminar el punto cambiándolo por una línea de quebrado, colocar los dos números con “valor” en las posiciones de numerador el dos y denominador el cuatro, simplificar sacando mitad dos veces: dos octavos a un cuarto y un cuarto a un medio.

C) Reducción parcial. Convertir la expresión decimal en fracción decimal correctamente, simplificar sacando mitad tanto a numerador como a denominado una vez con lo que se obtienen catorce cincuentavos.

D) Interpretar significados. Tiene que ver con la realización de acciones que se atribuyen a los conceptos reducir y simplificar. Se traducen los conceptos clave del enunciado en saberes conocidos y se opera conforme al significado que se les atribuye; primero desecha de la expresión decimal los dígitos innecesarios, luego suma dos veces el número resultante. Gerardo (ver anexo 5, Gerardo) explica cómo se desarrolla este Procedimiento:

> E. Bueno. Vamos a continuar. En la pregunta 9 dice: Escribe 0.28 como una fracción reducida (simplificada). Y tu respuesta es 56. ¿Cómo supiste eso?

G. Pues, reducida significa como quitarle, y simplificada es sumarle.

E. ¡Ah! Y entonces ¿qué hiciste para obtener 56?

G. Sumé 28 dos veces.

E. ¿Y con eso obtuviste 56?

G. Sí.

E) Operar con los datos. Consiste en generar números mediante una operación aritmética para integrar una fracción, es decir, eliminar el punto de la expresión decimal para convertirlo en un número entero que haga las veces de dividendo, localizar un divisor, efectuar la operación, construir una fracción con el cociente y las veces que este sirvió como divisor. Este procedimiento subyace a la explicación de Miguel Ángel (ver anexo 5, Miguel):

Pregunta 9. Escribe 028 como una fracción reducida o simplificada ¿Cómo supiste que eso es un séptimo?

M: ¿Está bien o está mal? Está mal, ¿verdad?

E: No sé. Explícame y luego ya vemos, vamos a llegar juntos a la conclusión.

M: Bueno, es que hace poco hice eso de pasar de fracción a decimal. Tenías que dividir, lo que salía arriba iba como un número entero adentro y el de abajo iba en la parte de arriba y el denominador era el de afuera. Pero ya no me acordé como iba.

F) Cambiar punto por línea. La metamorfosis sucede a través de los pasos cambiar el punto por una línea de quebrado, usar la parte entera como numerador y la parte decimal como denominador.

<u>Reconocimiento de patrones</u>. Reside en descubrir un criterio de construcción de una serie o una regularidad en los datos, que facilitan asociaciones entre cuestionamiento y respuesta. Esta manera de responder ocurre a través del ***Procedimiento:***

A) *Comparar saberes.* Observar el número decimal y contrastarlo con un hecho conocido: 0.25 = ¼. La respuesta de Atilio (ver anexo 5, Atilio) lo ejemplifica:

> E: Escribe cero punto veintiocho como una fracción reducida o simplificada, y tu respuesta fue ¼ ¿Cómo supiste eso?
> At: No, el problema es que no supe.
> E: ¡No supiste! ¿Y entonces?
> At: Pues me pareció que uno, mmh, que 0.25 es un cuarto.
> E: Exacto.
> At: Y tuve que acercarlo.

Todas las estrategias con sus respectivos procedimientos fueron producto de las justificaciones de los alumnos al proceder confiados en los ***Razonamientos:***

A) *Evocación de reglas*. Existen reglas en la simplificación de fracciones que pueden aplicarse a problemas en los que se solicita reducción.

B) *Ajustar datos*. Coexisten números muy cercanos o poco distantes al decimal equivalente a un cuarto, tanto que se pueden ajustar a él.

C) *Equivalencia de signos.* Los números enteros con expansión decimal guardan similitud con las fracciones, ambos se separan por un signo, los enteros con expansión por un punto y las fracciones son dos números separados con una línea, por lo que el punto y la línea son equivalentes.

D) *Reducir una vez*. Una vez convertida la expresión decimal en fracción, basta reducir una vez para tener la fracción simplificada.

E) *Seguir instrucciones*. Los conceptos o palabras clave indican las acciones que se deben realizar y el orden en que deben hacerse.

F) *Aplicar procedimientos.* Hay procedimientos para convertir fracciones a decimales, de modo que el mismo procedimiento debe servir para convertir decimales a fracciones.

G) *Responder todo.* Es importante responder todas las preguntas, pese a no tener clara la manera de proceder, es posible hacer algún movimiento con los datos para dar una respuesta. Este razonamiento se asocia con el procedimiento empleado por Ricardo (ver anexo 5, Ricardo):

> *E:* […] y tu respuesta fue cero veintiochoavos ¿Cómo supiste eso?
>
> *R:* Bueno, es que en esa [pregunta] sí, no sabía ni qué poner.

Los razonamientos expuestos muestran algunas dificultades, entre ellas a) aplicación inapropiada de reglas, b) falsos cognados en relación con las expresiones decimales, c) significados de conceptos.

Un rasgo adicional de los procedimientos analizados tiene que ver con los refuerzos populares en torno a que en la resolución de exámenes es mejor responder absolutamente todos los ítemes que dejar preguntas sin respuesta. La argumentación popular esgrimida es que en las preguntas de respuesta abierta queda la esperanza de que el procedimiento sea tomado en cuenta, y en las de opción múltiple hay posibilidad de “atinarle” a la respuesta correcta.

Microgénesis

Acompañamos a cinco chicos de los ocho que respondieron erróneamente el ítem a encontrar la respuesta correcta. Tomamos como punto de partida sus conocimientos sobre fracciones. En algunos casos el recorrido inició recordando las fracciones decimales y en otros desde la simplificación. En el proceso nos percatamos que un alumno tenía dificultades para simplificar debido a la falta de sentido en los números. Ricardo (ver anexo 5, Ricardo) puso al descubierto esta dificultad para operar en abstracto a lo largo de un complicado proceso:

> E: Por ejemplo veintiocho centésimos entre cien, no nos alcanza aquí [señala el numerador. Podemos dividir cien entre cien y nos va a dar uno pero veintiocho entre cien nos va a dar otro decimal. Digamos, sí lo podemos dividir pero conviene que sea por un número más pequeño, podríamos por ejemplo entre 2.
>
> R: Sí.
>
> E: ¿Cuánto sería?
>
> R: Dos entre cien.

E: A ver, ¿veintiocho entre dos?

R: 14.

E: 14, muy bien y ¿cien entre dos?

R: 20, ¿no?

E: ¿Cien entre dos?

R: ¿Me puede repetir?

E: A ver, cuando tienes 100 pesos y te dicen dame la mitad ¿cuánto le vas a dar?

R: Ah, cincuenta.

E: Cincuenta. ¿Se te hace más fácil si te hablo de pesos, por ejemplo?

R: Sí más o menos.

E: ¿Pagas tú con dinero? Quiero decir, ¿vas a comprar cosas?

R: Sí.

E: Por cierto ¿te mandan a hacer mandados? Eso de que, oye ve por las tortillas, el pan, ve a la tienda ¿o no sé qué?

R: Sí.

E: Y aparte ¿tú tienes tu dinero y compras tus cosas?

R: Sí.

E: ¡Ah mira! eso es interesante, acercarse más a esas cosas; por último podríamos volver a dividir esto, si los dividimos entre dos nos toca a 7 ¿cincuenta entre dos?

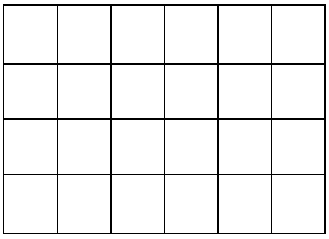
R: A veinticinco.

E: Exacto, esa sería nuestra respuesta correcta [siete veinticincoavos].

Este pasaje permite ver cómo las prácticas culturales pueden facilitar la comunicación de conocimientos o la verificación del aprendizaje, en éste caso en el proceso de simplificación de fracciones.

5.1.9 Ítem 10. Contenido: Fracciones en contexto gráfico

10. Sombrea $\frac{5}{8}$ del total de la siguiente cuadrícula



Los conocimientos necesarios para ejecutar correctamente la indicación del enunciado y con ello emitir una respuesta correctamente son: saber los significados de los conceptos numerador y denominador, y saber generar fracciones equivalentes.

En las respuestas al instrumento II hallamos que siete de los diez alumnos participantes respondieron erróneamente, procediendo como se muestra en la tabla 5.10.

Tabla 5.10. Concentrado de respuestas erróneas al ítem 10

	Argumentación matemática	**Análisis**	**Sentido común**
Estrategias		5/7 Uso del recurso gráfico 1/7 Operar	
Procedimientos	1/7 ajustar cuadricula a la fracción 2/7 sombrear numerador conocido 1/7 generar una nueva cuadrícula 1/7 dividir el cociente 1/7 Sombrear denominador		
Razonamientos	3/7 hacer algo 1/7 hacer una nueva partición 1/7 los decimales son fracciones equivalentes		
Microgénesis			
Proceso			

Como se aprecia en el registro, encontramos dos **Estrategias:**

Uso del recurso gráfico. Consiste en generar una representación icónica mental o física a partir de la información que se presenta en el ítem y se acompaña de actos físicos, registrados o no, como medio para dar respuesta al cuestionamiento. Se intenta hacer un entero con la partición indicada en la fracción, para poder representarla según la indicación Esta unidad de referencia a modo se obtiene con los ***Procedimientos:***

A) Ajustar cuadrícula a la fracción. Se trazan líneas demarcando una unidad partida en ocho partes (ocho cuadritos enmarcados dentro de la cuadrícula) y se sombrean cinco.

B) Generar una nueva cuadrícula. Partir la cuadrícula en ocho partes iguales trazando una línea vertical central acompañada de dos líneas verticales con lo que se marcan cuatro partes, posteriormente se marca una línea central horizontal en la cuadrícula. Se sombrean cinco partes de la cuadrícula original.

C) Sombrear un numerador conocido. En la cuadrícula conocida se sombrea el número de partes que incida el numerador de la fracción del enunciado.

D) *Sombrear el denominador*. Delimitar una unidad integrada por ocho piezas de la cuadrícula, sombrear las ocho partes.

Operar Comprende la aplicación de operaciones aritméticas como un acto mecánico poco reflexivo. En este intento se procura encontrar un número equivalente al numerador. El número requerido se obtiene desarrollando el ***Procedimiento:***

A) Dividir el cociente. Se formula una división con el numerador como dividendo y el denominador como divisor, se ejecuta la división, el cociente decimal se convierte en el numerador de la fracción equivalente y se sombrea en la cuadrícula.

El despliegue de los procedimientos exhibidos fue asistido por los **Razonamientos:**

A) *Hacer algo*. Conviene responder todas las preguntas, por lo que, de no conocer el procedimiento adecuado, se debe hacer algo que involucre los datos del enunciado.
B) *Hacer una nueva partición.* Dado que en la resolución del problema se involucra una fracción equivalente, se debe hacer una nueva partición con la cuadrícula que guarde relación equivalente con el denominador de la fracción referida en el enunciado.
C) *Los decimales son fracciones equivalentes.* Debido a que en la resolución del problema se percibe la necesidad de hallar un número equivalente a la fracción, se obtiene un número decimal proveniente de la fracción de referencia.

Del análisis de todas estas partes de las respuestas notamos dificultades con la generación de fracciones equivalentes.

Microgénesis

La exploración por los conocimientos de los alumnos nos facilitó la localización del punto de inflexión, en sus procedimientos, que los llevó a responder de manera incorrecta. Los cinco procesos mostraron dificultad para crear fracciones equivalentes aun conociendo los denominadores. A continuación un segmento de la narración de Miguel (ver Anexo 5, Miguel) como ilustración:

E: ¿Quieres saber? Pues ya qué, ¿no? Ya estamos en esto… ¿Qué quiere decir esto, qué significa este número de abajo, no por ser ocho sino por estar en el lugar de abajo?
M: Ah, el denominador.
E: ¿Qué significa denominador? No cómo se llama. ¿Qué significa llamarse denominador?
M: El número de…

E: De partes…

M: Que tiene la figura.

E: ¡Excelente! El número en el que dividimos nuestra figura, nuestro entero. Y aquí tenemos una figura [señala la cuadrícula] y estos mal intencionados del examen la partieron en muchas partes, porque no la partieron en…

M: En ocho.

E: Entonces la partieron en [hace conteo de los cuadros a los lados de la cuadrícula] una, dos, tres, cuatro. Por uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis.

M: Cuatro por seis veinticuatro.

E: Veinticuatro. Entonces fíjate. Tenemos una fracción inicial 5/8 que la queremos convertir en una fracción equivalente ¿de acuerdo? No sabemos todavía cómo, ni cuál nos va a quedar, pero un buen punto de partida es ver en cuánto partieron esto. Ya contamos, ya nos dieron la primera parte, ahora necesitamos saber por qué número multiplicaron esto o por qué número tenemos que multiplicar para llegar a la fracción equivalente. Porque no tenemos que sombrear cinco ¿o sí?

M: Mmm

E: Tenemos que sombrear algo que sea equivalente a cinco y ¿Cómo demonios vamos a saber eso? A ver ¿Qué número será conveniente, por qué número será conveniente multiplicar al 8 para llegar al 24?

M: ¿Cómo [se distrajo]?

E: ¿Por qué número tenemos que multiplicar al ocho para llegar al veinticuatro?

M: Ah, por el 8 por…

E: ¿Uno?

M: No.

E: ¿Por dos?

M: Tampoco.

E: ¿Por tres?

M: Tampoco.

E: A ver, dímelos. Ocho por uno…

M: Ocho por uno ocho, ocho por dos dieciséis.

E: Ocho por tres cincuenta y siete. Ocho por cuatro ¡no! ¿verdad? ¿Ocho por tres?

M: Veinticuatro.

E: ¿Con eso alcanza?

M: Sí.

E: ¡Ya! Bueno, ¡qué complicado! Por tres. ¿Por cuál vas a multiplicar al cinco?

M: Para que dé… cuatro.

E: No. Fíjate, queremos hacer una fracción equivalente.

M: Por tres.

E: Porque lo que le hacemos al de arriba le hacemos al de abajo ¿no? Entonces ¿Cuántos cuadritos teníamos que haber pintado?

M: Quince.

E: ¡Quince! tan, tan. Ya terminamos.

M: ¿O sea que teníamos que buscar un número equivalente? Bueno teníamos que sacar una fracción equivalente.

E: Tenías que sacar una fracción equivalente, y ya. Eso es todo Miguel Ángel, pues te agradezco.

Pese a atravesar por procesos tan complicados como este tanto para el alumno como para la entrevistadora, quien marcó el derrotero de la charla, notamos que en los casos recuperados de las entrevistas se posibilitó la identificación de los requerimientos de resolución del problema, la producción de la fracción equivalente y, con ello llegar a la respuesta correcta.

Quizá convenga comentar en este apartado que el ejercicio realizado en la entrevista no es una intervención propiamente, entre otras razones porque no hay un diagnóstico previo respecto de las dificultades de aprendizaje. Se trata de una exploración retrospectiva en la zona de desarrollo proximal, auxiliada por los procesos de pensamiento que ocurren entre ambos participantes y al interior del alumno, en la que se intenta localizar el desvío del alumno en el desarrollo del proceso de resolución. Como se observa en el diálogo, también se procuró llevar al entrevistado a la respuesta correcta recuperando los aprendizajes que ya ha incorporado a su desarrollo cognitivo.

5.1.11 Ítem 11. Contenido: Aritmética del reloj

11. Teresa quería grabar 5 canciones en un casete. El tiempo de duración de cada canción se muestra en la siguiente tabla:

Canción	Duración
1	2 minutos 41 segundos
2	3 minutos 10 segundos
3	2 minutos 51 segundos
4	3 minutos
5	3 minutos 32 segundos

Calcula el total de tiempo necesario para grabar las cinco canciones, escribe tu respuesta redondeando el total a minutos y anota cómo realizaste el cálculo.

Respuesta: ____________________________

Emitir una respuesta dentro del rango adecuado para este reactivo implica que el alumno sepa ordenar los números por su valor posicional para sumar correctamente. Por otro lado, saber que los minutos se forman con sesenta segundos, y saber dividir.

Uno de los diez participantes respondió fuera del rango aceptable. La línea de pensamientos involucrados en la respuesta errónea se registró en la tabla 5.11:

Tabla 5.11. Concentrado de respuestas erróneas al ítem 11

	Argumentación matemática	**Análisis**	**Sentido común**
Estrategias		1/1 Operar	
Procedimientos	1/1 Sumar y multiplicar		
Razonamientos	1/1 reducir datos para calcular		
Microgénesis			
Proceso			

El análisis arroja que Ricardo (ver anexo 5, Ricardo) echó mano de la ***Estrategia:***
<u>Operar</u> Comprende la aplicación de operaciones aritméticas como un acto mecánico poco reflexivo. Para el caso consiste en producir datos a partir de la información dada en el problema. La producción se logra con el ***Procedimiento:***

A) Sumar y multiplicar. El este procedimiento se suman todos los datos de la tabla que aparece en el enunciado del problema sin cuidar el orden de magnitud. El dato resultante se multiplica por el número de canciones que se grabarán. A continuación la explicación de Ricardo (ver anexo 5, Ricardo):

> E: […] tu respuesta fue de 57 minutos con 85 segundos ¿Cómo supiste la respuesta?
> R: Primero los sumé.
> E: ¿Todos los segundos?
> R: Sí, minutos y segundos.
> E: Minutos y segundos. Ok.
> R: Luego los multipliqué por el número de canciones: 5.

En el análisis de la charla se percibe un descuido con la ordenación de los números al sumar, lo que podría derivar de una dificultad con el orden de magnitud.

Favoreció el desarrollo de este proceder el ***Razonamiento***:

A) Reducir datos para calcular. Se necesita hacer un cálculo con el promedio de duración de las canciones y el número de canciones que se quiere grabar, por lo que es necesario sumar la duración de las canciones.

Consideramos que el desarrollo del análisis a las entrevistas, del que se da cuenta en este capítulo, proporcionó la información necesaria para responder la pregunta que guió la investigación. Así mismo, consideramos que las narraciones de los estudiantes aportaron suficiente material para alcanzar los objetivos propuestos en el capítulo uno.

Los resultados del trabajo desarrollado en este estudio, los hallazgos realizados a través de las categorías de análisis y las respuestas a las preguntas planteadas inicialmente, se reportan en el siguiente capítulo.

6. No está en los genes. Una mirada a la cultura.

Existen diversas razones por las que un alumno puede responder incorrectamente un problema o una pregunta en un examen. Algunas van más allá de la ausencia de conocimiento, por ejemplo la influencia de las actividades cotidianas que evocan los problemas hipotéticos o una situación emocional desfavorable. Otras tienen que ver con la falta de destreza en la realización de operaciones o en la elección de estrategias, y el aprendizaje erróneo de conocimientos.

El siguiente apartado da cuenta del impacto que ocasionó en nosotros explorar, con nuestros recursos de investigación, los procesos mentales implicados en la elección de una opción incorrecta o en la emisión de una respuesta errónea a los reactivos de un examen con el que se pretende medir el aprendizaje de alumnos expuesto a un currículum. Tal impacto se traduce en aprendizaje de lo que debemos hacer y cómo hacerlo.

6.1Lecciones aprendidas: La esclarecedora retroalimentación.

Nuestra investigación desarrollada con el propósito de hallar explicaciones al rendimiento obtenido en la aplicación del TIMSS-1995, concluyó con la aplicación de un cuestionario integrado por once reactivos a diez estudiantes de secundaria, a quienes inmediatamente de resolver el examen se les hizo una entrevista a propósito de sus yerros. Como se expuso en el capítulo anterior, la información contenida en las narraciones de los estudiantes acerca de la resolución errónea de los reactivos se analizó detenidamente.

El resultado del análisis nos dejó una experiencia valiosa sobre la manera en que elegimos desarrollar las entrevistas. Conviene aclarar que además de entrevistar a los alumnos para obtener información sobre sus procesos mentales en la resolución errónea de los reactivos, dada la metodología empleada [descrita en el capítulo 4], nos interesaba evitar se quedaran con la falsa idea de haber emitido una respuesta correcta. La manera en que decidimos evitar reforzar el falso cognado fue acompañándoles a encontrar la respuesta correcta, recurso que en trabajos futuros podría mejorarse.

De acuerdo con la retroalimentación respecto al desarrollo de las entrevistas, mostramos el desempeño que logramos con cada participante en cada uno de los reactivos, así como nuestros hallazgos, particularmente con la corrección de falsos cognados una vez localizado el punto de inflexión. La tabla de respuestas al examen II (ver tabla 6.1) muestra los desaciertos [y los aciertos en blanco] de cada alumno y lo que pudimos hacer durante la entrevista con cada uno de ellos.

Participantes	Reactivos										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Atilio			/3~>+			/3~>+		/3~>+	3~>+	/3~>+	
Cuauhtli	/3-<		3~>+			/3~<		/3~>+	/3-<	/3~>+	
Eduardo	/3-<	3-<	3-<		3-<	/3-<	/3~<	3-<	/3-<	/3-<	
Fernanda	/2-<		3-<	2-<		/3-<	3~>=	3~>+	/3-<	/3~>+	
Gabriela				3~>+		/3>~+	3CeC	3~>+	3CeC		
Gerardo	/3-<	3-<	3-<	2-<	3-<	/3-<	/3-<	/3~>=	/3-<	3~>+	
Héctor				3~+		/3~>+			3CeC		
Miguel		3~>+	3~>+	2~>+	2~>=		/3CeC		/3CeC	/3~>+	
Ricardo		3~>+	3~<			/3-<	/3-<	3~>+	/3~>+	/3-<	3-<
Zoe	/3~>+	3-<	3-<		/3-<	/3~<	/3~>+	/3~>+			

Tabla 6.1. Respuestas al instrumento II: examen con 11 preguntas.
Nomenclatura: /3, /2 categorías de respuesta de Sentido común, 3,2 categorias de respuesta de Argumentación matemática, ~Se encuentra punto de inflexión, **-** No se encuentra punto de inflexión, **>** Se intenta llevar a microgénesis, **<** No se intenta llevar a microgénesis, **+** Hay cambio positivo,=Hay cambio pero no positivo, **CeC** Corrige errores de cálculo.

Atilio por ejemplo respondió erróneamente los reactivos 3, 6, 8, 9 y 10. Durante la charla sostenida con él fue posible identificar el punto de inflexión en todos sus procedimientos y acompañarlo, en el proceso microgenético, a localizar la respuesta correcta. El cambio en su proceso fue positivo, pues además de llegar al acierto corrigió un falso cognado o una idea equivocada.

Eduardo, en cambio, pasó por una entrevista muy complicada para él (y para mí). Como se puede observar en la tabla 6.1, tuvo un acierto. De los diez desaciertos sobre los cuales hicimos la entrevista, sólo en su respuesta al reactivo siete pudimos localizar el punto de inflexión, pero dado su estado de nerviosismo desistimos llevarlo al proceso para encontrar la respuesta correcta. El resultado final con Eduardo fue la imposibilidad de acompañarlo en ese momento a localizar la respuesta correcta y a corregir sus conocimientos equivocados.

Miguel representa un caso alejado de los extremos en los que se ubican Atilio y Eduardo. En el desarrollo de su entrevista localizamos reactivos en los que se identificó el punto de inflexión con lo cual logramos, a través del proceso microgenético al que lo llevamos, cambios en sus procesos mentales. A este respecto es importante decir que si bien en la mayoría de los procesos el cambio fue positivo, hubo un proceso que tomó otra dirección a la correcta. También localizamos en la explicación a dos reactivos que el mero cuestionamiento acerca de la manera en cómo llegó a la respuesta emitida, le llevó a percatarse de que había operado incorrectamente y a corregir de inmediato sus cálculos.

Fernanda, por su lado, puso en evidencia la dificultad para localizar el punto de inflexión en sus respuestas pese a la colaboración que mostró durante la entrevista.

En término generales podemos decir que debemos tener disposición y paciencia para escuchar a nuestros estudiantes, evitar en la medida de lo posible conducir sus respuestas a expresiones que den argumento a nuestros supuestos, y tener siempre presente que describir un fenómeno requiere que estemos dispuestos a dejar a un lado nuestros referentes y valores para comprender la visión del otro en su contexto cultural.

Desde esta perspectiva reflexionar sobre los desaciertos no es suficiente para reconocer las deficiencias en el aprendizaje. Analizar en retrospectiva los procesos mentales, en cambio, abre un horizonte de posibilidades entre las que se encuentran las explicaciones al rendimiento escolar y las rutas de trabajo por las que se puede transitar para enmendar los yerros en el aprendizaje.

Igualmente, queremos compartir que el esfuerzo invertido en localizar el punto de inflexión puede retribuir al docente en el avance en la formación de sus estudiantes, con lo que prepararlos para un examen será apenas una pálida sombra comparado con el aprendizaje de conocimientos que les permitirán responder exitosamente cualquier evaluación. A este respecto se puede observar en la tabla 6.1 que, cada vez que localizamos un punto de inflexión y pudimos llevar al joven al proceso microgenético, obtuvimos cambios positivos en relación con los procedimientos para llegar a la respuesta correcta. Lo anterior ocurrió en 31 de los 34 casos en que tuvimos oportunidad de dar acompañamiento.

Excepto en 2 reactivos, pudimos encontrar las estrategias, los procedimientos y los razonamientos involucrados en la elección de una opción incorrecta o la emisión de una respuesta errónea. En la tabla 6.1 tal información se puede localizar con los números 2 o 3. El número 2 indica que sólo recuperamos la estrategia y el procedimiento, en tanto el número 3 indica que localizamos estrategia, procedimiento y razonamiento. Cuándo el número precede la diagonal , /3, quiere decir que el alumno acudió a su sentido común para resolver el reactivo. Cuando el número se encuentra sin la diagonal significa que acudió a la argumentación matemática.

De los 68 desaciertos con los cuales trabajamos, 37 fueron respondidos acudiendo al sentido común. Como lo hemos comentado, el sentido común en esta investigación tiene que ver con las prácticas cotidianas y los aprendizajes equívocos o en proceso que los estudiantes logran tanto en el contexto escolar como en el extraescolar, de modo que en el sentido común hay conocimiento matemático que no puede emplearse como argumentación para resolver problemas de manera adecuada. El resultado de la investigación permite ver una tendencia a responder aún sin recursos sólidos para hacerlo. El resto de los reactivos fue respondido empleando argumentación matemática adecuada con algún tropiezo en el procedimiento. Mi impresión sobre estas maneras de responder, excluyendo de toda responsabilidad a mi comité tutoral, es que cualquier duda cognitiva del docente comunicada a los estudiantes, aun sin que ellos tomen conciencia inmediata del hecho, da lugar a una explicación basada en el sentido común del alumno, razón por la cual la argumentación matemática se debilita ante el sentido común.

En el siguiente apartado presentamos la argumentación que con base en los hallazgos de la investigación, y desde nuestro punto de vista, responde tanto la pregunta de investigación como los cuestionamientos subyacentes. En la elaboración de los argumentos acudimos a la guía teórica expuesta en el capítulo 3: Voces lejanas, ideas presentes.
Los resultados se presentan como respuesta a los cuestionamientos inscritos en el capítulo uno.

6.2 Respuestas.

En este apartado se responden la pregunta de investigación y las preguntas generadoras. La argumentación para cada una se presenta en el orden en que se produjeron los hallazgos en las narraciones de los participantes.

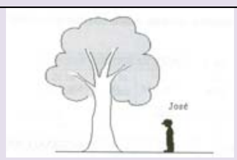
6.2.1 La pregunta de investigación.

¿A qué se deben las respuestas erróneas de alumnos mexicanos al examen del TIMSS? Se respondió a través del trabajo desarrollado para alcanzar los dos objetivos de investigación planteados. La tabla 6.1 contiene el concentrado de los hallazgos en relación con las categorías de análisis Estrategias, Procedimientos y Razonamientos, clasificadas de acuerdo con las dos categorías de respuestas construidas: Argumentación matemática y Sentido común.

Como se observa en la tabla 6.2 se alcanzó el primer objetivo:

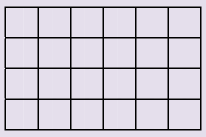
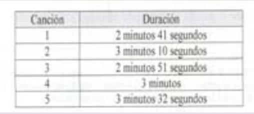
Identificar las estrategias, procedimientos y razonamientos que lleva a cabo el alumno para la elección de una respuesta incorrecta.

A través del análisis fue posible identificar con cierta profundidad las estrategias, los procedimientos y los razonamientos que los estudiantes emplean para responder un reactivo y los yerros en su aplicación con los que producen respuestas erróneas ante un problema o elecciones incorrectas entre los reactivos de opción múltiple.

Reactivos	Estrategias	Procedimientos		Razonamientos	
		Argumentación matemática escolar	Sentido común	Argumentación matemática escolar	Sentido común
 1. José tiene 1.5m de estatura. Aproximadamente ¿Qué altura tiene el árbol? A) 4 m C) 8 m B) 6 m D) 10 m	-Uso del recurso gráfico		-Trazar una línea del niño al árbol. -trasladar medida con los dedos -Observar y calcular.		-Ajustar la percepción visual a una opción de respuesta. -Validar la percepción por evocación de la realidad. -El árbol es más o menos el doble del niño.
2. ¿Qué número tiene cinco centenas, cuatro unidades y siete décimos? A)54.7 C) 547 B)504.7 D) 5004.7	-Reconocimiento de patrones -Aplicación de reglas y algoritmos	-Correlación entre los números que aparecen en las opciones y las cifras nombradas con las posiciones en el enunciado.	-Evocar sistemas figurativos.	-Asociar las cifras mencionadas con las cifras escritas en las opciones, sin incluir el cero por no mencionarse.	-Asociar las cifras nombradas en el enunciado del ítem con los sistemas figurativos evocados.
3. Si el precio de un producto aumenta de 60 centavos a 75 centavos ¿Cuál es el porcentaje de incremento en el precio? A)15% C) 25% B)20% D) 30%	- Operar -Aplicación de reglas y algoritmos	-Dividir la base por algún número. -Calcular diferencia entre 60 y 75 y decidir tomarla como porcentaje. -Sumar a la base los números que faltan para obtener el monto, localizada la cantidad faltante elegir la opción	-Construir una regla de tres con los datos disponibles.	-Obtener un dato para verificar opción. -La diferencia de centavos corresponde al porcentaje de incremento.	-El porcentaje es una parte proporcional de la base y este se obtiene mediante regla de tres.
4. Cuál de los siguientes números representa al número 89.0638 redondeado a centésimos? A)100 D) 89.06 B) 90 C) 89.064 D)89.1	- Aplicación de reglas y algoritmos	-Migrar a la unidad de orden superior inmediata. -Migrar a decena. -Migrar a décimos.		-Lectura rápida.	

5. Divide $\frac{8}{35} \div \frac{4}{15} =$ Respuesta: ______________	-Operar -Ensayo y error	-Multiplicar numeradores y denominadores. -Operaciones diversas.		-Hay más de una operación.	
6. ¿Qué número es el más grande? A) $\frac{4}{5}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{5}{8}$ D) $\frac{7}{10}$	-Reconocimiento de patrones -Uso de recurso gráfico	-Localizar fracción con dígitos de mayor valor [eliminación y orden]. -Localizar numerador menor. -Localizar denominador menor. -Localizar denominador mayor. -Hacer representación icónica [mental].		-Los números más grandes corresponden a la fracción mayor. -Relación inversa: a numerador menor fracción mayor. -Relación inversa: a denominador menor fracción mayor. -Relación directa: a denominador mayor fracción mayor. -Comparar imágenes.	
7. La familia Martínez utiliza cerca de 6000 L de agua por semana. Aproximadamente, ¿Cuántos litros de agua usarán por año? A) 30 000 D) 2 400 000 B)240 000 E) 3 000 000 C)300 000	-Operar	-Gasto semanal por semanas Gasto semanal por días del año.			-Obtener número de semanas. -Asociar un número al año.
8. Dos cajas contienen piezas cuadradas de cartulina para construir un modelo más grande. Hay 4 pequeños cuadros en cada pieza. Todas las piezas de la caja 1 son de esta forma  Todas las piezas de la caja 2 son de esta forma  Para formar el modelo, por cada pieza de la caja 2 debe haber 2 piezas de la caja 1. Construido el modelo ¿Qué fracción de los cuadros pequeños será de color negro? Respuesta: ___________________	-Operar -Uso de recurso gráfico	-Contar los cuadros negros. -Armar una fracción. -Elegir un número. -Seguir instrucciones.		-Observar la partición de la pieza. -Responder algo. -Cuadritos en cuadros.	-Hacer analogía

<table>
<tr>
<td>9. Escribe 0.28 como una fracción reducida (simplificada)

Respuesta: ____________________</td>
<td>-Operar
-Reconocimiento de patrones</td>
<td>-Comparar saberes.
-Reducción parcial.
-Interpretar significados.</td>
<td>-Recorrer, bipartir y armar.
-Cambiar punto por línea.
-Operar con los datos.</td>
<td>-Evocación de reglas
-Ajustar datos
-Equivalencia de signos
-Reducir una vez
-Seguir instrucciones
-Aplicar procedimientos
-Responder todo.</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>10. Sombrea $\frac{5}{8}$ del total de la siguiente cuadrícula
</td>
<td>-Operar
-Uso de recurso gráfico</td>
<td>-Ajustar cuadricula a fracción.
-Sombrear numerador conocido.
-Generar una nueva cuadrícula
-Dividir el cociente.
-Sombrear denominador.</td>
<td>-Preguntar al compañero.</td>
<td>-Hacer algo.
-Hacer una nueva partición.
-Los decimales son fracciones equivalentes.</td>
<td>-Alguien sabe</td>
</tr>
<tr>
<td>11. Teresa quería grabar 5 canciones en un casete. El tiempo de duración de cada canción se muestra en la siguiente tabla:

<table>
<tr><th>Canción</th><th>Duración</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2 minutos 41 segundos</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3 minutos 10 segundos</td></tr>
<tr><td>3</td><td>2 minutos 51 segundos</td></tr>
<tr><td>4</td><td>3 minutos</td></tr>
<tr><td>5</td><td>3 minutos 32 segundos</td></tr>
</table>
Calcula el total de tiempo necesario para grabar las cinco canciones, escribe tu respuesta redondeando el total a minutos y anota cómo realizaste el cálculo.

Respuesta: _______________</td>
<td>Operar</td>
<td>-Sumar y multiplicar.</td>
<td></td>
<td>-Producir datos para calcular.</td>
<td></td>
</tr>
</table>

Tabla 6.2 Concentrado de categorías

Conviene recordar que la investigación parte de los desaciertos para rastrear las causas que los producen, por esta razón aunque las tácticas que se presentan en las clases asociadas a cada categoría suelen ser consideradas correctas en un procedimiento matemático adecuado, todas las que se presentan mostraron algún defecto en su uso pues todas produjeron desaciertos.

6.2.1.1 Estrategias

Se trata de una idea general que el alumno supone le proporcionará vías para resolver un problema o una pregunta. Así, la estrategia se puede entender como el encadenamiento de decisiones o reglas tomadas sobre el problema expuesto, en el planteamiento de un reactivo, con el propósito de resolverlo. Las reglas que se resuelve emplear o las decisiones implicadas en la estrategia dependen de la manera en que el alumno interpreta la información contenida en el enunciado del problema y de sus aprendizajes.

En esta categoría de análisis encontramos que los estudiantes emplearon estrategias de las siguientes clases:

a) *Operar* Comprende la aplicación de operaciones aritméticas como un acto mecánico poco reflexivo. Como se observa en la tabla 6.1 es la estrategia empleada con mayor frecuencia. Los ítemes que desencadenan su uso son 3, 5, 7, 8, 9, 10 y 11, comparten entre sí datos numéricos cuya operación desarticulada arroja productos a los que difícilmente se asigna significado, en caso que se identifique con qué datos operar. En apariencia la falta de significado obstaculiza verificar o cuestionar lo adecuado de la respuesta.

b) *Uso del recurso gráfico.* Consiste en generar una representación icónica mental o física inapropiada a partir de la información que se presenta en el reactivo. En algunos casos se acompañó de actos físicos, como medio para dar respuesta al cuestionamiento, por ejemplo la traslación de medida con los dedos o el trazo errático de figuras fraccionadas. La estrategia se eligió en la resolución de los ítemes 1, 6, 8 y 10.

La deficiencia de las representaciones elegidas evoca la explicación de Bruner respecto de los sistemas de pensamiento en el desarrollo de la inteligencia, en relación a que en las respuestas erróneas de este ítem se percibe la entrada de los sistemas icónico y enactivo de los alumnos, lo que supone proceso de aprendizajes lentos en relación con el esperado, y posibilidad de ayuda para ellos.

c) *Aplicación de reglas o algoritmos* Corresponde a la toma de una decisión poco reflexiva en torno a la aplicación de reglas o algoritmos en los que podría estar presente una serie de operaciones mentales o aritméticas por desarrollar. Su elección fue motivada por los itemes 2, 3 y 4, que indagan sobre conocimientos del sistema de numeración decimal.

La utilización errónea de esta estrategia se asocia a la inseguridad de los alumnos sobre los conocimientos que poseen y debieran aplicar, lo que genera el uso inadecuado de una regla memorizada.

d) *Reconocimiento de patrones*. En su forma correcta, la estrategia reside en descubrir un criterio de construcción de una serie o la regularidad en los datos. En esta investigación encontramos que se trata de forzar una regularidad en los datos mediante exploración visual, desarrollo de operaciones u ordenamiento de datos. Los ítemes detonantes en este caso fueron 6 y 9, en los que los alumnos además mostraron dificultades con sus conocimientos acerca de los números fraccionarios.

e) *Ensayo y error* Consiste en acercamientos basados en una idea difusa sobre reglas o algoritmos, o ejecución de rutinas, acompañadas de un acto reflexivo insuficiente de conocimientos. El ítem que propició la elección de esta estrategia fue el 5, del cual observamos una interferencia de aprendizaje anterior con un aprendizaje reciente que parece encontrarse en proceso.

6.2.1.2 Procedimientos

Como se explicó en el enmarcamiento teórico, los procedimientos se integran por la serie de pasos o actos a través de los que el estudiante llega a la resolución del problema o a la respuesta de la pregunta que se le presenta. Bruner (1983) propone que los procedimientos provienen de las experiencias vividas por los alumnos de manera que sus mentes construyen representaciones de esas experiencias guiados por su propio conocimiento. La aplicación de los actos elegidos se encuentra vinculada a la estrategia adoptada debido a que su conocimiento y experiencia indican que esa es la idea adecuada y la forma correcta para resolver el reactivo.

Por la estrecha asociación entre los procedimientos y las estrategias, mostramos los tipos de procedimientos identificados a partir de las estrategias erróneas explicadas en el apartado anterior organizándolos de acuerdo a las categorías de respuesta: Argumentación matemática y Sentido común.

a) Procedimientos asociados a la estrategia *Operar*.

a.1) Basados en Argumentación matemática.

1. Dividir datos sin asignar significado.
2. Restar, sumar, multiplicar y realizar operaciones diversas innecesarias.
3. Realizar conteos de unidades sin asociar a contextos, referentes o significados.

Estos tipos de procedimientos suelen ser usados cuando en el enunciado del reactivo aparecen datos numérico que no parecen tener significado para los alumnos, por lo que deciden operar con ellos para producir un resultado que más tarde se asocia a una opción de respuesta.

b) Procedimientos asociados a la estrategia *Uso del recurso gráfico.*

b.1) Basados en Argumentación matemática.

1. Representar imágenes mentales.
2. Hacer conteo sobre imágenes dibujadas.
3. Modificar imágenes para operar con ellas.

Se acude a este tipo de procedimientos ante la incomprensión del enunciado del ítem, para transformar el problema en uno nuevo accesible a su comprensión y sus recursos escolares para resolverlo.

b.2) Basados en el Sentido común.

1. Trazar líneas para aproximar dimensiones.
2. Traslado antropomórfico de medidas (con los dedos).
3. Observar para estimar medida.

En estos tipos de procedimientos los estudiantes acudieron a su experiencia vital aludiendo al conocimiento de actos cotidianos extraescolares, como sus observaciones de cómo otros miembros de la cultura estiman medidas, o de su percepción de los objetos en el medio.

c) Procedimientos asociados a la estrategia *Aplicación de reglas y algoritmos*.

c.1) Basados en Argumentación matemática.

1. Evocar y aplicar reglas de los sistemas figurativos.
2. Construir regla de tres empleando los datos numéricos disponibles sin asociar significados.
3. Aplicar algoritmos en situaciones innecesarias.

En las narraciones de los estudiantes observamos una tendencia a aplicar reglas cuando no se sabe qué operaciones o actos realizar para resolver un cuestionamiento o se intuye la necesidad de un algoritmo. Al parecer, el reactivo detona una evocación de una experiencia vagamente parecida a la que presenta, lo que sugiere al alumno usar algo difuso en su mente, como el aprendizaje del sistema de numeración decimal a través de sistemas figurativos mal aprendido o mal recordado, lo que lleva a errores en la aplicación.

d) Procedimientos asociados a la estrategia *Reconocimiento de patrones.*

d.1) Basados en Argumentación matemática.

1. Asociar significados erróneos a los términos matemáticos para correlacionar posiciones.
2. Ordenar expresiones numéricas de acuerdo con el valor absoluto de los números que las integran.

Los procedimientos detectados parecieran surgir de la intuición de que la configuración del reactivo tiene un orden en la presentación de los datos que encubre la manera de llegar a la respuesta. Ciertamente la insistencia del profesor en leer cuidadosamente la pregunta antes de responderla podría interpretarse como una insinuación de que allí mismo se encuentra la respuesta el procedimiento para llegar a ella, pues es una práctica común que se hagan señalamientos en ese sentido, pero en el caso que nos ocupa la decisión se acerca más a la falta de recursos para resolver.

e) Procedimientos asociados a la estrategia *Ensayo y error.*

e.1) Basados en Argumentación matemática.

1. Exploración de operaciones aplicadas en otro contexto.

Un último tipo de procedimiento empleado es el que surge cuando la aproximación a la respuesta del reactivo se hace intentando operar como se hizo con problemas parecidos (operaciones con la misma clase de números), o en problemas resueltos con la operación inversa (de la suma a la resta, de la multiplicación a la división).

6.2.1.3 Razonamientos

Recordemos que el razonamiento es un proceso de manipulación del conocimiento con objeto de adecuarlo a nuevas tareas (Bruner, 1988) en el que se analiza la información para ordenarla de un modo que permita extrapolarla, interpolarla o convertirla en un recurso para resolver un problema. Para nuestro propósito el razonamiento es una actividad mental en la que se interrelacionan la alfabetización matemática y la realización de actos físicos en la ejecución de una tarea matemática a la que se trae lo aprendido merced a la enseñanza de contenidos o lo aprendido a través de las experiencias en los contextos escolares y extraescolares. En el razonamiento también interviene la descontextualización del significado de los signos, con lo que se pueden hacer abstracciones de otras situaciones para aplicarlas a la que se está resolviendo, en este caso deficientemente realizada.

En esta estrategia encontramos un vínculo entre el tipo de razonamiento y el problema que lo detona, por lo que se presentan en el orden en que aparecen los reactivos aplicados (ver tabla 6.1).

a) Razonamientos asociados al reactivo 1.

a.1 Fundados en Argumentación matemática.

1. Ajustar la percepción visual a una opción de respuesta.
2. Estimar las veces que un objeto contiene a otro.

En estos razonamientos aparece nuevamente la idea de que la respuesta correcta tiene que ser alguna de las opciones del reactivo, por lo que basta con mirar la imagen para decidir por una opción. Aquí la falta de integración de todos los datos del problema, como los datos numéricos, fue la causa del desacierto.

a.1 Fundados en Sentido común.

1. Validar la percepción visual por evocación de experiencia con objetos reales.

La argumentación para validar la elección de la respuesta vino de la exposición cotidiana a los objetos de la naturaleza. De acuerdo con la explicación del alumno los árboles que conoce no pueden medir más de cierta altura, lo que para él, valida su respuesta.

b) Razonamientos asociados al reactivo 2.

b.1 Fundados en Argumentación matemática.

1. El cero no vale por lo que no ocupa un lugar de no ser mencionado.
2. Los nombres de las cifras tienen parecido con algo aprendido con sistemas figurativos.

La adaptación que se hace de conocimientos en este razonamiento muestra saberes fosilizados deficientemente aprendidos en su momento.

c) Razonamientos asociados al reactivo 3.

c.1 Fundados en argumentación matemática.

1. Producir un dato.
2. La diferencia entre datos está asociada con la respuesta
3. Los porcentajes se obtienen mediante aplicación de regla de tres.

Los tipos de razonamiento expuestos indican que los alumnos creen suficiente resolver parcialmente un problema para inferir la solución a partir del primer dato que obtengan. Actuar de esa manera ahorra tiempo. Por otro lado, en el tercer razonamiento denota confianza en la regla de tres para resolver cualquier problema de porcentajes, pese a no saber aplicarla adecuadamente.

d) Razonamiento asociado al reactivo 4.

d.1 Fundados en argumentación matemática.

1. Lectura rápida.

Este razonamiento se usó para justificar la lectura poco cuidadosa del reactivo, aludiendo que la necesidad de economizar tiempo en los exámenes.

e) Razonamiento asociado al reactivo 5.

e.1 Fundados en Argumentación matemática.

1. Hay más de una operación.

Tiene que ver con la falta de seguridad respecto de cómo resolver operaciones con los conocimientos que se poseen y con el recuerdo de cómo se ha procedido en otro contexto.

f) Razonamientos asociados al reactivo 6.

f.1 Fundados en Argumentación matemática.

1. Los números más grandes corresponden a la fracción mayor.
2. Hay una relación inversa en las fracciones: a numerador mayor fracción menor.
3. Hay una relación directa en las fracciones: a numerador mayor fracción mayor.
4. Se puede llegar a la solución comparando imágenes.

Surgen como base de estos razonamientos las reglas enunciadas y los recursos gráficos empleados por los maestros en la enseñanza de las fracciones.

g) Razonamientos asociados al reactivo 7.

g.1 Fundados en Sentido común.

1. Obtener el número de semanas que tiene un año.
2. Asociar un número a los días que tiene un año.

Para resolver el reactivo los alumnos expresaron haber utilizado los conocimientos aprendidos en sus casas respecto de cómo se organiza el tiempo en el calendario, y lo que recordaban de las agrupaciones de días en semanas y meses.

h) Razonamientos asociados al reactivo 8.

h.1 Fundados en Argumentación matemática.

1. Observar la partición de la pieza
2. Organizar cuadritos en cuadros
3. Responder algo

Estos razonamientos se justificaron en el intento de transformar lo que saben acerca de las fracciones a través de imágenes para convertirlo en algo accesible de manipular física o mentalmente, por lo que en los dos primeros se procuró hacer la nueva organización desde la ilustración de las piezas ilustradas en el reactivo.

El razonamiento tres deja ver la imposibilidad de decodificar la información contenida en el ítem, y al mismo tiempo el recuerdo de la consigna de responder todas las preguntas de un examen. Ésta es una muestra del impacto de la cultura escolar en una situación en la que se debería responder con conocimientos matemáticos.

h.2 Fundados en Sentido común.

1. Hacer analogías.

Aquí la justificación también tuvo que ver con la transformación de un conocimiento en algo que pudiese aplicarse a la situación, y con una transformación del problema a algo conocido. El alumno desconoce el significado matemático de la palabra modelo por lo que en la sustitución del significado en el problema la comprensión del planteamiento se entorpece por la falta de sentido. Otra acepción localizada fue el uso de objetos domésticos familiares para representarse el problema, acudió al recuerdo de los mosaicos del piso de su casa.

i) Razonamientos asociados al reactivo 9.

i.1 Fundados en Argumentación matemática.

1. Aplicar reglas.
2. Ajustar datos.
3. Asignar equivalencias a los signos.
4. Seguir instrucciones.
5. Aplicar procedimientos.
6. Responder todo.

Las adaptaciones de conocimientos que vimos en esos razonamientos en general tienen que ver con reglas y procedimientos aprendidos en otros contextos que les parecieron familiares a los que aparecen en el planteamiento del reactivo. Aparece también la falsa idea de que el punto decimal en la escritura de números con expansión decimal es equivalente a la línea de quebrado en las fracciones.

j) Razonamientos asociados al reactivo 10.

j.1 Fundados en Argumentación matemática.

1. Hacer una nueva partición de la figura.
2. Los decimales son fracciones equivalentes.
3. Hacer algo o responder todo.

Los tipos de justificación asociados a este reactivo evidencian la adaptación deficiente de conocimientos anteriores a la reformulación del problema en algo más comprensible como partir la figura en las partes que indica la fracción del enunciado y no en un equivalente como se solicita, o convertir la información numérica en datos reconocibles.

k) Razonamientos asociados al reactivo 11.

k.1 Fundados en Argumentación matemática.

1. Producir datos para calcular.

La justificación para el procedimiento empleado en este reactivo fue la conveniencia de operar y producir resultados con los datos disponibles de acuerdo con lo que se entendió del problema.

6.2.1.4 Proceso microgénetico

El objetivo 2 de esta investigación: “Seguir el proceso microgenético por el que transita el alumno de la respuesta errónea a la correcta”, también se considera cubierto con el proceso de análisis que llevamos a cabo.

Esta investigación, como se explicó en el capítulo tres, es un recurso para mirar en retrospectiva qué hizo el alumno con lo aprendido que lo llevó a una respuesta errónea, a condición de ofrecerle un medio de exteriorización, lo que logramos a través del seguimiento a la pregunta ¿cómo lo supiste?

Del proceso microgenético recuperamos en algunos casos, además de la narración del proceso y el acompañamiento a la respuesta correcta, algunos puntos de inflexión, es decir, el momento en el que el proceso elegido adecuadamente cambia para producir una respuesta equivocada. Dado que los puntos de inflexión se hallaron en la exploración de los conocimientos sobre contenidos específicos, a continuación enlistamos los contenidos en los cuales al parecer es conveniente re-modelar actividades o re-mediar la comunicación de saberes matemáticos..

A) Contenido en los que se localizaron puntos de inflexión correspondientes a la categoría Argumentación matemática.

1. Operaciones con decimales.
2. Conocimientos deficientes del sistema de numeración decimal.
3. Dificultades en la asociación del SND decimal con el sistema monetario.
4. Conocimientos fosilizados que implican resistencia a nuevos conocimientos.
5. Falta de comprensión del significado de los términos matemáticos.
6. Aplicación inapropiada de reglas.
7. Incomprensión de instrucciones derivada de lectura rápida.
8. Dificultad para integrar todas las partes de un problema.
9. Elaboración incompleta de procedimientos.
10. Representación icónica errónea de un problema.

Todos los puntos localizados en los procesos desarrollados por los estudiantes se presentaron cuando aplicaron erróneamente conocimientos, operaciones, o reglas escolares, por lo que los procesos bien llevados hasta ese punto se modificaron y derivaron en la elección de una opción de respuesta incorrecta.

B) Saberes o creencias que propiciaron la localización de puntos de inflexión en la categoría Sentido común.

1. Uso de prácticas realizadas por la comunidad.
2. Dificultades en la asociación del sistema monetario con el sistema de numeración decimal.
3. Apresuramiento en la resolución de la prueba.
4. Conocimiento deficiente de la distribución del tiempo en el calendario.
5. Asignación de significados de la cultura popular a conceptos matemáticos.

Los casos en los que se localizó un punto de inflexión, mostraron que la cultura extraescolar tiene un fuerte impacto en los procesos para responder los reactivos, cuando el conocimiento matemático que se tiene no parece ser suficiente, o cuando el énfasis en realizar ciertos actos como responder rápido y todo el examen, proviene de las prioridades familiares o culturales. Los comentarios de Héctor y Ricardo que se muestran a continuación son un ejemplo de lo anterior:

Héctor explica la razón por la premura en emitir una respuesta.

> H: […], y como primero no lo leí así con calma, yo nada más leí redondeado, entonces por eso lo subí a 64. Pero y redondeado a centésimas sería el D) que sería 89.06.
>
> E: ¿Por qué lo leíste rápido?
>
> H: Para acabar rápido
>
> E: Para acabar rápido y mira, de todos modos…
>
> H: No, y aparte como que me puse nervioso porque lo empecé a leer y no, no sé, me puse nervioso y ya no leí centésimos y entonces me fui con la finta de los milésimos.

E: En situaciones de examen ¿Usualmente te pones nervioso?

H: A veces… A veces en los semestrales

E: ¡Ah! ¿Por qué?

H: Porque, como son más, más preguntas, y como es todo lo que hemos visto, hasta esos seis meses, es este… No sé hay algunas cosas que las estudio pero otras no, y esas son las que luego vienen en el examen. Entonces por eso me pongo nervioso.

Por su parte, Ricardo expone una explicación acerca de su respuesta basada en conocimientos sobre los cuales parece tener duda:

E. ¿Tú sabes cuántas semanas tiene un año?

R. ¿Cuántas semanas tiene un año? Un año tiene 365 días, ¿no?

E. Ajá.

R. Semanas, no.

E. No. ¿Cuántos días tiene una semana?

R. Siete.

E. Y con lo que me acabas de decir, que el año tiene 365 días y la semana 7 días ¿podrías llegar a saber cuántas semanas tiene un año?

R. Sí, ¿no?

E. ¿Sí? ¿Qué harías?

R. Bueno, yo multiplicaría, y si me sale un resultado muy grande hago una división.

Otra muestra de las dudas de Ricardo sobre sus conocimientos puntualiza la importancia que la familia da a la formación aun fuera del sistema educativo.

E. […] Yo creo que aquí tendrías que tener más claridad respecto a cuándo usar una operación y otra. Yo oigo que sabes hacer las operaciones, veo que sabes hacer las operaciones pero de repente no sabes cuál usar ¿no?

R. Es lo que le decía a mi mamá en la mañana, que me apuntara con mi maestra otra vez, porque en un examen luego… Es que sí sé hacer todas las operaciones, pero al momento de efectuarlas me empiezo a poner nervioso y me hago bolas.

Con toda la información expuesta en los apartados anteriores, consideramos estar en condiciones de responder las preguntas generadoras.

6.2.2 Preguntas generadoras

Las respuestas a los siguientes cuestionamientos parten de los resultados del análisis de las narraciones de los estudiantes entrevistados y se apoyan en la argumentación teórica revisada.

6.2.2.1 ¿Por qué Zacatecas difiere porcentualmente tanto de Canadá y Estados Unidos, y del Promedio internacional?

La réplica nos lleva a recordar la visión de Hernández (2008) y Lewontin, Rose y Kamin (1987) respecto de que nuestra herencia genética nos provee de las estructuras neurobiológicas necesarias para aprender, por lo que la razón que justifica las diferencias en la eficiencia para responder al examen del TIMSS 1995 no está en los genes. Una explicación fundada en nuestra investigación apunta a que la cultura en la que nacemos y aprendemos es la responsable del énfasis que damos al aprendizaje de ciertos contenidos y valores respecto de otros.

Ya adelantaba Lerman (2001) en su posicionamiento a favor de las investigaciones culturales en el estudio de los fenómenos de la matemática educativa, que en el aprendizaje, la reorganización cognitiva del estudiante se produce con la influencia de factores sociales, físicos y hasta del contexto, ubicada en las prácticas sociales. Y también lo anticipan Vygotsky y Bruner desde sus constructos. En nuestra investigación encontramos que el desarrollo cognitivo está influenciado por la cultura extraescolar, pero además por una cultura escolar que se separa de la comunicación exclusiva de conocimiento.

La respuesta a la pregunta es: Porque la cultura impacta la elección de las respuestas.

6.2.2.2 ¿Qué elementos en los reactivos producen una variación tan amplia en la distancia porcentual de las respuestas?

Encontramos tres líneas de respuesta:

1) Los elementos culturales que se imbrican en los enunciados que conforman los reactivos. Pese al proceso de adecuación por el que atraviesan las pruebas internacionales para salvar las barreras del idioma, y de la adaptación a contextos familiares para los estudiantes (Solano et al, 1999), aún quedan por revisar las sutilezas que significan las prácticas culturales de la sociedad en la que se aplicarán las pruebas.

2) La incorporación de lenguaje especializado (matemático) desconocido por los estudiantes. Logramos identificar un reactivo en el que la falta de significado que asignar a un concepto matemático implicaba “huecos” en la lectura del problema, por lo que no fue posible resolverlo adecuadamente. El caso es interesante porque trata de conocimientos acerca de fracciones y la manera de resolver problemas respecto de ese tema, sin embargo el concepto “patrón” en la versión en inglés o “modelo” en la versión español parecen haber causado problemas similares, lo cual se reflejó en los puntajes igualmente desfavorables alcanzados tanto en Canadá y Estados Unidos como en Zacatecas y el DF.

3) La cantidad de información contenida en los enunciados de los problemas. Por las narraciones de los estudiantes, dedujimos dificultades para organizar mentalmente información de reactivos que se explican por secciones. En el proceso de resolución apenas incorporaban una parte de información cuando ya habían olvidado otra.

6.2.2.3 ¿Habrá influencia cultural en el bajo perfil registrado?

Atendiendo a toda la información procesada en este estudio consideramos, tal como lo han hecho los investigadores de la línea cultural, que las prácticas culturales que regulan la sociedad influyen en el aprendizaje tanto como el aprendizaje influye en la cultura. Pensamos también que el rendimiento escolar se halla relacionado con la manera en que se presentan los reactivos en los exámenes, más allá de la mera traducción en el caso de evaluaciones internacionales, así como con las prácticas de enseñanza y el entrenamiento para responder pruebas que tanto la cultura escolar como la extraescolar propician.

De esta manera, queremos hacer notar que el bajo perfil no es responsabilidad única y exclusiva del alumno. En sus decisiones intervienen consejos de los padres en relación a no ponerse nervioso en los exámenes, responder todas las preguntas de opción múltiple aunque no se conozca la respuesta, y otras más cercanas a los profesores como responder todo lo que se sabe en una primera etapa de resolución para después dejar el tiempo sobrante a intentar responder lo que no se pudo inicialmente.

6.2.2.4 ¿Cuáles podrían ser las explicaciones a los pobres resultados?

Como se ha sugerido a lo largo de los capítulos precedentes, las explicaciones tienen que ver con las prácticas culturales tanto escolares como de experiencia de vida. En este recuento incluimos:

1. *Las experiencias de vida* que impactan las decisiones por resolver situaciones hipotéticas escolares. Para los alumnos las vivencias cotidianas como las consecuencias de sus actos, por ejemplo llevar el cambio incompleto a casa, las transacciones efectuadas en la calle (Carraher, Carraher y Schlieman, 1991), o el cuidado de los animales domésticos, tienen mayor peso que los procedimientos escolares para resolver un problema.

2. *Las emociones y los afectos.* Comentamos párrafos atrás las recomendaciones que padres y maestros acostumbran hacer a los estudiantes la víspera de un examen. Estas, como expresaron nuestros entrevistados, generan emociones como ansiedad, incertidumbre e inseguridad en algunas ocasiones. Otro sesgo en los exámenes es la rendición de cuentas; con frecuencia en nuestra cultura el resultado por debajo de lo esperado genera una situación familiar en la que el

estudiante puede ser sancionado, castigado o sometido a programas intensivos de regularización como respuesta de los padres a un bajo rendimiento en el examen. Es posible que los padres no sepan, no entiendan o no se interesen en comprender el significado de las respuestas erróneas de sus hijos, lo que importa es un rendimiento alto. La razón que se arguye en estos casos es que la única obligación de los hijos en edad escolar es ir a la escuela y por ello rendir buenas cuentas. La práctica cultural es que los hijos, en general, tienen que colaborar en las labores domésticas, en la crianza de hermanos más pequeños y en otras ocasiones incluso contribuir económicamente al ingreso familiar, con lo que "la única" obligación suele ser la más importante, pero no la única.

Los afectos por otra parte también ejercen influencia en los estudiantes pues es frecuente que traten de resolver problemas a partir de conocimientos con los que se sentían cómodos en el pasado por haberles resultado eficientes, la evocación de los sistemas figurativos puede ser un ejemplo de ello. El afecto a la autoridad es otro factor de influencia, en la evocación de reglas vimos cómo los alumnos suelen aplicarlas porque lo dijo su profesor de tal o cual grado.

3. Dificultades en la comunicación de conocimiento. La adquisición del lenguaje matemático, aun mediada por la experiencia escolar, necesita ajustes en la comunicación de conceptos por parte del maestro quien es el encargado de facilitar al alumno la creación de relaciones de significado con las nociones por aprender y su desarrollo de nuevas formas de comunicación acordes con la materia (Linaza, 2007). En las narraciones de los alumnos encontramos dificultades para expresar términos matemáticos y asociarlos con números, posiciones, o ideas.

   También localizamos dificultades para responder preguntas en situación de prueba. El habla espontánea en el aula tiene la intención de comunicar y se apoya del uso de contextos, mientras el habla o la comunicación en un examen exige al alumno procesar la información de manera que produzca expresiones lingüísticas quitando los apoyos intencionales y contextuales (Cole, 1999). Los entrevistados mostraron problemas para comunicar sus ideas respecto a la toma de decisiones en el desarrollo de sus procedimientos, algunos apenas mencionaban qué intentaron hacer dejando en el vacio la razón para hacerlo.

4. Dificultades en la descontextualización. Bruner (1983) explica que descontextualizar los signos y los significados es importante porque permite al sujeto aplicarlos en otros contextos distintos a aquel en que fueron aprendidos. En este trabajo hallamos ejemplos en lo que la falta de descontextualización causó respuestas erróneas, como la aplicación de reglas en reactivos con contextos similares a aquellos en que se aprendió la regla, sin ser esto necesario. Igualmente encontramos dificultad para descontextualizar los porcentajes de la partición del número cien o del peso en cien partes iguales, cuando se resolvió el problema 3 donde la base para calcular el porcentaje son sesenta centavos.

5. Falta de conocimiento y falta de comprensión. Por último incluimos la falta de conocimientos para resolver un reactivo y la falta de comprensión del planteamiento del problema.

Las respuestas a las interrogantes que hemos expuesto en este capítulo dieron origen a algunas sugerencias para trabajar en el aula, mismas que hemos reservado para el capítulo final.

7. Enseñar-Enseñador

La tarea consistía en decir cuál es el objeto con el que se realiza la acción. Josué escribió sobre las líneas: Lavar lavadora; Licuar licuadora... Retratar tractor. Concluido el trabajo, la supervisión de su madre desencadena el siguiente diálogo:

M. ¿Por qué escribiste eso?

J. Porque tractor es la cosa que más se parece a retrato.

M. ¿Qué, nunca te han tomado un retrato?

J. No.

M. Un retrato es como una foto ¿nunca te han tomado una fotografía?

J. Sí, pero me las toman con una cámara[2].

Josué. 8 años.

Esta imagen recuperada de la práctica privada me pareció un nítido reflejo de situaciones escolares en las que los profesores creen haber comunicado adecuadamente los saberes culturales que la sociedad considera dignos de ser aprendidos, cuando en realidad no se tiene claro qué se comunicó.

Los resultados de nuestra investigación sugieren la posibilidad de proponer ideas para re-modelaciones de algunas tareas cognitivas en el aula y que el nuevo modelado de la

[2] Retrato (del latín *retractus*) Pintura o efigie principalmente de una persona. Fotografía (de *foto* y *grafía*) Arte de fijar y reproducir por medio de reacciones químicas, en superficies convenientemente preparadas, las imágenes recogidas en el fondo de una cámara oscura (RAE, 23ª edición).

actividad se aproveche para hacer una re-mediación en la enseñanza, es decir, mediar de una manera diferente (Cole, 1999) la transmisión de conocimiento aprovechando, de ser posible, el espacio mental que ofrece la zona de desarrollo próximo.

Las sugerencias que proponemos en los siguientes apartados fueron inspiradas en el uso erróneo de estrategias, con las cuales los alumnos llegaron a respuestas incorrectas. Por ello presentamos la sugerencia asociada a la estrategia que le dio origen.

7.1 Sugerencias didácticas.

Reconocemos la capacidad de los profesores para comunicar saberes y crear contextos a través de los cuales los alumnos acceden al conocimiento curricular que se espera aprendan en los procesos de escolarización. Sin embargo a lo largo de esta investigación notamos que, aun con todo el despliegue didáctico del docente, el acceso al saber puede estar salpicado de pequeñas barreras de lenguaje y prácticas que entorpecen el aprendizaje e inciden en el rendimiento de los estudiantes.

Las dificultades en la elección o aplicación de un procedimiento, los razonamientos equívocos y la incomprensión de ideas o conceptos son algunos elementos que detectamos tras el uso inadecuado de alguna de las estrategias analizadas en este trabajo. Cada una de ellas: Operar, Uso del recurso gráfico, Aplicación de reglas o algoritmos, Reconocimiento de patrones y Ensayo y error, nos llevan a hacer una sugerencia susceptible de ser tomada en consideración durante la planeación didáctica de los profesores.

a) Asociada a la estrategia Operar.

1. Fortalecer la asignación de significados a los datos numéricos que aparecen en el planteamiento de problemas, así como a los resultados de las operaciones entre los datos. Por ejemplo llevar al alumno a reflexionar en el significado del cociente de la división días del año por días de la semana.

Notamos en varias respuestas que la ausencia de significado pospone la reflexión del estudiante sobre el sentido y la pertinencia que pudiese tener la respuesta que emite.

b) *Asociada a la estrategia Uso del recurso gráfico.*

1. Mayor exposición a actividades como operar sin representaciones de imágenes. Los alumnos entrevistados mostraron tener un apego importante a las imágenes visuales como recurso de representación mental de las fracciones, lo que refleja una estancia prolongada en lo que Bruner llama sistema de pensamiento icónico. Una causa de ello podría ser la exposición intensiva al trabajo con imágenes en la enseñanza de ese contenido por lo que, con base en la teoría bruneriana, sería conveniente exponer al alumno a un número mayor de actividades en las que se pueda operar con fracciones sin necesidad de acudir a la representación gráfica como preámbulo a la llegada al sistema de pensamiento simbólico.

c) *Asociadas a la estrategia Aplicación de reglas o algoritmos.*

1. Elección cuidadosa de analogías. En sus narraciones los estudiantes aludieron a diversas reglas aprendidas en la escuela, algunas de ellas fueron evocaciones de sus primeros años escolares como el uso de sistemas figurativos para el aprendizaje del sistema de numeración decimal. Revisamos los sistemas figurativos para iniciar la enseñanza de unidades y decenas en el Libro del niño matemáticas 1° año (SEP, 2001), y encontramos en ellos que intervienen reglas asociadas al uso de código de color, de posición y de cantidad sin que el tamaño de las fichas variara. Nuestros entrevistados recordaron por ejemplo fichas de colores para asociar cantidades: azul para unidades, rojo para decenas, amarillo para centenas sin que pudiesen asociarlo adecuadamente al valor posicional. Consideramos necesario elegir recursos análogos a los contenidos de enseñanza y que éstos favorezcan la comunicación del

conocimiento matemático, para lo que, además de guardar el parecido necesario, conviene que sean familiares al contexto de los alumnos.

Otras reglas mencionadas fueron la aplicación de todos los pasos para resolver el problema, lo que propició resoluciones con operaciones innecesarias, también se refirieron a actos como quitar el último número para redondear. Pensamos que los profesores podrían enfatizar menos el uso de “reglas”, a veces construidas por ellos mismos o por el vox pópuli, a cambio de explicaciones claras sobre las características del sistema.

d) Asociada a la estrategia Reconocimiento de patrones.

1. En las narraciones de los estudiantes entrevistados notamos que acudieron a comparar los números inscritos en el reactivo evocando las comparaciones, hechas en otros cursos, de fracciones con denominador común, por lo que en la comparación de fracciones con denominadores diferentes incurrieron en el intento de forzar un patrón para resolver el problema. Verificamos que los materiales curriculares para primaria contienen estrategias para comparar fracciones y verificar equivalencias, sin embargo, por la forma de proceder de los alumnos participantes consideramos oportuno que el maestro refuerce este trabajo.

e) Asociada a la estrategia Ensayo y error.

1. En las narraciones de los entrevistados localizamos el empleo de operaciones erráticas en las que se nota una interferencia entre el aprendizaje de un conocimiento y el proceso de aprendizaje de otro. Por ejemplo en la resolución de la división de fracciones un alumno realiza las operaciones pertinentes a la multiplicación, y en otro caso el estudiante inicia con el procedimiento adecuado pero adiciona otras operaciones que son propias de la suma de fracciones. Nos parece importante que el maestro pudiese fortalecer las

operaciones con fracciones, atendiendo en especial los puntos de inflexión a partir de los cuales se cometen errores.

f) *Asociadas a todas las estrategias.*

1. Incorporar a la evaluación de los aprendizajes reactivos “complejos”. Notamos en las narraciones de los estudiantes dificultades para organizar mentalmente información de reactivos que se explican por secciones. En el proceso de resolución apenas incorporaban una parte de información cuando ya habían olvidado otra. Tomando en cuenta esta información consideramos conveniente familiarizar a los estudiantes con reactivos como el número 8 que aparece en la tabla 6.1 del capítulo seis.

2. Incluir en las actividades cotidianas espacios para fomentar la correcta lectura de problemas matemáticos.

3. En los ejercicios de resolución de problemas, incluir aquellos cuya respuesta admita respuestas aproximadas, como en los casos de estimación.

4. De naturaleza psicológica. Fomentar la confianza de los estudiantes en las decisiones por la elección de estrategias y procedimientos, con base en la validación de de sus aprendizajes.

5. Uso del lenguaje. Cuidar que el lenguaje empleado en la comunicación de conocimientos curriculares sea adecuado al nivel de desarrollo del estudiante, particularmente con la incorporación de conceptos matemáticos y sus significados.

6. Buscar estrategias para evitar que los alumnos se copien entre sí. En nuestra investigación, con todo el cuidado y rigor empleado por la directora de la escuela

que nos dio acceso para aplicar los instrumentos II y III, detectamos un caso en el que la estrategia de resolución elegida fue *Preguntar al compañero.*

Una vez admitido el desconocimiento de alguna manera para resolver el problema se procura evadir la vigilancia del aplicador del examen, a continuación se pregunta por la respuesta correcta, y se sombrea el número de partes indicado por el compañero. Miguel Ángel (ver anexo 5, Miguel) explica como lo hizo:

> E. […] ¿Cuántos sombreaste?
> M: Ocho
> E: ¿Por qué?
> M: No sé, eso me dijeron que hiciera.
> E: Ajá! Ya salieron las copias! Por cierto, no van a saber cuánto sacaron ni nada. No es para calificar ni nada.
> M: Ah bueno. Es que, como eso ya no me lo sabía pues les pregunté ¿Cuántos son los que hay que sombrear? Son ocho me dijeron, y bueno…

Pese a que esta situación ocurre en la escuela, la argumentación es parte de la cultura y tiene que ver con la idea de no dejar respuestas pendientes.

7.2 Posibles direcciones de investigaciones futuras. Resultados paralelos.

Nos adherimos a la idea de que en la investigación cualitativa es posible describir más de lo que nos propusimos en el estudio de un fenómeno, a condición de poner todo nuestro esfuerzo en tratar de entender lo que ocurre al interior de cierto grupo cultural. Sobre todo cuando la investigación de desarrolla a partir de referentes culturales.

Loa siguientes apartados son el medio para exponer algunos resultados que se obtuvieron durante la investigación, pero que, por tratarse de casos muy particulares no consideramos conveniente incluirlo en el capítulo anterior. Sin embargo, nos ha parecido que algunos son muy interesantes y apuntan hacia posibles direcciones para emprender nuevas investigaciones.

Como hemos dicho, esta investigación toma punto de partida en las respuestas erróneas. Decidimos centrarnos en este aspecto debido a que para nosotros es importante mostrar que, en ocasiones, existe una lógica aceptable detrás de la elección de una opción errónea (la no esperada como buena desde el punto de vista de los diseñadores) y por tanto, oportunidades para fortalecer los procesos de aprendizaje. En otras palabras, una evaluación que se basa en contar únicamente aciertos puede estar dejando a un lado elementos que dicen más de lo que los estudiantes saben y de cómo entienden y aprenden, información que bien aprovechada puede aportar mucho a los estudiantes y a los maestros.

Sin que éste tópico sea el centro de la investigación, aclaramos que los estudiantes participantes tienen aciertos. A este respecto podemos decir que las respuestas correctas se deben al dominio sobre el conocimiento que los alumnos poseen, pero también especulamos que los aciertos pueden ser producto de una elección acertada sin una argumentación que la fundamente. Nos interesa comunicar que algunos equívocos se deben a factores emocionales, no obstante, como se demostró durante las entrevistas, particularmente durante el proceso que hemos denominado “microgénesis”, los alumnos pueden arribar a la respuesta esperada cuando se les explican términos usados en cada uno de los problemas o se les llama la atención sobre alguna creencia errónea o inexacta.

Un resumen del comportamiento de cada alumno se presenta en la Tabla 7.1, (6.1 en el capítulo 6). En ella es posible observar cuántos reactivos fueron bien respondidos desde el inicio y en cuántos, de los que no, fue posible acompañar a los participantes a corregir pequeños errores en los cálculos o planteamientos e, incluso, los casos en que se pudo detectar el punto de inflexión desde dónde se intentó llevarlos a la respuesta correcta, lo cual se logró unas veces y otras no.

Participantes	Reactivos										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Atilio			/3~>+			/3~>+		/3~>+	3~>+	/3~>+	
Cuauhtli	/3-<		3~>+			/3~<		/3~>+	/3-<	/3~>+	
Eduardo	/3-<	3-<	3-<		3-<	/3-<	/3~<	3-<	/3-<	/3-<	
Fernanda	/2-<		3-<	2-<		/3-<	3~>=	3~>+	/3-<	/3~>+	
Gabriela				3~>+		/3>~+	3CeC	3~>+	3CeC		
Gerardo	/3-<	3-<	3-<	2-<	3-<	/3-<	/3-<	/3~>=	/3-<	3~>+	
Héctor				3~+		/3~>+			3CeC		
Miguel		3~>+	3~>+	2~>+	2~>=		/3CeC		/3CeC	/3~>+	
Ricardo		3~>+	3~<			/3-<	/3-<	3~>+	/3~>+	/3-<	3-<
Zoe	/3~>+	3-<	3-<		/3-<	/3~<	/3~>+	/3~>+			

Tabla 71. (6.1 capítulo 6).Respuestas al instrumento II: examen con 11 preguntas.
Nomenclatura: /3, /2 categorías de respuesta de Sentido común, 3,2 categorias de respuesta de Argumentación matemática, ~Se encuentra punto de inflexión, **-** No se encuentra punto de inflexión, **>** Se intenta llevar a microgénesis, **<** No se intenta llevar a microgénesis, **+** Hay cambio positivo,=Hay cambio pero no positivo, **CeC** Corrige errores de cálculo.

Entre los ejemplos exitosos vale la pena recordar para el reactivo 2 que, en dos de las cinco charlas, fue posible acompañar al alumno en el proceso de ir de una respuesta errónea a la correcta recordando los nombres de las posiciones mediante un esquema. Lo anterior se aprecia en el segmento de entrevista con Ricardo (ver anexo 5, Ricardo):

> E: Entonces aquí tenemos los décimos, aquí tenemos las unidades, y aquí tenemos las decenas [muestra con un esquema la posición de las unidades] ¿Verdad? luego por acá tenemos las centenas y dice que si tenemos 5 centenas 4 unidades y 7 décimos [Coloca en el esquema los números de acuerdo con la posición que les corresponde] ..., [Ricardo expresa sorpresa] ¿Qué pasó? ¿Cuál habría sido?
>
> R: Esta no [actitud pensativa]…
>
> E: Cinco centenas, cuatro unidades, no tenemos decenas, y 7 décimas…
>
> R: ¡Ah! Es la b.

Este proceso se desarrolló tomando como referencia los conocimientos de Ricardo en relación con el punto decimal, en lo que se podría considerar la zona de desarrollo próximo.

Durante las entrevistas, algunos niños se resistían a reflexionar sobre algunos de los problemas. En este sentido, vale la pena destacar el caso de los problemas 8 y 9. Ambos se apoyan en un recurso gráfico y ambos fueron mal respondidos por casi todos los niños, sin embargo, ambos reactivos parecieron prestarse mucho para que los niños aceptaran revisarlos y seguir un proceso de resolución acompañados de la entrevistadora. Cómo se observa en la tabla, el reactivo 8 alcanzó muchos éxitos. ¿Qué podría significar esto?

Cabe resaltar, también, dificultades en contenidos que se esperaría estuvieran superados al final de segundo grado de secundaria: simplificación de fracciones y el sistema de numeración decimal. Como se aprecia en el Anexo 5, los procesos para obtener fracciones equivalentes en varios problemas fueron, en ocasiones, largos y tortuosos. Lo mismo en el caso del trabajo con la escritura de números decimales, donde se observan aún dificultades con el uso del 0.

También fue posible detectar hábitos escolares tales como responder a todas las preguntas, aunque no se tenga idea de cómo resolver el problema; producir o ajustar datos cuando las opciones de respuesta no se ajustan a lo obtenido en sus cálculos. Por ejemplo la decisión de Ricardo:

> 1. E: Y con lo que me acabas de decir, que al año tiene 365 días y la semana 7 días ¿podrías llegar a saber cuantas semanas tiene un año?
> R: Sí, ¿no?
> E: ¿Sí? ¿Qué harías?
> R: Bueno, yo multiplicaría, y si me sale un resultado muy grande hago una división.

También se rebelaron creencias acerca de los reactivos que componen una evaluación, por ejemplo, que las preguntas son capciosas.

En ocasiones se observa que al dar o cambiar el contexto, el proceso para obtener respuestas correctas era mucho más transitable, como cuando se mencionan ejemplos con el sistema monetario para que puedan operar los decimales. A veces el contexto puede obstaculizar el encontrar la respuesta adecuada, como en el reactivo asociado al contenido estimación [del árbol], en el que varios niños tienen un juicio previo en cuanto a lo alto que puede ser un árbol, o cuando los niños dan un significado coloquial a un término como “modelo”, o más sorprendente aún, lo que revela el siguiente fragmento:

> E. Bueno. Vamos a continuar. En la pregunta 9, dice: Escribe 0.28 como una fracción reducida (simplificada). Y tu respuesta es 56 ¿Cómo supiste eso?
> G. Pues, reducida significa como quitarle, y simplificada es sumarle.
> E. ¡Ah! ¿Y entonces qué hiciste para obtener 56?
> G. Sumé 28 dos veces.
> E. ¿Y con eso obtuviste 56?
> G. Sí.

Un resultado muy documentado y que emergió durante las entrevistas fue la poca habilidad de los niños para articular las diferentes partes de un problema. Pueden resolver cada fragmento, pero luego conjugar los resultados les resulta muy complicado. Quizás falte trabajar más este tipo de problemas en la escuela.

Un factor más que actúa en contra de buenos resultados surge del análisis aplicado a los reactivos, por ejemplo en cuanto al tiempo requerido para responder los ítems del examen TIMSS 1995, el IEA considera suficiente un minuto para los de opción múltiple, y dos minutos para los de respuesta breve. Considerando la explicación expuesta emerge la pregunta ¿Es suficiente un minuto para responder un ítem como el anterior con cualquiera de las tres estrategias válidas?

Algún día uno ha de aceptar que hace falta un punto final. Sobre todo si ello da pie a una nueva exploración dirigida en cualquiera de las direcciones que la investigación realizada sugieren. Nosotros elegimos emprender un viaje en el océano de las evaluaciones masivas, de modo que en el futuro podamos ofrecer a nuestros profesores algo de claridad respecto de los resultados con los que se valora su desempeño. Enlace será nuestro siguiente puerto.

Bibliografía

Ahumada, P. (2005). *Hacia una evaluación auténtica del aprendizaje*. Paidós: México.

Amigues, R. y Zerbato-Poudou, M. (2005). *Las prácticas escolares de aprendizaje y de evaluación*. FCE: México.

Ander-Egg, E. (Ed. 1999) *Diccionario de Pedagogía* (2ª.Edición, Vol. 1). Magisterio del Rio de la Plata: Buenos Aires.

Beaton, A., Mullils, I., Martin, M., González, E., Kelly, D., and Smith, T. (1996). *TIMSS Mathematics Items, Released Set for Population 2 (Seventh and Eighth Grades)*. Boston College: USA.

Bell, J. (1999). *Cómo hacer tu primer trabajo de investigación. Guía para investigadores en educación y ciencias sociales*. Gedisa: Barcelona.

Bermejo, V. (2005). *Microgénesis y cambio cognitivo: adquisición del cardinal numérico*. *Psicothema* 2005. Vol. 17, No.4, pág. 559.562. www.psicothema.com 07/01/2011.

Bruner, J. (1983). *El habla del niño*. Paidós: Barcelona.

Bruner, J. (1988). *Desarrollo cognitivo y educación*. Morata: Madrid.

Bruner, J. (1990). *Actos de Significado. Más allá de la revolución cognitiva*. Alianza: Madrid.

Bruner, J. (1996). *The Culture of Education*. Harvard University Press: Cambridge, Mass.

Bruner, J. (1999). *La educación puerta de la cultura*. Visor: España

Bruner, J. (2001). *El proceso mental en el aprendizaje*. Narcea: Madrid.

Carraher, T., Carraher, D. & Schliemann, A. (2002). *En la vida diez, en la escuela cero.* Siglo XXI Editores: México.

Casanova, M. A. (1998). *La evaluación educativa*. SEP: México.

Clarke, D. (1997). *Constructive Assesment in mathematics. Practical steps for classroom teachers.* Key curriculum press: USA.

Cohen, L.; Manion, L. & Morrison, K. (2005). *Research methods in education*. Routledge Falmer. USA.

Cole, M. (1999). *Psicología cultural.* Morata:Madrid.

Cooper, B. y Dunne, M. (2010). Mathematics Assessment at key stages two and three: Social class, gerder, equity and national curriculum tests in maths. http://www.nottingham.ac.uk.csme/meas/papers/cooper.html 10/03/2011.

Diaz-Barriga, A. (2007) La era de la evaluación en la educación mexicana. La gestión de un sistema burocrático de control bajo la bandera de calidad. En Bertussi, G. (Ed.). *Anuario educativo mexicano*. Porrúa: México.

Dubrovsky, S. (Compilador) (2000). *Vigotski. Su proyección en el pensamiento actual*. Novedades educativas: Buenos Aires.

Fernández Pérez, M. (2005). *Evaluación y cambio educativo. El fracaso escolar*. Morata: Madrid.

García, R. (2005). *Números decimales ¿Causa de bajo rendimiento escolar? Algunas dificultades externas al alumno.* Tesis de Maestría. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN: México.

García, R.; Saíz, M. y Rivera, A (2010). When reality superposes mathematics´school problems: Some reasons that explain the low achievement of Mexican students in arithmetic. In M. F. Pinto & T.C. Kawasaki (Eds). *Proceedings of the Joint Meeting of PME 34th : Vol. 4*, (pp. 121-128). UFMG: Brazil.

Hernández, G.(2006) *Miradas constructivistas en psicología de la educación*. Paidós. México.
Hernández, J. (2008). Correlaciones cognitivo neurobiológicas en el desarrollo humano. Elsevier Cinvestav. México.
Hothersall, D. (2005). Historia de la psicología. Mc Graw Hill. México.

INEE (2005). Resultados del logro educativo. Factores que lo explican. *Los temas de la evaluación*. Colección de folletos 12: 6-12. INEE: México.

INEE (2006). El contexto social: Eje para evaluar el proceso educativo*. Los temas de la evaluación*. Colección de folletos 22: 1-12. INEE: México.

INEE (2006). Perspectivas para el futuro de la evaluación. *Los temas de la evaluación*. Colección de folletos 19: 1-7. INEE: México.

Inoue, N. (2005) The realistic reasons behind unrealistic solutions: the role of interpretive activity in word problem solving. *Learning and Instruction* 15:69–83
Kieren, T., Nelson, D. & Smith, C. (1985). Graphical algorithms in partitioning tasks. *Journal of Mathematical Behaviour, 4*, 25-36.

Laercio, D. (2004). *Vidas de los filósofos más ilustres*. Grupo Editorial Tomo. México.

Lerman, S. (2001). Cultural, discursive psychology: a sociocultural approach to studying the teaching and learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics 46: 87-113. 2001.
Lewontin, R, Steven, R. y Kamin, L. (1987). *No está en los genes. Racismo, genética e idiología*. CONACULTA: México.
Linaza, J.L. (1984) (Comp.). *Jerome Bruner. Acción, pensamiento y lenguaje*. Alianza: Madrid.

Moskal, B.M. and Magone, M.E. (2000). Making sense of what students know: Examining the referents, relationships and modes students displayed in response to a decimal tasks. *Educational Studies in Mathematics* 43 (3), págs. 313 – 335.

OECD (2000). Simple tasks from the PISA 2000 assessment. *Reading, Mathematical and Scientific Literacy.*

Ojeda, L. (1999). *Desempeño en matemáticas de estudiantes zacatecanos de primero y segundo de secundaria. Un estudio con alumnos de las regiones escolares de Zacatecas, Fresnillo, Río Grande y Guadalupe.* Tesis de Maestría. Universidad Autónoma de Fresnillo: México.

Palm, T. (2007). Impact of authenticy on sense making in word problem solving. *Educational Study in Mathematics* 67:37-58.
Peterson, J. y Hashisaki J. (1998). *Teoría de la aritmética*. Limusa: México.

Piaget, J. (1977). *Seis estudios de psicología*. Novena edición. Seix Barral: Barcelona.

Planas, N. & Civil, M. (2008). Voices of non-immigrant students in the multiethnic mathematical classroom. In O. Figueras, JL. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepúlveda (Eds). *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32nd and PME-NA XXX: Vol. 4*, (pp. 121-127). Mexico: Cinvestav-UMSNH.

Pozo, J.I. (2006) Novena edición. Teorías cognitivas del aprendizaje. Morata. Madrid.

Real academia española. Diccionario de la lengua española. 22ª. Edición http://buscon.rae.es/draeI/SrvltConsulta?

Rivera, A., Guerrero, M. L., Sepúlveda, A., Alaizola, I. (2006). La pertinencia del examen único de ingreso al bachillerato. *Perfiles educativos* No. 111: 71-88 CEU-UNAM.

Rodriguez, E. (2010). *Perspectivas psicológicas*. Volumenes 6 y 7. Universidad Autónoma de Santo Domingo: República Dominicana.

Rodriguez, H. y García, E. (1976). Evaluación en el Aula. *Cuadernos de metodología de la enseñanza superior*. Asociación nacional de universidades e instituciones de enseñanza superior. UNAM: México.

Rojas, R. (1997). *Guía para realizar investigaciones sociales*. Plaza y Valdés: México.

Rosenthal, V. (2002). *Microgénesis, la experiencia inmediata y procesos visuales en la lectura.* INSERM: Paris. http://cogprints.org/2489/ 4 abril 2011.

Schneuwly, B. y Bronckart, J. (2008). *Vigotsky hoy*. Popular: Madrid.

SEP (2006). *Programa de estudios. Matemáticas. Educación Básica. Secundaria*. Secretaría de Educación Pública:México.

SEP (2001). *Matemáticas primer grado*. Secretaría de Educación Pública: México.

SEP (2000). *Matemáticas segundo grado*. Secretaría de Educación Pública: México.
Shunk, D. H. (1997). *Teorías del aprendizaje*. Pearson Prentice Hall: México.

Silva, J. (1984) Gilgamesh en las tradiciones sumerias y en la tradición acadia*. Estudios de Asia y Africa XIX:3*. El Colegio de México: México.

Solano-Flores, G., Contreras-Niño, L. A. y Backhoff-Escudero, E. (2006). Traducción y adaptación de pruebas: Lecciones aprendidas y recomendaciones para países participantes en TIMSS, PISA y otras comparaciones internacionales. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 8* (2). Consultado el 5 de Marzo de 2008 en: http://redie.uabc.mx/vol8no2/contenido-solano2.html

Stufflebeam, D. y Shinkfield, A. (1993). *Evaluación sistemática. Guía teórica y práctica*. Paidós. España

Taylor, S.J. y Bogdan, R. (1990). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación*. Paidós. Buenos Aires.

Vygotsky, L.S. (1995). *Pensamiento y Lenguaje*. Fausto: Bogotá.

Wertsch, J. (1988) *Vygotsky y la formación social de la mente*. Paidós: México.
Werner, H. (1956). Microgenesis and aphasia. *Journal of Abnormal and Social Psychology,* 52, 347 a 353.

Zorrilla, M. (2003). *La evaluación de la educación básica en México 1990-2000*. Una mirada a contra luz. UAA: México.

Anexos

Anexo 1. Tabla de correspondencia curricular

Tabla de correspondencia curricular
TIMSS, Programas de estudio para secundaria en México 1996 y 2006.

Número de reactivo	Contenido y expectativa del TIMSS	Programa de estudio para secundaria 1996	Programa de estudios para secundaria 2006
1	1.2 Fracciones y sentido numérico. Solución de problemas.	1° Aritmética. Revisión de la noción de fracción, sus usos y significados en diversos contextos.	1° Sentido numérico y pensamiento algebraico. Significado y uso de los números. Números fraccionarios y decimales
2	1.5 Fracciones y sentido numérico. Solución de problemas.	1° Aritmética. Operaciones con decimales, problemas y aplicaciones diversas. 2° Aritmética. Operaciones con decimales, estimación de resultados.	1° Sentido numérico y pensamiento algebraico. Significado y uso de los números. Números fraccionarios y decimales
3	1.6 Fracciones y sentido numérico. Conocimiento.	1° Aritmética. Comparación de fracciones 2° Aritmética. Equivalencia y orden de fracciones.	1° Sentido numérico y pensamiento algebraico. Significado y uso de los números. Números fraccionarios y decimales.
4	1.7 Fracciones y sentido numérico. Conocimiento.	2° Aritmética. Práctica del cálculo mental y estimación de resultados.	1° Manejo de información. Análisis de la información.
5	1.10 Fracciones y sentido numérico. Procedimiento de rutina.	1° Aritmética. Operaciones con decimales, problemas y aplicaciones diversas.	1° Sentido numérico y pensamiento algebraico. Significado y uso de las operaciones. Problemas multiplicativos. Números decimales.
6	1.11 Fracciones y sentido numérico. Conocimiento.	1° Aritmética. Revisión de la noción de número decimal, lectura y escritura.	1° Sentido numérico y pensamiento algebraico. Significado y uso de los números. Números fraccionarios y decimales.
7	1.17 Fracciones y sentido numérico. Procedimiento de rutina.	1° Aritmética. Operaciones con decimales, problemas y aplicaciones diversas. 2° Aritmética. Operaciones con números naturales, decimales y sus operaciones.	1° Sentido numérico y pensamiento algebraico. Significado y uso de las operaciones. Problemas aditivos. Número decimales.
8	1.20 Fracciones y sentido numérico. Solución de problemas.	1° Aritmética. Revisión de la noción de fracción, sus usos y significados en diversos contextos.	1° Sentido numérico y pensamiento algebraico. Significado y uso de las operaciones. Problemas multiplicativos. Número fraccionarios.
9	1.21 Fracciones y sentido numérico. Procedimiento de rutina.	1° Aritmética. Proporcionalidad, cálculo de porcentajes y sus aplicaciones en la vida cotidiana.	1° Manejo de la información. Análisis de la información. Porcentajes.
10	1.23 Fracciones y sentido numérico. Procedimiento de rutina.	1° Aritmética. Cálculos con números truncados y redondeados para aproximar o estimar un resultado.	1° Sentido numérico y pensamiento algebraico. Significado y uso de los números. Número decimales.
11	1.25 Fracciones y sentido numérico. Procedimiento de rutina.	1° Aritmética. Fracciones, suma y resta de fracciones. 2° Aritmética. Sumas y restas combinadas de fracciones.	1° Sentido numérico y pensamiento algebraico. Significado y uso de las operaciones. Problemas aditivos. Números fraccionarios.

12	1.27 Proporcionalidad Procedimiento de rutina.	1° Aritmética. Proporcionalidad, tablas de números que varían proporcionalmente.	1° Manejo de la información. Análisis de la información. Relaciones de proporcionalidad.
13	1.30 Fracciones y sentido numérico. Solución de problemas.	1° Aritmética. Operaciones con decimales, problemas y aplicaciones diversas.	1° Sentido numérico y pensamiento algebraico. Significado y uso de las operaciones. Problemas multiplicativos. Números decimales.
14	1.35 Fracciones y sentido numérico. Procedimiento de rutina.	1° Aritmética. Operaciones con naturales, revisión de los algoritmos, verificaciones. 2° Aritmética. Verificación del grado de adquisición de operaciones con naturales.	1° Sentido numérico y pensamiento algebraico. Significado y uso de las operaciones. Números naturales.
15	1.36 Fracciones y sentido numérico. Solución de problemas.	2° Aritmética. Situaciones asociadas a la noción de fracción.	1° Sentido numérico y pensamiento algebraico. Significado y uso de las operaciones. Problemas multiplicativos. Números fraccionarios.
16	1.37 Proporcionalidad. Solución de problemas.	1° Aritmética. Operaciones con naturales, problemas y aplicaciones diversas.	1° Manejo de la información. Análisis de la información. Relaciones de proporcionalidad
17	2.3 Fracciones y sentido numérico. Procedimiento de rutina.	2° Aritmética. Reciproco de una fracción y división de fracciones.	1° Sentido numérico y pensamiento algebraico. Significado y uso de las operaciones. Problemas multiplicativos. Números fraccionarios.
18	2.8 Fracciones y sentido numérico. Uso de procedimientos complejos.	2° Geometría. Práctica de dibujo a escala.	1° Manejo de la información. Análisis de la información. Relaciones de proporcionalidad. 1° Forma, espacio y medida. Medida. Estimar, medir y calcular.
19	2.13 Fracciones y sentido numérico. Uso de procedimientos complejos.	1° Aritmética. Comparación de fracciones previa reducción a un común denominador o realizando división. 2° Aritmética. Equivalencia y orden de las fracciones. Criterio de la razón cruzada para saber si dos fracciones son equivalentes o no.	1° Sentido numérico y pensamiento algebraico. Significado y uso de las operaciones. Problemas multiplicativos. Números fraccionarios.
20	2.15 Proporcionalidad. Solución de problemas.	1° Aritmética. Ejemplos para introducir la noción de razón entre dos cantidades y su expresión por medio de un cociente.	1° Manejo de la información. Análisis de la información. Relaciones de proporcionalidad.
21	2.19 Fracciones y sentido numérico. Procedimiento de rutina.	1° Aritmética. Operaciones con decimales. 2° Aritmética. Verificación del grado de adquisición de las operaciones con números naturales, decimales y sus algoritmos.	1° Sentido numérico y pensamiento algebraico. Significado y uso de las operaciones. Problemas multiplicativos. Números decimales.
22	2.22 Fracciones y sentido numérico. Uso de procedimientos complejos.	1° Aritmética. Operaciones con naturales, problemas y aplicaciones diversas.	1° Sentido numérico y pensamiento algebraico. Significado y uso de las operaciones. Problemas multiplicativos. Números naturales.
23	2.23 Fracciones y sentido numérico.	1° Aritmética. Operaciones con naturales, problemas y	1° Sentido numérico y pensamiento algebraico.

	Solución de problemas.	aplicaciones diversas.	Significado y uso de las operaciones. Problemas multiplicativos. Números naturales.
24	2.24 Fracciones y sentido numérico. Solución de problemas.	1° Aritmética. Revisión de la noción de fracción, sus usos y significados en diversos contextos.	1° Sentido numérico y pensamiento algebraico. Significado y uso de las operaciones. Problemas aditivos. Números fraccionarios.
25	2.26 Fracciones y sentido numérico. Procedimiento de rutina.	1° Aritmética. Fracciones decimales, escritura en forma de fracción de un decimal recíprocamente. Escritura decimal de fracciones decimales.	1° Sentido numérico y pensamiento algebraico. Significado y uso de los números. Significado y uso de las operaciones. Problemas multiplicativos. Números decimales y fraccionarios.
26	3.1 Fracciones y sentido numérico. Uso de procedimiento complejo.	1° Aritmética. Revisión de la noción de fracción, sus usos y significados en diversos contextos. 2° Geometría. Equivalencia de figuras.	1° Manejo de la información. Análisis de la información. Relaciones de proporcionalidad.
27	3.2 Fracciones y sentido numérico. Solución de problemas.	1° Aritmética. Los decimales y sus operaciones, problemas y aplicaciones diversas. 2° Aritmética. Número naturales y decimales. Operaciones con números naturales, decimales y sus algoritmos.	1° Sentido numérico y pensamiento algebraico. Significado y uso de las operaciones. Problemas aditivos. Números decimales.
28	3.6 Fracciones y sentido numérico. Uso de procedimiento complejo.	1° Aritmética. Cálculo de porcentajes y sus aplicaciones en la vida cotidiana.	1° Manejo de la información. Análisis de la información. Porcentajes.
29	3.9 Fracciones y sentido numérico. Procedimiento de rutina.	1° Aritmética. Suma y resta de fracciones. 2° Aritmética. Revisión de suma y resta de fracciones.	1° Sentido numérico y pensamiento algebraico. Significado y uso de las operaciones. Problemas aditivos. Números fraccionarios.
30	3.10 Fracciones y sentido numérico. Solución de problemas.	1° Aritmética. Cálculo con números truncados y redondeados para aproximar o estimar un resultado.	1° Sentido numérico y pensamiento algebraico. Significado y uso de los números. Números naturales.
31	3.13 Fracciones y sentido numérico. Conocimiento.	1° Aritmética. Comparación de fracciones. 2° Aritmética. Equivalencia y orden de las fracciones.	1° Sentido numérico y pensamiento algebraico. Significado y uso de los números. Significado y uso de las operaciones. Números fraccionarios.
32	3.15 Fracciones y sentido numérico. Solución de problemas.	1° Aritmética. Fracciones, revisión de la noción de fracción, sus usos y significados en diversos contextos. 2° Aritmética. Situaciones asociadas a la suma y resta de fracciones	1° Sentido numérico y pensamiento algebraico. Significado y uso de las operaciones. Problemas aditivos. Números fraccionarios. 1° Manejo de la información. Análisis de la información. Proporcionalidad.
33	**3.16** Fracciones y sentido numérico. Solución de problemas.	1° Aritmética. Operaciones con decimales, problemas y aplicaciones diversas.	1° Sentido numérico y pensamiento algebraico. Significado y uso de las operaciones. Problemas multiplicativos. Números decimales. 1° Manejo de la información. Análisis de la información.

34	**3**.18 Fracciones y sentido numérico. Conocimiento.	1° Aritmética. Revisión de la noción de fracción, sus usos y significados en diversos contextos. 1° Geometría. Determinación del área de figuras dibujadas sobre papel cuadriculado o milimétrico.	1° Sentido numérico y pensamiento algebraico. Significado y uso de los números. Significado uso de las operaciones. Problemas multiplicativos. Fracciones 1° Manejo de la información. Análisis de la información. Relaciones de proporcionalidad.
35	3.23 Proporcionalidad. Solución de problemas.	1° Aritmética. Ejemplos para introducir la noción de razón entre dos cantidades y su expresión por medio de un cociente.	1° Manejo de la información. Análisis de la información. Proporcionalidad. Relaciones de proporcionalidad.
36	3.24 Fracciones y sentido numérico. Procedimiento de rutina.	1° Aritmética. Operaciones con naturales, problemas y aplicaciones diversas.	1° Sentido numérico y pensamiento algebraico. Significado y uso de las operaciones. Problemas multiplicativos. Números naturales.
37	**3**.26 Fracciones y sentido numérico. Procedimiento de rutina.	2° Aritmética. Revisión de suma y resta de fracciones, situaciones asociadas a la multiplicación de fracciones.	1° Sentido numérico y pensamiento algebraico. Significado y uso de las operaciones. Problemas multiplicativos. Problemas aditivos. Números fraccionarios
38	3.29a Proporcionalidad. Solución de problemas.	1° Proporcionalidad. Ejemplos para introducir la noción de razón entre dos cantidades y su expresión por medio de cocientes.	1° Manejo de la información. Análisis de la información. Proporcionalidad. Relaciones de proporcionalidad.
39	3.29b Proporcionalidad. Solución de problemas.	1° Proporcionalidad. Ejemplos para introducir la noción de razón entre dos cantidades y su expresión por medio de cocientes.	1° Manejo de la información. Análisis de la información. Proporcionalidad. Relaciones de proporcionalidad.
40	3.30 Fracciones y sentido numérico. Solución de problemas.	1° Presentación y tratamiento de la información. Lectura y elaboración de tablas y gráficas. Aritmética. Cálculo con números truncados y redondeados para aproximar o estimar un resultado.	1° Manejo de la información. Análisis de la información. Representación de la información. Diagramas y tablas.
41	**3**.31 Fracciones y sentido numérico. Uso de procedimientos complejos.	1° Aritmética. Los decimales, lectura y escritura, orden y comparación. Fracciones. Comparación de fracciones.	1° Sentido numérico y pensamiento algebraico. Significado y uso de los números. Significado y uso de las operaciones. Problemas multiplicativos. Problemas aditivos. Números fraccionarios. Números decimales.
42	**3**.33 Fracciones y sentido numérico. Uso de procedimiento complejo.	1° Aritmética. Cálculo con números truncados y redondeados para aproximar o estimar un resultado.	1° Sentido numérico y pensamiento algebraico. Significado y uso de los números. Números fraccionarios.
43	3.35 Proporcionalidad. Procedimiento de rutina.	1° Aritmética. Ejemplos para introducir la noción de razón entre dos cantidades y su expresión por medio de un cociente.	1° Manejo de la información. Análisis de la información. Proporcionalidad. Relaciones de proporcionalidad.

Anexo 2. Examen 1

Nombre: ____

Edad: ____________________

Sexo: Masculino ☐ Femenino ☐

Estudio en:

Secundaria General ☐ Secundaria Técnica ☐

Telesecundaria ☐ Secundaria Particular ☐

Secundaria Estatal ☐

Grado:

Primero ☐ Segundo ☐ Tercero ☐

INSTRUCCIONES GENERALES

En este cuadernillo encontrarás preguntas acerca de matemáticas. Te darás cuenta de que hay tres tipos diferentes de preguntas: a) de opción múltiple, b) de respuesta breve y c) de respuesta extendida. Si te encuentras con una pregunta de opción múltiple sólo encierra en un círculo la letra que consideres responde correctamente.

Ejemplo:

1. Un número mayor que π .

A. 3.1316 B. 3.1417

C. 3.1216 C. 3.1116

En las preguntas de respuesta breve lo único que necesitas es anotar tu respuesta sin justificar con operaciones tu resultado. Existe un tercer tipo de preguntas llamadas de respuesta extendida, de las cuales es necesario justificar tu respuesta por medio de las operaciones que utilizaste para llegar a tu solución.

1. Dos grupos de turistas están formados cada uno de 60 personas. Si $\frac{3}{4}$ de las personas del primer grupo y $\frac{2}{3}$ del segundo grupo abordan autobuses para ir a un museo, ¿Cuántas personas más del primer grupo con respecto a las del segundo grupo abordaron autobuses?

A) 2 B) 4 C) 5 D) 40 E) 45

2. En una competencia de lanzamiento de disco, el ganador lanzó 61.60 m. El segundo lugar lanzó 59.72 m. ¿Qué distancia más lanzó el ganador con respecto al lanzamiento del segundo lugar?

A) 1.18 m
B) 1.88 m
C) 1.98 m
D) 2.18 m

3. Escribe una fracción que sea más grande que $\frac{2}{7}$

Respuesta: ______________________________

41. ¿Qué lista muestra los números ordenados del menor al mayor?

$\frac{1}{5}, 0.8, 0.345, 0.19$

A) 0.345, 0.19, 0.8, $\frac{1}{5}$
B) 0.19, $\frac{1}{5}$, 0.345, 0.8
C) 0.8, 0.19, $\frac{1}{5}$, 0.345
D) $\frac{1}{5}$,0.8,0.345,0.19

42. Redondeado a la decena de kilogramo más cercano, el peso de un delfín fue reportado como de 170 kg. Escribe el peso que pueda ser considerado como el peso real de ese delfín.

Respuesta: ______________________________

43. Para obtener una pintura de un cierto color Ana mezcla 5 litros de pintura roja, 2 litros de pintura azul y 2 litros de pintura amarilla. ¿Cuál es la proporción, expresada como fracción, de pintura roja en el total de la mezcla?

A) $\frac{5}{2}$
B) $\frac{9}{4}$
C) $\frac{5}{4}$
D) $\frac{5}{9}$

39. Dos cajas contienen piezas cuadradas de cartulina para construir un modelo más grande. Hay 4 pequeños cuadros en cada pieza.

Todas las piezas de la caja 1 son de esta forma

Todas las piezas de la caja 2 son de esta forma

Para formar el modelo, por cada pieza de la caja 2 debe haber 2 piezas de la caja 1.
Construido el modelo ¿Qué fracción de los cuadros pequeños será de color negro?

Respuesta: ____________________________

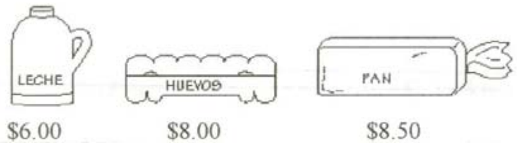
40. Teresa quería grabar 5 canciones en un casete. El tiempo de duración de cada canción se muestra en la siguiente tabla:

Canción	Duración
1	2 minutos 41 segundos
2	3 minutos 10 segundos
3	2 minutos 51 segundos
4	3 minutos
5	3 minutos 32 segundos

Calcula el total de tiempo necesario para grabar las cinco canciones, escribe tu respuesta redondeando el total a minutos y anota cómo realizaste el cálculo.

Respuesta: ______________________________

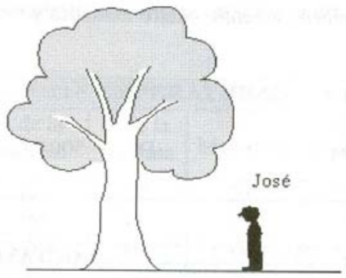
4. Carlos tenía $ 30.00 para comprar leche, pan y huevos. Cuando llegó a la tienda encontró que los precios eran los siguientes:



¿En cuál de los siguientes momentos tendría sentido usar una estimación en lugar de emplear números exactos?

A) Cuando Carlos trató de decidir si $30.00 era suficiente dinero.
B) Cuando el cajero anotó el total en la caja registradora.
C) Cuando Carlos preguntó cuánto debía pagar.
D) Cuando el cajero le regresó el cambio a Carlos.

5.



José tiene 1.5 m de estatura. Aproximadamente ¿Qué altura tiene el árbol?

A) 4 m
B) 6 m
C) 8 m
D) 10 m

6. ¿Qué número tiene cinco centenas, cuatro unidades y siete décimos?

A) 54.7
B) 504.7
C) 547
D) 5004.7

7. Resta $2\ 201 - 0.753 =$

A) 1.448
B) 1.458
C) 1.548
D) 1.558

8. Luis hace ejercicio corriendo 5 km cada día. El circuito que recorre tiene $\frac{1}{4}$ km de longitud. ¿Cuántas veces debe correr el circuito cada día?

Respuesta: ______________________________

9. Si el precio de un producto aumenta de 60 centavos a 75 centavos ¿Cuál es el porcentaje de incremento en el precio?

A) 15%
B) 20%
C) 25%
D) 30%

36. Los tres quintos de los alumnos de una clase son niñas. Si añadimos a esa clase 5 niñas y 5 niños, ¿Qué afirmación es cierta?

A. Hay más niñas que niños
B. Hay igual número de niñas que de niños
C. Hay más niños que niñas
D. Con la información dada no se puede saber si hay más niñas que niños

37. La familia Martínez utiliza cerca de 6000 l de agua por semana. Aproximadamente, ¿Cuántos litros de agua usarán por año?

A) 30 000
B) 240 000
C) 300 000
D) 2 400 000
E) 3 000 000

38. $\frac{3}{4} + \left(\frac{2}{3} x \frac{1}{4}\right) =$

A) $\frac{1}{8}$
B) $\frac{5}{16}$
C) $\frac{17}{48}$
D) $\frac{5}{6}$
E) $\frac{11}{12}$

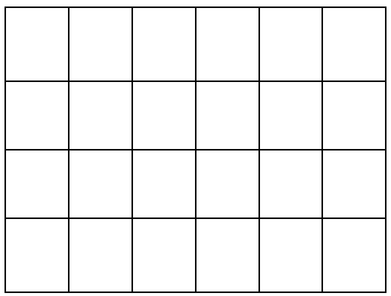
33. Juan tenía una bolsa de canicas, le regaló la mitad de las canicas a Enrique y después la tecera parte de las canicas restantes se las dio a Miguel. Después de esto resultó que Juan aún tenía 6 canicas. ¿Cuántas canicas tenía Juan al principio?

A) 18
B) 24
C) 30
D) 36

34. Un carro tiene un tanque de gasoline con capacidad de 35 l. El carro consume 7.5 l de gasolina por cada 100 km de recorrido. El carro comienza un viaje de 250 km con el tanque lleno. ¿Cuánta gasolina resta en el tanque al final del viaje?

A) 16.25 L
B) 17.65 L
C) 18.75 L
D) 23.75 L

35. Sombrea $\frac{5}{8}$ del total de la siguiente cuadrícula



10. ¿Cuál de los siguientes números representa al número 89.0638 redondeado a centésimos?

A) 100
B) 90
C) 89.1
D) 89.06
E) 89.064

11. ¿Cuál es el valor de $\frac{2}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=?$

A) $\frac{1}{6}$
B) $\frac{1}{3}$
C) $\frac{3}{8}$
D) $\frac{5}{12}$
E) $\frac{1}{2}$

12. La tabla muestra los valores de x e y, donde x es proporcional a y.

x	3	6	P
y	7	Q	35

¿Cuáles son los valores de P y Q?

A) P=14 y Q=31
B) P=10 y Q=14
C) P=10 y Q=31
D) P=14 y Q=15
E) P=15 y Q=14

13. Un bloque de 200 hojas idénticas de papel tiene 2.5 cm de grosor. ¿Cuál es el grueso de una hoja de papel?

A) 0.008 cm
B) 0.0125 cm
C) 0.05 cm
D) 0.08 cm

14. Resta
$$\begin{array}{r} 6000 \\ -\underline{2369} \end{array}$$

A) 4369
B) 3742
C) 3631
D) 3531

15. El señor Martínez tenía $ 360.00 y gastó $\frac{7}{9}$

¿Cuánto le quedó?

Respuesta: ______________________________

16. Pedro compró 70 artículos y Haydé compró 90 artículos. Cada artículo cuesta lo mismo y juntos pagaron un total de $ 800 ¿Cuánto pagó Haydé?

Respuesta: Haydé pagó_________________

17. Divide $\frac{8}{35} \div \frac{4}{15} =$

Respuesta: ______________________________

30. $\frac{3}{4} + \frac{8}{3} + \frac{11}{8} =$

A) $\frac{22}{15}$
B) $\frac{43}{24}$
C) $\frac{91}{24}$
D) $\frac{115}{24}$

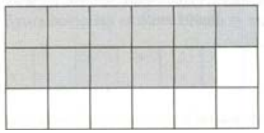
31 Un periódico anunció que cerca de 18 200 árboles habían sido plantados en el parque. El número fue redondeado a la centena más cercana. ¿Cuál de estos números podría ser el número de árboles plantados?

A) 18 043
B) 18 189
C) 18 289
D) 18 328

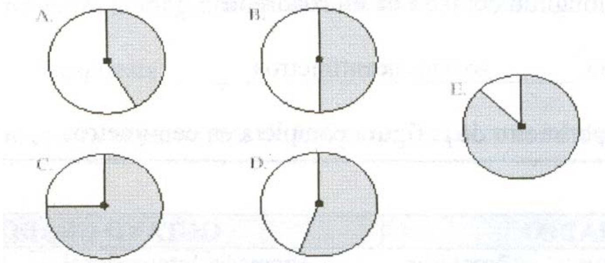
32. ¿En cuál lista de números, son todas fracciones equivalentes?

A) $\frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{12}{14}$
B) $\frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{9}{15}$
C) $\frac{3}{8}, \frac{6}{16}, \frac{12}{32}$
D) $\frac{5}{10}, \frac{10}{15}, \frac{1}{2}$

27.



¿Qué círculo tiene aproximadamente la misma fracción sombreada que el rectángulo de arriba?



Respuesta: ______________________________

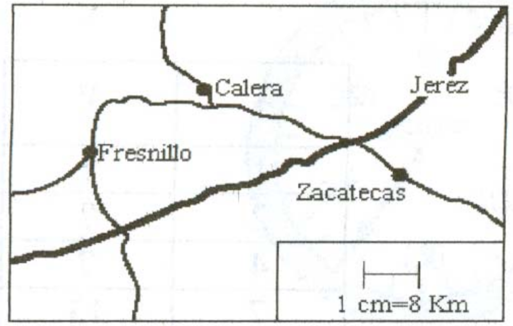
28. Un químico mezcla 3.75 mililitros de una solución A con 5.625 mililitros de una solución B para formar una nueva solución. ¿Cuántos mililitros contiene esta nueva solución?

Respuesta: ______________________________

29. El año pasado había 1172 alumnos en una escuela. Este año hay 15% más estudiantes que el año pasado. Aproximadamente ¿Cuántos estudiantes hay en esa escuela este año?

A) 1800
B) 1600
C) 1500
D) 1400
E) 1200

18.Un centímetro de este mapa representa 8 kilómetros en la realidad.



Aproximadamente ¿A qué distancia están Calera y Zacatecas?

A) 4 Km
B) 16 Km
C) 35 Km
D) 50 Km

19. ¿Qué número es el más grande?

A) $\frac{4}{5}$
B) $\frac{3}{4}$
C) $\frac{5}{8}$
D) $\frac{7}{10}$

20. Una clase tiene 28 alumnos. La razón de niñas a niños es de 4 a 3 ¿Cuántas niñas hay en la clase?

Respuesta: ______________________________

21. Multiplica *0.203 x 0.56 =*

Respuesta: ______________________________

22. El jardín de Laura tiene 84 surcos de col. En cada surco hay 57 coles ¿Cuál de estas representa la mejor manera de calcular cuantas coles son en total?

A) 100x50=5000
B) 90x60=5400
C) 80x60=4800
D) 80x50=4000

23. El corazón de un ser humano late 72 veces por minuto. ¿De acuerdo con esto, cuantas veces late el corazón en una hora?

A) 420 000
B) 42 000
C) 4 200
D) 420

24. Karina, Raquel y su mamá se comieron un pastel. Karina comió $\frac{1}{2}$ del pastel, Raquel $\frac{1}{4}$ del pastel. Su mamá $\frac{1}{4}$ del pastel. ¿Qué parte del total del pastel quedó?

A) $\frac{3}{4}$
B) $\frac{1}{2}$
C) $\frac{1}{4}$
D) Nada

25. Escribe 0.28 como una fracción reducida (simplificada)

Respuesta: ______________________________

26. Dos cajas contienen piezas cuadradas de cartulina para construir un modelo más grande. Hay 4 pequeños cuadros en cada pieza.

Todas las piezas de la caja 1 son de esta forma

Todas las piezas de la caja 2 son de esta forma

Para formar el modelo, por cada pieza de la caja 2 debe haber 2 piezas de la caja 1.
Si se utilizan 60 piezas de la caja 2 ¿Cuántas piezas se necesitarán en total?

Respuesta: ______________________________

Anexo 3.
Exploración de reactivos y respuestas

Exploración a reactivos.
Fuentes de datos iniciales del estudio: Examen con 43 reactivos de los contenidos Fracciones, Sentido numérico y Proporcionalidad extraídos del TIMSS-1995, respuestas y entrevistas del piloteo y aplicación a 60 alumnos.

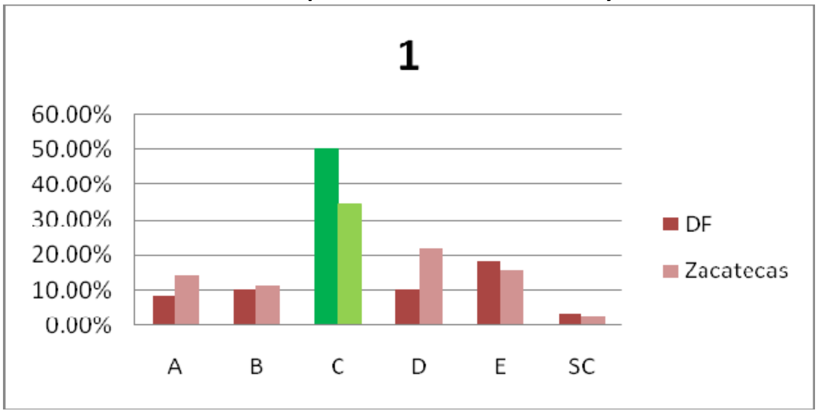
Reactivo 1.

1. Dos grupos de turistas están formados cada uno de 60 personas. Si $\frac{3}{4}$ de las personas del primer grupo y $\frac{2}{3}$ del segundo grupo abordan autobuses para ir a un museo, ¿Cuántas personas más del primer grupo con respecto a las del segundo grupo abordaron autobuses?

A) 2 B) 4 **C) 5** D) 40 E) 45

Respuesta correcta: ***C***

Gráfica de respuestas estudios Zacatecas y DF.



Significado de las opciones de respuesta

A) Dato inicial [dos grupos].
B) ¿?.
C) Correcta.
D) Personas del 2do. Grupo que abordan el autobús.
E) Personas del 1er grupo que abordan el autobús.

Expectativas del reactivo.

Operar con fracciones y enteros.
Evaluar el uso de fracciones y su significado en diversos contextos.

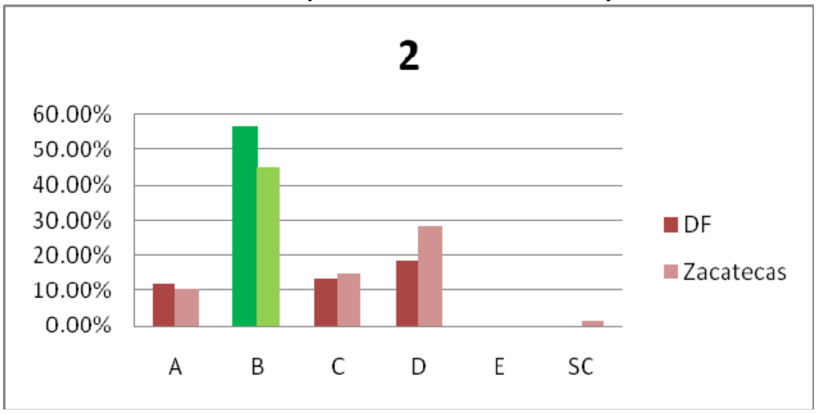
Exploración de las respuestas.

Para responder la pregunta del problema es necesario identificar que 60 personas es la unidad de referencia para calcular, primero cuantas personas son ¾ y cuantas 2/3, y enseguida obtener la diferencia entre los subgrupos.
En las respuestas A, D y E al parecer el alumno hace un uso parcial de la información disponible.
Las respuestas no correctas A y B podrían estar asociadas con dificultad para entender el problema o para operar con fracciones.
Las respuestas C y D podrían asociarse con premura o descuido del resolutor, en especial la opción E que corresponde a obtener ¾ de 60 y que fue elegida por 11 de 60 alumnos.

Reactivo 2.

2. En una competencia de lanzamiento de disco, el ganador lanzó 61.60 m. El segundo lugar lanzó 59.72 m. ¿Qué distancia más lanzó el ganador con respecto al lanzamiento del segundo lugar? A) 1.18 m B) 1.88 m C) 1.98 m D) 2.18 m Respuesta correcta ***B***

Gráfica de respuestas estudios Zacatecas y DF.



Significado de las opciones de respuesta

A) En la resta 61.60-59.72 se resta 10 -2; 7-6.
B) Correcta.
C) En la resta 61.60-59.72 se resta 10-2; 16-7 y 11-10.
D) Las opciones de resta que se pudieron haber hecho son: 10-2; 7-6 y 11-9.

Expectativas del reactivo

Resolución de problemas.

Exploración de respuestas

Las opciones de respuesta podrían ejemplificar la mala aplicación de unas reglas “bien aprendidas” respecto a “tomar uno” de la cifra a la izquierda.

La elección de las opciones no correctas puede corresponder con dificultades al restar números decimales.

Inciso D. En la parte decimal se resta del mayor el menor sin considerar que la unidad de orden superior inmediata se descompone para restar, es decir, se olvida de haber tomado “prestado” de al lado. En la parte entera pueden ocurrir dos situaciones: 1) resta 11-9 y recuerda una decena de 60, o 2) resta sumando de 59 a 61.

	6	1.	6	0
-	5	9.	7	2
		2.	1	8

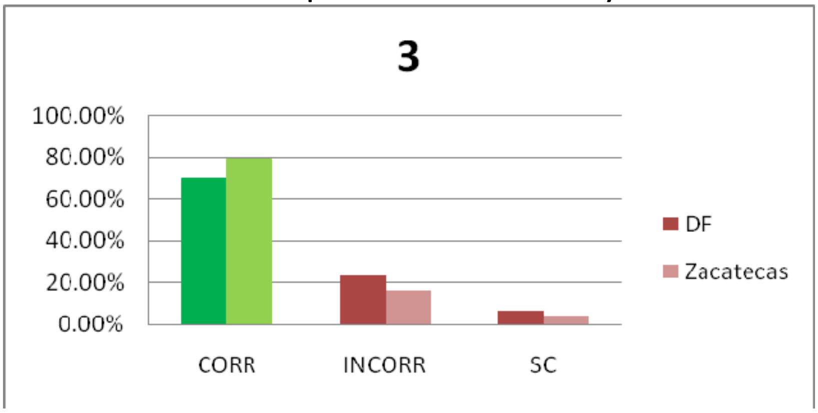
Reactivo 3.

3. Escribe una fracción que sea más grande que $\frac{2}{7}$

Respuesta: ______________________________

Respuesta correcta: Cualquier fracción > $\frac{2}{7}$

Gráfica de respuestas estudios Zacatecas y DF.



Significado de las opciones de respuesta.
Respuesta corta: Cualquier fracción > $\frac{2}{7}$

Expectativas del reactivo
Medir conocimiento.

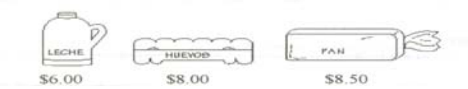
Exploración de respuestas
Respuestas: 1 ¾, 1 2/4, 1, 3/1, ½, 2/2, 3/2, 1/3, 2/3, ¼,2/4, 2/5, ¾, 4/5, 1/7, 3/7, 4/7, 7/7, 2/8, 3/8, 5/8, 1/9, 2/10, 9/10, 4/14, 5/14, 6/14.
La fracción 4/14 podría ejemplificar la idea de que para obtener una fracción más grande que la que se tenga de referencia es suficiente duplicar los valores de los dígitos que la integran, sin darse cuenta que se lo que se obtiene es una fracción equivalente.
Denominador más grande sin alterar el numerado, da como resultado una fracción mayor 2/8, 2/10
Reducir el numerador sin modificar el denominador genera una fracción mayor: 1/7.
Reducir el numerador e incrementar el denominador genera una fracción mayor: 1/9 (Sin que lo sea).
Respuestas correctas que parecen evidenciar el conocimiento del alumno: 1, 3/1.
Correctas que podrían tener argumento incorrecto: 3/8.

Respecto a la respuesta 3/8 ¿el alumno conoce el hecho matemático de que si $\begin{array}{l} a<b \\ \frac{a}{b}<\frac{a+1}{b+1} \end{array}$

Demostración
$$\begin{array}{l} a<b \\ a+ab<b+ab \\ a(1+b)<b(1+a) \\ \frac{a}{b}<\frac{1+a}{1+b} \\ \frac{2}{7}<\frac{3}{8} \end{array}$$

Reactivo 4.

4. Carlos tenía $ 30.00 para comprar leche, pan y huevos. Cuando llegó a la tienda encontró que los precios eran los siguientes:

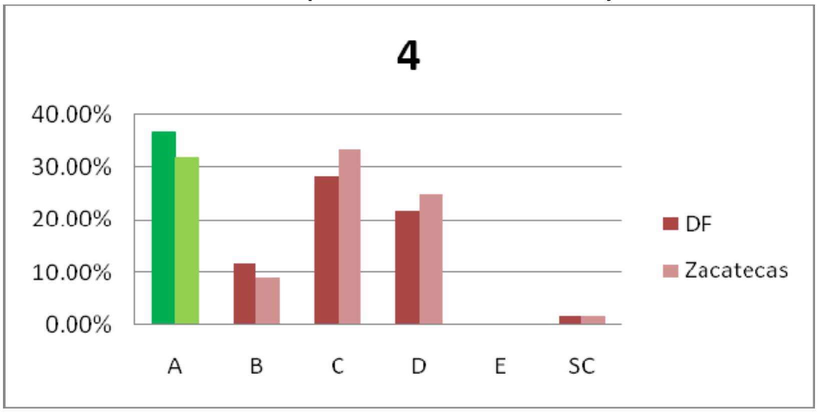


¿En cuál de los siguientes momentos tendría sentido usar una estimación en lugar de emplear números exactos?

A) Cuando Carlos trató de decidir si $30.00 era suficiente dinero.
B) Cuando el cajero anotó el total en la caja registradora.
C) Cuando Carlos preguntó cuánto debía pagar.
D) Cuando el cajero le regresó el cambio a Carlos.

Respuesta correcta ***A***

Gráfica de respuestas estudios Zacatecas y DF.



Significado de las opciones de respuesta

A) Correcta.
B) Estima para calcular el cambio que recibirá. Podría estar asociada con la experiencia de comprar en algún comercio que tenga registradora: como el supermercado.
C) Indaga para saber si le alcanza el dinero que trae, se parece a A, posiblemente asociada a la experiencia de comprar en tienda, donde el vendedor hace la cuenta y el comprador debe estimar si lo que tiene es suficiente. Verifica que le alcance.
D) Estima para confirmar que el cambio que recibirá sea correcto. Podría asociarse a la experiencia de fijarse que el cambio sea correcto. Estima la diferencia entre el importe de los productos y la cantidad de dinero que lleva.

Expectativas del reactivo

Evaluar aplicación del conocimiento.

Exploración de respuestas

¿Cuestión de semántica? ¿Qué significado tiene la estimación?

Se evalúa conocimiento sobre estimación a situación cotidiana. ¿Se trata de evaluar sentido común?.

Las opciones de respuesta incorrectas parecen tener sentido si se toma en consideración la experiencia de vida de los alumnos, pues aunque 40% de los estudiantes de la muestra responden acertadamente, el resto consideran apropiadas las otras opciones, particularmente la C .

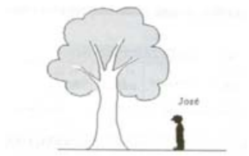
Una hipótesis que emergió de la popularidad de las respuestas incorrectas, fue que la experiencia de los alumnos impacta su elección, por lo que se esperaba que los estudiantes de escuela pública respondieran con mayor frecuencia C o D. Esto ocurrió en las escuelas particulares, en la pública las respuestas más populares fueron B y C.

Una alumna dice que ella debe llevar el cambio completo a casa o recibe una sanción de su mamá, y que usualmente hace los mandados.

Según los diseñadores sólo hay una respuesta correcta. Según yo todas las opciones son buenas porque pueden tener sentido todas ellas. Para responder el alumno podría apelar a la situación vivencial más que al aprendizaje escolar.

Reactivo 5.

5.

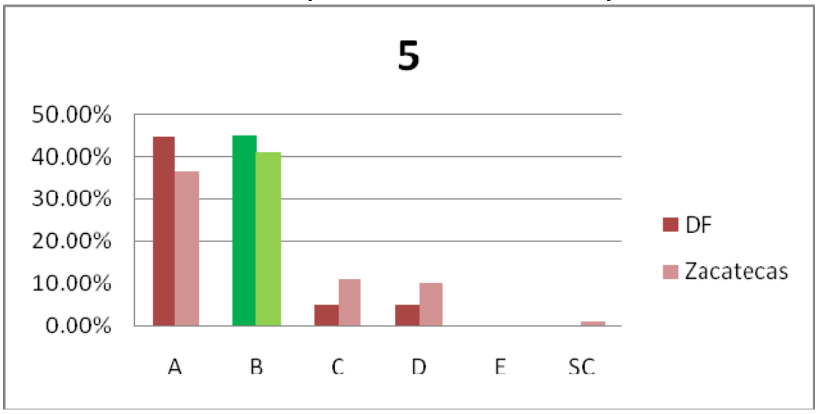


José tiene 1.5 m de estatura. Aproximadamente ¿Qué altura tiene el árbol?

A) 4 m	C) 8 m
B) 6 m	D) 10 m

Respuesta correcta ***B***

Gráfica de respuestas estudios Zacatecas y DF.



Significado de las opciones de respuesta

A) Probablemente hizo una estimación sin uso de herramienta como intermediaria o apoyo.
B) Correcta.
C) ¿?.
D) ¿?.

Expectativas del reactivo

Verificar la aplicación de procedimientos rutinarios.

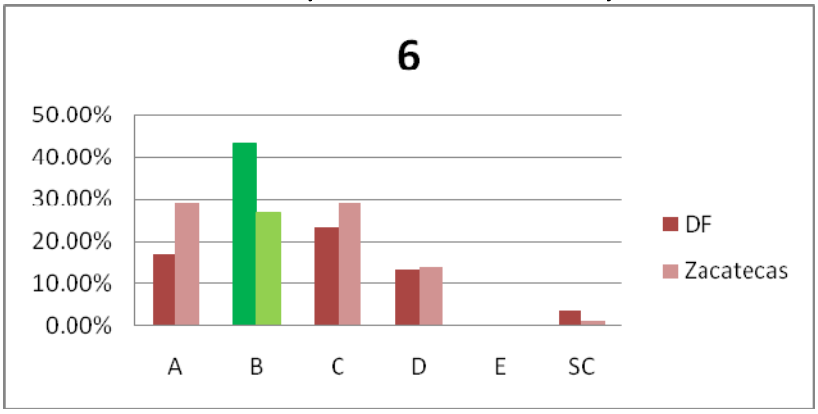
Exploración de respuestas

La opción A puede ser producto de estimar que la altura del niño cabe 4 veces en el árbol y asociarlo con el número inscrito. De ser el caso el procedimiento queda inconcluso porque faltaría multiplicar por la altura de José: 1.5.

Reactivo 6.

6. ¿Qué número tiene cinco centenas, cuatro unidades y siete décimos? A) 54.7   C) 547 B) 504.7   D) 5004.7 Respuesta correcta ***B***

Gráfica de respuestas estudios Zacatecas y DF.



Significado de las opciones de respuesta.
A) Se omitió el valor posicional ocupado por el cero. Dificultad para reconocer la posición de las centenas.
B) Correcta.
C) Se considera el orden en el que se enuncian los números sin tomar en cuenta la unidad de orden superior (valor posicional). Dificultad para reconocer la posición de unidades y décimos (decimales).
D) Se toma en cuenta el valor posicional de los ceros en las centenas y se representa omitiendo el lugar de las unidades. Podría haber dificultad para reconocer posición y escritura de las centenas (parece distractor aceptable).

Expectativas del reactivo
Se evalúa valor posicional.

Exploración de respuestas
Tal vez descuido al ubicar la posición del número de acuerdo al nombre del lugar posicional que ocupan.

Reactivo 7.

7. Resta 2.201 – 0.753 = A) 1.448 C) 1.548 B) 1.458 D) 1.558 Respuesta correcta ***A***

Gráfica de respuestas estudios Zacatecas y DF.

Significado de las opciones de respuesta

A) Correcta.

B) Resta 11-3=8 omite la unidad "tomada" de la agrupación de orden superior y resta 10-5=5, recuerda la unidad tomada del orden inmediato y resta 11-7 =4, recuerda la unidad tomada del agrupamiento superior y resta 1-0=1. Podría suponerse una dificultad con el cero en la resta e inconsistencia en las acciones de la resta de cada cifra.

C) Resta 11-3=8 recuerda la unidad tomada del agrupamiento de orden superior, resta 9-5=4, olvida la unidad tomada, resta 12-7=5, recuerda la unidad tomada, resta 1-0=1

D) Resta 11-3=8, 10-5=5; 12-7=5, omite las unidades de orden superior tomadas con anterioridad excepto la unidad tomada en los enteros y resta 1-0=1. Podría no saber cómo aplicar la regla a los decimales pero lo hace adecuadamente en los enteros.

Expectativas del reactivo

Verificar aplicación de procedimientos rutinarios.

Exploración de respuestas

Dificultad con la operación de la parte decimal de la cifra.

La respuesta errónea más popular es C con 12 de 60. Sólo 27 de 60 responden correctamente.

	2.	2	0	1
-	0.	7	5	3
	1.	5	4	8

Resta 11-3=8 recuerda la unidad tomada del agrupamiento de orden superior, resta 9-5=4, olvida la unidad tomada, resta 12-7=5, recuerda la unidad tomada, resta 1-0=1.

Existen dificultades para operar con la parte decimal de las cifras, al parecer asociadas con la comprensión de las reglas de operación de los números natrales y su traslado a los decimales. A estas se suman las dificultades de "restar sumando" y "restar restando" que aún se conservan desde la primaria.

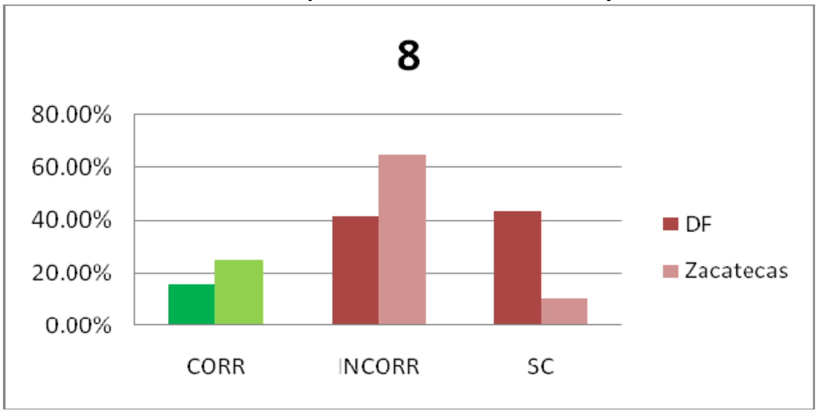
Reactivo 8.

8. Luis hace ejercicio corriendo 5 km cada día. El circuito que recorre tiene $\frac{1}{4}$ km de longitud. ¿Cuántas veces debe correr el circuito cada día?

Respuesta: ______________________________

Respuesta correcta ***20.***

Gráfica de respuestas estudios Zacatecas y DF.



Significado de las opciones de respuesta.
Respuesta corta: 20

Expectativas del reactivo
Verificar resolución de problemas con fracciones.

Exploración de respuestas
Respuestas:
1, 1 ¼, 2 x día, 2, 3, 4, 5, 11, 16
Estas respuestas parecen indicar que el alumno tiene dificultades para entender el enunciado, no obstante intenta alguna solución a partir de las cifras presentadas:

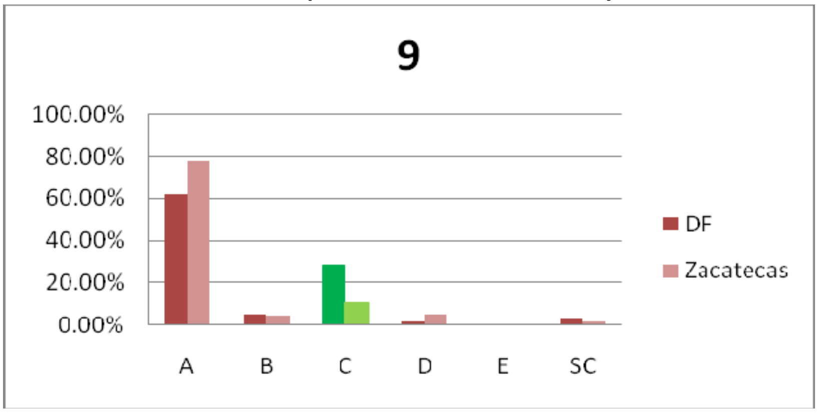
a) Opera con las cifras que tiene a mano; 5 (km) y ¼ km. Cuenta 5 veces el circuito de ¼ km : 1¼ .

b) Es difícil saber si realiza la operación $5\times\frac{1}{4}=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}$ o $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}$.

Reactivo 9.

9. Si el precio de un producto aumenta de 60 centavos a 75 centavos ¿Cuál es el porcentaje de incremento en el precio? A) 15% C) 25% B) 20% D) 30% Respuesta correcta ***C***

Gráfica de respuestas estudios Zacatecas y DF.



Significado de las opciones de respuesta.

A) Asociado a los 15 centavos de aumento.
B) Tomando 75 centavos como 100% la diferencia entre 60 y 75, es decir 15, corresponde al 20%.
C) Correcta.
D) ¿?

Expectativas del reactivo

Que el alumno resuelva problemas de porcentaje.

Exploración de respuestas

En un caso consideramos que elegir la opción A) 15%., se encontraba asociado con la rapidez con la cual fue respondida, ello sugiere una respuesta poco reflexiva.

Dificultades en la comprensión del problema y dificultades en el establecimiento de las relaciones parte-todo, donde 60 es todo y 15 es la parte que corresponde a un porcentaje (25%).

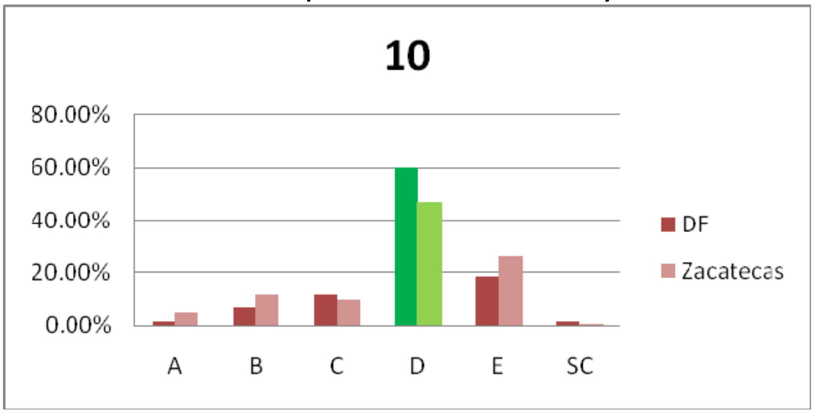
37 de los 60 alumnos responden A, asociando el incremento de centavos con el porcentaje.

Hasta allí pueden obtener la diferencia y el resto de la información parece ser ignorado.

Reactivo 10.

10. Redondea a centésimos el número 89.0638 A) 100   D) 89.06 B) 90   E) 89.064 C) 89.1 Respuesta correcta ***D***

Gráfica de respuestas estudios Zacatecas y DF.



Significado de las opciones de respuesta

A) Redondea a centena.
B) Redondea a la unidad inmediata o a la decena inmediata.
C) Redondea al décimo inmediato.
D) Correcta.
E) Redondea a milésimos.

Expectativas del reactivo

Verificar conocimiento.

Exploración de respuestas

Dificultades asociadas al significado de los términos que denotan la posición de las cifras en el sistema decimal.

La respuesta no correcta más popular es E, en la que redondean al milésimo. Podría deberse a que la cifra 89.0638 se lee de derecha a izquierda por lo que se tienen 89 enteros 8 décimos, 3 centésimos, y seis milésimos [en el caso de asumir que el cero a la izquierda "no vale", el otro caso es cuando se considera la existencia de 0 diezmilésimos.

Otra lectura podría ser 89 enteros 638 centésimos, con lo que el redondeo llevaría a 89.064.

Reactivo 11.

11. ¿Cuál es el valor de $\frac{2}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=?$

A) $\frac{1}{6}$

B) $\frac{1}{3}$

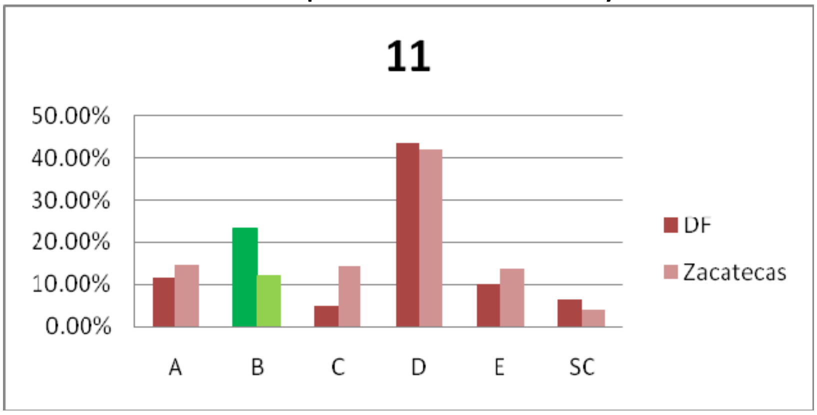
C) $\frac{3}{8}$

D) $\frac{5}{12}$

E) $\frac{1}{2}$

Respuesta correcta ***B***

Gráfica de respuestas estudios Zacatecas y DF.



Significado de las opciones de respuesta.

A) ¿?
B) Correcta.
C) ¿?
D) Resta dos tercios menos un cuarto. Procedimiento inconcluso.
E) ¿?

Expectativas del reactivo

Verificar el uso de procesos rutinarios.

Exploración de respuestas

Hallar la respuesta adecuada requiere saber equivalencia de fracciones para efectuar la resta, y para simplificar posteriormente.

La popularidad en la respuesta D podría denotar que el alumno se quedó en una parte del proceso, cuando resta $\frac{8}{12}-\frac{3}{12}[de\frac{2}{3}-\frac{1}{4}]$, omitiendo en la diferencia $\frac{1}{12}$.

Quizá se detienen por apresuramiento cuando en las opciones localizan una que parece buena según la parte del desarrollo en el que va.

Reactivo 12.

12. La tabla muestra los valores de x e y, donde x es proporcional a y.

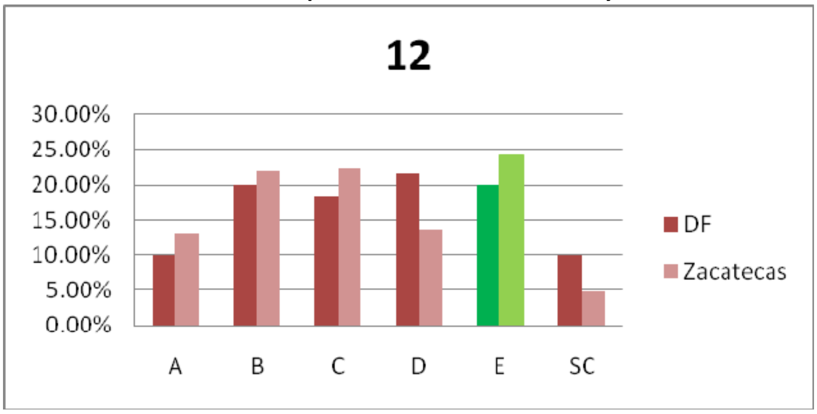
x	3	6	P
y	7	Q	35

¿Cuáles son los valores de P y Q?

A) P=14 y Q=31
B) P=10 y Q=14
C) P=10 y Q=31
D) P=14 y Q=15
E) P=15 y Q=14

Respuesta correcta ***E***

Gráfica de respuestas estudios Zacatecas y DF.



Significado de las opciones de respuesta.

A) ¿?
B) Identifica el doble en Q (14) sin identificar el múltiplo de P.
C) Obtener diferencia entre *x* y *y*: 3 y 7 luego sumarla a 6 para P=10 y restarla de 35 para P=31.
D) Obtener los valores colocándolos en las posiciones invertidas.
E) Correcta.

Expectativas del reactivo

Verificar el uso de procedimientos de rutina.

Exploración de respuestas

Para responder el alumno debe identificar que la segunda columna es el doble de la primera, eso lo puede hacer con ayuda de las cifras 3 y 6 de donde puede obtener que 14 es el doble de 7. Quienes llegan a este punto pueden elegir las opciones B o E (correcta). Posteriormente deben identificar que la tercera columna es el quíntuple de la primera con lo que P=15, dejando como única opción de respuesta E, a la cual se podría haber llegado calculando Q.

El valor 10 aparece cuando se busca una relación entre *x* y *y* en la primera columna, de 3 a 7 hay 4 de diferencia, de modo que sumar 4 a 6 (valor de x en la columna 2) da P=10, dando lugar a elegir las opciones B y C. Restando 4 a 35 se obtiene 31, valor que se puede asignar a Q con lo que la opción a elegir será A.

Dificultades para identificar la proporcionalidad, quizá para leer el enunciado.

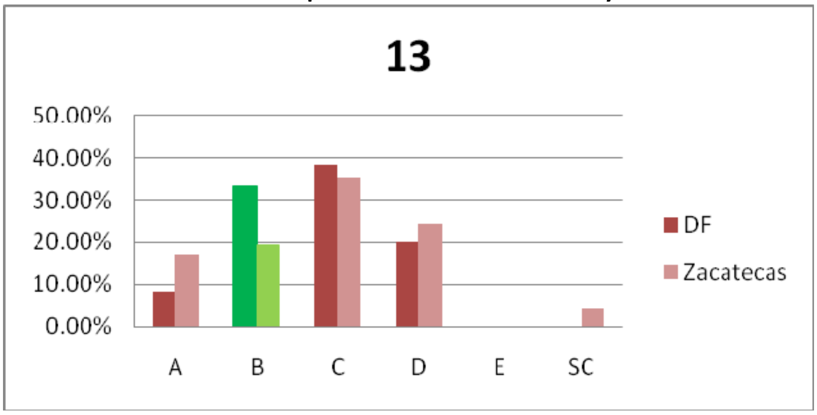
Reactivo 13.

13. Un bloque de 200 hojas idénticas de papel tiene 2.5 cm de grosor. ¿Cuál es el grueso de una hoja de papel?

A) 0.008 cm C) 0.05 cm
B) 0.0125 cm D) 0.08 cm

Respuesta correcta ***B***

Gráfica de respuestas estudios Zacatecas y DF.



Significado de las opciones de respuesta.

A) Un cálculo rápido sin tomar en cuenta el valor posicional para colocar punto decimal. 2.5x 8=20.
B) Correcta
C) ¿?
D) Cálculo rápido similar al inciso A.

Expectativas del reactivo

Que el alumno resuelva problemas.

Exploración de respuestas

Una manera de responder la pregunta es dividir 2.5 cm entre 2 y luego el resultado 1.25 dividirlo entre 100 corriendo el punto decimal dos lugares a la izquierda.

Otra forma es desarrollar el algoritmo de división con dividendo decimal $25 \div 200$.

Es posible que se recuerde la "prueba" de la división: multiplicar el cociente por el divisor [y sumar el residuo] y entonces traten de verificar multiplicando alguna de las opciones A o D. O que piensen en que 2.5 cabe 8 veces en 20 y agregando ceros en algún lado se obtenga 200.

Los incisos A y D muestran resultados que podrían ser producto de un cálculo rápido sin realizar la operación con calculadora o papel y lápiz.

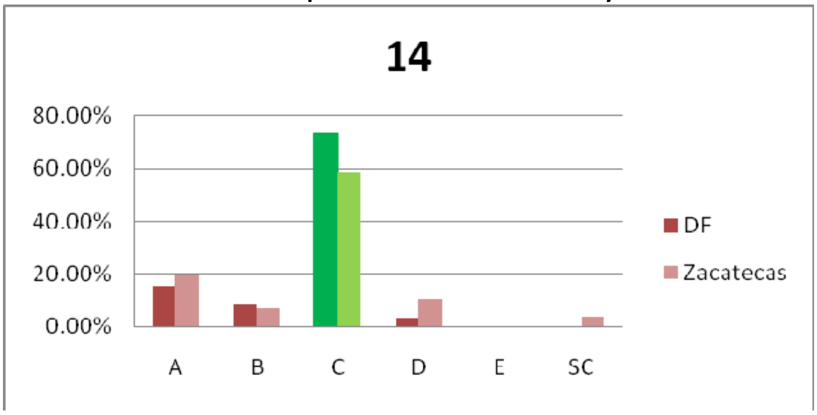
Reactivo 14.

14. Resta 6000
- <u>2369</u>

A) 4369 C) 3631
B) 3742 D) 3531

Respuesta correcta ***C***

Gráfica de respuestas estudios Zacatecas y DF.



Significado de las opciones de respuesta.
A) Resta los mayores a los menores, 9-0, 6-0, 3-0, 6-2.
B) Resta sumando de uno en uno e inicia de derecha a izquierda: 9 para 10 cuenta desde 9 (1), 10(2)=2, 6 para 10 son 7, 8, 9,10=4; 3 para 10: 4,5,6,7,8,9,10. Podría por otra parte haber una combinación de restar sumando contando a partir de: 9 para 10: 9(1), 10(2)=2, luego resta restando 10-6=4 sin recordar la unidad de orden superior tomada; 10-3=7, recuerda la unidad tomada del agrupamiento de orden superior y resta 6-1=5-2=3.
C) Correcta.
D) Resta 10-9=1, quita la unidad tomada y resta 9-6=3, parece agregar las dos unidades tomadas a esta y resta 10-2=8; 8-3=5, resta a la agrupación de orden superior inmediata y resta 6-5=1, 5-2=3.

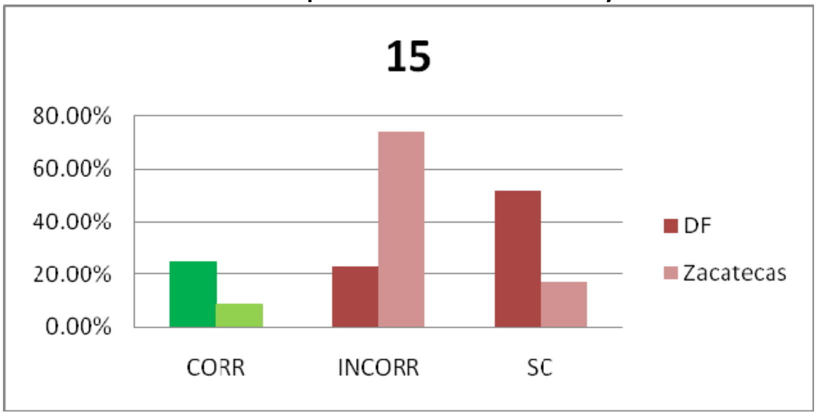
Expectativas del reactivo
Verificar la aplicación de procedimientos de rutina***.***

Exploración de respuestas
Estas opciones parecen dar cuenta de posibles dificultades con el uso del cero.
Cerca del 75% de los alumnos responden correctamente. De las opciones no correctas la más popular es A, de la que puede decirse que se usa la estrategia de restar restando, es decir, de la cantidad mayor se restan cifra por cifra las cifras de la cantidad menor pero se omite conservar la unidad de orden superior que se ha “tomado” prestada en la resta de cada cifra.
Estos problemas aparecen desde el 4to. grado de primaria.

Reactivo 15.

15. El señor Martínez tenía $ 360.00 y gastó $\frac{7}{9}$ ¿Cuánto le quedó?
Respuesta: ___________________________
Respuesta correcta $ ***80.00***

Gráfica de respuestas estudios Zacatecas y DF.



Significado de las opciones de respuesta.
Respuesta corta: $ 80.00

Expectativas del reactivo
Resolución de problemas

Exploración de respuestas
Respuestas: 3/9, 5/8, 2, 40, 50, 60, 90, 100.50, 110, 120, 135, 180, 200, 201, 233, 240, 250, 260, 274, 280, 281, 300, 348, 353, 2260, 3233.
Hay respuestas que muestran dificultad con las fracciones, no se sabe cómo resolver pero se hace algo con las cifras:

A) Restan el numerador a la cantidad de referencia [360-7=353].

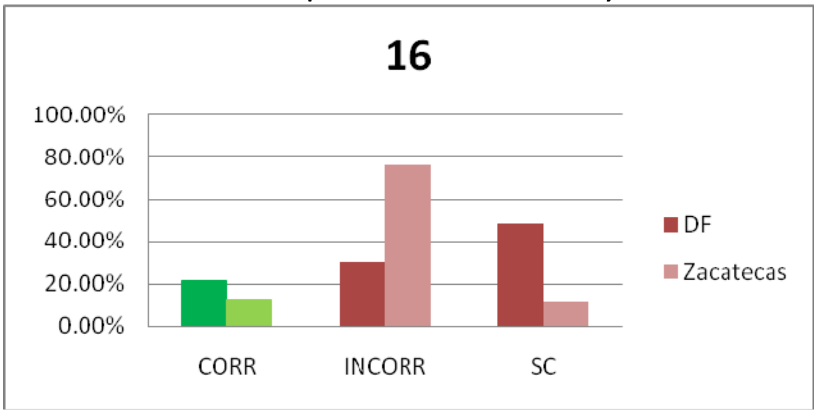
Otras respuestas muestran diferentes grados de dificultad para entender el enunciado, por ejemplo se puede obtener el valor de la fracción respecto al entero pero no se avanza en la resolución del problema:

B) Responden cuánto gastó en lugar de cuánto le quedó: 280.
C) Se obtiene el valor de cada noveno, 40, pero se deja inconclusa la resolución.

Reactivo 16.

16. Pedro compró 70 artículos y Haydé compró 90 artículos. Cada artículo cuesta lo mismo y juntos pagaron un total de $ 800 ¿Cuánto pagó Haydé? Respuesta: ____________________________ Respuesta correcta: ***$ 450.00***

Gráfica de respuestas estudios Zacatecas y DF.



Significado de las opciones de respuesta
Respuesta corta: $ 450.00.

Expectativas del reactivo
Resolución de Problemas.

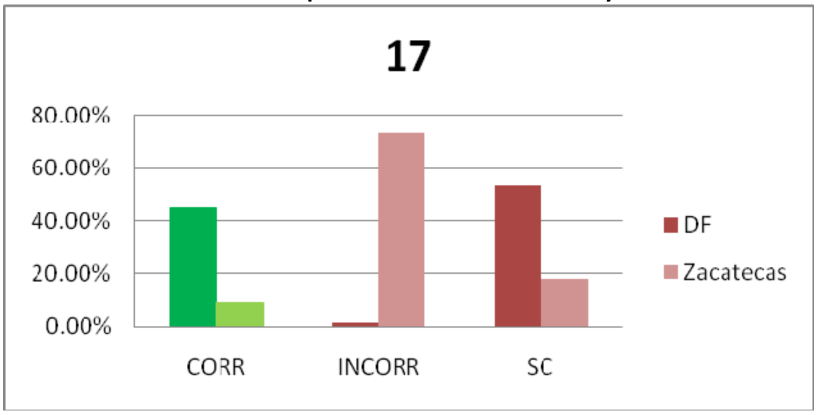
Exploración de respuestas
Respuestas: 9, 33, 45, 200, 255, 300, 340, 350, 396, 400, 432, 447, 500, 560, 600, 640, 650, 675, 700,
En algunos casos se obtiene el valor unitario pero no se responde la pregunta correctamente quizá debido a una lectura poco cuidadosa del texto, en tal caso 350 es una respuesta parcial y corresponde con lo que Pedro pagó.

Podrían suponerse dificultades para entender el problema.

Reactivo 17.

17. Divide $\frac{8}{35} \div \frac{4}{15}$ =
Respuesta: ______________________________
Respuesta correcta: ***6/7***

Gráfica de respuestas estudios Zacatecas y DF.



Significado de las opciones de respuesta
Respuesta corta: 6/7.

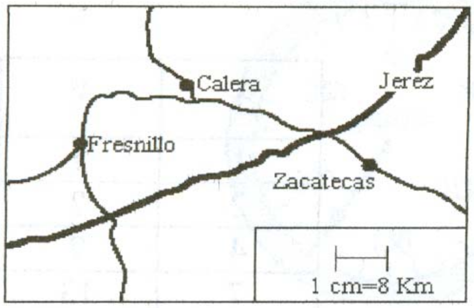
Expectativas del reactivo
Verificar el desarrollo de procedimientos de rutina.

Exploración de respuestas
Respuestas: 1, 1/1, 2/2, 4/2, 32/2, 2/3, ¼,2/5, 102/5, 5/5, 2/6, 1/7, 12/14, 4/15, 1/8, 2/8, 12/14, 4/15, 10/15, $6\frac{10}{15}$, 8/16, 15/18, 30/25, 30/35, 60/70, 35/120, 120/140, 120/160, 120/170, $1\frac{16}{575}$, 280.

a) Se identifican respuestas parcialmente correctas pues les falto reducir la fracción: 120/140, 12/14, 60/70.
b) Dificultades en la realización de división con fracciones, en donde se divide : $8 \div 4$ y $35 \div 15$ y se obtiene 2/2, 1/1, 1.
c) Divisiones en las que se multiplican numeradores y denominadores sin sentido: $1\frac{16}{575}$, $6\frac{10}{15}$.

Reactivo 18.

18.Un centímetro de este mapa representa 8 kilómetros en la realidad.

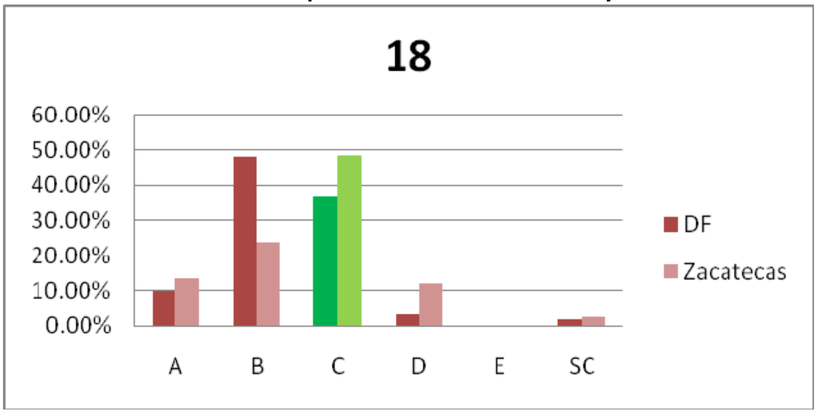


Aproximadamente ¿A qué distancia están Calera y Zacatecas?

A) 4 Km
B) 16 Km
C) 35 Km
D) 50 Km

Respuesta correcta ***C***

Gráfica de respuestas estudios Zacatecas y DF.



Significado de las opciones de respuesta.

A) Se pudo haber estimado que la unidad “cabe” 4 veces pero omitieron multiplicar por los 8 kms que representa cada unidad.

B) Podría estimar que la distancia en el mapa corresponde al doble de la referencia (2cm) y los multiplica por los 8 que representa cada cm

C) Correcta.

D) ¿?

Expectativas del reactivo

Verificar la aplicación de procedimientos complejos.

Exploración de respuestas

Al menos en un caso se hace un traslado de medida sobre el mapa empleando los dedos.

Parece ser una pregunta cuya respuesta puede elegirse por eliminación.

Quizá las dificultades con la opción A puede deberse a un apresuramiento por responder.

En el caso de la opción B a una percepción equivocada de las veces que la unidad de medida cabe en la distancia entre ciudades. Algunos niños trasladaron la medida con la ayuda de un intermediario como la goma del lápiz.

Reactivo 19.

19. ¿Qué número es el más grande?

A) $\frac{4}{5}$ B) $\frac{3}{4}$

C) $\frac{5}{8}$ D) $\frac{7}{10}$

Respuesta correcta ***A***

Gráfica de respuestas estudios Zacatecas y DF.

Significado de las opciones de respuesta.

A) Correcta.
B) Se asocia denominador más chico con fracción más grande.
C) ¿?
D) Se asocia denominador más grande con fracción más grande.

Expectativas del reactivo

Verificar la aplicación de procedimientos complejos.

Exploración de respuestas

Para algunos estudiantes éste parece ser un problema de estrategia.
La estrategia más popular empleada para responder esta pregunta es fijarse en el denominador planteando una correspondencia entre un denominador chico con una fracción grande o un denominador grande con una fracción grande.
La moda en la respuesta es B atendiendo a la idea de que a denominador chico fracción grande.
La respuesta a esta pregunta requiere de una estrategia de comparación en la que sería necesario realizar:
Productos cruzados para comparar: $a\ d \quad < \quad c\ b$

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

$$\frac{4}{5} > \frac{5}{8}$$

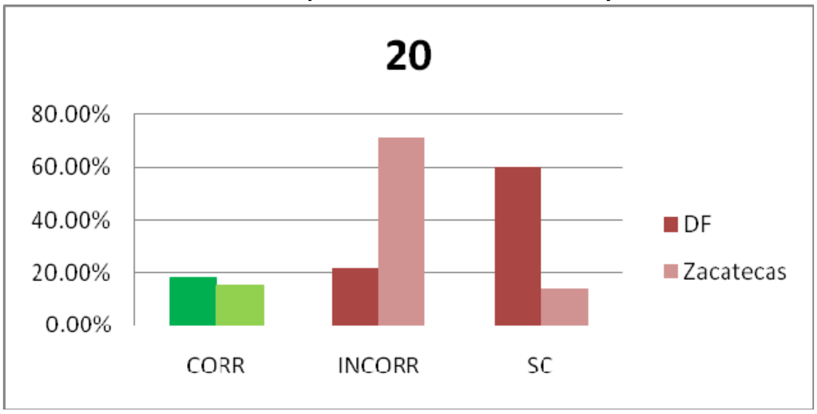
Con esta estrategia es necesario realizar 6 comparaciones.
Estrategia II: mínimo común denominador
Esta requiere de hallar el mcd y realizar 4 divisiones y 4 multiplicaciones: $\frac{4}{5} > \frac{3}{4} > \frac{7}{10} > \frac{5}{8}$ $\frac{32 > 30 > 28 > 25}{40}$.

Comentar el uso de productos cruzados para identificar proporcionalidad en leccion 71 libro del niño matemáticas 6° grado.

Reactivo 20.

20. Una clase tiene 28 alumnos. La razón de niñas a niños es de 4 a 3 ¿Cuántas niñas hay en la clase? Respuesta: _____________________________ Respuesta correcta ***16.***

Gráfica de respuestas estudios Zacatecas y DF.



Significado de las opciones de respuesta.
Respuesta corta: 16

Expectativas del reactivo
Verificar la resolución de problemas***.***

Exploración de respuestas
Respuestas: 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, más niñas.

Las respuestas 3 y 4 se pueden asociar con los datos del enunciado.
La respuesta 7 podría asociarse con la suma de los números 3 y 4 del enunciado.
La respuesta 21 puede indicar la resta entre el total de alumnos menos la suma de los otros datos del enunciado.
Estas respuestas parecen indicar que los alumnos operan con los datos del enunciado sin tener claridad de sus significados.

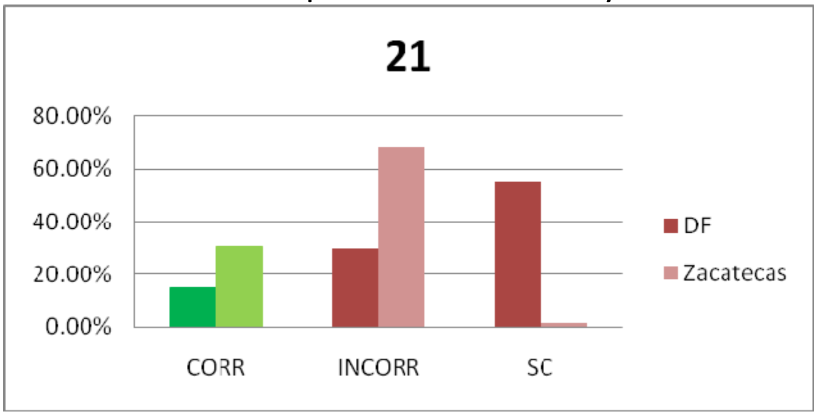
Reactivo 21.

21. Multiplica *0.203 x 0.56 =*

Respuesta: ______________________________

Respuesta correcta ***0.11368***

Gráfica de respuestas estudios Zacatecas y DF.



Significado de las opciones de respuesta.
Respuesta corta: 0.11368.

Expectativas del reactivo
Verificar procedimientos rutinarios.

Exploración de respuestas
Respuestas:
0.00268, 0.068, 0.1015, 0.10288, 0.11258, .11268, 0.11328, 0.11358, 0.1136, 0.11366, 0.11428, 0.11480, 0.11768, 0.11868, 0.11978, 0.11,928, 0.128, 0.12368, 0.17368, 0.19368, 0.67908, 1.1213, 1.1359, 1.1368, 1.1818, 1.364, 2.68, 5.0814, 8.57, 9.462, 10.233, 11.368, 20.50, 118.18.

Entre las respuestas se pueden encontrar:

A) Correctas incompletas 0.1136.
B) Con errores en la operación 0.11258, 0.17368, 0.11768.
C) Correcta la operación con el punto en lugar equivocado, a la manera de la suma [baja el punto] 11.368.
D) Operación correcta con dificultad para ubicar el punto1.1368.

Las respuestas al parecer muestran dificultades con la multiplicación, especialmente en el acomodo de las cifras antes de sumar para obtener el resultado, así como dificultades en la colocación del punto decimal.

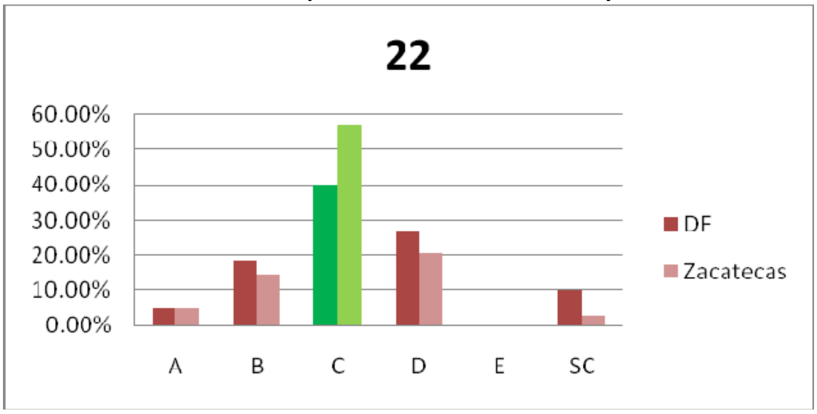
Reactivo 22.

22. El jardín de Laura tiene 84 surcos de col. En cada surco hay 57 coles ¿Cuál de estas representa la mejor manera de calcular cuántas coles son en total?

A) 100x50=5000 C) 80x60=4800
B) 90x60=5400 D) 80x50=4000

Respuesta correcta ***C***

Gráfica de respuestas estudios Zacatecas y DF.



Significado de las opciones de respuesta.
A) Redondear 84 a 100 y 57 a 50.
B) Redondear 84 a 90 y 57 a 60.
C) Correcta.
D) Redondear 84 a 80 y 57 a 50.

Expectativas del reactivo
Verificar el uso de procedimientos complejos.

Exploración de respuestas
Las opciones B y C podrían mostrar redondeos a la decena inmediata sin tomar en cuenta la “cantidad” de unidades en la cifra, así en B se redondea a la decena superior y en D a la decena inferior.

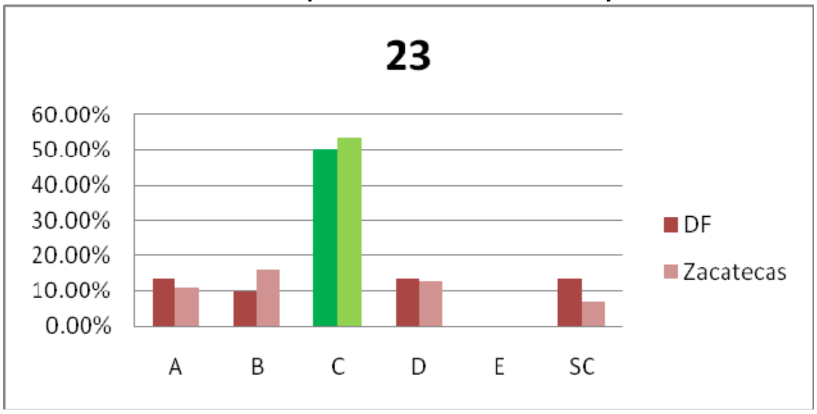
Reactivo 23.

23. El corazón de un ser humano late 72 veces por minuto. ¿De acuerdo con esto, cuantas veces late el corazón en una hora?

A) 420 000 C) 4 200
B) 42 000 D) 420

Respuesta correcta ***C***

Gráfica de respuestas estudios Zacatecas y DF.



Significado de las opciones de respuesta

A) Hace estimación con el número de latidos, redondeado, y los minutos en una hora agregando dos ceros adicionales.
B) Estima con el número de latidos, redondeado, y los minutos de la hora, agregando un cero de más.
C) Correcta.
D) Estima redondeando los latidos a setenta y multiplica por 6 en lugar de 60 u omite agregar un cero al final.

Expectativas del reactivo

Verificar la resolución de problemas.

Exploración de respuestas

Para responder esta pregunta el alumno debe tener en cuenta la partición sexagesimal del tiempo, es decir, que la hora en este caso tiene 60 minutos. Por otra parte se requiere una estimación rápida que se puede realizar en una multiplicación por 10, por ejemplo 70 x 6 x 10.

La mitad de los alumnos respondió correctamente. A y B son opciones que parecen mostrar dificultad con la multiplicación por 10 o múltiplos de 10.

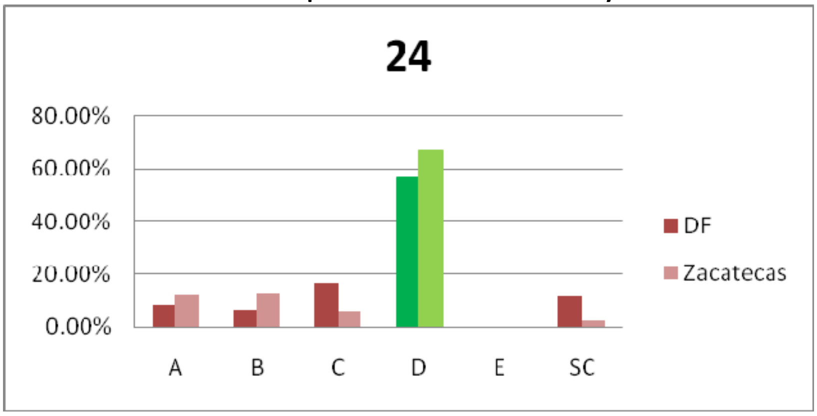
Reactivo 24.

24. Karina, Raquel y su mamá se comieron un pastel. Karina comió $\frac{1}{2}$ del pastel, Raquel $\frac{1}{4}$ del pastel. Su mamá $\frac{1}{4}$ del pastel. ¿Qué parte del total del pastel quedó?

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$ D) Nada

Respuesta correcta ***D***

Gráfica de respuestas estudios Zacatecas y DF.



Significado de las opciones de respuesta.

A) Se podría estar sumando ½ con un cuarto, con lo que se obtienen ¾ o se convirtió ½ a 2/4 que se suman a 1/4 , dejando de lado el ¼ final.
B) Se podría suponer que el medio que comió Karina se integra con los cuartos de Raquel y la mamá.
C) Debido a que las fracciones más pequeñas en que se partió el pastel son un cuarto, pensar que quedó una de ellas.
D) Correcta.

Expectativas del reactivo

Verificar solución de problemas.

Exploración de respuestas

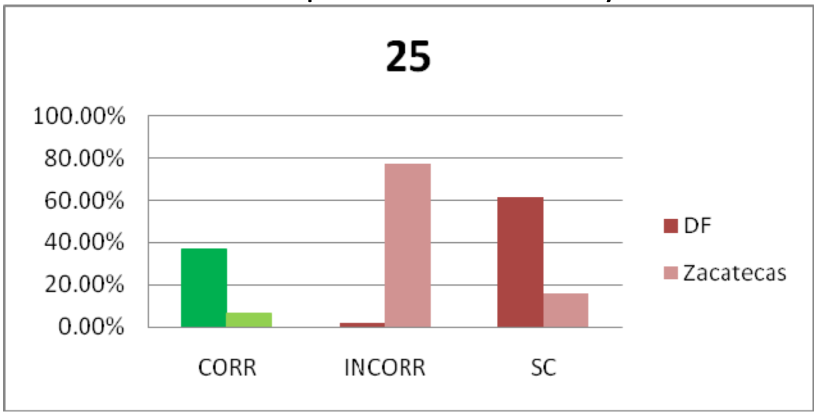
La elección de las opciones no correctas podría deberse a:

- El enunciado indica que quedó algo, entonces se debe elegir una fracción entre las disponibles.
- Lectura descuidada,
- Dificultad para entender el enunciado,
- Apresuramiento para elegir la respuesta, o
- Dificultad con la suma de fracciones.

Reactivo 25.

25. Escribe 0.28 como una fracción reducida (simplificada) Respuesta: ___________________________ Respuesta correcta ***1/4***

Gráfica de respuestas estudios Zacatecas y DF.



Significado de las opciones de respuesta
Respuesta corta: ¼.

Expectativas del reactivo
Verificar el desarrollo de procedimientos de rutina**.**

Exploración de respuestas
0.14, 0.27, 0.2, 0.3, 0.30, 20.2, 28, $\frac{-28}{1}$, $\frac{28}{1}$, $\frac{28}{2}$, $\frac{18}{2}$ $\frac{28}{10}$, $\frac{28}{100}$, $\frac{20}{100}$, $\frac{1}{28}$, $\frac{28}{50}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{7}{7}$, $\frac{25}{7}$, $14\frac{1}{2}$, $\frac{2}{14}$, $\frac{20}{0}$, $\frac{14}{2}$, $1\frac{1}{4}$, Algunas respuestas interesantes son: 0.2, 0.3. y ¼. Veintiocho centésimos puede reducirse a 2 o 3 décimos. Con esas respuestas se cumple con la reducción pero se omite la fracción.
La respuesta ¼ muestra dos formas de pensar diferentes:
a) Falsos cognados respecto a las diferentes representaciones de los racionales. Se construye una fracción con los números que se presentan después del punto decimal y luego se reduce: $0.28 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$. Con esta respuesta se puede ver que el alumno conoce algo de equivalencias.
b) Conocimientos de hechos matemáticos, como que $0.25 = \frac{1}{4}$. La emisión de esta respuesta es incorrecta, sin embargo cumple con ser una fracción y ser reducida.
También las hay con muestra de conocer la relación entre números decimales y fracciones decimales, errónea $\frac{28}{10}$, y correcta $\frac{28}{100}$. En la primera se asocia $\frac{28}{10} = 0.28$ cuando en su forma decimal es 2.8. La segunda expresión es correcta sin embargo no cubre el requerimiento haber sido reducida $\frac{28}{100} = \frac{7}{25}$.
Otras respuestas permiten ver que por falta de conocimiento se hace lo que se pueda con los números disponibles: $\frac{1}{28}$, $\frac{28}{1}$, $\frac{-28}{1}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{4}{7}$, o que no se tiene idea de qué hacer, sin embargo responden: $\frac{20}{0}$, $14\frac{1}{2}$, $\frac{2}{14}$, $\frac{14}{2}$.

Reactivo 26.

26. Dos cajas contienen piezas cuadradas de cartulina para construir un modelo más grande. Hay 4 pequeños cuadros en cada pieza.

Todas las piezas de la caja 1 son de esta forma

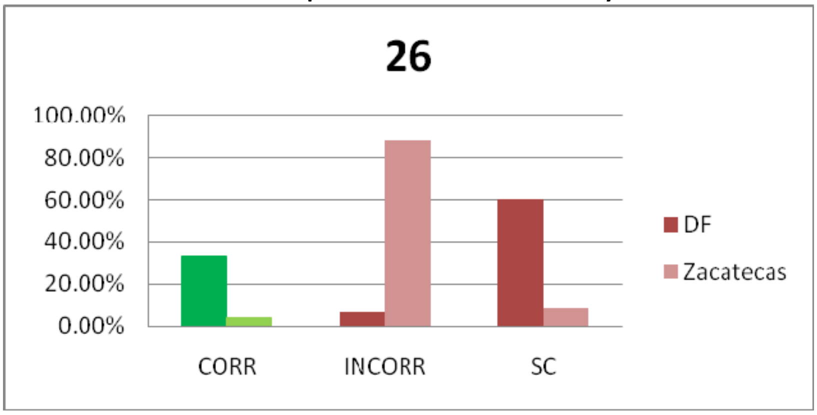
Todas las piezas de la caja 2 son de esta forma

Para formar el modelo, por cada pieza de la caja 2 debe haber 2 piezas de la caja 1. Si se utilizan 60 piezas de la caja 2 ¿Cuántas piezas se necesitarán en total?

Respuesta: ____________________________

Respuesta correcta ***180***

Gráfica de respuestas estudios Zacatecas y DF.



Significado de las opciones de respuesta

Respuesta corta 180.

Expectativas del reactivo

Verificar la resolución de problemas.

Exploración de respuestas

$\frac{1}{2}$, 2, 10, 30, 62, 70, 90, 120, 140, 170, 190, 240

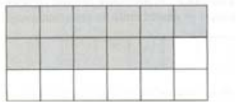
Dificultades para entender el problema, puede ser una mala lectura o una redacción complicada.

a) Las respuestas $\frac{1}{2}$ y 2 pueden asociarse con el doble de piezas de la caja 1 que se necesitan.

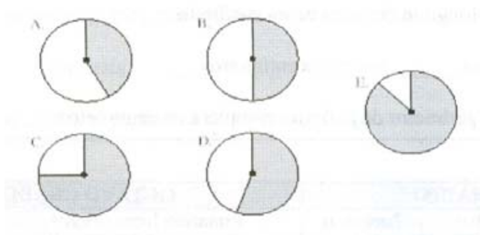
b) 120 responde también a la cantidad de piezas que se necesitan de la caja 1, pero no se responde a la pregunta pues no se incluyen las piezas de la caja 2 con las que se obtiene el total.

Reactivo 27.

27.



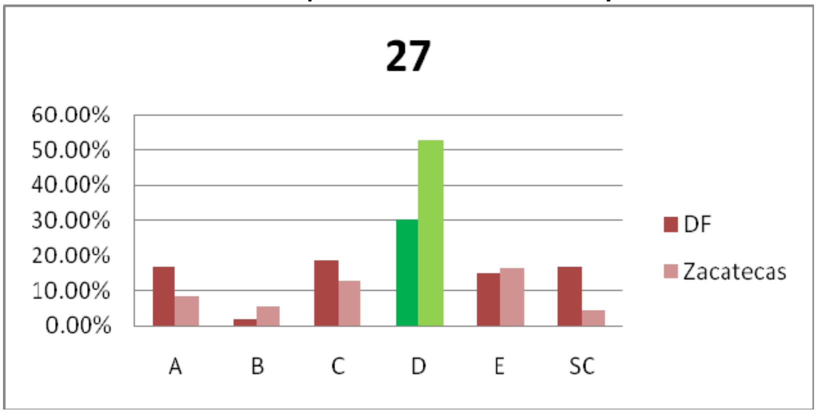
¿Qué círculo tiene aproximadamente la misma fracción sombreada que el rectángulo de arriba?



Respuesta: ______________________________

Respuesta correcta ***D***

Gráfica de respuestas estudios Zacatecas y DF.



Significado de las opciones de respuesta.

A) Dificultades de extrapolación.
B) ¿?
C) Dificultad de percepción.
D) Correcta.
E) ¿?

Expectativas del reactivo

Verificar el uso de procedimientos complejos.

Exploración de respuestas

Menos de una tercera parte respondió correctamente.

Para responder la pregunta es necesario, primero identificar qué fracción del rectángulo está sombreada: aproximadamente 2/3, posteriormente asociar a la sombra del círculo.

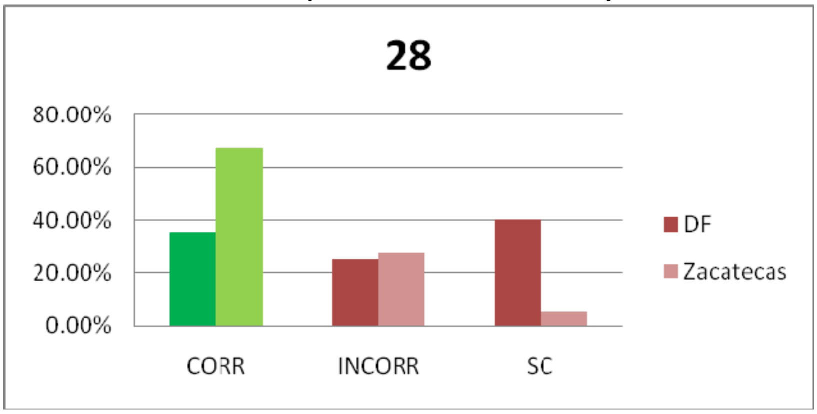
La cuadrícula podría sugerir que se trata de 11/18 lo cual complicaría asociar con alguno de los círculos sombreados.

Reactivo 28.

28. Un químico mezcla 3.75 mililitros de una solución A con 5.625 mililitros de una solución B para formar una nueva solución. ¿Cuántos mililitros contiene esta nueva solución?

Respuesta: ______________________________
Respuesta correcta ***9.375 ml***

Gráfica de respuestas estudios Zacatecas y DF.



Significado de las opciones de respuesta
Respuesta corta 9.375 ml.

Expectativas del reactivo
Verificar solución de problemas***.***

Exploración de respuestas
6, 6.000, 6.34, 7.700, 8.105, 8.15, 8.1575, 8.185, 8.375, 8.500, 8.700, 8.726, 9.325, 9.350, 9.395, 9.475, 20.493, 21.09375, 40, 70.07, 100, 122.85, 205.937, 525.

Suman por separado los enteros de los decimales: 8.700 = 5+3 y 625+75

	3.		7	5
+	5.	6	2	5
	8.	7	0	0

Suman correctamente pero no incluyen la unidad que se “lleva” de los décimos a los enteros. Parecen “no mezclar” decimales con enteros: 8.375

	3.	7	5	
+	5.	6	2	5
	8.	3	7	5

Una variante de esa situación tiene que ver con que la suma de la expansión decimal se realiza de izquierda a derecha. En este caso de la suma de los décimos se obtiene una unidad de orden superior que en lugar de agregar a las unidades se agrega a las centenas:

	3.	7	5	
+	5.	6	2	5
	8	3	8	5

Se hallaron también “descuidos” en la suma de los dígitos mezclados con la idea de separar decimales de unidades. Aquí se registran los dos dígitos de la suma “descuidada” de los décimos:

	3.	7	5	
+	5.	6	2	5
	8.	15	7	5

y

	3.	7	5	
+	5.	6	2	5
	8.	1	0	5

En la que la suma de los décimos es correcta pero se registra el segundo dígito de la suma [el 1 del 13] y el primer dígito se suma a la siguiente columna de dígitos [el 3 del 13]. Es interesante observar que la suma de los centésimos también es de dos dígitos, pero que esta vez se registra el primero [el 0 del 10] y el segundo ya no se agrega a ninguna columna.

6.000 y 6 son respuestas en las que ignoran el punto decimal en la colocación de los sumandos, en cambio lo toman en cuenta en el resultado, aunque en el sitio correcto de manera errónea:

		3.	7	5
+	5.	5	2	5
	6.	0	0	0

En estas respuestas se exhiben malas aplicaciones a los decimales de reglas bien aprendidas para los enteros.

Reactivo 29.

29. El año pasado había 1172 alumnos en una escuela. Este año hay 15% más estudiantes que el año pasado. Aproximadamente ¿Cuántos estudiantes hay en esa escuela este año?

A) 1800 D) 1400
B) 1600 E) 1200
C) 1500

Respuesta correcta ***D***

Gráfica de respuestas estudios Zacatecas y DF.

Significado de las opciones de respuesta

A) Podría asociarse el 15% con el 50% o con la mitad de 1172 con lo que la suma de 1172 + 600 se obtiene aproximadamente 1800
B) ¿?
C) Asociar 15% con 15 x 100 para obtener 1500.
D) Correcta
E) Sumar 15 del 15% a 1172 con lo que podrían acercarse a 1200. Sumar 15 en lugar de agregar 15%.

Expectativas del reactivo

Verificar el uso de procedimientos complejos.

Exploración de respuestas

Responder esta pregunta implica identificar 1172 como el 100% o como base a la que se habrá de incrementar el valor del porcentaje de 15%, y reconocer que 15% equivale a 0.15 para poder multiplicarlo por la base.
Se trata de hacer una estimación a una cifra cercana al resultado de una multiplicación de números enteros por decimales.
Hay quien tiene dificultad para entender el significado de sumar porcentaje pues realiza la suma de la cifra sin entender el significado del signo % a continuación de la cifra. Esta situación puede ser una explicación a la popularidad en la elección de la opción E.

Reactivo 30.

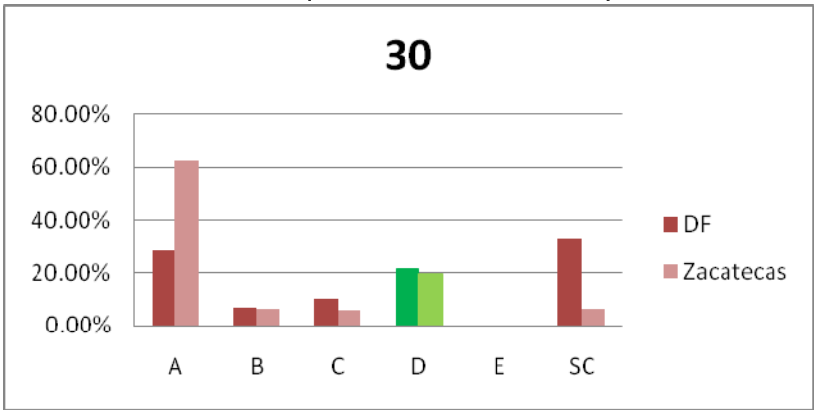
30. $\frac{3}{4}+\frac{8}{3}+\frac{11}{8}=$

A) $\frac{22}{15}$ C) $\frac{91}{24}$

B) $\frac{43}{24}$ D) $\frac{115}{24}$

Respuesta correcta ***D***

Gráfica de respuestas estudios Zacatecas y DF.



Significado de las opciones de respuesta

A) Suma de numeradores y suma de denominadores.
B) Común denominador y ¿?.
C) Común denominador, numerador 3+(8x11).
D) Correcta.

Expectativas del reactivo

Verificar procedimiento de rutina.

Exploración de respuestas

Realizar la suma de fracciones requiere del estudiante saber equivalencia de fracciones para obtener: $\frac{3}{4}\times 6=\frac{18}{24}$, $\frac{8}{3}\times 8=\frac{64}{24}$, $\frac{11}{8}\times 3=\frac{33}{24}$; y sumar $\frac{18}{24}+\frac{64}{24}+\frac{33}{24}=\frac{115}{24}$, o conocer el algoritmo de suma de fracciones

$$\frac{3}{4}+\frac{8}{3}+\frac{11}{8}=\frac{18+64+33}{24}=\frac{115}{24}.$$

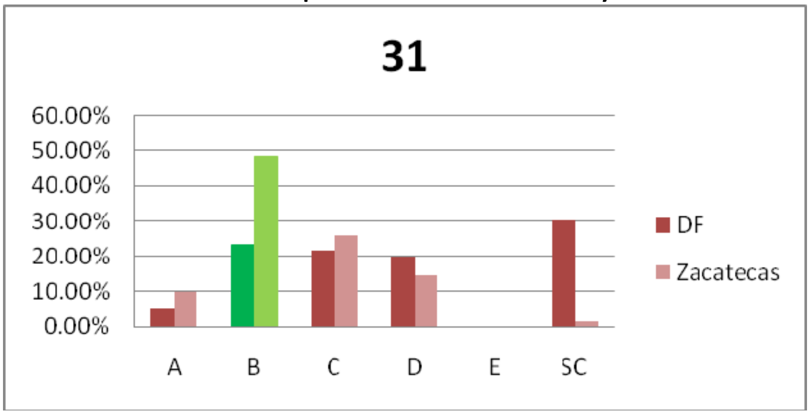
La respuesta más popular muestra dificultad con el algoritmo de suma de fracciones o al menos con una parte del proceso. Tal vez evocan la suma de las partes solamente.

$$\frac{3}{4}+\frac{8}{3}+\frac{11}{8}=\frac{3+8+11}{4+3+8}=\frac{22}{15}.$$

Reactivo 31.

31. Un periódico anunció que cerca de 18 200 árboles habían sido plantados en el parque. El número fue redondeado a la centena más cercana. ¿Cuál de estos números podría ser el número de árboles plantados? A) 18 043 C) 18 289 B) 18 189 D) 18 328 Respuesta correcta ***B***

Gráfica de respuestas estudios Zacatecas y DF.



Significado de las opciones de respuesta
A) Número cercano a la centena 181 (18 100) sin tomar en cuenta que la centena de referencia a la que se redondeó es 18200.
B) Correcta.
C) Podrían pensar que redondear significa “quitar” lo que está más allá del lugar de las centenas.
D) Pudo haber confusión generada por la posición del número 2 considerando que se encontraba en la centena en lugar de la decena.

Expectativas del reactivo
Solución de problemas.

Exploración de respuestas
Dificultades en la lectura del enunciado. La comprensión del significado de “redondeo a centena” puede llevar en A a pensar en una centena: 100.
En C a que redondear significa quitar lo que sobra a partir de la centena

Reactivo 32

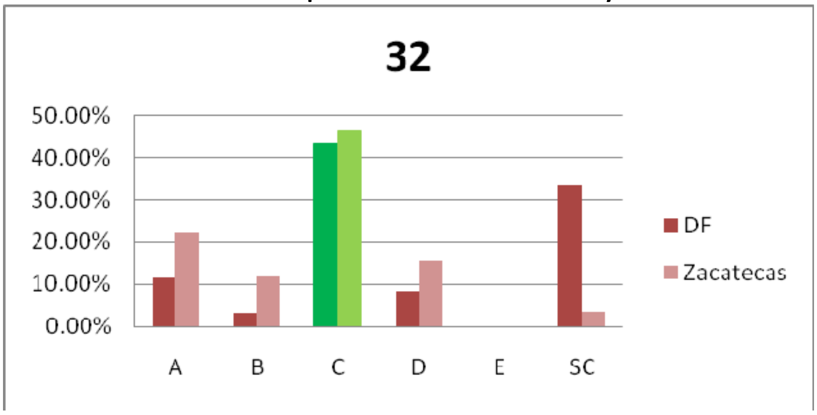
32. ¿En cuál lista de números, son todas fracciones equivalentes?

A) $\frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{12}{14}$ C) $\frac{3}{8}, \frac{6}{16}, \frac{12}{32}$

B) $\frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{9}{15}$ D) $\frac{5}{10}, \frac{10}{15}, \frac{1}{2}$

Respuesta correcta ***C***

Gráfica de respuestas estudios Zacatecas y DF.



Significado de las opciones de respuesta

A) Se observa que los numeradores son múltiplos pero no se presta atención a los denominadores.

B) ¿?

C) Correcta.

D) En los numeradores se ve la relación el doble de y un quinto de, en los denominadores de la primera y la tercera fracción la quinta parte.

Expectativas del reactivo

Verificar el conocimiento adquirido en equivalencia de fracciones.

Exploración de respuestas

Se requiere saber que las fracciones equivalentes son aquellas que tanto numerador como denominador se multiplican por un mismo número, o que son múltiplos de un mismo número.

Siete de los 60 alumnos eligieron A, quizá el apresuramiento hizo que no atendieran los denominadores.

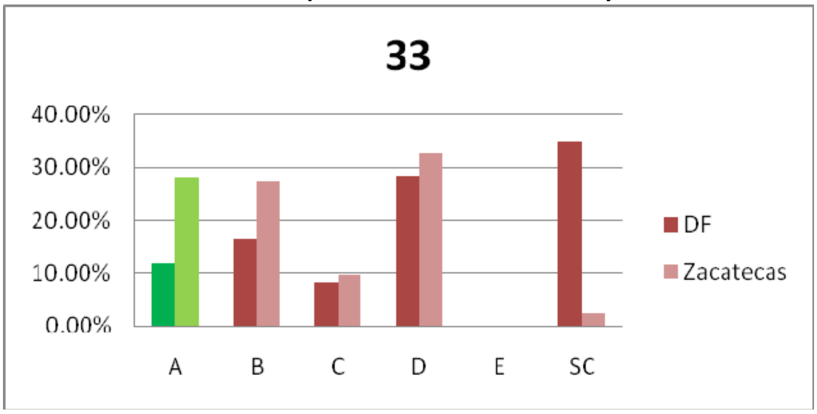
Reactivo 33.

33. Juan tenía una bolsa de canicas, le regaló la mitad de las canicas a Enrique y después la tercera parte de las canicas restantes se las dio a Miguel. Después de esto resultó que Juan aún tenía 6 canicas. ¿Cuántas canicas tenía Juan al principio?

A) 18 C) 30
B) 24 D) 36

Respuesta correcta ***A***

Gráfica de respuestas estudios Zacatecas y DF.



Significado de las opciones de respuesta

A) Correcta.
B) Por eliminación 24-12=12-4=8, tratando de usar reversibilidad: 6+6+12.
C) Por eliminación 30-15-5, partiendo de 6+6(1/3 de 18) +18.
D) Por eliminación: 36-18-6=12, partiendo de que quedan 6 y hay 6 sextos multiplican 6x6.

Expectativas del reactivo

Solución de problemas.

Exploración de respuestas

Podrían tener dificultad para entender el enunciado o para establecer las relaciones entre los tercios que integran la mitad y las mitades del entero.

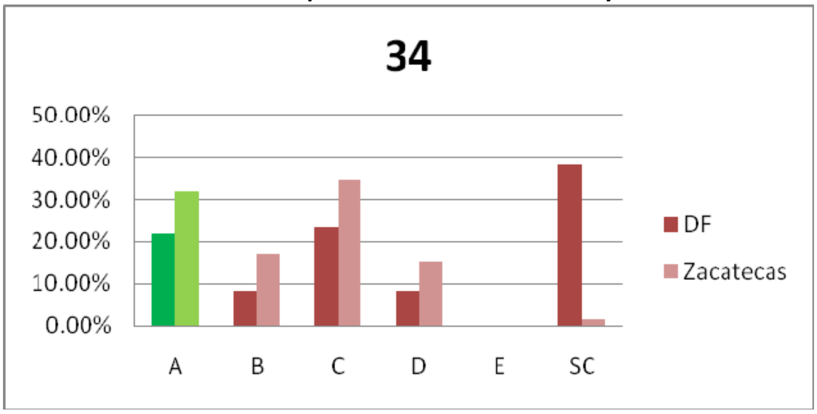
Una posible estrategia para resolver es eliminación, tomando la cifra de las opciones como punto de partida para extraer la mitad, luego un tercio y finalmente comprobando que queden 6. Por eliminación 18-9=9-3=6.

Otra puede ser partiendo de que en una mitad se obsequia 1/3 se puede llegar a pensar que una mitad tiene 3 tercios, las dos mitades 6 sextos y que al final quedan 6 canicas multiplicando al final los dos últimos números obtenidos, 6x 6 =36 para marcar la opción D.

Reactivo 34.

34. Un carro tiene un tanque de gasolina con capacidad de 35 L. El carro consume 7.5 L de gasolina por cada 100 km de recorrido. El carro comienza un viaje de 250 km con el tanque lleno. ¿Cuánta gasolina resta en el tanque al final del viaje? A) 16.25 L   C) 18.75 L B) 17.65 L   D) 23.75 L Respuesta correcta ***A***

Gráfica de respuestas estudios Zacatecas y DF.



Significado de las opciones de respuesta

A) Correcta
B) Obtener el doble de lo que se consume en 100 km más ¿?
C) Obtuvieron el consumo de gasolina pero olvidaron restarlo al tanque lleno
D) Suma la gasolina consumida en 100 km (7.5) más 3.75 de 50 km y resta a los 35 de capacidad del tanque

Expectativas del reactivo

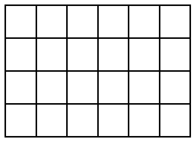
Solución de problemas.

Exploración de respuestas

Creo que a quienes respondieron C les faltó restar
La popularidad de la respuesta C puede deberse a que se considera terminado el problema con la obtención del consumo, pero se olvida la parte de calcular cuánto queda en el tanque. Se trata de una resolución parcial.
Puede ser una respuesta apresurada.

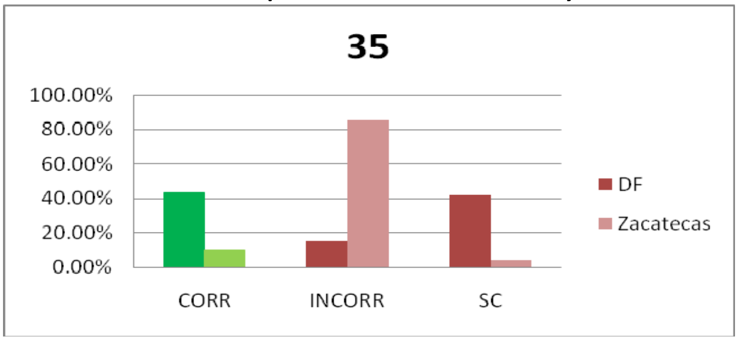
Reactivo 35

35. Sombrea $\frac{5}{8}$ del total de la siguiente cuadrícula



Respuesta correcta ***15 cuadritos sombreados.***

Gráfica de respuestas estudios Zacatecas y DF.

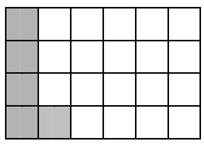


Significado de las opciones de respuesta
Respuesta correcta: 15 cuadros sombreados.

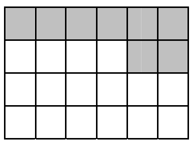
Expectativas del reactivo
Verificar conocimiento.

Exploración de respuestas
2, 5, 7, 8, 12, 13[En un caso se agregaron 2 columnas y 1 renglón], 14, 16, 17, 20.
Parece difícil identificar que los veinticuatroavos son múltiplo de los octavos, de manera que no se ve una conexión directa entre la unidad de referencia y la fracción que se pide sombrear. Por otra parte podría suponerse además dificultad con el significado de las partes de la fracción y de la fracción integra. Como en otros reactivos ocurre que:

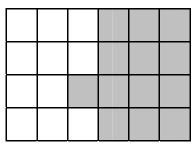
a) Se toma en cuenta sólo el numerador: sombrean 5:



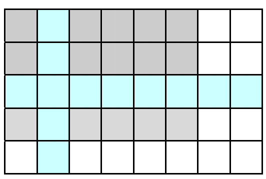
b) Se sombrea únicamente el denominador: 8



c) 13 es una respuesta que exhibe dos formas de pensamiento distinto:
c.a. Sumar numerador más denominador y sombrear el resultado de la suma:



c.b Agregar filas y columnas para poder sombrear 5 del numerador y 8 del denominador ($\frac{5}{8}$):



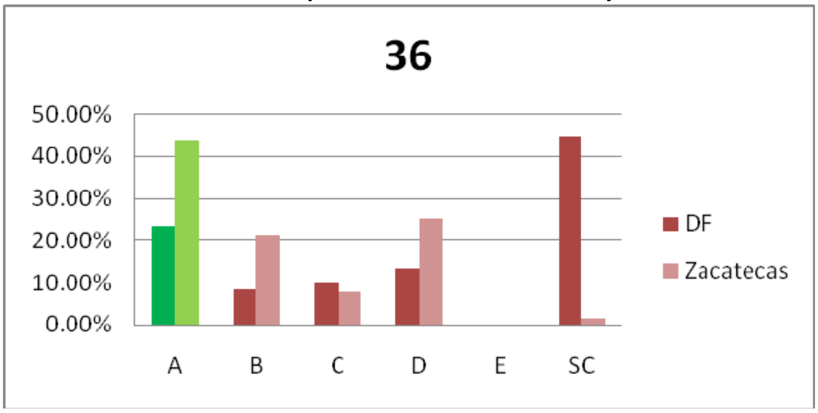
Reactivo 36.

36. Los tres quintos de los alumnos de una clase son niñas. Si añadimos a esa clase 5 niñas y 5 niños, ¿Qué afirmación es cierta?

A. Hay más niñas que niños
B. Hay igual número de niñas que de niños
C. Hay más niños que niñas
D. Con la información dada no se puede saber si hay más niñas que niños

Respuesta correcta ***A***

Gráfica de respuestas estudios Zacatecas y DF.



Significado de las opciones de respuesta

A) Correcta.
B) Se hace referencia que ambos subgrupos se incrementan con la misma cantidad.
C) ¿?
D) Se considera necesario saber cuántos alumnos hay en total en la clase, al menos, para poder "calcular" cuantos son $\frac{3}{5} y \frac{2}{5}$ respectivamente, y posteriormente sumar los 5 a cada sexo.

Expectativas del reactivo

Solución de problemas.

Exploración de respuestas

Responder acertadamente la pregunta requiere una lectura cuidadosa del enunciado e identificar que $\frac{3}{5} > \frac{2}{5}$ y que $\frac{3}{5} + 5 > \frac{2}{5} + 5$. Porque la clase se compone por $\frac{3}{5}$ de niñas y $\frac{2}{5}$ de niños, de manera que adicionar la misma cantidad de ambos sexos no altera las fracciones respectivas.

Las opciones no correctas podrían mostrar dificultad para entender el enunciado. También se podría ver una dificultad para operar con fracciones.

Esta pregunta no fue respondida por la mayoría de estudiantes de Hermanos Revueltas, al parecer por falta de tiempo.

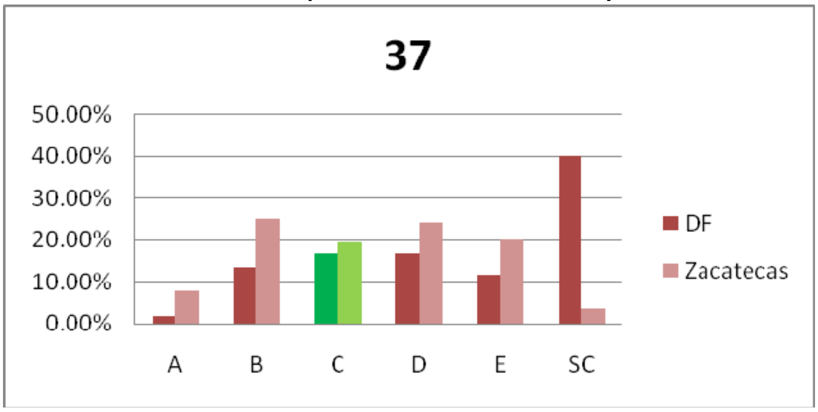
Reactivo 37.

37. La familia Martínez utiliza cerca de 6000 l de agua por semana. Aproximadamente, ¿Cuántos litros de agua usarán por año?

A) 30 000 D) 2 400 000
B) 240 000 E) 3 000 000
C) 300 000

Respuesta correcta ***C***

Gráfica de respuestas estudios Zacatecas y DF.



Significado de las opciones de respuesta

A) Podría ser un mal cálculo mental de multiplicar 6000 x 50 (semanas)
B) Tal vez se pensó en que el mes tiene 4 semanas y el año 10 meses por lo que se multiplicó 6000 x 40.
C) Correcta
D) ¿?
E) Cálculo multiplicando gasto semanal por semanas del año agregando ceros adicionales y redondeando.

Expectativas del reactivo

Procedimiento de rutina.

Exploración de respuestas

En un caso un estudiante multiplicó 4 semanas por 12 meses, luego 6000 x 48 de donde obtuvo 288000 y decidió que la cifra que mejor se ajustaba a su resultado fue 240000.
Conocer la partición del año en semanas facilita la solución del problema: 6000 x 52 = 300 000 aproximadamente.
En las opciones A y E podrían mirarse dificultades con la multiplicación por 10 y sus múltiplos, respecto a cuántos ceros agregar cuando se multiplica por 10, 100, etcétera.
Las opciones B y D adicionalmente presentan una multiplicación por 4 que pudo obtenerse de las 4 semanas que integran el mes.

Reactivo 38

38. $\frac{3}{4}+\left(\frac{2}{3}x\frac{1}{4}\right)=$

A) $\frac{1}{8}$

B) $\frac{5}{16}$

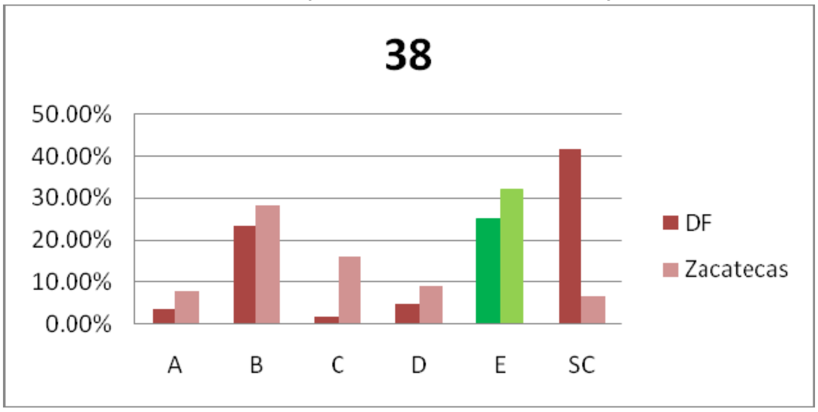
C) $\frac{17}{48}$

D) $\frac{5}{6}$

E) $\frac{11}{12}$

Respuesta correcta ***E***

Gráfica de respuestas estudios Zacatecas y DF.



Significado de las opciones de respuesta

A) ¿?

B) hecha la multiplicación se suman tanto denominadores como numeradores $\frac{3}{4}+\left(\frac{2}{3}x\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}+\frac{2}{12}=\frac{5}{16}$

C) se multiplican todos los denominadores entre si y se suman todos los numeradores más todos los denominadores:

$$\frac{3}{4}+\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\right)=\frac{3+2+1+4+3+4}{4\times3\times4}=\frac{17}{48}$$

D) ¿?

E) Correcta.

Expectativas del reactivo

Procedimiento de rutina.

Exploración de respuestas

Para obtener el resultado de la operación se requiere saber desarrollar los algoritmos de multiplicación y suma de fracciones. Tal vez las reglas para operar sean la fuente de dificultad porque multiplicar se hace multiplicando tanto los numeradores como los denominadores entre sí sin necesidad de hallar un común denominador, mientras que la suma requiere de convertir a fracciones equivalentes o de hallar el denominador común para posteriormente operar con los equivalentes.

En la opción B se opera bien la parte de la multiplicación, pero se suma de una manera similar a la multiplicación.

En este ejercicio, según la opción D se multiplican todos los denominadores y suman todos los numeradores.

Reactivo 39

39. Dos cajas contienen piezas cuadradas de cartulina para construir un modelo más grande. Hay 4 pequeños cuadros en cada pieza.

Todas las piezas de la caja 1 son de esta forma

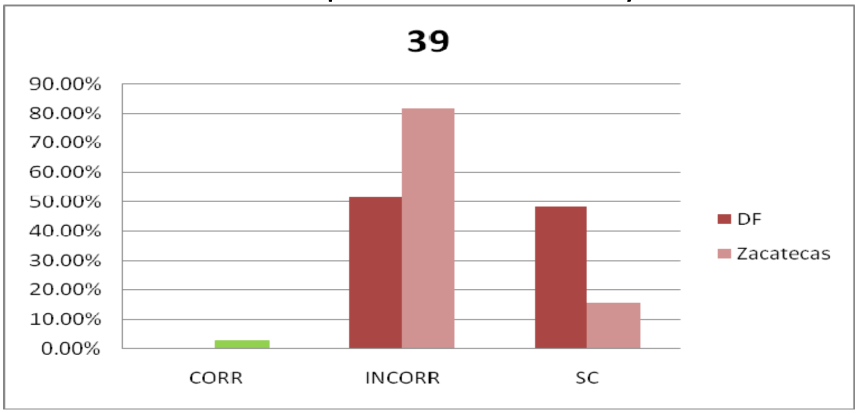
Todas las piezas de la caja 2 son de esta forma

Para formar el modelo, por cada pieza de la caja 2 debe haber 2 piezas de la caja 1. Construido el modelo ¿Qué fracción de los cuadros pequeños será de color negro?

Respuesta: ___________________________

Respuesta correcta ***1/3***

Gráfica de respuestas estudios Zacatecas y DF.



Significado de las opciones de respuesta

Respuesta corta a la pregunta 1/3 o cualquier fracción equivalente.

Expectativas del reactivo

Solución de problemas.

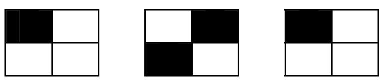
Exploración de respuestas

2, 2/1, ½, 2/2, ¼, 2/4, ¾, 4/4, 6/4, 2/7, 2/8, 3/8, 12/8, 4/12, 8/12, 6, 30, 90, 120, 126, 180, 6/?

Dificultad para entender o decodificar el enunciado. Sin ser respuestas correctas se puede encontrar una lógica de pensamiento:

a) Suman las fracciones negras de las tres tarjetas a que se refiere el enunciado “por cada pieza de la caja 2 [1] debe haber 2 piezas de la caja 1 [2].

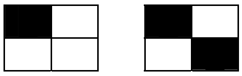
1. Tomando como unidad de referencia los cuartos en que se divide la tarjeta: 4/4,
2. Tomando como unidad de referencia los 12 en que se dividen las tres tarjetas: 4/12



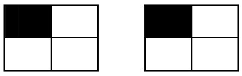
También suman las partes blancas tomando como unidad de referencia:

1. Los cuartos en que se divide cada tarjeta: 6/4.
2. Los doceavos en los que se dividen las tres tarjetas: 8/12.

b) Suman las fracciones negras de los dos modelos de tarjeta, considerando como unidad de referencia
1. La tarjeta dividida en cuartos: ¾
2. Los octavos en que se dividen las dos tarjetas: 3/8.



c) Cuentan las dos fracciones negras de las dos piezas [tarjetas] de la caja 1, tomando como unidad de referencia los octavos en que se dividen las dos tarjetas: 2/8



d) Otras respuestas podrían sugerir:

- Proporción 2 a 1por lo que tendrían 2/1.
- La fracción de la caja 1 con respecto a la caja dos es el doble: 2.

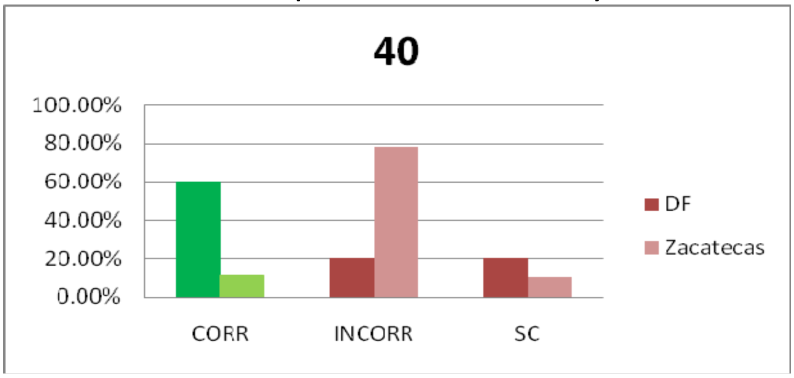
Reactivo 40

40. Teresa quería grabar 5 canciones en un casete. El tiempo de duración de cada canción se muestra en la siguiente tabla:

Canción	Duración
1	2 minutos 41 segundos
2	3 minutos 10 segundos
3	2 minutos 51 segundos
4	3 minutos
5	3 minutos 32 segundos

Calcula el total de tiempo necesario para grabar las cinco canciones, escribe tu respuesta redondeando el total a minutos y anota cómo realizaste el cálculo.
Respuesta: ____________________________
Respuesta correcta ***15 o 16 minutos.***

Gráfica de respuestas estudios Zacatecas y DF.



Significado de las opciones de respuesta
Respuesta corta 15 o 16 minutos.

Expectativas del reactivo
Solución de problemas.

Exploración de respuestas
10m13s, 12m13s, 12m14s, 13, 13m13s, 13m30, 14, 14m32s, 14m34s, 14m55s, 14.92, 16, 24, 26.4, 50, 146, 450
Responder esta pregunta requiere de saber que la partición del tiempo por la cual se pregunta es sexagesimal, es decir, que por cada 60 segundos se acumula un minuto.

Ignorar la partición sexagesimal del minuto lleva a respuestas correctas en el sistema decimal: 14minutos con 34 segundos:

min	segundos
2	41
3	10
2	51
3	
3	32
13	134

10 minutos con 13 segundos es una suma descuidada de los minutos generada en que la canción cuatro dura 3 minutos, debido a que no registra segundos la “columna de minutos” los excluye por lo que suman 10 minutos, luego suma los segundos y parece hacer una analogía con la falsa idea de que los decimales no se mezclan con los enteros y que los segundos no se mezclan con los minutos:

min	segundos	
2	4	1
3	1	0
2	5	1
3		
3	3	2
10	13	4

Reactivo 41.

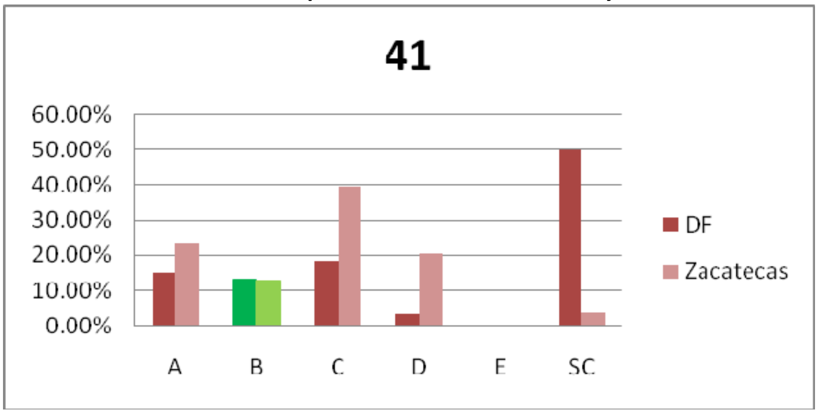
41. ¿Qué lista muestra los números ordenados del menor al mayor?

A) 0.345, 0.19, 0.8, $\frac{1}{5}$ C) 0.8, 0.19, $\frac{1}{5}$, 0.345

B) 0.19, $\frac{1}{5}$, 0.345, 0.8 D) $\frac{1}{5}$, 0.8, 0.345, 0.19

Respuesta correcta ***B***

Gráfica de respuestas estudios Zacatecas y DF.



Significado de las opciones de respuesta
A) Se ordenan los decimales de mayor a menor como si fueran enteros.
B) Correcta
C) Se ordenan [como números naturales] del menor al mayor
D) ¿?

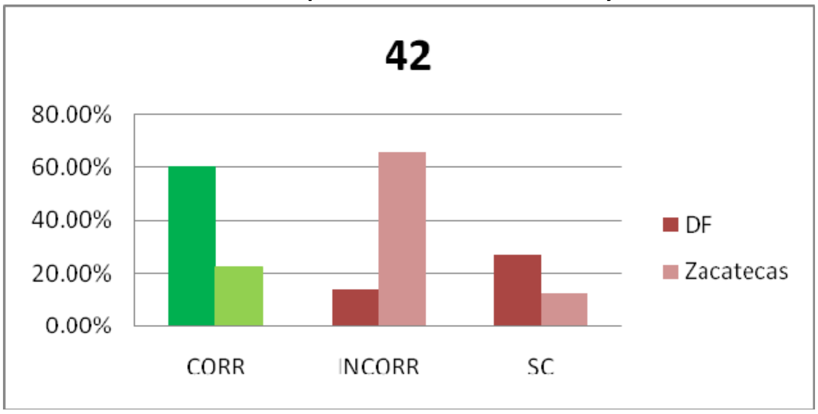
Expectativas del reactivo
Uso de procedimientos complejos.

Exploración de respuestas
En las opciones A y C los alumnos podrían estar aplicando reglas de los números enteros a los decimales.

Reactivo 42.

42. Redondeado a la decena de kilogramo más cercano, el peso de un delfín fue reportado como de 170 kg. Escribe el peso que pueda ser considerado como el peso real de ese delfín. Respuesta: ____________________________ Respuesta correcta ***Cualquier número entre el intervalo 165-175.***

Gráfica de respuestas estudios Zacatecas y DF.



Significado de las opciones de respuesta
Respuesta corta: cualquier número del intervalo 165 -175

Expectativas del reactivo
Uso de procedimientos complejos.

Exploración de respuestas
1.700, 2, 155, 158, 160, 169.4, 169.90, 180, 200, 230, 240, 250, 270, 874, 1700, 1719.
Dificultad para entender el enunciado. El término decena parece ser el origen de las respuestas erróneas.
a) 169.90 es una respuesta correcta, sin embargo podría significar que hay alguna confusión entre décimo y decena. Redondear 169.90 en una décima le lleva a 170.
b) Se hallaron respuestas en las que:

1. Se quitó una decena: 160.
2. Se agregó una decena: 180.
3. Se agregó una centena: 270.
4. Se redondeo a la siguiente centena: 200.
5. Las 17 decenas [170] a centenas: 1700.

Reactivo 43.

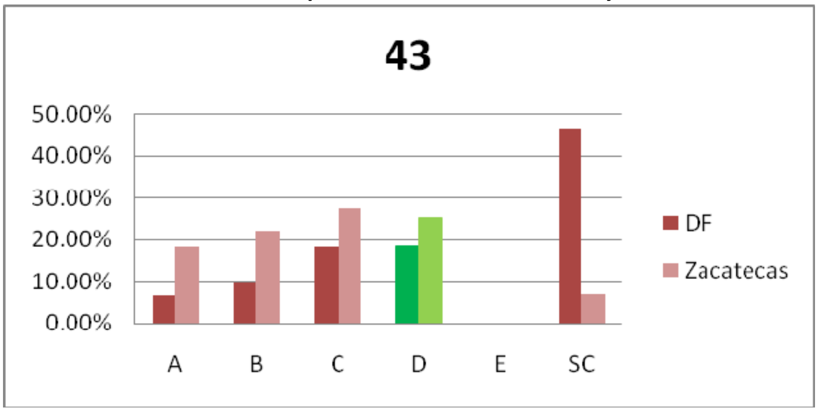
43. Para obtener una pintura de un cierto color Ana mezcla 5 litros de pintura roja, 2 litros de pintura azul y 2 litros de pintura amarilla. ¿Cuál es la proporción, expresada como fracción, de pintura roja en el total de la mezcla?

A) $\frac{5}{2}$ C) $\frac{5}{4}$

B) $\frac{9}{4}$ D) $\frac{5}{9}$

Respuesta correcta ***D***

Gráfica de respuestas estudios Zacatecas y DF.



Significado de las opciones de respuesta

A) Pintura roja y alguna de las dos pinturas restantes.
B) El total de todos los colores de pintura con los litros que no son roja.
C) La pintura roja con la suma de las otras pinturas.
D) Correcta.

Expectativas del reactivo

Verificar procedimientos de rutina.

Exploración de respuestas

Podría haber dificultad para entender el significado de proporción.

Otra idea es que la indicación de expresar la proporción como fracción incluida en la pregunta del enunciado haga suponer que con los datos que se tienen se puede integrar la fracción correspondiente a la proporción 5 de roja por cuatro de los otros colores.

Anexo 4.
Guión de entrevista

Nombre: ____

Edad: ____________________

Sexo: Masculino ☐ Femenino ☐

Estudio en:

Secundaria General ☐ Secundaria Técnica ☐

Telesecundaria ☐ Secundaria Particular ☐

Secundaria Estatal ☐

Grado:

Primero ☐ Segundo ☐ Tercero ☐

INSTRUCCIONES GENERALES

En este cuadernillo encontrarás preguntas acerca de matemáticas. Te darás cuenta de que hay tres tipos diferentes de preguntas: a) de opción múltiple, b) de respuesta breve y c) de respuesta extendida. Si te encuentras con una pregunta de opción múltiple sólo encierra en un círculo la letra que consideres responde correctamente.

Ejemplo:

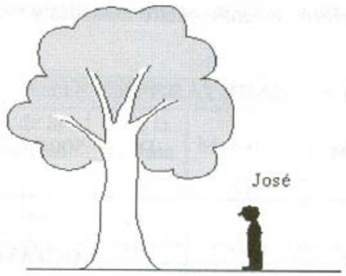
1. Un número mayor que π .

A. 3.1316 B. 3.1417

C. 3.1216 C. 3.1116

En las preguntas de respuesta breve lo único que necesitas es anotar tu respuesta sin justificar con operaciones tu resultado. Existe un tercer tipo de preguntas llamadas de respuesta extendida, de las cuales es necesario justificar tu respuesta por medio de las operaciones que utilizaste para llegar a tu solución.

1.



José tiene 1.5 m de estatura. Aproximadamente ¿Qué altura tiene el árbol?

A) 4 m
B) 6 m
C) 8 m
D) 10 m

2. ¿Qué número tiene cinco centenas, cuatro unidades y siete décimos?

A) 54.7
B) 504.7
C) 547
D) 5004.7

11. Teresa quería grabar 5 canciones en un casete. El tiempo de duración de cada canción se muestra en la siguiente tabla:

Canción	Duración
1	2 minutos 41 segundos
2	3 minutos 10 segundos
3	2 minutos 51 segundos
4	3 minutos
5	3 minutos 32 segundos

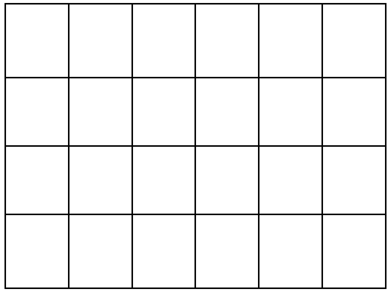
Calcula el total de tiempo necesario para grabar las cinco canciones, escribe tu respuesta redondeando el total a minutos y anota cómo realizaste el cálculo.

Respuesta: ___________________________

9. Escribe 0.28 como una fracción reducida (simplificada)

Respuesta: ____________________________

10. Sombrea $\frac{5}{8}$ del total de la siguiente cuadrícula



3. Si el precio de un producto aumenta de 60 centavos a 75 centavos ¿Cuál es el porcentaje de incremento en el precio?

A) 15% C) 25%

B) 20% D) 30%

4. ¿Cuál de los siguientes números representa al número 89.0638 redondeado a centésimos?

A) 100 D) 89.06

B) 90 E) 89.064

C) 89.1

5. Divide $\frac{8}{35} \div \frac{4}{15} =$

Respuesta: ______________________________

6. ¿Qué número es el más grande?

A) $\frac{4}{5}$ B) $\frac{3}{4}$

C) $\frac{5}{8}$ D) $\frac{7}{10}$

7. La familia Martínez utiliza cerca de 6000 l de agua por semana. Aproximadamente, ¿Cuántos litros de agua usarán por año?

A) 30 000
B) 240 000
C) 300 000
D) 2 400 000
E) 3 000 000

8. Dos cajas contienen piezas cuadradas de cartulina para construir un modelo más grande. Hay 4 pequeños cuadros en cada pieza.

Todas las piezas de la caja 1 son de esta forma

Todas las piezas de la caja 2 son de esta forma

Para formar el modelo, por cada pieza de la caja 2 debe haber 2 piezas de la caja 1.
Construido el modelo ¿Qué fracción de los cuadros pequeños será de color negro?

Respuesta: ____________________________

Anexo 5.
Tablas de analisis

Pregunta 1. José tiene una estatura de 1.5… Contenido Estimación.

Cuautli

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias			Uso del recurso gráfico
Procedimientos		**Respuesta: A) 4m.** Con el trazo, Cuautli transfiere la medida de la altura del sujeto, a un punto en el tronco del árbol cercano a la mitad de su altura; luego hace una estimación visual del resto de la altura del árbol, suponiendo que la medida transferida cabe una vez más completa y sobra algo. La suposición lleva a multiplicar 1.5 x 2 y considerar el sobrante como un metro.	…Tu respuesta fue que la altura del árbol tiene 4 metros ¿Cómo lo supiste? C. Pues tracé una línea de su cabeza hacia el árbol [traza una línea horizontal, a mano alzada, de la altura de la cabeza al tronco del árbol].
Razonamientos		La decisión por la respuesta errónea, al parecer, se basa en la estimación de que la altura de la figura de José cabe 2 veces completas y algo más. La imprecisión en el traslado de la medida, la prisa por responder y la ausencia de verificación le llevan a validar su percepción visual como correcta.	C. […] luego vi que eran como tres metros, pero todavía sacaba un poco más y entonces lo cerré con el cuatro.
Microgénesis			
Proceso			

Eduardo

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias			Uso del recurso gráfico
Procedimientos		**Respuesta: A) 4m.** Eduardo estima la altura del árbol tomando como base su percepción visual.	E. Tú respondiste que José mide 4 metros. ¿Cómo lo supiste? L. Pues es ver la distancia de José y el árbol.
Razonamientos		La respuesta sugiere conocimientos de Eduardo sobre los objetos cotidianos presentes en su vida, como los árboles de una altura limitada a pocas veces el tamaño de un niño. El conocimiento de este hecho extraescolar parece haber determinado la elección de la respuesta.	E. ¿Cómo la distancia? Explícame más. ¿Como qué pensaste? L. Que si José medía 1.5 el árbol no iba a estar más grande.
Microgénesis			
Proceso			

Fernanda

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias			Uso del recurso gráfico
Procedimientos		**Respuesta: A) 4m.** Fernanda transfiere la altura de José al árbol con sus dedos. La poca precisión de la medida y su percepción visual sobre ésta le facilitan hacer un ajuste y realizar la operación. El currículum de educación básica primaria incluye el eje temático medición; en él se desarrolla una secuencia de trabajo con las unidades de medida a lo largo de 3 años, que va de unidades arbitrarias hasta las convencionales. En esta respuesta se observa cómo el sentido común o las prácticas culturales cotidianas influyen en el uso de un recurso extraescolar como parte de la resolución del problema.	F. Porque, bueno, yo vi el tamaño de José, midiendo el árbol con…, bueno, así [indica una medida de espacio entre sus dedos índice y pulgar] y así hice la multiplicación 1.5 x 3. E. ¡Ah! Ok, fuiste midiendo, ¿Con qué? ¿Con tus deditos? F. Sí.
Razonamientos			
Microgénesis			
Proceso	E. Fuiste trasladando la medida, muy bien muchas gracias. Con respecto a esa pregunta, por cierto, si lo hubieras trasladado con alguna otra cosa ¿crees que te habría salido más preciso? F. Yo pienso que sí. E. Por ejemplo, ¿con qué? F. Con una regla. E. Con una regla, muy bien.	Se puntualiza la utilidad de emplear un instrumento de medida con unidades convencionales, sin aclarar que de haberlo hecho, habría llegado a la respuesta correcta.	

Gerardo

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias			Uso del recurso gráfico
Procedimientos		**Respuesta: A) 4m.** Gerardo considera solamente las veces que, él percibe, cabe la altura de José en el árbol, sin notar que se trata de un referente para resolver el problema. Es decir, resuelve un problema parcial.	E. […] Tú elegiste la opción A) 4 metros. ¿Cómo lo supiste? G. Porque el niño mide 1.5 metros, el árbol como que le queda al doble.
Razonamientos		Valida su respuesta a través de su percepción visual.	E. Y ¿cómo, más o menos, calculaste que le queda al doble? G. Porque, por la estatura.
Microgénesis			
		Sin evidencia física en el cuadernillo, la	E. Comparaste la estatura. ¿Hiciste algo como

Proceso		investigadora intenta recuperar el proceso por el que Gerardo llegó a la respuesta errónea. En él, reitera que a partir de su percepción visual Gerardo estima que la altura del árbol es dos veces la altura de José, tres metros sin ningún sobrante, lo que asocia a la respuesta más cercana.	medir y luego sobreponer acá [señala las figuras del ítem, el niño primero, en seguida el árbol]? O ¿nada más por verlo lo calculaste? G. Más o menos lo medí por verlo. E. Sólo por verlo. Ok.

Zoe

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias			Uso del recurso gráfico
Procedimientos		**Respuesta: A) 4m.** Zoe usa un recurso extraescolar para transferir la altura de José al árbol. Aunque su estimación de que una altura cabe 4 veces en la otra es buena, parece olvidarse del valor 1.5 que está en juego.	Z. Porque vi la altura… bueno, cada muñequito lo fui más o menos poniendo así [traslada la medida de la imagen de José tomada con los dedos, a la imagen del árbol], conforme al árbol, y más o menos vi que la cantidad más chica que había era la de la altura.
Razonamientos		El inicio de su explicación en la entrevista le lleva exponer un procedimiento distinto al empleado en el test y a reflexionar en el procedimiento que efectivamente empleó. Primero dijo haber comparado alturas, pero recordó haber hecho una estimación basada en transferencia de medidas.	Z. Porque vi la altura del muñequito y más o menos la del árbol, entonces pues me imaginé que a lo mejor y lo doble del árbol [queda pensativa por un instante].
Microgénesis			
Proceso	E. Ok, entonces, eso quiere decir que José cabe más o menos… Z. Ajá, como cuatro. E. Como cuatro veces. Claro, si cabe cuatro veces por 1.5 más o menos ¿cuánto es eso? [Zoe permanece en silencio aparentemente haciendo una operación mental] ¿Cuatro por uno y medio? Z. Tres punto cinco. O algo así. E. Ajá. Bueno.	Se observa que el trabajo realizado por Zoe en la transferencia le lleva a resolver correctamente el problema. Sin embargo identificamos una dificultad en las operaciones con los números decimales que finalmente le llevan a elegir la respuesta equivocada.	

Pregunta 2. ¿Qué número tiene cinco centenas, cuatro unidades y siete décimos? Contenido: Nomenclatura

Eduardo

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias	Eliminación/correlación		
Procedimientos	[Relaciona las cifras con las posiciones que considera deben ocupar.]	**Respuesta: A) 54.7.** Hace una correlación entre las cifras de los números en las opciones y las cifras con las posiciones indicadas en la pregunta. Omite el valor posicional de las cifras, e ignora la existencia del cero.	
Razonamientos	L. Porque cinco centenas puede ser aquí [señala la cifra del inciso A], cuatro unidades aquí y siete décimos aquí [señalando la misma cifra], por eso es ésta.	Su respuesta muestra inseguridad con respecto a la posición que ocupan las cifras en el número, deja las centenas en la posición de las decenas, por la falta del cero en el enunciado del problema. Se observa que la ausencia del cero propicia una nueva confusión en Eduardo: la ubicación de las centenas en el lugar de las decenas.	
Microgénesis			
Proceso	E. Pero éstas son unidades [señalando el número 4 en el inciso A], éstos son décimos [indicando siete en la misma cifra], éstas son [señalando el dígito cinco de la misma cifra] ¿centenas? L. Sí E. ¿Seguro? L. Sí	La investigadora intenta hacerle notar, sin lograrlo, su equivocación respecto al valor posicional asignado a las cifras. Se puede decir que Eduardo tiene dificultades con el reconocimiento del valor posicional y la ubicación del cero en los números.	

Gerardo

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias	Eliminación correlación		
Procedimientos	E. Elegiste la respuesta C) 457… [Relaciona las cifras con la posición que ocuparían en el número]	**Respuesta: C) 547.**	
Razonamientos	G. Porque las cinco centenas, es de diez, cuatro unidades uno y de siete décimos, diez.	Con el razonamiento expuesto, formaría el número 574 que no aparece en las opciones. Su intento por relacionar las cifras con la posición que ocupan se ve afectada por el nombre que les da la posición.	
Microgénesis			
Proceso	E. ¡Ah! Siete décimos de diez. Entonces, aquí sería el lugar de 500 ¿cinco de cuánto? G. De cien. E. De cien ¿verdad? Quinientos son cinco de cien.	La confusión de Gerardo parece estar en los	

	Luego cuatro unidades, que está en… ¿este cuatro está en el lugar de las unidades [indicando el 4 en el inciso C]? G. [Silencio, dubitativo.] No. E. ¿Qué cuatro está en el lugar de las unidades? G. El de la D. E. Y ¿dónde están los 7 décimos? G. Aquí [señala el 7 de la respuesta C] porque hay 7 de diez de las unidades. E. Bueno.	conceptos décimos y decenas, además de la falta de comprensión de la partición decimal de los números enteros y la denominación que se hace de esas partes. El intento por llevarlo a las posiciones correctas de los números no tiene éxito.	

Miguel Ángel

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias	Eliminación correlación		
Procedimientos	M. Bueno, como no me acordé de esto [posiciones del SD] me puse a ver las qué había puestas y escogí esta primero. E. Ok. [Marca el valor posicional en el examen mientras explica].	**Respuesta: A) 54.7.** Localiza los números que tienen siete décimos, luego elige entre ellos al que reúne las tres cifras mencionadas en la pregunta.	
Razonamientos	M. Porque decía 5, 4 y 7, pero vi que decía decimos y entonces vi que tenía punto 7 las demás y entonces escogí ésta.	Su razonamiento muestra dificultad con la representación de la posición vacía mediante el cero. Hay cero decenas no mencionadas que le llevan a colocar las centenas en el espacio que debiera ser ocupado por el cero.	
Microgénesis			
Proceso	E. Está bien. No sólo es cierto que tiene siete décimos, sino también es cierto que tiene cuatro unidades. Pero, dice aquí cinco centenas ¿dónde andan las centenas? M. ¿Cómo, cómo, cómo? E. Fíjate, aquí tenemos siete décimos cuatro unidades [señala el inciso A] y aquí tenemos cinco decenas, ¿no? M. ¿Por qué? E. Porque acá es unidad [señala el lugar posicional correspondiente], unidad, decena y centena M. ¡Es cierto! Es cierto, por el punto. E. Es cierto que aquí hay siete décimos, es cierto que aquí hay cuatro unidades, pero aquí hay además cinco decenas y nos están pidiendo ¿cinco decenas o cinco centenas? M. Centenas. E. Bueno, aquí ya me quedó claro que la cuestión	La investigadora acompaña a Gerardo haciendo reflexiones, primero para que identifique su equivocación y luego para llevarlo a la respuesta correcta. El acompañamiento parte del número en la opción elegida erróneamente, haciendo énfasis en la posición que ocupan las cifras; luego hace referencia a las posiciones en el sistema decimal recurriendo a la marca del valor posicional hecha previamente. Tan pronto Gerardo asocia el nombre con la posición, puede identificar la respuesta correcta.	

	es que no te acordabas de los sitios ¿no?, del valor posicional, ok, muy bien.		

Ricardo

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias	Eliminación por correlación		
Procedimientos		**Respuesta: A) 54.7.** [Relaciona las cifras de la pregunta con las posiciones que ocupan en las opciones. Parece omitir el cero porque no se menciona].	
Razonamientos	R. Sí. Bueno, los décimos; según lo que me han explicado es el punto y después va el décimo. E. Excelente, eso es cierto. R. Siete unidades, después viene el punto, después va el cuatro y el cinco [señala de derecha a izquierda –como si todos fuesen números enteros-], por eso marqué ese resultado.	Conoce el hecho de que las posiciones decimales se encuentran después del punto, pero parece no tener claro el significado de la partición decimal de la unidad. Se observa una correlación en la que únicamente menciona números enteros, y una dificultad con el valor posicional de las cifras. El trabajo en relación con este contenido se realiza en 4°, 5° y 6° de primaria.	
Microgénesis			
Proceso	E. Entonces aquí tenemos los décimos, aquí tenemos las unidades, y aquí tenemos las decenas [muestra con un esquema la posición de las unidades] ¿Verdad? luego por acá tenemos las centenas y dice que si tenemos 5 centenas 4 unidades y 7 décimos [Coloca en el esquema los números de acuerdo con la posición que les corresponde]..., [Ricardo expresa sorpresa] ¿Qué pasó? ¿Cuál habría sido? R. Ésta no [actitud pensativa]… E. Cinco centenas, cuatro unidades, no tenemos decenas, y 7 décimas… R. ¡Ah! Es la B. E. Ok, bueno.	La investigadora acompaña a Ricardo recordando la ubicación de las cifras en el sistema decimal, tomando como referencia lo dicho por él en relación con la utilidad del punto decimal. Usa el trazo de un esquema posicional [_ _ _._ _] para apoyar el proceso con el cual Ricardo nota que ha omitido el lugar de las decenas.	

Zoe

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias	Eliminación/correlación		
Procedimientos	Z. Pues acordándome, la verdad…	**Respuesta: C) 547.** Asocia las cifras mencionadas en la pregunta con aquellas en las opciones que puede evocar del inicio de su aprendizaje del sistema decimal.	
	Z. […], acordándome de la primaria, porque en la	La investigadora acompaña a Ricardo recordando	

Razonamientos	primaria nos ponían así: que el amarillo era… quién sabe cómo, y ya más o menos iba viendo porque después del punto se supone que ya son milésimos o quién sabe cómo…	la ubicación de las cifras en el sistema decimal, tomando como referencia lo dicho por él en relación con la utilidad del punto decimal. Usa el trazo de un esquema posicional [_ _ _._ _] para apoyar el proceso con el cual Ricardo nota que ha omitido el lugar de las decenas.	
		Microgénesis	
Proceso	Z. […] porque después del punto se supone que ya son milésimos, o quién sabe cómo… E. ¿Decimales? Z. Decimales, sí, entonces ya dije, ya más o menos fui viendo. Me acordé de la primaria. E. Si, en primero y segundo llevaron el sistema decimal con esos códigos de color, de cambios de fichitas ¿No? Z. Sí. E. Muy bien, Zoe.	Reconoce términos asociados con la expansión decimal de los números naturales y su localización posicional, pero parece tener dificultad con los significados de los conceptos.	

Pregunta 3. Si el precio de un producto aumenta de 60 a 75 centavos ¿Cuál es el porcentaje de incremento en el precio?
Contenido: Porcentajes **Atilio**

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias			Regla de tres
Procedimientos		**Respuesta: B) 20%.** Aunque formula una regla de tres, no considera útil el resultado 12.5. Parece serle más útil su intuición, por lo que decide un porcentaje lejano al resultado obtenido.	[Multiplica 75 x100, Divide el resultado entre 60, Elije el 20%.]
Razonamientos		Muestra dificultad para el elegir un procedimiento adecuado. Un fallo en su procedimiento tiene que ver con que consideró al 75 como la base para calcular el porcentaje, sin reflexionar que se trata del monto. Por otro lado el 20% de 75 son 15, por lo que se puede suponer que la operación mental que realizó fue correcta pero con los datos equivocados.	A. Pues, se supone que hice una regla de tres. Iba a hacer una ecuación pero dije no, se me va a dificultar mucho y entonces… este, me fui como por el camino fácil. Entonces el 1 como que representa el 100 y el 20 representa lo que aumentó. E. ¡Ah ya! Ok, entonces el 1 que es el 100 sería ¿60? A. O sea, sí. Lo que ya era el precio normal.
Microgénesis			
Proceso	E. Entonces teníamos aquí que 75 x 100 entre 60, según lo que hiciste, y además le quitaste ceros y toda la cosa ¿verdad? Pues está bien que le quitaras cero ahí, pero no le quitaste acá, ¿te fijaste? A. Sí, ok. E. ¿Si viste? Que le quitaste aquí los dos [señala las cifras escritas], bueno luego se los volviste a agregar. A. Bueno, es que se supone que, porque tenía un punto aquí, porque era de centavos. E. Porque era de centavos. ¡Ah mira qué interesante! Vamos a suponer que 60 centavos, sin que le pongas el signo ni el punto ni nada, nada más 60, ése es el 100 %. Vamos a hacer un cálculo mental fuerte y vamos a pensar ¿cuánto sería el 50% de 60? A. 30. E. Exacto, 30. Porque es la mitad ¿no? y ¿la mitad de 30? A. 20 no 15. 15. E. 15, exacto. ¿Eso cuánto sería, ése ¿qué porcentaje sería? A. El 25 %.	La conversación permite recuperar dificultades en las operaciones con punto decimal. La investigadora acompaña a Atilio en la búsqueda de la respuesta correcta, mediante el uso de un procedimiento en el que omite las operaciones asociadas a la regla de tres que se usó en la resolución del test. Ella recurre a la bipartición iterada, tanto del porcentaje como de la base. El procedimiento fue exitoso.	

Cuautli

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias	Dividir		
Procedimientos	C. Porque lo dividí, bueno el 100% es 60 y lo dividí entre 5.	**Respuesta: A) 15%.** Sabe que 60 centavos corresponde al 100% de la base sobre la que se hace el incremento. Divide la base entre 5, obtiene 12, luego elige la opción A) 15% que en porcentaje es el número más cercano a 12.	
Razonamientos	C. […], bueno sí, entre 5 para ver cuánto era el porcentaje y ya el resultado.	Parece haber una confusión en las cifras que elige para operar. Se refiere a la base como porcentaje, por lo que al operar con ella supone que obtendrá el porcentaje. Por otra parte, pareciera que luego de obtener el porcentaje haría otra operación que finalmente omite.	
		Microgénesis	
Proceso	E. Sesenta entre cinco, ¿cuánto es? C. ¿Sesenta entre cinco? No sé…como doce o… [inaudible] E. A ver, dime qué acabas de decir. Yo te oí 12, muy bien, entonces si 60 es 100% entonces, más o menos lo dividiste entre 5 y te salió 12 y entonces ya lo acercaste a la cantidad más próxima. Vamos a pensarlo de otro modo. Me gusta que veas esto: que sesenta es igual al cien por ciento. Sabiendo lo anterior ¿Treinta cuánto sería? C. La mitad o ¿no? E. La mitad, es decir el cincuenta por ciento ¿sí? y la mitad del 50 ¿cuánto sería? C. Quince. E. Entonces ese quince ¿qué porcentaje es? C. La cuarta parte. E. O sea… C. El quince por ciento. E. ¿A poco? ¿Cuánto es la mitad del 50%? C. Veinticinco ¡Ah, no! la mitad de 50 es 25. E. Entonces, ¿cuánto sería aquí? C. Veinticinco por ciento. E. ¿Te fijaste por qué? Porque si 60 es el 100% y 30 es el 50%, quince ¿cuánto dijiste que era? C. El veinticinco por ciento.	La investigadora parte de los conocimientos de Cuautli [60 corresponde al 100%] para acompañarlo a deducir la respuesta correcta. Se observa que en el proceso Cuautli pierde la atención. La investigadora logra recuperar la atención de Cuautli en la partición del porcentaje y el monto inicial. Cuautli reconoce su equivocación. Finalmente llegan al resultado correcto. La entrevistadora verifica la obtención de la respuesta correcta.	

Eduardo

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias	Diferencia		
Procedimientos	[Calcula la diferencia de 60 a 75]	**Respuesta: A) 15%.** Relaciona la diferencia, entre la base y el monto, con el porcentaje de las opciones de respuesta.	
Razonamientos	L. Por la diferencia de centavos.	Obtiene la diferencia entre 60 y 75 centavos. No es claro si el procedimiento empleado fue restar 60 a 75 o sumar 15 a 60.	
Microgénesis			
Proceso	E. ¿Por la diferencia de centavos? [Eduardo asiente con un movimiento de cabeza] ¿Cuánto es la diferencia de centavos? L. 15 centavos. E. 15 centavos. Ok, y entonces, por eso consideras que el porcentaje es 15%. [Eduardo asiente nuevamente].		

Fernanda

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias	Suma		
Procedimientos	F. Hice…, bueno, una suma de 60 a 75, para saber qué porcentaje era.	**Respuesta: A) 15%.** Obtenida la diferencia la asocia de inmediato con una de las opciones de respuesta, sin notar que ése es un resultado parcial y una parte de las operaciones para resolver el problema.	
Razonamientos	E. Dice aquí: aumenta de 60 a 75 centavos y efectivamente de 60 a 75 centavos hay una diferencia de 15; pero de 15 centavos. ¿Eso es lo mismo que el porcentaje? F. No. E. No. F. Pero es que, ya no me acordaba como resolverla ahí. E. Pero esa te pareció que era más conveniente [Fernanda asiente], bueno.	La investigadora intenta llevar a Fernanda por un proceso reflexivo a la respuesta correcta sin éxito, por haber perdido la atención de la alumna.	
Microgénesis			
Proceso			

Gerardo

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias	Suma		
Procedimientos	G. Porque le sumé de 60 centavos a 75.	**Respuesta: A) 15%.** Decide asociar la cantidad que se suma de la base al monto, al porcentaje con el mismo número que localiza en las opciones. No reflexiona en que es una solución parcial al problema.	
Razonamientos	E. Ajá. Y ¿Cuánto le falta a 60 para llegar a 75? G. El 15. E. Pero ese 15 ¿son 15 centavos o 15%? G. 15 centavos. E. ¿15 centavos será lo mismo que 15%? G. Sí. E. Ok.	Parece haber poca comprensión del enunciado del problema. Reconoce diferencia entre porcentaje y centavos, pero no en el significado de porcentaje.	
	Microgénesis		
Proceso			

Miguel Ángel

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias	Decisión por diferencia		
Procedimientos	M. […] Entonces dije: si es de 60 a 75 no puede ser más de quince; bueno, supuse…	**Respuesta: A) 15%.** Se observa una confusión entre el concepto de porcentaje y procedimiento para obtenerlo.	
Razonamientos	M. No, es que no me acuerdo muy bien del procedimiento, porque lo vimos en primero pero… Creo que era por punto cien o por punto lo que te pide y luego restabas, pero no me acordé bien cómo era.	Parece recordar que porcentaje tiene que ver con la partición en cien partes de una cantidad. Recuerda también un procedimiento con más de una operación. Su respuesta sugiere que los datos del problema le dificultan operar con ellos, es decir, 60 no es fácilmente divisible entre 100.	
	Microgénesis		
Proceso	E. No puede ser más de quince. ¿Es mucho? M. Bueno, no sé, es que no me acordaba del procedimiento. E. Vamos a jugar un poquito: si 60 es el 100% ¿cuánto es 50%? 50% es la mitad de 100, ¿sí? M. Treinta. E. Treinta. Entonces, sesenta es el cien por ciento, treinta es el cincuenta por ciento, y la mitad de treinta ¿cánto es? M. Quince. E. Quince centavos ¿verdad? No le hemos puesto	La investigadora parte de los datos que para Miguel Ángel son claros: 60 es el 100%. Lo acompaña en un proceso de bipartición de porcentajes y base para llevarlo a localizar la respuesta correcta. La estrategia es exitosa.	

	porcentajes de nada. Si treinta es el cincuenta por ciento ¿quince cuánto es? M. El quince por ciento. E. No. Treinta es el cincuenta por ciento ¿y quince? Quince es la mitad de treinta ¿cuánto es la mitad de cincuenta por ciento? M. ¡Ah!, este… veinticinco por ciento. ¡Ah ya! […] Es de lógica ¿no? Ésa, más que nada. E. ¿Eh? Mmh, sí es de lógica. Ya me habías dicho tú que ya no te acordabas cómo, pero hay formas para tratar de llegar.		

Ricardo

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias	Suma		
Procedimientos	R. Bueno, es que hay nada más 60, nada más le sumé a 60 lo que faltaba para llegar a 75.	**Respuesta: A) 15%.** La simplificación que Ricardo hace del problema le lleva a responder parcialmente el problema. Obtiene la cantidad que se sumó a la base pero omite buscar el porcentaje al que corresponde.	
Razonamientos			
Microgénesis			
Proceso		La investigadora intenta llevarlo a la respuesta correcta sin éxito, las respuestas emitidas por Ricardo no parecen tener ningún argumento propio de los aprendizajes escolares.	E. Y fueron 15. R. Fueron 15. E. Ok, estoy de acuerdo. Aquí dice… 60 centavos a 75 centavos. Es cierto, estoy de acuerdo contigo en que la diferencia son 15 centavos. Ahora la pregunta es ¿15 centavos es el 15%? R. No… sí… E. ¿No o sí? R. Bueno yo digo que para mí sí. E. ¿Para ti sí? R. Sí.

Zoe

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias	Suma		
Procedimientos	Z. Pues nada más viendo, porque aumenta 15 centavos.	**Respuesta: A) 15%.** Obtiene la diferencia sumando de la base al monto la cantidad que falta y la asocia con el porcentaje que tiene el mismo número.	
	E. De 60 a 75 centavos.	Deja el problema parcialmente resuelto por	

Razonamientos	Z. Sí, de 60 a 75, eso es todo.	considerar que la diferencia es lo mismo que el porcentaje.	
		Microgénesis	
Proceso			

Pregunta 4. Cuál de los siguientes números… Contenido: Redondeo

Fernanda

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias	Redondeo		
Procedimientos	[Elige la respuesta que expresa milésimas.]	**Respuesta: E) 89.064.** Redondea a la unidad anterior, de diezmilésimos a milésimos. "Redondear" parece evocar el acto de prescindir de una pequeña parte del número de orden inferior, para tener uno con unidades de orden superior.	
Razonamientos			
Microgénesis			
Proceso	F. Pues… [sonríe]. E. ¿Qué descubriste? ¿Qué acabas de descubrir con lo que te dije? F. Que estaba mal. E. ¿Por qué? F. Porque no era, era ocho, y para redondearlo debió haber sido 9. E. Ajá, no. No era para redondearlo a 9. Fíjate. Pensé que habías pensado lo siguiente. Cuando yo te leo [89.0638] ochenta y nueve con seiscientas treinta y ocho *diez milésimas*, y te digo redondéalo a *centésimas*, tu elegiste [89.064] ochenta y nueve con sesenta y cuatro milésimas, tú pensaste. ¡Ah, eso no es lo mismo! Algo pasa ahí entonces, lo que pasa es que tendríamos que haber buscado cuál número tenía las centésimas. ¿Cuál número es el que tenía las centésimas? F. 90. E. 90, ok. Por cierto, éstas son 9 decenas ¿verdad? Entónces las centésimas van después del punto. La primera cifra después del punto son décimas, la segunda son centésimas, ¿ajá? Ok Fernanda.	Se observa que, durante la lectura de la investigadora, Fernanda se da cuenta de un error con el redondeo, supone que no debió ir a la unidad anterior en la parte decimal del número, sino en la parte entera. La expresión de la chica sugiere a la investigadora que ella habría identificado la respuesta correcta, pero no fue así. Al parecer emerge una confusión entre los conceptos décimos y decenas. La investigadora da pistas para reconocer la opción correcta, sin cerciorarse de que Fernanda lo entendiera.	

Gabriela

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias	Redondeo		
Procedimientos	[Redondea a decenas.]	Se observa una confusión entre los conceptos centésimos y centena, décimos y decenas.	
	G. Bueno, es que lo leí rápido y no leí los	Justifica la elección errónea por una lectura rápida,	

Razonamientos	centésimos.	al parecer incompleta, del problema.	
		Microgénesis	
Proceso	E. ¡Exacto!, tú leíste rápido y no te fijaste en lo de centésimos. No importa, en este momento dime cuál es la respuesta correcta. G. ¿Centésimos? E. Centésimos, bueno, entonces vamos haciéndolo. No dice aquí que redondees a la centena siguiente, dice a la centésima. G. ¿A la centésima? E. ¿Sabes que son los centésimos? G. No. E. En nuestro sistema decimal el valor posicional en los decimales se localiza así, fíjate. Después del punto [escribe sobre el espacio en blanco del examen 0. _ _ _], se ubican los décimos, en el primer lugar los décimos ¿y luego? G. Luego los centésimos. E. ¿Y luego? G. Los milésimos. E. Y después los diezmilésimos y así, pero por lo pronto tenemos décimos, centésimos y milésimos. Entonces ¿cuál es? G. La B) 89.06.	**Respuesta: B) 90.** La respuesta rápida de Gabriela se nota poco reflexiva, ella se ve desconcertada por los términos que la investigadora enfatiza. Su respuesta [B) 90] y el énfasis en los centésimos le hacen dudar de la opción elegida. Pudiese ser que en la lectura del problema, hecha por la investigadora, Gabi cambiará centésimos por centena y que eso generara su dificultad para interpretar los términos en la entrevista. La investigadora explica partiendo de las posiciones en la expansión decimal y va acompañando a Gabriela en la localización de posiciones. Con este ejercicio la investigadora acompaña a Gabriela a llegar a la respuesta correcta.	

Gerardo

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias	Redondeo		
Procedimientos	[Redondea de diezmilésimas a milésimas.]	**Respuesta: E) 89.064.** "Redondear" parece evocar el acto de prescindir de una pequeña parte del número, de orden inferior, para obtener uno con unidades de orden superior.	
Razonamientos			
		Microgénesis	
Proceso	G. [Silencio prolongado.] E. ¿Qué es redondear? G. Es como [silencio]… E. ¿Cómo supiste que ésa era la respuesta correcta? ¿Qué pensaste? G. Pensé en que… Empecé a calcular E. ¿Cómo? G. [Silencio.]	Gerardo se veía angustiado por el cuestionamiento, por lo que se decidió pasar a la siguiente pregunta. No fue posible rastrear este proceso.	

	E. Empezaste a calcular, ¿qué calculaste? G. El… E. ¿Ya no te acuerdas? G. No. E. No importa, está bien.		

Héctor

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias	Redondeo		
Procedimientos	[Redondea de diezmilésimas a milésimas]	**Respuesta: E) 89.064.** Redondea a la posición anterior.	
Razonamientos	H: […], y como primero no lo leí así con calma, yo nada más leí redondeado, entonces por eso lo subí a 64. Pero y redondeado a centésimas sería el D) que sería 89.06.	Al parecer ha aprendido que el redondeo se hace a la unidad anterior inmediata, lo cual se refuerza con la lectura incompleta y rápida que dice haber hecho. Sin embargo entiende el concepto, lo aplica correctamente y localiza la respuesta correcta por sí mismo.	
Microgénesis			
Proceso		Un rasgo de la situación de examen que se recupera de este diálogo es el estrés que genera la falta de preparación adecuada para examen. En este caso Héctor reconoce una mala lectura de su parte asociada al interés por terminar cuanto antes, y un repaso parcial de los contenidos por evaluar en los exámenes.	E: ¿Por qué lo leíste rápido? H: Para acabar rápido E: Para acabar rápido y mira, de todos modos… H: No, y aparte como que me puse nervioso porque lo empecé a leer y no, no sé, me puse nervioso y ya no leí centésimos y entonces me fui con la finta de los milésimos. E: En situaciones de examen ¿Usualmente te pones nervioso? H: A veces. E: A veces. H: A veces en los semestrales E: ¡Ah! ¿Por qué? H: Porque, como son más, más preguntas, y como es todo lo que hemos visto, hasta esos seis meses, es este… No sé hay algunas cosas que las estudio pero otras no, y esas son las que luego vienen en el examen. Entonces por eso me pongo nervioso. E: Por eso te pones nervioso. Me parece que exactamente fue una mala lectura la que hiciste, ¿no te parece? No es que no tengas elementos para responder, porque respondiste de inmediato: ¡ah, era éste!

Miguel Ángel

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias	Redondeo		
Procedimientos	[Redondea de diezmilésimos a décimos.]	**Respuesta: C) 89.1.** "Redondear" parece evocar el acto de prescindir de una pequeña parte del número, de orden inferior, para tener uno con unidades de orden superior.	
Razonamientos			
Microgénesis			
Proceso	E. […] ¿Qué es esto [señala el 1], décimos, centésimos, o milésimos? M. Cente… no. Décimo, no es cierto, no es cierto. Centésimo, no bueno, no… E. ¿Qué es? M. Décimo. E. Es décimo. Entonces ¿Será correcto esto? M. No. E. ¿Cuál será el bueno? M. Mm. Éste [señala la opción D) 80.06]. E. Éste, el D, 89.06. M. Lo que pasa es que ahí… bueno, este… E. Tenemos ahí problemas con el valor posicional.	Se identifica dificultad en la asociación del término con el lugar que ocupa en el sistema decimal. Aunque Miguel Ángel llega a la respuesta correcta no es claro si entiende los significados de los conceptos.	

Pregunta 5. Divide $\frac{8}{35} \div \frac{4}{15} =$ Contenido: Operaciones

Eduardo

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias	Multiplicación de numeradores y denominadores		
Procedimientos	L. Multiplicando el 35 y el 15, y el 8 y el 4. E. ¡Ah! Ok. Y luego simplificaste, ¿verdad?	**Respuesta: 120/140.** Emplea el procedimiento de la multiplicación de fracciones, numerador por numerador y denominador por denominador.	
Razonamientos		Operar con los todos los datos del problema.	
Microgénesis			
Proceso	E. […] Estas operaciones de división, ¿desde cuándo las saber hacer? L. Desde sexto. E. ¿Desde sexto? ¿Te enseñaron a hacerlas en sexto? Y ¿Te acuerdas cómo es la forma en que se divide? L. No me acuerdo bien. E. Y ¿Te acuerdas cómo se hacen las sumas de fracciones? L. Más o menos.	La investigadora intenta localizar un punto de partida para acompañarlo en la elección de la respuesta correcta. Su intento no tiene éxito.	

Gerardo

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias	Multiplicar		
Procedimientos	G. Pues empecé a multiplicar 8 por 15, salió 120, y 35 por 4 y salió 140.	**Respuesta: 120/140.**	
Razonamientos	[Hacer una división de fracciones, termina con la fracción que se obtiene de multiplicar numerador 1 por denominador 2 y denominador 1 por numerador 2.]		
Microgénesis			
Proceso		Aunque la respuesta correcta puede ser cualquier fracción equivalente a 6/7, incluyendo 120/140. Y al haber emitido una respuesta correcta, la investigadora intentó verificar si Gerardo reconocía la posibilidad de alguna fracción equivalente. Para Gerardo no parece haberla.	E. Muy bien. Y, si te dijera que lo redujeras más ¿podrías hacer más pequeños los números? G. No. E. Está bien.

Miguel Ángel

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias	Multiplicar		
Procedimientos	[Multiplicar numerador 1 por denominador 2 y denominador 1 por numerador 2.]	**Respuesta: 120/140.** Usa el procedimiento adecuado.	
Razonamientos			
		Microgénesis	
Proceso	E. […] ¿Sabes cómo se simplifica, o no? M. Sí, sí. E. ¿Sí? ¿Cómo se simplifica? M. Bueno acá el 120 es hasta… ¿Tienen que ser los dos? E. Los dos. M. Mm, pues la mitad ¿no? E. Puede ser la mitad que [de ciento veinte] son sesenta, M. Este… ¿setenta? E. Sí, setenta. Muy bien. Vamos a hacer un truco. ¿Sabes que dividir o multiplicar por diez es como quitar ceros o aumentar ceros? M. Sí. E. ¿Se puede? M. Sí E. Se puede. Entonces lo que sí vas a hacer es dividir esto entre 10 ¿verdad? ¿Qué fracción nos quedó? M. Este, 7. No, ¡ah! Seis séptimos. E. ¡Muy bien!	La investigadora intenta llevar a Miguel Ángel a obtener una fracción equivalente. Encuentra punto de partida en la simplificación que parece ser un procedimiento conocido por el alumno, quien recuerda que la operación que elija hacer para simplificar se debe aplicar tanto al numerador como al denominador de la fracción. Dividen por mitad, luego entre 10 y llegan a la fracción 6/7 equivalente a 120/140 que Miguel A. obtuvo inicialmente.	

Zoe

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias			Ensayo
Procedimientos		**Respuesta:** $4\frac{4}{20}$. Zoe expresa inseguridad respecto al procedimiento para resolver división de fracciones. Aplica su conocimiento de división de fracciones adecuado a lo que considera una parte de la resolución, pero le parece muy corto el procedimiento y agrega una parte de suma y otra de resta que le llevan a emitir una respuesta errónea.	Z. Primero, pues sé que era multiplicando [señala numerador de la primera fracción con denominador de la segunda fracción] y luego dije ¡ay! ya no más voy a… E. ¿Multiplicado cómo? Z. Bueno, como se hacen las multiplicaciones: cruzado de 8 por 15, por ejemplo. E. Sí [éste si es para animarla a continuar la narración]. Z. El 35 por el 4 y luego ya sumarlo, y así igual

		Borró las operaciones que realizó por lo que no se sabe cómo llegó a la fracción $4\frac{4}{20}$.	multiplicarlo [señala la fracción $4\frac{4}{20}$] y luego es restarlo, y así se saca.
Razonamientos		Aplicar lo que sabe de las otras operaciones con fracciones.	Z. Pues me tardé mucho porque no me acordaba cómo eran las divisiones de fracciones, porque sí me cuesta trabajo. E. […] Z. […] pero eso es para las multiplicaciones o suma, o quién sabe qué… La verdad, nada más lo hice así porque…, [silencio], y ya después para convertirlo en ceros. Y ya.
Microgénesis			
Proceso			

Pregunta 6. ¿Qué número es el más grande? Contenido: Ordenación de números.

Atilio

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias			Eliminación
Procedimientos		**Respuesta: B) ¾.** Localiza la cifra menor entre los denominadores.	[Identificar la fracción con el denominador menor.]
Razonamientos		Emplear las reglas aprendidas durante los procesos de enseñanza y aprendizaje: mientras más pequeño el denominador más grande la fracción.	A. Bueno, nuestra maestra de taller de mate del año pasado nos dijo que el número de abajo, mientras más pequeño era, más grande era.
		Microgénesis	
Proceso	E. ¡Ah!, más grande era el cacho que te tocaba de la fracción, cierto eso es cierto. Y ¿cómo supiste? Bueno, tú viste ahora sólo esta parte [señala en denominador de la fracción], y, el número de arriba, ¿tuvo alguna importancia ahí? A. No, nada más me fijé en el de abajo. E. Ok. Nada más en el de abajo. Bueno, esta cosa es cierta, pero ¿hay alguna manera de convertir estos números en otra forma, como para que pudieras compararlos todos entre sí? A. Mm, pasarlos a decimales. E. Por ejemplo… $\frac{3}{4}$. A. [Escribe en el examen: 0.75.] E. Exacto, $\frac{4}{5}$. A. [Escribe: = 0.8]. E. $\frac{5}{8}$. A. [EscribE. = 0.62.] E. 7/10 A. Punto… [escribe 7.] E. Cero punto siete. A. ¡Ah!, sí. E. Vas bien, entonces nuestra fracción mayor, ¿cuál es? A. 0.7, no 0.80. E. 0.80. A. ¡Oh! [Se percata de haber elegido la opción errónea.] E. Entonces, bueno, tiene sentido lo que dijo tu maestra. Cuando estás fraccionando algo, un sólo	La investigadora trata de hacerle notar que en la comparación importa el valor del cociente. Tomando como punto de partida los conocimientos de Atilio, acompaña el proceso con la conversión de fracciones a decimales. Atilio compara los números decimales y encuentra la respuesta correcta.	

	entero fraccionado en partes, mientras más pequeña sea la cantidad de partes pues mayor es la fracción; pero cuando vamos a comparar con otras fracciones a veces necesitamos otro tipo de herramientas, ¿sale? A. Ajá.		

Cuautli

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias			Eliminación
Procedimientos		**Respuesta: A)4/5.** Localiza las cifras de mayor valor en ambas partes de la fracción para elegir la opción, sin tomar en cuenta la relación existente entre las partes del cociente.	[Identificar la fracción con los dígitos de mayor valor.]
Razonamientos		Los números de mayor valor hacen la fracción más grande. Refleja el aprendizaje y aplicación de reglas.	C. Es el que tiene los números más grandes. Por eso.
Microgénesis			
Proceso			

Eduardo

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias			Eliminación
Procedimientos		**Respuesta: B) ¾.** Localiza la cifra menor entre los numeradores.	[Identificar la fracción con el numerador menor.]
Razonamientos		El valor de la fracción se determina por el valor del numerador, en una relación en la que a mayor numerador fracción más chica, a menor numerador fracción más grande. Refleja aprendizaje y aplicación de reglas.	L. Es que, en una fracción siempre que el número [señala el 3 en la fracción de la opción B] del numerador es más grande, la fracción es más chica. E. ¿El de arriba? L. Sí el de arriba
Microgénesis			
Proceso		Algunas expresiones de Eduardo evocan afirmaciones empleadas en la enseñanza de las fracciones como: “el denominador más grande hace que la fracción sea más chica”. Esta explicación permite ver una interpretación equivocada de las partes de la fracción. Eduardo	L. Que en las fracciones siempre que el de arriba es más grande la fracción es más chica. E. ¿Y cuando el de abajo es chico, qué pasa? L. No sé… E. ¿Qué significa el de abajo? L. El número en que lo repartes. E. Exactamente, eso significa. ¿Y el de arriba, qué significa? L. El de arriba, no, no sé cómo se dice…

		interpreta el numerador como el número de enteros que se van a fraccionar y no las partes del entero que se expresan. Por otra parte le queda claro que el denominador indica las partes en que se divide el entero. Esta confusión parece deberse al uso de recursos gráficos en los procesos de enseñanza y de aprendizaje, aunque no fue usado en la elección de la respuesta. Aquí, surge nuevamente la imagen como antecesor de la representación simbólica señalada por Bruner.	E. Bueno, como puedas decirlo, aunque no sepas cómo se dice bien. L. Como si fueran pasteles, son tres pasteles y los tres divididos en cuatro. E. ¿Los puedes pintar? L. Sí [procede a dibujarlos]. E. ¡Ah! ¡Tres pasteles divididos cada uno en 4 partes! Ok. Entonces esta representación te parece que es igual a esta expresión [inciso B) tres cuartos], y por eso te pareció que ése es el más grande. [Conviene decir que no dibujó las fracciones antes de elegir la respuesta B, por lo que no parece haber empleado ese método.]

Fernanda

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias			Eliminación
Procedimientos		**Respuesta: B) ¾.** Localiza la cifra de menor valor entre los denominadores	[Identificar la fracción con el denominador menor.]
Razonamientos		Mientras más pequeño el denominador más grande la fracción. Refleja el aprendizaje y la aplicación de reglas.	F. Mm, yo me fui por la del denominador que era el más pequeño y así fue cómo [lo supe].
Microgénesis			
Proceso		Intuitivamente Fernanda reconoce que, en fracciones con el mismo denominador, el numerador sería el referente para comparar. En este planteamiento, dada la diversidad de denominadores no considera importante al numerador.	E. Entonces los denominadores más pequeños hacen fracciones más grandes y, si partimos un pastel entre 10 y uno entre 4 ¿de cuál prefieres? F. El de 4. E. El de 4 porque te toca más pastel, ¿no? [Fernanda asiente], así que ¿el numerador no te sirvió para nada? F. Pues sí hubiera servido si hubiera tenido un cuatro ahí [Fernanda señala el denominador de la fracción $\frac{7}{10}$]. E. En el denominador, para comparar. Ah, ok. Aquí la cuestión que las fracciones, todas, son de distintos tamaños ¿verdad? son distintas formas. Ok, Bueno.

Gabriela

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias			Eliminación

Procedimientos		**Respuesta: B) ¾.** Localiza la cifra de menor valor entre los denominadores. Refleja el aprendizaje y la aplicación de reglas.	[Identificar la fracción con el denominador menor.]
Razonamientos		Mientras más pequeño el denominador más grande la fracción.	G. Porque, éste…, yo aprendí que el de abajo, se me olvidó su nombre, cuando es más chico es más grande.
Microgénesis			
Proceso		Gabriela acude al recurso gráfico “pasteles” para explicar una regla aprendida durante las clases: a menor denominador mayor fracción. Con este mismo razonamiento explica otra regla: a mayor denominador menor fracción. La investigadora intenta hacer notar a Gabriela que su estrategia es ineficiente, a través de la comparación icónica que ella emplea. Gabriela hace una representación gráfica a mano alzada de las fracciones a comparar. Pronto va notando que el recurso empleado no lo permite comparar con precisión, por lo que su idea inicial se colapsa.	G. El denominador [toma el lápiz y traza un círculo]. E. ¿Se te hace más fácil dibujar? G. Sí. E. Adelante, por favor. G. Por ejemplo, en un entero si pones un medio [traza una línea horizontal que divide la figura en dos partes, señala una de las partes], ésta es la mitad, pues es más grande. Un cuarto pues ya son partecitas. E. ¿Más chicas? G. Y cuando va el número más grande en esta parte [señala el denominador]… E. Mientras más grande sea el denominador… G. Más chicas son las partes. E. Ok, entonces por eso tú pensaste que tres cuartos es el número más grande. G. Ajá. E. Y, ¿si dibujaras para compararlos? G. Ajá E. Aquí tienes ésta [traza una línea vertical en el dibujo anterior y sombrea tres de las cuatro partes]. G. [Dibuja otro círculo, más pequeño que el anterior, dividido en cinco partes y sombrea cuatro]. E. ¿Cuál es mayor, ésta [señala la figura que representa tres cuartos] o ésta [señala la figura que representa cuatro quintos]. G. Ésta [Observa las figuras representativas de ambas fracciones, señala la figura representativa de tres cuartos]. E. Y, ¿si dibujaras esta fracción [señala la fracción siete décimos]? G. [Dibuja un circulo más pequeño que el representativo de tres cuartos, traza líneas para

			dividirlo en diez partes que quedan de distintos tamaños]. No me salió muy bien. E. No importa. G. [Sombrea siete de las diez partes, observa las tres figuras] ¿Son siete? Éste es el más grande, ¿verdad? E. ¿Ya empezaste a dudar? G. No porque… lo de aquí [señala uno de los séptimos “chicos”] lo dividí de acá [señala uno de los séptimos “grandes”], siento que ésta es más grande.
		La ineficiencia de la estrategia elegida por Gabriela facilitó a la investigadora acompañarla mediante otro proceso a identificar la respuesta correcta.	E. No sé si recuerdes, usar productos cruzados para comparar fracciones, ése es un método. Ésta [dibujar] es otra estrategia que aquí parece causar problema, ¿cierto? G. ¿Qué causa problema?
		Usan la conversión de fracciones a expresiones decimales, haciendo comparaciones de dos números a la vez: se obtiene el mayor de dos números que luego se compara con otro.	E. Los dibujos, como que en este problema los dibujos no te dejan ver muy claramente la diferencia. G. No. Sí pero porque no están… E. Porque no están bien hechos, desde luego. Hay otra manera. Podrías, por ejemplo, convertir a decimales esas fracciones. ¿Sabes cómo? G. Dividiendo. E. Ajá. G. Entonces… E. No hagas ahora todas las divisiones, te voy a decir el resultado, sólo dime ¿Si dividieras en esta fracción [señala tres cuartos], qué dividirías allí? G. Tres entre cuatro. E. Correcto, exacto. Y tu resultado sería 0.75. Aquí [señala cinco octavos] obtendrías un resultado de 0.625. Si las comparas ¿cuál es mayor? G. Ésta [señala tres cuartos = 0.75] E. De esta otra [señala siete décimos] se obtiene 0.70, ahora compárala con la mayor de las anteriores y dime ¿cuál es mayor?... entre 0.70 y 0.75. G. Pues, 0.75. E. Y, ¿0.625 es mayor o menor que 0.75?
		El comentario de Gabriela hace surgir la estrategia “rellenar de ceros” para lograr la misma longitud en todos los números y poder compararlos.	G. Menor, ¿0.625, así? Pues hay que tomar hasta el tercer número. E. Exacto. Tu estrategia aquí sería rellenar de ceros los lugares que no están ocupados para

		Gabriela obtiene la expresión decimal faltante, en el momento de comparar parece reconocer que no necesita rellenar de ceros para comparar, pues lo puede hacer localizando el valor mayor por la posición que ocupa la cifra.	poderlos comparar ¿no? G. Sí. E. Entonces, tenemos 0.700, 0.750 y 0.625, ¿Cuál es mayor? G. Pues 0.750. E. Ajá, pero ¿qué te crees?, que nos falta dividir cuatro entre cinco. ¿Eso cuánto da? G. ¿Lo hago? E. Sí. G. [Divide 4 entre 5, dentro del signo de división (la casita) agrega un cero delante del cuatro y un punto sobre “la casita". Escribe un 8 sobre la casita; luego un cero debajo de cuarenta, y un cero más junto al ocho]. Me da ochenta. E. Sí, entonces ¿cuál es la fracción mayor? G. La A.

Gerardo

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias			Orden
Procedimientos		**Respuesta: D) 7/10.** Dispone mentalmente las fracciones en orden ascendente de acuerdo con el valor de las cifras del cociente. Elige la de mayores valores en las cifras.	G. Porque primero los empecé a ordenar de menor a mayor, éste primero [señala la opción B], luego éste [indica el inciso A].
Razonamientos		Gerardo organizó las cifras de las fracciones de acurdo con su valor. El problema muestra los numeradores 3, 4, 5, 7 y los correspondientes denominadores 4, 5, 8, 10. Coincidentemente la ordenación tanto por numeradores como por denominadores lleva al mismo resultado. Este hecho refuerza en Gerardo la idea de que ésa es la manera correcta de determinar cuál es el mayor.	E. […] Y ¿en qué te fijaste para ordenar? ¿En los dos números de la fracción, en un número de la fracción, en qué te fijaste para hacer ese orden? G. Para saber nada más puse primero… Empecé a ver qué número de éstos era el más grande que los demás [señala todos los incisos] y me di cuenta que éste [tocando el inciso B] es el más chico y éste [indica el inciso A] el segundo, y pues ya. E. Ah, muy bien. ¿Te fijabas en el de arriba o en el de abajo [haciendo referencia a la posición de los dígitos en la fracción]? G. En el de arriba y en el de abajo. E. En los dos. ¿Primero en el numerador y luego en el denominador? G. Sí.
Microgénesis			
Proceso			

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias			Eliminación
Procedimientos		**Respuesta: B) ¾.** Localiza la cifra de menor valor entre los denominadores.	[Identificar la fracción con el denominador menor]
Razonamientos		Mientras más pequeño el denominador más grande la fracción. Refleja el aprendizaje y la aplicación de reglas en la enseñanza de la partición de la unidad.	H: Ah, por el denominador, porque entre más chico el denominador más abarca E. Ah! H: Entonces… E: Más grande es la fracción H: Entonces, la otra que le seguiría sería $\frac{4}{5}$ pero me fui con $\frac{3}{4}$ porque es más que cuatro quintos.
Microgénesis			
Proceso		La investigadora busca un punto de partida para acompañar a Héctor en la localización de la respuesta correcta. Héctor menciona el recurso gráfico como un procedimiento para comparar fracciones. Hector hace la representación gráfica de las fracciones $\frac{4}{5}$ y $\frac{3}{4}$ en dos figuras cuadradas. Notoriamente la representación de $\frac{4}{5}$ es mayor a	E: ¿Qué procedimientos conoces tú para comparar fracciones? ¿Te han enseñado algunos? H: Las figuras, dividirlas, E: ¿Las figuras? por ejemplo… H: Ver una figura y dividirla en $\frac{4}{5}$. E: ¿Cómo? ¿Cómo son? ¿Me podrías poner un ejemplo de esto? ¿Cómo compararías si usaras las figuras? H: $\frac{4}{5}$ y acá $\frac{3}{4}$, hay un cuadrado E: Hay un cuadrado, ajá, te sigo H: Un cuadrado, luego aquí había otro cuadrado [señala dos puntos separados sobre el examen sin hacer la figura, sólo explica sobre los sitios] lo divido en cuatro y entonces éste lo sombreo lo que son $\frac{3}{4}$ y éste lo divido en cinco, E: ¿Sí? H: [dibuja dos figuras cuadradas de similar tamaño, divide una figura con dos líneas cruzadas y sombrea $\frac{3}{4}$, divide el otro cuadrado con cuatro líneas verticales, las cuenta] Uno, dos, tres, cuatro, cinco[sombrea cuatro de las cinco partes] E. Ok. Así, a percepción, ¿te parece que éste [señala la figura sombreada con $\frac{3}{4}$] sigue siendo

		la de $\frac{3}{4}$. La investigadora intenta hacerle notar la diferencia. Héctor se resiste a aceptar que la aplicación de la regla aprendida le indique un resultado opuesto al que mira en la representación gráfica. La investigadora lleva a Héctor a convertir las fracciones en expresiones decimales para resolver el problema y ayudarlo a disipar la duda respecto a lo que mira en sus representaciones gráficas. Héctor obtiene fácilmente las expresiones decimales correspondientes, y antes de obtener la última [$\frac{5}{8}$] reconoce la respuesta correcta.	más grande que éste [señala la figura sombreada con $\frac{4}{5}$]. H: Sí pero no. E: ¿Cómo, sí pero no? H: Es que me sigo yendo con que $\frac{3}{4}$ es mayor por el denominador pero se ve que $\frac{4}{5}$ es más grande. E: Como que tu intuición en el dibujo te dice otra cosa, pero el conocimiento que tú tienes te dice algo diferente. H: Pues sí. E: ¿Tú sabes que las fracciones se pueden convertir a decimales? ¿Sabes eso? H: Sí E: ¿Tú sabes, cómo qué decimal sería equivalente a esta fracción [señala la fracción $\frac{3}{4}$]? H: Sí, punto setenta y cinco. E: Exacto. A ver, apunta, ponle ahí [Héctor escribe 0.75 frente a la fracción $\frac{3}{4}$]. Y éste [señala la fracción $\frac{7}{10}$] ¿a cuál sería equivalente? H: Punto siete [escribe 0.7 frente a la fracción $\frac{7}{10}$]. E: 0.7 ¿Cuál sería más grande? H: Éste [Señala 0.75] E: Ok, hasta ahí vamos bien ¿y éste [señala la fracción $\frac{4}{5}$]? H: Sería punto ocho. E: Cero punto ocho. H: ¡Ah! entonces el más grande sería 4/5! E: En este caso ¿Verdad? Y esto [señala la fracción $\frac{5}{8}$], ¿Cómo en cuanto sería? Más o menos, no datos precisos. H: No sé, [hace la operación mental] sería algo así como punto sesenta y… E: Ándele, sería 0.625. Entonces la más grande cuál es … H: $\frac{4}{5}$.

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias			Eliminación
Procedimientos		**Respuesta: C) 5/8.** Localiza la cifra de mayor valor entre los denominadores.	[Identificar el denominador con mayor valor.]
Razonamientos		Mientras más grande el denominador más grande la fracción. Refleja el aprendizaje y la aplicación de reglas en la enseñanza de la "distribución" de las partes de la unidad fraccionada. Cuando se enseñan fracciones se habla de los significados de de los nombres de las partes, numerador y denominador, y para que los alumnos visualicen los significados se suele representar una fracción sombreando una figura particionada/fraccionada. En esos procesos surgen reglas que son reforzadas por los profesores, tales como que denominador chico fracción grande, etcétera.	R. Porque éste, el número 5 que está acá arriba, era el más grande de acá [señala los numeradores de todas las fracciones] y los de abajo [se refiere a los denominadores] o sea, el de abajo era el más grande que el 10, pero como el de arriba es cinco y era el más grande, ¡ah! no. Ya me equivoqué. E. A ver, ¿qué pensaste?, ¿por qué me estás diciendo que el de arriba y el de abajo? ¿Tienen algún significado en especial? R. Bueno es que yo tomo clases particulares ¿no?, y me dijo mi maestra que el número de arriba, cuando es más grande, siempre ese número va a ser el más grande. Bueno, va a ser la fracción más grande, nada más que aquí me hice bolas.
		Microgénesis	
Proceso		La investigadora intenta hallar un punto de partida para ayudar a Ricardo a encontrar la respuesta correcta. Ricardo parece recordar vagamente algún procedimiento. La investigadora abandona ese intento y trata de explorar con el recurso gráfico. Ricardo reconoce al recurso gráfico como un recurso para comparar.	E. Vamos a ver. ¿Tú sabes que una forma de comparar fracciones, y lo que tienes que hacer aquí es comparar para saber cuál es más grande, es convertir las fracciones a expresiones decimales? ¿Sabías eso? R. No. E. ¿Sabes que tres cuartos se puede convertir a una expresión decimal que es igual a esto [escribe 0.75]? ¿No sabías eso? Y eso se hace dividiendo 3 entre 4 [hace la división]. R. ¡Ah, ya! cuando sacas el entero y eso. E. Bueno, podría ser. Otra cosa que yo he visto que hacen es usar dibujos. ¿Has visto eso? R. No. E. ¿No? [Dibuja un rectángulo fraccionado en cuatro partes, sombrea tres] ¿No has visto nada como esto? R. ¡Ah, sí! ¿Comparar no? E. Así es. ¿Te parecen estos tres cuartos? R. Sí. E. Y entonces hacemos otras [dibuja un rectángulo fraccionado en cinco con cuatro partes

		La investigadora explora con la representación gráfica de dos fracciones, la posibilidad de avanzar con Ricardo a la respuesta correcta. El intento se diluye por la falta de colaboración de Ricardo.	sombreadas], muy mal hecha por cierto, porque está mal 'hechísima' la que estoy haciendo, pero ahí tienes. Pero bueno, estos recursos no los conoces todavía ¿verdad? R. Sí, nada más que como que se me olvidó todo. E. ¿Por qué? ¿Qué hace que se te olvide todo? ¿Te dan nervios? R. Sí, me puse nervioso.

Zoe

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias			Uso de recurso gráfico
Procedimientos		**Respuesta: B) ¾.** Hace una representación mental de los gráficos de las fracciones.	Z. […] Bueno, primero empecé a hacer circulitos así [hace contornos de círculos atravesados por líneas con el dedo índice sobre el examen] me acordé que luego en la primaria había que dibujar.
Razonamientos		Reconoce la poca utilidad del recurso gráfico por lo que lo desecha y recurre a la aplicación de una regla, confusa, aprendida respecto de la dimensión de las fracciones. No es claro si se refiere al numerador o denominador cuando dice que el más grande es el más chico; la fracción elegida tiene las cifras más chicas de todas las fracciones. Por otro lado, la justificación es opuesta al razonamiento, primero dice que el más grande es el más chico y luego que la fracción más chica es la de valor más grande. No hay mención a una regla de comparación.	Z. Como me enseñaban, así [dibuja un círculo atravesado por una línea] como si fuera un círculo y luego ya dividirlo, este ya es medio [señalando el trazo sobre el examen. A continuación traza otra línea], y así serían cuartos y así. Y así empecé a dividirlos pero no me salió bien. Entonces, ya me acordé que en la primaria decían que el más grande era el más chico… E. Sí [la expresión es una invitación a continuar explicando]. Z. Y pues por eso. Marqué ésa [3/4], porque ésa era la fracción más chica. E. Porque la más chica es el más grande. Z. Sí, porque así vale más. E. Muy bien.
Microgénesis			
Proceso			

Pregunta **7.** La familia Martínez utiliza cerca de 6000 L… Contenido: Operaciones en contextos

Eduardo

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias			Multiplicación
Procedimientos		**Respuesta: D) 2 400 000.** Reconoce que la solución al problema implica una operación de la cual sólo tiene un dato. Nota además que requiere otro dato para operar, mismo que recupera de su registro de memoria.	[Multiplica el gasto de agua semanal por [lo que él cree que es] el número de semanas del año: 6000 x 132] E. ¿Qué operación hiciste? ¿Qué es esto [señala la operación borrosa sobre el examen]? Éstos son los 6000 litros de agua y ¿esto qué es? [Señalando el multiplicador 132]. L. Las semanas del año.
Razonamientos		La operación realizada para resolver el problema sugiere que entiende el planteamiento y el procedimiento para solucionarlo. La dificultad observada se relaciona con un conocimiento erróneo de la partición del tiempo: el año tiene 22 meses y el mes 6 semanas.	E. ¿Cómo las sacaste? L. Multiplicando los meses. E. ¿Cuántos meses tiene el año? L. 22. E. Aquí lo multiplicaste por los litros ¿sí? L. Por las semanas.
Microgénesis			
Proceso		La investigadora intenta llevar a Eduardo a deducir los datos correctos para resolver el problema adecuadamente. Sin embargo el conteo de los meses no parece suficiente evidencia para modificar su respuesta, por lo que da la conversación por terminada.	E. Lalo, vamos a decir cuáles son los meses del año L. [Contando con los dedos al mismo tiempo] Enero, febrero, marzo, abril, mayo, junio, julio, agosto, septiembre, octubre, noviembre, diciembre. Son 12. E. Son 12, entonces… [Sugiriendo que contraste con los 22 que había indicado]. L. Pues ya.

Fernanda

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias	Multiplicación		
Procedimientos	[Multiplica el gasto semanal de agua por los días del año -365-, luego por 2.]	**Respuesta: D) 2 400 000.** Identifica, en el planteamiento del problema, que el procedimiento para resolverlo es multiplicar el dato mencionado por uno que ella debe aportar.	
Razonamientos	E. ¿Qué es esto [señala la multiplicación por dos del resultado de multiplicar 6000 x 365]? F. ¡Ay! dos años.	En su interpretación del problema parece focalizar la palabra año, luego busca una cantidad relacionada y usa 365. Más tarde, parece perder de vista que el espacio temporal es un año y multiplica el resultado anterior por 2 (años).	
Microgénesis			

Proceso		La investigadora busca un punto de partida para acompañar a Fernanda en la localización de la respuesta correcta. Fernanda responde adecuadamente a las preguntas sobre medición de tiempo, conoce la organización y distribución del calendario, excepto por el número de semanas que integra. La investigadora explica la forma de estimar un número aproximado al dato requerido para resolver el problema. Fernanda hace la estimación adecuada para el número de semanas y, sin hacer la operación, la investigadora señala la respuesta correcta. La investigadora indaga el origen de los conocimientos sobre la organización del tiempo que Fernanda posee. Pese a ser un contenido escolar, Fernanda dice haberlos obtenido extra escolarmente.	E. Esto son días [señala el resultado de la multiplicación 6000 x 365]. ¿Tú sabes cuántas semanas tiene un año?... ¿No? F. No. E. ¿Sabes cuántos meses tiene un año? F. Doce. E. Doce. ¿Sabes cuántos días tiene una semana? F. Siete. E. Siete, sí. A ver, vamos a pensar y ¿cuántas semanas tendrá un mes? ¿Has pensado en eso? F. ¿Cuatro? E. ¿Más o menos? F. Cuatro. E. Y ¿cómo lo sabes? F. Por el calendario. E. Por el calendario. Fíjate que eso está muy interesante, porque si tú sabes que un mes tiene cuatro semanas y que el año tiene 12 meses, más ó menos cuantas semanas tiene el año ¿qué tendrías que hacer? F. Multiplicar 12 x 4. E. Ajá, eso sería 48, si multiplicas 12 x 4. Entonces más o menos digamos que tiene, en realidad el año tiene 52 semanas, pero vamos a suponer que más o menos fuesen 48 semanas. Si tú hubieses multiplicado 6000 x 48 habrías tenido una cantidad parecida a ésta [señala el inciso C]. F. Ah. E. ¿Dónde aprendiste cuántos meses tiene el año?, ¿en la escuela o en la casa? F. En mi casa. E. En tu casa. Y ¿los días de la semana? F. Así, desde pequeña también.

Gabriela

	Argumentación matemática	**Análisis**	**Sentido común**
Estrategias	Multiplicación		
Procedimientos	[Multiplica 12 x 4 y el resultado (48) lo multiplica por 6000, redondea el resultado y elige una opción errónea.]	**Respuesta: E) 3 000 000.**	
Razonamientos	G. Pues, este…, fue así como calculando, ¿no? Es que por cada mes hay cuatro semanas, y entonces las cuatro semanas las multipliqué por doce	Reconoce la necesidad de un dato que no aparece en el problema; usa sus conocimientos sobre	

	porque son doce meses. E. Muy bien. G. Y ahí ya multipliqué por 48.	medición del tiempo para obtener el dato faltante, y realiza la operación adecuada para resolver el problema.	
	Microgénesis		
Proceso	E. Excelente. Este procedimiento que me dices está muy bien… Pero acá (señala el examen), además, veo que tienes doscientos ochenta y algo mil, y aquí hay que poner atención; una, dos, tres cifras y una, dos, tres cifras [señala las cifras en el resultado de la multiplicación 6000 por 48, 288 000]. Y aquí nos fuimos muy lejos con las cifras [señala los 3 000 000 del inciso E]. Sólo te pediría que no pierdas de vista esto cuando tú redondees, porque estás haciendo un buen procedimiento y obtienes un resultado correcto, pero si al final no pones atención en los detalles como ahora y pones un resultado como éste ¿qué pasa? G. Me la van a tachar. E. Te la van a tachar, y luego ¿qué va a pasar con tu calificación? G. Baja.	La investigadora localiza el punto que lleva a Gabriela a la elección de la respuesta errónea luego de realizar un procedimiento adecuado. Intenta que ella lo note haciendo alusión al recuento de las cifras obtenidas en la operación y de su transferencia a las opciones de respuesta. Gabriela parece reconocer el origen de su elección fallida.	

Gerardo

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias			Multiplicación
Procedimientos		**Respuesta: B) 240 000.** Identifica, en el planteamiento del problema, que el procedimiento para resolverlo es multiplicar el dato mencionado por uno que él debe aportar.	[Multiplica el consumo semanal por los días del año, luego elige la opción con la cifra más cercana.]
Razonamientos		En su interpretación del problema parece focalizar la palabra año, luego busca una cantidad relacionada y usa 365. Aunque obtiene 2190000 elige el número que le parece más cercano.	E. Tú elegiste la respuesta B) 240000 litros. ¿Cómo supiste que ésa es la respuesta correcta? ¿Qué hiciste para llegar a ese número? G. Pues primero multipliqué 6000 por todos los días de la semana que son 365. E. Ajá, y te salió eso. Multiplicaste los litros por todos los días ¿de la semana o del año? G. Del año.
	Microgénesis		
Proceso		La investigadora trata de llevar a Gerardo a localizar su error y corregirlo. Gerardo nota que eligió una respuesta errónea.	E. Pero ¿ya te fijaste que aquí dice: “La familia utiliza cerca de 6000 litros por semana?” No por día, sino por semana. G. [Silencio] E. ¿Tú sabes cuantas semanas tiene un año?

		La investigadora intenta llevarlo a determinar el número de semanas recurriendo a los conocimientos de Gerardo acerca de la medición del tiempo. Gerardo se muestra angustiado, la investigadora decide cambiar de pregunta.	G. No. E. ¿Sabes cuantos días tiene una semana? G. Siete. E. ¿Y cuántos días tiene el año? G. 365. E. ¿Se te ocurre cómo saber cuantas semanas tiene el año con esos datos? G. No. E. Y si dividieras 365 días que tiene el año entre 7 días que tiene la semana ¿qué obtendrías? G. No sé. E. ¿Sabes cuántos meses tiene el año? G. 12. E. ¿Sabes cuántas semanas tiene un mes? G. Como cuatro. E. Si. Entonces, si tienes 12 meses y cada mes tiene 4 semanas, ¿cuántas semanas tendrá el año? G. [silencio]. E. A ver Gerardo, tienes 12 meses y cuatro semanas por cada mes, ¿qué operación harías? G. [Permanece en silencio al parecer un poco angustiado]. E. Está bien, no te preocupes. Sólo quería saber cómo habías hecho tu estimación.

Miguel Ángel

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias			Multiplicación
Procedimientos		**Respuesta: B) 240 000.** Identifica, en el planteamiento del problema, que el procedimiento para resolverlo es multiplicar el dato mencionado por uno que él debe aportar. Obtiene el número de semanas multiplicando los meses por las 3 semanas que supone tiene cada mes.	[Multiplica 12 x 3 para obtener las semanas del año. Multiplica el consumo semanal por las semanas del año: 6000 x 36.]
Razonamientos		En esta respuesta se nota el desconocimiento de Miguel Ángel respecto a la partición del mes en semanas. Aunque ha notado una variación en el número de semanas de cada mes, pero no el rango, por lo que su percepción le lleva a usar datos incorrectos y a una respuesta equivocada.	M. Ah. Es que agarré…, bueno, primero puse un determinado número de semanas. No es igual y algún mes tiene cuatro, pero sé que… Con la base de tres fui sacando las semanas y los meses que eran. Un año tiene doce meses y así.
Microgénesis			

Proceso		La investigadora intenta llevar a Miguel Ángel a realizar una mejor estimación del número de semanas del mes para llegar a la respuesta correcta. Durante la entrevista de Miguel A. es la segunda ocasión que menciona la regla de tres como el recurso con el cual podría organizar la información y operar con ella para resolver problemas. La investigadora le hace notar que en este caso se requiere de algo más sencillo. Al final de la conversación sobre la pregunta Miguel A. parece convencido del procedimiento para estimar el número de semanas del año, así como de cuál fue la causa de la respuesta errónea.	E. Sí, por cierto los años tienen 52 semanas. ¿Tú sabes cuantos días tiene una semana? M. Siete. E. ¿Cuántos días tiene un año? M. ¿Cuántos días? Sí, 365. E. Sí. Y ¿qué operación tendrías que hacer para saber cuántas semanas tiene un año? M. Este… E. Sí es que habría que hacer una operación. M. O sea, ¿cuántas semanas? E. Ajá. Tú sabes que el año tiene 365 días y que la semana tiene siete días y lo que queremos saber es cuántas semanas tiene el año. ¿Qué podríamos hacer con toda esa información? M. ¿Una regla de tres? No ¿verdad? E. No. Algo más simple. M. ¿División? E. Ajá. ¿Qué dividirías? M. El número de días, ¿no? E. De días si estamos hablando de días, días del año y días de la semana, pero ¿Cuáles días los del año o los de la semana? M. Los del año. E. ¿Esos los dividirías entre qué, el número de días de qué? M. ¿Semanas? E. Para que tu resultado fuera más parecido o más próximo a lo correcto, ¿no? ¿Harías algo cómo eso? M. Sí. E. Y aquí, te saldría cincuenta y dos. Y entonces, en lugar de multiplicarlos por treinta y seis habrías tenido un número más, más aproximado.

Ricardo

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias			Multiplicación
Procedimientos		**Respuesta: D) 2 400 000.** Identifica, en el planteamiento del problema, que el procedimiento para resolverlo es multiplicar el dato mencionado por uno que él debe aportar. En la obtención del dato faltante, comete equivocaciones como interpretar el consumo	[Multiplica consumo semanal por el número de días de la semana: 6000 x 7. Luego Multiplica 46000 x 365.]

		semanal como diario y obtener así 42000 litros de consumo semanal. El segundo error es pensar en el consumo semanal como diario y ahora contabilizar todos los días del año para obtener una cantidad. Su procedimiento permite ver que tiene conocimientos de medición de tiempo, como que la semana tiene 7 días y el año 365. Es posible que a partir de la multiplicación [6000 x 7], consumo semanal por días de la semana, notara que el resultado era muy lejano a las opciones de respuesta por lo que decidió ir con la siguiente medida de tiempo: 365 días.	
Razonamientos		En su interpretación del problema parece focalizar la palabra semana como el indicador del consumo por obtener, con lo que interpreta el consumo semanal como diario. Ante la dimensión de las cifras, al parecer, opera sin reflexionar en la medición del tiempo. Su respuesta denota confusión y duda con respecto al proceso a desarrollar. Sabe que hay que operar, pero no sabe qué operaciones usar.	R. [Multipliqué] seis mil por siete y me salió cuarenta y seis mil. E. ¿Por qué la hiciste con un número tan grandote? R. Es que iba a hacer también la división, pero como que se me hizo obvio más ésta, la multiplicación, porque saldría un número más grande.
Microgénesis			
Proceso		La investigadora busca un punto de partida para ayudar a Ricardo a reflexionar sobre su proceder. Se observa que él tiene conocimientos acerca de la medición del tiempo. Esta respuesta de Ricardo hace suponer una creencia de él en relación con los elementos que indican el tipo de operación por usaR. Si el resultado de la multiplicación es “grande” entonces se divide.	E. ¿Tú sabes cuántas semanas tiene un año? R. ¿Cuántas semanas tiene un año? Un año tiene 365 días, ¿no? E. Ajá. R. Semanas, no. E. No. ¿Cuántos días tiene una semana? R. Siete. E. Y con lo que me acabas de decir, que el año tiene 365 días y la semana 7 días ¿podrías llegar a saber cuántas semanas tiene un año? R. Sí, ¿no? E. ¿Sí? ¿Qué harías? R. Bueno, yo multiplicaría, y si me sale un resultado muy grande hago una división. E. Ok, ¿qué divides? R. Dividiendo 365 entre 7. E. Exacto, y ahí ya podrías saber. Te voy a decir que el año tiene 52 semanas y que así se obtienen, dividiendo 365 entre 7, eso está muy bien. Pero también sabes otras cosas ¿Sabes cuántos meses tiene el año? R. 12.

		En el acompañamiento Ricardo obtiene dos estimaciones del número de semanas del año, con lo que la investigadora supone que él puede llegar a la respuesta correcta. Ricardo corrobora su dificultad para identificar en qué momento y que tipo de operaciones aritméticas aplicar en la resolución de problemas.	E. 12 y… más o menos ¿cuantas semanas tiene un mes? R. 4. E. Cuatro. ¿Qué podrías hacer ahí para saber más o menos cuantas semanas tiene un año? R. Cuatro, bueno, multiplicar otra vez cuatro por 12 y sacar el resultado. E. Ajá. R. Cuatro por doce. E. Y ahí tendrías 48, que no es igual pero más o menos se acepta. Entonces, tú hiciste aquí un montón de operaciones que luego borraste y lo que hiciste fue multiplicar 6000 litros x 365 días, ¿no? Y entonces te dio una cantidad grande, porque son números muy grandes los que usaste, claro. Operaste como si cada día la familia gastara 6000 litros en vez de cada semana. Yo creo que aquí tendrías que tener más claridad respecto a cuándo usar una operación y otra. Yo oigo que sabes hacer las operaciones, veo que sabes hacer las operaciones pero de repente no sabes cuál usar ¿no? R. Es lo que le decía a mi mamá en la mañana, que me apuntara con mi maestra otra vez, porque en un examen luego… Es que sí sé hacer todas las operaciones, pero al momento de efectuarlas me empiezo a poner nervioso y me hago bolas.

Zoe

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias			Multiplicación
Procedimientos		**Respuesta: E) 3 000 000.** Identifica, en el planteamiento del problema, que el procedimiento para resolverlo es multiplicar el dato mencionado por uno que ella debe aportar recuperándolo del enunciado. Interpreta el consumo semanal como diario, luego multiplica por siete para obtener el consumo semanal. Deja de lado el resultado de la operación y nuevamente con la interpretación de que el consumo semanal es diario lo multiplica por 28 días [7 días semanales por 4 semanas mensuales], una vez obtenido el consumo mensual lo	Multiplica consumo semanal por días de la semana: 6000 x 7. Multiplica consumo semanal por los días del mes: 6 000 x 28. Multiplica el resultado anterior por los meses del año.

		multiplica por los 12 meses del año.	
Razonamientos		La semana tiene 7 días. El mes tiene 4 semanas de 7 días, entonces el mes tiene 28 días. Siguiendo la línea el resultado mensual se multiplica por 12 meses.	Z. Pues primero, como es 6000 a la semana pues multipliqué [señala sobre una multiplicación 6000 por 7, escrita durante el proceso de resolución del examen. Se da cuenta que multiplicó por los días de la semana en lugar de hacerlo por el número de semanas del año.] ¡Ay! Multipliqué, ¡ay! ¿Qué pensé? Pensé que era al día. Multipliqué primero, se supone, que para saber cuánto era a la semana, pero ya me equivoqué. E. Primero por semana, ok. Z. Luego pues ya vi, más o menos como 28 días y puse que era como al mes. Y lo multipliqué como si fuera al mes, y luego de ahí del mes puse lo que me resultó, fueron…, lo multipliqué por los doce meses que es el año, y ya lo que me resultó pues ya.
		Microgénesis	
Proceso		Zoe tiene conocimientos respecto a cómo se organiza el tiempo en el calendario, sin embargo parece no saber cuántas semanas tiene el año, por lo que idea un procedimiento a partir de su saber que el mes tiene 4 semanas. La investigadora parte desde ese conocimiento para llevar a Zoe a conocer los datos con los que podría resolver el problema. Zoe dice desconocer el dato debido que en la escuela no se enseñaron.	E. Tú sabes ¿cuántas semanas tiene el año? Z. ¿Semanas? Eh…no. E. ¿Cuántas crees que tenga? Z. ¿Semanas? Tiene trescientos sesenta y tantos [silencio]… Pues como la mitad ¿No? E. ¿Cuántos días tiene la semana? Z. Siete. E. Entonces… Z. Mm [Silencio]. E. ¿Tú sabes cuántas semanas tiene un mes? Z. ¿Cuántas semanas?... No. [Silencio] ¡Ah! ¿Un mes? Como cuatro ¿No? E. Como cuatro más o menos. Y algo que sí sabes muy bien es que el año tiene doce meses. Entonces ¿más o menos cuántas semanas tiene? Z. [Haciendo cálculo mental] cuatro, cuatro por dos, ocho, cuatro por uno, ¿cuarenta y ocho? E. Sí. En realidad tiene 52 semanas, pero más o menos, así lo puedes calcular. Z. ¡Ah! E. ¿Eso nunca te lo dijeron en la escuela? Z. No. [risas] E. Y no eres curiosa para ver el calendario ¿cuántas tiene? Z. No [risas].

Pregunta 8. Dos cajas contienen piezas cuadradas de cartulina para construir un modelo más grande. Contenido Proporcionalidad.

Atilio

	Argumentación matemática	**Análisis**	**Sentido común**
Estrategias			Decisión
Procedimientos		**Respuesta: ½.** Decide responder la fracción un medio, tomando en cuenta los números mencionados en el enunciado. No incorpora las piezas fraccionadas a su proceso de resolución.	[Integra la unidad de referencia con los datos que tiene. 2 de la 1 y 1 de la 2. Toma los datos numéricos como base para decidir la respuesta.]
Razonamientos		Ante la dificultad para entender el enunciado, decide “descifrar” el mensaje que no reconoce en el planteamiento del problema. Atilio considera que el uso de la lógica, sin necesidad de construir el modelo, le ayudará a encontrar la respuesta; por lo que decide formar una fracción con los números mencionados en el enunciado en lugar de usar las fracciones. Su respuesta parece indicar que Atilio considera este problema como una pregunta capciosa.	A. Ésa no la hice. E. ¿Cómo supiste ésa?, ¡cuéntamelo todo! A. ¡Ay! pues, ahí, es que nada más la hice al aventón. Se me llenó la cabeza de números y dije ¡ay ya, un medio! Porque se supone que de… o sea… Usé un poquito de lógica, según yo, porque si de la una se utilizaban dos y de la otra uno, pues la fracción era un medio, según yo.
Microgénesis			
Proceso		La investigadora busca el punto de inflexión que llevó a Atilio a entender un problema distinto al planteado en el enunciado. Tan pronto inicia la explicación del armado del modelo Atilio reconoce haber hecho una mala lectura. La investigadora logra fijar la atención de Atilio en el armado del modelo y las fracciones del problema. Durante el proceso Atilio pone en duda su	E. A ver: de la caja dos, o sea de ésta [señala la figura], por cada pieza de la caja dos debe haber dos de éstas [señala la segunda figura], ¿si? A. ¡Ah! ¡ya entendí! E. ¿Qué, cuál? ¿Cuál fue el problema aquí?, ¿una lectura rápida que no te dio chance de entender bien?, o ¿que está muy enredado el planteamiento?, o ¿que ya tenías la cabeza llena de números? o ¿Qué? A. La lectura. E. ¿La lectura rápida? Yo tengo la impresión de que sí,… Entonces, más bien leíste rapidito, bueno, yo no sé si éste sea un buen modelo [dibuja un modelo con las tres piezas unidas] pero ahí está. A. Ok [observa el dibujo]. E. ¿Sigues pensando que es un medio? A. Mmh. E. Ya cumplimos el requisito, una de ésta y dos de ésta. Ahí está. A. Ok, pues sí.

		respuesta inicial aunque la sigue defendiendo con una intensidad que disminuye a medida que el proceso de armado del modelo avanza. La percepción visual de Atilio se sobrepone a la verificación por conteo de las piezas del modelo. Se nota resistencia a considerar que los tres enteros fraccionados (tres piezas del modelo) pueden integrarse en un entero y ser la nueva unidad de referencia. Una vez identificada la fracción en el modelo, la investigadora acompaña a Atilio en la búsqueda de la fracción simplificada. Llegan a la respuesta correcta.	E. ¿Sigue siendo un medio? A. Pues sí, ¿no? E. ¿Sí, no? ¿Pregunta o afirmación? A. Mm. E. A ver, vamos a contar. A. Yo creo que sí, sí, si [ignora el conteo] E. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ¿Cuántos negros…? y además éstos están pegaditos A. ¡Ah!, ok, ¡creo que ya entendí! 12. E. 12. ¿Y luego? ¿Cuántos negritos hay?, que es la pregunta. A. 4/12. E. Ándele 4/12, 4/12 y además si nos ponemos exquisitos como acá, la podemos reducir más A. Sí, 2/6. E. 2/6 muy bien, entonces, tenemos ya 4/12 y decíamos, si nos ponemos más exquisitos todavía la podemos achicar más ¿qué nos daría 2/6? ó ¿qué fracción más chica escribo? A. Mm. E. Y entonces todavía la podemos achicar más, ¿un qué? A. 1/3. E. Un tercio, muy bien.

Cuautli

	Argumentación matemática	**Análisis**	**Sentido común**
Estrategias			Conteo de partes
Procedimientos		**Respuesta: 2/4.** Cuenta los dos cuadritos negros de los cuatro cuadritos de la pieza descrita para la caja 2.	
Razonamientos		Intenta seguir el enunciado del problema pero abandonar el intento. Parece ser un enunciado muy complicado y él se nota impaciente.	E. Tu respuesta a esta pregunta fue dos cuartos ¿Cómo lo supiste? C. Ahí no puse mucha atención. Dice que son cuatro cuadritos de cartulina que hay dentro de la caja ¿no?, o sea que son dos cajas y dice que en la caja uno… me equivoqué, ya no me acuerdo cómo va.
Microgénesis			
Proceso		La investigadora explora con Cuautli las posibles dificultades para la resolución de este problema. Primero verifica la comprensión del significado del concepto “modelo”, sin encontrar evidencia de la	E. Hay una caja de piezas con un cuadrito negro y una caja de piezas con dos cuadritos negros. Ahora, para hacer tu modelo ¿Entiendes que es eso de hacer un modelo?

		suposición. Cuautli señala que las instrucciones de armado mencionan 3 piezas con dos cantidades distintas de cuadritos negros. Cuautli parece considerar sinónimos los términos “piezas” y “cuadritos”, situación que le lleva a pensar que cada caja contiene 4 piezas y no que cada una de las piezas de la caja (número indeterminado) tiene cuatro cuadritos. Esta situación parece incomodar a Cuautli. La investigadora cambia la exploración a las instrucciones de armado del modelo. Para el efecto dibuja el modelo. Se perciben algunas dificultades en el trabajo con objetos abstractos. Una es la aparente dificultad en relacionar las partes con el todo, otra, la relación que hay entre fracciones equivalentes. Una tercera dificultad es la de integrar toda la información del enunciado en la resolución del problema. Estas dificultades, en este problema en particular, podrían tener origen en la complejidad del enunciado, la falta de atención de Cuautli en el problema, y una lectura parcial e irreflexiva del enunciado, pues con la guía de la entrevistadora Cuautli llega fácilmente a una respuesta correcta.	C. Pues sí. E. ¿Qué es? C. Pues hacer algo de lo que vas hacer después, o…pues sí, hacer un modelo. E. Bueno, podríamos decir que es el cómo vamos a hacer las figuras con tres piezas ¿podría ser algo así? C. Pero nada más que ocupa tres piezas y son cuatro. E. Y ¿Son cuatro? C. Sí, dice que son cuatro en cada caja. E. Hay cuatro pequeños cuadros en cada pieza. Ésta es una pieza completa [señala una de las figuras del examen] y cada una tiene cuatro cuadritos. ¿Qué te molesta de esta pregunta? C. Nada. E. ¿Nada te desagrada de esta pregunta? C. No. E. ¿Te quedó muy claro lo del cuadrito? Mira, aquí tenemos una pieza, ésta es pieza de la caja dos y éstas dos son piezas de la caja uno ¿ajá? Aquí dice que para formar el modelo, por cada una de la caja dos debe haber dos de la caja uno. El modelo de la caja dos tiene dos cuadritos negros y el modelo de la caja uno tiene un negrito [dibuja un modelo]. A mí se me ocurrió hacer este modelo, a tí te puede gustar de otra manera, quizá que los negritos se toquen. A mí me gustó así: Una arriba dos abajo, una arriba dos abajo. Ahora sí, viendo el dibujo ¿Sigues pensando que la fracción negra es dos cuartos? ¿Habrá cambiado la fracción? C. No, es más grande ¿no? E. ¿Cuál es? C. Pues, de los cuadros pequeños… ¿Qué fracción será el color negro? Pues serían cuatro décimos. E. ¿Décimos? A mí se me hace que estás respondiendo muy rápido. A ver ¿Son 10 los cuadritos? Cuéntale. C. Cuatro doceavos. E. Cuatro doceavos. Entonces, yo creo que no te llamó mucho la atención esta pregunta ¿no?

Eduardo

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias	Conteo de partes		
Procedimientos	Cuenta los cuadritos negros de la pieza 2.	Observa la pieza de la caja 2, nota que la mitad de la figura está sombreada.	
Razonamientos	E. Tú respondiste que un medio ¿cómo supiste que era un medio? L. Es que aquí me equivoqué y pensé nada más en la 2, que era la mitad. E. O sea que finalmente te quedaste con la última imagen, ya no pensaste en la anterior ni en las combinaciones. L. No, ya no.	Utiliza la imagen de la información más reciente leída en el planteamiento del problema. Se observa una fragmentación de la información del enunciado, posiblemente una lectura rápida.	
	Microgénesis		
Proceso			

Fernanda

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias	Conteo de cuadritos		
Procedimientos	Cuenta los cuartos sombreados de las dos piezas de la caja 1.	**Respuesta: 2/4.** Suma los cuartos sombreados de las dos piezas de la caja 1, obtiene dos cuartos.	
Razonamientos	E. Tú me dijiste que es de dos cuartos ¿cómo supiste esto? F. Porque cómo aquí teníamos sólo relleno un cuadro [señala la figura de la caja 1], para formar otro necesitábamos dos y entonces da dos cuartos.	Reconoce que cada cuadrito sombreado de la pieza de la caja 1 es un cuarto. Por otra parte el enunciado dice que para formar el modelo se requieren dos piezas de la caja 1, por lo que afirma tener dos cuartos. Se observa que pierde de vista que la unidad de referencia cambia cuando reúne ambas piezas.	
	Microgénesis		
Proceso	E. ¡Ah!, ok, muy bien, pero a ver. Vamos a tratar de seguir esta idea, rápidamente, y vamos a suponer que éste es el modelo dos y estos son el modelo uno, ¿ajá? [Hace el dibujo de las tres piezas del modelo]. Si los pegamos juntitos, todos pegaditos, ¿crees que seguiría siendo dos cuartos? ¿Cuánto sería? F. Cuatro doceavos. E. Cuatro doceavos. Está bien lo que pensaste; ¿qué te habría faltado aquí, tal vez construir el modelito? F. Es que con la figura se me hace más, más fácil.	La investigadora busca el punto de inflexión que llevó a Fernanda a emitir la respuesta errónea, para ello se vale de la representación gráfica del modelo descrito en el problema. Fernanda reconoce de inmediato la fracción y la unidad de referencia que se forma con las tres piezas mencionadas en el enunciado. En este caso el uso del recurso gráfico como apoyo	

	E. Ah! se te hizo más fácil ver la figurita. Ok muy bien.	facilitó la comprensión del problema.	

Gabriela

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias	Conteo de partes		
Procedimientos	[Cuenta 4 cuadritos negros de dos piezas de la caja 2, suma los 8 cuadritos de las dos piezas. Obtiene 4 negros y 4 blancos, de allí el medio.]	**Respuesta: ½.** Con dos piezas de la caja dos arma un nuevo entero fraccionado en 8 partes, cuenta las partes sombreadas con las que construye la fracción 4/8 y luego la simplifica.	
Razonamientos	E. Tú respondiste que dos cuartos más dos cuartos igual a cuatro cuartos igual a un medio. A ver, ¿cómo estuvo eso? G. No, es que aquí…, me fui por medio de… acá, que dijo que dos de una caja hacen, ¿cómo se llama?... E. El modelo se hace con dos de una caja y uno de la otra caja. Pero dime, ¿cómo llegaste a esta solución? G. Porque en esta caja hay dos cuartos, porque son dos negros, y acá dice que debe haber dos de una, entonces los junté [se refiere a dos piezas de la caja 2 que tienen dos cuadritos sombreados, con ello reúne cuatro cuadritos negros.	Al parecer Gabriela hace una lectura rápida del problema que la lleva a no incluir todos los elementos indicados para construcción del modelo, en la resolución del problema. El enunciado señala: por cada pieza de la caja 2 debe haber 2 piezas de la caja 1, Gabriela interpreta como 2 de la caja 2 [pieza con dos cuadritos sombreados].	
Microgénesis			
Proceso	E. ¡Ah! y supiste que era uno, que era un medio. Mira, yo veo que trabajas bien con las fracciones, pero de pronto así como que las cosas se te hacen lío con el denominador ¿Se te hacen enredo en esta instrucción? G. Sí, un poco. E. ¿Un poco? G. Cuando dice construye el modelo ¿qué fracción de los cuadrados pequeños será del color negro? E. Mm. Mira, a mí se me ocurre… Bueno, yo voy a hacer el modelo porque yo a veces soy más visual y ver las cosas se me hace menos complicado [dibuja una cuadrícula de 2 por 6]. G. Sí, está bien. E. Entonces, a mí se me ocurre que voy a poner en	La investigadora intenta localizar el punto de inflexión que llevó a Gabriela a entender mal la instrucción del problema. Gaby percibe complicado el enunciado.	

	medio la pieza dos, porque una es de un tipo y dos del otro ¿no?, ésta es la pieza dos [al centro sombrea dos cuadritos] y se me antoja que los cuadritos negros se toquen con los negros [sombrea un cuadrito al lado derecho y uno al lado izquierdo de los cuadritos negros centrales] y entonces voy a contar… G. ¿Las tres cajas? E. Juntando las tres piezas. En realidad hay dos cajas, pero el modelo se construye con tres piezas, así dice. Mira: [Lee] "Para formar el modelo por cada pieza de caja uno debe de haber dos piezas de la caja dos". No importa que haya muchas cajas, lo que importa es que yo dispongo de tres piezas para hacer el modelo. G. ¿Solamente de estas tres cajas? E. Si, sólo de estas tres piezas, entonces… G. Serían $\frac{4}{12}$. E. A ver, simplifícalo. A ti se te da muy fácil eso. G. Si lo simplifico por dos… éste va a ser dos [señala el numerador] y éste va a ser seis [señala el denominador] y si lo simplifico por dos, este va a ser uno [señala el numerador] y éste va a ser tres [señala el denominador]. E. ¡Exacto! tú operas muy bien con esto, pero nos faltaba un poquito. Esta parte de tratar de entender qué me piden y qué debo hacer, pero no tienes problemas con la fracciones. Quizá un poco con la aplicación o con la redacción o la lectura del problema. Yo tengo la impresión, a lo mejor estoy equivocada, de que lees muy rápido por acabar rápido ¿será? G. Sí, de por sí no leo muy bien también, no sé… E. ¿Por qué? G. No sé ¿no? luego cambio unas palabras por otras. E. ¿Cuándo lo enredas más, cuando lees en voz alta o cuando lees en voz baja? G. Cuando leo en voz alta. E. ¿Cambias más las palabras? G. Sí. E. A lo mejor por ahí. Tendrías que pensar en una estrategia que te ayudara a no confundir las	Con la representación icónica del modelo Gabriela parece hallar su equivocación en el procedimiento de resolución. Surgen algunas interpretaciones equivocadas que Gabriela hizo en la lectura del problema, como suponer que se hablaba de cajas y no de piezas. De inmediato rectifica y encuentra la fracción correcta. Por último simplifica la fracción. Una dificultad detectada durante el proceso es la lectura rápida, poco reflexiva, que hace Gabriela de los ítems. Al mencionarla ella reconoce que es un problema que ya había notado tener.	

	palabras.		

Gerardo

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias			Decisión
Procedimientos		**Respuesta: 0.** Elige responder cero	
Razonamientos		Ante la dificultad para resolver el problema mediante algún procedimiento, decide responder cero. Las respuestas y el estado de ansiedad de Gerardo hacen notar que hay algo que le impide avanzar. Según su percepción no entiende la indicación de cómo formar el modelo. Es posible que se deba a que desconoce el significado de la palabra modelo, y por la respuesta, cero, podría ocurrir lo mismo con el concepto de fracción.	E. Tú respuesta es cero. Me podrías decir ¿Cómo supiste esa respuesta? G. Pues… [Silencio]. E. ¿Por qué pensaste que es cero? ¿Pensaste que no va a tener ningún cuadrito negro? G. [Permanece en silencio, al parecer un poco angustiado por no hallar la respuesta]. E. ¿Te parece difícil la pregunta? G. Sí. E. ¿Qué es lo que te parece difícil? G. Esta parte [señala la indicación de cómo formar el modelo], casi no le entendí.
Microgénesis			
Proceso		La investigadora ayuda a Gerardo a hacer una representación icónica de cada una de las piezas indicadas en el problema, para facilitarle el armado del modelo. Gerardo se observa angustiado, tiene dificultad para participar en el proceso.	E. ¡Ah! Bien, lo que no entendiste son las indicaciones para formar el modelo. Mira, para formar el modelo por cada pieza [dibuja una pieza del modelo de la caja 2 sobre el examen] de la caja 2, debe haber dos de la caja 1 [dibuja ahora dos piezas del modelo de la caja 1], entonces, vamos a ver aquí. Por una de éstas debe haber dos de éstas [se refiere al dibujo de las tres piezas que recién ha realizado]. Ahora tú tendrías que armarlo, como tú quieras. A lo mejor se te ocurre que todos los negros se toquen. Eso es lo que necesitas solamente. Ahora haz un modelo aquí abajo [indicando un espacio en blanco sobre el mismo examen]. G. [Toma el lápiz, observa el espacio blanco, permanece sin hacer trazos]. E. ¿Qué te parece si pensamos en que queremos que todos los cuadros negritos se toquen [dibuja una pieza de la caja 2, al lado izquierdo dibuja una pieza de la caja 1 con el cuadrito negro

		La investigadora continúa animándolo a formar la representación icónica.	sombreado, y a la derecha una pieza de la caja 1 sin sombrear el cuadrito] ¿dónde quedaría el cuadrito negro? G. [Sombrea un cuadrito de la figura poniéndolo en contacto con uno negro de la figura 2].
		Con el modelo armado ella intenta nuevamente obtener una respuesta de Gerardo. Por la actitud pasiva de él la investigadora sugiere cambiar de ítem.	E. ¡Bien! Allí están nuestras tres piezas, y ya cumplimos. Una pieza de éstas [señala la pieza con la figura de la caja 2] y dos de éstas [muestra las dos piezas con la figura de la caja 1]. Ahora dime ¿qué fracción de la figura serían cuadritos negros?
		Gerardo reconoce la posibilidad de una respuesta diferente a la que emitió inicialmente.	G. [silencio]. E. ¿Ahora se te ocurrió algo o sigues pensando que es cero? [Pausa larga] ¿Seguirá siendo cero? G. [Observa en silencio la figura formada con las tres piezas]. E. Piensa un poco más si quieres, si no se te ocurre nada no te preocupes. Podemos cambiar la pregunta si prefieres. G. [Permanece observando el modelo construido]. E. ¿Sigue siendo cero?... ¿Cambiamos de pregunta?
		La investigadora lo anima a intentar una respuesta en fracciones.	G. Como que pienso que ya no es cero. E. ¡Ya no es cero! ¿Qué podría ser? G. [Continúa observando la figura armada]. E. Fíjate en lo que tenemos. Tenemos tres piezas pegadas, ahora contemos cuantas partes tenemos: 1, 2, 3, 4; 1, 2, 3, 4 y 1, 2, 3, 4. ¿Eso es cierto? G. Sí. E. ¿Cuántas tenemos en total? G. 12.
		Ella verifica los conocimientos que Gerardo tiene en relación con la fracciones. Con esos datos logra que él forme la fracción correcta, a la que sólo falta simplificar.	E. Y ahora ¿cuántas negritas tenemos? G. 4. E. ¡Cuatro! Cuatro negritas de las 12 que tenemos. Doce es el total, ése podría ser nuestra unidad completa ¿te parece? Digamos que partimos la unidad en 12 partes iguales. ¿Recuerdas qué indica el número de debajo de la fracción [dibuja una línea y debajo de ella coloca el número doce]? G. Sí, el número de partes en que se dividió el entero.
		La investigadora intenta que Gerardo simplifique	E. Y el número de arriba nos indica cuantas partes

		la fracción, pero al parecer, cualquier cambio en el proceso lo angustia y se resiste a continuar. Ella procede explicando que, para obtener fracciones equivalentes, es necesario hacer a ambas cifras de la fracción la misma operación. Elige dividir toda la fracción por cuatro para llegar a la fracción reducida que responde el problema. Otra vez, el estado de angustia de Gerardo hace que la investigadora recurra a repartos con representaciones icónicas de los problemas parciales que van construyendo. La investigadora verifica que Gerardo reconozca la fracción un tercio como la solución correcta del problema.	estás tomando del entero ¿es así? G. Sí. E. ¿Cuántas partes estás tomando? G. Cuatro. E. Entonces anótalo en la fracción. G. [Escribe 4 sobre la línea]. E. Y ésa es nuestra fracción. La podríamos hacer más chiquita. Por ejemplo podríamos decir: si dividiéramos el 4 entre cuatro ¿cuánto resultaría? Si tuviéramos 4 dulces para repartirlos entre cuatro niños ¿Cuántos dulces le tocan a cada niño? G. Uno. E. Uno [dibuja una línea junto a la línea de la fracción $\frac{4}{12}$ y anota sobre ella el número 1]. Pero ahora tenemos doce dulces y cuatro niños. ¿Cuántos dulces le tocan a cada niño? G. [Permanece con la mirada fija en el examen y en silencio prolongado]. E. Tenemos doce dulces [dibuja 12 bolitas sobre el examen y las cuenta señalando una por una]; 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 12. Y tienes cuatro [dibuja 4 “monitos”]1, 2, 3, 4. Y ahora los repartimos. Hazlo tú G. [Traza líneas que van de las bolitas representativas de los dulces a los muñequitos] Tres. E. O sea que todo nuestro montón de dulces lo repartimos ¿entre cuántos niños? G. Cuatro. E. ¿Y les tocó a…? G. Tres. E. Entonces nuestra fracción la dividimos entre cuatro y nos quedó [anota bajo la línea de la fracción el número 3] un tercio. Y tu respuesta correcta debió haber sido un tercio ¿De acuerdo? G. Sí.

Ricardo

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias	Recurso gráfico y suma iterada		
	Arma el modelo con dos piezas de la caja 2 y una	**Respuesta: 20 cuadritos.**	

Procedimientos	de la 1, de donde cuenta 5 cuadros negros. Luego multiplica 5 x 4 y obtiene el número 20 de su respuesta.	Hace la representación icónica del modelo con tres piezas. En el dibujo invierte la cantidad de piezas de cada caja, por lo que el modelo queda con 5 partes sombreadas de las 12 que lo integran. Suma cinco veces cuatro.	
Razonamientos	E. Tu respuesta es que hay 20 cuadros. ¿Cómo supiste que hay 20 cuadro negros? R. Es que como aquí decía que eran cuatro cuadros pequeños, pensé que eran un cuadrito aquí, un cuadrito acá, otro cuadrito acá [señala cada uno de los cuadritos de una de las piezas]. E. ¡Ah! Dentro de cada uno de ellos. R. Que cabían cuatro en cada uno, entonces fui sumando cuatro, cuatro, cuatro, cuatro.	La lectura e interpretación que Ricardo hace del enunciado lo llevan a dos equivocaciones; primero invierte la cantidad de piezas de cada caja que debe usar para armar el modelo. Ese hecho lo lleva a contar cinco piezas sombreadas de las doce que hay en la figura. Luego interpreta del enunciado que cada cuadrito negro tiene cuatro cuadritos dentro, por lo que suma cinco veces cuatro.	
Microgénesis			
Proceso	E. Ok ¿Te parece que está complicada esa pregunta? R. Poquito. E. Un poco, ¿qué es lo que se te hace enredado? R. La pregunta. E. La pregunta ¿toda? R. Sí. E. Bueno. R. Dice que cómo utilizar los cuadritos, tienes que pensarle bien. E. ¿Cómo te gustaría? Mira, vamos a suponer, aquí tienes uno, vamos a suponer que es eso [dibuja una pieza del modelo uno], vas a usar uno de estos y dos de estos [señala ambos modelos]. ¿Qué prefieres?, ¿que el negro toque las negras o que el negro toque las blancas? R. Que el negro toque las blancas. E. Que el negro toque las blancas. Si quieres eso, entonces tendremos que ponerlas así y si quieres que toque la otra blanca pues tendríamos que ponerlo acá ¿no? [Sombrea los cuadritos según indican las piezas]. Ahora, sin considerar que hay cuadros más pequeños dentro de esos cuadros, solamente estos cuadros [se refiere a las tres piezas con las que se armó el modelo], y que ya armamos el modelo según la regla que nos pusieron aquí: que por cada uno del 2 debe haber dos de éste, ya tenemos armado el modelo. Ahora, ¿cuántos cuadros negros hay?	La investigadora explora por el enunciado del problema para localizar el punto de inflexión que lleva a Ricardo a responder erróneamente. Ricardo percibe complicado el enunciado del problema. Con la representación icónica del modelo y la reflexión acerca de las explicaciones del enunciado Ricardo obtiene la fracción correcta.	

	R. Cuatro. E. Cuatro. ¿De cuántos cuadros que son en total? R. Doce. E. De doce, entonces ¿qué fracción? R. 4/12. E. Y ¡hasta la podernos hacerla más chiquita! Si dividimos todo esto entre cuatro, ¿cuánto me sale? R. 3 enteros. ¿no? E. ¿Tres enteros? Porque si dividimos 4 entre 4 le toca a uno y 12 entre 4 a 3. Bueno, pasemos a la siguiente.	Se observa una dificultad con la simplificación de fracciones. La investigadora decide cambiar a la siguiente pregunta.	

Zoe

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias			Decisión
Procedimientos		**Respuesta: 6 cuadritos negros.** Elige responder 6 de color negro.	
Razonamientos		En la respuesta de Zoe se percibe dificultad para descodificar el enunciado. Al parecer ella interpreta que cada cuarto de la pieza es una pieza entera, por lo que cada caja tiene cuatro piezas; pero el resto de los datos del problema le hacen cambiar la suposición hasta terminar confundida. Es posible que al final pensara en un modelo armado que integrara dos piezas de cada caja, con lo que obtuvo seis cuadritos de color negro. La mención del mosaico, sugiere que Zoe responde intentando relacionar el problema con un referente de su vida cotidiana.	E. Tú respondiste que eran seis de color negro, ¿cómo supiste eso? ¿Cómo supiste que seis? Z. No me acuerdo cómo lo saqué, es que, ¡ésa sí me costó mucho! Es que, bueno, primero pensé que cada pieza de éstas [señala una de las cuatro partes del modelo de la caja 1] era como un mosaico, y que para formar cuatro se necesitaban cuatro para formar una caja. Después pensé que a lo mejor era la caja pero ya dividida, y no. Pero, según yo, si es por cada dos piezas.
		Microgénesis	
Proceso	E. ¿Está muy complicado? Z. Sí. E. ¿Esto te ayuda? [Saca tres tarjetas de cartulina, una con el modelo de la caja 2 y dos con el modelo de la caja 1] ¿Verlos aquí te ayuda? [Señala las cartulinas y las mueve en cualquier dirección]. Z. Sí, así sí, verlos así ya me da una idea porque si los dibujo allí [señala el espacio en el examen] me iba a tardar más. E. Por cada una de éstas [muestra la tarjeta con el	La investigadora ofrece material manipulable a Zoe para ayudarla a entender el planteamiento del problema. Manipular las tarjetas con las representaciones de	

	modelo de la caja 1] se necesitan dos de éstas [muestra las dos tarjetas con el modelo de la caja 2]. Z. Por cada una de éstas [señala en el ítem la pieza de la caja 1] se necesitan dos de éstas [señala en el ítem la figura de la caja 2]. Entonces, en ésta son dos [ahora señala la figura de la caja 2], y en la otra dos [señala la figura de la caja 1], entonces son cuatro [al parecer suma las partes negras del total de piezas que se requiere para construir el modelo][risas nerviosas] son… no entiendo. E. ¿Qué te parece difícil de esta pregunta? ¿Se te hace muy enredado? Z. Sí porque como que no se explican bien, entonces como que… E. A mí me pareció que se te hizo muy enredada. Z. Sí. E. Bueno, pues ya. Es todo lo que te quiero preguntar. Ya terminamos. Gracias.	las tres piezas para armar el modelo que indica el problema, parece aclarar las dificultades de Zoe. Para ella, establecer la relación entre las tarjetas y las representaciones icónicas del examen generan una nueva dificultad. Al parecer “por 1 de la 2 hay 2 de la 1” es el punto de inflexión en la comprensión del problema. Se percibe angustia en Zoe por lo que la investigadora decide terminar la entrevista.	

Pregunta 9. Escribe 0.28 como fracción reducida (simplificada). Contenido: Conversión

Atilio

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias	Reconocimiento súbito		
Procedimientos	Compara 0.28 con 0.25.	**Respuesta: ¼.** Reconoce la cercanía entre las expresiones 0.28 y 0.25 y la equivalencia entre la fracción ¼ y la expresión decimal 0.25, por lo que decide responder ¼.	
Razonamientos	E. Tu respuesta fue ¼. ¿Cómo supiste eso? A. No, el problema es que no supe. E. ¡No supiste! ¿Y entonces? A. Pues me pareció que uno…, que 0.25 es un cuarto. E. Exacto. A. Y tuve que acercarlo.	Dice desconocer el procedimiento para convertir expresiones decimales en fracciones.	
Microgénesis			
Proceso	E. Entonces tú respuesta fue muy automática, te pareció 1/4. Este 28 ó 0.28 es lo mismo que ponerlo así [escribe la fracción $\frac{28}{100}$] ¿te acuerdas de eso, o no? A. Un poquito. E. Bueno y si lo pones así y volvemos al asunto de podemos simplificar. A. Punto cero cero veintiocho [escribe .0028]. E. ¡No! punto cero cero veintiocho [0.0028] sería 28 sobre 10 000, pero aquí lo tienes sobre cien, porque éste nos está indicando si son décimos o si son centésimos. A Ok. Sí, sí. E. Dos ceritos, ¿ajá? Si acudimos a nuestra ya muy popular, en este examen, simplificación, dividiríamos. Por ejemplo, esta fracción podríamos dividirla a mitades, aquí [señala el numerador] tendríamos 14 ¿qué…? A. 50. E. ¡Ah, bien! Y ¿si la volvemos a dividir en mitad? A. Mmh, no siete, siete. E. ¿Siete qué? A. 7/25 E. Ok. Y esto sí se parece un montón a un cuarto ¿o no? Porque un cuarto es igual ¿a qué?	La investigadora explora qué recuerda Atilio sobre las fracciones decimales. Atilio recuerda que multiplicar por 100 es como agregar dos ceros a las cifras y decide hacerlo con la expresión 0.28. La investigadora le hace notar que no es el procedimiento adecuado y lo regresa a la fracción $\frac{28}{100}$. Desde ese punto la investigadora acompaña a Atilio en la simplificación de la fracción, hasta llegar a la respuesta correcta. La investigadora trata de hacer notar a Atilio que su respuesta inicial, aunque no fue la correcta, era una buena estimación; pero el intento falla debido a las cifras involucradas en la fracción 7/25. Ella insiste en comparar	

	A. No tengo idea. E. Un cuarto es igual a… A. 0.25 E. $0.25=\frac{25}{100}$ A. Si, ¡Oh, ok, ya entendí, ya capté! E. ¿Más o menos? A. Sí. E. Bueno, ok.	$\frac{25}{100} con \frac{28}{100}$, para reiterarle lo conveniente de su respuesta. Finalmente Atilio parece convencido.	

Cuautli

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias		**Respuesta: No responde.**	No responde.
Procedimientos			No responde.
Razonamientos		La justificación para no responder es la ausencia de conocimiento. Se nota algo de rechazo a la exploración.	E. ¿Por qué? C. Porque, no supe. Por eso la deje así.
		Microgénesis	
Proceso		La investigadora intenta sin éxito explorar por las causas de la omisión de la respuesta de Cuautli.	E. ¿No sabes cómo se hace ésa? C. No. E. De acuerdo.

Eduardo

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias			Mínimo común múltiplo
Procedimientos		**Respuesta: 2/4.** Mueve dos lugares el punto decimal en el número 0.28, lo convierte en el entero 28 y aplica el procedimiento para obtener el mínimo común múltiplo. Con los mínimos 2 y 4 construye la fracción 2/4.	E. Y tú respondiste dos cuartos ¿Cómo supiste…? L. Ya no me acordaba bien cómo se pasaba de decimal a fracción. E. Ya no te acordabas bien, pero ¿cómo llegaste a esos dos números y a saber que 2 arriba y 4 abajo? L. El punto decimal lo moví y los lugares los subí. E. ¡Ah! Muy bien, entonces te queda 2.8 ¿no? L. [Silencio]. E. A ver, si moviste el punto decimal que estaba frente al cero y lo pusiste frente al dos te queda 2.8. L. No, lo moví 2 lugares. E. Entonces te quedaron 28, y luego ese número lo convertiste en fracción. ¿Cómo hiciste para que el 28 quedara convertido en la fracción dos

			cuartos? L. Le saqué mitad.
Razonamientos		En el intento por obtener una fracción, Eduardo multiplica por cien el número decimal en lugar de dividirlo, por lo que obtiene 28 enteros. Luego recuerda un procedimiento para hallar el mínimo común múltiplo de las fracciones y lo aplica al número entero. Es un procedimiento aprendido con algunas imprecisiones, tal vez vagamente recordado que asocia a la multiplicación de fracciones.	E. ¿Cómo? L. [Lalo dibuja una línea vertical, en el lado izquierdo escribe 28 en el derecho 14, abajo del 28 escribe 4 y del 14 2] 28 mitad 14, 14… E. ¿Qué le sacaste, cuarta? ¿O qué? L. Es que el 8 lo dividí entre 2, me da 4 y el 2 lo dividí entre 2 también y de allí me da el 2 y el 4. E. ¡Ah! Y ¿dónde aprendiste a hacer esto? ¿Te acuerdas dónde lo aprendiste? L. En la primaria. E. Y ¿para qué lo usabas? L. Para multiplicar fracciones.
		Microgénesis	
Proceso			

Fernanda

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias			Simplificación de fracciones
Procedimientos		**Respuesta: ¼.** Convierte la expresión decimal 0.28 en la fracción 2/8, luego la simplifica dividiendo por dos de donde obtiene ¼, continúa dividiendo entre dos y concluye con ½.	
Razonamientos		La manera de convertir la expresión decimal 0.28 en fracción es colocando las cifras 2 y 8 en una fracción donde el numerador es dos y el denominador 8. La segunda parte del problema, reducir la fracción, se hace dividiendo iterativamente por dos, cada cifra de la fracción. La dificultad que generó ½ es que dividió 1 entre dos, y no supo cómo expresar el resultado en la fracción, por lo que al parecer decide dejar uno en el numerador, en tanto que la división de cuatro por dos le da el denominador de la fracción.	E. Tu respuesta fue ½. ¿Cómo supiste eso? F. Es que como punto veintiocho lo pasé a 2/8, bueno, la fracción, entonces lo fui deduciendo. E. Ok, $\frac{2}{8}$ es igual a $\frac{1}{4}$, pero, vamos a ver. Bueno, yo estoy de acuerdo en esto porque aquí dividiste dos entre dos y te da uno, ocho entre dos y te da cuatro. Y aquí ¿qué dividiste, cuatro entre dos?, pero ¿a poco dividiste uno entre dos, no verdad? Entonces nos quedamos hasta aquí, bueno, ok.
		Microgénesis	
Proceso			

Gabriela

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común

Estrategias	Simplificación de fracciones		
Procedimientos		**Respuesta: 14/50.** Convierte la expresión decimal 0.28 en la fracción decimal 28/100, divide por mitad numerador y denominador y obtiene 14/50.	
Razonamientos	E. La siguiente pregunta dice. Escribe 0.28 como una fracción reducida, simplificada, y la hiciste estupendamente bien, ya nada más te pediría que terminaras de reducir eso un poquito más. La última reducción ¿cuál es? Ya fuiste de veintiocho centésimo a catorce cincuentavos y ahora… G. [escribe $\frac{7}{25}$]. E. Y ahí ya quedó bien. Ok. Y bueno, eso es todo lo que te quiero preguntar. G. ¿Pero, y entonces? E. Pero y entonces ¿qué? G. Lo que me preguntó ¿son las cosas que sabía más? E. Las cosas que no estaban bien terminadas. Por ejemplo aquí estaba bien pero no habías terminado ésta, la fracción reducida.	Se observa que Gabriela sigue el procedimiento adecuado tanto para convertir la expresión decimal a fracción decimal, como para simplificar la fracción.	
Microgénesis			
Proceso			

Gerardo

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias			Quitar y Sumar (seguir instrucciones)
Procedimientos		**Respuesta: 56.** Elimina el punto de la expresión decimal, luego suma dos veces el número entero que obtuvo de la primera acción.	
Razonamientos		Los significados que Gerardo atribuye a las palabras *reducida* y *simplificada*, que, para efecto del enunciado son sinónimos y aclaratorias, le llevan a quitar lo que considera innecesario, y luego, a operar con el dato que tiene. Respeta el orden de mención de los conceptos a los que les atribuye los significados quitar y sumar.	E. Bueno. Vamos a continuar. En la pregunta 9, dice. Escribe 0.28 como una fracción reducida (simplificada). Y tu respuesta es 56 ¿Cómo supiste eso? G. Pues, reducida significa como quitarle, y simplificada es sumarle. E. ¡Ah! ¿Y entonces qué hiciste para obtener 56? G. Sumé 28 dos veces. E. ¿Y con eso obtuviste 56? G. Sí.
Microgénesis			

Proceso			

Héctor

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias	Reducción de fracciones		
Procedimientos		**Respuesta: 14/15.** Convierte la expresión decimal en fracción decimal, reduce la fracción dividiendo iteradamente por dos.	
Razonamientos	Escribe 0.28 como una fracción reducida o simplificada y tu respuesta ha sido $\frac{7}{15}$, tu representación de los 28 centésimos en fracción decimal esta perfecta $\frac{28}{100}$ tu primer simplificación 14/50 está excelente y luego ¿qué pasó? H: Era 2 E: ¿Qué era? H: Era 2 en lugar de uno [en el denominador 15]. E: Ajá. Entonces la fracción correcta ¿era…? H: $\frac{7}{25}$. E: Y bueno pues entonces, ya terminamos, muchas gracias.	El procedimiento empleado por Héctor es adecuado. Mientras la investigadora inquiere por el denominador de la segunda simplificación él nota una equivocación en la anotación, misma que corrige de inmediato. Se puede suponer falta de atención.	
	Microgénesis		
Proceso			

Miguel Ángel

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias			División
Procedimientos		**Respuesta: 1/7.** Quita el punto a la expresión decimal, divide el número 28 resultante entre 4 y obtiene siete. Considera que el siete indica que la fracción reducida, equivalente a la expresión 0.28, es 1/7. Convierte a números enteros eliminando el punto decimal sin ningún procedimiento.	E. ¿Cómo supiste que éso es un séptimo? M. ¿Está bien o está mal? Está mal, ¿verdad?
Razonamientos		Parece entender que para reducir una fracción es necesario dividirla. Evoca el procedimiento para convertir una fracción en expresión decimal sin recordarlo detalladamente, por lo que divide 28 entre 4. La asociación del cociente con el denominador de la fracción le lleva a decidir por	E. No sé. Explícame y luego ya vemos, vamos a llegar juntos a la conclusión. M. Bueno es que hace poco hice eso de pasar de fracción a decimal. Tenías que dividir, lo que salía arriba iba como un número entero adentro, y el de abajo iba en la parte de arriba y el

		1/7, aunque su razonamiento le llevaría a la fracción 0/7.	denominador era el de afuera. Pero ya no me acordé como iba.
		Microgénesis	
Proceso		La investigadora parte de los conocimientos que Miguel A. expresa para ayudarle a convertir la expresión decimal en una fracción decimal. Logrado ese paso, Miguel A. simplifica fácilmente la fracción y obtiene la respuesta correcta.	E. Entonces sabes la ida pero no sabes el regreso. Bueno, mira, como los decimales son equivalentes a las fracciones decimales. Las fracciones ya sabes que tienen de característico la rayita de quebrados dicen algunos, ¿sí? Lo que podemos hacer es convertirla precisamente en eso, en una fracción decimal que está expresada con un denominador con base diez. Entonces aquí tenemos décimos, hasta aquí van los décimos. Cuando son décimos significa que está dividido entre diez, pero como aquí tenemos otro número son centésimos, y entonces el denominador aquí sería cien. ¿Esa fracción ya la podrías manejar mejor? M. Sí, ya, la simplifico. E. La simplificas, claro. A ver simplifica. M. Abajo 50 y arriba son 14. E. Catorce, ¡muy bien! Lo que hacemos arriba lo tenemos que hacer abajo ¿Podemos simplificar más? M. Cincuenta a veinticinco y catorce a seis, no, no es cierto, es siete. E. Siete. ¡Y ya! Hasta ahí nos quedamos porque ya no se puede reducir más. Entonces nuestra respuesta correcta habría sido ésa, siete veincicincoavos, ok.

Ricardo

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias			Cambiar punto decimal por línea de quebrado
Procedimientos		**Respuesta: 0/28.** Cambia el punto decimal por la línea de quebrado. Coloca el cero en la posición del numerador y el 28 en la de denominador.	
Razonamientos		Al no tener una idea clara de cómo operar emplea las cifras del número para convertirlo en fracción. La distribución de los números parece estar indicada por la presencia del punto decimal.	E. Tu respuesta fue $\frac{0}{28}$ ¿Cómo supiste eso? R. Bueno, es que esa sí no sabía ni qué poner.
		Microgénesis	

Proceso		La investigadora intenta localizar un punto de partida para ayudar a Ricardo a encontrar la respuesta correcta. Ricardo reconoce las fracciones decimales y recuerda la forma para reducir, aunque no parece muy seguro de cómo hacerlo en este caso. La investigadora sugiere dividir por cifras más pequeñas. Ricardo continúa manifestando dificultades para ejecutar el proceso de dividir la fracción. La investigadora intenta avanzar empleando	E. Bueno ahí cumples el requisito porque lo pusiste como fracción ¿no? Pero allá por la primaria, cuando ibas por cuarto o quinto año, les dijeron que había unas fracciones que se llaman decimales, que son las que están escritas sobre los denominadores múltiplos de diez: 10, 100, 1000. ¿Te acuerdas? Por ejemplo decían $\frac{1}{10}$ es una fracción decimal o $\frac{2}{10}$ o $\frac{9}{10}$. Por otro lado, cuando trabajamos con números decimales estamos haciendo lo mismo que si estuviéramos trabajando con esto [Se refiere a la expansión decimal] pero le quitamos la parte de abajo y lo mostramos poniendo lugares después del punto. Si hacemos caso de eso, cada lugar tiene que ver con un múltiplo de diez y esta fracción podría haber quedado como $\frac{28}{100}$. Ahí ya cumplimos con el requisito de una fracción que es la primera parte de la pregunta. La segunda parte de la pregunta es reducirla, hacerla más chiquita, ahí podríamos hacer algo ¿Qué podríamos hacer? R. Dividir. E. ¿En cuánto? R. Entre 100. E. Por ejemplo $\frac{28}{100} \div 100$, no nos alcanza aquí [señala el numerador. Podemos dividir cien entre cien y nos va a dar uno; pero veintiocho entre cien nos va a dar otro decimal. Digamos, sí lo podemos dividir pero conviene que sea por un número más pequeño, podríamos por ejemplo entre 2. R. Sí. E. ¿Cuánto sería? R. Dos entre cien. E. A ver, ¿veintiocho entre dos? R. 14. E. 14, muy bien y ¿cien entre dos? R. 20 ¿No? E. ¿Cien entre dos? R. ¿Me puede repetir? E. A ver, cuando tienes 100 pesos y te dicen dame la mitad cuánto le vas a dar.

		referentes más familiares a Ricardo, menciona el dinero. En ese punto Ricardo parece entender fácilmente la idea. Con la analogía del dinero Ricardo llega a la respuesta correcta.	R. ¡Ah!, cincuenta. E. Cincuenta. ¿Se te hace más fácil si te hablo de pesos, por ejemplo? R. Si más o menos. E. ¿Pagas tú con dinero? Quiero decir ¿vas a comprar cosas? R. Sí. E. Por cierto ¿Te mandan a hacer mandados? Eso de que, oye ve por las tortillas, el pan, ve a la tienda, ¿o no sé qué? R. Sí. E. Y aparte ¿tú tienes tu dinero y compras tus cosas? R. Sí. E. ¡Ah mira! eso es interesante, acercarse más a esas cosas. Por último, podríamos volver a dividir esto, si los dividimos entre dos nos toca a 7, cincuenta entre dos. R. A veinticinco. E. Exacto, esa sería nuestra respuesta correcta, $\frac{7}{25}$.

Pregunta 10. Sombrea 5 octavos… Contenido Fracciones en contexto gráfico.

Atilio

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias			Re-particionar
Procedimientos		**Respuesta: Sombrea 12 cuadritos.** Marca cuatro líneas verticales sobre la cuadrícula, sombrea 12 cuadritos, remarca el contorno de 8 cuadritos.	
Razonamientos		Atilio reconoce que la cuadrícula está relacionada con el denominador de la fracción del enunciado e intenta partirla en octavos. Las líneas verticales marcadas, dividen dos columnas de cuadritos a la mitad, lo que le lleva a decidir cambiar la forma de partición y separar ocho cuadritos de la cuadrícula marcando su contorno, que según su marca anterior corresponde a la mitad de la cuadrícula. Sombrea los 12 cuadritos que según él corresponden a 5.	E. La siguiente pregunta dice sombrea 5/8 del total de la siguiente cuadrícula, y tú sombreaste 8, 9, 10, 11,12 ¿cómo supiste que eran 12? A. Pues primero traté de dividir todo el rectángulo en ocho partes. E. Sí. A. Pero como no, vi, vi que no era posible, no pues, pues entonces seleccioné esta parte de ésta, así pues fue con que remarqué y luego de esos ocho seleccioné los cinco que están partidos en dos: 1, 2, 3, 4, 5.
Microgénesis			
Proceso		La investigadora explora por los conocimientos que Atilio tiene acerca de fracciones, buscando un punto de partida para explicar la equivalencia. Atilio entiende el significado de los conceptos numerador y denominador. La investigadora intenta mostrarle cómo obtener una fracción equivalente, multiplicando numerador y denominador por el mismo número.	E. Mm, Hasta ahora hemos dividido nuestra fracción para tener fracciones equivalentes, pero también podemos multiplicar para tener fracciones equivalentes. ¿Sí? A. Sí. E. Aquí, ¿qué significa esto? [Señala el denominador]. A. El número de, el número total de todo lo que se tiene. E. Ajá. El número de partes en que partimos nuestro entero, ¿sí? Nada más que éste es ocho [señala el denominador] y éste [señala la cuadrícula] ¡Está partido en un montón! en 1, 2, 3, 4, por 1, 2, 3, 4, 5, 6, en 24 ¿No? Como que el 24 no se parece mucho al ocho, a menos que hallemos un número que pueda ser equivalente, ¿por qué número tendríamos que multiplicar eso para que sea equivalente? ¿Qué número multiplicado…? A. Por dos, dieciséis. E. ¿Dieciséis es veinticuatro? A. Ocho por dos y es dieciséis. E. Pero aquí tenemos veinticuatro [señala la

		Atilio obtiene el denominador equivalente. Atilio deduce que es necesario multiplicar por el mismo número al numerador para tener la fracción equivalente completa. Lograda la expresión fraccionaria, Atilio trata de visualizarla mentalmente con apoyo de la cuadrícula. Tal vez tantas marcas en la cuadrícula se lo impiden, por lo que la investigadora lo anima a marcar nuevas separaciones enfatizando que el multiplicador para lograr la equivalencia fue tres. Logran sombrear la cantidad correcta.	cuadrícula]. E. Veamos, ¿ocho por uno? A. ¡Ay! soy malo. E. No, yo te puse nervioso. Yo creo. ¿Ocho por uno igual a? A. Ocho. E. ¿Ocho por dos? A. Dieciséis. E. Ocho por tres. A. Veinticuatro. E. Veinticuatro. Y entonces, si multiplicamos 8 x 3, ¿qué vamos a obtener? A. 24. E. Y ya tenemos la equivalencia. A. Total. E. De acá, pero ahora nos falta algo arriba, saber cuántas piezas deberíamos de tomar, ¿qué tendríamos que hacer? A. ¡Ay ya vi! E. ¿Qué? A. Es, son como por tres. E. Sí. A. Y entonces de ésos son… ya ponemos los ocho en las 3 de las dos columnas, y si seleccionamos esos dos 5… E. O sea que sería una fracción equivalente a ésta, de los 5/8 sería 15; y entonces tendríamos que haber rayado… ¿cuántos? A. Mmh, este… a 15. E. ¿Entendiste por qué? A. Sí, ¿no? Por el número de… E. Bueno, vamos a dividirla en ocho partes iguales A. Sí, sí. E. Entonces una, ésta es otra [va marcando en grupitos de tres cuadros toda la cuadrícula] ¿Has jugado Tetris? A. Es de la prehistoria ¿No?

Cuautli

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias			Delimitar en la cuadrícula
Procedimientos		**Respuesta: Sombrea 11 cuadritos.** En la cuadrícula marca 8 cuadritos y dentro de	

		ellos sombrea 5.	
Razonamientos		Reconoce que la cuadrícula no está partida en octavos y que sombrear 5 cuadritos no sería la respuesta correcta, por lo que decide delimitar una cuadrícula dividida en octavos dentro de la que ofrece el ítem.	E. Y la última. La última que te voy hacer: Sombrea cinco octavos del total de la siguiente cuadrícula ¿Cómo supiste que eso es cinco octavos? C. ¡Ah! Es que no estaba seguro, por eso no pensaba hacer nada, porque no son cinco octavos, tiene más de ocho.
Microgénesis			
Proceso		La investigadora apoya a Cuautli para que identifique la equivalencia entre la fracción y la cuadrícula. Ella explora por los significados que Cuautli atribuye a los conceptos numerador y denominador. Se notan algunas dificultades con el significado de los conceptos, pero parece entender la idea. La investigadora indaga qué sabe Cuautli de la equivalencia de fracciones. Él menciona una regla para obtener equivalencia entre fracciones.	E. ¿Cuántos tiene? C. Uno, dos, tres, cuatro, cinco…, veinticuatro. E. Veinticuatro. ¿Has oído hablar de las fracciones equivalentes? C. Creo que sí, tal vez. E. Si has oído hablar de ellas, probablemente has oído que una fracción equivalente se ve diferente, pero vale lo mismo. C. Mmh. E. Algo así, ¿no? ¿Qué indica este número de aquí abajo [señala el denominador de la fracción $\frac{5}{8}$]? No en particular este ocho, sino el número que se coloca debajo. C. ¿El número que se coloca abajo? E. ¿Qué significa el número que tienen aquí abajo [las fracciones]? C. La cantidad que hay en piezas, algo así. E. La cantidad en partes en que se divide la figura. C. Mmh. E. ¿Y el número de arriba? C. La cantidad que ocupa. E. Sí, muy bien. Entonces aquí nos están hablando de una unidad que está dividida en ocho, pero aquí esta unidad está dividida en… [se refiere a la cuadrícula] ¿Cuántos dijiste? C. En 24. E. En 24. Entonces tenemos que buscar un equivalente entre estos números, y para eso, una forma de encontrar una equivalencia es… C. Multiplicando por el mismo número. E. Ándele. O sea que sí sabes todo eso. C. Sí. E. Y entonces ¿cuál sería? ¿Qué nos falta aquí?, Éste lo multiplicamos por tres y ¿cuál es la parte

		Cuautli llega a la respuesta correcta fácilmente.	de arriba? C. Se multiplica también por tres y entonces serían 15. E. Quince. Y ya tenemos quince veinticuatroavos, que es una fracción equivalente a cinco octavos. Entonces, ¿cuántos cuadritos tenías que sombrear? C. Quince. E. Quince. ¿Qué, estaba muy difícil? C. Pues no. E. No, en realidad no. Me parece que se te hizo muy fácil cuando pensamos en las fracciones equivalentes. Bueno Cuautli, es todo lo que quería saber, muchas gracias.

Eduardo

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias			Usar numerador conocido
Procedimientos		**Respuesta: Sombrea 5 cuadritos.** Sombrea 5 cuadritos.	
Razonamientos		Eduardo parece reconocer que debe operar con algo para responder adecuadamente, pero no logra identificar que requiere de una fracción equivalente. Establece una relación entre "sombrea" y numerador, lo que indica que entiende el significado del concepto. Otro aspecto que puede notarse es la ansiedad por responder algo aunque no se tenga seguridad sobre cómo debe hacerse.	E. Sombreaste cinco cuadritos ¿Cómo supiste que lo que tenías que hacer era sombrear 5 cuadritos? L. Nada más porque pensé que así era. E. Pero, ¿qué te hizo pensar que 5? L. […] E. ¿Nada que ver con el 5 de la fracción? L. Bueno sí, pensé que eran 5 pero no sabía cómo hacerle. E. Aja, y bueno, hay que responder algo ¿verdad? L. Sí. E. Eso es todo, Lalo. Muchas gracias por tu ayuda.
Microgénesis			
Proceso			

Fernanda

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias			Convertir a decimales
Procedimientos		**Respuesta: Sombrea 6 cuadritos.** Divide 5 entre 8, obtiene 0.6, sombrea 6 cuadritos.	
Razonamientos		Para saber el número de partes por sombrear	F. Ah bueno, es que yo pasé esto a decimales. E. ¿Sí? ¿Cómo?

		[número entero] convierte la fracción a expresión decimal. Luego de obtener la cifra borra la operación. En su explicación se nota inseguridad por haber seguido ese procedimiento y duda en la justificación de los resultados obtenidos.	F. Y pues así, lo que me salió lo dividí entre 2 y entonces me salió 6. E. ¡Ah! F. Y pues ahí así, lo que me salió lo dividí entre dos y entonces me salió, creo que 12 y entonces, por eso.
Microgénesis			
Proceso		En su razonamiento se nota que Fernanda reconoce que se requiere una operación con la fracción para responder adecuadamente, pero elige equivocadamente. La investigadora acompaña a Fernanda en la multiplicación de la fracción para obtener la fracción equivalente. Fernanda obtiene el numerador equivalente y encuentra la respuesta correcta.	E. Fíjate esto que hiciste aquí. Fue dividir ¿no? F. Ajá. E. Ahora lo que tendríamos que hacer aquí es multiplicar en vez de dividir ¿sabes lo que son operaciones inversas? [Fernanda asiente], muy bien, aquí tenemos 1, 2, 3, 4, ,5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23 y 24 cuadritos de la cuadrícula, eso quiere decir que nuestro entero está dividido entre 24 y el denominador nos indica también en cuántas partes está dividido el entero ¿verdad?. Nada más que éste es uno que no se parece a éste [señala el denominador de la fracción cinco octavos]; lo que tenemos que hacer es hacerlos equivalentes y esto lo podemos hacer multiplicando, a mí se me ocurre que por 3. F. 8 x 3= 24 E. Podría darme ¿verdad?, 8 x 3 =24. Pero como la regla es que multiplico los dos, tanto numerador como denominador, o dividido los dos, tanto numerador como denominador ¿qué tengo que hacer ahora? F. Lo mismo, multiplicar éstas [señala el numerador] las de arriba. E. Multiplico, ¿por qué? F. Por 3. E. Y, ¿cuánto me da? F. 15. E. 15, y esto ya es una fracción equivalente, 5/8 es equivalente a 15/24 y entonces ¿cuántos cuadritos tendrías que haber sombreado? F. 15. E. Muy bien, bueno, Muchas gracias, Fernanda.

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias	Sombrear numerador		
Procedimientos		**Respuesta: Sombrea 5 cuadritos.** Sombrea cinco cuadritos de la cuadrícula.	
Razonamientos	E. Tú sombreaste cinco cuadritos de la cuadrícula. Esa es tu respuesta correcta. ¿Cómo supiste que había que sombrear esos 5? G. Porque éste me indica [señala el 5 de la fracción] que debo sombrear y éste [señala el 8 de la fracción] me indica de cuantos cuadros es el dibujo.	El numerador indica el número de partes que se deben sombrear, entonces sombrea 5 partes de la cuadrícula. Gerardo omite observar la partición de la cuadrícula y su correspondencia con el denominador de la fracción.	
	Microgénesis		
Proceso	E. Muy bien. Y ¿en cuántos cuadros se dividió este entero? G. [Cuenta los cuadritos de la cuadrícula] En 24. E. En 24, y ¿cuántos dice aquí [señala el 8 en la fracción]? G. 8. E. ¡Ah! Entonces, ¿qué querrá decir eso? G. Este… que nada más… [silencio]. E. Fíjate. Es cierto, cómo tú dices, que había que tomar 5. Si esta cuadrícula hubiera estado de éste tamaño [enmarca 8 cuadritos para delimitar una unidad fraccionada en 8 partes]. Son dos, cuatro, seis, ocho; eso estaría muy bien. Pero resulta que la cuadrícula está más grande ¿verdad? En vez de estar partida en 8 está partida ¿en cuántos dijiste? G. En 24. E. En 24. ¿Qué número multiplicado por 8 podría darnos 24? G. [Silencio]. E. Veamos, ¿8 x 1? G. 8. E. ¿8x2? G. 16. E. ¿8x? G. [silencio]. E. ¿Qué sigue? G. 24. E. Si. ¿Por qué número? ¿Por qué número	La investigadora enfatiza la diferencia entre el numerador y la partición de la cuadrícula para hacer notar a Gerardo que omitió buscar la equivalencia de la fracción.	

	multiplicamos el 8 para obtener 24? G. Por 3. E. ¡Por 3! Eso es igual a 24 [al lado del 8 de la fracción coloca un signo de multiplicación seguido de un tres y bajo una nueva línea anota 24]. Entonces para que esta nueva fracción sea equivalente, aquí tendríamos [señala el espacio vacío sobre la línea] que poner también el número que se obtenga de multiplicar éste [señala el 5 de la fracción inicial] por un número igual a éste [señala el 3 que multiplica al 8]. Es más, tendríamos que multiplicar toda nuestra fracción por este mismo número para que la fracción que nos dé aquí [indicando la fracción que tiene 24 en el denominador y a la que no se le ha colocado el numerador] sea equivalente, y entonces puedas saber cuántos cuadritos tienes que sombrear. Ya me dijiste que 8 por 3 es 24, entonces ¿qué nos falta multiplicar? G. 5. E. 5 ¿Por cuánto? G. Por 3. E. ¿Cuánto nos da? G 15. E. 15. Y entonces, ¿cuántos cuadritos tendríamos que haber sombreado? G. 15. E. Aquí nos faltaron 10. G. Sí. E. ¿Ya entendiste por qué? G. Sí.	Localizados los denominadores equivalentes la investigadora lleva a Gerardo a localizar el multiplicador que necesita para hallar la cifra equivalente del numerador. Con el procedimiento empleado por la investigadora Gerardo logra formar la fracción equivalente y sombrear la cantidad correcta de cuadritos.	

Miguel Ángel

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias			Copiar
Procedimientos		**Respuesta: Sombrea 8 cuadritos.** Sombrea 8 cuadritos.	Preguntar a los compañeros.
Razonamientos		En cuanto reconoce no saber qué hacer, solicita ayuda de los compañeros. Supone que la información es correcta.	E. ¡Ésto te causó lío! Vamos a ver: sombrea 5/8 del total de la siguiente cuadrícula. ¿Cuántos sombreaste? M. Ocho. E. ¿Por qué? M. No sé, eso me dijeron que hiciera.

			E. ¡Ajá! ¡Ya salieron las copias! Por cierto, no van a saber cuánto sacaron ni nada. No es para calificar ni nada. M. Ah bueno. Es que, como eso ya no me lo sabía pues les pregunté. ¿Cuántos son los que hay que sombrear? Son ocho me dijeron, y bueno…
Microgénesis			
Proceso		La investigadora parte de los conocimientos de Miguel Ángel explorados en otras preguntas. Le recuerda la simplificación de fracciones y cómo el proceso inverso lo puede llevar a la equivalencia requerida. Miguel Ángel recuerda el significado del denominador, lo que la investigadora aprovecha para relacionarlo con la partición de la cuadrícula.	E. ¿Quieres saber?, pues ya qué ¿no? Ya estamos en esto. ¿Qué has hecho para simplificar? ¿Has ido dividiendo, no? M. Sí. E. Y lo que vas obteniendo de tu simplificación son fracciones equivalentes, más pequeñitas pero es lo mismo… ahora necesitamos ir para el otro lado ¿Cuál es la operación inversa a la división? M. La multiplicación. E. ¡Mira! Si sabes muchas cosas. Entonces aquí tenemos… ¿Qué quiere decir esto, qué significa este número de abajo, no por ser ocho sino por estar en el lugar de abajo? M. Ah, el denominador. E. ¿Qué significa denominador?, no cómo se llama, ¿qué significa llamarse denominador? M. El número de… E. De partes… M. Que tiene la figura. E. ¡Excelente. El número en el que dividimos nuestra figura, nuestro entero. Y aquí tenemos una figura [señala la cuadrícula] y estos mal intencionados del examen la partieron en muchas partes, por qué no la partieron en… M. En ocho. E. Entonces la partieron en [hace conteo de los cuadros a los lados de la cuadrícula] una, dos, tres, cuatro. Por uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis. M. Cuatro por seis veinticuatro. E. Veinticuatro. Entonces fíjate. Tenemos una fracción inicial 5/8 que la queremos convertir en una fracción equivalente ¿de acuerdo? No sabemos todavía cómo, ni cuál nos va a quedar; pero un buen punto de partida es ver en cuánto partieron esto. Ya contamos, ya nos dieron la primera parte, ahora necesitamos saber por qué número multiplicaron esto o por qué número

			tenemos que multiplicar para llegar a la fracción equivalente. Porque ¿no tenemos que sombrear cinco? ¿O sí? M. Mm. E. Tenemos que sombrear algo que sea equivalente a cinco y ¿cómo demonios vamos a saber eso? A ver ¿qué número será conveniente, por qué número será conveniente multiplicar al 8 para llegar al 24? M. ¿Cómo [se distrajo]?
		La investigadora centra la explicación en los denominadores para encontrar el multiplicador adecuado.	E. ¿Por qué número tenemos que multiplicar al ocho para llegar al veinticuatro? M. Ah, por el 8 por… E. ¿Uno? M. No. E. ¿Por dos? M. Tampoco. E. ¿Por tres?
		Para hallar el multiplicador repasa con Miguel A. la tabla del 8 pero él se distrae.	M. Tampoco. E. A ver, dímelos. Ocho por uno… M. Ocho por uno ocho, ocho por dos dieciséis. E. Ocho por tres cincuenta y siete. Ocho por cuatro ¿no, verdad? ¿Ocho por tres? M. Veinticuatro. E. ¿Con eso alcanza? M. Sí.
		Usando un resultado absurdo, la investigadora recupera la atención del chico.	E. Ya. Bueno, ¡qué complicado! Por tres. ¿Por cuál vas a multiplicar al cinco? M. Para que dé… cuatro. E. No. Fíjate, queremos hacer una fracción equivalente. M. Por tres. E. Porque lo que le hacemos al de arriba le hacemos al de abajo, ¿no? Entonces, ¿cuántos cuadritos teníamos que haber pintado?
		Finalmente logran obtener la fracción equivalente y reconocer el número de cuadritos que se tendrían que sombrear.	M. Quince. E. Quince, tan, tan. Ya terminamos. M. ¿O sea que teníamos que buscar un número equivalente? Bueno teníamos que sacar una fracción equivalente.
		El último comentario de Miguel A. denota falta de comprensión en el enunciado del problema, pues al parecer sabía cómo obtener equivalencias.	E. Tenías que sacar una fracción equivalente, y ya. Eso es todo Miguel Ángel, pues te agradezco.

Ricardo

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias			Sombrear el denominador
Procedimientos		**Respuesta: Sombrea 8 cuadritos.** Separa 8 cuadritos delimitándolos con una marca en la cuadrícula y los sombrea.	
Razonamientos		Parece relacionar de alguna manera el denominador con la partición de la cuadrícula. Omite cualquier otro dato y decide sombrear las partes indicadas en el numerador.	E. Luego tenemos aquí la pregunta 10 que dice: “sombrea $\frac{5}{8}$ del total de la siguiente cuadrícula” y sombreaste 8 [cuadritos], ¿cómo supiste que eran 8 los que había que sombrear? R. Hice lo mismo que acá, hizo usted y suprimí todo y sombreé los 8. E. Ok. Sombreaste los 8 bueno, mmh bueno.
Microgénesis			
Proceso			

Pregunta 11. Teresa quiere graba … Contenido: Aritmética del Reloj

Ricardo

	Argumentación matemática	Análisis	Sentido común
Estrategias	Suma		
Procedimientos	E. Tu respuesta fue de 57 minutos con 85 segundos. ¿Cómo supiste la respuesta? R. Primero los sumé. E. ¿Todos los segundos? R. Sí, minutos y segundos. E. Minutos y segundos. Ok. R. Luego los multipliqué por el número de canciones: 5. E. Ah, muy bien. Aquí tienes 11.57 min, bueno ok. Pues Ricardo, eso es todo, te agradezco mucho.	**Respuesta: 57 minutos 85segundos.** Ricardo suma sobre la tabla del ítem, dado que en el registro las cifras no están ordenadas por su magnitud, él organiza mentalmente los números mezclando minutos y segundos de donde obtiene 11.57 minutos (con esa estructura debió obtener 11.37). Multiplica el resultado por 5. Comete dos errores en la suma.	
Razonamientos		Ricardo considera necesario tener un dato para operar, considera que tal dato es producto de la suma de todos los periodos de duración registrados en la tabla. Al parecer ese resultado le sugiere ser un promedio de duración por canción, por lo que considera necesario multiplicarlo por las cinco canciones que se grabarán.	
Microgénesis			
Proceso			