UNIVERSIDAD
PEDAGÓGICA
NACIONAL

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

SECRETARÍA ACADÉMICA
COORDINACIÓN DE POSGRADO
DOCTORADO EN EDUCACIÓN

“ Modelo de enseñanza del concepto función bajo la luz de los Modelos Teóricos Locales y la Educación Matemática Realista en la Educación Superior Intercultural ”

TESIS

Que para obtener el Grado de:
DOCTORA EN EDUCACIÓN

Presenta:
Hermelinda Servín Campuzano

Nombre de la Tutora:
Dra. Mariana Luisa Sáiz Roldán

México, D.F. Noviembre de 2017.

AGRADECIMIENTOS

A MI FAMILIA

A mis hijos Cecilia y Mauricio, por su apoyo y comprensión. Y sobre todo quiero agradecerle a mi esposo porque que estuvo ahí siempre que necesité, de un consejo, de una palmada, de un apapacho y porque me dio ánimo cuando todo parecía que se desboronaba.

Muchas gracias de corazón

A MI PROFESORA

Quiero expresar mi agradecimiento a mi asesora la Dra. Mariana Saíz Roldán, por haber aceptado dirigir este trabajo, por su dedicación y sobre todo por su paciencia para conmigo durante estos años en que estuvimos trabajando juntas.

Gracias

RESUMEN

La presente tesis reporta la propuesta del diseño de un modelo de enseñanza para el concepto matemático de función y los resultados obtenidos de las intervenciones didácticas usando el modelo, durante tres años, en la Universidad Intercultural Indígena de Michoacán.

La propuesta del modelo se sustenta en la teoría de los Modelos Teóricos Locales que propone la elaboración de un modelo teórico local para la observación en el aula a través del desarrollo de cuatro componentes: formal, enseñanza, actuación y comunicación. El componente de comunicación se desarrolló mediante secuencias didácticas basadas en los principios de la Educación Matemática Realista.

En este trabajo se comparte la idea de Freudenthal sobre elegir la formación de objetos mentales relacionados con los conceptos matemáticos en lugar de pretender enseñar los conceptos mismos. El objeto de estudio es el concepto de función, pero el objetivo de la tesis es diseñar y probar un modelo de enseñanza que permita la formación de objetos mentales ricos y variados.

El monitoreo y evaluación de las tres intervenciones del modelo se apoya en un análisis cualitativo previo, con un instrumento de análisis dirigido al concepto de función, las intervenciones del modelo se monitorean con video grabaciones para observar las actitudes y respuestas hacia el modelo.

Este documento se compone de siete apartados y la estructura del trabajo se compone de cuatro partes con once capítulos:

- **Resumen**
- **Parte I**
- **Parte II**
- **Parte III**

- **Parte IV**
- **Bibliografía**
- **Anexos**

A continuación se expone brevemente el contenido de los apartados.

I. El planteamiento del problema y los referentes teóricos (capítulos 1 y 2). El primer capítulo presenta, de forma introductoria, la problemática y la forma de afrontarla, por medio de los objetivos planteados. El capítulo número dos expone el marco de referencia, especialmente los fundamentos de la teoría de los modelos teóricos locales y los principios de la educación matemática realista.

II. El desarrollo del modelo de enseñanza, propuesto bajo la metodología de Eugenio Filloy, en esta parte se exponen los cuatro componentes del Modelo Teórico Local sobre la función (Capítulos 3, 4, 5 y 6). En el capítulo número tres, comienza el desarrollo de la propuesta con el componente formal mediante una síntesis del desarrollo histórico del concepto de función. En los capítulos número cuatro y cinco, se exponen los componentes de enseñanza y comunicación que integran al modelo teórico local propuesto, aterrizados en el análisis de los libros de texto y revisión de las dificultades de aprendizaje respectivamente . En el capítulo número seis se desarrolla el componente de comunicación a través de secuencias didácticas elaboradas en base a la teoría de la Educación Matemática Realista esta teoría contempla seis principios.

III. La intervención del modelo y se presentan los materiales obtenidos después de las intervenciones del modelo, se reportan semi-cuantitativamente debido a que una parte de la investigación es de corte exploratorio y se apoya en el análisis de actitudes observadas, las respuestas de adopción a los procesos. La otra parte reporta de forma cuantitativa la evolución del modelo a través de la evaluación. Se presenta el material didáctico que se elaboró y utilizó para la intervención del modelo, también se presenta un análisis narrativo de las actividades en la clase durante una de las últimas intervenciones para validar de la implementación real del modelo, posteriormente se presenta un informe con los resultados cuantitativos de las evaluaciones de cada una de las intervenciones.

IV. Finalmente se presentan las conclusiones.

CONTENIDO

PARTE I: ESTRUCTURA CONCEPTUAL

PARTE II: MODELO TEÓRICO LOCAL REFERIDO A LA FUNCIÓN

PARTE III: INTERVENCIÓN SEGÚN EL MODELO TEÓRICO LOCAL

PARTE I: ESTRUCTURA CONCEPTUAL

CAPÍTULO 1: PANORAMA GENERAL

Los problemas de la educación matemática se ven reflejados en todos los niveles de educación, desde los niveles básicos hasta universitarios. La Universidad Intercultural Indígena de Michoacán, donde se desarrolló el trabajo que aquí se presenta, no es la excepción; en la actualidad, no se trata sólo de un problema regional ni tampoco nacional, sino que es un problema a nivel internacional.

Las preguntas que muchos docentes nos hacemos ante dicha problemática son: ¿cuáles son las dificultades a que se enfrentan los alumnos en la educación de las matemáticas? ¿Existe un modelo para la enseñanza de conceptos matemáticos? ¿De qué manera puede contribuir un modelo de enseñanza conseguir espacios de aprendizaje que ayuden a solucionar obstáculos de aprendizaje? El modelo de enseñanza se entiende como un constructo, justificado bajo una teoría, que puede planear y diseñar estructuradamente materiales de enseñanza orientados a la enseñanza en el aula (Joyce y Weil, 1985)

En esta tesis se presenta el desarrollo, y las intervenciones, de un modelo propuesto para la enseñanza del concepto función, en un contexto universitario intercultural, bajo la luz del marco teórico metodológico de los Modelos Teóricos Locales (MTL) y la Educación Matemática Realista (EMR). La pretensión de este modelo, y la forma de intervención, es que pueda ser utilizado como guía para otras situaciones similares, es decir, misma metodología diferente concepto matemático.

La teoría propuesta por Filloy para los Modelos Teóricos Locales (Filloy y Rubio, 1992) es descrita como:

> “un marco teórico metodológico para la observación experimental en matemática educativa” (Filloy y Sutherland, 1997, p. 1).

En esta teoría los componentes del modelo son vistos como modelos.

> “el objeto de estudio se enfoca a través de cuatro componentes relacionados: (1) modelos de enseñanza, (2) modelos de los procesos

> cognitivos, (3) modelos de competencia formal y (4) modelos de comunicación” (Sáiz, 2002, p. 4).

El concepto de función se tomó como objeto de estudio debido a que es un concepto matemático muy importante en los programas curriculares de la licenciatura de Desarrollo Sustentable con terminal de Tecnologías Alternativas en la Universidad Intercultural Indígena de Michoacán, y se encuentra en la asignatura de Matemáticas Aplicadas a las Tecnologías Alternativas en el tercer semestre. Los programas curriculares incluyen algunos libros de texto en la bibliografía recomendada, pero no una metodología propia para abordar los temas matemáticos.

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El interés de desarrollar un modelo de enseñanza para conceptos matemáticos, y dar cuenta de él, surge al no contar con un modelo propio en la práctica docente cotidiana que ofrezca una educación de calidad desde la interculturalidad, además de algunas otras actividades académicas, por ejemplo analizar los planes de estudio con el objetivo de modificar o cambiar programas, planear contenidos curriculares o estrategias de aprendizaje para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Pero la motivación principal fue poder identificar, en la práctica docente cotidiana algunas de las dificultades que acarrea el aprendizaje de las matemáticas, particularmente el concepto función, y ofrecer un modelo pertinente al respecto.

La propuesta incluye al concepto de función como objeto de estudio porque constituye uno de los temas fundamentales en las materias del área de matemáticas, ya que éstas se convierten en las herramientas básicas para la aplicación del conocimiento matemático a muchos de los problemas prácticos que surgen de manera transversal en el campo de desarrollo de la licenciatura en Desarrollo Sustentable y terminal en Tecnologías Alternativas. Además de los supuestos teóricos, de la experiencia educativa del profesorado de esta universidad y las investigaciones documentadas al respecto, se sabe que los alumnos que llegan a esta universidad se enfrentan con dificultades cuando estudian el objeto de estudio en cuestión.

1.2 OBJETIVO GENERAL

Formular y sustentar un modelo de enseñanza pertinente para alumnos de la Universidad Intercultural Indígena de Michoacán, tomando como objeto de estudio al concepto de función.

1.2.1 Objetivos particulares:

- Posicionar la investigación en un marco teórico y metodológico.
- Indagar sobre los conocimientos matemáticos relacionados con la función que los alumnos poseen antes de la intervención del modelo.
- Construir los componentes del Modelo Teórico Local para la enseñanza del concepto de función, tomando en cuenta las características propias de los alumnos.
- Diseñar el componente del modelo que incluye la intervención en el aula.

1.2.2 Objetivos específicos:

- Analizar la pertinencia del modelo de acuerdo a la literatura relacionada con los Modelos Teóricos Locales y la Educación Matemática Realista.
- Revisar resultados de investigaciones relacionadas con el concepto de función y su enseñanza en cualquier nivel educativo, subrayando lo que sucede con alumnos universitarios.
- Diseñar secuencias didácticas a partir de los principios de la Educación Matemática Realista para construir el componente de comunicación.
- Aplicar las secuencias didácticas de acuerdo con la Educación Matemática Realista.

- Analizar cada una de las intervenciones, así como los instrumentos implementados.

1.3 JUSTIFICACIÓN

En los planes de estudio de matemáticas a nivel mundial se incluye el estudio del concepto función. Algunas organizaciones internacionales como el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), de los Estados Unidos de Norteamérica, plantean que uno de los temas centrales en matemáticas es el estudio de patrones y funciones (NCTM, 1989) y su desarrollo y estudio han sido una parte muy importante para la consolidación de toda la matemática moderna.

En ámbitos académicos, entre matemáticos y profesores de matemáticas se reconoce que uno de los objetos matemáticos abstractos más importantes de cualquier nivel educativo es el concepto de función (Guershon y Dubinsky y, 1992; Da Ponte, 1992; Farfán y García, 2005; Del Castillo y Montiel, 2007). Además, la sociedad tecnológica demanda que los ciudadanos aprendan a tratar conceptos abstractos y relaciones formales (Santamaria, 2006) y el concepto de función cumple con estos propósitos. Sin embargo, también se sabe de las dificultades para su comprensión y aprendizaje (Sierpinska, 1992; García, Vázquez e Hinojosa, 2004), de ahí la importancia de intervenir con un modelo propio que ayude a conocer el estatus de los alumnos respecto al concepto de función y al mismo tiempo contribuya a superar las dificultades de aprendizaje.

El concepto de función está relacionado, directa o indirectamente, con muchos campos de las matemáticas, es por ello que su enseñanza comienza desde niveles escolares básicos y continúa en la educación superior. En el nivel básico, se considera que el concepto de función se trabaja implícitamente dentro de la aritmética, el álgebra y la geometría. En el nivel superior se encuentra, principalmente, en el estudio del cálculo que, por lo general, es una de las asignaturas dentro de los programas de las ingenierías o licenciaturas que tienen que ver con las ciencias exactas. Por todo esto es que existen investigaciones educativas acerca de una amplia gama de temas relacionados con la función.

Existen trabajos relacionados con las dificultades para el aprendizaje del concepto de función en diferentes niveles. Algunos de ellos están dedicados a su historia u origen, otros hablan sobre lo complejo de su comprensión, otros más hacen un análisis de cómo los alumnos entienden el concepto (Bravo y Arrieta, 2005; Carlson, 1998; Cuesta, Deulofeu y Méndez, 2010; Falcade, 2004; Farfán y García 2005; Gómez Bello, 2011; Ochoa, 2008). También existen investigaciones sobre funciones específicas enfocadas a la física o las matemáticas (Guershon y Dubinsky, 1992).

De las reflexiones que se encuentran en estas investigaciones de por qué existen dichas dificultades, algunas apoyan la idea que es debido a la formulación moderna de la concepción de la función porque el concepto de función se ha venido desarrollando a través del tiempo y no como lo dicta su definición en términos de conjuntos. Desde el punto de vista de Freudenthal (1983) y respaldado con su fenomenología didáctica, dice que resulta contraproducente en términos educativos. Freudenthal (1983) subraya que el acercamiento a la función por medio de la variable es fundamental porque el origen de la función es "establecer, postular, producir, reproducir dependencia (o conexión) entre variables que ocurren en el mundo físico, social o mental" y agrega que esto sucede dentro y entre estos mundos. Así, para él el concepto de función definido como ley de asignación o como un subconjunto particular de pares ordenados, aunque equivalentes matemáticamente, son distintos fenomenológicamente y más aún desde una fenomenología didáctica porque la segunda definición oscurece el acto de asignación de un conjunto a otro y "uno puede oponer estas dos definiciones como dinámica versus estática”.

En resumen, y apoyando la fenomenología de Freudenthal la interpretación abstracta de conjuntos es lo que la hace estática, ocultando el origen del concepto, su carácter dinámico de asignación, el comportamiento de dos variables que cambian de diferente manera, una libremente y la otra con restricciones, lo cual es más cercano a la experiencia de los alumnos como es recomendable de acuerdo con las nuevas tendencias de la educación matemática (Sfard, 1992;

Sierpinska, 1992; Tall, 1996). A pesar de ello, la definición conjuntista para la función se sigue introduciendo en algunos libros de texto pre-universitarios, como se verá más adelante.

Otro origen de las dificultades del aprendizaje de la función es la existencia de varias definiciones (desde el punto de vista del alumno), pues según el área académica en el que se utiliza o el nivel educativo, la definición se enuncia de diferentes formas. Aunque son definiciones equivalentes, de acuerdo con la fenomenología didáctica de Freudenthal son diferentes. En resumen, como el concepto de función contiene una amplia gama de representaciones, se convierten es un problema complejo para su comprensión.

Aunque existen muchas investigaciones y propuestas sobre el aprendizaje y enseñanza de la función (Bravo y Arrieta, 2005; Carlson, 1998; Cuesta, Deulofeu y Méndez, 2010; Falcade, 2004; Farfán y García 2005; Gómez Bello, 2011; Ochoa, 2008; Sierpinska, 1992; García, Vázquez e Hinojosa, 2004), generalmente, en los libros de texto para la enseñanza del cálculo, usados a nivel bachillerato, se centran en ejercitar técnicas específicas y las lecciones no consideran la realidad contextualizada de los alumnos ni se toma en cuenta el desarrollo histórico del concepto de función. Además, desde el punto de vista didáctico, los libros de texto no consideran la interacción entre los alumnos, ni entre alumnos y docentes. Todo esto lleva a generar procesos de enseñanza incompletos, que no permiten la formación de objetos mentales ricos y variados asociados al concepto de función. En los planes y programas de los diferentes subsistemas, existe la misma problemática que en los libros de texto.

La presente propuesta se justifica por varios puntos, uno de ellos es desarrollar un modelo de enseñanza para el concepto de función, que se pueda desarrollar directamente en el salón de clases como una actividad cotidiana. Generalmente las investigaciones sobre el tema del concepto de función la realizan investigadores que no se encuentran en las aulas y, por ende, tardarán más tiempo en que lleguen a ellas para su intervención permanente, por lo que esta tesis es una aportación al estado del arte sobre la enseñanza del concepto. Otro punto consiste en generar un modelo pertinente para la comprensión del concepto de función que incluya la generación de secuencias didácticas particulares para los alumnos de la UIIM; con características específicas de su propio entorno. Al plantear una investigación en el aula, es posible dar seguimiento a un modelo de enseñanza y ver qué pasa con las estrategias aplicadas, observar si son o no aceptadas, entendidas, etc.

1.4 HIPÓTESIS

El desarrollo de un modelo de enseñanza para el concepto matemático función y la correspondiente intervención, facilitarán la constitución de objetos mentales variados en relación con el concepto de función, lo que a su vez favorecerá la comprensión del mismo

1.5 METODOLOGÍA

Para lograr los objetivos específicos, particulares y generales planteados, esta tesis tomó de referencia un Modelo Teórico Local (Filloy, 1999).

Así, la metodología para el desarrollo de esta tesis abarca varios tipos de tareas:

- Investigación teórica
- Diagnósticos sobre los conocimientos de los alumnos.
- Diseño de secuencias didácticas.
- Intervención en el aula.
- Recolección de datos.
- Análisis de datos y evidencia.

La metodología para la investigación teórica se realizó a través de

- Búsqueda de información.
- Lectura y análisis de la información.

- Redacción de documentos con los resultados de los pasos anteriores.

En todos los casos la referencia son los objetivos generales, particulares y específicos planteados; también se toma en consideración el nivel educativo y las circunstancias particulares de los alumnos sobre los que esta investigación se enfocó, que son los alumnos de la UIIM de tercer semestre, inscritos a la licenciatura en Desarrollo Sustentable, con terminal de Tecnologías Alternativas.

Para el diseño de los diagnósticos aplicados a los alumnos se precedió de la siguiente manera:

1 Análisis de los instrumentos diagnósticos a los alumnos de nuevo ingreso, para detectar las preguntas relativas al concepto de función o a sus antecedentes.

2 Elección de reactivos para la elaboración de diagnóstico sobre la función.

Para la intervención en el aula, la metodología fue:

- Elaborar hojas de trabajo.
- Explicar la forma de trabajar, haciendo hincapié en que no se trata de evaluarlos ni tampoco de divulgar su aprovechamiento académico.
- Resolver individualmente los ejercicios de las hojas de trabajo y despué́s revisar y socializar los resultados con sus compañeros.
- Resolver ejercicios de las hojas de trabajo de forma colectiva.
- Elaboración y resolver ejercicios similares y socializarlos en el grupo.
- Trabajar el material de apoyo en grupo.
- Re-escribir reactivos propios e identificar y resaltar los conceptos que encontraron en el material de apoyo.
- Resolver el diagnóstico sobre la función al final de la intervención.

Para la recolección de datos.

- Para recaudar información preliminar se analizaron los diagnósticos iniciales de generaciones anteriores (2009, 2010 y 2011).

- Del diagnóstico inicial se obtuvieron promedios generales por categoría (conocimientos y habilidades) y los promedios de los diez reactivos que se escogieron para elaborar el diagnóstico sobre la función.

Para realizar los análisis cualitativamente:

- Se realizan entrevistas para obtener información de los reactivos que fueron contestados erróneamente.
- Las evaluaciones del diagnóstico de función fueron comparadas con las evaluaciones previas, para encontrar diferencias cuantitativamente y evaluar el modelo.
- Las sesiones son grabadas para observar actitudes, procedimientos, confusiones y otros elementos que permiten identificar los momentos clave que pueden ser asociados con los principios de la Educación Matemática Realista, durante todo el proceso. Esto sirve como antecedente para próximas implementaciones y mejoras del modelo.

CAPÍTULO 2: REFERENTES TEÓRICOS

La teoría de los Modelos Teóricos Locales (MTL) fue desarrollada en el ámbito de la Educación Matemática, en los años ochenta del siglo pasado por Eugenio Filloy, quien la describe como "un marco teórico metodológico para la observación experimental en matemática educativa" (Filloy y Sutherland, 1997). Como se explicó en el capítulo anterior, la investigación aquí planteada pretende desarrollarse en el aula por lo que se eligió este marco para el desarrollo de la investigación que aquí se presenta.

Un modelo teórico local se caracteriza por el hecho de que no afirma que las cosas son tal y como las dicta el modelo, sino que, si las cosas fueran como las organiza el modelo, los fenómenos se producirían como lo describe el modelo. El modelo tiene carácter descriptivo, explicativo y predictivo, pero no excluye que los mismos fenómenos puedan describirse, explicarse y predecirse de otra manera o mediante otro modelo. Siguiendo la línea de la EMR, se utiliza la metodología cualitativa de carácter exploratorio, la cual está basada en experiencias de aulas donde se ponen a prueba secuencias didácticas que se observan, registran, analizando hitos, saltos y discontinuidades en el aprendizaje de los alumnos (Bressan, Zolkower y Gallego, 2005).

2.1 MODELOS TEÓRICOS LOCALES DE FILLOY

Los modelos teóricos locales (MTL) dan cuenta de los procesos de enseñanza de aprendizaje que se desarrollan cuando se enseña en el sistema educativo; el carácter local viene dado por el hecho de que el modelo se elabora para dar cuenta de unos contenidos matemáticos concretos, a unos alumnos concretos y solo se pretende que el modelo sea adecuado para los fenómenos observados (Puig, 2008).

En el acto educativo intervienen factores esenciales, a saber, el profesor, el alumno, el contenido y la comunicación. Los MTL se desarrollan a través de cuatro componentes, también denominados modelos de los MTL:

- Componente de competencia formal del MTL o modelo de competencia o, simplemente, **modelo formal**.
- Componente de enseñanza del MTL o **modelo de enseñanza**.
- Componente de cognición del MTL o modelo para los procesos cognitivos o **modelo de actuación** (denominación propuesta por Puig, 2008).
- Componente de comunicación del MTL o modelo de procesos de comunicación o, simplemente, **modelo de comunicación**.

2.1.1 Modelo Formal

Modelo de competencia formal. Este modelo reúne todo el saber en relación con el conocimiento matemático que se desea estudiar. El modelo formal permite situar el contenido matemático a tratar dentro de la matemática misma y dentro del currículum escolar, con el fin de elegir lo que se va a enseñar y cómo, y contrastar con propuestas didácticas ya existentes. También es una herramienta para la investigación, obedece a la necesidad contar con elementos para analizar lo que sucede en el aula, las actuaciones de los alumnos, sus producciones, la intervención del docente y así.

> En el caso más extremo, podríamos suponer que el modelo formal es aquel en el que el sujeto epistémico decodificaría las situaciones observadas; esto es alguien que tuviera todas las competencias creadas a lo largo del proceso histórico de construcción del conocimiento matemático (Filloy y Suthwerlan, 1997, p. 4).

La construcción del modelo de competencia formal puede hacerse de muchas maneras. Puig (1997) refiere tres investigaciones que ha realizado en coautoría con otros investigadores y, en cada caso, su modelo de competencia ha sido construido con base en resultados de investigación. Por ejemplo, para una investigación sobre resolución de problemas, incorpora lo que denomina el modelo heurístico a través de las teorías de Polya y Schoenfeld, mientras que para una investigación sobre la razón y la proporción utiliza como base el capítulo de Freudenthal sobre esos temas.

> Las fuentes para la elaboración de tales modelos de competencia, a la manera de las teorías semióticas de segunda generación, podrán encontrarse tanto en el análisis del dominio matemático en cuestión, como en las actuaciones concretas de los sujetos reales en ese dominio,…. Por otro lado, las actuaciones de los sujetos reales también se explican mediante la elaboración de modelos de actuación, que dan cuenta de actuaciones, competentes o no,... Las fuentes para la elaboración de tales modelos de competencia, a la manera de las teorías semióticas de segunda generación, podrán encontrarse tanto en el análisis del dominio matemático en cuestión, como en las actuaciones concretas de los sujetos reales en ese dominio,…. Por otro lado, las actuaciones de los sujetos reales también se explican mediante la elaboración de modelos de actuación, que dan cuenta de actuaciones,…(Puig, 2010, p. 6).
>
> …Lo que el currículo pretende no es enseñar los fenómenos, sino enseñar a organizar los fenómenos; pero además no pretende enseñar a organizar los fenómenos de cualquier manera, sino mediante los medios de organización histórica, social y culturalmente establecidos para organizar esos fenómenos, es decir, mediante los conceptos matemáticos (Puig, 2008, p. 104).

2.1.2 Modelo de enseñanza

Modelo de enseñanza. Se refiere al conocimiento didáctico del contenido, es conformado por resultados de investigación en cuanto a la enseñanza del contenido a tratar sugerencias didácticas producto de tales investigaciones, planes y programas curriculares o libros de texto donde se incluya la función como uno de los contenidos a trabajar. Su función es orientar la organización y dosificación de los temas específicos sobre el concepto a estudiar, las representaciones más convenientes para presentar el tema a los alumnos, los conocimientos previos requeridos para tratar el tema y todo lo que apoye en el diseño de una experiencia en el aula con los sujetos a observar; sin olvidar que:

> Cada modelo de enseñanza plantea su propia postura, por lo que diferentes modelos pueden tener posturas diferentes entre sí. Para que se pueda desarrollar una enseñanza que propicie la comprensión a los alumnos, en el modelo de enseñanza deben intervenir los fenómenos presentes en el mundo de los alumnos y los que se proponen en las secuencias de enseñanza (Filloy, 1999, p. 56).

Para la construcción de este componente Filloy sugiere tres tipos de análisis: uno fenomenológico, otro epistemológico y un tercero sobre libros de texto (Filloy, 1999).

> […] el intercambio de mensajes entre profesor y alumnos “se produce gracias a la lectura / transformación de esa secuencia de textos que llamamos Modelo de Enseñanza. Como consecuencia de esa lectura / transformación se producen conceptos nuevos a través de la producción de nuevos sentidos y el establecimiento de nuevos significados para el SMS [sistema matemático de signos] (o los SMS) en que se describe y se produce lo enseñado, que incluso conllevan la elaboración de nuevos SMS” (Puig, 2003, p. 184).
>
> […] y apunta entonces que el que aprende, como consecuencia de su trabajo con ese conjunto de textos que es un modelo de enseñanza, modifica la gramática de los sistemas matemáticos de signos que conoce y que está poniendo en juego, y eso a pesar de que no esté inventando nuevos conceptos sino re-inventándolos (por usar la expresión de Freudenthal), ya que ese proceso de re-invención tiene un componente gramatical (con respecto a la gramática de los sistemas matemáticos de signos en que se maneja el aprendiz) (Puig, 2004, p. 5).
>
> El modelo de enseñanza, por su parte, lo elaboramos en la investigación con el fin de que los alumnos acaben siendo competentes en el sentido que define la competencia el modelo de competencia, y lo ponemos a prueba en la investigación examinando las actuaciones de los alumnos tras ser enseñados con tal modelo de enseñanza con respecto al modelo de competencia. Además, en su elaboración tomamos también en consideración lo que nos dice el modelo de actuación sobre cómo se comportan los alumnos (Puig, 2004, p. 11).

2.1.3 Modelo de actuación

Modelo de actuación. Se refiere a la actuación de los alumnos, en contraste con la actuación de un sujeto que domine el modelo de competencia formal. Requiere la observación de los profesores e investigadores acerca de cómo los alumnos enfrentan las tareas matemáticas propuestas en el aula. Reúne resultados reportados acerca de las dificultades que los alumnos enfrentan al trabajar en el aula con determinado contenido matemático, o producto de la propia práctica docente o de intervenciones exploratorias del investigador.

2.1.4 Modelo de comunicación

Modelo de comunicación. Este componente trata sobre la forma de comunicar el contenido a los alumnos y tiene que ver con el discurso, las secuencias didácticas, tareas, actividades, materiales y todo aquello que permite la comunicación en el aula.

Aunque la teoría de los MTL se fue refinando desde su surgimiento, el esquema que se muestra en la Figura 2.1 muestra sintéticamente la construcción de un MTL. Es preciso entonces construir cada uno de los componentes del MTL como ahí se puntualiza. Como plantea el esquema de diseño (Figura 2.1), la construcción de los componentes requiere diferentes insumos y acciones. Aunque parece que todo inicia con el modelo de competencia formal, la MTL reconoce que los componentes se interrelacionan unos con otros y se van transformando en el transcurso de la investigación.

2.2 FREUDENTHAL Y LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

En su libro *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas,* Freudenthal, (1983) sintetizó gran parte de sus ideas acerca de la educación matemática, las cuales ya había planteado en otras publicaciones pero que no se encontraban sistematizadas. En este libro él describe lo que denomina ‘análisis fenomenológico’, o ‘fenomenología’, de las estructuras matemáticas y muestra el resultado de la aplicación de este tipo de análisis a muchos conceptos matemáticos. Además, establece que la fenomenología es una tarea previa a todo el desarrollo curricular pues permite conocer cuál es el conjunto de fenómenos que hay que tomar en consideración para presentarlos en dicho desarrollo.

Él describe su método de análisis así:

> Fenomenología de un concepto matemático, estructura, o idea significa describir la relación con los fenómenos para los que fue creado, y a los que ha sido expandido en el proceso de aprendizaje de la humanidad, y, hasta donde esta descripción esté relacionada con el proceso de la joven generación, se trata de fenomenología didáctica, una manera de mostrar al maestro los lugares en los que el alumno puede detenerse en el proceso de enseñanza de la humanidad (Freudenthal, 1983, p.1).

Aunque el término fenómeno es elegido por Freudenthal (1983) en el sentido dado por la antítesis *noumenon*, que significa objetos, y *phainomenon*, que es la acción sobre los objetos, no los utiliza con este mismo significado, sino como algo dinámico, en el que un *noumenon* puede, por el desarrollo mismo de las matemáticas, pasar a ser un *phainomenon*, que a su vez puede dar lugar, junto con otros *phainomenon*, a un nuevo *noumenon* y así sucesivamente. Como explica Puig (1997):

> La distancia entre el objeto mental o, mejor, el primer objeto mental y el concepto puede ser un abismo: es el caso del objeto mental curva y el concepto de curva de Jordan, por ejemplo. En general, en la topología los objetos mentales no conducen muy lejos y es preciso formar conceptos y además mediante una formación de conceptos que involucra más que una organización local. Esos conceptos entran en un campo de fenómenos que son organizados en un nivel más elevado por objetos mentales como espacios y variedades de dimensión arbitraria, que a su vez son convertidos en conceptos mediante nuevos procesos de organización y la creación de sistemas de signos más abstractos para describirlos. Como muestra este ejemplo, tras introducir la idea de objeto mental, el proceso de ascenso progresivo a través de la cadena de pares fenómenos / medios de organización se engarza con un proceso de transformación de objetos mentales en conceptos (Puig, 1997, p. 18).

2.2.1 Fenomenología Didáctica

Freudenthal (1983) establece cuatro tipos de análisis fenomenológicos: fenomenología pura, fenomenología didáctica, fenomenología histórica y fenomenología genética y explica que la fenomenología pura de las estructuras matemáticas se lleva a cabo si se tiene un conocimiento de las matemáticas y sus aplicaciones, mientras que la fenomenología didáctica requiere, además, conocer algo sobre la enseñanza.

Hacer un análisis fenomenológico permite conocer una gran parte de lo que es un concepto. Conocer y analizar sus significados, relaciones, usos, origen, historia, las transformaciones que ha sufrido en el tiempo, las notaciones matemáticas asociadas, cómo y por qué se han modificado. Todo ello antes de decidir qué se va a enseñar del concepto en determinado nivel educativo, en determinada especialidad, en determinado momento.

En su *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas*, Freudenthal (1983) dedica un capítulo completo al concepto de función y para los fines de esta tesis su análisis fenomenológico es exhaustivo; una síntesis de sus hallazgos se incluye en este documento. Aun así, se ha buscado más información histórica del concepto, complementaria a la mencionada por Freudenthal en su análisis, con el fin de buscar elementos que apoyen el diseño del modelo de enseñanza.

El segundo tipo de análisis, especificado como necesario para la construcción del modelo de enseñanza (Filloy, 1999), tiene que ver con lo que son las matemáticas, cómo se aprenden y cómo se valida el conocimiento de las mismas; el tema es complejo y no será tratado aquí.

Al elegir el análisis fenomenológico para desarrollar esta investigación se puede avanzar sin "adoptar ningún compromiso epistemológico" (Puig, 1997, p. 66), considerando que lo que interesa a esta investigación es organizar la enseñanza del concepto de función, de acuerdo con lo señalado por Freudenthal (1983), quien subraya que el análisis fenomenológico de un contenido matemático tiene como objetivo servir de base para la organización de su enseñanza y no pretende elaborar una explicación de la naturaleza de las matemáticas.

Ahora bien, al haber elegido la MTL para desarrollar la investigación se puede asumir la postura de Filloy y Sutherland (1997) en cuanto a la naturaleza de las matemáticas escolares.

> … la matemática escolar se articula en una serie de redes conceptuales, relacionadas unas con otras y con la característica de que, con el tiempo, los alumnos van logrando ser competentes en el uso de redes de conceptos cada vez más abstractos y generales;

> competencias que requieren de muchas competencias anteriormente dominadas […] (Filloy y Sutherland, 1997, p. 2).

Para una discusión profunda sobre la teoría de los MTL y la fenomenología didáctica puede consultarse a Puig (ver por ejemplo, 1997) y sólo basta presentar una postura didáctica como se explica en el siguiente apartado.

2.2.2 Conceptos y objetos mentales

Al explicar el método de análisis fenomenológico, Freudenthal (1983) se detiene en el significado del vocablo concepto. Explica que, en alemán, la palabra tiene un doble significado y que ello ha generado confusión.

De manera escueta puede decirse que concepto significa por un lado concepción o noción y por otro entendimiento. Esto es, concepto de función significa concepto de función en términos de todo lo que es y organiza este vocablo dentro de las matemáticas. Pero también puede significar entendimiento de la función esté segundo significado se perdió y ello afectó la enseñanza de las matemáticas y lo seguirá haciendo si la pretensión de los sistemas educativos es que los niños construyan conceptos. Por ejemplo, si se pretende enseñar el concepto de número a niños pequeños lo que se hace es buscar materializaciones del concepto de número para el trabajo en clase, ya que no se podría enseñar a los niños todo lo que es el número como objeto matemático. Finalmente, lo que se acaba enseñando son concretizaciones empobrecidas de dicho concepto que no reflejan los aspectos esenciales del número.

Lo que propone Freudenthal es no intentar enseñar conceptos, no esperar que los niños construyan un concepto o *noumenon*, sino empezar a trabajar con los fenómenos que “reclaman ser organizados por el concepto” (Freudenthal, 1983). Así, contra la *construcción de conceptos* el opone la *constitución de objetos mentales* (Puig, 1994).

La fenomenología didáctica es la herramienta ideal para un acercamiento didáctico de este tipo. Al realizarlo se van detectando situaciones que dieron origen al concepto y éstas se deben seleccionar de tal modo que ‘exijan’ ser organizadas por los objetos matemáticos que los alumnos deben estudiar. Se trata de encontrar cómo puede hacerse accesible el fenómeno para el cálculo y la actividad de pensamiento. Freudenthal no abunda mucho más sobre estas ideas y lo expuesto basta para los fines de investigación. La profundización sobre estos aspectos se encuentra incluida en Puig (1997).

2.3 LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA

La Educación Matemática Realista (EMR) es una teoría específica de instrucción para la educación matemática, centrada en dominios (Treffers y Vonk, 1987; De Lange, 1996; Streefland, 1991; Gravemeijer, 2000; Van Den Heuvel-Panhuizen, 1996). Esta teoría es la respuesta holandesa a la necesidad, percibida en todo el mundo, de reformar la enseñanza de las matemáticas (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2009).

La Educación Matemática Realista (EMR) propone el uso de modelos que se ven como representaciones de situaciones problema que reflejan necesariamente aspectos fundamentales de los conceptos y estructuras matemáticas relevantes para solucionar la situación problema, pero que pueden tener diversas manifestaciones. Vale la pena aclarar que el término *modelo* no se refiere a la modelación matemática, o hacer referencia a una teoría, ya que los materiales didácticos y de otros tipos, como los bosquejos visuales, situaciones paradigmáticas, esquemas, diagramas e, incluso, símbolos llegan a servir de modelos (Treffers y Goffree, 1985; Treffers y Vonk, 1987, 1991; Gravemeijer y Doorman, 1999).

En la EMR se plantea que se debe pasar la fase de experimentación mediante situaciones de enseñanza basadas en una metodología cualitativa/interpretativa con base en experiencias dentro de las aulas, donde se ponen a prueba las secuencias didácticas. La metodología debe contemplar que durante el desarrollo de la investigación se requiere de la observación de los profesores, para registrar y analizar las dificultades, saltos y discontinuidades que presenten los alumnos, porque de acuerdo con la EMR el objetivo es hacer conciencia durante el proceso de desarrollo y explicarlo.

> Volver consciente, por la experiencia, el proceso cíclico de desarrollo e investigación e informarlo tan claramente que se justifique por sí mismo, y que esta experiencia pueda ser trasmitida a otros como para que la hagan propia (Freudenthal, 1991, p.161).

La teoría de los MTL coincide con este aspecto de la EMR en cuanto a que en su definición se plantea como un marco metodológico para una observación experimental (cuyos resultados se esperaría fuesen reportados).

La EMR también ha sido reconocida como efectiva para enseñar matemáticas y para resolver problemas matemáticos por organizaciones internacionales que se dedican a las matemáticas escolares como el Tercer Estudio Internacional de Matemática y Ciencias Naturales (TIMSS, 2003) o PISA (2001). Sus reportes muestran que los alumnos de los Países Bajos, donde surgió y aún se aplica la EMR, obtuvieron altos logros en matemáticas (Martin, Mullis, Beaton, González, Kelly y Smith, 1997), lo mismo que Finlandia (Fauzan Slettenhaar y Plomp, 2002) donde también se aplica esta teoría.

Es pertinente subrayar que la EMR no es una teoría sobre el aprendizaje en general, sino una teoría de instrucción de dominio específico para la enseñanza de las matemáticas (Treffers y Vonk, 1987; De Lange, 1996; Streefland, 1991; Van Den Heuvel-Panhuizen, 1996). En ella se usan modelos para provocar el crecimiento de los alumnos en la comprensión de las matemáticas. "La teoría matemática realista es una teoría del aprendizaje y la enseñanza, y sólo sobre las matemáticas. Uno de los componentes clave de la educación matemática realista es que los alumnos re-construyan y re-inventen ideas y conceptos matemáticos mediante la exposición de una gran cantidad y variedad de problemas “del mundo real” y de situaciones reales que tengan un carácter mundial" (Dickinson y Hough, 2012).

Como se ha visto, la teoría de MTL ha otorgado a esta investigación una estructura que favorece la determinación, paso a paso, de cada uno de los elementos necesarios para aplicar la EMR; así, los principios de la educación matemática realista se han ido entretejiendo con los diferentes componentes del modelo teórico local.

2.3.1 Los modelos en la Educación Matemática Realista

Dentro de la EMR, los modelos se utilizan como instrumentos para acceder a un nivel más avanzado, son representaciones de las situaciones donde se reflejan aspectos esenciales para la construcción de los conceptos matemáticos relevantes para solucionar una situación. Dicho de otra forma, la actividad de organizar los contenidos a partir de la realidad o de la matemática misma, o, simplemente, *matematización*.

En la EMR los modelos sirven como puentes entre la matemática contextualizada e informal y la formal, para permitir avanzar en distintos niveles donde el razonamiento lógico se entiende como un proceso que abarca el análisis, la clasificación, la definición, la conjetura, la generalización y la demostración. La re-invención se toma como guía, sin embargo, en este proceso los alumnos deben sentirse como dirigentes.

El desarrollo de modelos favorece la matematización vertical a través de la reinvención guiada, en la cual los alumnos pueden experimentar un proceso similar al proceso por el cual las matemáticas fueron inventadas históricamente. Un modelo debe apoyar la progresión en la matematización vertical sin obstruir el camino de regreso a las fuentes que dan origen a una estrategia, es decir, los alumnos deben tener siempre la posibilidad de volver a un nivel más bajo (esto último también lo plantea Vygotsky, 1978).

Los modelos se utilizan como herramientas didácticas para la enseñanza y la matematización guiada. El uso de modelos, mediadores entre lo abstracto y lo concreto. y la interacción en el aula entre los alumnos y entre alumnos y maestro.

Para la elaboración de este tipo de modelos es necesario que ellos surjan de los alumnos, para identificar los problemas que surgen y así realizar actividades pertinentes. La interacción permite a los maestros preparar sus clases teniendo en cuenta las aportaciones de los alumnos (Fauzan, Slettenhaar y Plomp, 2002).

Los modelos son vistos como representaciones de situaciones problemáticas, las cuales reflejan, necesariamente, los aspectos esenciales de los conceptos y estructuras matemáticas que son relevantes para la situación del problema, pero que puede tener diferentes manifestaciones; los materiales visuales, situaciones paradigmáticas, esquemas, diagramas y símbolos, pueden servir como modelos (Treffers y Vonk, 1987).

Los modelos de la EMR tienen por lo menos dos características importantes: deben estar enraizados en contextos realistas e imaginables y deben ser suficientemente flexibles para ser aplicados en niveles más generales Los modelos tienen la cualidad de relacionar el entendimiento informal y formal.

La manera en que trabaja la EMR es revisando continuamente el desarrollo matemático de los alumnos en dos niveles, en la perspectiva micro-didáctica y la perspectiva macro-didáctica. La perspectiva micro-didáctica aclara cómo, en el contexto de una o dos clases, los cambios en la comprensión y las habilidades pueden suceder. La perspectiva macro-didáctica reporta los avances en la comprensión de un período más largo en el tiempo y se enfoca sobre las trayectorias de enseñanza-aprendizaje, incluyendo los objetivos de rendimiento que deben alcanzarse al final de una etapa o a lo largo de una ruta que servirá de marco longitudinal para enseñar matemáticas. Los requisitos para que un modelo sea viable son:

> Apoyar la progresión en la matematización vertical.
>
> No bloquear el camino de regreso a las fuentes de donde se origina una estrategia.
>
> Tener la posibilidad de ser re-inventado por los alumnos.
>
> Comportarse en un entorno natural, esto es, quedarse con las estrategias informales de los alumnos - como si pudieran haber sido inventadas por ellos - y ser fácilmente adaptados a las nuevas situaciones.

> Permitir que la actividad de matematizar en un nivel inferior pueda ser objeto de investigación en un nivel más alto; las actividades de organización de manera informal, pueden llegar a ser formales para llegar a otro nivel de esquematización.

Aunque los modelos de Freudenthal estaban pensados como modelos para contextos generales, tales como modelos para las clases, planes curriculares, descripciones de meta, estrategias de innovación, métodos de interacción y procedimientos de evaluación (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2001), la noción de *modelo* que utiliza la EMR se basa en una teoría representacional de la mente, donde el lenguaje cumple una función de representación y comunicación de ideas que el sujeto construye primero en su mente y en la noción de aprendizaje como apropiación de saberes histórica y culturalmente constituidos.

> El modelo es simplemente un intermediario, a menudo indispensable, a través del cual una realidad o teoría compleja es idealizada o simplificada a fines de volverla susceptible de un tratamiento matemático formal (Freudenthal, 1991, p. 34).

En un modelo de este tipo se debe

> […] prestar especial atención al desarrollo de grandes competencias o habilidades como el pensar matemáticamente, saber argumentar, saber representar y comunicar, saber resolver, saber usar técnicas matemáticas e instrumentos y saber modelar. Aprender a modelar es saber estructurar el contexto, matematizar y reinterpretar los resultados de esta matematización, revisar el modelo, modificarlo, etc. (Santamaria, 2006, p. 10).

Un ejemplo del uso didáctico de modelos bastante conocido en el mundo de la Matemática Educativa, es el que hoy se conoce como el modelo de van Hiele, desarrollado por dos alumnos de Freudenthal. Pierre van Hiele fue el diseñador teórico del modelo y Dina van Hielen desarrolló una aplicación práctica de éste, en la enseñanza de la geometría. En 1959 se publicó el artículo en en la Revista de la Asociación Francesa de Profesores de Matemáticas de la Enseñanza Pública, el cual representa la primera exposición pública a nivel internacional del modelo de van Hiele. A pesar de los esfuerzos de Freudenthal y de los van Hiele el modelo no logró captar la atención del mundo occidental. Sin embargo, el artículo resultó ser de gran interés para los educadores soviéticos, quienes se hallaban inmersos en un proyecto de reforma curricular. Años después, el modelo de van Hiele se incorporó como base teórica de la elaboración del nuevo currículum de enseñanza de la geometría en lo que fue la URSS; la implantación definitiva del modelo se fue en 1964, pero fue hasta 1974 cuando Wirszup dio una conferencia en la reunión anual del NCTM (asociación nacional de profesores de matemáticos de los EE. UU), donde comunica a profesores estadunidenses el hecho de que el currículum de geometría soviético es más eficaz que el suyo, dado que:

> …" los alumnos soviéticos aprenden antes, más y mejor que los de EE. UU"… (Guillén, 1992, p. 8).

Uno de los elementos básicos a considerar en la EMR, es la aplicación de una fenomenología didáctica a los conceptos que se quiere enseñar. También, desde el punto de vista de investigación es necesario elegir la forma de referirse al objeto de investigación, por lo cual es importante mencionar que al hablar del concepto función se considera la distinción de Freudenthal (1983) entre concepto y objeto mental. Ambos temas se explicarán en el siguiente capítulo. Allí mismo se presentan, también, algunos elementos de la teoría de los MTL.

2.3.2 Matematizar en la Educación Matemática Realista

Para Freudenthal la educación matemática era, en primer lugar, una actividad. Así, para él, hacer matemáticas es más importante que enseñar matemáticas como un producto terminado. Esto lo condujo a una pregunta ¿cómo dar forma a la educación matemática? La pregunta fue contestada por él mismo con las siguientes propuestas: la fenomenología didáctica, los niveles en el proceso de aprendizaje y la reinvención guiada (Gravemeijer y Terwel, 2000).

De la misma manera, en la EMR alcanzar metas pasa a ser menos importante que la manera en que dichas metas son alcanzadas. Este tipo de educación aspira a objetivos más abstractos y globales, refiriéndose a desarrollar una ‘actitud matemática’ (Freudenthal, 1981). En la educación matemática los problemas, la resolución de problemas y los sujetos que resuelven problemas significan cosas diferentes a las que significan en matemáticas (la ciencia). En la EMR el término 'educación' encierra tanto el logro de los objetivos de la instrucción formal, como el desarrollo de actitudes de toda la clase.

La EMR tiene la pretensión de ser de valor humano, relevante para la sociedad y de estar conectada a la realidad. Desde su perspectiva, los alumnos aprenden matemáticas a través del desarrollo de actividades, al aplicar los conceptos y herramientas matemáticos en situaciones problemáticas de la vida diaria, que tengan sentido para ellos; de modo que obtengan una concepción de la matemática como un proceso, como una actividad humana y, al mismo tiempo, la perciban como un producto (Gravemeijer y Terwel, 2000).

> Freudenthal, entiende que el término educación encierra tanto el logro de los objetivos de la instrucción formal como el desarrollo de actitudes de toda clase: morales, sociales, emocionales, religiosas y cognitivas. Todo esto hará del ser humano un hombre culto, formado, que es uno de los objetivos más relevantes de la educación (Santamaria, 2006, p. 9).

Inicialmente, la EMR más que una teoría de educación matemática era un conjunto de ideas básicas, tales como la concepción de la educación matemática. Una de estas ideas fue el término 'matematización' que introdujo Freudenthal para referirse a la actividad de organizar la realidad desde el punto de vista matemático. Esta idea fue establecida explícitamente como una actividad importante en un contexto educativo. Las situaciones del mundo real o problemas contextuales sirven de punto de partida para aprender matemática. Con el tiempo, estas situaciones significativas son matematizadas para formar relaciones más formales y estructuras abstractas (proceso que en la EMR denominaron esquematización progresiva, desde el punto de vista del observador, y reinvención guiada, desde el punto de vista del alumno; Freudenthal, 1991). Lo anterior significa que los alumnos atraviesan distintos niveles de comprensión, desde un nivel de razonamiento matemático más informal hasta uno más formal. Este punto lo desarrollaremos con ejemplos concretos en el Capítulo IV. En el proceso anterior se distingue el uso de modelos como puentes de conexión entre los distintos niveles de comprensión. Para completar este principio de niveles, a su vez, se retomará la distinción entre matematización horizontal y vertical (Freudenthal, 1991; Treffers y Vonk, 1987).

De acuerdo con Gellert y Jablonka (2007), Adrian Treffers, investigador del Instituto Freudenthal, hizo un ajuste al término de matematización, haciendo una distinción entre matematización ‘horizontal’ y matematización ‘vertical’ entendidas como:

Matematización horizontal.- Las herramientas matemáticas se adelantan y se utilizan para organizar y resolver un problema situado en la vida cotidiana.

Matematización vertical.- Es sinónimo de todo tipo de reorganizaciones y operaciones realizadas por los alumnos dentro del sistema matemático en sí.

Posteriormente, Freudenthal aceptó esta distinción y la expresó de la siguiente manera: matematizar horizontalmente significa pasar del mundo de la vida al mundo de los símbolos, y matematizar verticalmente significa moverse en el mundo de los símbolos (Freudenthal, 1991).

Educación Matemática Realista

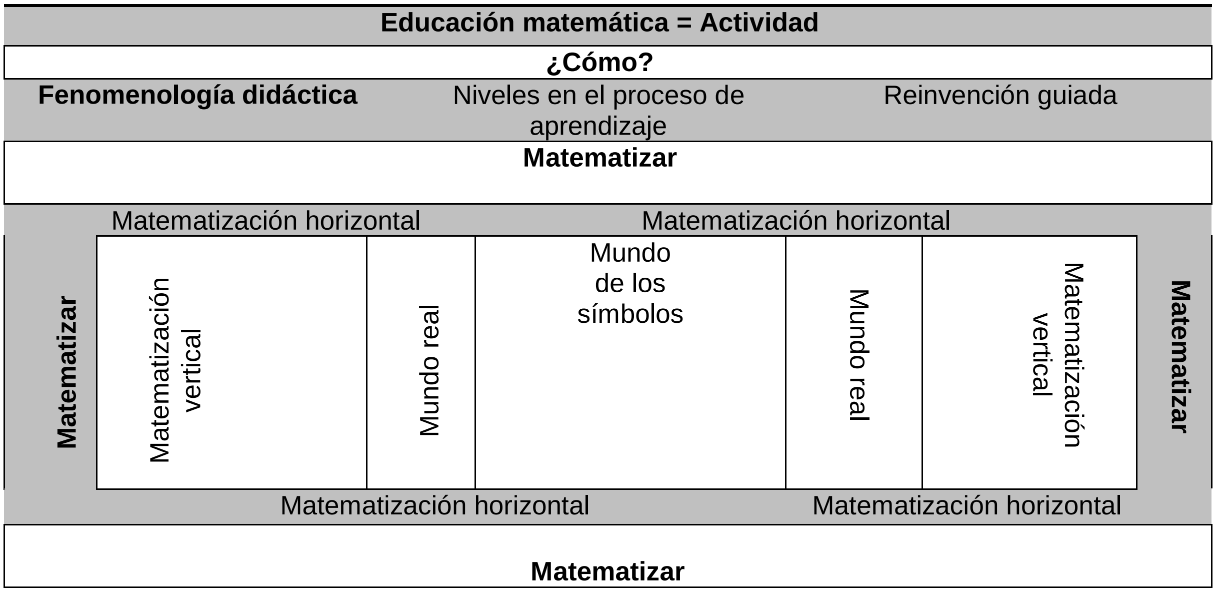


Figura 2.2. Matematizar en la Educación Matemática Realista. Fuente: creación propia.

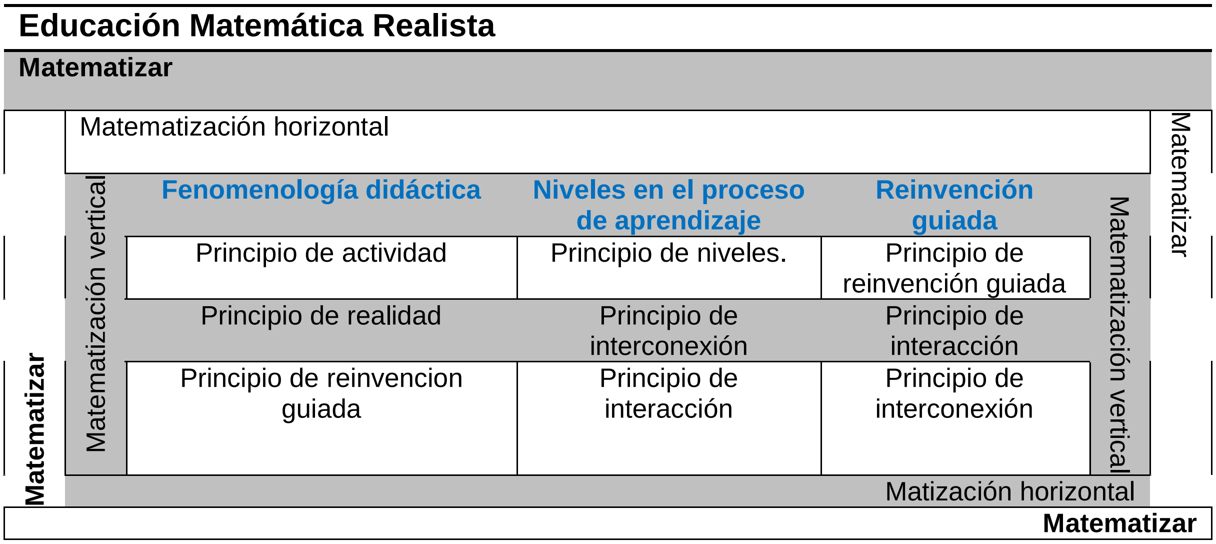
La EMR utiliza, como punto inicial para aprender conceptos matemáticos, situaciones del mundo real o problemas contextuales para matematizar y utiliza estas situaciones significativas para formar relaciones más formales y estructuras abstractas (Heuvel-Panhuizen, 2000). Al organizar un problema y tratar de identificar los aspectos matemáticos, descubriendo las regularidades y las relaciones con otros problemas ya trabajados, se hace matematización horizontal. Posteriormente, se hace una matematización vertical al desarrollar conceptos matemáticos por medio del uso de modelos y mediante la participación en las discusiones de la clase completa. Matematizar es el objetivo fundamental de la educación matemática realista.

> Lo que los humanos tienen que aprender no es la matemática como un sistema cerrado sino, más bien, como una actividad, el proceso de matematizar la realidad, y si es posible, el de matematizar las matemáticas (Freudenthal, 1968, p. 7).

Para Freudenthal, matematizar involucra:

> Reconocer características esenciales en situaciones, problemas, procedimientos, algoritmos, formulaciones, simbolizaciones y sistemas axiomáticos.
> Descubrir características comunes, similitudes, analogías e isomorfismos.
> Ejemplificar ideas generales.
> Encarar situaciones problemáticas de manera paradigmática.
> Introducir repentinamente nuevos objetos mentales y operaciones.
> Buscar atajos y abreviar estrategias y simbolizaciones iniciales con miras a esquematizarlas, algoritmizarlas, simbolizarlas y formalizarlas.
> Reflexionar acerca de la actividad matematizadora, considerando los fenómenos en cuestión desde diferentes perspectivas (Freudenthal, 1991, pp. 30-36).

La actividad matematizadora se logra mediante secuencias de enseñanza de aprendizaje, donde las estrategias de enseñanza necesitan ser adecuadamente elaboradas con base en el desarrollo de los alumnos. Las construcciones y producciones espontáneas de los alumnos y la propia historia de la matemática son dos fuentes importantes de las que se obtiene material para guiar las reinvenciones de los alumnos, para que finalmente los alumnos puedan ser estimulados a utilizar sus propias estrategias (Zulkardi, 1999).



Fenomenología didáctica	Niveles en el proceso de aprendizaje	Reinvención guiada
Principio de actividad	Principio de niveles.	Principio de reinvención guiada
Principio de realidad	Principio de interconexión	Principio de interacción
Principio de reinvencion guiada	Principio de interacción	Principio de interconexión

Figura 2.3 Niveles en la EMR. Fuente: creación propia.

Freudenthal completa el proceso de reinvención con lo que Treffers y Vonk (1987) denominan matematización progresiva. En el proceso de matematización progresiva, los alumnos pasan por distintos niveles de comprensión, estos niveles son: situacional, referencial, de generalización y de formalización (Freudenthal, 1991) y están ligados al uso de estrategias, modelos, diagramas y lenguajes de distinta categoría cognitiva y no constituyen una jerarquía estrictamente ordenada. El proceso del nivel situacional corresponde a la matematización horizontal y los otros niveles de comprensión a la matematización vertical, caracterizada por el "ajuste" de modelos, el uso de diferentes modelos matemáticos, la búsqueda de fórmulas, el uso de la prueba matemática y la generalización (Bressan y Gallego, 2011).

La actividad primordial de los alumnos es matematizar (Freudenthal ,1991) y la de los profesores es didactizar, entendida también como una actividad organizadora que se da tanto a nivel horizontal como a nivel vertical. Horizontalmente, los profesores trabajan en torno a fenómenos de enseñanza de aprendizaje que emergen en sus aulas y en las de otros; verticalmente, reflexionan y generalizan a partir de estas situaciones hasta reinventar su propia caja de herramientas didácticas para facilitar la matematización.

Para el desarrollo de experiencias de aprendizaje se adoptan los principios generales de la EMR como los que se han expuesto aquí. Los principios más específicos que orientan la construcción de secuencias didácticas se exponen en el siguiente capítulo.

2.3.3 Principios de la Educación Matemática Realista

Los cuatro elementos básicos de la Educación Matemática Realista (EMR) consisten en considerar a las matemáticas como una actividad humana, aceptar que el desarrollo de la comprensión matemática requiere distintos niveles, tener en cuenta que, en un ambiente de heterogeneidad cognitiva, para desarrollar la comprensión matemática es necesario de una reinvención guiada y comprender que se requiere de la fenomenología didáctica para analizar los conceptos a enseñar.

Los elementos anteriores, en la práctica, dan lugar a los seis principios fundamentales de la EMR, mismos que se encuentran relacionados entre sí (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2008; Alsina 2009) y que se enlistan a continuación.

Principio de actividad. La matemática es pensada como una actividad humana a la que todas las personas pueden acceder y que puede ser mejor aprendida, haciéndola.

> Hay una cosa que necesitamos [decidir] urgentemente, si la imagen de la matemática es para una élite o para todos – una imagen de la matemática para la totalidad de la educación (Freudenthal, 1973, p. 63).

Este principio propicia una matemática para todos reconociendo que no todos los alumnos estudian matemáticas para llegar a ser matemáticos; lo importante es que los alumnos aprendan a abordar las matemáticas críticamente, así como los problemas que se presentan en situaciones cotidianas (Freudenthal, 1968). Se trata de posibilitar el acceso a conocimientos, destrezas y disposiciones mediante situaciones problemáticas que generen la necesidad de utilizar herramientas matemáticas para su organización y solución.

> La imagen de la matemática se enmarca dentro de la imagen del mundo, la imagen del matemático dentro de la del hombre y la imagen de la enseñanza de la matemática dentro de la sociedad (Freudenthal, 1991, p. 132).

Las matemáticas no son el cuerpo de conocimientos matemáticos, sino la actividad de resolución de problemas y la búsqueda de problemas, y, en general, la actividad de la organización de la materia de la realidad o punto de vista matemático.

Como ya se ha dicho, para Freudenthal (1991), hacer matemáticas es más importante que aprenderlas como un producto terminado. El énfasis no está en aprender algoritmos, sino en el proceso *de algoritmización*, no en el álgebra sino en la actividad de *algebrizar***,** no en las abstracciones sino en la acción de *abstraer,* no en la *forma y la estructura* sino en *formalizar y estructurar*.

> Las cosas están al revés si se parte de enseñar el resultado de una actividad más que de enseñar la actividad misma (hecho que caracteriza de inversión anti didáctica). (Freudenthal, 1983, p. ix).

Principio de realidad. La matemática surge como organización de la realidad, luego el aprendizaje matemático debe originarse también en esa realidad. Esto no significa mantener a esta disciplina sólo conectada al mundo real o existente sino también a lo realizable, imaginable o razonable para los alumnos.

El adjetivo ‘realista’ refleja la forma en que es considerada la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. El término proviene del verbo “zich realiseren” que significa imaginar. Es decir, una situación es realista si se presenta ante el sujeto que aprende como razonable, realizable o susceptible de ser imaginada (Streefland, 1991). Desde este punto de vista, ‘realista’ se refiere a la intención que les debe ofrecer a los alumnos, es decir, se les debe proponer situaciones que puedan pertenecer a experiencias reales para ellos, reales para ellos en su mente, no solamente a la vida real de todos los días, y no tanto a la realidad o la autenticidad de los problemas; aunque esto no significa que la conexión a la vida real no sea importante. Por lo antes mencionado, se deduce que los contextos no se limitan necesariamente a situaciones del mundo real, sino que el mundo de la fantasía e, incluso, el mundo formal de las matemáticas pueden ser contextos muy adecuados para los problemas, siempre y cuando sean reales en la imaginación de los alumnos.

> Yo prefiero aplicar el término realidad a lo que la experiencia del sentido común toma como real en un cierto escenario (Freudenthal, 1991, p. 17).

No se trata de utilizar el término realidad para las cuestiones perceptibles o experimentadas, como única fuente de actividades en el aula de matemáticas; tomar únicamente el término realidad desde este punto de vista limitaría seriamente las oportunidades para que los alumnos aprendan a operar dentro del ámbito mismo de la matemática. De lo que se trata es de incorporar en el aula un modo de trabajo donde haya espacio para preguntas, para que los alumnos contribuyan a las discusiones, no sólo acerca de sus estrategias y las soluciones sino también, y, sobre todo, en lo que respecta a la interpretación de las situaciones problemáticas mismas, se trata de usar estrategias inteligentes.

> En la enseñanza de las matemáticas 'el mundo real' es representado por un contexto significativo que implica un problema matemático y es significativo si lo es para el alumno (Freudenthal, 1981, p.144).

Así, los contextos se constituyen en puntos abiertos de partida de su actividad matemática, promoviendo el uso de su sentido común y sus estrategias informales y usándose a profundidad. Sin embargo, para no generalizar y banalizar el concepto de contexto realista es importante tener en cuenta el carácter relativo del mismo, ya que el que un contexto sea o no realista depende de la experiencia previa de los alumnos o de su capacidad para imaginarlo o visualizarlo.

Principio de reinvención guiada **.** Para orientar adecuadamente el proceso de reinvención es importante la capacidad de anticipación, observación, auto observación y reflexión de los maestros acerca de los aprendizajes a corto y largo plazo de sus alumnos; así como la trayectoria de aprendizaje de un grupo de una clase con relación a un tema determinado o el desarrollo de una 'actitud matemática' de los alumnos durante el transcurso del proceso. Esto le permitirá conocer al profesor las comprensiones y habilidades de los alumnos, para organizar la actividad en el aula y dar lugar a la reinvención.

Freudenthal resaltó que la humanidad desarrolló las matemáticas para resolver todo tipo de problemas prácticos, y sostenía que los alumnos deberían ser guiados para poder recorrer un proceso similar al que conduciría a la matemática formal que hoy conocemos, donde en algunos casos se perdieron muchas de las relaciones obvias con la vida cotidiana (Struik, 2012). La educación matemática debe dar a los alumnos la oportunidad *guiada* por el maestro de reinventar la matemática, en lugar de intentar trasmitirles una matemática pre-construida.

Principio de niveles. La teoría de los niveles de Freudenthal constituye la visión de matemática realista como modelo de educación, lo contrario de una teoría de modelos preformados. La EMR atiende a modelos que emergen primero como modelos operativos de procedimientos de solución situados y que luego, gradualmente, se tornan en entidades en sí mismos para funcionar como modelos para razonamiento matemático formal (Gravemeijer y Doorman, 1999).

Según Freudenthal, la matemática no es otra cosa más que una forma de sentido común, sólo que más organizada.

> Para transformarlo en matemática genuina y para progresar, el sentido común debe ser sistematizado y organizado. Las experiencias del sentido común cristalizan en reglas (por ejemplo, la conmutatividad de la suma) y estas reglas se transforman de nuevo en sentido común, pero a un nivel más alto, constituyendo así la base para una matemática de orden aún mayor -una jerarquía tremenda construida gracias a un notable inter-juego de fuerzas (Freudenthal, 1991, p. 9).

A los alumnos se les debe ofrecer un ambiente de aprendizaje en el que se pueda construir el conocimiento matemático y se tenga posibilidades de llegar a niveles más altos de comprensión. Esto implica que los escenarios deben ser desarrollados, y deben tener el potencial, para provocar este crecimiento en la comprensión de los alumnos. Además, para lograr la matematización hay que tener en cuenta que puede ocurrir en diferentes niveles de comprensión.

Freudenthal enfatizó que la mejor forma de aprender y enseñar matemática es trabajar con grupos pequeños y heterogéneos, lo que hace que se desarrollen las habilidades de los alumnos. Trabajando de este modo, los alumnos, guiados por el maestro, organizan situaciones problemáticas y reflexionan acerca de su actividad matematizadora. Así, se puede identificar, en las producciones libres de los alumnos, diferentes niveles de matematización, dado que es un grupo heterogéneo, ello marcará el camino a seguir hacia un nivel mayor de abreviación y esquematización. Los niveles a los que se refiere este principio de la EMR son cuatro y se describen a continuación.

En el nivel *situacional* el conocimiento de la situación y las estrategias son utilizados en el contexto de la situación misma -generalmente con recursos extraescolares- en el cual tiene lugar la interpretación de la situación problemática y el uso de estrategias ligadas totalmente al contexto de la situación misma. Los alumnos se apoyan en sus conocimientos informales, su sentido común y su experiencia para poder identificar y describir la matemática que yace en el contexto, visualizar, esquematizar y formular el problema de diferentes formas, descubrir relaciones y regularidades, reconocer analogías con otros problemas, etc. Esto quiere decir que el punto de partida comienza con el contexto y las experiencias de los alumnos.

El nivel *referencial* es donde aparecen los modelos gráficos, materiales o de notación, los diagramas, las representaciones y las descripciones, así como los conceptos y procedimientos personales que esquematizan el problema, pero siempre referidos a la situación particular. De allí que los modelos se consideren como *modelos de* refiriéndose a las situaciones particulares que les dieron origen.

El nivel *general* se desarrolla a través de la exploración, reflexión y generalización de lo aparecido en el nivel anterior, pero propiciando una focalización matemática sobre las estrategias que supera la referencia al contexto. En este nivel, por la reflexión sobre los conceptos, procedimientos, estrategias y modelos utilizados en el nivel anterior, surgen aspectos generalizables de los mismos y los alumnos pueden concluir que son utilizables en conjuntos de problemas, dando lugar a los *modelos para* la resolución de los mismos.

En el nivel *formal*, se trabaja con los procedimientos y notaciones convencionales; se comprenden y se actúa con los conceptos propios de la rama de la matemática con que se está trabajando.

Estos niveles son dinámicos y un alumno puede funcionar en diferentes niveles de comprensión para contenidos distintos o partes de un mismo contenido. Más que describir de forma exacta qué puede hacer el alumno en cada uno, sirven para seguir sus procesos globales de aprendizaje (Bressan y Gallego, 2011).

> Comenzando desde la realidad, los alumnos pueden cruzar la frontera a la matemática por sí mismos, aprendiendo a estructurar, organizar, simbolizar, visualizar, esquematizar y mucho más. En resumen, estructurando el proceso de matematización horizontal por sí mismos. Pero también, sea simultánea o posteriormente, ellos pueden progresar en su tratamiento del material matemático dentro de la matemática misma, incrementando su eficiencia de procedimientos, aplicación de abreviaturas, reemplazando el lenguaje relativo a la propia lengua por el lenguaje convencional de símbolos y variables, en otras palabras, por abstraer, generalizar, unificar y cuando es necesario especificar… (Streefland, 1991, p. 19).

La evolución entre niveles se da cuando la actividad en un nivel es sometida a análisis en el siguiente, el tema operatorio en un nivel se torna objeto del siguiente nivel.

Principio de *interacción.* La interacción entre alumnos con alumnos y alumnos con los profesores puede provocar que cada uno reflexione a partir de lo que aportan los demás y así poder alcanzar niveles más altos de comprensión. La negociación explícita, la intervención, la discusión, la cooperación y la evaluación son elementos esenciales en un proceso de aprendizaje en el que los métodos informales del aprendiz son usados como una plataforma para alcanzar métodos formales. En esta instrucción interactiva, los alumnos son estimulados a explicar, justificar, convenir y discrepar, cuestionar alternativas y reflexionar. La interacción lleva a la reflexión y a capacitar a los alumnos para llegar a niveles de comprensión más elevados. No se piensa en los trayectos de aprendizaje de una clase homogénea, sino en individuos que siguen senderos propios. Sin embargo, esto no lleva a partir la clase en grupos con procesos similares, sino más bien a mantener la clase general, junta como una unidad de organización o al trabajo cooperativo en grupos heterogéneos (Freudenthal,1991). Dado que los problemas se seleccionan de manera que den lugar a soluciones apelando a diferentes niveles de comprensión, todos los alumnos pueden trabajar en ellos (Alagia, Bressan y Sadovsky, 2005; Bressan y Gallego, 2011).

Además, en la EMR los alumnos son vistos como participantes activos en los procesos de enseñanza de aprendizaje que tienen lugar en el contexto social del aula. Una síntesis de los seis principios de la EMR que se guían la elaboración de las secuencias didácticas se muestra en el cuadro siguiente, indicando la forma en cómo se trabaja cada uno.

Tabla 2.1. Principios de la educación matemática realista

Principio de la EMR	**¿A qué se refiere el principio?**	**¿Cómo se trabaja en las secuencias didácticas?**
De actividad	Las matemáticas se consideran una actividad humana con la finalidad de que las matemáticas puedan organizar el mundo que nos rodea (matematizar), incluyendo a la propia matemática. La matematización es una actividad de búsqueda y de resolución de problemas, pero también es una actividad para organizar un tema.	Generalizar y formalizar. Generalizar conlleva reflexión. Formalizar implica modelar, simbolizar, esquematizar y definir.
De realidad	Las matemáticas se aprenden haciendo matemáticas en contextos reales. Un contexto real se refiere tanto a situaciones problemáticas de la vida cotidiana, como a situaciones problemáticas que son reales en la mente de los alumnos.	El contexto de los problemas que se presentan a los alumnos puede ser el mundo real, pero esto no es necesariamente siempre así. Es necesario que se desprendan progresivamente de la vida cotidiana para adquirir un carácter más general.
De niveles	Los alumnos pasan por distintos niveles de comprensión:	Esquematización progresiva (profesor) y reinvención

Principio de la EMR	**¿A qué se refiere el principio?**	**¿Cómo se trabaja en las secuencias didácticas?**
	Situacional: en el contexto de la situación. Referencial: esquematización a través de modelos, descripciones, etc. General: exploración, reflexión y generalización. Formal: Procedimientos estándares y notación convencional.	guiada (alumno): Las situaciones de la vida cotidiana son matematizadas para formar relaciones más formales y estructuras abstractas.
De reinvención guiada	Proceso de aprendizaje que permite reconstruir el conocimiento matemático formal	Presentar situaciones problemáticas abiertas, que ofrezcan una variedad de estrategias de solución. Permitir que los alumnos muestren sus estrategias e invenciones a otros. Discutir el grado de eficacia de las estrategias usadas.
De interacción	La enseñanza de las matemáticas es considerada una actividad social. La interacción entre los alumnos y entre los alumnos y los profesores puede provocar que cada uno reflexione a partir de lo que aportan los demás y así poder alcanzar niveles más altos de comprensión.	La negociación explícita, la intervención, la discusión, la cooperación y la evaluación son elementos esenciales en un proceso de aprendizaje constructivo en el que los métodos informales del aprendiz son usados como una plataforma para alcanzar los formales. En esta instrucción interactiva, los alumnos son estimulados a explicar, justificar, convenir y discrepar, cuestionar alternativas y reflexionar.
De interconexión	Los bloques de contenido matemático no pueden ser tratados como entidades separadas.	Las situaciones problemáticas deberían incluir contenidos matemáticos interrelacionados.

Para comenzar la elaboración de las secuencias se recurre al modelo de competencia formal, cuya construcción se basa en el análisis fenomenológico que Freudenthal (1983) aplicó al concepto de función. Pero también se han utilizado resultados sobre los procesos de enseñanza de aprendizaje del concepto de función reportados por investigadores de diferentes países; así como los resultados de un análisis del origen y desarrollo del concepto de función en la historia de las matemáticas, tomando en cuenta desde los orígenes del conocimiento porque esto ejemplifica y brinda situaciones que dan pie al proceso de reinvención y matematización, tanto como las producciones libres de los alumnos con sus procedimientos informales. Sobre los hallazgos obtenidos en esta dirección trata el siguiente capítulo.

2.4 RELACIÓN ENTRE EL MODELO TEÓRICO LOCAL Y LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA

Para desarrollar el modelo y reportar su intervención como el que se propone en este documento, se necesita de un marco teórico metodológico para la observación experimental y en esta sección se presenta mediante el esquema del diseño experimental que propone Filloy (1999) en la figura 2.1 y el esquema del desarrollo de la experimentación (Figura 2.2). Los esquemas servirán tanto para desarrollar el modelo como para observar la intervención. El modelo es recurrente observando el recuadro del problema y al final de todo el proceso se vuelve a él. Como se observa en el esquema del diseño de la experimentación, se tiene que desarrollar un Modelo Teórico Local que sirva como punto de partida para la investigación sobre la competencia de enseñanza. La herramienta para la construcción del modelo de competencia formal que se propone para el modelo de la Función es el análisis fenomenológico, como lo indica Freudenthal (1983).

Además de los esquemas mostrados, la guía de los modelos de la Educación matemática Realista también se toman en cuenta debido a que los modelos en la EMR pueden surgir de problemas o situaciones elaborados por los propios alumnos o parecer que fueron inventados por ellos u otros actores o pueden ser inspirados con estrategias informales o modelos que aparecen en la historia de las matemáticas. Los modelos se elaboran a partir de resultados obtenidos de una fenomenología, y es el resultado de organizar una actividad por parte del sujeto, sosteniendo una relación entre modelo y situación (Gravemeijer, 2002).

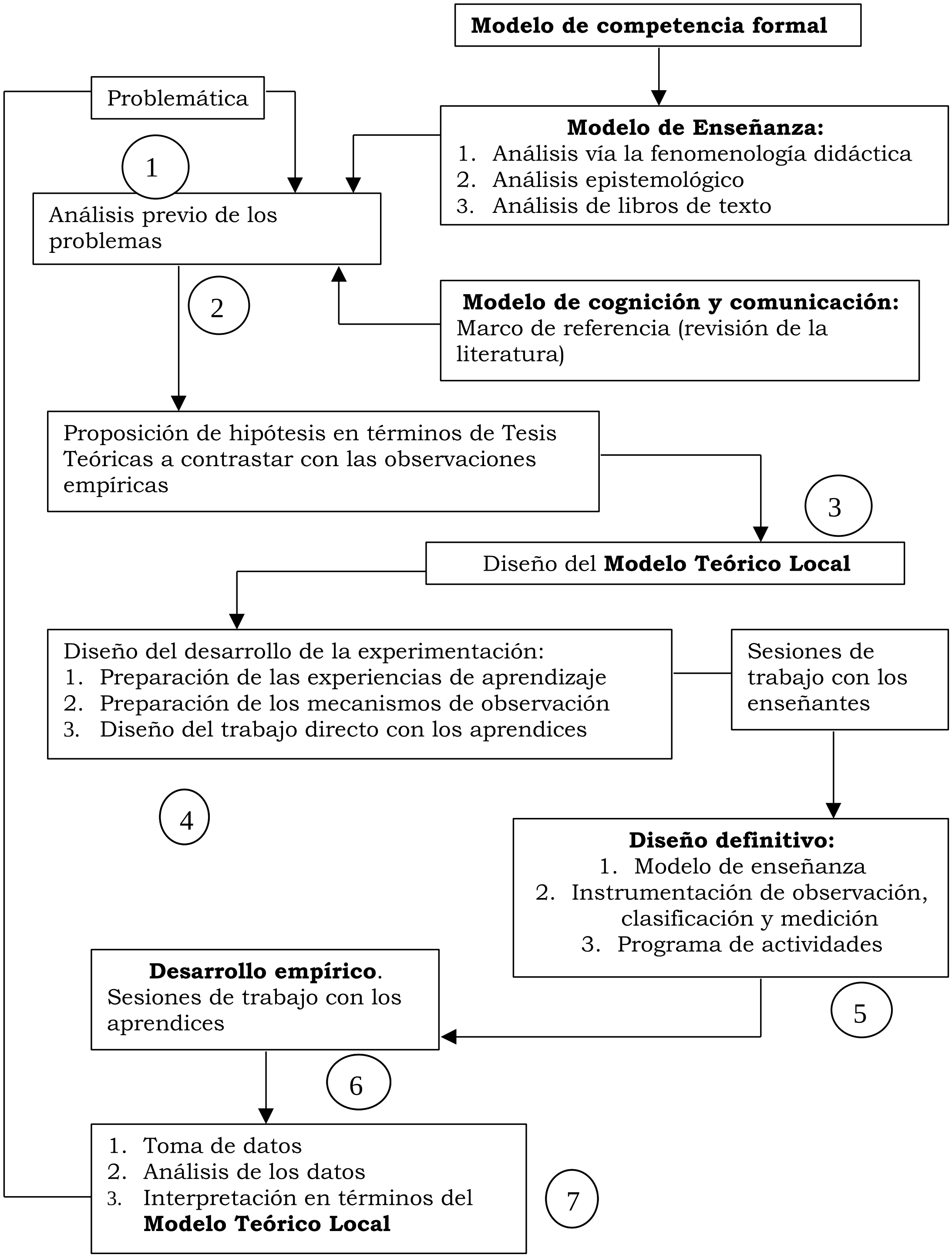


Figura 2.1 Esquema del diseño de la experimentación (Filloy, 1999)

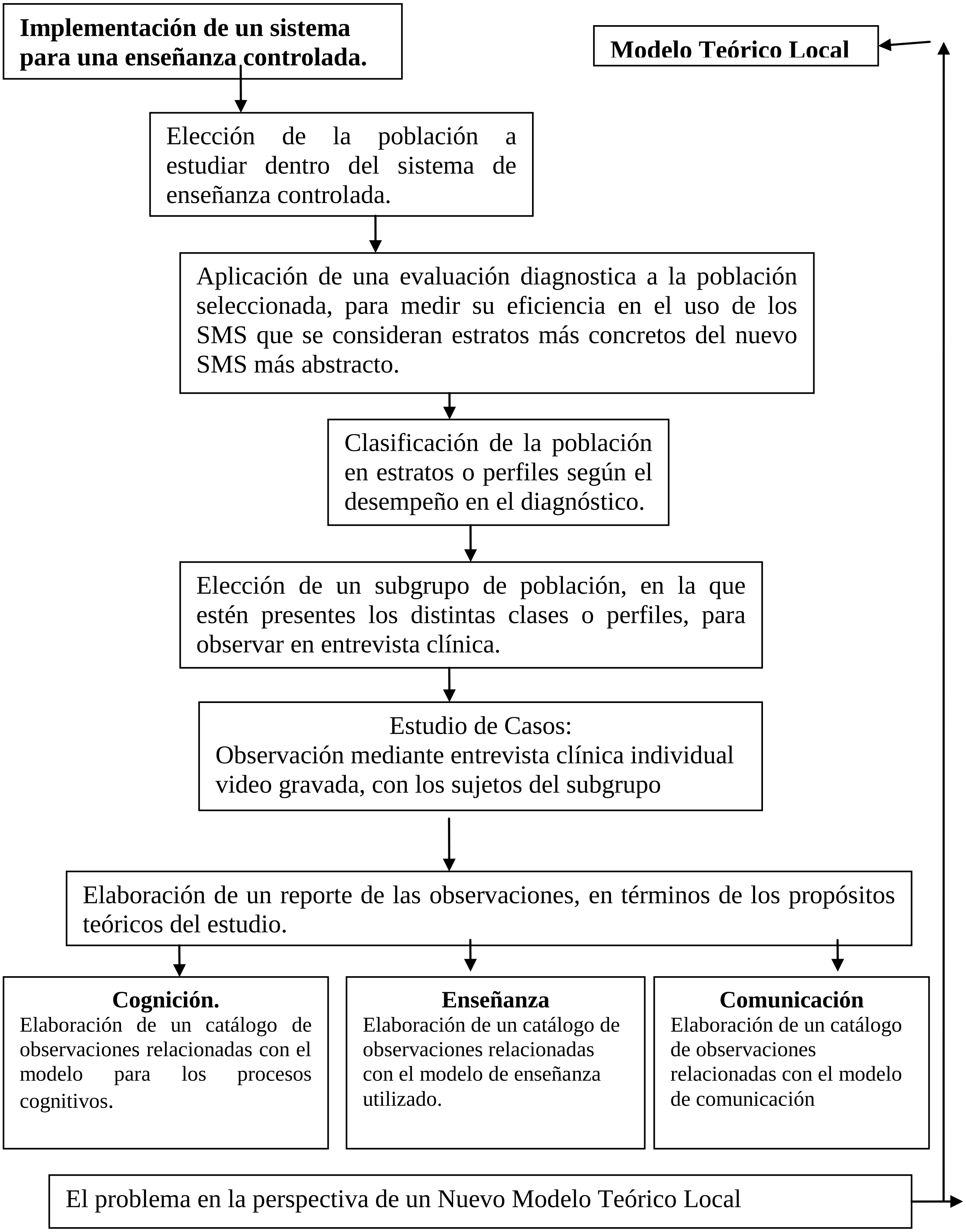


Figura 2.2. Esquema del desarrollo de la experimentación (Filloy, 1999)

En el esquema de la Figura 2.1, el recuadro “modelo de enseñanza” propone tres tipos de análisis, uno de los cuales es el análisis de fenomenología didáctica. Dado que la teoría de los MTL propone el análisis fenomenológico como parte del modelo de enseñanza, su intervención en experiencias de aprendizaje para comunicarse con los alumnos resulta congruente si se toma como referencia la teoría de la Educación Matemática Realista.

Para obtener el Modelo Teórico local inicial, se necesita desarrollar una serie de procesos previos, es decir un estudio experimental como se observa en el esquema de la figura 2.2. Continuando con el esquema 2.1, una vez construidos los componentes del modelo, se cuenta ya con los elementos para un primer Modelo Teórico Local que permitirá preparar experiencias de aprendizaje.

Después de la intervención de un primer modelo, se ponen en marcha los mecanismos de observación para finalmente llegar a la fase de análisis e interpretación a partir de los resultados y la problemática encontrada se vuelve a nuevamente el proceso para el trabajo directo con los alumnos.

PARTE II: MODELO TEÓRICO LOCAL REFERIDO A LA FUNCIÓN

CAPÍTULO 3: COMPONENTE FORMAL

Una de las líneas seguidas para la construcción del modelo de competencia formal es analizar el desarrollo del concepto de función a través de la historia de las matemáticas. La segunda línea es la aplicación de análisis fenomenológicos, el análisis sigue lo expuesto por Freudenthal al respecto. Freudenthal aplicó esté análisis al concepto de función y sus resultados constituyen un capítulo de su libro Didactical phenomenology of mathematocal structures (Freudenthal, 1983).

Como se ha dicho, el análisis fenomenológico debe enfocarse en la naturaleza de los objetos matemáticos, es decir, analizar desde la naturaleza de las actividades que dieron origen al concepto de función y desde este análisis observar, entre otras cosas, los conceptos previos que puedan dar la oportunidad a los alumnos que conozcan la genuina experiencia de la construcción matemática del concepto función o la nomenclatura y notación utilizadas en relación con el concepto. Algunos otros aspectos pueden variar dependiendo del objetivo del análisis o, incluso, de los intereses y antecedentes de quien lo aplica.

El apartado siguiente de esta sección se retoma a los hallazgos del recorrido histórico expuesto, ahora desde un punto de vista fenomenológico siguiendo la guía de Freudenthal. Además, como se ha dicho Freudenthal trata a los conceptos con el término de objeto mental (Freudenthal, 1983), razón por la que en esta revisión histórica, se adopta el significado de objeto mental para tratar el concepto de función y considerar los pre-conceptos que anteceden a la definición formal moderna. Además de lo expuesto por Freudenthal referente a la función se buscó más información en la historia de las matemáticas para conformar este componente. De lo expuesto en Freudenthal (1983) sobre los beneficios de incluir la historia de los conceptos matemáticos, existen otros estudios al respecto, por ejemplo Collette, (1985) muestra cómo los profesores de matemáticas mejoran su práctica docente cuando recurren a la historia de las matemáticas para su enseñanza. Este capítulo está formado por reseñas encontradas principalmente en libros de la historia de las matemáticas de los precursores de lo que hoy se conoce con el concepto de función.

3.1 HISTORIA DEL CONCEPTO DE LA FUNCIÓN

Algunos autores consideran que la función es un objeto matemático cuyo tratamiento inicia en el siglo XVIII (Collette, 1993) con la popularización de su definición a partir de un trabajo de Euler en 1755. Sin embargo, las ideas previas y relacionadas con el concepto de función pueden rastrearse remontándose mucho más allá, casi en los mismos orígenes de las matemáticas.

Respecto a las matemáticas algunos historiadores mencionan que comenzaron a desarrollarse en el siglo V a. C. en Grecia. Otros que fue en los años 40 000 a. C (Boyer y Pérez, 1999) y varios autores más coinciden en que fue cuando se descubrió la agricultura cuando el hombre comenzó a pensar en relaciones numéricas y como evidencia de esta última teoría se tiene un hallazgo arqueológico del Congo, cuya antigüedad es de aproximadamente 25,000 años. Se trata de un hueso con pequeñas marcas que sugiere la cuenta de algo.

Cuando se ve de este modo el origen de las matemáticas, es razonable considerar que los orígenes del concepto de función pueden rastrearse hasta épocas muy remotas. El presente trabajo de investigación comienza con la revisión de posibles elementos que pueden relacionarse con el concepto de función, ya que el significado de función se ha desarrollado y modificando a través del tiempo, pero la palabra ‘función’ encapsula las ideas del concepto moderno, aunque de manera más restrictiva en comparación con los primeros acercamientos de matemáticos y científicos de diferentes épocas al concepto.

Aunque el desarrollo de las matemáticas ha tenido periodos de estancamiento y periodos de actividad, en sentido cronológico su desarrollo ha sido continuo. Para la exposición se usan etapas, pues la revisión trata sobre algunos hechos históricos de las matemáticas o temas que se cree son relevantes para la construcción del concepto matemático de función.

En esta investigación se considera al concepto de función como un ente abstracto creado por muchas personas. Más bien, su construcción se dio a través del tiempo, y sus creadores fueron los actores temporales que lo modificaron. La concepción de función comienza desde ideas primitivas, pasando por prácticas de modelización de fenómenos reales, hasta llegar a formar un objeto matemático tan imprescindible, concentrado hoy en nuestros días en definiciones estáticas, que ocultan en sí mismas su dinamismo (Farfán y García, 2005). Tal y como se define actualmente en Matemáticas es un objeto muy elaborado como consecuencia de numerosas generalizaciones realizadas a través de una evolución de más de 2000 años (Ruiz, 1998).

La organización de esta sección se presenta por etapas y de forma cronológica, iniciando con las antiguas civilizaciones de Babilonia, Egipto y Grecia hasta llegar a las definiciones de función que constituyen la base del análisis matemático actual, teoría que se ha convertido en punto central para el desarrollo de las matemáticas (Da Ponte, 1992).

Cabe mencionar que el desarrollo de las matemáticas referidas a las antiguas civilizaciones también se encontró en otros continentes como por ejemplo en el continente americano. Se sabe que la civilización Maya desarrollo un sistema de numeración para medir el tiempo y hacer cálculos matemáticos, solo que con la conquista se quemaron todos los documentos. Aunque existen fuentes históricas donde se puede comprobar el uso de este sistema de numeración en los años 200 a. c. (Girard, 1997), los libros que se revisaron sobre la historia de las matemáticas no consideran estos desarrollos como parte de la historia de las matemáticas. Es por ello que el desarrollo que se presenta en esta sección solo contempla las civilizaciones de Europa.

Las etapas consideradas, así como los momentos importantes para el desarrollo histórico de la función, que más tarde servirán para la elaboración del análisis fenomenológico se concentran en la línea del tiempo de la Tabla 3.1.1.

TABLA 1. Épocas en las que se rastreó el origen del concepto de función

a. C	d. C	Edad Media	Siglo 17	Siglo 18	Siglo XIX	Siglo XX				
	1000		1600		1700		1800		1900	2000

Si bien, las primeras civilizaciones antiguas no manejaban el objeto matemático función, son culturas en donde se refleja que se usaba una intuición primitiva de lo que hoy en día conocemos como función (Farfán y García, 2005; Sastre, 2008). En este período el estudio de dependencia entre dos cantidades aún no se conocía como cantidades variables y mucho menos como funciones, pero se han encontrado casi medio millón de tablillas de barro que contienen símbolos, de las cuales 300 conciernen al ámbito matemático, que bien pueden vincularse con el concepto que hoy conocemos como función.

La cultura babilónica por ejemplo dejó como evidencia las tablillas elaboradas en arcilla, donde los símbolos que se encuentran se reflejan series de números, relaciones geométricas, cálculos aritméticos que representan fenómenos astronómicos. Los babilónicos observaron las periodicidades en las posiciones de los cuerpos celestes; esto quiere decir que interpolaron su curso linealmente, teniendo en cuenta las variaciones de las velocidades observadas o más bien a trozos, (Superposición de funciones periódicas Zig-Zag.) Figura 3.1.

Figura 3.1 Superposición de funciones periódicas (Freudenthal, 1983).

De las tablillas babilónicas se conoce una que contiene números cuadrados hasta el 60 figura 3.1.1.2 (Florian, 2010,). También se conocen tablillas de multiplicar, de recíprocos y de cubos. Los textos matemáticos más antiguos disponibles son la tablilla de barro *Plimpton 322* (c. 1900 a. C.).

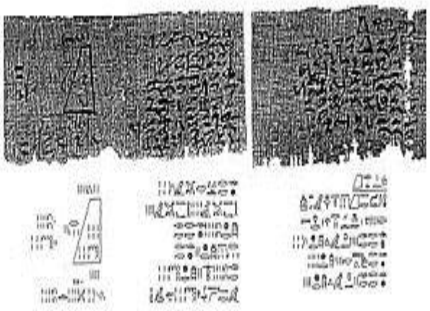
Tablilla de Plimpton 322.

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/histtopics/babylonian_and_egyptian.html

Calendario babilónico. Foto magnum en "ciencia y vida" nº 2 abril 1998

Figura 3.2 Tablillas Babilónicas

La civilización Egipcia tenía un sistema de numeración decimal y utilizaban fracciones unitarias. En un principio los egipcios escribían sobre piedras, ladrillos o piezas de barro; después, en el curso de los siglos, los egipcios adoptaron el papiro para escribir. Dos de los papiros encontrados más importantes son el de Moscú y el de Rhind. Los egipcios tenían conocimientos de la longitud de la circunferencia de diámetro unitario. En la figura 3.3 se muestran fragmentos del papiro de Moscú (c. 1850 a. C.), junto con el de Rhind (c. 1650 a. C.). Por estos indicios de los antiguos matemáticos egipcios se conjetura la noción de dependencia, lo que puede ser una idea intuitiva de función.



Papiro de moscú.
http://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/papiro_moscu.htm

Papiro de ahmes o papiro rhind.
https://astroseti.org/miscelanea/historiadelaciencia/lasmatematicasenlospapirosegipcios/

Figura 3.3 Papiros Egipcios

De la cultura antigua griega (1200 a. C. - 146 a. C.) se tienen pocos indicios, pero se sabe que a esta cultura pertenece la obra canónica de Euclides (325 a. C. 265 a. C.). La geometría euclidiana descrita en *Los Elementos*, sugiere que lo griegos contaban de forma implícita con una noción de lo que hoy se conoce como función. En esta época se encuentra Arquímedes (287 – 212 a.C.) quien desarrolló un método en el que expuso la aplicación de la mecánica a la geometría, «pesando» imaginariamente áreas y volúmenes desconocidos para determinar su valor. Arquímedes también probó que el volumen y el área de la esfera corresponden, a dos tercios del volumen y el área del cilindro en que ésta se inscribe, incluyendo sus bases, lo cual es considerado el más grande de sus descubrimientos matemáticos. Se sabe que Ptolomeo fue uno de los últimos representantes de la astronomía griega. Los astrónomos griegos utilizaban modelos cinemáticos que consideran los movimientos circulares, epiciclos, céntricos y excéntricos (Figura 3.4).

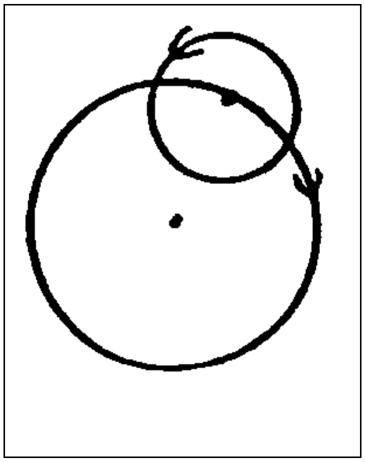


Figura 3.4 Modelo cinemático de los griegos (Freudenthal, 1983).

Matemáticamente, hablar de un modelo cinemático de los cuerpos celestes significa que se describen los movimientos celestes como superposiciones de funciones trigonométricas. Este modelo se mantuvo hasta la época de Kepler (Freudenthal, 1983). Ptolomeo construyó un sistema que representaba con gran precisión los movimientos aparentes del Sol, la Luna y los cinco planetas conocidos hasta esa época, mediante recursos geométricos; se trata de un sistema geocéntrico, según el cual la Tierra se encuentra inmóvil en el centro del universo, mientras que los planetas giran alrededor de ella, en forma decreciente de distancia, la Luna, Mercurio, Venus, el Sol, Marte, Júpiter y Saturno (Figura 3.5).

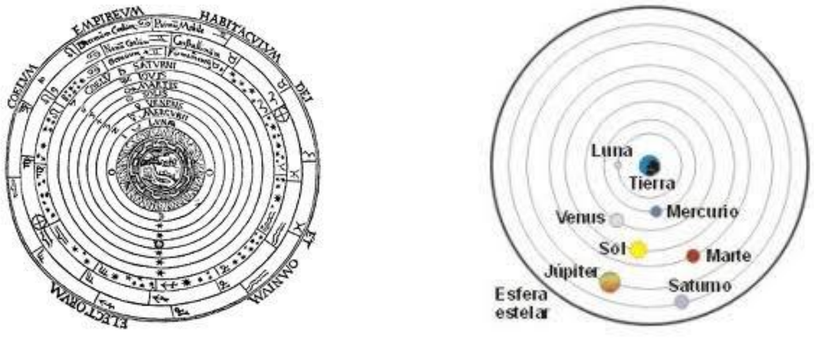


Figura 3.5 Mundo geocéntrico de Ptolomeo (Freudenthal, 1983).

Las tablillas astronómicas griegas contienen conocimientos sobre las funciones trigonométricas esféricas, pues asignan coordenadas numéricas a la bóveda celeste, lo que quizá preceda a la trigonometría plana (figura 3.4). El conocimiento de la trigonometría esférica se ve reflejado en el trabajo de Ptolomeo *Sintaxis Grande*. En esta obra se dice que entre los lados y ángulos de un triángulo esférico existen relaciones semejantes a los de la trigonometría plana (Freudenthal, 1983).

Los textos védicos Shulba Sutras son los textos más antiguos de la India y constituyen la única fuente que ha sobrevivido acerca de los conocimientos básicos de las matemáticas indias. Ellos describen construcciones de triángulos, rectángulos y otros textos curiosos con datos geométricos, que incluyen instrucciones para la construcción de altares e intentos de resolución de la cuadratura del círculo.

3.1.1 Primeras aproximaciones al concepto de función

Durante la Edad Media la función se encuentra íntimamente concretizada en los estudios cuantitativos de los fenómenos naturales sujetos al cambio; el calor, la luz, la densidad, la distancia o la velocidad se estudiaban no sólo en cuanto a por qué suceden los cambios, sino a cómo suceden. Aunque las primeras explicaciones fueron de tipo filosófico y sin realizar experimentos, se puede inferir que las ideas se desarrollaron alrededor de cantidades variables independientes y dependientes, pero sin dar definiciones específicas de estas nociones. Así, la evolución de la noción de *función* se dio asociada al estudio del cambio, donde la función se definía por una descripción verbal de sus propiedades específicas, o mediante un gráfico, pero no se usaban fórmulas (Sastre, 2008). En esta época también se provoca una clara separación entre el álgebra y la trigonometría como dos disciplinas con objetivos particulares (Farfán y García., 2005).

En la Edad Media la concepción de función se concentra en dos corrientes, por un lado, en Francia un grupo de académicos de la Universidad de Oxford llamados los mertonianos, en el que destacan Oresme y Bradwardine, esté grupo se enfocaban a la geometría de gráficas. Por otra parte en Inglaterra, la corriente de Heytesbury y Swineshead, ellos trabajaban a través de la teoría de la intensidad de formas (Farfán y García., 2005). Aunque la mayor parte de los historiadores de las matemáticas parecen estar de acuerdo en atribuir a Nicolás Oresme la primera aproximación sobre gráficas.

Thomas Bradwardine (1290-1349) aborda el concepto de función potencia en su obra *Tractatu de proportionibus velocitatum.* En esta obra se enuncia: "Cuando la fuerza es mayor que la resistencia, la velocidad depende de los cocientes de ambas magnitudes, y cuando es igual o menor no se produce movimiento" (Van, 1963).

Nicolás Oresme (1323-1382) desarrolló una teoría geométrica de las latitudes de las formas que representan diferentes grados de intensidad y extensión. Describió algunas ideas generales sobre las cantidades variables independientes y dependientes donde parece estar presente lo que se puede atribuir al desarrollo del concepto de función. Oresme trabajó con la convicción de que todo lo que varía, se sepa medir o no, podía ser imaginado como una cantidad continua, representada por un segmento rectilíneo. Así, llegó a hacer un dibujo (gráfica) de las cosas. Fue el primero en hacer uso sistemático de diagramas para representar magnitudes variables en un plano; su objetivo era representar con una figura, usando segmentos rectos para lo que varía y que lo medible pudiera considerarse como una cantidad continúa (figura 3.6). Se formulaban problemas en los que se planteaban ecuaciones de carácter funcional (Ramírez, 2007).

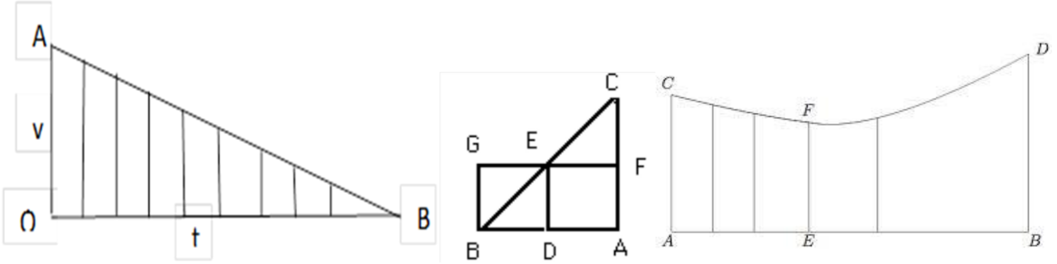


Figura 3.6. Representación gráfica de Oresme. Una velocidad que decrece uniformemente desde el valor OA, hasta B.

William Heytesbury y Richard Swineshead, vivieron aproximadamente entre 1330 y 1372, ellos estudiaron la velocidad de un móvil con movimiento uniformemente acelerado y establecieron que la distancia recorrida por él, es igual a la que se recorre conservando una velocidad constante igual a su velocidad media (Chacón, 2003), para hacer dicha deducción es claro que la función debió estas presente en sus mentes.

En 1533 fue impreso un tratado de trigonometría con el título *Triangulis Omnimodis* de manera póstuma escrito por Johann Müller (1436-1476) donde se encuentran por vez primera las tablas de tangente y cotangente, utilizadas para nutrir a las matemáticas de una nueva clase de función: la función trigonométrica.

3.1.2 Evolución del concepto de función

A principios del siglo XVII comenzó a surgir una nueva concepción de las leyes cuantitativas de la naturaleza y esto incidió notablemente en la evolución de la noción de función. A continuación se mencionan algunos de los autores de este siglo que contribuyeron con la evolución de este concepto.

Francisco Viète (1540-1603) fue uno de los primeros matemáticos en utilizar el álgebra y en sustituir los parámetros de una ecuación por letras. En su época se utilizaba el álgebra únicamente como un catálogo de reglas, pero él la utilizó no sólo para problemas algebraicos, sino también para problemas geométricos y desarrolló una teoría matemática a la que llamó “logística especiosa”. Viète introdujo la primera notación algebraica sistémica en su libro *Introducción al Arte Analítico* que se publicó en 1571. Viète vislumbró la posibilidad de usar el álgebra para tratar la igualdad y la proporción entre magnitudes, sin tener en cuenta de qué campo científico provenían los problemas (Kline, 1990).

Nepier (1550-1617) comparó dos movimientos, uno uniforme y otro en el que su velocidad es proporcional a su distancia a un punto fijo, encontró expresiones exponenciales para funciones trigonométricas e introdujo la notación decimal para las fracciones. Sus tablas de logaritmos fueron publicadas en la obra titulada *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* en el año de 1614. Los logaritmos de Napier serían los logaritmos de base 1/e. Napier no pensaba en los logaritmos como entes algebraicos, ya que en su tiempo el álgebra no estaba suficientemente desarrollada. El mayor inconveniente de los logaritmos de Napier fue que el log1 no era cero. El cambio a los logaritmos con la propiedad log1=0 surgió de las discusiones entre Briggs y Napier. Briggs, en una carta enviada antes de su encuentro, también le había sugerido que las tablas de logaritmos deberían ser en base diez y le comunicaba que había empezado a construir esa nueva tabla.

Bürgi (1552-1632) presenta los logaritmos por medio de tablas que se obtienen comparando la progresión geométrica de las potencias de una cantidad con la progresión aritmética de los exponentes (en forma de tabla). El método de los logaritmos de Bürgi es completamente diferente al de Napier y ambos los descubrieron por caminos completamente independientes.

Galileo Galilei (1564-1642), realizó aportaciones notables en la búsqueda de principios básicos en la Naturaleza. Expresó las leyes del movimiento que parecen contener claramente la comprensión de una relación entre variables y en sus estudios estableció las proporciones de forma homogénea. Una de sus principales ideas fue considerar la parábola como un punto en movimiento, esto permitió posteriormente, describir las cónicas como el resultado de la trayectoria de un cuerpo que se mueve de acuerdo con una ley, patrón o causa; de allí surgen los modelos que pretenden explicar los fenómenos. Galileo creó el concepto de aceleración, el concepto de la fricción y la inercia con respecto a los objetos en movimiento. Al incorporar el lenguaje de la teoría de las proporciones dio un sentido de variación directa o indirectamente proporcional a estas relaciones. Además, su lenguaje junto con la teoría de la época cubrieron aspectos de la variación continua, introduciendo así las nociones de variable, relación de dependencia y de correspondencia biunívoca, así como de mapeo entre conjuntos.

Johannes Kepler (1571-1630) propuso la posibilidad de utilizar la noción de algebra moderna creada por Viète para expresar fenómenos naturales. Kepler se dio cuenta de que el movimiento de los planetas no podía ser explicado por su modelo de poliedros perfectos y armonía de esferas y en 1609 publicó en su obra *Astronomia Nova* sus tres leyes que describen el movimiento de los planetas.

René Descartes (1596-1650), comenzó el desarrollo de la geometría analítica, tomando como punto de partida un sistema de dos rectas perpendiculares que se cortan en un punto denominado 'origen', ideando así las coordenadas cartesianas. La obra más importante de Descartes fue El *Discurso del Método* (*Discours de la méthod pour bien conduire la raison et chercher la vérité dans las sciences*), que publicó en 1637. Descartes buscaba liberar a la geometría del exceso de figuras, pero también buscaba darle sentido o significado al álgebra por medio de la geometría. Fue de los primeros en establecer que una curva se construye con solamente ofrecer una ecuación algebraica; recordando que en esa época, para construir una curva, era necesario el uso de regla y compás. Descartes fue quien desarrolló la idea de introducir una ecuación en forma analítica y representar geométricamente cualquier ecuación que relacionara dos variables. Estas ideas sirvieron como base para la construcción del concepto de función; justamente por el hecho de que una ecuación en *x* e *y* es una forma de expresar una dependencia entre dos cantidades variables, de tal manera que es posible calcular los valores de una variable a partir de los valores que toma la otra y además porque la ecuación se podía expresar mediante tablas, expresiones verbales, gráficas, a partir del análisis de fenómenos de carácter con cinemática. Descartes también hizo la distinción entre curvas geométricas y mecánicas.

Blaise Pascal (1623 – 1662), sus contribuciones a las matemáticas y las ciencias naturales (hidrostática) incluyen el diseño y construcción de calculadoras mecánicas, aportes a la teoría de la probabilidad, investigaciones sobre los fluidos y la aclaración de conceptos tales como la presión y el vacío. En 1640 redactó su ensayo sobre las cónicas *Essai pour les Coniques* que contenía lo que hoy se conoce como teorema del hexágono de Pascal.

Pierre Fermat (1601-1665) expone los principios fundamentales del método de las coordenadas tomando un eje de referencia y en él un punto fijo, origen de segmentos variables a partir de cuyos extremos toma otros segmentos variables, de manera que en el extremo de este segundo segmento se traza una curva que dependerá de la relación algebraica establecida entre los dos segmentos variables. Fermat, además, formula de manera más explícita la ecuación que permite describir fenómenos de acción que relacionan correspondencias a evaluar una variable.

Como consecuencia de los trabajos de Fermat y Descartes nace la geometría analítica (Farfán y García, 2005). Este tipo de análisis se mantuvo hasta principios de siglo XVIII donde las funciones que se expresaban analíticamente se limitaban a las algebraicas. El instrumento algebraico permitió el descubrimiento de las representaciones analíticas, un ejemplo claro de ello es la presentación de la función logarítmica, la cual se menciona en los trabajos de Bürgi y Nepier.

James Gregory (1638 - 1675) hizo la distinción entre funciones algebraicas y trascendentes y en su obra *Vera Circuli et Hyperbola e Ouadratura* (1667) dio la definición más explícita del siglo XVII de función, como:

> Una cantidad que se obtiene de otras cantidades mediante una sucesión de operaciones algebraicas o mediante cualquier otra operación imaginable (Sastre, Rey y Boubée, 2008, p. 146).

Con la última expresión quiso mostrar la necesidad de añadir, a las cinco operaciones del álgebra, una sexta operación que él definió como el paso al límite (Kline, 1990).

3.1.3 Concepción de la función en el siglo XVIII

Los primeros indicios de la concepción de función y su expresión formal explícita se remontan al siglo XVIII. Por un lado Newton, en Inglaterra, desarrolla la noción de función por dos caminos. El primero mediante el método que él llama de las primeras y últimas razones de las cantidades que nacen y se desvanecen y, otra, a través del método de las fluxiones. Simultáneamente, en Alemania, Leibniz desarrolló la noción de función a través del cálculo de los diferenciales. Leibniz es quien por vez primera habla en términos de *función.*

Newton y Leibniz trabajaban sobre métodos para resolver problemas acerca de curvas, tales como las tangentes de las curvas, área bajo la curva, longitudes de curvas y velocidades de los puntos en movimiento a lo largo de las curvas. En este siglo es donde se considera que toda función del análisis matemático podría ser representada por una serie completa.

Isaac Newton (1642-1727) publicó en 1687 su obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica o Principia*, donde establece los principios o leyes de la dinámica, junto con la teoría de la gravitación universal. A partir de aquí, Newton es capaz de deducir las leyes de Kepler del movimiento planetario y, en suma, desarrollar un esquema majestuoso que abarca desde la caída de una piedra hasta el movimiento de los planetas y las mareas. Pero, para llevar a cabo esta tarea, no sólo era preciso descubrir los principios físicos, sino también desarrollar la herramienta matemática adecuada para calcular y predecir sobre el modelo establecido. Esta maravillosa herramienta, desarrollada por I. Newton y G. Leibniz, fue el cálculo. Newton fue uno de los primeros matemáticos en mostrar cómo las funciones pueden desarrollarse en serie de potencias infinitas. Él usó el término *fluent* para designar las variables independientes, *relata quantitas* para indicar variables dependientes y *genita* para referirse a las cantidades obtenidas a partir de los demás utilizando las cuatro operaciones aritméticas fundamentales (Da Ponte, 1992).

Newton estudiaba las variables relacionadas con las diferentes formas del movimiento continuo, “las variables dependientes del tiempo” además, relacionaba las velocidades con ellas, es decir, las derivadas con respecto al tiempo, que llamaba fluxiones. Esto se ve plasmado en la ley de variación del movimiento que en notación moderna se puede expresar como $F = ma$.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) dedicó sus primeras obras a las series infinitas. Él observó que la determinación de la tangente a una curva depende de la razón entre las diferencias de las ordenadas y de las abscisas cuando éstas tienden a cero, así como que el cálculo de áreas depende de la suma de las ordenadas o de los rectángulos cuya abscisa tiende a cero y que ambos son problemas inversos.

El término función aparece por primera vez, justamente, en un manuscrito de Leibniz, con un significado muy particular relacionado con propiedades de las tangentes. Más adelante Leibniz utilizó la palabra función en un sentido más general relacionado con la geometría diferencial.

Leibniz usó la palabra función para referirse a cualquier cantidad que varía de punto a punto de una curva; por ejemplo la longitud de la tangente la normal “constante variable y parámetro” (Kline, 1990).

En agosto de 1673, Leibniz escribió que otros tipos de líneas, que dada una figura, llevan a cabo alguna función.

3.1.4 Comienzos de la definición del concepto de función

La palabra función apareció publicada por primera y segunda vez en los artículos de Leibniz. De linea ex lineis numero infinitis ordinatim ductis inter se concurrentibus formata easque omnes tangente, ac de novo in ea reanalysis infinitorum usu en 1692 y Nova calculi differentialis applicatio et usus ad multiplicem linearum constructionem ex data tangentium conditione en 1694.

Según Azcárate y Deulofeu (1996) la primera definición explicita del concepto de función como expresión analítica fue publicada por Johan Bernoulli, pero su notación no perduró. Johan Bernoulli (1667-1748) estudió el cálculo leibniziano, con su hermano mayor Jakob Bernoulli (1654-1705), e intentó dar a conocer el poder de esta nueva herramienta en la solución de problemas físicos, en comparación con otros métodos de la época. Johann Bernoulli, en una carta a Leibniz escrita el 2 de septiembre de 1694, describe una función como: "Una función es una cantidad formada de alguna manera a partir de cantidades indeterminadas y constantes" (O'Connor, 2013).

Después, aparece de nuevo casi esta misma definición, cuando Johann Bernoulli estaba estudiando problemas en cuyas soluciones aparecen funciones. De hecho, en un artículo de 1698 sobre problemas isoperimétricos él escribió sobre ‘funciones de ordenadas’ y en 1718, en un artículo publicado en las Memorias de la Academia de París, Johann Bernoulli publicó la siguiente definición: "Llamo función de una magnitud variable a una cantidad compuesta de cualquier manera de esta magnitud variable y de constantes" (Bernoulli, 1718).

Leonhard Euler (1707-1793) propuso una noción más abstracta del concepto de función, a partir del concepto de Bernoulli. Comenzó por nociones iniciales y en 1755 aborda el tema de expresión analítica. La primera definición de Euler aparece en su libro *Introducción al análisis infinito*, tomando en cuenta funciones especiales, no derivables, con picos, a las que él llama discontinuas o mixtas. Al enumerar las operaciones de las cuales se componen las expresiones analíticas comienza por las operaciones algebraicas y luego las trascendentes, llegando a las funciones exponenciales y logarítmicas, y a un número infinito de otras funciones que proporciona el cálculo integral, incluyendo la integración de ecuaciones diferenciales. Además, Euler vislumbró que cualquier función puede ser ampliada a una serie de potencias (Kleiner, 2009).

El concepto de función saltó a la fama en 1748, cuando Euler publicó su libro y la definió de la siguiente forma: "Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier manera a partir de la cantidad variable y de números y cantidades constantes" (O'Connor, 2013).

Según Euler toda función es una expresión analítica, pero Euler no define a la expresión analítica en ese momento. Es con el problema de la cuerda vibrante como hace uso de funciones diferentes a las que se manejaban en la época, llegando a incluir a las funciones trascendentales *e, ln, z* y las funciones trigonométricas y terminan por proporcionar una clasificación, coherente con su noción analítica de función (Farfán, 1997). Para 1755 tuvo que precisar su definición: "Es función de una cantidad variable compuesta como quiera que sea por esa cantidad y números o cantidades constantes" (Euler, 2000).

Pero la definición de cantidad variable antecede a la noción de función. "Una cantidad variable es una cantidad indeterminada o universal que contiene todos los valores determinados [...]. Una cantidad variable comprende en ella misma a absolutamente todos los números, tanto positivos como negativos, tanto enteros como fraccionarios, tanto racionales como irracionales y trascendentes. Incluso el cero y los números imaginarios no están excluidos del significado de cantidad variable" (Farfán y García, 2005)

Para Euler estaban primero las variables y después las expresiones analíticas que las relacionan. Euler introdujo las funciones continuas, discontinuas y mixtas (E-continuas, E-discontinuas y E-mixtas). También, fue quien expresó a una función continua como una sola expresión analítica, la mixta con dos o más expresiones analíticas y una discontinua con expresiones variadas.

Euler definía una expresión analítica como una expresión compuesta de magnitudes representadas por símbolos y números mediante las operaciones algebraicas (la adición, la resta, la multiplicación, la división, la exponenciación y la extracción de raíces) o trascendentes (como la exponencial, el logaritmo y “otras que aporta el cálculo integral en abundancia”) y las clasifica en dos tipos de funciones. Más adelante añadía: "Algunas cantidades en verdad dependen de otras, si al ser combinadas las últimas las primeras también sufren cambio, y entonces las primeras se llaman funciones de las últimas. Esta denominación es bastante natural y comprende cada método mediante el cual una cantidad puede ser determinada por otras. Así, si *x* denota una cantidad variable, entonces todas las cantidades que dependen de x en cualquier forma están determinadas por *x* y se les llama funciones de *x*" (Armenta, 2003).

En el segundo volumen de su *Introducción al cálculo variable*, Euler afirma que se puede relacionar a las curvas con funciones de manera recíproca. Dice que una función cualquiera de una variable *x* producirá una línea recta o curva. La definición de Euler significó un notorio avance sobre los oscuros conceptos vigentes de la época y perduró durante mucho tiempo (cerca de un siglo).

D'Alembert (1717-1783) publicó una solución para el problema de la cuerda vibrante donde la solución depende de la posición inicial de la cuerda e insistió en que su solución, de las velocidades iniciales en cada punto, debería ser una función continua que se expresa con una sola expresión analítica. Esto desata una controversia entre Euler y D'Alambert sobre la naturaleza de las funciones.

Joseph-Louis de Lagrange (1736-1813). El siguiente escrito de Lagrange, resume el pensamiento de esa época respecto a la función, su notación y expresión: "Designamos, en general, por la característica *f o F*, colocada delante de una variable, toda función de esta variable y que varía con ella siguiendo una ley dada. Así *fx* o *Fx* designarán una función de la variable *x*; pero cuando se quiera designar una función de una cantidad compuesta de esta variable, como x^2, $a + bx$, etc., se encerrará esta cantidad entre dos paréntesis. Así $f(x)$ designará una función de x, $f(x^2)$, $f(a + bx)$, etc." (Gómez, 2011).

En el desarrollo de los fundamentos del análisis y elaboración de la teoría de funciones analíticas (1798) presenta los principios del cálculo diferencial y define una función de una o varias cantidades, como: "A cualquier expresión del cálculo en la cual esas cantidades entran de manera cualquiera, mezcladas o no con otras cantidades que miramos como teniendo valores dados e invariables, mientras que las cantidades de la función pueden recibir todos los valores posibles. Así, en las funciones consideramos solo las cantidades que suponemos variables sin ninguna mirada a las constantes" (García, 2013).

Según Lagrange esta definición es muy general. Pues los primeros analistas la utilizaron para designar las potencias de una misma cantidad, posteriormente se asignó a toda forma de cualquier otra cantidad.

Marie-Jean-Antoine Nicolas de Caritat, marqués de Condorcet (1743-1794) y alumno de D'Alembert, fue el primero en retomar la definición de Euler. En su trabajo *Traité du calcul integral* distingue tres tipos de funciones: funciones explícitas, funciones implícitas, dadas sólo por ecuaciones sin resolver, y funciones que se definen a partir de consideraciones físicas, como la solución de una ecuación diferencial. Este trabajo fue enviado a la academia de París, pero nunca se publicó aunque fue visto por muchos matemáticos franceses.

Fourier (1768-1830). Otra contribución sobre la función vino de las obras de Fourier en su problema sobre el flujo de calor de los cuerpos donde considera la temperatura como función de dos variables. Conjeturó que cualquier función podría desarrollarse en series trigonométricas en un intervalo adecuado aunque nunca mostró la demostración matemática que diera sustento (Da Ponte, 1992). Fourier demostró que algunas funciones discontinuas podían ser representadas por lo que hoy llamamos series de Fourier, y tomando la definición de función de Euler, afirmó que la distinción entre funciones E-continuas y E-discontinuas no existía. Muchos matemáticos de la época no aceptaron sus resultados, fue hasta 1829 cuando se demostró la convergencia de series de Fourier que aclara la distinción entre la función y su representación.

En 1822, Fourier dio la definición de función en su *Théorie analytique de la chaleur: "*En general, la función f(x) representa una sucesión de valores de coordenadas o cada uno de los cuales es arbitraria. Una infinidad de valores que se están dando como la abscisa x, y un número igual de ordenadas de f(x). Todos tienen valores numéricos reales, positivos o negativos o nulo. No suponemos que estas ordenadas estén sujetas a una ley común; se suceden unos a otros en cualquier forma que sea y cada uno de ellos se da como si fuera una sola cantidad" (Garcia, 2013).

3.1.5 La función en el siglo XIX

En esta época Cauchy, Lobachevsky, Dirichlet y Riemann emplean al objeto matemático función creado por Euler. Pero la definición de Euler comenzó a tener problemas cuando se demostró que una función mixta, dada por fórmulas diferentes, a veces puede ser una sola fórmula.

Augustin Louis Cauchy (1789-1857) fue pionero del análisis matemático y de la teoría de grupos de permutaciones. Cauchy precisó los conceptos de función, de límite y continuidad casi en la forma actual. Señaló que la función $\begin{matrix} y = x; \forall x \geq 0 \\ Y = -x \forall x < 0 \end{matrix}$ puede ser expresada por una sola fórmula $y = \sqrt{x^2}$. Por lo tanto dividir las funciones en E-continua o mixta, según la definición de Euler, no tenía sentido. Cauchy tomó el concepto de límite como punto de partida del análisis y elimina la idea de función de una expresión formal, algebraica o no, para fundar la noción de correspondencia. En 1821 llegó a una definición de función y de dependencia entre variables fundamentales para el concepto de función, que aparecen en su *Cours d'analyse*. Cauchy dice:

> Cuando se relacionan cantidades variables entre ellas de modo que, estando dado el valor de una de estas, se puedan determinar los valores de todas las otras, ordinariamente se considera a estas cantidades diversas expresadas por medio de la que están entre ellas, la cual entonces toma el nombre de variable independiente y las otras cantidades expresadas por medio de la variable independiente son aquellas que uno llama funciones de esa variable (Kline, 1990, p. 1254).

Nikolái Lobachevski (1792 – 1856), en 1838 dio una versión de una definición general sobre una función continua: "Una función de *x* es un número que se da para cada *x*, y que cambia gradualmente junto con *x*. El valor de la función se podría dar, ya sea por una expresión analítica o por una condición que ofrece un medio para el ensayo de todos los números y la selección de uno de ellos, o , por último, la dependencia puede existir, pero sigue siendo desconocidos" (Martínez, 2007).

Gustave Lejeume Dirichlet (1805-1859), discípulo de Fourier, perfeccionó la definición y concepto de función en el campo del análisis matemático aceptó la definición de función de Fourier y formuló las condiciones suficientes para que una función pudiera representarse por una serie de Fourier. También definió la función continua e hizo posible la separación entre el concepto de función y una representación analítica. Además propuso una definición mucho más general, en términos de una correspondencia arbitraria entre variables que representan a conjuntos numéricos (Da Ponte, 1992).

Se aceptaba hasta ese entonces que una función estaba definida en cada punto del continuo de los reales o complejos. Dirichlet fue el primero en tomar en serio la noción de función como una correspondencia y, con la introducción de la teoría de conjuntos, se llegó a establecer una definición totalmente general en términos de conjuntos, según la cual todas las anteriores definiciones pueden considerarse como casos particulares.

Gustave Lejeume Dirichlet, en su trabajo *Sobre la Representación de Funciones Arbitrarias en Series de Senos y Cosenos* presenta una definición clara del concepto función, la cual se convirtió en la base de la terminología de los libros de texto, también definió las características de algunas funciones.

En 1829, Dirichlet, llega a formular por primera vez el concepto moderno de función. "y" es una función de una variable x, definida en el intervalo $a < x < b$ si a cada valor de la variable x en este intervalo corresponde un valor único definido para la variable y entonces y se dice que es una función de la variable x. (Boyer, 1986).

Dirichlet trabajó sobre las funciones discontinuas y fue el primero en dar un ejemplo de una función definida en el intervalo [0,1] la cual es discontinua en todos los puntos. Esto es importante ya que en ese tiempo generalmente las funciones se relacionaban con curvas o expresiones analíticas y esta función no dibujaba una curva ni era una expresión analítica. También fue el primero en restringir explícitamente el dominio a un intervalo.

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866) es considerado como fundador de la teoría moderna de funciones. Riemann desarrolló la representación de funciones en series de Fourier. Recordando que, los coeficientes de una serie de Fourier se dan por integrales y que Cauchy había desarrollado su integral sólo para funciones continuas, pero con el desarrollo de Riemman se extendió el concepto a las funciones con un número finito de discontinuidades y así amplió la clase de funciones representables por series de Fourier.

En su tesis titulada: *Grundlagen Fur eine allgemeine Theorie der Functionem einer veranderlichen complexe Grosse* (Fundamentos para una teoría general de las funciones de una variable compleja) Riemann estudió la teoría de variables complejas y, en particular, lo que ahora llamamos superficies de Riemann. Por lo tanto, introdujo métodos topológicos en teoría de funciones complejas, lo cual cambió la teoría de funciones de variable compleja, pues señala cómo una función viene definida por sus puntos singulares y valores en los límites. Se debe a Riemann la primera distinción entre la continuidad y la diferenciabilidad.

En 1857 se publicó otra de sus obras maestras *La teoría del papel de las funciones abelianas*.

Riemann examinó la función zeta que ya había sido considerada por Euler, pero él considera una cuestión muy diferente a la que Euler había considerado, porque él miró a la función zeta como una función compleja en lugar de una real.

Riemann define continuidad de una función *f(z)* así: " La función *f(z)* es continua en un intervalo comprendido si cuando *z* recorre de un manera continua todos los valores comprendidos entre dos valores fijos, la función *f* de *z* varía igualmente de una manera continua".

Después de su fallecimiento se encontraron ciertos manuscritos en los que presenta otra definición de continuidad, la cual corresponde a la continuidad uniforme de una función continua definida sobre un intervalo [a, b].

Karl Weierstrass (1815-1897), alrededor de 1841, construyó la teoría de funciones analíticas, en ésta estudió las funciones enteras y las funciones definidas por los productos infinitos, la ecuación de la convergencia uniforme (una nueva teoría de funciones elípticas) y el teorema de la aproximación uniforme de una función cualquiera por polinomios. Dio importancia a la teoría de las funciones analíticas de variables complejas con los conceptos de prolongación analítica, transcendente, enteros, factores primarios. Diferenció la convergencia uniforme de la no uniforme y planteó la teoría de funciones sobre la base del desarrollo en series de potencias de las funciones analíticas.

Weierstrass atacó el problema: dada una serie de potencias que define una función en un dominio restringido, derivar otra serie de potencias que define la misma función en otros dominios sobre la base de teoremas de series de potencias.

Weierstrass, en su obra: *Capítulos seleccionados de la teoría de funciones* considera la idea de función como una relación aritmética entre dos variables, da la definición de función como correspondencia entre los elementos y llega a la conclusión de que mientras esta correspondencia es continua, esas dos nociones son las mismas.

Weierstrass define la continuidad de una función arbitraria como $f(x)$ es continua en ciertos límites de x, si para todo valor x_0 en este intervalo y para un número positivo y arbitrariamente pequeño z, es posible encontrar un intervalo de x tal que para todos los valores de este intervalo la diferencia $f(x\text{-}x_0)\text{-}f(x)$ es un valor absoluto inferior a z.

3.1.6 Siglo XX la generalización de la función

En el siglo XX el concepto de la función fue extendido para incluir todas las correspondencias arbitrarias que cumplan la condición de unicidad entre conjuntos numéricos y no numéricos (funciones continuas, funciones semi-continuas, funciones diferenciales, funciones con derivadas no integrables, funciones integrables, funciones monótonas, funciones continuas, funciones por tramos, etc.).

En las dos primeras décadas del siglo XX se introdujeron las nociones de espacio métrico, espacio topológico, espacio de Hilbert, y el espacio de Banach; funciones (operadores, operadores lineales) entre dichos espacios juegan un papel destacado pues se deduce que las propiedades de una función dependen de la estructura del conjunto sobre la cual se define y las variables que toma.

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918) desarrolló la teoría de conjuntos y, con ello, la noción de función también y así la noción de correspondencia se trasladó a la noción de relación.

Cantor fundamentó una axiomática consistente que permite construir los conjuntos y, posteriormente, establecer el concepto de infinito. Para esto definió el concepto de cardinalidad y conjuntos equipotentes. Dos conjuntos que tienen la misma cardinalidad se dice que son equipotentes. Ello sucede si existe una función definida entre ambos conjuntos, que a cada elemento de uno de ellos le corresponde uno y sólo uno del otro, y viceversa.

Edouard Jean-Baptite Goursat (1858-1936) en 1923 definió función como aparece en muchos libros de hoy en día, esto es:

> Se dice que y es una función de x si, a cada valor de x, le corresponde un único valor de y. Esta correspondencia se indica mediante la ecuación $y = f(x)$ (Sierpinska, 2002).

Pero esta definición no era suficientemente precisa para las exigencias matemáticas de la época. También en esta época vivió el matemático italiano Peano quien en 1911 propone considerar a las funciones como relaciones unívocas. Es decir, Peano partía de las ideas conjuntistas para definir la función (Sierpinska, 2002).

Henri León Lebesgue introdujo una restricción a la definición de la función, puesto que, solo las funciones presentadas analíticamente se empleabas hasta el momento.: "Después de Direchlet, uno está generalmente de acuerdo en decir que existe una función cuando hay correspondencia entre *y*, y los números x_1, x_2, x_3,…,x_n, sin preocuparse del procedimiento que sirve para establecer esta correspondencia, muchos matemáticos parecen no considerar como funciones más que aquellas que son establecidas por correspondencias analíticas" (García, 2013)

Maurice René Frechet (1878- 1973). Fue un matemático francés que en su tesis: *Generalisation de un Theoreme de Weierstrass* generaliza la definición de función como sigue:

> "Supongamos que damos una cierta categoría (elementos cualesquiera, números, superficies, etc.) en la cual se sabe discernir los diferentes elementos. Podemos decir que V_x es una función (operación funcional), uniforme en un conjunto E de elementos de c, si a todo elemento A de E le corresponde un número bien determinada V_x" (García, 2013).

Nicolas Bourbaki (1935) es el nombre colectivo de un grupo de matemáticos franceses que en los años 30 del siglo XX se propusieron revisar los fundamentos de las matemáticas con una exigencia de rigor mucho mayor que la que entonces era moneda corriente en esta ciencia. El grupo fue fundado en 1935 e inició la publicación de sus monumentales *Elementos de Matemática* de acuerdo con el nuevo canon de rigor y el método axiomático, pretendiendo cubrir las bases de todas las matemáticas. Bourbaki define el término función así:

> "Sean *E* y *F* dos conjuntos, que pueden o no ser distintos. Una relación entre un elemento variable *x* de *E* y un elemento variable *y* de *F*, se llama relación funcional en *y*, si para todo $x \in E$, existe un único $y \in F$ el cual está en la relación dada con x. Damos el nombre de función a la operación que, de esta forma, asocia cada elemento $x \in E$ con el elemento $y \in F$ que está en relación con *x*, se dice que *y* es el valor de la función en el elemento *x*, y se dice que la función está definida por la relación dada. Además, dos

> relaciones funcionales equivalentes determinan la misma función" (Sastre, 2008).

Bourbaki también define función como un cierto subconjunto del producto cartesiano *E X F*. Es decir:

> Una función como un subconjunto de pares ordenados de manera muy similar a la de Peano: "Una función del conjunto E en el conjunto F se define como un subconjunto especial del producto cartesiano $E \times F$" (Sastre, 2008).

3.2 DIFERENTES FORMAS DE ENUNCIAR AL CONCEPTO DE FUNCIÓN

De la revisión bibliográfica que se analizó sobre el concepto de función, se encontró cómo este concepto se fue transformando, desde su idealización hasta la definición formal que hoy se conoce. Además, en libros de texto se encontraron definiciones equivalentes pero enunciadas de forma diferente.

James Gregory (1638 - 1675) hizo la distinción entre funciones algebraicas y trascendentes y dio la definición más explícita del siglo XVII de función, como:

> Una cantidad que se obtiene de otras cantidades mediante una sucesión de operaciones algebraicas o mediante cualquier otra operación imaginable (Sastre, 2008, p. 146).

Johann Bernoulli, llamo función de una magnitud variable a una cantidad compuesta de cualquier manera de esta magnitud variable y de constantes (Bernoulli, 1718). En una carta a Leibniz escrita el 2 de septiembre de 1694, describe una función como:

> "Una función es una cantidad formada de alguna manera a partir de cantidades indeterminadas y constantes" (O'Connor, 2013).

Euler publicó en su libro la definió de la siguiente forma:

> "Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier manera a partir de la cantidad variable y de números y cantidades constantes" (O'Connor, 2013).

> Es función de una cantidad variable compuesta como quiera que sea por esa cantidad y números o cantidades constantes (Euler, 2000).

Dirichlet, llegó a formular el concepto función como:

> “*y* es una función de una variable *x*, definida en el intervalo a <*x*< b si a cada valor de la variable *x* en este intervalo corresponde un valor único definido para la variable y entonces *y* se dice que es una función de la variable *x*" (Boyer y Pérez, 1986).

En la revisión de los libros de texto nivel universitario, encontramos definiciones sobre la función enunciadas de forma diferente pero que en un sentido amplio son equivalentes.

> Dados dos conjuntos de objetos, el conjunto *X* y el conjunto *Y*, una función es una ley que asocia a cada objeto de *X* uno y sólo un objeto en *Y*. Al conjunto *X* se denomina el dominio de la función. Los objetos de Y asociados con los objetos de *X*, forman otro conjunto denominado recorrido de la función (Apostol, 2009, p. 62).

> Una función de una sola variable independiente *x* asigna valores *y* a cada valor de *y*. El dominio de la función es la totalidad de valores para los cuales la función está definida. En los casos que más nos interesan, el dominio de la función consiste de uno o vario intervalos. Se dice entonces que es una función de variable continua (Courant y John, 1999, pp. 43-44).

> Una función puede considerarse como una correspondencia de un conjunto *X* de números reales *x*, a un conjunto *Y* de números reales *y*, donde el número *y* es único para cada valor especifico de *x* figura 3.7 (Leithold, 1998, pp. 3-4).

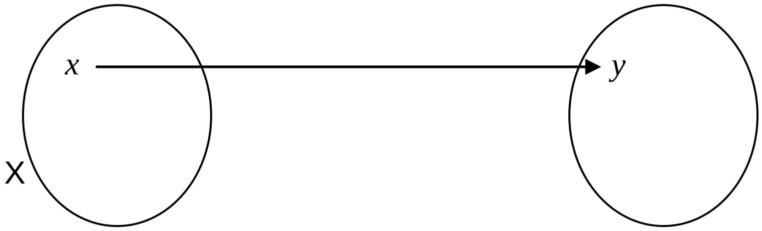


Figura 3.7. Representación de una correspondencia

> Una función es un conjunto de pares ordenados de números *(x, y)* en el que no existe dos pares ordenados diferentes con el mismo primer número. El conjunto de todos los números admisibles de *x* se denomina dominio de la función. Y el conjunto de todos los valores resultantes de *y* recibe el nombre de contradominio de la función (Leithold, 1998, pp. 3-4).
>
> Una función es una regla que asigna a cada uno de los números reales un cierto número real (Spivak, 1996, p. 49).
>
> Una función es un conjunto de pares de números con la siguiente propiedad: si *(a, b)* y *(a, c)* perteneces ambos a la colección entonces *b*=*c*; en otras palabras la colección no debe tener los pares distintos en el mismo primer elemento (Spivak, 1996, p. 60).
>
> Si *f* es una función, el dominio de *f* es el conjunto de todos los a para los que existe algún *b* tal que *(a, b)* está en *f*. Si *a* está en el dominio de *f,* se sigue de la definición de función que existe, en efecto, un número *b* único tal que *(a, b)* está en *f*. Este *b* único se designa por *f(a)* (Spivak, 1996, p. 60).
>
> Una función *f* de un conjunto D a un conjunto E es una correspondencia que asigna a cada elemento *x* de D un elemento único *y* de E (Swokowski, 1989, p. 30).
>
> Una función f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto A, exactamente un elemento, llamado f(x), de un conjunto B. El conjunto A se llama dominio de la función. El número f(x) es el valor de f en x y se lee “f de x”. El rango o recorrido de f es el conjunto de todos los valores posibles de f(x), conforme x varía en todo el dominio. Un símbolo que representa un número arbitrario en el dominio de una función f se llama variable independiente. Un símbolo que representa un número arbitrario en el rango de una función f se llama variable dependiente (Stewart, 2006, p.11).

Es evidente que la noción primitiva de función era mucho más intuitiva mientras que la actual tiene un alto grado de formalización que la hace mucho más abstracta aunque en la mayoría de libros de texto se encuentra la. definición de función como relación entre variable.

Una función es una relación entre variables tal que a cada valor de la primera variable (variable independiente) le corresponde sólo un valor de la segunda variable (variable dependiente). Si *x* representa a la variable independiente, *y* describe a la variable independiente; esto se suele escribir como *y= f(x)* con el fin de representar el hecho de que la variable y está en función, depende, de la variable x.

3.3 FENOMENOLOGÍA DE LA FUNCIÓN

Como se ve en el recorrido sobre la historia, realizado y expuesto, las funciones son objetos que tuvieron la necesidad de desarrollarse por razones externas e internas a la matemática, por lo tanto, al no ser un objeto matemático 'puro' se ha ido reformulando en el tiempo (Ruthing, 1984). Para Freudenthal el concepto matemático de función bien se lo puede atribuir a Leibniz y Bernoulli sin tomar en cuenta a Euler; o bien, decir que los primeros en utilizar el concepto de función fueron Euler y D'Alembert, pero también dice que cualquier concepto matemático no comienza cuando se le da un nombre, sino que comienza desde mucho antes y, como se ha visto, el concepto de función puede remontarse desde los comienzos de la humanidad.

Una segunda dirección para la construcción del componente formal fue a través de una revisión y estudio del análisis fenomenológico sobre el concepto de función que realizó y publicó Freudenthal (1983), a la vez, Puig (1997) desarrolló los rasgos característicos y algunas consecuencias de lo que entendió por análisis fenomenológico de las matemáticas como un componente de su análisis didáctico para la educación secundaria basándose en Freudenthal para ello, Puig lo separó en dos categorías, la primera atañe a la naturaleza de los objetos matemáticos y la práctica matemática, la segunda fue sobre la toma de partido de cuáles son los objetivos que hay que perseguir en la enseñanza de las matemáticas respecto a la naturaleza de los conocimientos matemáticos que se propone que adquieran.

En la tabla 3.1 se resume de manera secuencial el análisis fenomenológico de Freudenthal (1983) y el recorrido que él hace por la historia del concepto. Esta secuencia se expone en los términos del análisis didáctico hecho por Puig (1997); lo que permite conectarse automáticamente a la construcción del componente de enseñanza que se presenta en la siguiente sección.

Tabla 3.1 Fenomenología encontrada del concepto de función.

Categorías para análisis	**Términos**	**Resumen del análisis**	**Otras ideas**
a)	Variables	*Variable* como un fenómeno lingüístico. Significa alguna cosa que realmente varía: físicamente, socialmente, mentalmente, etc. con sentido: matemático, percibido, imaginado, suspendido, etc.	Utilizar variable en un sentido aparte de lo que varía puede causar confusión. Como cuando se trata a las literales en una expresión algebraica.
b)	Dependencia o conexión	De hecho, el verdadero origen de la función está [en] establecer, postular, producir, [o] reproducir dependencia (o conexión) entre variables que ocurren en el mundo físico, social, mental o matemático. (Freudenthal, 1983, p. 494) Conexiones del tipo “a más…” se tiene “más (o menos)…”. Cuando el tiempo interviene en la conexión. En la física ocurren conexiones causales (por atracción, por fricción, por transmisión de calor,…).	Las dependencias pueden pasar a ser objetos mentales. Por ejemplo, colisiones, crecimientos, movimientos, tendencias, etc.
c)	Variables independientes y dependientes	Variables que varían libremente (independientes), variables que varían sujetas a restricciones (dependientes).	Relación (asignación) directa entre ambos tipos de variables.
d)	La función como…	…*un acto (acción) que* a cada elemento de *A* le asigna un elemento de *B.* …*una relación* especial, un subconjunto de parejas cartesianas donde si (a,b) y (a,c) pertenecen al subconjunto, entonces necesariamente b=c. Aunque son definiciones equivalentes desde las matemáticas, no lo son fenomenológicamente hablando. … *autómatas o máquinas*. Vienen a ser equivalentes didácticos para el concepto de función.	Esta definición es antigua y pasada de moda. Esta es moderna y no es didáctica (Freudenthal, 1983, p. 497). Oscurece el sentido de asignación directa. Lo dinámico se pierde, queda estático, pues es una definición abstracta. Una propuesta de

<table>
<tr><th>Categorías para análisis</th><th>Términos</th><th>Resumen del análisis</th><th>Otras ideas</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>Freudenthal para la enseñanza del concepto de función.</td></tr>
<tr><td>e)</td><td>Las funciones en diferentes formas</td><td>En un mapeo, transformación, sucesión, una permutación, un proceso o una operación matemática.</td><td>Mapeos-geometría,
funciones-números
Permutación-función uno a uno.</td></tr>
<tr><td>f)</td><td>Las funciones vistas como funcionales, operadores.</td><td>…<i>funcionales,</i> si en funciones de A a B, B es un conjunto de números.
…<i>operadores</i>, si B es un conjunto de funciones.</td><td>El uso de nuevos términos evita confusiones.</td></tr>
<tr><td>g)</td><td>Tablas</td><td><table><tr><td>X=1</td><td>2</td><td>3 …</td></tr><tr><td>Y=2</td><td>4</td><td>6 …</td></tr></table>Permite ver la asignación directa de las variables dependientes respecto a las independientes.</td><td></td></tr>
<tr><td>h)</td><td>Gráficas</td><td>Considera la función tabla en pequeños conjuntos finitos y los dibuja en el plano cartesiano como una curva, también considera las permutaciones para obtener la función tabla, partiendo de variables dependientes obtiene las independientes.</td><td></td></tr>
<tr><td>i)</td><td>Conexión factual</td><td>Dada una gráfica:
La ordenada como función de la abscisa.
La pendiente en función de la abscisa.
Dada una curva:
La curvatura como función de longitud de arco dado un punto</td><td></td></tr>
<tr><td>j)</td><td>Parámetros y conexiones formales</td><td>Patrón “Como ecuación de”. La circunferencia en función de su radio. Algebraicamente:
x^2-3x+a como función de x
$f(x)=x^2-3x+a$
$x\to x^2-3x+a$
$f_a - definido - por - f_a(x)=x^2-3x+a$
$f(q)=f_q$
Patrón “el _____de”. Desde ejemplos en el habla coloquial como “la temperatura del niño”, “el valor de la moneda”. A</td><td>En las funciones definidas algebraicamente, el uso de parámetros sugiere una dependencia.
La función depende del valor del parámetro a.</td></tr>
</table>

Categorías para análisis	Términos	Resumen del análisis	Otras ideas
		cuestiones matemáticas como "el cuadrado de", "la suma de".	
k)	Funciones matemáticas, con nombre propio	Seno, coseno, logaritmo, etc.	
l)	Significado y uso de la función	Visión matemática. Visión didáctica.	
m)	Notación		
n)	Una vista a través de la historia	Los babilonios conocían la periodicidad de algunos movimientos celestes y eran capaces de hacer interpolaciones. Los griegos conocieron las funciones trigonométricas, aunque la tangente era conocida implícitamente por culturas anteriores. También conocían las funciones lineales pero no tenían notación para expresarlas.	En la introducción se muestra una discusión sobre qué momento puede considerarse el principio del concepto de función, llegando a la conclusión de que eso puede ser subjetivo.
o)	Una vista a través de la genética	Variabilidad como una superficie de la función, variabilidad cualitativa, una estructura más rica, estructuras de secuencia de recuento, función y número cardinal, mapeo geométrico como superficie de una función…	
p)	Didáctica de la experiencia de función	Experiencia, mapeo geométrico, clasificación por parametrización, tiempo como variable independiente, altura como una función, operaciones elementales como función.	
q)	Experiencia de función		
r)	Gráficas	Lectura de gráficas.	

3.4 TOMA DE PARTIDO DE LA DEFINICIÓN SOBRE LA FUNCIÓN

La función es un ente matemático que se fue construyendo a través del tiempo y su estudio matemático comenzó con las matemáticas modernas en el siglo XVII, el concepto fue evolucionando hasta que a comienzos del siglo XIX, se formuló la definición de función como relación entre dos variables, que es la que actualmente se maneja en muchos libros de texto.

Es por ello que una función puede verse como una regla de correspondencia entre dos conjuntos de tal manera que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y sólo un elemento del segundo conjunto.

Función

> Sean A y B dos conjuntos, que pueden o no ser distintos. Una relación entre un elemento variable x de A y un elemento variable y de B, se llama relación funcional en y, si para todo x en A, existe un único y en B, el cual está en la relación dada con x.

CAPÍTULO 4: COMPONENTE DE ENSEÑANZA

Para desarrollar el modelo de enseñanza sobre la función, de acuerdo con la metodología planteada, es necesario aplicar un análisis fenomenológico didáctico al concepto de función. Freudenthal (1983) ha hecho esta tarea y dedica un capítulo completo para mostrar sus resultados en su libro. A la luz del componente de competencia formal y usando el análisis didáctico de Puig, fueron analizados algunos libros de texto usados para la enseñanza del cálculo en diferentes bachilleratos. Ello nos permitió conocer el modelo de enseñanza que guía la enseñanza de este concepto y permitirá hacer una propuesta alternativa que tome en cuenta las categorías encontradas en la fenomenología. Tomando de guía los programas de estudio de la universidad donde se realiza la investigación el componente principal de enseñanza aterriza en el análisis de los libros de texto que se proponen los planes de estudio que contemplan el concepto de la función.

4.1 EL CONCEPTO DE FUNCIÓN EN LOS PLANES Y PROGRAMAS DE ESTUDIO

Hasta hace algunos años, la revisión sobre la problemática del aprendizaje de la función hubiera sido encontrada en estudios con alumnos de los últimos grados del bachillerato o los primeros de nivel universitario que cursaran la materia de cálculo. Sin embargo, en años recientes, la introducción de las TIC al aula preuniversitaria, particularmente el uso de hojas de cálculo en la enseñanza del álgebra en secundaria, han cambiado esta visión de la función como un contenido de los últimos niveles del bachillerato (Kieran, 2006).

En esta investigación, el punto de partida para construir el modelo de enseñanza fue el programa de la materia “Matemáticas Aplicadas a las Tecnologías Alternativas I” que se imparte en el tercer semestre en la carrera de Desarrollo Sustentable con terminal en Tecnologías Alternativas. El tercer punto de dicho programa son las funciones, el objetivo señalado es comprender el concepto de función para aplicarlo a las tecnologías alternativas.

Una vez conocido el objetivo de la materia se llevó a cabo una revisión de los principales libros de texto que se incluyen como bibliografía en el programa de estudios. Tal revisión obedeció a la necesidad de conocer el tratamiento didáctico que dichos libros dan al concepto de función y encontrar, si es que existen, diferentes versiones del concepto de función que aparecen en ellos y que pueden causar a interpretaciones parciales del concepto, tal como lo mencionan algunas investigaciones al respecto por ejemplo Sierpinska (1992) y Sfard (1989), evitando objetos mentales ricos y variados como establece la toma de partida didáctica de Freudenthal (Puig, 1997).

4.2 REVISIÓN DE LIBROS DE TEXTO

Para analizar de los libros de texto se consideraron las categorías que se encontraron en la fenomenología sobre el concepto de función (Tabla 3.1).

Categorías para análisis	Términos
a)	Variables
b)	Dependencia o conexión
c)	Variables independientes y dependientes
d)	La función como…
e)	Las funciones en diferentes formas
f)	Las funciones vistas como funcionales, operadores.
g)	Tablas
h)	Gráficas
i)	Conexión factual
j)	Parámetros y conexiones formales
k)	Funciones matemáticas, con nombre propio
l)	Significado y uso de la función
m)	Notación

Los libros revisados para conocer los modelos de enseñanza, y conocer el planteamiento de cada uno de ellos respecto al concepto de función, fueron seleccionados porque algunos de ellos son los más utilizados en las instituciones de educación superior (Tecnológicos descentralizados y federales del estado de Michoacán) y porque aparecen en la bibliográfica básica del programa de la asignatura "Matemáticas Aplicadas a las Tecnologías Alternativas" que se imparte en la UIIM.

4.2.1 Cálculo con geometría analítica de Earl Swokowski (Ed. 1989)

En el prólogo de este libro se explica que el texto fue elaborado para preparar a los alumnos en temas del cálculo. En el capítulo 1 se trata el tema de función, en la introducción al mismo se indica que uno de los conceptos más importantes de las matemáticas es la noción de función. El nombre de la unidad es “Las funciones y sus gráficas”, con el siguiente contenido:

Números reales.
Sistemas coordenados en dos dimensiones.
La línea recta.
La definición de función.
Operaciones con funciones.

En las secciones anteriores estudian los elementos siguientes: números reales, desigualdades, coordenadas, valor absoluto, distancia entre dos puntos, conjuntos, variables, constantes, dominio, intervalos, gráficas, sistema cartesiano, ecuaciones, la recta.

En la sección de números reales se estudian los conceptos de variables, constantes, dominio, intervalos, desigualdades, etc., pero todos los conceptos son vistos de forma numérica, es decir todo se refiere a los números reales. Sin embargo, al tratar el término de variable, no lo hace con el enfoque descrito en las categorías. Específicamente en la categoría a) o c), sino que dice “Una letra que se usa para representar cualquier elemento de un conjunto dado se llama variable”

(Swokowski, 1988). De acuerdo con la Tabla 3.1, en la categoría a), es decir justamente hace lo que se ha señalado como no recomendable, tratar a la variable como algo aparte sin relacionarlo con ningún tipo de variación.

En la sección siguiente se introduce el plano cartesiano, así como los conceptos de ordenada y abscisa; el trabajo se centra en obtener la distancia entre dos puntos dentro del plano cartesiano y el punto medio entre dos puntos, así como el concepto de gráfica de una ecuación. La parte de gráficas y representación tabular coinciden, aunque mínimamente, con las categorías g), h) e i) de la Tabla 3.1 y sólo parcialmente con las categorías d) y j).

La tercera sección se refiere al tema de la recta tratado desde la geometría analítica, aunque en los ejercicios de práctica se relaciona el tema con el contexto de la vida diaria.

La sección que corresponde a la función se introduce con el tema de correspondencia por medio de enunciados que reflejan asociación de objetos comunes y representándolos con diagramas, algo cercano a lo que se menciona la categoría j) de la tabla 3.1. Finalmente presenta la definición de función así:

> Una función *f* de un conjunto D a un conjunto E es una correspondencia que asigna a cada elemento *x* de D un elemento único *y* de E. (Swokowski, 1989, p. 30)

Esto es, define la función en términos conjuntistas como una relación especial (Tabla 3.1 d) Durante el desarrollo del tema, destaca la utilidad del concepto en la matemática, un acercamiento “informal” y la introducción de la notación *f* para representar una función y *f(x)* para representar un elemento particular Tabla 3.1 categoría m).

Dentro de la explicación del concepto de función se introducen los conceptos de dominio y contradominio. Los ejercicios que resuelven se refieren a aplicaciones prácticas de la vida cotidiana y finalmente introducen el concepto de gráfica de una función. Sin embargo, los ejercicios que se presentan en las secciones requieren de conocimientos más avanzados que los alumnos aún no poseen, considerando que el material está dirigido a alumnos de primeros semestres de universidad.

En resumen, los objetos mentales asociados al de función que integra el libro de Swokowski están restringidos a conjuntos de números que se representan gráficamente como pares ordenados estáticos y que no reflejan el sentido de variación. No aparece nada a lo que incluyen las categorías b), e), f) y l) de la Tabla 3.1.

Tabla 4.1. Resumen del análisis para el libro Cálculo con geometría analítica de Earl Swokowski, respecto a las categorías encontradas en la fenomenología.

a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)	j)	k)	l)	m)
No	No	No	Parcial	No	No	Mínimo	Mínimo	Mínimo	Parcial	No	No	Sí

4.2.2 Calculus I de Tom Apostol (Ed. 2006)

En el prólogo de este libro se menciona que hay diferentes posicionamientos para introducirse al tema del cálculo y que este libro trata el tema desde el punto de vista deductivo, pero que también se abordan las aplicaciones físicas. Además, comienza con el desarrollo histórico del cálculo.

El primer capítulo del libro se titula Introducción y la primera sección del mismo se llama Introducción Histórica; en ésta, el autor habla de los dos problemas históricamente fundamentales del cálculo: encontrar la tangente a una curva en un punto dado y encontrar el área bajo una curva. Como en este libro se trata primero los problemas del cálculo integral y luego el diferencial, el autor presenta el método de exhaución para obtener áreas bajo curvas como la introducción histórica al cálculo.

Posteriormente el autor introduce conceptos fundamentales de la teoría de conjuntos, luego habla de los axiomas y teoremas de los números y, por último, el método de inducción y la notación de sumatorias.

La primera unidad “Los conceptos del cálculo integral” consta de cuatro partes con los temas necesarios para desarrollar las siguientes unidades. En la segunda unidad es donde aparece el concepto de función con el siguiente índice:

Las ideas básicas de la geometría cartesiana.
Funciones. Ideas generales y ejemplos.
Funciones. Definición formal como conjunto de pares ordenados.
Más ejemplos de funciones reales.
Ejercicios.

En la primera sección esté libro introduce los conceptos de ejes cartesianos, coordenadas de un punto, abscisa y ordenada, así como ejemplos de gráficas de ecuaciones, tocando los temas descritos en la Tabla 3.1 categorías f) y g).

En la segunda sección las relaciones entre los elementos de dos conjuntos están presentes y también se comenta que algunas de estas relaciones son lo que los matemáticos denominan funciones, la relación especial de la Tabla 3.1 categoría d). En el libro se menciona que el término función fue usado primeramente por Leibniz, aunque afirma que éste “tenía un alcance muy reducido” (Apostol, 2006, p. 62).

Casi inmediatamente menciona que la definición formal de función como un subconjunto de producto cartesiano:

> Dados dos conjuntos de objetos, el conjunto *X* y el conjunto *Y*, una función es una ley que asocia a cada objeto de *X* uno y sólo un objeto en *Y*. Al conjunto *X* se denomina el dominio de la función. Los objetos de Y asociados con los objetos de *X*, forman otro conjunto denominado recorrido de la función (Apostol, 2006, p. 62).

Después explica la notación que utilizará y comenta que hay dos maneras esquemáticas de ver una función. Su explicación la acompaña de la imagen que se muestra en la Figura 4.1.

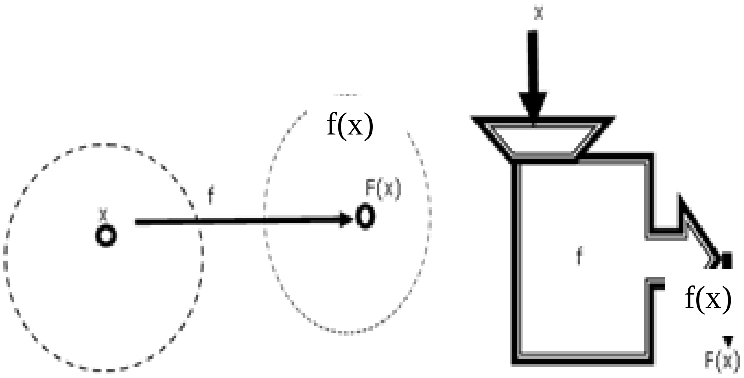


Figura 4.1 Representación esquemática del concepto de función. Tomada de Apostol, 2006, pág. 63).

En éste libro también se explica que hay dos formas esquemáticas de considerar una función: por un lado, como una asignación de elementos de un conjunto a otro y como una máquina, a la manera descrita en la Tabla 3.1 categoría d). Sin embargo, la imagen de la función como una máquina es abandonada por completo en el resto de la unidad y del libro.

También menciona que las funciones se pueden graficar y da ejemplos de funciones de variables reales e introduce lo que denomina la definición formal de función.

> Una función *f* es un conjunto de pares ordenados *(x, y)* ninguno de los cuales tiene el mismo primer elemento. Si *f* es una función, el conjunto de todos los elementos *x* que aparecen como primeros elementos de pares *(x, y)* de *f* se llama el dominio de *f*. El conjunto de los segundos *y* se denomina recorrido de *f* o conjunto de valores de *f* (Apostol, 2006, p. 65).

Con estos elementos, el libro de Apostol inicia el estudio del cálculo integral. Como se puede ver, el objeto mental de función que él forma es muy abstracto y matemático, además de poco dinámico. Las definiciones que ofrece, tanto en la página 62 como 65 son las que Freudenthal encuentra poco didácticas y estáticas.

Tabla 4.2. Resumen del análisis para el libro Calculus I de Tom Apostol, respecto a las categorías encontradas en la fenomenología.

a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)	j)	k)	l)	m)
Mínimo	Mínimo	Mínimo	Si	Parcial	Si	No	Si	Si	Si	Si	Parcial	Sí

4.2.3 Cálculo infinitesimal de Michael Spivak (Ed. 1996)

Este libro está dirigido al cálculo infinitesimal como su nombre lo indica, profundiza los conceptos básicos de lógica desde las matemáticas. El libro está organizado en veintinueve capítulos divididos en cinco partes. Los que interesan para los fines de esta tesis son:

Parte I Prólogo
Propiedades básicas de los números
Distintas clases de números
Parte II Fundamentos
Funciones
Apéndice. Pares ordenados
Gráficas

Así, el libro inicia con un tratado axiomático de los números y la siguiente sección está redactada sobre los diferentes números donde se presenta el principio de inducción matemática y el uso de las sumatorias, como lo hace también el libro de Apostol revisado anteriormente.

En la introducción al capítulo 3, Spivak menciona que la función es sin duda el concepto más importante de todas las matemáticas. También dice que el concepto de función es de una gran generalidad, pero que basta estudiar la función de una sola clase para comenzar el tema e incluso comienza por expresar una definición que denomina *provisional* del concepto, la cual tiene el carácter de acción, de acuerdo a la Tabla 3.1 categoría d).

> Una función es una regla que asigna a cada uno de los números reales un cierto número real (Spivak, 1996, p. 49).

Spivak menciona que no se puede avanzar en el estudio si no se introduce una notación y utiliza algunos párrafos para introducir y ejemplificar su notación, categoría m) de la Tabla 3.1. Después de muchos ejemplos y ejercicios prácticos usando la definición provisional presenta una segunda definición, esta vez la de relación especial de la Tabla 3.1 categoría d):

> Una función es un conjunto de pares de números con la siguiente propiedad: si *(a, b)* y *(a, c)* pertenecen ambos a la colección entonces *b*=*c*; en otras palabras la colección no debe tener los pares distintos en el mismo primer elemento (Spivak, 1996, p. 60).

Pero a continuación expone una tercera definición formulada con rigor matemático que expone dos definiciones a la vez; función y dominio.

> Si *f* es una función, el dominio de *f* es el conjunto de todos los *a* para los que existe algún *b* tal que *(a, b)* está en *f* . Si a está en el dominio de *f* se sigue de la definición de función que existe, en efecto, un número *b* único tal que *(a, b)* está en *f*. Este *b* único se designa por *f(a)* (Spivak, 1996, p. 60).

Esta última parece combinar la función como acción y como relación especial. Sobre ella Spivak subraya la importancia de que para todo *x* en el dominio, sepamos quién es *f(a).* Todo el capítulo 3 se enmarca únicamente sobre la función, después de las definiciones se proponen una serie de ejercicios muy matemáticos. Este libro no podría tomarse como libro de texto en los primeros semestres de la universidad ya que requiere de una madurez de conceptos matemáticos.

Spivak menciona que la mejor manera de presentar una función es mediante dibujos por lo que el capítulo 4 se dedica a las gráficas y en él presenta muchos ejemplos de funciones con sus gráficas, tocando las categorías g), h) y, parcialmente, i) de la Tabla 3.1.

Tabla 4.3. Resumen del análisis para el libro Cálculo infinitesimal de Michael Spivak, respecto a las categorías encontradas en la fenomenología.

a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)	j)	k)	l)	m)
No	No	No	Sí	Sí	Sí	Sí	Si	Parcial	Sí	Sí	Parcial	Sí

4.2.1.4 El cálculo EC7 de Louis Leithold (1998)

El capítulo 1 del texto de Leithold incluye la introducción al concepto de función; la unidad se llama “Funciones, límites y continuidad” y parte de su contenido es:

Funciones y sus gráficas.
Operaciones con funciones y tipos de funciones.
Funciones como modelos matemáticos.

En el comienzo de la unidad se menciona la importancia del concepto de función al utilizarlo como un concepto unificador, por lo cual, los autores le dedican las primeras dos secciones para su estudio. La sección 1, está dirigida a las variables dependientes y se dan ejemplos de la vida cotidiana; por ejemplo, el salario de una persona depende de las horas que trabaja, etc. Pero sin mencionar en concreto la definición de variables dependientes ni tampoco independientes, el texto continúa con la siguiente definición (tipo acción y relación especial de acuerdo con la Tabla 3.1):

> Una función puede considerarse como una correspondencia de un conjunto *X* de números reales *x*, a un conjunto *Y* de números reales *y*, donde el número *y* es único para cada valor especifico de *x* Figura 4.2. (Leithold, 1998, p. 27).

Figura 4.2. Representación de una correspondencia (Leithold, 1998, p. 27).

Como definición intuitiva, utiliza el ejemplo de la ecuación $y = x^2$, mediante una tabla de dos columnas una para los valores del conjunto *X* y otra para los valores del conjunto *Y*. En ese mismo ejemplo indican que el dominio y el contra-dominio de la función son los valores que se encuentran en las columnas de *X* y *Y,* respectivamente. Después incluyen algunos ejemplos mostrando el dominio y contradominio de algunas funciones con miras a introducir el concepto de conjunto de pares ordenados, procediendo con la definición de función siguiente:

> Una función es un conjunto de pares ordenados de números *(x, y)* en el que no existe dos pares ordenados diferentes con el mismo primer número. El conjunto de todos los números admisibles de *x* se denomina dominio de la función. Y el conjunto de todos los valores resultantes de *y* recibe el nombre de contradominio de la función (Leithold, 1998, pp. 3-4).

Después de esta definición, puramente del tipo relación especial, continúan con ejemplos, en éste libro se mencionan los términos variable dependiente e independiente y comenta acerca de la notación que dice es la que usaba Euler. Posteriormente se encuentra una definición de la gráfica de una función y subraya que la gráfica de una función es la misma que la gráfica de la ecuación *Y = f(x).* Explica entonces la implicación geométrica que permite decidir si una gráfica corresponde a una función o no. Si cualquier recta vertical la corta en un solo punto.

Tabla 4.4. Resumen del análisis para el libro El cálculo EC7 de Louis Leithold, respecto a las categorías encontradas en la fenomenología.

a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)	j)	k)	l)	m)
Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Parcial	Parcial	Parcial	Sí	No	Parcial	Parcial

4.2.1.5 Introducción al cálculo y al análisis matemático de Courant y John (1999)

El capítulo 1 de este libro comienza con la introducción seguida de ocho subtemas y el segundo se refiere al concepto de función. Previamente, en la primera sección se trata el tema del continuo de los números; números naturales, racionales, reales, etc. introducen el tema de intervalos, fracciones decimales y desigualdades. En el subtema "el concepto de función" contiene los siguientes incisos:

Función gráfica
Definición del concepto de funciones de una variable continúa.
Dominio y rango de una función.

Representación gráfica.
Funciones monótonas.
Continuidad.
El teorema del valor intermedio.
Funciones inversas.

El tema comienza con una introducción histórica de la función y aclaran que el texto trata sobre las funciones en sentido matemático y mencionan la conexión que existe con otras disciplinas por ejemplo con las ciencias naturales, la mecánica y otros campos del conocimiento. En el libro se menciona que las relaciones funcionales van mucho más allá que simplemente el sentido matemático y se mencionan ejemplos dando una ley funcional expresada en una fórmula. En la redacción del libro se menciona a las variables dependientes e independientes de forma intuitiva y de la misma forma se hace sobre la función como una dependencia entre variables (Tabla 3.1 categorías a) y b)).

En seguida introducen un tema llamado función-gráfica, donde se dice que las variables pueden ser tratadas como coordenadas de un punto y de forma intuitiva introducen los términos de conjunto, dominio e imagen. En esta sección se hace hincapié sobre la variación libre de la variable independiente, categoría c) de la Tabla 3.1, aunque sobresale que a veces las variables independientes no pueden tomar cualquier valor.

En este libro se observan varios ejemplos de funciones de diferentes tipos, estudiando su rango. Algunos de estos ejemplos corresponden a mapeos o a transformaciones, algunas de las formas mencionadas en la Tabla 3.1 categoría e). La definición de función se encuentra en términos de una sola variable continua, junto con el dominio y rango y se trata de una definición de acción según la Tabla 3.1 categoría c).

> Una función de una sola variable independiente x asigna valores y a cada valor de y . El dominio de la función es la totalidad de valores x para los cuales la función está definida. En los casos que más nos interesan, el dominio de la función consiste de uno o varios

intervalos (ver figura 4.3). Se dice entonces que y es una función de variable continua (Courant y John, 1999, pp. 44-46).

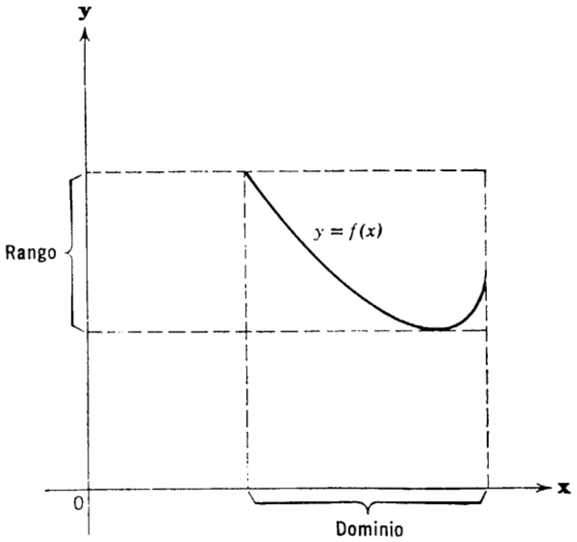


Figura 4.3. Tomada de Courant y John, 1999, p. 46).

Posteriormente se hace mención de las gráficas de funciones y sus características categoría h) de la Tabla 3.1 y terminan dando ejemplos de ciertos tipos de funciones: monótonas, pares, impares.

Tabla 4.5. Resumen del análisis para el libro Introducción al cálculo y al análisis matemático de Courant y John, respecto a las categorías encontradas en la fenomenología.

a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)	j)	k)	l)	m)
Sí	Sí	Sí	Sí	Parcial	Sí	No	Sí	No	Parcial	Sí	Parcial	Sí

4.2.3 Resumen del análisis de los libros de texto

Varios de los autores de los libros analizados mencionan la importancia del concepto de función. Sin embargo, no se detienen mayormente en su estudio y no hacen suficiente hincapié en los conceptos de variación, dependencia e independencia, conexión, variable y otros más; tampoco enfatizan las diferentes formas de las funciones ni muchos otros elementos que aparecen en la Tabla 3.1.

El objetivo de la aplicación de fenomenología didáctica a los conceptos matemáticos es conocer los fenómenos que dieron origen a su creación, las relaciones entre estos fenómenos, a qué otros fenómenos dan lugar los fenómenos previos y sus relaciones y así sucesivamente, con el fin de apoyar a los alumnos a recrear el proceso de desarrollo de los conceptos.

Desde este punto de vista, los contenidos de libros de texto analizados no favorecen tal recreación. Esto se puede deber a que en todos los casos se presupone que los conocimientos previos al de función están sólidamente construidos en los estudiantes que inician sus carreras profesionales y se abordan de manera breve sobre el concepto de función para iniciar los siguientes temas del cálculo.

Los modelos de enseñanza de referencia, los que están en los libros de texto, no toman en consideración la situación real de los alumnos ni las dificultades cognitivas que ellos enfrentan cuando estudian estos temas, es decir, sus modelos de actuación. Sobre este tema trata el siguiente capítulo.

Tabla 4.6. Resumen del análisis de los libros de texto referente a la fenomenología encontrada del objeto mental función e identificada con las categorías de la tabla 3.4.1.

# Libro	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)	j)	k)	l)	m)	Predomina
1	D	D	D	B	D	D	C	C	C	B	D	D	A	D
2	C	C	C	A	B	A	D	A	A	A	A	B	A	A
3	D	D	D	A	A	A	A	A	B	A	A	B	A	A
4	A	A	A	A	A	A	B	B	B	A	D	B	B	A
5	A	A	A	A	B	A	D	A	D	B	A	B	A	A

A =Si, B=Parcial, C=Mínimo, D=No

Nomenclatura de la tabla:

Número del libro	Nombre del libro	Autor
1.	Cálculo con geometría analítica	Earl Swokowski
2.	Calculus I	Tom Apostol
3.	Cálculo infinitesimal	Michael Spivak
4.	El cálculo EC7	Louis Leithold
5.	Introducción al cálculo y al análisis matemático	Courant y John

Categorías para análisis	**Términos**
a)	Variables
b)	Dependencia o conexión
c)	Variables independientes y dependientes
d)	La función como…
e)	Las funciones en diferentes formas
f)	Las funciones vistas como funcionales, operadores.
g)	Tablas
h)	Gráficas
i)	Conexión factual
j)	Parámetros y conexiones formales
k)	Funciones matemáticas, con nombre propio
l)	Significado y uso de la función

CAPÍTULO 5: COMPONENTE DE ACTUACIÓN

El componente de actuación se refiere a la observación de los profesores e investigadores acerca de cómo los alumnos enfrentan las tareas matemáticas propuestas en el aula, y reunir información sobre las dificultades a las que se enfrentan los alumnos en torno al concepto que se esté trabajando, en este caso, sobre el concepto de función. La información se puede recabar de reportes de investigaciones, de intervenciones exploratorias del investigador, o producto de la propia práctica docente.

En México, desde hace más de diez años, los programas de matemáticas para la educación secundaria incorporan el uso de tablas y gráficas y procesos de cambio como contenidos de las matemáticas, incluso se mencionan temas de funciones lineales y se trabaja con ellas desde primero de secundaria. Por ello que la construcción de un modelo de cognición, para este concepto, ha llevado a revisar la literatura que da cuenta de las principales dificultades para el aprendizaje del concepto de función en alumnos de secundaria y no sólo de los que corresponden a alumnos de niveles de escolaridad más alto ya que los estudios aquí reseñados permiten tener una perspectiva de lo que sucede antes de que los alumnos lleguen a la universidad.

Sierpinska (1992) hace un análisis epistemológico del concepto de función, apoyándose en ocasiones en la historia del concepto. A través de su análisis detecta algunos obstáculos epistemológicos y de ellos deriva recomendaciones didácticas. El primero de estos obstáculos puede ser aplicado al estudio de las matemáticas en general ya que se refiere a la creencia de que las matemáticas no tienen relación con la vida real y que las técnicas de cómputo y cálculo no merecen ser objeto del estudio de las matemáticas. Ante ello, la autora contrapone, para el caso de la función, la identificación de situaciones de cambio en el entorno de los alumnos así como la identificación de regularidades en esos cambios. Le parece muy importante guiar al estudiante para que cambie su foco de observación cuando se estudian fenómenos en los que ocurren cambios. Ella afirma que los alumnos se enfocan en el cambio. Por ejemplo, en el movimiento de un móvil, cómo se desplaza de un lugar a otro; sin embargo ellos no analizan qué es lo que cambia o cuáles son los objetos cambiantes. En el caso del ejemplo mencionado, el estudiante ve el movimiento globalmente y no los cambios del objeto durante el transcurso del tiempo.

Otras recomendaciones didácticas que hace a partir de su análisis epistemológico son estimular actividades en la clase que permitan:

- Distinguir entre valores conocidos y variables.
- Discriminar entre variables dependientes e independientes. En ocasiones los alumnos creen que el orden entre ambas no tiene importancia.
- Presentar ejemplos en los que aparezcan distintas variables independientes, además del tiempo.
- Distinguir entre números y cantidades, estas últimas estarán relacionadas con fenómenos físicos o cotidianos, los números son una abstracción.
- Discriminar entre una función y la herramienta analítica utilizada para describirla.
- Distinguir entre una definición (de función) y una descripción.
- Discriminar entre función y relación; función y sucesión; funciones y relaciones de causalidad.
- No introducir el estudio de la función como una relación especial, o como subconjunto de parejas ordenadas particular, sino hasta el nivel universitario.

5.1 APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN EN LA SECUNDARIA

Muchas de las dificultades para el aprendizaje del concepto de función tienen lugar en la etapa transitoria, esto es, la etapa cuando el concepto se especifica mediante una definición formal a través de la deducción lógica (Guershon y Dubinsky, 1992; Artigue, Douady, Moreno y Gómez, 1995; García, Vázquez e

Hinojosa, 2004) a diferencia de la etapa inicial, la cual corresponde a la enseñanza del concepto de una manera intuitiva o basada en la experiencia. Parte de los estudios sobre el concepto de función han hecho una distinción entre una visión operacional del concepto y una visión estructural (Sfard, 2001). La visión operacional implica cálculos y operaciones, esto es, dinámica, La visión estructural se refiere al producto de procesos de pensamiento formales esto es, más estática.

La enseñanza del concepto de función en México comienza en los programas de educación secundaria en donde se trabaja con la noción de cambio o proporciones, las representaciones tabulares y/o gráficas. Hasta 2016, a nivel Bachillerato en México, no existían programas y contenidos de estudio de matemáticas uniformizados. Esto implica que algunos programas le dan importancia al concepto de la función y otros no tanta (CECYTES, COBAEM, COBACH, etc.).

Sfard (2001) ha señalado que, durante el aprendizaje de conceptos matemáticos, el paso de una visión operativa a una estructural es difícil para alumnos de secundaria y que no hay mucha claridad sobre cómo apoyarlos para hacer esta transición de manera favorable, particularmente en el caso de la función. La misma autora enfatiza que el concepto de función, como el de número y otros, ha sido construido a lo largo de muchos años en la historia de la humanidad e iniciando con aspectos operacionales, mucho antes de que la definición conceptual estructural sea elaborada. Así, la autora hace recomendaciones didácticas para el estudio de conceptos matemáticos como el de función, sugiriendo que se debe iniciar para alumnos de secundaria con un nivel operativo y seguir con él mientras sea suficiente para el estudiante. Opina que, cuando se inicia el estudio de la función con definiciones estructuradas de la función, como el de conjunto la de parejas ordenadas (Bourbaki) se corre el peligro de que el estudiante adquiera nociones pseudo estructurales, por ejemplo, asociarlas con una fórmula algebraica, lo cual puede ser operacional ya que lo ven como una regla o algoritmo de cálculo o bien estructural si se considera como una relación estática entre variables (Sfard, 1992).

Dubinsky y otros investigadores (Selden y Selden, 2005) hacen una distinción más refinada en cuanto a la naturaleza de los conceptos matemáticos. Para esto, ellos distinguen cuatro etapas: acción, proceso, objeto y esquema. En el caso del concepto de función, la primera es verla como una fórmula que indica algunos cálculos que deben hacerse; en la segunda visión se ve un proceso en el que un valor de entrada da lugar a uno de salida (input-output); en la tercera, el concepto se ve como un objeto y ya se puede iniciar una reflexión sobre cómo operar con él o actuar sobre él. Por último, el esquema es una visión global de los tres anteriores, algo parecido a lo que Tall y Vinner (Selden y Selden, 2005) llaman concepto imagen o, para los fines de esta tesis y desde la fenomenología didáctica, un objeto mental enriquecido en el sentido de Freudenthal.

Para comprender mejor las dificultades inherentes al concepto de función, puede considerarse el hecho de que este concepto se ha venido desarrollando desde tiempos de Leibniz (Siglos XVII y XVIII), aunque sus antecedentes se remontan a la antigüedad. La culminación del desarrollo de este concepto puede situarse en el momento de su definición conjuntista abstracta por Bourbaki (grupo de académicos en 1939), que es la que más se utiliza en los libros de texto. Esto, desde el punto de vista de la fenomenología didáctica, resulta contraproducente en términos educativos como se explica a continuación.

Freudenthal (1983) en su análisis fenomenológico del concepto retoma la definición de función en términos de variables dependientes e independientes y reconoce que ésta parece anticuada y pasada de moda pero aun así enfatiza dos tipos de variaciones, una libre y otra limitada por una restricción. También revisa una serie de conceptos que son funciones que se usan en otras ramas de las matemáticas con otros nombres, como son los mapeos y transformaciones en geometría; y subraya en ellos el carácter claramente las variaciones, de cambio y transformación. Finalmente, menciona que la definición en términos de un subconjunto de un producto cartesiano, que tras el auge de la teoría de conjuntos se consideró mejor para la instrucción por ser básica en los fundamentos más teóricos y puros de las matemáticas y, según sus defensores, más sólida que la de acto (ley) de asignación, ha sido una tiranía de la cual la enseñanza de las matemáticas aún no se repone.

Sin embargo, estas diferentes visiones quizás no son tratadas con profundidad en la escuela secundaria de los Estados Unidos de América (de 7° a 11° grados) en general; de hecho, no son tratadas así en la mayoría de las escuelas mexicanas, de modo que la transición al nivel universitario de educación carece de un puente o presenta una discontinuidad (Selden y Selden, 2005).

5.1.1 Dificultades en el aprendizaje de la función a nivel universitario

Respecto a las dificultades de aprendizaje del concepto de función a nivel universitario, se encontró que varios autores (Da Ponte y Chapman, 2006; Norman, 1992) mencionan que la falta de un conocimiento profundo de las funciones ocurre con alumnos que estudian para maestros de educación básica, así como para los mismos maestros de secundaria. En un estudio con diez estudiantes para maestro de secundaria (Norman, 1992), en el que todos los alumnos tenían fuertes antecedentes matemáticos, sólo uno de ellos pudo dar una definición formal de función; aunque varios fueron capaces de dar varios ejemplos y definiciones informales.

En general los futuros maestros prefirieron las definiciones informales y las representaciones gráficas o numéricas antes que las simbólicas. A veces exhibían una sola representación o tenían una fijación por ella; en general no habían construido conexiones entre sus definiciones informales y su visión de una definición formal; se desempeñaban bien al identificar ejemplos de funciones en situaciones simples pero no en situaciones más complejas o de la física; conocían bien la trayectoria de enseñanza para la función que aparece en los libros de texto que usan y parecen confortables con los acercamientos tradicionales para la introducción y el desarrollo del concepto de función en escenarios escolares.

En general las dificultades detectadas en alumnos universitarios son, muchas veces, muy semejantes a las que tienen alumnos de secundaria. La diferencia estriba en que en la universidad los programas de estudio incluyen más contenidos relacionados con el concepto de función, con vistas a seguir avanzando con el concepto y seguir hacia temas como límites o continuidad.

Es muy probable que lo descrito en los párrafos anteriores también suceda en México y ello es preocupante. Con estos antecedentes son formados los alumnos en la secundaria y arrastrando estas dificultades llegan a la universidad, donde el concepto de función adquiere una importancia primordial.

5.1.2 Investigaciones internacionales

Una síntesis de los resultados reportados por investigaciones acerca de las dificultades para los alumnos de secundaria y universitarios, e incluso para algunos maestros, con el concepto de función son:

- Tener preferencia por algunos prototipos gráficos. Por ejemplo, creer que toda función cuadrática debe cortar al eje de las abscisas en dos puntos porque tiene dos raíces (Presmeg, 2006).
- Kieran (2006) también menciona hallazgos de diferentes investigadores que han encontrado que los alumnos tienden a usar las representaciones prototípicas para las funciones lineales y cuadráticas.
- Creer que una función no puede tener una representación gráfica por pedazos (Confrey y Kazak, 2006). Se acepta como función una curva a pedazos si cada pedazo del dominio es regular, como un intervalo o una fracción de intervalo, pero no un punto singular. Tampoco se acepta como función a una regla de correspondencia que tenga alguna excepción (Vinner, 2002).
- Creer que si no hay manipulación de valores y cálculos, no puede tratarse de una función (Guershon y Dubinsky, 1992).
- Creer que una función debe ser una fórmula, ecuación o expresión algebraica y en que la correspondencia que constituye la función debe

ser sistemática y bien definida por una regla. Esto es, una relación aleatoria no se considera función (Vinner, 2002).

- No entender la necesidad de la notación formal al trabajar con hojas de cálculo u otros medios computacionales, ocasionando otras dificultades en el aprendizaje de las funciones (Presmeg, 2006).
- Tener dificultades para pasar de una representación de función a otra. (Un estudio con alumnos para maestro reporta este caso, Da Ponte y Chapman, 2006). Los alumnos identifican una función sólo con uno de sus modos de representación: una gráfica, un diagrama de conjuntos o una combinación de letras de la forman $y=2x$ (Vinner, 2002).
- Confundir la restricción de relación unívoca y aplicarla al dominio también. No aceptar como función una función que no es inyectiva (Guershon y Dubinsky, 1992; Vinner, 2002).

Algunos de los estudios anteriores y otros más exponen algunas estrategias que han resultado de provecho para el estudio del concepto de función. Por ejemplo, para Schwarz y Hershkowitz (1999), las calculadoras gráficas y otras herramientas como programas computacionales resultaron positivas para el aprendizaje de las funciones y sus atributos en alumnos de tercero de secundaria. Sin embargo, para otros, las hojas de cálculo han probado ser efectivas para iniciar el “viaje de aprender álgebra, pero no de completarlo” (Kieran, 2006).

También se reporta como provechoso el uso de las TIC con programas que permitan la interacción entre diferentes representaciones de las funciones (Ferrara, Pratt y Robutti, 2006).

El uso de representaciones kinestésicas, en donde los alumnos hacen actividades físicas que después representan con modelos matemáticos (Ferrara, Pratt y Robutti, 2006) ha sido beneficioso para algunos estudiantes.

Algunos investigadores han utilizado con sus estudiantes actividades que mezclan las visiones operativa y estructural y problemas que requieren pasar de una a otra para su resolución y han detectado avances en la transición operativa-estructural, aunque no por completo (Sfard, 1992).

Se han reportado avances a través del uso de artefactos, como las máquinas para dibujar, usando una perspectiva histórica y relacionando la geometría y el álgebra (Confrey y Kazak, 2006).

Eisenberg y Dreyfus (1991) mencionan la importancia de trabajar con la visualización y representaciones gráficas de las funciones, pero no sólo por tener muchas representaciones o por lo visual, sino porque dichas representaciones ilustran al concepto (de función) en un contexto.

Vinner (2002) recomienda desarrollar el razonamiento, en un curso de cálculo en particular recomienda que no sólo se pida identificar funciones en una serie de situaciones, sino siempre preguntar, por ejemplo: ¿por qué esto es (o no) un ejemplo de función? También recomienda presentar y pedir ejemplos y contraejemplos, aunque advierte que aplicar una definición para discriminar ejemplos y contraejemplos es una tara ardua para los alumnos y difícil de alcanzar en poco tiempo.

A nivel universitario, Guershon y Dubinsky (1992) y Schwingendorf, Hawks y Beineke (1992), realizaron estudios comparando los logros de alumnos universitarios. Dubinsky y Guershon realizaron entrevistas a 13 de 22 alumnos participantes en un curso donde se les dio un tratamiento instruccional sobre el concepto de función, usando un lenguaje de programación que los mismos autores desarrollaron. Para las entrevistas los autores fueron cuidadosos al diseñar sus cuestionarios; por ejemplo, en el caso de una pregunta que plantea si las situaciones presentadas podrían describir una o más funciones, ellos plantean 24 situaciones de modo que entre ellas se cubrieran ocho contextos distintos:

- Procedimientos con el lenguaje de programación que valoran lo operativo y un nivel de pre-función.
- Sucesiones finitas que valoran una concepción de función como proceso en cuanto a que cada elemento se ve relacionado a su posición.

- Cadenas de caracteres, que valora lo mismo que la sucesión, pero cuesta más trabajo a los alumnos, porque la cadena de caracteres es una sucesión, pero relaciona la posición o entrada (input) con una letra o letras (output) y esta diferencia, más psicológica que matemática afecta a los alumnos.
- Gráficas en las que es difícil percibir una concepción de función como acción, pero las dificultades con estos ítems muestran que no hay una concepción de función como proceso.
- Conjuntos de parejas de valores que detectan cuando los alumnos confunden a la función con el proceso de construir las parejas.
- Tablas de dos columnas, que detectan si los alumnos pueden concebir una función en la que no hay una regla de asociación sugiriendo que no pueden despegarse de su concepción de función como una acción.
- Ecuaciones que detectan una concepción de la función como un proceso cuando los alumnos las aceptan aún cuando en la expresión, la variable dependiente no aparezca despejada sola del lado izquierdo.
- Enunciados (descripciones vagas de situaciones físicas o geométricas).

Los autores encontraron que algunos alumnos, cuando no pueden manipular o calcular, no consideran el ejemplo como una función; los alumnos logran cierta autonomía para construir procesos siempre que haya un algoritmo visible, así no cualquier subconjunto de parejas ordenadas es una función para ellos aun cuando cumpla el requisito de que no hay dos ordenadas distintas para una misma abscisa. Por otro lado, su modelo de enseñanza consiguió hacerlos reconocer como funciones a las no inyectivas y a aquellas cuya gráfica es por pedazos.

Algo muy parecido realizan Schwingendorf, Hawks y Beineke (1992). A un grupo (A) se le impartió el curso usando material desarrollado por Schwingendorf y Dubinsky, aunque el texto utilizado en el curso no fue el desarrollado por dichos autores para su modelo de enseñanza, sino el mismo libro tradicional que llevó el otro grupo (B) con el modelo de enseñanza tradicional.

Los autores intentaron medir lo que llaman crecimiento horizontal y vertical. El primero es lo que Tall y Bakar (1992) denominan concept-imagen (cercano a la idea de objeto mental de Freudenthal) y el vertical sería el entendimiento formal (cercano a la idea de un concepto de acuerdo con Freudenthal).

Los autores encuentran avances en los dos grupos, en ambos hay más respuestas correctas en preguntas relacionadas con el crecimiento vertical, pero 25% del grupo que usó el lenguaje de computación son capaces de explicar sus respuestas mientras en el otro grupo ninguno puede hacerlo. En cuanto al crecimiento horizontal, los alumnos del grupo A llegan a explicar sus respuestas con más claridad, por ejemplo, cuando se les presenta la ecuación $x^2+y^2=1$ son capaces de explicar que si se restringe el dominio, la expresión sí corresponde a una función, mientras que los alumnos del grupo B dicen que sí es una función, así tal y como está. De cualquier manera, encuentran que su diseño instruccional requiere ajustes para alcanzar mejores logros. Para empezar, cambiarían el libro de texto por los materiales explícitamente diseñados para trabajar con su lenguaje de programación.

5.1.3 Investigaciones nacionales

Otras investigaciones sobre el concepto de función, llevadas a cabo con otros alumnos en diferentes lugares de México, han detectado las mismas problemáticas, por ejemplo, la de Del Castillo y Montiel (2007) quienes mencionan el problema que tienen los alumnos para entender el concepto de función como una relación entre variables.

Sin embargo, quizás el problema no sólo sea que el concepto de función es complejo o que los maestros o textos no lo ensenan bien, también es importante reflexionar en los planes de estudio. Sobre ello Vinner (2002) comenta que los estándares curriculares para las matemáticas se establecen sin comprender las habilidades cognitivas del alumno y menciona que en los estándares de la NCTM se establece que los alumnos que terminan doce años de instrucción deben llegar a manejar con soltura el concepto de función de acuerdo con la definición de Dirichlet, lo cual le parece demasiado ambicioso.

5.2 REFLEXIONES SOBRE LAS DIFICULTADES DE APRENDIZAJE

Como se ve en los párrafos anteriores, las dificultades de enseñanza y de aprendizaje del concepto de función son una problemática que aparece desde la secundaria en diferentes países. Aunque las investigaciones en México respecto al tema son pocas estas están de acurdo a lo que se reporta en estudios internacionales. Los doce años de instrucción, previos a la entrada a la universidad, parecen no ser suficientes para abarcar todos los elementos que serían necesarios para abordar el estudio del concepto de función con el enfoque plasmado en los textos analizados en el componente de enseñanza.

También se puede ver que algunas de las dificultades, detectadas y de las recomendaciones didácticas que hacen los autores analizados y comentados en este capítulo, son semejantes a las provenientes del análisis fenomenológico y fenomenológico didáctico de Freudenthal. También hay aportaciones novedosas como las que refieren al uso de la tecnología o las referencias a la importancia de la visualización. Hay acuerdo en la conveniencia de usar muchas representaciones y se enfatiza la importancia de trabajar mucho con la visión operativa, que coincide con la idea de la *función como acción* de Freudenthal, antes de presentar la visión estructural de pares ordenados.

Una vez hecha la revisión y análisis de la literatura se puede derivar de ello un primer modelo de actuación para el MTL y éste ha de ser completado con base en los resultados de diversas experiencias en el aula con un grupo de alumnos de la UIIM que se describen en la siguiente sección.

CAPÍTULO 6: COMPONENTE DE COMUNICACIÓN

El componente de comunicación es la forma en cómo se intercambia la información entre los alumnos y el profesor o el investigador, por medio de este componente se recoge información que nutre el componente de actuación. A partir de la metodología propuesta, surge el interés de diseñar y aplicar una secuencia didáctica conectada con la EMR, y a la construcción formal del concepto u objeto mental función.

La secuencia didáctica propuesta debe apoyarse en la interacción entre los alumnos y entre el profesor y los alumnos dentro del aula. Esta interacción, que debe ser intensa, permitirá a los profesores construir sus clases teniendo en cuenta las producciones de los alumnos como lo mencionan en Fauzan, Slettenhaar y Plomp (2002). Así la secuencia versa sobre el tema de la función, para su elaboración se tomaron en cuenta la definición formal de la función y los conceptos previos que se fueron encontrando en la fenomenología.

6.2 DESARROLLO DEL COMPONENTE DE COMUNICACIÓN

El componente de comunicación de esta propuesta se expone mediante una secuencia dirigida a desarrollar competencias didácticas, para ello se tomó como referencia la reinvención guiada, es decir, el proceso en el que los alumnos re-inventan ideas y herramientas matemáticas a partir de situaciones problemáticas, en interacción con sus pares y bajo la guía del docente, criterios que obedecen a los principios de la EMR. Una parte importante del Modelo propuesto se enfoca en el desarrollo de las actividades, tomando en cuenta que el aprendizaje es un proceso discontinuo de matematización progresiva, que involucra distintos niveles y en el que los contextos poseen un papel central como puente para favorecer el ascenso de nivel. Además, como mencionan De Corte, Greer y Verschaffel (1996): a los alumnos se les debe dar la oportunidad de reinventar las matemáticas bajo la guía de un adulto en lugar de intentar trasmitirles una matemática pre-construida son los alumnos quienes, a través de la interacción, el diálogo y la negociación, junto con la mediación del profesor, construyen su propio conocimiento.

Dado que la EMR propone seis principios básicos para el desarrollo de experiencias de aprendizaje, los seis principios de esta teoría son las herramientas básicas que se utilizan para desarrollar el componente de comunicación del Modelo Teórico Local a través de secuencias didácticas que toman en cuenta los principios de la EMR para su elaboración.

Se entiende por secuencia didáctica a la estructuración sistemática de las actividades dentro y fuera el aula; también consideran la planeación y diseño del trabajo, configurando el orden en que se presentan las actividades tomando en cuenta las relaciones entre alumnos, profesores, saberes y entorno. Se entiende como el plan de actuación del profesor, un documento donde se explicitan los aspectos del sistema didáctico fundamental que expone toda acción, la Secretaria de Educación Pública (SEP).

Las secuencias didácticas pueden separarse en pequeñas actividades o ciclos de enseñanza y de aprendizaje, articulados en forma de secuencia temporal y orientada a la producción de un género discursivo. Una secuencia didáctica implica una sucesión planificada de actividades en un orden, que serán desarrolladas en un determinado período, donde algunas actividades pueden ser propuestas fuera del aula.

Las secuencias didácticas se desarrollan mediante objetivos específicos, concretos y compartidos por los alumnos y en el proceso de planificación, adquiriendo así una especial relevancia la evaluación formativa. Cabe señalar que las secuencias didácticas propuestas contienen tres momentos importantes, a saber, actividades de apertura, desarrollo y cierre.

Actividades de apertura; identificar y recuperar saberes, conocimientos previos y preconcepciones.

Actividades de desarrollo; relacionar los saberes, los conocimientos previos y las preconcepciones con el conocimiento científico.

Actividades de cierre; utilizar los conocimientos científicos construidos.

Para el proceso de elaboración de secuencias didácticas en el marco de la EMR es muy importante partir de situaciones problemáticas reales en el sentido de poder realizar o poder imaginar, considerar el uso de construcciones y producciones libres, no sólo como dominio de aplicación sino como punto de partida para los procesos de matematización, así como tener en mente una concepción de la matemática como actividad humana de organización y no como sistema pre-construido de saberes; el uso de contextos y situaciones realistas. En resumen, se trata de elaborar actividades con un enfoque en el que se utilizan situaciones de la vida cotidiana o problemas contextuales como punto de partida para aprender matemáticas. Progresivamente, estas situaciones son matematizadas entre lo abstracto y lo concreto, para formar relaciones más formales y estructuras abstractas (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2002).

6.3 DISEÑO DE SECUENCIAS DIDÁCTICAS

Las secuencias o competencias fueron construyéndose de manera informal hasta llegar a la definición formal. Todo el material didáctico se construyó en conjunto con los alumnos, pero tratando de respetar el análisis fenomenológico que se realizó, mediante la intervención guiada. Por otra parte, como una fuente de motivación se tomó como estrategia la solución informal de problemas reales para trabajar en la clase y que es recomendado por la EMR.

En esta etapa se dio libertad a los alumnos de resolver problemas aplicados en contextos conocidos, con la intención de ir promoviendo la motivación a insertarse en el tema por parte de los alumnos y que esto permita buscar nuevas alternativas y alcances para comprender el significado del concepto. Se introducen los conceptos rescatados en la fenomenología de la función, comenzando con las relaciones entre magnitudes variables, variables dependientes e independientes, expresiones algebraicas y analíticas, descripción de datos visuales mediante gráficas, operaciones de con funciones (evaluación de funciones) y por último introducción a los infinitesimales.

En cada una de las actividades propuestas se requirió de una indagación previa sobre los conocimientos básicos necesarios para realizar cada una de las tareas, en el caso de encontrar deficiencias al momento de la intervención se elaboró un material de apoyo, para introducir de manera concreta el material necesario y sugerir a los alumnos estudiar el material más a fondo de tarea.

De acuerdo a la fenomenología del concepto, encontrada en el componente formal la secuencia de enseñanza se sugieren los siguientes subtemas: Variables, Gráficas, Ecuaciones y Funciones.

El objetivo general de las secuencias era relacionar variables dependientes e independientes, conocer las relaciones entre los sistemas de representación verbal, tabular, gráfico y algebraico para adquirir la capacidad de representar cada uno de estos lenguajes, es decir, poder leer e interpretar cada uno de ellos y posteriormente para traducir de uno a otro.

Para comenzar se elaboraron hojas de trabajo donde se insertaron ejercicios que relacionan actividades cotidianas con el tema en cuestión, para que los alumnos avanzaran en el modelo propuesto se propuso que ellos elaboraran enunciados parecidos con las siguientes indicaciones:

- Identificación fenómenos sujetos al cambio.
- Relacionar cantidades de magnitudes físicas variables.
- Mencionar ejemplos de situaciones ligadas a los fenómenos naturales donde intervienen magnitudes físicas.

El modelo propone elaboración de material por parte del alumno y también intervención del docente que sirve como guía. De acuerdo a la investigación es importante que el docente tome en cuenta los siguientes puntos:

1 Introducir anécdotas históricas del nacimiento y desarrollo de las matemáticas.

2 Hacer énfasis entre las relaciones de causa y efecto.

3 Representar medidas de cantidades en tablas.

4 Relacionar las magnitudes físicas y en especial en dominios tales como la geometría o la astronomía.

5 Graficar variables físicas en el plano cartesiano, por ejemplo: movimiento, luz, calor, etc. (intentar representar gráficamente tanto la variación como la dependencia entre dichas magnitudes).

6 Relacionar la dependencia cualitativa representada por medio de una figura que intenta describir la cantidad en relación con la otra de la cual depende.

7 Buscar un método de expresión de las relaciones numéricas establecidas entre determinadas propiedades de objetos geométricos, utilizando las coordenadas.

8 Conectar problemas de geometría con el álgebra.

9 Introducir el término de ecuación mediante dos cantidades desconocidas.

10 Representar analíticamente las ecuaciones, con los ejes cartesianos, las coordenadas, en forma algebraica.

11 Identificar las cantidades variables con las expresiones analíticas.

12 Proporcionar la notación matemática y operaciones con el concepto de función.

13 Dar a conocer la definición formal de función.

14 Relacionar las representaciones gráficas con el concepto de función.

15 Mencionar ejemplos de situaciones reales que se puedan representar con una función.

6.4 PRINCIPIOS PARA ELABORAR SECUENCIAS DIDÁCTICAS

A continuación se presenta en la Tabla 6.2.1 una breve descripción de la inserción de los principios de la EMR en las etapas que se establecieron para realizar el desarrollo y aplicación de las secuencias didácticas desarrolladas bajo los principios de la EMR.

Tabla 6.1 Principios de la EMR en las secuencias didácticas

(Van Den Heuvel-Panhuizen, 2008; Alsina 2009).

PRINCIPIOS DE LA EMR	SECUENCIAS	OBJETIVO
Principio de actividad	Dirigidas hacia los conceptos básicos necesarios (operaciones aritméticas básicas, incógnitas, …).	Explorar los conocimientos con que cuentan los alumnos.
Principio de realidad/actividad	Dirigidas hacia las nociones de variables dependientes e independientes, gráficas, tablas de datos, etc. Mediante secuencias que involucran actividades cotidianas y representativas del uso de estos elementos.	Interpretar y solucionar problemas reales.
Principio de reinvención guiada	Elaboradas por los alumnos, bajo la guía del profesor.	Elaborar sus propias secuencias y solucionar problemas reales.
Principio de niveles	Que facilite a los alumnos relacionar algunas actividades cotidianas con el material de apoyo	Apropiación del concepto de función.
Principio de interacción	Reconstruidas con actividades cotidianas y objetos matemáticos para introducir el aprendizaje de conceptos nuevos	Apropiación del concepto de función

PARTE III: INTERVENCIÓN SEGÚN EL MODELO TEÓRICO LOCAL

CAPÍTULO 7: DESCRIPCIÓN GENERAL

La Universidad Intercultural Indígena de Michoacán (UIIM) se localiza en el centro del estado de Michoacán, en la meseta purépecha; entre los municipios de Nahuatzén y Tingambato, 10 km rumbo a la comunidad de Pichátaro. Es una universidad que atiende principalmente, alumnos de comunidades marginadas de todo el estado de Michoacán ellos provienen de diferentes subsistemas de Bachillerato, lo cual implica una gran diversidad y riqueza cultural, pero también una inequidad y disparidad en el aprovechamiento de las matemáticas y en especial sobre el concepto de la función, debido a que los planes de estudios son diferentes y algunos no contienen asignaturas de matemáticas.

En la UIIM la educación que se ofrece está dirigida a todo alumno que cuente con la documentación aprobatoria de la educación media superior y no se realiza examen de admisión. Los planes curriculares que incluyen materias de matemáticas son principalmente los planes de la licenciatura en Desarrollo Sustentable, particularmente, la línea terminal en Tecnologías Alternativas que es donde se cursan asignaturas desde matemáticas básicas hasta matemáticas aplicadas.

Para conocer las competencias de la UIIM se analizó un examen diagnóstico (diagnóstico inicial), que se aplicó a los alumnos de nuevo ingreso en el primer semestre, en los aos 2009 y 2010. La intención del diagnóstico inicial fue indagar los conocimientos con que llegan los alumnos a la universidad y localizar algunas problemáticas específicas sobre las matemáticas.

El plan de estudios que cursan los alumnos de la licenciatura en Desarrollo Sustentable, comienza con dos semestres de tronco común y después del tercer semestre escogen una de las dos especialidades o terminales con que cuenta la licenciatura; Tecnologías Alternativas o Agroecología y el manejo de los recursos naturales.

Las asignaturas del tercer semestre de la terminal en Tecnologías Alternativas contiene la asignatura de Matemáticas aplicadas a las Tecnologías alternativas I.

7.1 DESCRIPCIÓN DEL DIAGNÓSTICO INICIAL

El diagnóstico inicial consta de 50 reactivos divididos en dos categorías: uno sobre conocimientos de matemáticas y otro de habilidades matemáticas, el instrumento es de opción múltiple. Para la elaboración del diagnóstico fue necesario el apoyo de instrumentos de evaluación educativa como, por ejemplo, los exámenes del Centro Nacional de Evaluación para la Educación media y superior (CENEVAL). El diagnóstico contempla reactivos de los exámenes para ingreso al bachillerato y para el ingreso a educación superior, se tomaron con una ponderación de 3 quintas partes de reactivos tipo ingreso al bachillerato y sólo dos quintas partes de ejercicios para el ingreso a educación superior. La parte de reactivos para el ingreso al bachillerato, se tomaron de la Guía para preparar el examen único de ingreso al bachillerato un instrumento que diseña el CENEVAL, esté instrumento fue revisado, corregido y aplicado por un grupo de trabajo en el estado de Michoacán. El grupo de académicos observó y corrigió errores de construcción, de diseño y equilibrio con base en el análisis de los reactivos puestos a disposición del público en la página de Internet del CENEVAL (Rivera, Guerrero, Sepúlveda y De Alaizola, 2006). Los reactivos que corresponden al examen para ingreso a nivel superior, son similares a los del instrumento para el ingreso a Educación Superior Tecnológica desarrollado por el Consejo del Sistema Nacional de Educación Tecnológica (COSNET), antes del uso el EXANI II del CENEVAL.

Aunque algunos estudios, sugieren que los resultados de evaluaciones que usan modalidades de opción múltiple, como por ejemplo el TIMSS, PISA, SAT en Estados Unidos; o las realizadas por el CENEVAL en México, muestran que sistemáticamente las mujeres obtienen calificaciones más bajas que los hombres en estas evaluaciones. Si un instrumento en formato de opción múltiple presenta esta y otros inconvenientes, también es claro que tienen varias virtudes como: son relativamente económicos y aparentemente objetivos; se aplican y evalúan de igual manera para todos los alumnos; aun aplicando distintos reactivos o varias versiones de un examen, es posible acomodar a los alumnos dentro de una misma escala, entre otras. El instrumento así como las respuestas correctas se encuentra en los anexos (anexo A). El diagnóstico consta de 50 reactivos de opción múltiple 19 de habilidades y 31 de conocimientos.

7.2 RESULTADOS DEL DIAGNÓSTICO INICIAL

Durante los primeros semestres de los años 2009 y 2010 se aplicó un diagnóstico inicial sobre las matemáticas, a los alumnos de nuevo ingreso, en el análisis de éste se observó que los alumnos que eligieron la licenciatura en Desarrollo Sustentable eran los alumnos que habían obtenido mejores promedios en el diagnóstico inicial. En 2011 y los años subsecuentes no se aplicó el diagnóstico inicial de conocimientos y habilidades matemáticas a los alumnos de nuevo ingreso, ello fue debido a que la Universidad atravesaba por problemas sociopolíticos que involucraron una huelga y varios paros de labores; esto influyó también en que las clases se impartieran de forma irregular y en que la matrícula bajara. Aprovechando la situación de que en el año 2011 no se realizó el diagnóstico inicial sobre las matemáticas, se procedió con la aplicación a los alumnos que ingresaron al tercer semestre en la licenciatura en Desarrollo Sustentable con Terminal en Tecnologías Alternativas y también a los alumnos de nuevo ingreso del año 2012.

El diagnóstico inicial sobre las matemáticas consta de 50 reactivos 19 sobre nociones y 31 de conocimientos (Servín y González, 2013), cabe mencionar que los resultados del diagnóstico inicial fueron muy similares en los diferentes años que se realizó, tienen una desviación estándar muy grande (más de 5 unidades), es decir resultados individuales que van de cero (0) hasta nueve punto ocho (9.8) y hasta diez (10), la escala del instrumento es de cero al diez.

Los promedios de los alumnos de nuevo ingreso 2012 tuvieron la misma tendencia que en años anteriores: 2.8. Y los alumnos con mayores puntuaciones eligieron la licenciatura en Desarrollo Sustentable y Terminal en Tecnologías Alternativas.

Tabla 7.1 Resultados del diagnóstico inicial.

Año	**Promedio**	
	De nuevo ingreso	De la Terminal en Tecnologías Alternativas.
2009	2.8	----
2010	2.8	----
2011	**----**	----
2012	2.8	**3.8**

Del análisis de cada uno de los reactivos, los promedios del diagnóstico y del proceso de la delimitación del tema de investigación para esta tesis, se optó por trabajar con el concepto de función y como punto de partida se escogieron y analizaron 10 reactivos que involucran el concepto de la función y que cumplen con los criterios establecidos en la metodología planteada. Es así como se construyó el diagnóstico de la función, que años después se implementó como instrumento de evaluación de las intervenciones del modelo.

Al analizar los resultados del diagnóstico inicial, se observaron varios problemas; bajo índice de respuestas correctas, calificaciones reprobatorias, alto índice de reactivos no contestados, etc. algunas hipótesis como por ejemplo que el diagnóstico no se aplicó correctamente, que no se respetaron los tiempos de aplicación así como problemas de fondo, uno de los cuales versa sobre los conocimientos acerca de la función pues muchos de los reactivos que involucran conocimientos básicos sobre la función fueron bajos o no fueron contestados. Por ello se decidió realizar la investigación sobre un modelo de enseñanza del concepto de función.

CAPÍTULO 8: MODELO TEÓRICO LOCAL DE LA FUNCIÓN

El desarrollo de la propuesta de este trabajo de investigación está plasmado en este documento y resumiendo en esta sección. Se contempló la teoría de los MTL, lo cual implica establecer los cuatro componentes propios de un Modelo Teórico Local para el concepto de función dirigido a los alumnos de la UIIM donde se llevó a cabo la investigación. Los cuatro componentes son: Formal, de enseñanza, de actuación y de comunicación.

El desarrollo de cada componente implica actividades complementarias hacia el modelo. El componente formal requirió de una revisión bibliográfica de la historia de las matemáticas para analizar conceptos previos a la definición formal actual del concepto de función, así como la búsqueda de definiciones que se fueron encontrando en la misma historia. El componente de enseñanza requirió del análisis de los libros de texto que se proponen en el plan curricular que se tomó como punto de partida bajo la lupa de la fenomenología del componente formal. Para el componente de actuación se hizo una revisión de los antecedentes sobre las dificultades del aprendizaje del concepto de la función en diferentes niveles de educación y diferentes lugares. El componente de comunicación contempla elaboración de secuencias didácticas, la secuencia propuesta toma en cuenta los seis principios de la Educación Matemática Realista.

De acuerdo con la propuesta del modelo este debe partir de un modelo inicial el cual se va modificando después de una intervención y su análisis para obtener un modelo más completo que servirá de modelo inicial en una próxima intervención. Al principio se tomaron selectivamente algunos reactivos de un diagnóstico propio sobre los problemas de las matemáticas para realizar la secuencia didáctica, después se fueron modificando de acuerdo al contexto, sustentado en el principio de realidad de la EMR.

En la figura 8.1 se encuentra un esquema representativo del Modelo propuesto haciendo hincapié en que el desarrollo del modelo se encuentra inserto en el documento, y que de acuerdo a la metodología que se utilizó, se debe realizar el análisis para cada uno de los componentes y aterrizarlos en el contexto que se quiere aplicar.

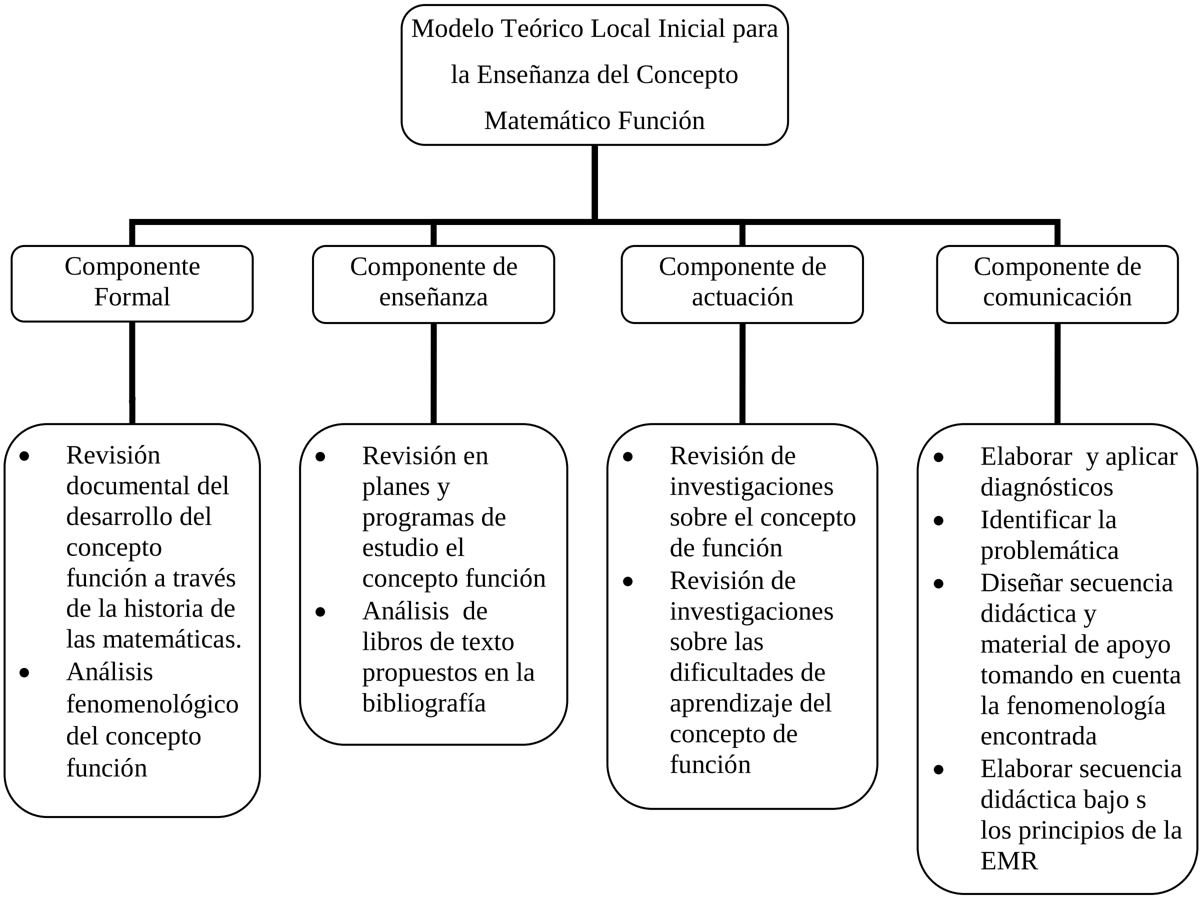


FIGURA 8.1 Diseño metodológico del modelo teórico local para la enseñanza del concepto función (creación propia).

8.1 DESCRIPCIÓN DE LA INTERVENCIÓN

El programa original de matemáticas I, en la UIIM considera cinco unidades temáticas, una dedicada a la función, esta asignatura está diseñada para cubrirse durante todo un semestre, el semestre consta de 16 a 18 semanas, dos sesiones por semana de dos horas y evaluaciones parciales por unidad temática. Haciendo una planeación equitativa por unidad y considerando los días feriados, se cuenta con seis sesiones de dos horas para impartir cada unidad, junto con su evaluación, por lo cual el tiempo dedicado a la función fue de tres sesiones de dos horas. Durante los años en que se aplicó la propuesta, en la primera sesión se les aplicó el diagnóstico sobre la función, el cual también se fue modificando y en 2016 se tiene un instrumento diagnóstico sobre la función con diez reactivos. Después de revisar los resultados del diagnóstico se implementa la propuesta y modifica el modelo anterior. El inicio de cada modelo comienza con solucionar ejercicios de actividades cotidianas familiares para los alumnos y que responden a los principios de la EMR, estos ejercicios varían año con año, aunque reciben indicaciones semejantes. En la segunda sesión se continua con el tema planeado aplicando las competencias didácticas que se obtuvieron del análisis del diagnóstico y se elaboran otras similares en conjunto con los alumnos ampliando con tareas extra clase y se introduce el tema formalmente con el material de apoyo que contiene el componente formal y de enseñanza, en la tercera y última sesión se continua con el material de apoyo y se culmina con una evaluación que consiste en aplicar los conceptos aprendidos para resolver las secuencias didácticas que se elaboraron previamente en la sesión anterior para asentar una calificación al alumno.

En la primera sesión se reparten entre los alumnos hojas de trabajo, las hojas contienen ejercicios que previamente fueron elaborados por alumnos de la implementación anterior, los ejercicios originales se modificaron para tomarlos como punto de partida para la secuencia didáctica sobre la función. El objetivo de la primera actividad y en general de las sesiones para resolución de problemas reales es investigar el dominio de conceptos previos y de introducir el principio de realidad de la EMR y al mismo tiempo matematizar (elementos que corresponde a la propuesta).

La intervención es guiada por la metodología de los modelos teóricos locales que comienza con un modelo inicial, como punto de partida, el presente comenzó en el año 2012 aunque las intervenciones del modelo comenzaron en 2013, el componente de comunicación se modificó después de cada intervención de acuerdo al análisis que se hace para monitorear al modelo, el modelo modificado se toma como modelo inicial para la siguiente intervención con el objetivo de mejorar el anterior, así sucesivamente, el esquema 8.2 muestra el diagrama de flujo de la intervención.

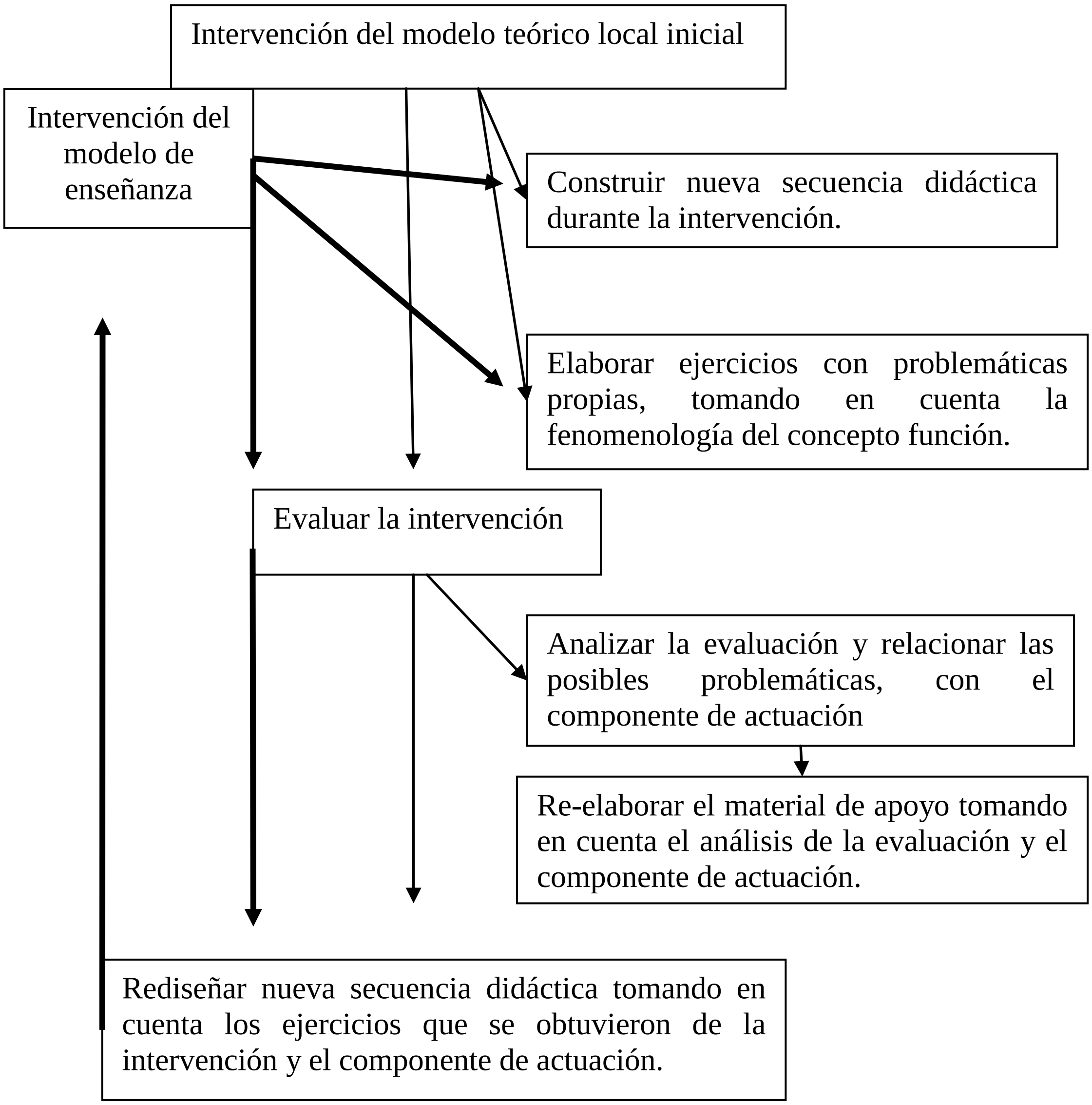


FIGURA 8.2 Esquema de la práctica experimental del modelo propuesto

Las primeras dos actividades son ejercicios sencillos que contienen problemáticas de la vida cotidiana de los alumnos, pero para la investigación son las actividades introductorias de la secuencia didáctica para llegar a trabajar más adelante con el concepto de función, al mismo tiempo se introducen los elementos propuestos en el modelo propuesto que incluyen los principios de la EMR.

8.2 SECUENCIA DIDÁCTICA (2015)

Sesión 1.

Actividad 1: Resolver correctamente los siguientes ejercicios.

Los alumnos del grupo de tercer semestre de Tecnologías (10 alumnos) acordaron almorzar juntos. Además Fernando, Cecy y Pablo invitaron a un amigo respectivamente, es decir, se sumaron 3 personas más al grupo. Todos almorzaron felices y contentos pero algunos tuvieron que irse pronto, porque tenían examen y si llegaban tarde después no los dejarían entrar al examen, así que a la hora de pagar la cuenta, ya se habían ido siete personas y la cuenta era de $350.00. ¿Si todos los que se quedaron cooperaron en partes iguales para pagar la cuenta, cuánto tuvieron que pagar de más, cada uno, considerando que todos consumieron lo mismo y los que se retiraron no cooperaron?

¿Cómo puede calcularse el número que sigue en la siguiente sucesión de números? 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21?

En la revisión de las actividades propuestas se emplea el principio de reinvención guiada, la primera actividad es revisada por uno de sus compañeros de clase, para promover el trabajo colaborativo, después de la revisión se procede a un intercambio de opiniones sobre los resultados obtenidos para lograr un cambio de nivel.

El análisis de esta actividad consiste en conocer si los alumnos dominan las operaciones básicos; sumar, restar, multiplicar y dividir.

Una vez que se lleva a cabo la primera actividad se pone en práctica el principio de realidad y se continúa con el principio de niveles introduciendo otros temas mediante el principio de reinvención guiada y los componentes de enseñanza, tomando en cuenta la fenomenología encontrada del concepto.

Sección 1.

Actividad 2: Redactar ejercicios con problemáticas reales relacionados con los siguientes temas:

Teorema de Pitágoras

Repartición de tierras

Calculo de salarios

Movimientos de cuerpos celestes

El objetivo de la segunda actividad es poner en práctica las teorías de la educación matemática realista y los modelos teóricos locales, al desarrollar actividades que involucran los componentes iniciales de cada una de ellas; matematizar la realidad a través del principio de actividad, de MTL's el componente de actuación y comunicación; es decir, ejercicios que los alumnos construyan con sus propias ideas y lograr secuencias didácticas apropiadas para lograr entender el concepto de función que ellos puedan identificar, pero que obedecen a su realidad, esto mediante una guía que es el profesor. El desarrollo de la actividad involucra trabajo en equipo, iteración y comunicación entre alumnos y entre alumnos-profesor.

Sección 1.

Actividad 3: Resolver los ejercicios planteados en la actividad anterior.

Previo a la segunda sesión los ejercicios elaborados por los estudiados son analizados y modificados con la intensión de llevar un orden en la secuencia que responda con el objetivo principal; desarrollar habilidades para relacionar diferentes formas de representación de la función.

Sesión 2.

El desarrollo de las siguientes competencias son elaboradas por los alumnos, de acuerdo con el principio de interacción y el de interconexión, para lograr cambiar de nivel. Tomando nuevamente en cuenta el componente de enseñanza, los componentes de actuación y comunicación así como el principio de interacción, se continúa el tema con la planeación siguiente:

Repasar conceptos básicos necesarios para introducir el tema formalmente.

Resolver problemáticas donde sea necesario el uso de variables, tabla de datos, gráficas.

Graficar figuras geométricas e introducir los conceptos de ecuaciones.

Desarrollar el tema de relaciones a través de problemáticas reales y problemas matemáticos.

Enfocar el tema de función como una relación.

Actividad 3: Trabajo en equipo

Resolver correctamente los siguientes ejercicios

Al inicio de una semana, un cultivo contiene 5000 bacterias y al final de la semana hay un 10% más de bacterias. ¿Cuántas bacterias habrá al final de la segunda semana, si el crecimiento semanal se mantiene al 10%?

¿De las siguientes relaciones cuales pueden ser funciones?

Un niño aumenta su estatura de acuerdo a su edad.

El precio del kilo de tortillas aumenta el 2% anualmente.

La cosecha ha disminuido por causas climáticas.

Tabular la siguiente función $f(x) = x^2 + 3x - 6$

f ( ) = ( )2 + 3( ) – 6

X					
F(x)					

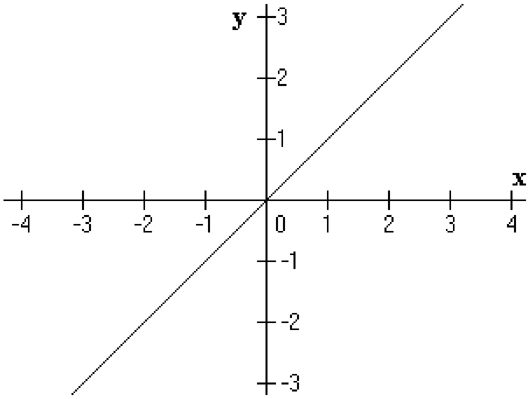
Graficar la siguiente tabla de valores y decir si corresponden o no a una función

Tiempo *t* (s)	**Distancia *d* (m)**
0,0	0,0
0,5	0,1
1,0	0,3
1,5	0,7
2,0	1,3
2,5	2,0

¿Cuál es el mayor número de vasos de 90 ml que pueden llenarse con un litro de jugo?

Dada $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$, encontrar f(0), f(2) y f(−1).

¿La siguiente gráfica representa una función?



Actividad extra clase: resolver correctamente los ejercicios enlistados a continuación.

Dos corredores inician en el mismo lugar de un óvalo de 400 metros en sentido contrario. El primero lleva una velocidad de 300 metros por minuto y el segundo 500 metros por minuto. ¿Cuántos metros ha recorrido el primer corredor cuando se encuentra por quinta ocasión con el segundo corredor?

Un investigador encuentra que una planta de maíz crece entre la sexta y la doceava semana después de sembrada según la expresión donde x representa el tiempo transcurrido después de la siembra en semanas mientras que y es la altura de la planta en centímetros. ¿Qué tanto creció la planta en esas seis semanas?

Calcular la ganancia obtenida por un comerciante que vendió camisas a x pesos por camisa, si el precio de compra fue de pesos por camisa.

Administrar una evaluación final con problemas similares a los presentados en la evaluación diagnóstica, tomando en cuenta las actividades intermedias de forma individual y colectiva, así como las tareas fuera del horario de clase.

CAPÍTULO 9: DISEÑO DE MATERIALES

Una vez delimitada la problemática sobre el concepto de función se procedió a elaborar un diagnóstico sobre este concepto. Para el diseño del diagnóstico sobre la función, se identificaron algunos reactivos que se encuentran en el diagnóstico inicial que estuvieran relacionados con la función, y a la vez que se encuentran en pruebas nacionales que responden a estándares internacionales, los reactivos seleccionados se modificaron y se organizaron bajo los principios de la EMR. Por ejemplo, se trató de recolectar los reactivos que incluyeran problemas en contexto real, o que pudieran dar lugar a la reinvención. Además se ordenaron cronológicamente, de acuerdo con el componente de competencia formal, comenzando desde la noción de función hasta problemas que requieren de su conocimiento formal. Básicamente, la pregunta guía fue la siguiente:

¿Qué saben los alumnos de la UIIM acerca de la noción y el concepto de función?

9.1 DIAGNÓSTICO SOBRE LA FUNCIÓN

?

A) 800 metros B) 750 metros C) 500 metros D) 450 metros E) 300 metros

8. Un terreno de forma triangular tiene dos lados iguales que miden x y el tercer lado mide 2y. ¿Qué expresión nos da el área A de este terreno?

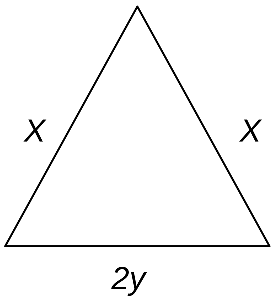
A) $A = \sqrt{x\ y}$

B) $A = \sqrt{x^2 + 2y^2}$

C) $A = y\sqrt{x^2 - y^2}$

D) $A = \sqrt{x^2 y - y^3}$

E) $A = \sqrt{2x^2 - y^2}$



9. Un investigador encuentra que una planta de maíz crece entre la sexta y la doceava semana después de sembrada según la expresión $y=2x^2-10x+40$ donde *x* representa el tiempo transcurrido después de la siembra en semanas mientras que *y* es la altura de la planta en centímetros. ¿Qué tanto creció la planta en esas seis semanas?

A) 52 cm B) 104 cm C) 156 cm D) 186 cm E) 208 cm

10. Calcular la ganancia obtenida por un comerciante que vendió $x^{\frac{3}{2}}$ camisas a *x* pesos El diagnóstico sobre la función, se conformó por los siguientes diez reactivos con respuesta de opción múltiple.

---

1. ¿Cuál es el número de la sucesión que se encuentra en la posición 17?

Posición	1	2	3	4	5	...	17	...
Número	1	5	8	13	17	...	?	...

A) 45 B) 65 C) 21 D) 57 E) 69

2. ¿Cuál es el número de la sucesión que se encuentra en la posición 13?

Posición	1	2	3	4	...	13	...
Número	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{9}$	...	?	...

A) $\frac{1}{13}$ B) $\frac{1}{27}$ C) $\frac{1}{19}$ D) $\frac{1}{21}$ E) $\frac{1}{25}$

3. ¿Cómo puede calcularse el número que sigue en la sucesión 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,...?

A) La suma de los dos anteriores B) Sumando dos veces el anterior a cinco

C) La suma de todos los anteriores D) Restando 18 al triple del anterior

E) Sumando 8 al anterior.

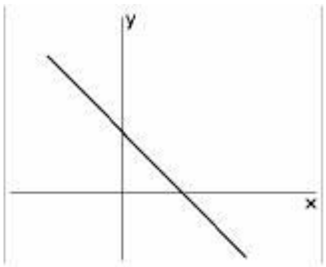
4. Al inicio de una semana, un cultivo contiene 5000 bacterias y al final de la semana hay un 10% más de bacterias. ¿Cuántas bacterias habrá al final de la segunda semana, si el crecimiento semanal se mantiene al 10%?

A) 6000 B) 5050 C) 5500 D) 6050 E) 6500

5. ¿Cuál es el mayor número de vasos de 90 ml que pueden llenarse con un litro de jugo?

A) 9 vasos B) 12 vasos C) 11 vasos D) 10 vasos E) 15 vasos

6. Dada la gráfica siguiente, ¿cuál es la ecuación que le corresponde?



A) $y = x^2 - 4x + 3$ B) $y = 2x$ C) $y = -x + 1$ D) $y = -x - 5$ E) $y = x^2 - 4$

7. Dos corredores inician en el mismo lugar de un óvalo de 400 metros en sentido contrario. El primero lleva una velocidad de 300 metros por minuto y el segundo 500 metros por minuto. ¿Cuántos metros ha recorrido el primer corredor cuando se encuentra por quinta ocasión con el segundo corredorpor camisa, si el precio de compra fue de $x^{\frac{1}{2}}$ pesos por camisa.

A) $x^{\frac{5}{2}} - x^2$ B) $x^{\frac{5}{2}} + x^2$ C) $x^{\frac{5}{2}} - 2x^2$ D) $x^{\frac{7}{2}} - x^3$ E) $x^{\frac{7}{2}} + x^3$

Los objetivos de los reactivos del diagnóstico sobre la función de cada uno se presentan a en la tabla 9.1, recordando que son objetivos preestablecidos para elaborar las pruebas del Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos de la OCDE (PISA), aunque la forma de evaluación no la compartimos porque no tenemos la intención de evaluar. PISA tiene un marco de referencia para su evaluación propia. El propósito de este diagnóstico es conocer las competencias que poseen los alumnos.

Tabla 9.1. Objetivos y aprendizajes esperados de los reactivos del diagnóstico sobre el concepto de la función

Número de reactivo	**Objetivo**	**Aprendizajes esperados**
1 y 2	Que el alumno sea capaz de llevar acabo procesos secuenciales, para desarrollar habilidades de interpretación.	La función en diferentes formas.
3, 4 y 5	Conocer si el alumno es capaz de realizar secuencias complejas de cálculos u otros procedimientos rutinarios en un contexto aplicado, de forma exacta y completa, capaz de proporcionar explicaciones y argumentos escritos basados en la reflexión, la comprensión y la generalización de la comprensión	La función en diferentes formas. Cambio crecimiento, variables dependientes e independientes. Parámetros y conexiones formales
6 y 9	Conocer si el alumno posee la habilidad de interpretación matemática de una	Identificar la función y relacionarla con sus interpretaciones

	gráfica con el lenguaje algebraico y la representación visual bidimensional de una forma gráfica.	
7, 8 y 10	Conocer si el alumno tiene la capacidad de aplicar cálculos necesarios para resolver problemas que impliquen una representación matemática, saber si puede utilizar el pensamiento y las convenciones matemáticas básicas en contextos familiares.	Conocer herramientas para relacionar variables e interpretarlas, tablas y gráficas. Dependencia o conexión

A través del análisis del diagnóstico sobre la función se fue tratando de intuir el origen de las dificultades por las cuales atraviesan los alumnos al trabajar con el concepto de función, para comenzar así la elaboración del modelo de enseñanza, incluyendo trayectorias didácticas adecuadas a las problemáticas encontradas en el análisis.

9.2 PROPUESTA DE SECUENCIA DIDÁCTICA PARA PRÓXIMA APLICACIÓN

Para comenzar la intervención se usan algunos de los ejercicios que redactaron los alumnos en la intervención anterior y se modifican de acuerdo al objetivo de la actividad.

Sesión 1.

Actividad 1. Introducción del tema con el objetivo de conocer herramientas básicas con que cuentan los alumnos.

Resolver el siguiente problema:

¿Cuántos conejos habrá después de un año?, si inicialmente hay una sola pareja y sabe lo siguiente:

Los conejos alcanzan la madurez sexual a la edad de un mes.

En cuanto alcanzan la madurez sexual los conejos se aparean y siempre resulta preñada la hembra.

El periodo de embarazo para los conejos es de un mes.

Los conejos no mueren.

La hembra siempre da a luz una pareja de conejos de sexos opuestos.

Actividad 2: Comenzar a elaborar las secuencias didácticas dirigidas al concepto de función.

Redactar cinco ejercicios con problemáticas reales que cambien gradualmente con el tiempo.

Actividad 3. Trabajo en equipo de dos o tres alumno para modificar los ejercicios que previamente elaboraron con ayuda del profesor para que los ejercicios se centren en los objetivos que se plantearon en la sección de diseño de esta tesis:

Hacer énfasis entre las relaciones de causa y efecto.

Representar medidas de cantidades en tablas.

Relacionar las magnitudes físicas y en especial en dominios tales como la geometría o la astronomía.

Graficar variables físicas en el plano cartesiano, por ejemplo: movimiento, luz, calor, etc. (intentaba representar gráficamente tanto la variación como la dependencia entre dichas magnitudes).

Relacionar la dependencia cualitativa representada por medio de una figura que intenta describir la cantidad de una determinada cantidad en relación con la otra de la cual depende.

Buscar un método de expresión de las relaciones numéricas establecidas entre determinadas propiedades de objetos geométricos, utilizando las coordenadas.

Conectar problemas de geometría con el álgebra.

Introducir el término de ecuación mediante dos cantidades desconocidas.

Representar analíticamente las ecuaciones, con los ejes cartesianos, las coordenadas, en forma algebraica.

Identifican las cantidades variables con las expresiones analíticas.

Proporcionar la notación matemática y operaciones con el concepto de función.

Dar a conocer la definición formal de la función.

Relacionar las representaciones gráficas con el concepto de función.

Mencionar ejemplos de situaciones reales que se puedan representar con una función.

Sesión 2. Para comenzar la sesión 2 el profesor previamente debe revisar los ejercicios que se plantearon la clase pasada, para que la secuencia de los ejercicios este de acuerdo al planteamiento del trabajo de tesis. Las actividades de esta sesión se trabajan en equipos con ejercicios diferentes pero con los mismos objetivos.

Actividad 1. Analizar y resolver un ejercicio que tenga que ver con relaciones de causa y efecto y representarlo de tablas de dos columnas.

Actividad 2. Analizar los ejercicios y soluciones de los ejercicios de los compañeros; intercambiar los ejercicios entre equipos de trabajo para la revisión.

Actividad 3. Introducir un ejercicio geométrico para realizar la presentación gráfica, e ir identificando variables dependientes e independientes.

Actividad 4. Realizar la gráfica de los ejercicios que trabajaron en la segunda actividad y obtener una ecuación algebraica que represente el ejercicio.

El desarrollo de las secuencias didácticas depende mucho del grupo con el que se esté trabajando, hay grupos muy colaborativos que cuentan con las herramientas básicas necesarias y con este tipo de grupos las secuencias fluyen rápidamente, pero también puede haber casos donde el grupo de trabajo no sea colaborativo y no tenga las herramientas básicas, entonces la elaboración de secuencias es muy lenta. Durante esta investigación se han detectado grupos buenos y malos, con unos se pudo avanzar hasta ejercicios propios de la función matemática y con otros solo se llegó a la función relacional.

Las actividades de la sesión 2 se entrelazan con el material de apoyo que también se modifica de aplicación a aplicación, una vez que se llega a la definición formal de función se revisan los ejercicios que se han estado revisando, con los cuales se hace una depuración de los que forman una función y los que no. Una vez identificados se realizan actividades para identificar los componentes como variables en términos de dominio e imagen identificando la relación funcional y presentarlo de forma gráfica y tabular.

9.3 MATERIAL DE APOYO

En esta sección se expone un extracto del material didáctico que se les facilitó a los alumnos que recibieron la intervención del modelo, recalcando que el material fue cambiando año tras año de acuerdo a los análisis del modelo de intervención, el material de apoyo consta de un cuadernillo personalizado para cada estudiante, en la portada se encuentran los datos de la escuela y la materia, un ejemplar del material didáctico se encuentra en la sección de anexos (Anexo B).

El material de apoyo se elaboró de acuerdo a los elementos que fueron surgiendo en la fenomenología del objeto mental función y se fue entrelazando con las secuencias didácticas que surgieron en las aplicaciones anteriores. La forma en que se trabajó este material fue que los alumnos leyeran por párrafos y se explicaba en el pizarrón algunas dudas, las actividades generalmente se socializaron entre los alumnos y cambió constantemente la forma de organización para resolver los ejercicios.

UNIVERSIDAD INTERCULTURAL INDÍGENA DE MICHOACÁN

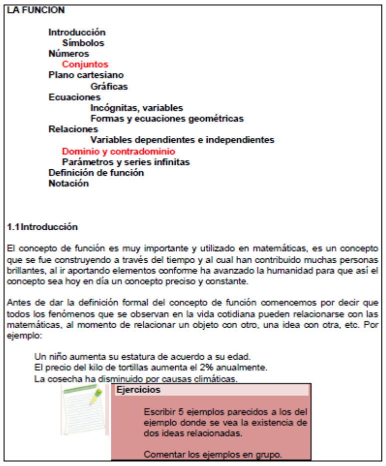
Apuntes de la asignatura

Matemáticas Aplicadas a las Tecnologías Alternativas

Profesora: Hermelinda Servín Campuzano

Nombre del Alumno________________________________

Kanangío, Pichataro Michoacan



LA FUNCION

1.1 Introducción

El concepto de función es muy importante y utilizado en matemáticas, es un concepto que se fue construyendo a través del tiempo y al cual han contribuido muchas personas brillantes, al ir aportando elementos conforme ha avanzado la humanidad para que así el concepto sea hoy en día un concepto preciso y constante.

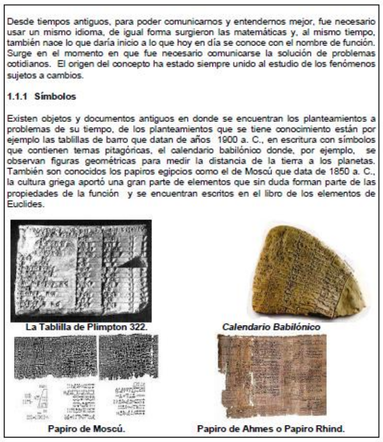
Antes de dar la definición formal del concepto de función comencemos por decir que todos los fenómenos que se observan en la vida cotidiana pueden relacionarse con las matemáticas, al momento de relacionar un objeto con otro, una idea con otra, etc. Por ejemplo:

Un niño aumenta su estatura de acuerdo a su edad.
El precio del kilo de tortillas aumenta el 2% anualmente.
La cosecha ha disminuido por causas climáticas.

Ejercicios

Escribir 5 ejemplos parecidos a los del ejemplo donde se vea la existencia de dos ideas relacionadas.

Comentar los ejemplos en grupo.



Desde tiempos antiguos, para poder comunicarnos y entendernos mejor, fue necesario usar un mismo idioma, de igual forma surgieron las matemáticas y, al mismo tiempo, también nace lo que daría inicio a lo que hoy en día se conoce con el nombre de función. Surge en el momento en que fue necesario comunicarse la solución de problemas cotidianos. El origen del concepto ha estado siempre unido al estudio de los fenómenos sujetos a cambios.

1.1.1 Símbolos

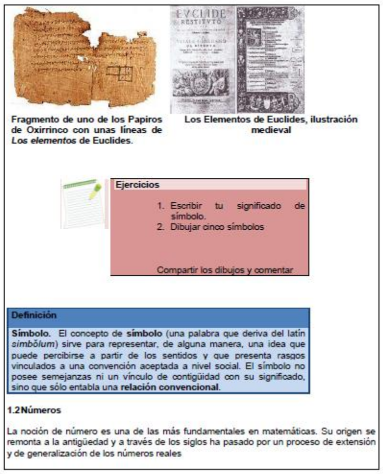
Existen objetos y documentos antiguos en donde se encuentran los planteamientos a problemas de su tiempo, de los planteamientos que se tiene conocimiento están por ejemplo las tablillas de barro que datan de años 1900 a. C., en escritura con símbolos que contienen ternas pitagóricas, el calendario babilónico donde, por ejemplo, se observan figuras geométricas para medir la distancia de la tierra a los planetas. También son conocidos los papiros egipcios como el de Moscú que data de 1850 a. C., la cultura griega aportó una gran parte de elementos que sin duda forman parte de las propiedades de la función y se encuentran escritos en el libro de los elementos de Euclides.

La Tablilla de Plimpton 322.

Calendario Babilónico

Papiro de Moscú.

Papiro de Ahmes o Papiro Rhind.



Fragmento de uno de los Papiros de Oxirrinco con unas líneas de *Los elementos* de Euclides.

Los Elementos de Euclides, ilustración medieval

Ejercicios

1. Escribir tu significado de símbolo.
2. Dibujar cinco símbolos

Compartir los dibujos y comentar

Definición

Símbolo. El concepto de **símbolo** (una palabra que deriva del latín *simbŏlum*) sirve para representar, de alguna manera, una idea que puede percibirse a partir de los sentidos y que presenta rasgos vinculados a una convención aceptada a nivel social. El símbolo no posee semejanzas ni un vínculo de contigüidad con su significado, sino que sólo entabla una **relación convencional**.

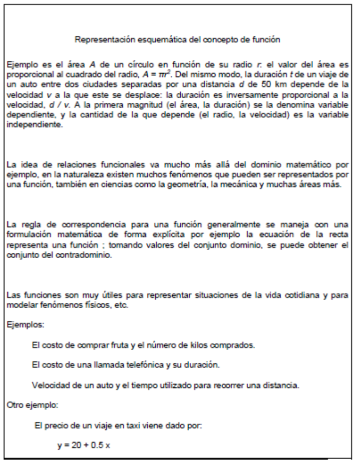
1.2 Números

La noción de número es una de las más fundamentales en matemáticas. Su origen se remonta a la antigüedad y a través de los siglos ha pasado por un proceso de extensión y de generalización de los números reales

…….

……..

……..



Representación esquemática del concepto de función

Ejemplo es el área *A* de un círculo en función de su radio *r*: el valor del área es proporcional al cuadrado del radio, $A = \pi r^2$. Del mismo modo, la duración *t* de un viaje de un auto entre dos ciudades separadas por una distancia *d* de 50 km depende de la velocidad *v* a la que este se desplace: la duración es inversamente proporcional a la velocidad, *d / v*. A la primera magnitud (el área, la duración) se la denomina variable dependiente, y la cantidad de la que depende (el radio, la velocidad) es la variable independiente.

La idea de relaciones funcionales va mucho más allá del dominio matemático por ejemplo, en la naturaleza existen muchos fenómenos que pueden ser representados por una función, también en ciencias como la geometría, la mecánica y muchas áreas más.

La regla de correspondencia para una función generalmente se maneja con una formulación matemática de forma explícita por ejemplo la ecuación de la recta representa una función ; tomando valores del conjunto dominio, se puede obtener el conjunto del contradominio.

Las funciones son muy útiles para representar situaciones de la vida cotidiana y para modelar fenómenos físicos, etc.

Ejemplos:

El costo de comprar fruta y el número de kilos comprados.

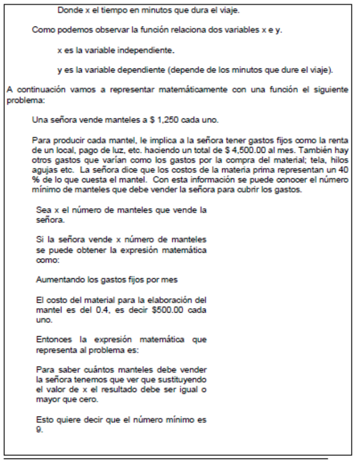
El costo de una llamada telefónica y su duración.

Velocidad de un auto y el tiempo utilizado para recorrer una distancia.

Otro ejemplo:

El precio de un viaje en taxi viene dado por:

$$y = 20 + 0.5\,x$$



Donde x el tiempo en minutos que dura el viaje.

Como podemos observar la función relaciona dos variables x e y.

x es la variable independiente.

y es la variable dependiente (depende de los minutos que dure el viaje).

A continuación vamos a representar matemáticamente con una función el siguiente problema:

Una señora vende manteles a $ 1,250 cada uno.

Para producir cada mantel, le implica a la señora tener gastos fijos como la renta de un local, pago de luz, etc. haciendo un total de $ 4,500.00 al mes. También hay otros gastos que varían como los gastos por la compra del material; tela, hilos agujas etc. La señora dice que los costos de la materia prima representan un 40 % de lo que cuesta el mantel. Con esta información se puede conocer el número mínimo de manteles que debe vender la señora para cubrir los gastos.

Sea x el número de manteles que vende la señora.

Si la señora vende x número de manteles se puede obtener la expresión matemática como:

Aumentando los gastos fijos por mes

El costo del material para la elaboración del mantel es del 0.4, es decir $500.00 cada uno.

Entonces la expresión matemática que representa al problema es:

Para saber cuántos manteles debe vender la señora tenemos que ver que sustituyendo el valor de x el resultado debe ser igual o mayor que cero.

Esto quiere decir que el número mínimo es 9.

CAPÍTULO 10: INTERPRETACIÓN DE LA INTERVENCIÓN SEGÚN EL MTL

La intervención del modelo de función propuesto comenzó con dos generaciones (2012, 2013), durante el tercer semestre de la carrera, con alumnos de la carrera Desarrollo Sustentable en la materia de Matemáticas Aplicadas a las Tecnologías Alternativas. El modelo fue modificándose año con año de acuerdo a las observaciones del comité tutorial, y los fundamentos de la teoría de MTL`s, el material didáctico y las actividades de aprendizaje también fueron modificándose durante estos años. El modelo de los primeros dos años se resume en una unidad didáctica sobre el concepto de función que fue muy parecida a la primera unidad de los planes de estudio del programa original, la diferencia se encuentra en la organización de los temas y la forma de abordar los contenidos, los siguientes dos años esta unidad fue modificada, quitando algunos subtemas que no aparecieron en la fenomenología que se encontró en la investigación sobre el tema principal "la función" (temas relacionados con teoría de conjuntos), la evaluación del modelo de los primeros cuatro años fue mediante el análisis estadísticos de las evaluaciones que los alumnos realizaron por escrito para aprobar la unidad y los resultados del diagnóstico, para la evaluación de la implementación y análisis del modelo en el cuarto año se adicionó una grabación de todo el proceso de intervención.

10.1 DESCRIPCIÓN CUANTITATIVA

El proceso para iniciar con el primer modelo comenzó desde el 2009 mucho antes de la primera intervención después se fue modificando año con año hasta el año 2015. Es pertinente enfatizar que esta sección describe solamente el proceso de intervención del modelo durante el semestre agosto-diciembre 2015, el cual fue filmado para su análisis cualitativo, y mencionar que este proceso de análisis se llevó acabo después de cada intervención durante los 3 años. A continuación se hace el análisis de grabaciones que se hicieron durante la intervención y se exponen algunos relatos donde se observan algunas situaciones importantes para tomarlas en cuenta e ir modificando el modelo para una próxima intervención, la redacción completa de las grabaciones se encuentra en la sesión de anexos. Los relatos se relacionan directamente con los principios de la EMR y en el análisis se va explicando lo acontecido durante las tres sesiones de grabación aproximadamente de 6 horas, dos horas por sesión.

La organización de la tabla de relatos es la siguiente: Los alumnos se etiquetaron con letras mayúsculas para no registrar sus nombres verdaderos; Alumno(a) A, B, C, etc. En la columna del lado izquierdo están los comentarios de las grabaciones y en la columna del lado derecho la relación con los principios de la EMR que se tomaron en cuenta para elaborar el modelo propuesto, los renglones del relato se enumeraron para referenciar el escrito con el análisis, debajo de cada recorte de la tabla se explica lo que los alumnos hacían en ese periodo.

En la primera clase, la maestra les explica a los alumnos que el tema en cuestión forma parte de un estudio, por lo cual, se requiere de la grabación durante tres clases que es lo planeado de acuerdo al curso. Esta forma de trabajo siempre presentó problemas, pues los alumnos casi siempre se resistían a ser grabados, algunas de las indicaciones que fueron cambiando fueron las formar de concientizar a los alumnos para que tengan confianza en el profesor y sepan que esas grabaciones son confidenciales y que no serán utilizadas en su contra sino al contrario que son herramientas para mejorar la calidad en la educación.

TABLA D. Tabla de relatos

Relatos	**Relación de los relatos con los principios de la EMR**
1. **Mtra.:** Buenos días muchachos 2. **Alumnos.** Buenos días 3. **Mtra.:** Como les decía hoy vamos a empezar ver el tema de la función, entonces vamos a tratar de reconstruir el concepto, y vamos a tratar de realizar actividades donde ustedes vean como ya desde la antigüedad ya se tenía la idea de la función pero se ha ido modificando, hoy en día tenemos un concepto que no se parece como era antes aunque pueden ser equivalentes pero en ocasiones les cuesta trabajo a ustedes entender y no solo a ustedes sino hasta a nosotros los profes. Entonces lo que yo vengo a proponer es que lo veamos por medio de actividades, para eso	**Presentación** **Principio de interacción**

quiero que contesten un ejercicio. 4. **Alumno A:** ¿Vamos a jugar? 5. **Mtra.**: Si vamos a jugar.	

Figura 10.1. Ejemplo de la tabla donde se registraron por escrito las conversaciones la tabla completa se encuentra en (Anexos D).

En la primera sesión la maestra les explica la forma de trabajar y empieza a repartir hojas de trabajo a los alumnos. Las hojas contienen las secuencias que se presentan en la unidad del desarrollo del componente de comunicación correspondientes a la primera actividad de la primera sesión.

UNIVERSIDAD INTERCULTURAL
INDÍGENA DE MICHOACÁN

Matemáticas Aplicadas a las Tecnologías Alternativas I

Nombre del Alumno____

Profesora: Hermelinda Servín Campuzano

Hoja de trabajo # 1

Actividad 1: Resolver correctamente los siguientes ejercicios.

Los alumnos del grupo de tercer semestre de Tecnologías (10 alumnos) acordaron almorzar juntos. Además Fernando, Cecy y Pablo invitaron a un amigo respectivamente, es decir, se sumaron 3 personas más al grupo. Todos almorzaron felices y contentos, pero algunos tuvieron que irse pronto, porque tenían examen y si llegaban tarde después no los dejarían entrar al examen, así que a la hora de pagar la cuenta, ya se habían ido siete personas y la cuenta era de $350.00. ¿Si todos los que se quedaron cooperaron en partes iguales para pagar la cuenta, cuánto tuvieron que pagar de más, cada uno, considerando que todos consumieron lo mismo y los que se retiraron no cooperaron?

¿Cómo puede calcularse el número que sigue en la siguiente sucesión de números? 1, 1, 2, 3, 5, 8,13, 21?

……… etc.

Figura 10.2. Ejemplo de hojas de trabajo, que son proporcionadas a los alumnos.

Durante esta actividad los alumnos permanecieron muy callados por más de 10 minutos, esta actividad se diseñó para trabajarla individualmente para más tarde socializarla entre ellos, a la vez revisar los resultados y analizar la forma en que atacaron los problemas.

Figura 10.3. Grupo de tercer semestre 2015 Desarrollo Sustentable Tecnologías Alternativas UIIM.

Mientras los alumnos resuelven los ejercicios propuestos, la maestra se pasea entre los espacios de los alumnos, con la intención de mirar lo que sus alumnos están haciendo, si observa que no están trabajando interviene, si no se entiende lo que están redactando también interviene, etc.

34 **Mtra.:** ¿Terminamos? ¿Quién me quiere explicar cómo resolvió el problema? ¿Cuánto pago cada uno? 35 **Alumno A:** Treinta y uno cincuenta 36 **Mtra.**: ¿De a como le tocaba a cada uno? 37 **Alumno A:** de a veinte seis.	**Principio de actividad** **Principio de interacción**

Figura 10.4. Fragmento de tabla de relato (anexo D).

Para comenzar la socialización la maestra comienza preguntando los resultados a los problemas propuestos, algunos de los resultados son diferentes entonces comienza a hacer preguntas al respecto, y no decir directamente cuáles compañeros cometieron errores al resolver los ejercicios, los alumnos empiezan a contestar las preguntas dirigidas, de cómo ellos contestaron y con esto, algunos de ellos se dan cuenta de los errores que cometieron y en qué se equivocaron al resolver sus ejercicios, de igual forma otros que si los contestaron correctamente. Pero para que no haya dudas sobre los resultados correctos, se pide a uno de los alumnos que lea el problema y lo interprete con sus propias palabras, entonces la maestra va escribiendo en el pizarrón y resuelve el ejercicio.

40. Alumno B: Pues esté, la cuenta era de trescientos cincuenta pesos pues en total, pero como se retiraron, eran trece Alumnos que consumieron los que consumieron, la cuenta en total fue de trescientos cincuenta pesos, pero se retiraron siete, quedaron seis nada más, esas seis personas pagaron de cincuenta y ocho pesos treinta y tres con tres centavos del almuerzo, si todos hubieran pegado las trece personas les tocaba de a veinte y seis pesos, pero como se retiraron siete personas les toco de a cincuenta y ocho punto treinta y tres a las seis personas que se quedaron.	**Principio de realidad** **Principio de interacción**

Figura 10.5. Fragmento de tabla de relatos (Anexo D).

Pero para que no haya dudas sobre los resultados correctos, se pide a uno de los alumnos que lea el problema y lo interprete con sus propias palabras, entonces la maestra va escribiendo en el pizarrón y resuelve el ejercicio. Después la maestra hace algunas preguntas sobre temas básicos de matemáticas que necesitarán para seguir con la clase.

41. Mtra.: En realidad creen ustedes que pagaron cincuenta y ocho punto treinta tres centavos? **42. Alumnos:** No, no **43. Alumna E**: No, porque se redondean los puntos decimales	**Principio de niveles** **Principio de interconexión**

Figura 10.6. Fragmento de tabla de relatos (Anexo D).

Después de esta actividad se pide a los alumnos comiencen con la siguiente, pero ahora que la trabajen en equipo de dos en dos. La actividad en equipo favorece la comunicación en el grupo y baja el estrés que se produce por la cámara de grabación, aunque se tardan mucho tiempo en acomodarse y en escoger con quien trabajar, la maestra interviene para agilizar la actividad, los alumnos son recelosos con sus ideas y les cuesta trabajo relacionarse dentro del grupo, siendo más evidente cuando se trata de trabajar un hombre con una mujer.

Figura 10.7. Grupo de tercer semestre 2015 Desarrollo Sustentable Tecnologías Alternativas UIIM.

La actividad de trabajo propuesta trata sobre elaborar secuencias parecidas a las que se les dieron en la hoja de trabajo para después resolverlas, en equipos de cuatro. Algunos de los ejercicios que los alumnos elaboraron se quedaron pendientes, debido al tiempo consumido y se prosiguió con la clase comenzando con una exploración acerca de los elementos matemáticos con que cuentan los alumnos.

44. Mtra.: Ahora piensen, en esa cuentita tan simple están ustedes usando muchos conceptos que han aprendido de las matemáticas, hagan una lista de qué conceptos matemáticos utilizaron por ejemplo, que deben saber primero, que deben conocer. **45. Alumno B:** Suma **46. Mtra.**: Sumar	**Principio de niveles** **Principio de interacción** **Principio de interconexión**

47. Alumno A: Restar **48. Alumno D:** Dividir **49. Mtra.**: Dividir **50. Alumno C:** Y multiplicar	

Figura 10.8. Fragmento de tabla de relatos (anexo D.)

Siguiendo con la clase y de acuerdo a la fenomenología se expone la parte histórica acerca del tema, es decir la parte formal para la enseñanza.

105. Mtra.: Casi, casi, el hombre siempre se ha preguntado sobre los fenómenos físicos entonces hizo una relación entre la abstracción del pensamiento y los fenómenos físicos, una de estas cosas de matemáticas fueron los símbolos, antes que los números porque primero fueron símbolos y ya después algunos de estos símbolos se convirtieron en números, de qué año creen que datan los números	**Principio de interconexión**

Figura 10.9. Fragmento de tabla de relatos (Anexo D) .

Una vez que se da la introducción en forma de anécdota se reparte el material de apoyo que se ilustró en la sección pasada.

MATERIAL DE APOYO

UNIVERSIDAD INTERCULTURAL
INDÍGENA DE MICHOACÁN

Apuntes de la asignatura

Matemáticas Aplicadas a las Tecnologías Alternativas

Nombre del Alumno______________________________

Kanangío, Picháturo Michoacán

Figura 10.10. Hoja de presentación del material de apoyo (Anexo C).

Introducción

El concepto de función es muy importante y utilizado en matemáticas, es un concepto que se fue construyendo a través del tiempo y al cual han contribuido muchas personas brillantes, al aportar elementos conforme ha avanzado la humanidad, así el concepto hoy en día es un concepto preciso.

Antes de dar la definición formal del concepto de función comencemos por decir que todos los fenómenos que se observan en la vida cotidiana pueden relacionarse con las matemáticas, al momento de relacionar un objeto con otro, una idea con otra, etc. Por ejemplo:

Se puede observar que un niño aumenta su estatura de acuerdo a su edad.

O que el precio del kilo de tortillas aumenta el x% anualmente.

Otro ejemplo de cambio es cuando la cosecha disminuye por causas del cma.

Ejercicios

Escribir 5 ejemplos parecidos a los del ejemplo donde se vea la existencia de dos ideas relacionadas.

Comentar los ejemplos en grupo.

Desde tiempos antiguos, para poder comunicarnos y entendernos mejor, fue necesario usar un mismo idioma, de igual forma surgieron las matemáticas y, al mismo tiempo, también nace lo que daría inicio a lo que hoy en día se conoce con el nombre de función. Surge en el momento en que fue necesario comunicarse la solución de problemas cotidianos. El origen del concepto ha estado siempre unido al estudio de los fenómenos **sujetos a cambios.**

Símbolos …..

Figura 10.11. Ejemplo de contenido del material de apoyo (Anexo C).

Algunos alumnos le dan una hojeada al material y lo guardan en sus libretas, otros comienzan a leer su contenido, algunos preguntan acerca del material, la maestra vuelve a comentar el porqué, la importancia que tiene el material y enfatiza en el propósito de éste. Cuando la maestra está explicando, dos que tres alumnos reprueban con sus gestos la opinión de la maestra, pero de reojo miran la cámara de video.

La maestra informa que la forma de trabajar el material consiste en leer y entender para resolver de forma grupal la mayor parte de los ejercicios propuestos, la lectura se hará de acuerdo al avance de la clase cada uno de los alumnos comenzará leyendo el material alumno por párrafo, pasando la palabra a otro de sus compañeros, los ejercicios serán socializados para revisar los resultados. La maestra aclara que todos pasaran al pizarrón y solo cuando no puedan resolver los ejercicios intervendrá al respecto, muchos de los alumnos están en desacuerdo.

Se lee la parte de la introducción y se comenta entre el grupo, después se sigue con la actividad de explicar sus ejercicios.

139. **Maestro:** Que pase Juan Carlos el de Jarácuaro **140.** **Alumno C:** Que pase Jarácuaro a explicar el problema	**Principio de interacción**

Figura 10.12. Fragmento de tabla de relatos (anexo D).

La mayoría de los ejercicios son explicados y resueltos en el pizarrón, solamente cuando los alumnos piden ayuda de la maestrea ésta interviene una vez que todas las propuestas de sus compañeros no son suficientes.

141. **Mtra.:** A ver cuál es el problema **142.** **Alumno E:** Ah dice, pues que va a repartir a tres hermanos el terreno y lo vamos a repartir en tres partes iguales que tienen de un lado (78 metros) y de otro 4metros de “h” entonces que proporción les toca a los tres hermanos, en partes iguales **143.** **Mtra.:** Y cómo lo van a repartir en partes iguales **144.** **Alumno A:** A mí se me ocurre algo maestra **145.** **Mtra.:** A ver **146.** **Alumno A:** Puedo, yo sé pues que ustedes ya lo resolvieron amigos pero por ejemplo aquí si empezamos ponemos una línea imaginaria aquí podemos sacar un rectángulo y aquí es más fácil dividirlo, igualmente aquí expandimos esta línea pues ya se hace como un… ¿cómo se llama? … un triángulo rectángulo y a si es más fácil dividirlo y sacar la proporción, yo sé que así lo hicieron amigos **147.** **Alumno F:** No **148.** **Alumno E:** Es que a esto sacar el área total para sacar mejor de ahí de eso sumarle ya todo y de ahí sacar o dividir tres hermanos **149.** **Mtra.:** Si así como les dice su compañero es una buena forma la otra seria, … hacer cuadrados de un modo y entonces checar cuántos cuadrados tienen cuántos se les forman y dividirlos	**Principio de interacción** **Principio de niveles** **Principio de interconexión** **Principio de niveles** **Principio de interconexión** **Principio de reinvención guiada**

Figura 10.13. Fragmento de tabla de relatos (Anexo D).

Muchas de las veces que los alumnos piden ayuda es porque no se ponen de acuerdo entre ellos cuál es el verdadero problema del ejercicio a resolver.

Figura 10.14. Trabaja en equipo. Grupo 3 DS-TA-UIIM 2015

150.	**Alumno D:** Es más fácil sacarle el área no y ya dividirla	**Principio de interconexión** **Principio de niveles**
151.	**Alumno E:** Por eso pues para eso tienes que hacer esto	
152.	**Alumno C:** Para eso tienes que dividir	
153.	**Alumno E:** Aquí a completar los seis juegos iguales	
154.	**Alumno A:** Circulando y dividirlo	

Figura 10.15. Fragmento de tabla de relatos (Anexo D).

Los alumnos se equivocaron mucho al resolver sus ejercicios y sólo hasta que se resolvieron en el pizarrón es que se dieron cuenta de los errores que cometieron. Otro punto importante es que les cuesta trabajo formular sus enunciados. Para tratar de mejorar su redacción el consejo fue, coméntale a tu compañero cúal es la idea y una vez que los dos se pongan de acuerdo redáctelo; para que sepan si lo escribieron bien léalo en voz alta a otro compañero si ese otro compañero les entiende es que está bien. Antes que supieran que ellos resolverían los ejercicios que ellos mismos propusieron, redactaron algunos muy elaborados pero ya que supieron que ellos mismo los tendrían que redactar los cambiaron, debido a eso se tardaron mucho tiempo.

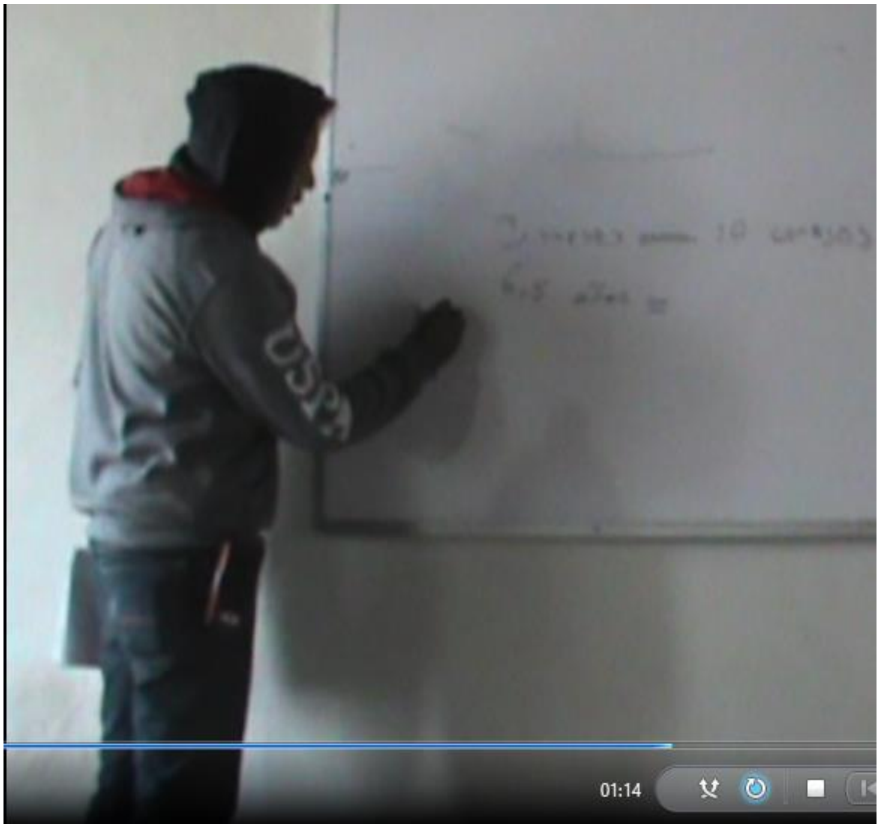


Figura 10.16. Alumno de 3 semestre de DS-TA-UIIM 2015.

Para terminar la primera sesión los alumnos se llevan de tarea los ejercicios que se quedaron pendientes (los que ellos elaboraron y no alcanzó el tiempo para resolverlos), además de algunos de las hojas del material de apoyo.

Las tareas se tienen que entregar por lo menos un día antes de la próxima sesión, porque es de ahí de donde se toman algunos de esos ejercicios para seguir con el tema, usando los ejercicios que ellos redactaron y resolvieron.

La segunda sesión comienza retomando la clase anterior, preguntando la maestra a los alumnos lo que vieron la clase pasada, algunos de los alumnos están atentos pero otros están distraídos, la maestra hace algunas preguntas dirigidas a los alumnos que están distraídos, para que pongan atención a la clase.

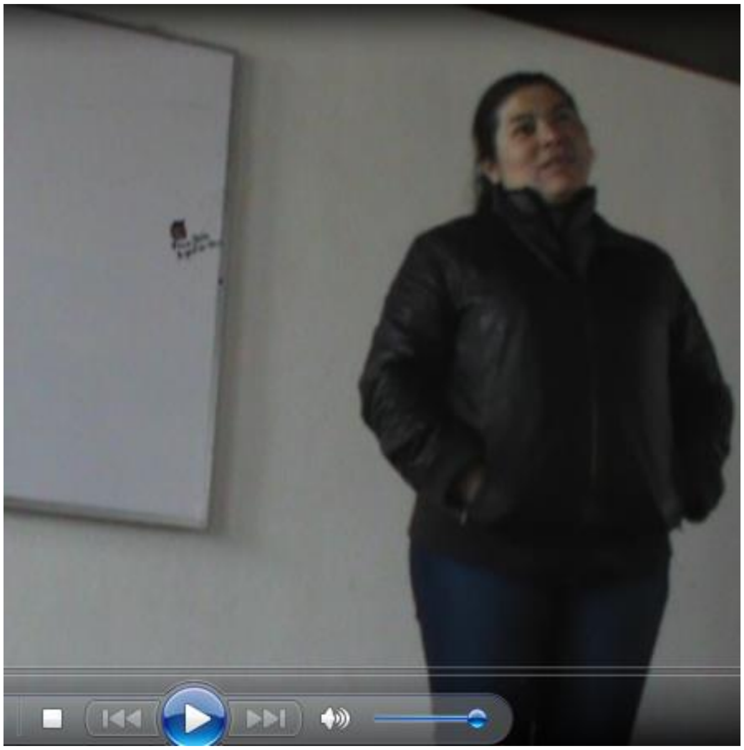


Figura 10.17. Intervención 2015. Mtra. Hermelinda Servín.

En la segunda sesión también se realizan algunos ajustes en la forma de trabajar, de acuerdo a los avances de la clase pasada, en esta intervención se perdió mucho tiempo durante la primera sesión, cosa que se tendrá que ajustar en la segunda y tercera sesión para terminar justo con el material planeado.

504. **Mtra.:** A ver, hoy vamos empezar a elaborar ejercicios de cuando hay cambios, se acuerdan el último ejercicio de la clase pasada. **505.** **Alumno A:** Sí **506**. **Mtra.:** ¿Cuál era? **507.** **Alumno C:** Lo del movimiento de los de los astros.	**Principio de actividad**

Figura 10.18. Fragmento de tabla de relatos (Anexo D).

La idea de estos ejercicios es que ellos mismos trabajen con fenómenos conocidos para ellos y a la vez se indaga sobre las bases que se requieren para comenzar a formular ejercicios donde se inserten los elementos propios de la función, en un principio de forma intuitiva.

559. Mtra.: Puede ser que el enunciado empiece diciendo que tú vas a sembrar maíz en el mes de mayo, y que en el mes de junio las plantas de maíz mide no se tu sabes eso, después en el mes de julio volviste a medir la altura de las plantas y ya tenían determinada altura después en agosto. ¿Sí me entendiste? **560. Alumno B:** Si	**Principio de reinvención guiada**

Figura 10.19 Fragmento de tabla de relatos (Anexo D).

Tomando como base los ejercicios de la clase pasada y los ejercicios que realizaron los alumnos de tarea, la maestra propone estos mismos con algunas otras actividades que involucran insertar algunos conceptos nuevos.

593. Mtra.: Entonces a ver supón que una mamá tiene un hijo cada año ¿cuántos va a tener en quince años? **594. Alumno A:** Quince. **596. Alumno E:** Siete y medio. **597. Mtra.:** ¿Por qué siete y medio?	**Principio de interconexión**

Figura 10.20. Fragmento de tabla de relatos (Anexo D).

Algunos de los ejercicios provocan mucha participación de los alumnos, lo que implica conocer el entorno en que se desenvuelven, y darse cuenta de que muchas veces las ideas son contradictorias y se forman debates que hacen desviar el tema de interés.

615. Mtra.: A ver lo que quiero que hagan que ustedes redacten un ejercicio donde se vea el cambio en el tiempo.	

Figura 10.21. Fragmento de tabla de relatos (Anexo D).

631. Alumno E: Tres gallinas ponen dos huevos por día durante dos meses y medio, cuántos huevos en total ponen las tres gallinas durante esos dos meses y medio.	

Figura 10.22. Fragmento de tabla de relatos (Anexo D).

654. Alumno C: María tiene doce años y su mamá veintiocho, cuántos tenía la mamá de María cuando ella tenía 12 y cuántos tendrá María cuando su mamá tenga cincuenta.	

Figura 10.23. Fragmento de tabla de relatos (Anexo D).

Esta sesión se trabajó en entender los problemas que habían hecho de tarea y en resolverlos correctamente. Trabajaron en equipo, lo cual provocó controversia en la mayoría de los ejercicios. Las grabaciones también fueron causa de distracción porque algunos alumnos se hicieron los protagonistas de la clase mientras que otros no quisieron participar.

755. **Mtra.:** ¿Ahora quién expone sus problemas resueltos? pónganse de acuerdo quién lo va a pasar a exponer al pizarrón. **756.** **Alumno B:** Safo. **757.** **Alumno A:** Safo. **758.** **Alumno E:** Safo.	

Figura 10.24. Fragmento de tabla de relatos (Anexo D).

Los alumnos ponen mucha resistencia a participar, pero como están conscientes de que tarde o temprano les tocará participar algunos acceden espontáneamente.

760. **Alumno C:** Yo por qué **761.** **Alumno E:** Dice que un par de conejos tiene diez conejos en tres meses ¿cuántos conejos tendrá en seis años y medio? Cuándo nos estamos refiriendo al par de conejos es de que es una pareja el hombre y la mujer como quien dice hembra y macho y pos son este tres meses tres meses y son diez conejos en los tres meses, en estos tres meses son igual a diez conejos o sea que van hacer seis años y medio, seis años y medio. **762.** **Mtra.:** A ver los que están acá le están entendiendo por que ahorita me lo van a platicar otra vez y a resolver ustedes, apúntenlo porque este ahorita me lo van explicar y si no le están entendiéndome pues pregúntenme.	

Figura 10.25. Fragmento de tabla de relatos (Anexo D).

También se tuvo que estar presionando para que los alumnos no se distrajeran y pusieran atención a sus compañeros, porque como no terminaron todos los ejercicios y sabían que los que no terminaron se los llevarían de tarea, algunos querían avanzar y no ponían atención hasta que se les presionaba de alguna manera.

Figura 10.26. Grupo de tercer semestre 2015 Desarrollo Sustentable Tecnologías Alternativas UIIM

Las actividades de trabajo en equipo fueron exitosas aunque se consumió demasiado el tiempo, terminaron con la redacción de la mayoría de las secuencias, resolvieron varios de los ejercicios planteados quedando de tarea los propuestos en el material de apoyo.

776. **Alumno E:** Ya me siento, gracias por su atención. **777.** **Alumno A:** Un fuerte abrazo al compañero "Fer" bravo. **778.** **Mtra.:** deja veo si puedo conseguir los ejercicios que te hacen falta.	**Principio de interacción**

10.27. Fragmento de tabla de relatos (Anexo D).

Al inicio, los alumnos se rehusaban a ser grabados, por lo que se les propuso que ellos mismos realizaran esta actividad. Esta decisión fue positiva ya que ello les dio confianza y ya no hubo más resistencias al respecto de grabar las sesiones.

-- -------------------------**Tercera sesión** ------------------------------- **779.** **Mtra.:** Hola Buenos días **780.** **Alumno A:** Quien será el camarógrafo hoy **781.** **Alumno B:** Que sea Gina	

Figura 10.28. Fragmento de tabla de relatos (Anexo D).

Para la tercera sesión se analizaron previamente las secuencias que elaboraron los alumnos para incluir más elementos. En esta sesión se retomó la lectura del material de apoyo.

785. **Mtra.:** Vamos a continuar con el tema pero ahora vamos a trabajar en forma diferente, ahora vamos a seguir leyendo el material que les di hace dos clases, ustedes me van ayudar a leer por párrafos uno a la vez. Comiencen donde empieza con símbolos.	**Principio de interconexión**

Figura 10.29. Fragmento de tabla de relatos (Anexo D).

A los alumnos les cuesta trabajo leer en público, frente a sus compañeros, en un principio tampoco querían leer, pero poco a poco todos terminaron por leer algunos párrafos.

787. **Mtra.:** En su libreta dibujen un símbolo **788.** **Mtra.:** ¿Terminaron? Pasen su libreta a su compañero de al lado. **789.** **Mtra.:** Revisen lo que hicieron sus compañeros y pongan una palomita si creen que está bien.	**Principio de actividad**

Figura 10.30. Fragmento de tabla de relatos (Anexo D).

Algunos dibujos contenían letras y números, algunos otros solo una imagen. La idea de este ejercicio es confrontar las ideas, contra las definiciones.

796. Mtra.: Seguimos con la definición de símbolo **797. Alumno B:** Definición Símbolo. El concepto de símbolo (una palabra que deriva del latín simbŏlum) sirve para representar, de alguna manera, una idea que puede percibirse a partir de los sentidos y que presenta rasgos vinculados a una convención aceptada a nivel social. El símbolo no posee semejanzas ni un vínculo de contigüidad con su significado, sino que sólo entabla una relación convencional……	**Principio de interconexión**

Figura 10.31. Fragmento de tabla de relatos (Anexo D).

Una vez que leen la definición se pregunta si el dibujo que hicieron cumple con los requisitos.

802. Alumno A: Es que, maestra primero hubiéramos leído la definición.	**Principio de interconexión**

Figura 10.32. Fragmento de tabla de relatos (Anexo D).

Con esta actividad comienza un debate, pero se termina enfatizando la importancia de los consensos y una definición previa.

806. Mtra.: Sigamos con la lectura.	**Principio de interconexión**
807. Alumno C: El plano cartesiano es un sistema de referencias que se encuentra conformado por dos rectas numéricas, una horizontal y otra vertical, que se cortan en un determinado punto. A la horizontal se la llama eje de las abscisas o de las 'equis' y al vertical eje de las ordenadas o de las 'yes', en tanto, el punto en el cual se cortarán se denomina origen. **808. Mtra.:** Quien sabía lo que es un plano cartesiano **809. Alumno C:** Yo	**Principio de reinvención guiada**

Figura 10.33. Fragmento de tabla de relatos (Anexo D).

La forma de trabajar hasta ahora es de menos interacción entre los alumnos, ahora es más entre alumnos-maestra, la idea es que los alumnos recuerden algunos conceptos básicos que necesitarán más adelante.

829. Mtra.: Bueno lo que sigue del texto nos lo vamos a saltar porque son cosas que ustedes ya saben y solo lo puse ahí para recordar, vamos a pasarnos hasta donde empieza lo de función. **830. Alumno G:** En la página … **831. Mtra.:** No, no no, perdón en donde dice ecuación. Pero antes díganme qué es una ecuación **832. Alumno E:** Es una función **833. Mtra.:** Bueno aún no llegamos a esa parte, pero entonces que es una función. **834. Alumno E:** Una expresión matemática **835. Mtra.:** mmm, sigamos con el texto y cuando lleguemos a función vemos si una expresión matemática es una función. **836. Alumno E:** Está bien	**Principio de niveles**

Figura 10.34. Fragmento de tabla de relatos (Anexo D).

En esta sesión se vieron los elementos necesarios como las variables, el plano cartesiano, las relaciones, las ecuaciones, etc., bases para abordar la definición de función. Los objetos mentales de los alumnos sobre la función se observan en la forma en que resuelven los ejercicios planteados. Algunos alumnos pueden identificar los elementos básicos y otros aun no; los que identifican los elementos por lo regular pueden plantear el problema y tratan de encontrar la solución.

841. **Alumna A:** Cuando teníamos el problema de las tortillas. **842.** **Mtra.:** Recuérdenme que decía el ejercicio. **843.** **Alumno C:** Que el kilo de tortillas costaba 11 pesos y con 50 pesos cuantos kilos podíamos comprar **844.** **Mtra.:** Puedes pasar al pizarrón a anotar tu expresión algebraica **845.** **Alumno A:** 50=11X+6 **846.** **Mtra.:** Aja, esa x que representa entonces **847.** **Alumno A:** El número de kilos que se puede comprar **848.** **Mtra.:** Sigamos con el texto **849.** **Alumno C:** Incógnitas y variables. Los valores conocidos pueden ser números, coeficientes o constantes; y también variables cuya magnitud pueda ser establecida a través de las restantes ecuaciones de un sistema, o bien mediante otros procesos	**Principio de interconexión**

Figura 10.35. Fragmento de tabla de relatos (Anexo D).

Se retoman los ejercicios o secuencias que fueron elaborados previamente para que inserten los conocimientos adquiridos.

892. **Mtra.:** Ahora vamos a encontrar una recta que pase por dos puntos de la gráfica que ya tienen, pero quiero que vean como a partir de datos también pueden obtener expresiones algebraicas.	

Figura 10.36. Fragmento de tabla de relatos (Anexo D).

Las actividades de los ejercicios son básicamente para que cambien de nivel, cuando la parte verbal la pueden relacionar con una expresión algebraica, o a una tabla de datos.

902. **Alumno G:** Relación. Correspondencia es equivalente a Relación. En nuestra lengua, decir “en relación a”, es equivalente a decir “corresponde a”….Ejemplos: En una tienda, cada artículo está relacionado con su precio; o sea, a cada artículo le corresponde un precio…A cada libro le corresponde un número de páginas…A cada ser humano le corresponde una fecha de nacimiento. **903.** **Mtra.:** Invéntense otro dos ejemplos y anótenlos en su libreta que son los que voy a tomar en cuenta para el examen. **904.** **Mtra.:** ¿Seguimos? **905.** **Mtra.:** Se fijan que tenemos dos variables en esos ejercicios.	**Principio de interconexión**

Figura 10.37. Fragmento de tabla de relatos (Anexo D).

Después vienen los ejercicios de relaciones, previamente se introdujeron las variables y los tipos dentro de las actividades de las secuencias planteadas. En las secuencias se les pedía que realizaran una tabla de datos con dos columnas para identificar las variables dependientes e independientes.

925. Mtra.: No se crean, para saber cuál es la variable se puede ver en la tabla en una columna pongan el nombre "X" y en la otra "Y", entonces cualquiera puede ser la dependiente porque pueden poner cualquiera de las dos en una columna. Entonces vamos a ponernos de acuerdo, si ponen una ecuación a la que se encuentre en el lado derecho será la dependiente, se acuerdan en el ejercicio de las tortillas donde podían cambiar la "exis" por la "y", acá también se puede hacer eso pero si tienen una expresión algebraica tienen que tomar en cuenta las reglas de los signos para despejar. **926. Mtra.:** Ya casi terminamos, vamos con la función Gina creo que te toca.	**Principio de reinversión guiada**

Figura 10.38. Fragmento de tabla de relatos (Anexo D).

Aunque aún faltaban cerca de 40 min para que se terminara la sesión, los alumnos se veían cansados, ya que la sesión dura 2 hrs. Es pertinente decir que en esta sesión el trabajo en equipo hasta ahora no se había desarrollado de manera óptima debido a que los alumnos se desviaban mucho del tema, además que se observaron muchas dificultades para plantear las secuencias.

932. Mtra.: Es por eso que deben tener la definición formal, no sé si nos dé tiempo de trabajar el concepto de función formalmente, por lo pronto vamos a seguir con los ejercicios que estamos trabajando. **933. Mtra.:** Qué dice el ejercicio que se encuentra en sus notas **934. Alumno B:** Cada número entero posee un único cuadrado, que resulta ser un número natural. **935. Mtra.:** Vamos a completar la tabla, consideren los números del cero al 5 positivos y negativos. Pónganlos en una columna, y después calculan el cuadrado y lo anotan en la otra columna. **936. Alumno B:** ¿Cómo en el otro ejercicio?	**Principio de interconexión**

Figura 10.39. Fragmento de tabla de relatos (Anexo D).

En esta actividad ya comenzaron a trabajar en equipo para maximizar los tiempos, aunque en la práctica algunos no escribieron los ejercicios en su libreta actividad individual.

970. **Mtra.:** Otra vez estos conceptos entran dentro la teoría de conjuntos, pero veámoslos como los grupos de cosas que están en una columna y en otra o variables dependientes contra variables independientes; pero sí vamos hacer un ejercicio con los trabajos anteriores. En cada uno de los ejercicios pongan a un lado cuáles son las variables dependientes y cuáles las independientes, a las dependientes les agrega el apellido dominio y a las independientes contradominio o rango. **971.** **Alumno A:** ¿A todos? **972**. **Mtra.:** Sí **973.** **Alumno A:** Son muchos maestra. **974.** **Alumno G:** No estés llorando y apúrate que ya me quiero ir.	**Principio de interconexión**

Figura 10.40. Fragmento de tabla de relatos (Anexo D).

Una vez que terminan ésta actividad se lee la definición formal de función, ahora la maestra indaga lo que han comprendieron del concepto hasta ese momento.

982. **Mtra.:** La idea principal de estas clases es que ustedes puedan pasar de una forma a otra. **983**. **Alumno A:** Uuy maestra eso está bien fácil. **984**. **Mtra.:** Vamos a ver entonces, ¿esta gráfica creen ustedes que representa una función?	**Principio de niveles**

Figura 10.41. Fragmento de tabla de relatos (Anexo D).

La maestra dibuja un círculo en un plano cartesiano

985. **Alumno B:** Sí **986.** **Mtra.:** Pues resulta que no; sí trazamos una línea perpendicular al eje “equis” troza a la gráfica en dos puntos. ¿Qué quiere decir eso? **987.** **Alumno A:** Ni idea **988.** **Mtra.:** Se acuerdan que dijimos que por cada variable del dominio solamente habría una única variable independiente en el contradominio **989.** **Alumno C:** Sí **990.** **Mtra.:** El hecho de que pase por dos puntos quiere decir que a esta variable dependiente le corresponden dos variables independientes **991.** **Mtra.:** Entonces no cualquier gráfica representa una función, están de acuerdo.	**Principio de reinvención guiada**

Figura 10.42. Fragmento de tabla de relatos (Anexo D).

Después de esta actividad la maestra explica algunas ideas básicas para identificar una función y pide que trabajen en parejas para que a la gráfica del pizarrón le den una forma algebraica y una tabla de datos.

998. **Alumno B:** Ah es como el ejercicio que decía que los números enteros tenían un positivo y un negativo o algo así verdad maestra. **999.** **Alumno G:** Traes regla, para ir obteniendo los valores y ponerlos en una tabla de valores.	

Figura 10.43. Fragmento de tabla de relatos (Anexo D).

Para trabajar el concepto de función pide a los alumnos que anoten en sus secuencias los ejercicios que cumplen con los criterios de función y los que no, de la misma forma que identifique el dominio, contradominio y la relación.

1005. Mtra.: Es probable que ahora que quieran hacer su tarea se encuentre con esta notación, para que no haya reclamos quiero que escriban esta expresión y=2x+2 y me digan si es una función o no. **1006. Alumno A:** Sí maestra **1007. Mtra.:** ¿Y cómo sabes?	**Principio de niveles**
1009. Mtra.: Muy bien ¿y esta otra f(x)=3x+5? **1010. Alumno G:** Sí maestra, es la misma solo con notación diferente **1011. Mtra.:** Bueno eso es lo que quería que vieran.	**Principio de interconexión**

Figura 10.44. Fragmento de tabla de relatos (Anexo D).

Antes de dar la clase por terminada la maestra habla acerca de la notación sobre la función y deja tarea.

1018. Mtra.: A los que ya les revisé la libreta nos vemos el jueves temprano para el examen, será a la primera hora para que lleguen pronto.	**Principio de interacción**

Figura 10.45. Fragmento de tabla de relatos (Anexo D).

10.2 ANÁLISIS CUALITATIVO

En los renglones del 16 al 27 se observa que los alumnos tienen problemas para resolver, los ejercicios introductorios, duran mucho tiempo en entender el problema.

Del renglón 30 al 33 se observan los errores que cometieron algunos alumnos al observar que no coinciden los resultados del ejercicio, en el 32 también se observa el problema de qué los alumnos no poden explicar la idea completa del ejercicio.

Del 34 al 40, se indaga sobre los tipos de errores para que los alumnos se den cuenta y corrijan, ahí es cuando aparece el salto de nivel cuando ellos se dan cuenta de que se equivocaron, pero también desde el renglón 16 y hasta el 40, se muestra la falta de práctica en el uso de las operaciones básicas (sumar, resta, multiplicar y dividir).

Es de notarse que el principio de interacción es el que más se presentó durante la primera sesión. Lo cual se puede considerar favorable, posiblemente es el principio para conectar y llevaran a cabo procesos de interconexión, de reinvención; permitiendo la participación activa de los alumnos, en consecuencia el reconocimiento de niveles en el ordenamiento del fenómeno y de su aplicación, con el principio de realidad.

Después del reglón 40 se observan problemas para trabajar en equipo, se desvían fácilmente de la actividad (ejemplos renglón: 55, 70, 84, 85 y 88), para evitar la distracción la maestra tiene que intervenir. Toda esta sesión trata de trabajo en equipo y los alumnos son los que tienen que redactar enunciados con sus propias vivencias para utilizarlos en la elaboración de las secuencias didáctica, esta actividad es interrumpida debido al tiempo consumido dejando pendiente algunos enunciados que no fueron claros.

Después del renglón 334 se re-direcciona la sesión, ahora se indaga sobre los conocimientos previos que tienen los alumnos sobre fenómenos naturales, en los renglones 350-365 se intuye que los alumnos no tienen la ideas fortalecidas y dejan a medias sus preguntas o afirmaciones, así como en los renglones de los 400`s esta actividad servirá para comenzar la segunda sesión.

En la segunda sesión después del renglón 502, se retoma la idea de indagar fenómenos naturales. Se pretende que ahora vayan combinando con el tiempo, después de renglón 510 también se observan ideas vagas de algunos fenómenos, aunque se logra aterrizar con fenómenos de crecimiento de milpas y estaturas (renglones: 526, 541, 558, etc.) y crecimiento de poblaciones (conejos, gallinas, humanos) renglones: 593, 631, 649.

La actividad principal de esta sesión fue elaborar secuencias de los fenómenos de crecimiento y resolverlos, estas actividades las realizaron de forma individual, grupal y en equipo. Cuando trabajaban en equipo surgían muchos debates, casi de cualquier tema (renglones 593-632, 631-649, etc.).

Después del renglón 775 cuando pasan a resolver los ejercicios en el pizarrón se observan errores de operaciones básicas, pero ya menos de las que se revisaron en la primera sesión, ahora se observaron más errores de dedo que de fondo, recordar que estos ejercicios fueron resueltos en equipo.

En la tercera sesión, después del renglón 779 se analizaron las secuencias que se estuvieron realizando durante los dos sesiones anteriores y se incorporaron elementos claves como las variables, etc. elementos para llegar al concepto de función. Los ejercicios que trataron sobre el plano cartesiano o elaboración de tabla de datos no se detectaron problemas de fondo renglones 814, …Donde sí se notaron dificultades fue al tratar de elaborar expresiones algebraicas a partir de los enunciados aunque esta actividad se comenzó desde la primera sesión (renglón 845).

En los ejercicios de relación tampoco se observaron problemas, en los ejercicios que ellos ya habían resuelto, se les pidió que identificaran la relación entre las variables (renglón 925). Donde volvieron a observarse problemas fue cuando se les pidió que revisaran sus ejemplos y respondieran si eran o no funciones. Otra dificultad identificada es que les cuesta trabajo hacer el cambio de forma de una expresión algebraica a un enunciado o a una tabla de datos. Sin embargo, cuando trabajan cada elemento por separado si lo hacen de manera competente, por ejemplo graficar, elaborar tablas de datos, incluso después de varios intentos logran obtener las expresiones algebraicas (renglones 935-968).

Después del Renglón 977 se observa que algunos alumnos logran formar un objeto mental robusto del concepto y lo pueden identificar en sus diferentes formas renglones 978-982.

En el renglón 984 se pueden observar los errores que cometen los alumnos al no tener práctica, pero con un poco de ayuda logran el objetivo de poder identificar las funciones en diferentes contextos. Esto último también está de acuerdo a los resultados cuantitativos de las evaluaciones del tema.

10.3 DESCRIPCIÓN CUANTITATIVA

Con la hipótesis preliminar de los resultados del diagnóstico inicial, que los alumnos de la Terminal en Tecnologías Alternativas obtienen mejores resultados, se procedió a analizar las puntuaciones de los 10 reactivos que forman el instrumento de evaluación sobre el objeto mental "función" a los alumnos de nuevo ingreso y los alumnos de tercer semestre de la carrera en Desarrollo Sustentable y terminal en Tecnologías Alternativas.

Los resultados de los diez reactivos en todos los años fueron muy pobres, lo cual puede atribuirse a que muchos de los alumnos en la UIIM provienen de diferentes bachilleratos y con intenciones de ingresar a las licenciaturas de ciencias sociales y humanidades, por lo cual sus bachilleratos no contemplan materias de matemáticas. Aunque de acuerdo a los planes de estudio de secundaria y bachillerato, todos los alumnos que presentaron el diagnóstico tienen nociones sobre el concepto.

Al hacer la comparación de los grupos de alumnos de nuevo ingreso con los de tercer semestre, se evidencia que los alumnos de tercer semestre superan a sus compañeros de nuevo ingreso, como se muestra en la Tabla 7.3.2. Sin embargo ambos promedios son muy bajos. Cabe señalar que los grupos de tercer semestre son pequeños comparados con los de nuevo ingreso.

Taba 10.1 Promedios de la evaluación sobre el concepto de función 2013

Año	**Promedio** (Antes de la intervención)	
	De nuevo ingreso	De la Terminal en Tecnologías Alternativas
2013	1.9.	4.3

El modelo de enseñanza de aprendizaje sobre la función que se presentó en unidades anteriores comenzó a implementarse en el año 2013, y el modelo fue modificándose año con año finalizando con la intervención en los grupos de tercer semestre de la licenciatura en Desarrollo Sustentable y Terminal en Tecnologías Alternativas. Los grupos que recibieron las intervenciones del modelo fueron pequeños; cuatro alumnos en el año 2013, ocho en el 2014 y nueve en 2015. Las intervenciones se evaluaron con los reactivos seleccionados para el diagnóstico del concepto función**,** recordando que los resultados de estos reactivos en el diagnóstico inicial fueron bajos, tanto para los alumnos de nuevo ingreso como para los alumnos de la licenciatura en Desarrollo Sustentable y Terminal en tecnologías Alternativas.

Los promedios generales después de implementar el modelo mejoraron. Para re-elaborar el material de la segunda intervención, se realizó un análisis de los resultados obtenidos en la secuencia didáctica que se implementó con anticipación, modificando así la siguiente secuencia y también se procedió para la tercera intervención, los cambios constan de diferentes actividades y diferente forma de organizar la secuencia pero mismos objetivos. Los cambios que se hicieron, fueron relacionados con problemas de las investigaciones que se encontraron referentes a dificultades del aprendizaje de la función, los cambios tomando obedecen a algunas de las recomendaciones que se encontraron. En la Tabla 7.3.3. Se muestra como el promedio mejoró después de las intervenciones del modelo.

Tabla 10.2 Promedios del instrumento de evaluación de función una vez aplicado el modelo.

Año de intervención	Alumnos de la Terminal en Tecnologías Alternativas
	Promedio (Después de la intervención)
2013	6.75
2014	7.25
2015	8.25

En el año 2015 se implementó nuevamente el modelo, previamente modificado por el comité tutorial, la intervención fue monitoreada por medio visual con la intención de observar el proceso desde otro punto de vista, para la evaluación y modificación del mismo.

10.4 ANÁLISIS CUANTITATIVO

El componente de actuación de los alumnos de la UIIM incluye el conocimiento sobre las posibles dificultades sobre el concepto de función de las cuales se obtuvo un primer acercamiento a través del análisis del diagnóstico inicial. El análisis consintió en revisar los resultados de 169 diagnósticos iniciales, que presentaron alumnos de tronco común de diferentes ciclos escolares. Una vez revisado los resultados generales se analizaron los resultados de cada uno de los diez reactivos que formaron el diagnóstico sobre la función, de los cuales:

Sólo el 14% resolvieron correctamente el ejercicio #1, 39% el ejercicio #2, 55% el ejercicio #3, 6% el ejercicio #4, 30% el ejercicio #5, 13% el ejercicio #6, 9% el ejercicio #7, 8% el ejercicio #8, 10% el ejercicio #9 y 7% el ejercicio #10. Esto es, la mayoría de los alumnos que resolvieron estos diagnósticos no solamente no aprobaron el diagnóstico sobre la función sino que los resultados son pobres.

En la gráfica de la figura 5.3.1, se muestra el porcentaje de respuestas correctas de cada uno de los ejercicios que forman el diagnóstico sobre función, el cual se aplicó únicamente a los alumnos de tercer semestre de la licenciatura en desarrollo sustentable (año 2013) y se comparan con los resultados analizados con anterioridad. Recordar que los reactivos o ejercicios del diagnóstico sobre la función se encuentran en el diagnóstico inicial de donde se obtuvo la información.

En la gráfica de frecuencias de la figura 10.3.1, se puede observar que las respuestas correctas de los diez reactivos que integran el diagnóstico fueron muy pobres tanto para para los alumnos de nuevo ingreso , como para los alumnos del tercer semestre de la licenciatura en Desarrollo Sustentable con terminal en Tecnologías alternativas (año 2013), pero que el porcentaje es relativamente mayor, sin embargo se observa que varios reactivos no fueron contestados por unos y otros alumnos.

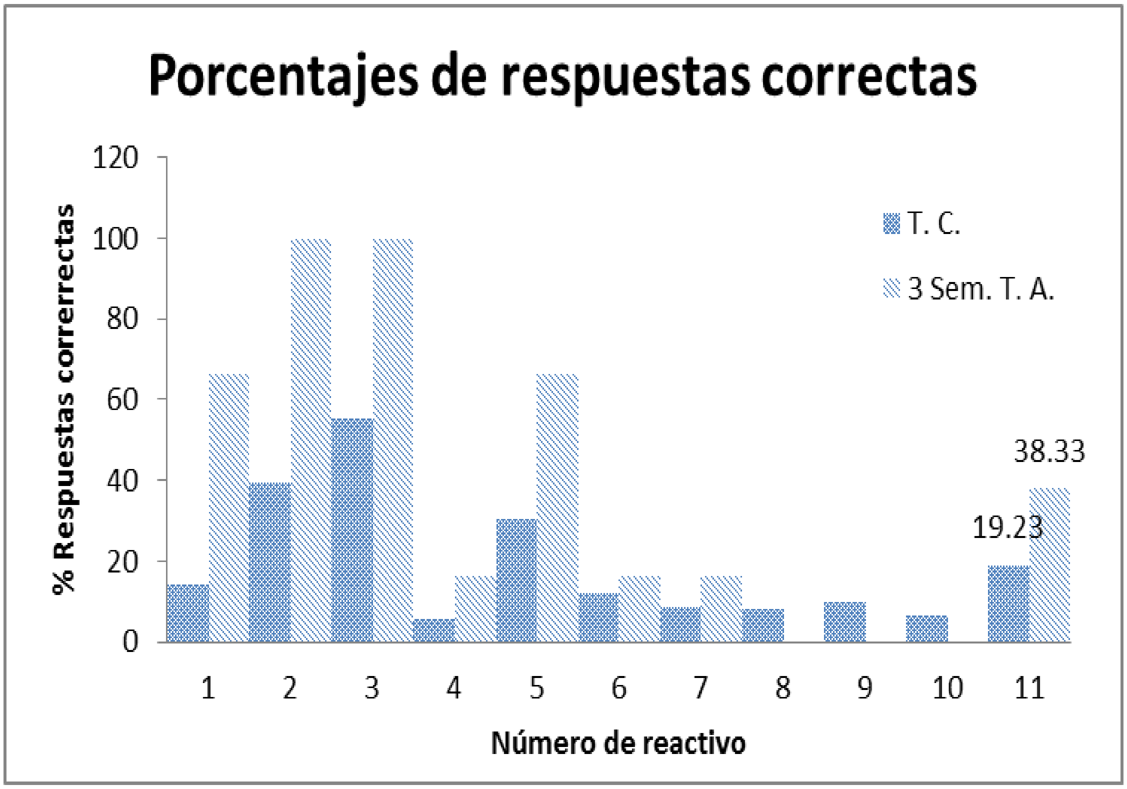


Figura 10.3.1. Porcentaje de respuestas correctas sobre los reactivos del diagnóstico de función. T. C. es la etiqueta para alumnos de Tronco Común, 3 Sem. T. A. para alumnos de tercer semestre de la licenciatura en desarrollo sustentable.

Los promedios de 38 y 19 en escala de cien son demasiado bajos, aunque se observe una tendencia positiva para alumnos de tercer semestre. Las calificaciones aprobatorias con escala de 0 a 10 es 6, y los valores redondeados alcanzados en esté instrumento son de 2 y 4, es decir valores insuficientes.

La Tabla 10.3. muestra las diferencias de porcentajes de los resultados entre alumnos de la licenciatura en Desarrollo Sustentable con los de Tronco Común y la relación del contenido del reactivo con el concepto de función de acuerdo con el componente formal.

Tabla 10.3. Evaluación de reactivos utilizados para el componente de actuación

# de Reactivos	Porcentaje de respuestas correctas		Relación con el concepto de función o categoría de la Tabla 3.3.1
	T. C.	3 Semestre T. A.	
1	14%	70 %	La función como… y diferentes formas de función. d y e.
2	40%	100 %	d y e.
3	56%	100 %	d y e.
4	6%	20 %	Cambio crecimiento, variables dependientes e independientes. a, b, c y j
5	31%	70 %	a, b, c y j
6	14%	20 %	Tablas y gráficas. g y h
7	9%	20 %	g y h
8	8%	0 %	a, b, c
9	10%	0 %	a, b, c y j
10	7%	0 %	a, b, c y j

Categoría	**Términos**
a)	Variables
b)	Dependencia o conexión
c)	Variables independientes y dependientes
d)	La función como…
e)	Las funciones en diferentes formas
f)	Las funciones vistas como funcionales, operadores.
g)	Tablas
h)	Gráficas
i)	Conexión factual

j) Parámetros y conexiones formales
k) Funciones matemáticas, con nombre propio
l) Significado y uso de la función
m) Notación

- En cuanto al instrumento de evaluación de la función, se observó una mayor puntuación, en los alumnos que recibieron el material del modelo de enseñanza de aprendizaje. Se puede considerar significativo porque en promedio la calificación aumentó considerablemente.
- Para los alumnos a quienes se les aplicó tanto el diagnóstico inicial, como el instrumento de evaluación del tema de función, en el reactivo #5 (que trata sobre calcular el mayor número de vasos de 90 ml que pueden llenarse con un litro de jugo) la puntuación disminuyó en la segunda generación a la que se le aplicó el modelo. De la revisión al instrumento escrito se observó que muchos estudiantes no realizaron cálculos y en las entrevistas explicaron que no realizaron cuentas escritas porque estaban fácil de responder. En este reactivo la tendencia fue a usar la regla de tres y los que no hicieron cuentas dijeron "lo hicimos de memoria". Aunque la diferencia en puntuaciones no es significativa, sí implica falta de concentración.
- Las actitudes de los alumnos hacia el instrumento fueron diferentes para aquellos a quienes se les aplicó el modelo y para los que no. A los alumnos que no recibieron el modelo se les hizo interesante y discutían los problemas después de la aplicación y tenían el ánimo de que se le aplicaran más instrumentos de este tipo. Los estudiantes que recibieron el modelo se pueden clasificar en dos: los que siempre están atentos y los que parece que no están interesados. Los atentos siempre quieren mejorar y siempre están a la vanguardia, tienen mucha disposición. El otro grupo quiere hacer lo mínimo y no son cooperadores; para las entrevistas, que se hicieron después del curso,

sólo los alumnos entusiastas participaron y mientras que los otros no respondieron al llamado de entrevistas.

PARTE IV: CONCLUSIÓN

CAPÍTULO 11: CONCLUSIONES

Una vez que se llevaron a cabo las intervenciones, con el modelo de enseñanza del concepto de función, con la metodología propuesta y analizaron los resultados obtenidos, se pueden apoyar los supuestos teóricos con las que se inició este trabajo, concluyendo así, que el modelo que se planteó fue exitoso. Y que elaborar secuencias didácticas entre alumnos y profesor, en el marco de la teoría de la Educación Matemática Realista ofrece un ambiente de confianza, favoreciendo la posibilidad de una mejor comprensión del concepto de función, como lo indican los resultados de los instrumentos analizados que resolvieron los alumnos de de la UIIM de la licenciatura de Desarrollo Sustentable con Terminal de Tecnologías Alternativas. Además de la conclusión principal anterior, también se concluye que la revisión bibliográfica sobre el concepto de función es fundamental debido a que la concepción de la función es un pilar para el desarrollo del cálculo, lo que hace necesario desarrollar otros temas del currículo bajo una revisión más general del eje de formación disciplinar de la Terminal en Tecnologías Alternativas y mejorar de esta forma todos los programas curriculares de matemáticas que se encuentran en el plan curricular.

Respecto a la revisión de libros de textos; las conclusiones que se pueden enunciar son: algunos autores de los libros analizados mencionan la importancia del concepto de función, sin embargo no se detienen en su estudio y no hacen suficiente hincapié en los conceptos de variación, dependencia e independencia y otros. Otra conclusión fue que los contenidos analizados no favorecen la recreación histórica del concepto si no que presuponen que los conocimientos previos al de función están sólidamente construidos en los estudiantes que inician sus carreras profesionales y se pasa de manera breve sobre el concepto de función para iniciar los siguientes temas del cálculo, confirmando que algunas de las dificultades detectadas por otros autores, son semejantes a las provenientes del análisis fenomenológico.

También se concluye que el concepto u objeto mental "función" es muy extenso, y el desarrollo del tema tiene que contemplar los objetivos y el contexto donde se implemente, para este caso particular se necesitan bases de álgebra y geometría analítica. De la experiencia obtenida durante el desarrollo de esta investigación se confirmó lo expuesto por Sierpinska (1992) y Sfard (1989), donde se reporta que los libros de texto utilizados en las universidades, ofrecen diferentes versiones del concepto de función y esto puede confundir a los alumnos, lo que puede favorecer

De los libros de texto que se revisaron se encontró uno que maneja un modelo de enseñanza en la primera unidad "Introducción", parecido al que se propuso en este trabajo aunque muy compacto, sólo que este libro por lo general se encuentra en bibliografía de programas para ciencias exactas y de posgrado, es el libro de Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático de Courant y John (1999). La mayoría de modelos de enseñanza de referencia, no toman en consideración la situación real de los alumnos ni las dificultades cognitivas que ellos enfrentan cuando estudian estos temas.

En cualquier caso, como en toda investigación matemática, el análisis que se realizó sobre el concepto u objeto mental "función" surge de la necesidad de encontrar nuevas técnicas para abordar una serie de problemas que los métodos tradicionales no han podido resolver, pero a la vez también se observó que la definición formal que tiene, por ser una construcción propia de las matemáticas no es apropiada para un curso de introducción a las matemáticas ya que es necesario de conceptos previos, que muchas veces o en la mayoría de los casos los alumnos no cuentan con ellos.

Otra de las observaciones importantes de la investigación aquí presentada es que en la mayoría de la bibliografía recomendada para el estudiar la función los autores utilizan la definición más actual, la cual unifica en un concepto abstracto y, aunque la definición está perfectamente desarrollada y metodológicamente organizada, hace que didácticamente no sea lo más apropiado para estudiantes que están incursionando en el tema

BIBLIOGRAFÍA

Alargia, H., Bressan, A. M., & Sadovsky, P. (2005). *Reflexiones teóricas para la Educación Matemática* (Vol. 5). Buenos Aires, Argentina: Libros del zorzal.

Alsina, À. (2009). El aprendizaje realista: una contribución de la investigación en educación matemática a la formación del profesorado. En M. González, M. González, & J. Murillo, *Investigación en Educación Matemática XIII* (págs. 119-127). Santander: SEIEM.

Apostol, T. M. (2006). *Calculus: Calculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal.* México: Reverté Ediciones.

Apostol, T. M. (2009). *Calculus volúmen I: cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal.* Barcelona: Reverté.

Armenta Tellechea, E. (2003). El cálculo según Euler. En *Apuntes de historia de las matemáticas* (Vol. II, págs. 19-26). Hermosillo, Sonora, México: Departamento de matemáticas, Universidad de Sonora.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., & Gómez, P. (1995). La enseñanza de los principios del calculo: problemas epistemológicos cognitivos y didácticos. *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*, 97-140.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., & Gómez, P. (1996). *Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* Bogotá: Grupo Editorial Iberoaméricana.

Ausbel, D. P. (1976). *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo.* México: Trillas.

Azcárate, G. C., & Deulofeu, P. J. (1996). *Funciones y graficas.* Madrid, Espana: Síntesis.

Bernoulli, J. (1718). Remarques sur ce qu'on a donné jusqu' ici des solutions des probléms sur les isopérimètres. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris* (págs. 100-139). París: Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris.

Bourlet, C. (1914). *Carlo Bourlet.* Paris, Francia.

Boyer, C. B. (1992). *Historia de la matemática.* Alianza Universidad Textos.

Boyer, C. B., & Pérez, M. M. (1999). *Historia de la matemática.* Alianza.

Bravo, M. L., & Arrieta, J. J. (2005). Algunas reflexiones sobre las funciones de las demostraciones matemáticas. *Revista Iberoamericana de educación, 35*(3), 25.

Bressan, A. M., & Gallego, M. F. (2011). La Educación Matemática Realista. *III Congreso Nacional de Matemáticas y Problemáticas de la Educación Contemporánea*, (págs. 1-12). Santa María, Prov. de Catamarca. Argentina.

Bressan, A., Zolkower, B., & Gallego, M. F. (2005). Los principios de la educación matemática realista. En H. R. Alagia, A. Bressan, & P. Sadovsky, *Reflexiones teóricas para la educación matemática* (págs. 69-98). Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Brousseau, G. (2007). *Iniciacion al estudio de la teoría de las situaciones didácticas/Introduction to the study the theory of didactic situations: Didactico/Didactic to Algebra Study* (Vol. 7). Libros del Zorzal.

Bruner, J. (1988). *El aprendizaje por descubrimiento.* México: Trillas.

Bunge, M. (1997). *Epistemología: curso de actualización.* Siglo XXI.

Burden, R. L., & Faires, J. D. (2009). *Análisis numérico* (7 ed.). México, D. F.: Thomson Learning Inc.

Cantoral, R., & Montiel, G. (2001). *Funciones: Visualización y Pensamiento Matemático. Prentice Hall & Pearson Edución, México.* México: Prentice Hall & Pearson Edución.

Carlson, M. P. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. *CBMS Issues in Mathematics Education, 7*, 114-162.

Chacón, R. A. (2003). La formación de los conceptos físicos: el caso de velocidad instantánea. *Revista educación y pedagogía., 15*(35).

Chavarría, J. A. (2005). Resolución de problemas según Polya y Schoenfeld. Recuperado de http://www. cidse. itcr. ac. cr/ciemac/4toCIEMAC/Ponencias/Resoluciondeproblemas. pdf (marzo 2010).

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221-266.

Collette, J. P. (1985). *Historia de las matemáticas* (Vol. I). Siglo XXI Editores México.

Collette, J. P. (1993). *Historia de las matemáticas, volumen 2.* Siglo XXI de España Editores.

Confrey, J., & Kazak, S. (2006). A thirty-year reflection on constructivism in mathematics education in PME. En A. Gutierrez, & P. Boero, *Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future* (págs. 305-345). Sense publishers.

Courant, R., & John, F. (1999). *Introducción al cálculo y al análisis matemático.* México: Limusa.

Cuesta, B. A., Piquet, D. J., & Méndez, S. M. (2010). Análisis del proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo de una función en estudiantes de economía. *Educación matemática, 22*(3), 5-21.

Da Ponte, J. P. (1992). The history of the concept of function and some educational implications. *The Mathematics Educator, 3*(2), 3-8.

Da Ponte, J. P., & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. En A. Gutierrez, & P. Boero, *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (págs. 461-494.). The Netherlands: Sense Publichers.

De Corte, E., Greer, B., & Verschaffel, L. (1996). *Mathematics teaching and learning.*

De Lange, J. (1996). Using and Applying Mathematics in Education. En A. C. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde, *International handbook of mathematics education Utrecht* (págs. 49-97). Netherlands: Kluwer academic.

Del Castillo, A., & Montiel, G. (2007). El concepto de función en un ambiente geométrico dinámico bajo el enfoque covariacional. *Memoria de la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, (págs. 568-580). Mérida-Yucatán, México.

Deutsches, P.-K. (2001). *"PISA 2000" Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich.* Opladen 29.

Dickinson, P., & Hough, s. (2012). *Using realistic mathematics education in UK classrooms.* UK: Heron Press.

Dienes, Z. P. (1973). A theory of mathematics learning. *Teaching mathematics: Psychological foundation*, 137-148.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics, 61*(1-2), 103-131.

Eisenberg, T., & Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. En *Visualization in teaching and learning mathematics* (págs. 25-37). Washington: Mathematical Association of America.

Euler, L. (2000). *Introducción al análisis de los infinitos.* Sevilla, España: Edición a cargo de A. J. Durán y F. J. Pérez. SAEM «Thales» y Real Sociedad Matemática Española.

Falcade, R. M. (2004). Towards a definition of function. *In 28th PME Conference, 2*, 367-374.

Farfán, R. M. (1997). *Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio.* Grupo Editorial Iberoamericana.

Farfán, R. M., & García, M. A. (2005). El concepto de función. Un breve recorrido epistemológico. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 18*, 489-493.

Fauzan, A., Slettenhaar, D., & Plomp, T. (2002). Traditional mathematics education vs. realistic mathematics education: Hoping for changes. En P. Valero, & O. Skovsmose, *Proceedings of the 3ed International Mathematics Education and Society Conference* (págs. 1-4). Copenhagen: Centre for Research in Learning Mathematics.

Ferrara, F., Pratt, D., & Robutti, O. (2006). The role and uses of technologies for the teaching of algebra and calculus. En *Handbook of research on the psychology of mathematics education. past, present and future* (págs. 237-274). Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.

Filloy, E. (1987). Modelling and the teaching of algebra. *Proceedings of PME-XI, 1*, 295-300.

Filloy, E. (1999). Modelos Teóricos Locales (MTL). Un marco teórico y metodológico para la observación experimental en matemática educativa... En T. Rojano, L. Puig, & Rubio (Edits.), *Aspectos teóricos del álgebra.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Filloy, E., & Rubio, G. (1992). Familias de Problemas Verbales Aritmético-Algebraicos y las tensiones entre los diferentes usos de las expresiones algebraicas. Cuaderno de Investigación: Volumen de la Serie Ciencias de la Cognición y Tecnología de la Información. . *Editores: Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV del IPN y el Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas*.

Filloy, E., & Sutherland, R. (1997). Designing curricula for teaching and learning algebra. En A. J. Bishop (Ed.), *International handbook of mathematics education* (págs. 161-204). Netherlands: Springer.

Florian, C. (2010). *A history of mathematics.* eBook or online at www.gutenberg.org ISO-8859-1.

Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful. *Educational studies in mathematics, 1*(1), 3-8.

Freudenthal, H. (1969). Allocution du premier congrès international de l'enseignement mathématique Lyon, 24–31 Août 1969. *Educational Studies in Mathematics, 2*(2), 135-138.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task.* Dordrecht, The Netherlands: Riedel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1981). Major problems of mathematics education. *Educational studies in mathematics, 12*(2), 133-150.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht, The Netherlands.: Riedel Publishing Company,.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education.* Dordrecht, The Netherlands.: Kluwer Academic Publishers.

García, L., Vázquez, R. A., & Hinojosa, M. (2004). Dificultades en el aprendizaje del concepto de función en estudiantes de ingeniería. *Ingenierías, 7*(24), 27-34.

García, S. A. (2013). *Monografias.com*. Recuperado el 22 de 05 de 2014, de Matemáticas: http://www.monografias.com/trabajos88/evolucion-del-concepto-funcion-inicios-del-siglo-xx/evolucion-del-concepto-funcion-inicios-del-siglo-xx.shtml

Girard, R. (1977). *Origen y desarrollo de las civilizaciones antiguas de América.* México D. F.: Editores Mexicanos Unidos, S.A.

Godemert, R. (1978). *Álgebra.* Madrid: Editorial Tecnos.

Gómez, B. W. (2011). *Algunas herramientas de la interdisciplinariedad para la Comprensión del concepto de función lineal.* Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Gravemeijer, K. P. (2002). *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (Vol. 30). Springer Science & Business Media.

Gravemeijer, K., & Doorman, M. (1999). Context Problems in Realistic Mathematics Education: A Calculus Course as an Example. En *Educational Studies in Mathematics* (págs. 111-129). Freudenthal Institute, Utrecht University, The Netherlands : Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer, K., & Terwel, J. (2000). Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. *Journal of Curriculum Studies, 32*(6), 777-796.

Guershon, H., & Dubinsky. (1992). *The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy.* (Vol. 25). Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

Guershon, H., Selden, A., & Selden, J. (2006). Advanced mathematical thinking. En A. Gutiérrez, & P. P. Boero (Edits.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future* (págs. 147-172). Sense Publishers.

Guillén, G. G. (1992). *La enseñanza de la geometría de sólidos en la EGB.* Institución Valenciana de Estudios e Investigación , "Alfonso el Magnánimo", Valencia, España.

Gutiérrez, Á., & Jaime, A. (1998). *Geometría y algunos aspectos generales de la educación matemática.* una empresa docente.

Jablonka, E., & Gellert, U. (2007). *Mathematisation-demathematisation.* Taipei: Sense Publishers.

Kieran, K. (2006). Investigación sobre el aprendizaje y la enseñanza del álgebra. En A. Gutiérrez, & P. P. Boero (Edits.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education pas, present and future* (págs. 11-50). Netherlands: Sense publichers Rotterdam/Taipei.

Kleiner, I. (2009). Evolution of the function concept: A brief survey. En M. Anderson, V. Katz, & R. Wilson (Edits.), *Who gave you the epsilon? & OtherTales of mathematical history* (pág. 14/26). United Estates ofAmerica: The Mathematical Association of America.

Kline, M. (1985). *Matemáticas. La pérdida de la certidumbre.* Siglo XXI editores.

Kline, M. (1990). *Mathematical Thought from ancient to modern times.* New York: Oxford University Press.

Lakatos, I. &. (2007). *Escritos filosóficos. 2: Matemáticas, ciencia y epistemología.* Alianza.

Leithold, L. (1998). *El cálculo.* México: Oxford University press-Harla.

Martin, M. O., Mullis, I. V., Beaton, A. E., Gonzalez, E. J., Smith, T. A., & Kelly, D. L. (1997). *Science Achievement in the Primary School Years.* TIMSS International Study Center, Center for the Study of Testing, Evaluation, and Educational Policy, Boston College, School of Education, Campion Hall, Chestnut Hill, MA 02167.

Martínez, E. C. (22 de 02 de 2007). *Astroseti*. Recuperado el 07 de 01 de 2013, de Historia de las matematicas: http://astroseti.org/?/historia-de-las-matematicas/historia-del-concepto-de-funcion

Mesa, Y. &.-O. (2009). El papel de Galileo Galilei en la construcción histórica del concepto de función cuadrática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *22*, págs. 1315-1323.

Mullis, I. V., Martin, M. O., Gonzalez, E. J., & Chrostowski, S. J. (2003). *TIMSS 2003 International Mathematics Report: Findings from IEA's Trends in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eighth Grades.* Boston: TIMSS & PIRLS International Study Center.

NCTM. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

Norman, A. (1992). Teachers' mathematical knowledge of the concept of function. En *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (Vol. 25, págs. 215-232). Mathematical Association of America.

Ochoa, J. A. (2008). El concepto de función: una miradas desde las matemáticas escolares. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *21*, págs. 245-254.

O'Connor, J. J. (2013). *The Mactutor History of Mathematics archive*. Recuperado el 09 de April de 2014, de http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/index.html

Parra, S. E. (2008). Arquímedes: su vida, obras y aportes a la matemática moderna. *Revista digital Matemática, Educación e Internet (www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/)., 9*(1), 1-40.

Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (págs. 205-235). Sense publishers.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico, *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (págs. 61-94). Barcelona: Horsori.

Puig, L. (2003). Signos, textos y sistemas matemáticos de signos. En E. Filloy (Ed.), *Matemática Educativa: aspectos de la investigación actual* (págs. 174-186). México, DF.: Fondo de Cultura Económica / CINVESTAV.

Puig, L. (2004). Observaciones sobre la formación educativa para el itinerario educativo del grado de matemáticas: la matemática educativa. *Presentación en el seminario itinerario educativo de la licenciatura de matemáticas internacional* (págs. 92-96). Granada: Commissin on Mathematical Instruction–Subcomisión española y Universidad de Granada.

Puig, L. (2006). Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. En P. Bolea, & M. J. González, *Investigación en Educación Matemática.* (págs. 107-126). Huesca: Instituto de Estudios Altoaragoneses / Universidad de Zaragoza.

Puig, L. (2010). Researching (algebraic) problem solving from the perspective of local theoretical models. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 3-16.

Ramírez, C. J. (2007). Reflexiones sobre las ideas de Nicolás Oresme. *Asclepio, 59*(1), 23-34.

Rey, G. B., & Sastre, V. P. (2009). Aportes didácticos para abordar el concepto de función. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20*, 153-162.

Rivera Figueroa, A., Guerrero Magaña, M. D., Sepulveda López, A., & De Alaizola Arizmendi, I. (2006). La pertinencia del examen único de ingreso al bachillerato. *Perfiles educativos, 29*(111), 71-88.

Ruiz, L. (1998). La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico. *Tesis Doctoral*. Granada, España: Universidad de Jaén.

Rumbos P., I. B. (2011). *Breve historia de las matemáticas.* México: Trillas.

Ruthing, D. (1984). Some definitions of the concept of funtion from Bernoulli, Joh to Bourbaki. *Mathematical Intelligencer, 6*(4), 72-77.

Sáiz, M. (2002). El pensamiento del maestro de primaria acerca del concepto volumen y su enseñanza. *Tesis Doctoral*. México, Departamento de Matemática Educativa: CINVESTAV-IPN.

Salazar, E. P. (2014). Arquímedes: su vida, obras y aportes a la matemática moderna. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet, 9*(1).

Santamaria, F. (2006). La contextualización de la matemática en la escuela primaria de Holanda. *Doctoral dissertation, Tesis (Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales con orientación en Matemática*. Buenos Aires: Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional del Comahue.

Santiago, Z. A., & Santiago, P. M. (2001). *Resúmenes de Matemáticas I Con Notas Históricas.* Madrid, España: Visión libros.

Sastre, V. P., Rey, G., & Boubée, C. (2008). El concepto de función a través de la Historia. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 140-155.

Schwarz, B. B., & Hershkowitz, R. (1999). Prototypes: Brakes or levers in learning the function concept? The role of computer tools. *Journal for Research in Mathematics Education*, 362-389.

Schwingendorf, K., Hawks, J., & Beineke, J. (1992). (1992). Horizontal and vertical growth of the student's conception of function. En *The concept of function. aspects of epistomology and pedagogy* (págs. 133-149). Mathematical Association of America.

Selden, a., & Selden, J. (2005). Perspectives on advanced mathematical thinking. En *Mathematical Thinking and Learning* (Vol. 7, págs. 1-13).

Servín, H., & González, M. (2013). Diagnóstico inicial de habilidades y conocimientos en matemáticas de los estudiantes de nuevo ingreso de la universidad intercultural indígena de Michoacán. En M. d. Casillas, & L. c. Santini, *Reflexiones y experiencias sobre la educación superior intercultural en América Latina y el Caribe* (págs. 1189-1196). México: CGEIB-SEP.

Sfard, A. (1989). Transition from operational to structural conception: The notion of function revisited. *Proceedings of PME XIII* , 151-158.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification-the case of function. En H. Guershon, & Dubinsky, *The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy* (págs. 59-84). Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

Sfard, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational studies in mathematics, 46*, 13-57.

Sierpinska, A. (1992). On understangding the notion of function. En H. Guershon, & E. Dubinsky, *The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy* (págs. 23-58). Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

Sierpinska, A. (2002). Book review: teaching mathematics in multilingual. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 34*(3), 98-103.

Skinner, B. F. (1970). *Tecnología de la enseñanza.* Labor.

Spivak, M. (1996). *Cálculo Infinitesimal.* Barcelona, España: Reverté.

Stewart, J. (2006). *Cálculo* (Vol. 1). Pioneira Thomson Learning.

Streefland, L. (1991). *Fractions in realistic mathematics education: A paradigm of developmental research.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Struik, D. J. (2012). *A concise history of mathematics.* New York: Courier Corporation.

Swokowski, E. W. (1989). *Cálculo con geometría analítica* (Segunda ed.). México: Iberoamerica.

Tall, D. (1996). Functions and calculus. En *In International handbook of mathematics education* (págs. 289-325). Netherlands: Springer.

Tall, D., & Bakar, M. (1992). Students' mental prototypes for functions and graphs. En *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* (Vol. 23, págs. 39-50). Taylor & Francis Online.

Treffers, A., & Goffree, F. (1985). Rational analysis of realistic mathematics education–the Wiskobas program. *Proceedings of the ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education. 2*, págs. 97-121. State University of Utrecht, Research Group on Mathematics Education and Educational Computer Centre (OW & OC), Subfaculty of Mathematics.

Treffers, A., & Vonk, H. (1987). *Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics instruction-The Wiskobas Project. Dordrecht: Reidel.* Dordrecht: Reidel.

Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (1996). *Assessment and Realistic Mathematics Education.* Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute, Mathematics and Computer Science Education.

Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2000). *Mathematics education in the Netherlands: A guided tour.* Netherlands: Freudenthal Institute CD-rom for ICME9.

Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2001). Realistic Mathematics Education. En J. Anghileri (Ed.), *Principles and practice in arithmetic teaching* (págs. 49-63). Buckingham/Philadelphia: Open University Press.

Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2008). *Children learn mathematics: A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school.* Taipei: Sense Publishers.

Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2009). El uso didáctico de modelos en la Educación Matemática Realista: Ejemplo de una trayectoria longitudinal sobre porcentaje. Primera parte. *Correo del maestro, 160*, 36-44.

Van Den Heuvel-Panhuizen, M., & Van Den Boogaard, S. (2008). Picture Books as an Impetus for Kindergartners' Mathematical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning: An International Journal, 10*(4), 341-373.

Van, S. F. (1963). Thomas of Bradwardine. His Tractatus de proportionibus. Its Significance for the Development of Mathematical Physics. *Revue Philosophique de Louvain, 61*(72), 479-481.

Vinner, S. (2002). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En *Advanced mathematical thinking* (págs. 65-81). Springer Netherlands.

Weil, M., & Joyce, B. (1985). *Modelos de enseñanza.* Madrid: Anaya.

Zulkardi, Z. (12 de 03 de 1999). *How to Design Mathematics Lessons based on the Realistic Approach (RME)*. (Literature study) Obtenido de http://eprints.unsri.ac.id/id/eprint/692

Anexos

Anexos

Anexos

ANEXOS

Anexo A

A DIAGNÓSTICO INICIAL

UNIVERSIDAD INTERCULTURAL INDÍGENA DE MICHOACÁN

PRUEBA DE DIAGNÓSTICO
HABILIDADES Y CONOCIMIENTOS DE MATEMÁTICAS

CUADERNO DE EJERCICIOS

I. INSTRUCCIONES

Antes de empezar a contestar el diagnóstico, lee con cuidado las siguientes indicaciones:

1. Estas páginas te servirán únicamente para leer las preguntas correspondientes a la prueba por lo que se te solicita que no hagas anotaciones ni marcas en él.
2. Las preguntas contienen cinco opciones de respuesta, indicadas con las letras A, B, C, D y E, siendo ÚNICAMENTE UNA DE ELLAS LA RESPUESTA CORRECTA.
3. Registrar tu respuesta en la HOJA DE RESPUESTAS que contiene una serie progresiva de números. Cada número corresponde al número de cada pregunta de estas páginas, asegúrate de que el número de pregunta y de respuesta coincidan.
4. Leer cuidadosamente cada pregunta y elegir la respuesta que consideres correcta.
5. Al contestar cada pregunta, deberás rellenar SOLAMENTE UNO DE LOS ÓVALOS, ya que marcar más de uno invalida tu respuesta. No marques hasta que estés seguro de tu respuesta.
6. NO CONTESTES LAS PREGUNTAS AL AZAR, si no sabes cuál es la respuesta correcta a alguna pregunta, es preferible que no la marques en la hoja de respuestas.
7. Si deseas cambiar de respuesta, puedes hacerlo pero asegurándote de borrar completamente la marca que deseas cancelar, sin maltratar la hoja de respuestas.

EJEMPLO

24. Un eneágono es un polígono formado por:

A) Nueve lados B) Once lados C) Doce lados D) Trece lados E) Quince lados

En este caso, la opción correcta es la A); por lo tanto, DEBERÁS LOCALIZAR en la HOJA DE RESPUESTAS EL NÚMERO QUE CORRESPONDA a la pregunta que leíste y, con tu lápiz, DEBERÁS RELLENAR COMPLETAMENTE el óvalo correspondiente a la letra de la opción que hayas elegido como correcta.

23 Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ
24 ● Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ
25 Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

Habilidad Matemática

1. Observe las siguientes sucesiones:

4, 8, 16, 32,...
9, 27, 81, 243, ...
16, 64, 256, 1024,...
...

¿Cuál sucesión sigue?

A) 81, 486, 2916, 17496, ... B) 25, 125, 625, 3125... C) 25, 73, 121,169, ...
D) 81, 129, 177, 225, ... E) 25, 50, 75, 100, ...

2. ¿Cuál es el número de la sucesión que se encuentra en la posición 17?

Posición	1	2	3	4	5	...	17	...
Número	1	5	8	13	17	...	?	...

A) 45 B) 65 C) 21 D) 57 E) 69

3. ¿Cuál es el número de la sucesión que se encuentra en la posición 13?

Posición	1	2	3	4	...	13	...
Número	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{9}$	...	?	...

A) $\frac{1}{13}$ B) $\frac{1}{27}$ C) $\frac{1}{19}$ D) $\frac{1}{21}$ E) $\frac{1}{25}$

4. ¿Cómo puede calcularse el número que sigue en la sucesión 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...?

A) La suma de los dos anteriores B) Sumando dos veces el anterior a cinco
C) La suma de todos los anteriores D) Restando 18 al triple del anterior E) Sumando 8 al anterior

1. En la sucesión 0, 1, 0, 1, 0, 1, ...
   ¿Cuántos unos hay antes de la posición 35?

A) 20 B) 34 C) 17 D) 19 E) 25

6. ¿Cuántos nueves hay en el número que está en la posición 12 de la secuencia: 7, 73, 739, 7393, 73939, 739393, ...?

A) 9 nueves B) 7 nueves C) 2 nueves D) 5 nueves E) 3 nueves

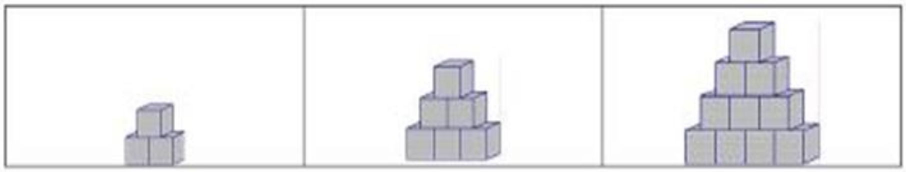
7. ¿Cuál es el resultado de la expresión que sigue en la secuencia?

4×1 – 1=3
4×3 – 2=10
4×10 – 3=37
4×37 – 4=144

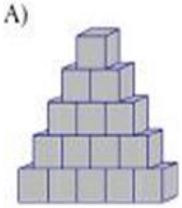
...

A) 140 B) 576 C) 571 D) 15 E) 580

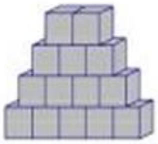
2. ¿Cuál es la figura que sigue en la secuencia?



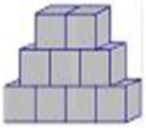
A)



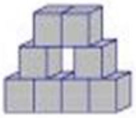
B)



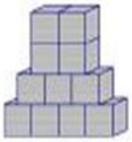
C)



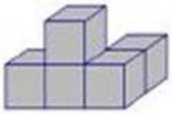
D)



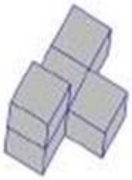
E)



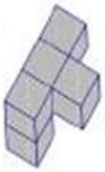
3. ¿Cuál de las figuras de abajo corresponde a una rotación de la siguiente?



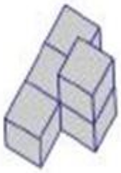
A)



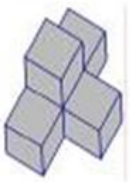
B)



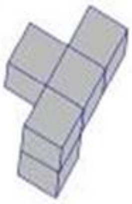
C)



D)



E)



10. Con base a las siguientes relaciones numéricas:

1=1
1+3=4
1+3+5=9
1 + 3 + 5 + 7 = 16
. . .

¿Cuál es el resultado del siguiente renglón?

A) 24 B) 25 C) 21 D) 21 E) 20

11. Con base a las siguientes relaciones numéricas:

1+2=3
4+5+6=7+8
9 + 10 + 11+ 12 = 13 + 14+ 15
. . .

¿Cuál es el miembro izquierdo del siguiente renglón?

A) 15+16+17+18+19 B) 16+17+18+19+20 C) 16+17+18+19 D) 15+16+17+18+19+20 E) 10+11+12+13+14

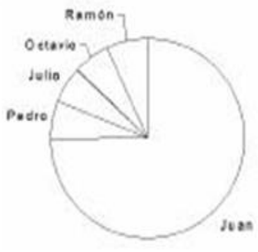
12. La tabla siguiente muestra la distribución en porcentajes de los votos recibidos por cada uno de los candidatos en una elección:

Candidato	Porcentaje de votos
Juan	55%
Pedro	20%
Julio	12%
Octavio	8%
Ramón	5%

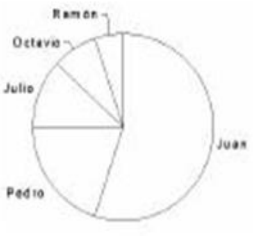
¿Cuál de las siguientes gráficas parece mostrar la misma información que la tabla?

A)

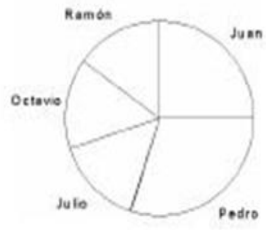
B)



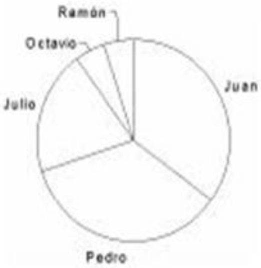
C)



D)



E)



13. El reloj de la señora Elvira se atrasa 14 minutos al día ¿Cuánto tiempo se atrasará en 12 minutos?

A) 11 segundos B) 10 segundos C) 9 segundos D) 8 segundos E) 7 segundos

14. Don Juan es comerciante en café, hace una mezcla; pone 8 kilogramos de café de primera clase, por cada 2 kilogramos de café de segunda clase ¿Cuántos kilogramos de cada calidad necesita para llenar un costal de 70 kilogramos de la mezcla que hizo?

A) 60 kg calidad de primera clase y 10 kg. calidad de segunda clase

B) 56 kg calidad de primera clase y 14 kg calidad de segunda clase

C) 50 kg calidad de primera clase y 20 kg. calidad de segunda clase

D) 46 kg calidad de primera clase y 24 kg. calidad de segunda clase

E) 40 kg calidad de primera clase y 30 kg. calidad de segunda clase

15. En la figura $\frac{\overline{DC}}{\overline{AB}} = \frac{14}{13}$ ¿Cuántas veces cabe el triángulo rectángulo ADE en el rectángulo AECB.

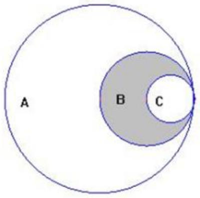
A) 28
B) 26
C) 25
D) 24
E) 13

16. Dos automóviles parten al mismo tiempo de un punto en la misma dirección. Si la velocidad de uno es 85 Km. por hora y la del otro 100 Km. ¿En cuántas horas se encontrarán a una distancia de 100km uno de otro?

A) $8\frac{2}{3}$ de horas B) $7\frac{2}{3}$ de horas C) $6\frac{2}{3}$ de horas D) $5\frac{2}{3}$ de horas E) $4\frac{2}{3}$ de horas

17. El centro de B está sobre la circunferencia C y el centro de A está sobre la circunferencia B. Determine la razón entre el área de la región sombreada y el área no sombreada.

A) $\frac{1}{13}$ B) $\frac{3}{13}$ C) $\frac{5}{13}$ D) $\frac{7}{13}$ E) $\frac{9}{13}$



18. Un vaso contiene 120 cm^3 de agua. Si se coloca $\frac{3}{4}$ de un cubo de hielo, su volumen aumenta en $\frac{1}{8}$, Si se agregan 2.25 de cubos. ¿Cuánto aumentará su volumen?

A) 47.5 cm^3 B) 45.0 cm^3 C) 32.0 cm^3 D) 24.0 cm^3 E) 20.0 cm^3

19. La figura muestra una semicircunferencia de radio $\overline{OP} = 75$. El segmento $\overline{PR}$ es tangente a la semicircunferencia en el punto P. El segmento $\overline{RQ}$ es paralelo al diámetro $\overline{MN}$, mientras que el segmento $\overline{QA}$ es perpendicular a dicho diámetro. Dado que $\overline{PR} = 50$, encuentra la longitud de $\overline{RQ}$ si se sabe que $\overline{OA} = 45$.

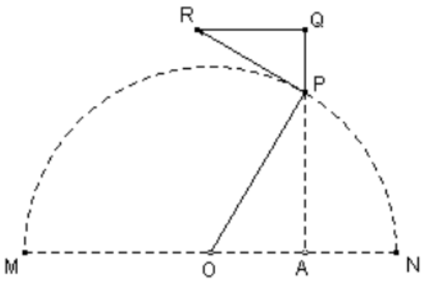
A) $\overline{RQ} = 30$

B) $\overline{RQ} = 35$

C) $\overline{RQ} = 40$

D) $\overline{RQ} = 50$

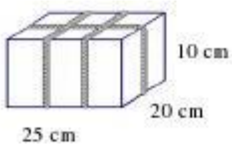
E) $\overline{RQ} = 55$



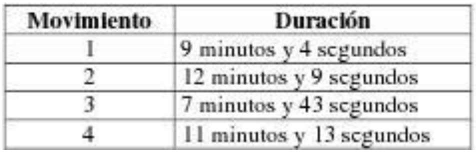
Contenidos de matemáticas

1. ¿Cuánto mide el cordel que sujeta la caja del regalo?

A) 45 cm
B) 95 cm
C) 150 cm
D) 190 cm
E) 195 cm



1. Martha quiere grabar la Sinfonía Nuevo Mundo de Dvorak en un CD de 74 minutos de capacidad. El tiempo de duración de cada movimiento de la sinfonía se muestra en la siguiente tabla:

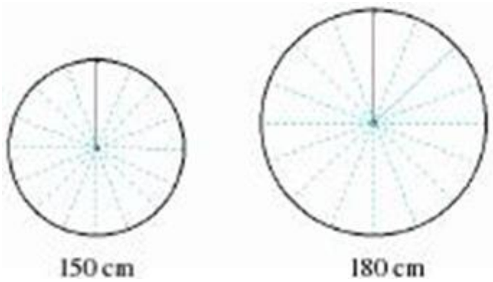


Movimiento	Duración
1	9 minutos y 4 segundos
2	12 minutos y 9 segundos
3	7 minutos y 43 segundos
4	11 minutos y 13 segundos

¿Cuánto espacio libre quedará en el CD?

A) 39 min. y 9 seg. B) 34 min. y 51 seg. C) 33 min. y 51 seg. D) 38 min. y 9 seg. E) 37 min. y 9 seg.

2. La rueda delantera de una bicicleta tiene un perímetro de 150 cm y la trasera un perímetro de 180 cm. Cuando la bicicleta comienza a rodar, un rayo de cada rueda apunta hacia arriba. ¿Qué distancia deberá recorrer la bicicleta para que estos mismos rayos vuelvan a quedar hacia arriba?



A) 8 metros B) 10.5 metros C) 9 metros D) 12.3 metros E) 11 metros

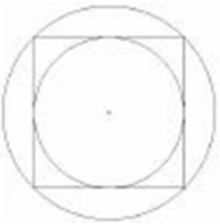
4. La manecilla que marca las horas de un reloj mide 6 cm y la que marca los minutos mide 8 cm. ¿A qué distancia se encuentran los extremos de las manecillas cuando son las 9:00 horas en punto?

A) 7 cm B) 14 cm C) 9 cm D) 10 cm E) 12 cm

5. Al inicio de una semana, un cultivo contiene 5000 bacterias y al final de la semana hay un 10% más de bacterias. ¿Cuántas bacterias habrá al final de la segunda semana, si el crecimiento semanal se mantiene al 10%?

A) 6000 B) 5050 C) 5500 D) 6050 E) 6500

6. Un círculo cuyo radio mide 1 centímetro está inscrito en un cuadrado. Si este cuadrado, a su vez, está inscrito en otro círculo, ¿cuánto mide el radio de este último círculo?



A) 2
B) $\sqrt{2}$
C) 1
D) 3
E) 1.5

7. Un reloj despertador se adelanta 4 minutos cada hora. Si deseo despertarme el lunes a las 6 de la mañana y el domingo a las 10 de la noche pongo el despertador, ¿en qué horario debo colocar las manecillas para que me despierte a tiempo?

A) 9:32 B) 10:32 C) 10:28 D) 9:20 E) 9:28

4. Un reloj despertador se adelanta 3 minutos cada hora. Si el domingo a las 9 de la noche pongo a tiempo mi reloj y deseo despertarme el lunes a las 7 de la mañana, ¿qué hora tengo que poner en la alarma para que me despierte a tiempo?

A) 7:30 B) 6:40 C) 6:30 D) 6:15 E) 7:10

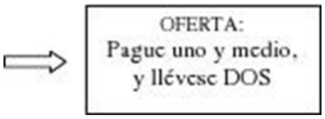
5. Se aplicó una encuesta a 500 radioescuchas de una colonia, para detectar su preferencia respecto a dos estaciones de radio: XEI y XEQ, obteniéndose los resultados siguientes:

330 escuchan XEI y posiblemente también XEQ	120 solamente escuchan XEQ	150 escuchan ambas estaciones

¿Cuántas personas escuchan solamente XEI?

A) 250 B) 210 C) 270 D) 180 E) 120

6. En una tienda de ropa para dama se exhibe un letrero que dice:



OFERTA:
Pague uno y medio,
y llévese DOS

Si un chaleco cuesta $230.00, ¿cuál el porcentaje de ahorro al adquirir dos chalecos?

A) 50 % B) 25 % C) 20 % D) 33 % E) 15 %

7. Se emplea un tanque rectangular para almacenar agua. La base del tanque tiene un área de 144 metros cuadrados. Si el nivel de agua llega hasta 2.5 m, ¿cuál es el volumen de agua

almacenado en este tanque?

A) 360 m3 B) 57.6 m3 C) 30 m3 D) 288.5 m3 E) 900 m3

8. ¿Cuál es el mayor número de vasos de 90 ml que pueden llenarse con un litro de jugo?

A) 9 vasos B) 12 vasos C) 11 vasos D) 10 vasos E) 15 vasos

13. La tabla siguiente muestra las puntuaciones obtenidas por los participantes en un juego de golf:

Jugador	Puntuación
Luis	-3
Rafael	+5
Enrique	-7
Carlos	0
Ernesto	+4

¿Cuál lista muestra los resultados ordenados de mayor a menor?

A) -7, +5, +4, -3, 0 B) -7, +4, -3, 0, +5

C) +5, +4, 0, -3, -7 D) -7, -3, 0, +4, +5 E) 0, -3, +4, +5, -7

9. Una caja de 780 gramos tiene galletas de 3 sabores diferentes: las galletas de chocolate pesan 9 gramos cada una; las de canela pesan 10 gramos cada una y las de vainilla 7 gramos cada una. Si hay el mismo número de galletas de cada sabor, ¿cuántas galletas tiene la caja?

A) 90 galletas B) 66 galletas C) 60 galletas D) 72 galletas E) 75 galletas

10. En una carrera de relevos, cada miembro del equipo corrió 1500 metros. Los tiempos individuales fueron 1.39 minutos, 1.37 minutos, 1.31 minutos y 1.33 minutos. ¿En promedio, cuánto tiempo tardan los cuatro integrantes del equipo en recorrer cinco kilómetros en relevos?

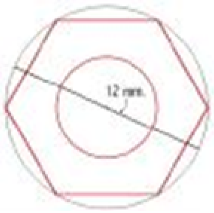
A) 4.50 minutos B) 5.40 minutos C) 4.70 minutos D) 5.25 minutos E) 4.95 minutos

16. ¿Cuál lista muestra los números $\frac{5}{8},\frac{2}{3},\frac{4}{5}$ y ordenados de menor a mayor?

A) $\frac{2}{3},\frac{4}{5},\frac{5}{8}$ B) $\frac{5}{8},\frac{2}{3},\frac{4}{5}$ C) $\frac{4}{5},\frac{5}{8},\frac{2}{3}$ D) $\frac{2}{3},\frac{5}{8},\frac{4}{5}$ E) $\frac{5}{8},\frac{4}{5},\frac{2}{3}$

17. De una placa circular de metal, se va a hacer una tuerca hexagonal cortando sectores circulares como se muestra en la figura. Si el diámetro de las placas es de 12 mm., ¿Cuánto medirá cada lado de la tuerca?

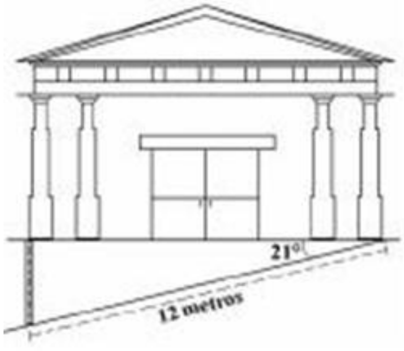
A) 6 2 mm.
B) 6 mm.
C) 27 mm.
D) 3 2 mm.
E) 2 3 mm.



18. El diámetro de una rueda de bicicleta mide aproximadamente 70 cm. Estima el número de vueltas que da la rueda en un recorrido de 5 km.
A) 2800 B) 2300 C) 2000 D) 1900 E) 3000

19. José quiere construir una casa en un terreno desnivelado. Para asegurar que el piso de la casa quede horizontal, necesita colocar un soporte vertical en uno de los lados de la casa. Si el terreno mide 12 metros de frente y su inclinación con respecto a la horizontal 21°, ¿aproximadamente, cuánto medirá el frente de la casa?

A) 12.5 metros
B) 9.7 metros
C) 11.2 metros
D) 13.4 metros
E) 10.8 metros



20. Dada la gráfica siguiente, ¿cuál es la ecuación que le corresponde?

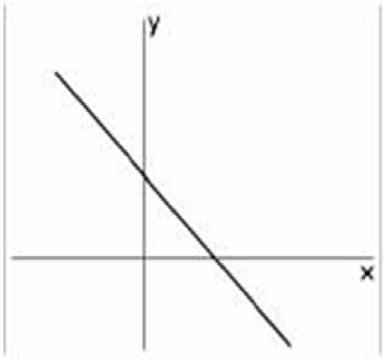
A) $y = x^2 - 4x + 3$

B) $y = 2x$

C) $y = -x + 1$

D) $y = -x - 5$

E) $y = x^2 - 4$



21. Un par de zapatos de caballero cuesta $450.00 y un par de zapatos de dama cuesta $600.00. Diga cuál de las afirmaciones siguientes es correcta.

A) Los zapatos de dama son más baratos que los zapatos de caballero.
B) 7 pares de zapatos de caballero cuestan más que 6 pares de zapatos de dama.

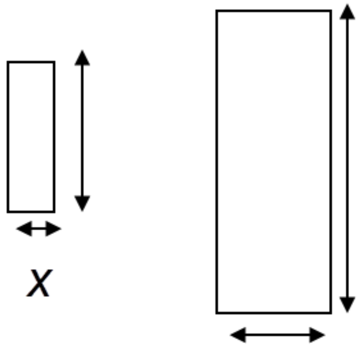
C) 12 pares de zapatos de caballero no cuestan tanto como 9 pares de zapatos de dama.
D) 13 pares de zapatos de caballero cuestan menos que 9 pares de zapatos de dama.
E) 6 pares de zapatos de dama cuestan más que 7 pares de zapatos de caballero.

22. Dos corredores inician en el mismo lugar de un óvalo de 400 metros en sentido contrario. El primero lleva una velocidad de 300 metros por minuto y el segundo 500 metros por minuto. ¿Cuántos metros ha recorrido el primer corredor cuando se encuentra por quinta ocasión con el segundo corredor?

A) 800 metros B) 750 metros C) 500 metros D) 450 metros E) 300 metros

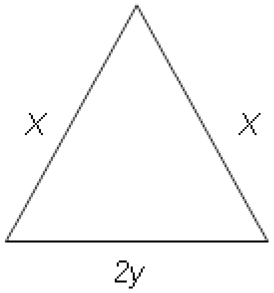
1. Debido al éxito obtenido del salón de fiestas “La Plaza”, el propietario ha decidido agrandarlo para que su área se triplique. Para lograr esto, el lado largo, que actualmente mide 9m más que el ancho, se incrementara en 15m, mientras que el lado ancho se incrementara con 14m más. ¿Cuáles son las dimensiones actuales de dicho salón?

A) 16 y 25 metros
B) 18 y 28 metros
C) 19 y 29 metros
D) 30 y 60 metros
E) 31 y 61 metros



24. Un terreno de forma triangular tiene dos lados iguales que miden x y el tercer lado mide 2y. ¿Qué expresión nos da el área A de este terreno?

A) $A = \sqrt{x\ y}$
B) $A = \sqrt{x^2 + 2\mathrm{y}^2}$
C) $A = y\sqrt{x^2 - y^2}$
D) $A = \sqrt{x^2 y - y^3}$
E) $A = \sqrt{2\mathrm{x}^2 - y^2}$



25. En un grupo de 25 alumnos pesan 86 kilogramos en promedio. Se sabe en que 12 personas del grupo pesan en promedio 75 kilogramos cada una. Del grupo de los 13 alumnos restantes, ¿Cuánto pesa en promedio cada uno?

A)85.15 kilogramos B)86.15 kilogramos C)90.15 kilogramos D)95.15 kilogramos E)96.15 kilogramos

26. Un investigador encuentra que una planta de maíz crece entre la sexta y la doceava semana

después de sembrada según la expresión $y=2x^2-10x+40$ donde *x* representa el tiempo transcurrido después de la siembra en semanas mientras que *y* es la altura de la planta en centímetros. ¿Qué tanto creció la planta en esas seis semanas?

A) 52 cms B) 104 cms C) 156 cms D) 186 cms E) 208 cms

27. Para un hexágono regular se cumple que cualquiera de sus lados mide lo mismo que el radio de la circunferencia en la que está inscrito. La figura muestra un hexágono regular inscrito en una circunferencia de radio R=4. Calcula el área del triángulo ABC si su base AB es uno de los lados del hexágono y el vértice C es el punto medio del lado opuesto.

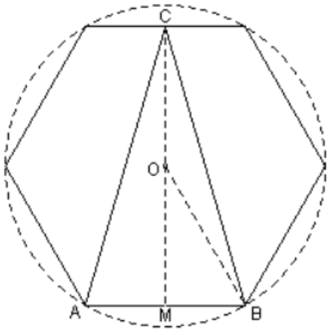
A) A=4

B) $A=4\sqrt{3}$

C) A=8

D) $A=6\sqrt{3}$

E) $A=8\sqrt{3}$



28. Paulo tiene $ 2500.00 y lo incrementa 20%. De la cantidad obtenida paga un 20%. ¿Qué cantidad es la que tiene actualmente Paulo?

A) 3,100.00 B) 3,000.00 C) 2,600.00 D) 2,400.00 E) 2,000.00

29. Calcular la ganancia obtenida por un comerciante que vendió $x^{\frac{3}{2}}$ camisas a *x* pesos por camisa, si el precio de compra fue de $x^{\frac{1}{2}}$ pesos por camisa.

A) $x^{\frac{5}{2}}-x^2$ B) $x^{\frac{5}{2}}+x^2$ C) $x^{\frac{5}{2}}-2x^2$ D) $x^{\frac{7}{2}}-x^3$ E) $x^{\frac{7}{2}}+x^3$

30. En la figura, $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son perpendiculares y se cruzan en el centro de la circunferencia. Encuentra el área del cuadrilátero ABCD si se sabe que el radio de la circunferencia es r=8.

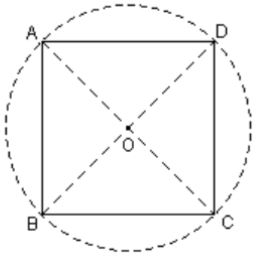
A) A=32

B) A=64

C) A=128

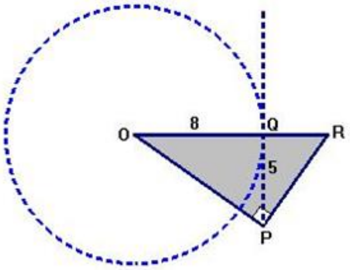
D) A=256

E) A=320



31. En la figura, el punto Q esta sobre la circunferencia centrada en O y radio 8. $\overline{PQ} = 5$ y es tangente a la circunferencia en Q. Si $\overline{PR}$ es perpendicular a $\overline{OP}$. ¿Cuánto mide $\overline{QR}$?

- A) 5/28
- B) 8/25
- C) 25/28
- D) 25/8
- E) 18/5



Anexo B

B DIAGNÓSTICO DE LA FUNCIÓN

1. ¿Cuál es el número de la sucesión que se encuentra en la posición 17?

Posición	1	2	3	4	5	...	17	...
Número	1	5	8	13	17	...	?	...

A) 45 B) 65 C) 21 D) 57 E) 69

2. ¿Cuál es el número de la sucesión que se encuentra en la posición 13?

Posición	1	2	3	4	...	13	...
Número	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{9}$	...	?	...

A) $\frac{1}{13}$ B) $\frac{1}{27}$ C) $\frac{1}{19}$ D) $\frac{1}{21}$ E) $\frac{1}{25}$

3. ¿Cómo puede calcularse el número que sigue en la sucesión 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,...?

A) La suma de los dos anteriores B) Sumando dos veces el anterior a cinco

C) La suma de todos los anteriores D) Restando 18 al triple del anterior

E) Sumando 8 al anterior.

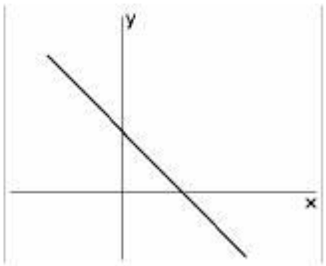
4. Al inicio de una semana, un cultivo contiene 5000 bacterias y al final de la semana hay un 10% más de bacterias. ¿Cuántas bacterias habrá al final de la segunda semana, si el crecimiento semanal se mantiene al 10%?

A) 6000 B) 5050 C) 5500 D) 6050 E) 6500

5. ¿Cuál es el mayor número de vasos de 90 ml que pueden llenarse con un litro de jugo?

A) 9 vasos B) 12 vasos C) 11 vasos D) 10 vasos E) 15 vasos

6. Dada la gráfica siguiente, ¿cuál es la ecuación que le corresponde?



A) $y = x^2 - 4x + 3$ B) $y = 2x$ C) $y = -x + 1$ D) $y = -x - 5$ E) $y = x^2 - 4$

7. Dos corredores inician en el mismo lugar de un óvalo de 400 metros en sentido contrario. El primero lleva una velocidad de 300 metros por minuto y el segundo 500 metros por minuto. ¿Cuántos metros ha recorrido el primer corredor cuando se encuentra por quinta ocasión con el segundo corredor?

A) 800 metros B) 750 metros C) 500 metros D) 450 metros E) 300 metros

8. Un terreno de forma triangular tiene dos lados iguales que miden x y el tercer lado mide 2y. ¿Qué expresión nos da el área A de este terreno?

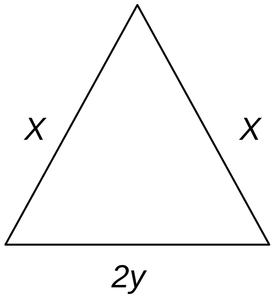
A) $A = \sqrt{x\, y}$

B) $A = \sqrt{x^2 + 2y^2}$

C) $A = y\sqrt{x^2 - y^2}$

D) $A = \sqrt{x^2 y - y^3}$

E) $A = \sqrt{2x^2 - y^2}$



9. Un investigador encuentra que una planta de maíz crece entre la sexta y la doceava semana después de sembrada según la expresión $y = 2x^2 - 10x + 40$ donde *x* representa el tiempo transcurrido después de la siembra en semanas mientras que *y* es la altura de la planta en centímetros. ¿Qué tanto creció la planta en esas seis semanas?

A) 52 cms B) 104 cms C) 156 cms D) 186 cms E) 208 cms

10. Calcular la ganancia obtenida por un comerciante que vendió $x^{\frac{3}{2}}$ camisas a *x* pesos por camisa, si el precio de compra fue de $x^{\frac{1}{2}}$ pesos por camisa.

A) $x^{\frac{5}{2}} - x^2$ B) $x^{\frac{5}{2}} + x^2$ C) $x^{\frac{5}{2}} - 2x^2$ D) $x^{\frac{7}{2}} - x^3$ E) $x^{\frac{7}{2}} + x^3$

Anexo C

C MATERIAL DE APOYO

UNIVERSIDAD INTERCULTURAL INDÍGENA DE MICHOACÁN

Apuntes de la asignatura

Matemáticas Aplicadas a las Tecnologías Alternativas

Profesora: Hermelinda Servín Campuzano

Nombre del Alumno____

Kanangío, Pichataro Michoacan

LA FUNCIÓN

Introducción
  Símbolos
Números
  Conjuntos
Plano cartesiano
    Gráficas
Ecuaciones
    Incógnitas, variables
    Formas y ecuaciones geométricas
Relaciones
    Variables dependientes e independientes
  Dominio y contradominio
  Parámetros y series infinitas
Definición de función
Notación

1.1 Introducción

El concepto de función es muy importante y utilizado en matemáticas, es un concepto que se fue construyendo a través del tiempo y al cual han contribuido muchas personas brillantes, al ir aportando elementos conforme ha avanzado la humanidad para que así el concepto sea hoy en día un concepto preciso y constante.

Antes de dar la definición formal del concepto de función comencemos por decir que todos los fenómenos que se observan en la vida cotidiana pueden relacionarse con las matemáticas, al momento de relacionar un objeto con otro, una idea con otra, etc. Por ejemplo:

Un niño aumenta su estatura de acuerdo a su edad.
El precio del kilo de tortillas aumenta el 2% anualmente.
La cosecha ha disminuido por causas climáticas.

Ejercicios

Escribir 5 ejemplos parecidos a los del ejemplo donde se vea la existencia de dos ideas relacionadas.

Comentar los ejemplos en grupo.

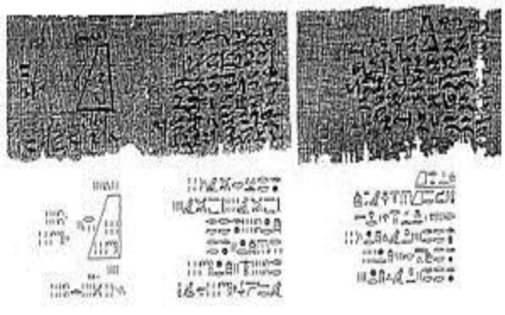
Desde tiempos antiguos, para poder comunicarnos y entendernos mejor, fue necesario usar un mismo idioma, de igual forma surgieron las matemáticas y, al mismo tiempo, también nace lo que daría inicio a lo que hoy en día se conoce con el nombre de función. Surge en el momento en que fue necesario comunicarse la solución de problemas cotidianos. El origen del concepto ha estado siempre unido al estudio de los fenómenos sujetos a cambios.

1.1.1 Símbolos

Existen objetos y documentos antiguos en donde se encuentran los planteamientos a problemas de su tiempo, de los planteamientos que se tiene conocimiento están por ejemplo las tablillas de barro que datan de años 1900 a. C., en escritura con símbolos que contienen ternas pitagóricas, el calendario babilónico donde, por ejemplo, se observan figuras geométricas para medir la distancia de la tierra a los planetas. También son conocidos los papiros egipcios como el de Moscú que data de 1850 a. C., la cultura griega aportó una gran parte de elementos que sin duda forman parte de las propiedades de la función y se encuentran escritos en el libro de los elementos de Euclides.

La Tablilla de Plimpton 322.

Calendario Babilónico



Papiro de Moscú.

Papiro de Ahmes o Papiro Rhind.

Fragmento de uno de los Papiros de Oxirrinco con unas líneas de *Los elementos* de Euclides.

EVCLIDE
RESTITVTO

VITALE GIORDANO
DA BITONTO

Los Elementos de Euclides, ilustración medieval

Ejercicios

1. Escribir tu significado de símbolo.
2. Dibujar cinco símbolos

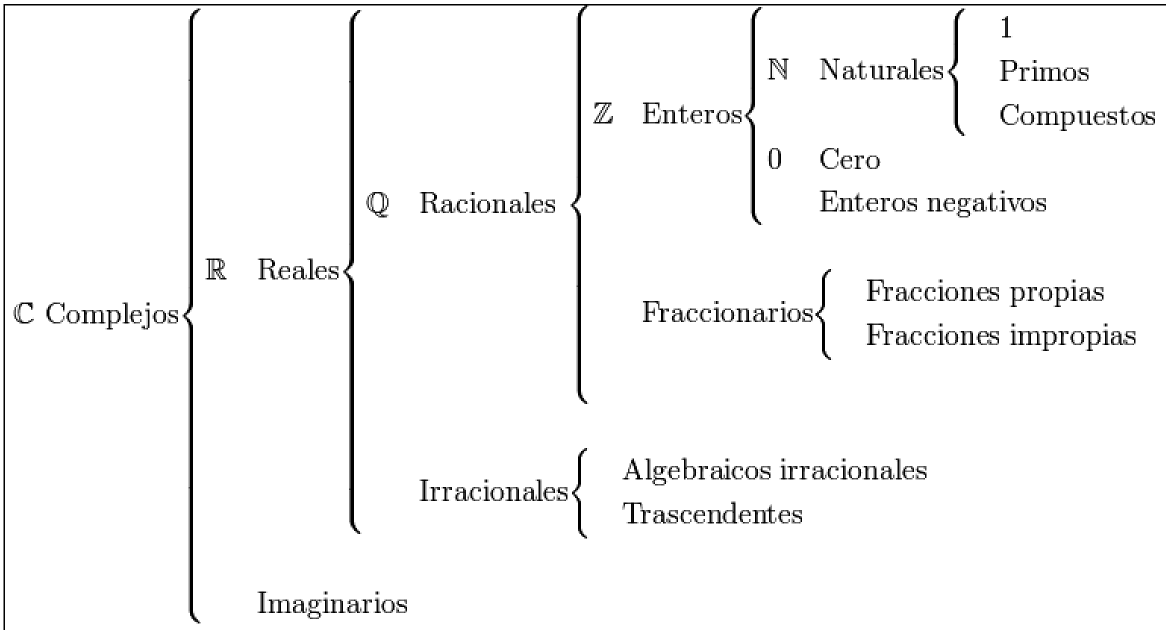
Compartir los dibujos y comentar

Definición

Símbolo. El concepto de **símbolo** (una palabra que deriva del latín *simbŏlum*) sirve para representar, de alguna manera, una idea que puede percibirse a partir de los sentidos y que presenta rasgos vinculados a una convención aceptada a nivel social. El símbolo no posee semejanzas ni un vínculo de contigüidad con su significado, sino que sólo entabla una **relación convencional**.

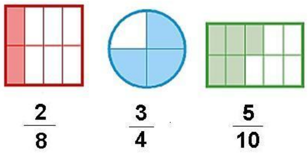
1.2 Números

La noción de número es una de las más fundamentales en matemáticas. Su origen se remonta a la antigüedad y a través de los siglos ha pasado por un proceso de extensión y de generalización de los números reales



Los números más conocidos son los números naturales. Denotados mediante N, son conceptualmente los más simples y los que se usan para contar unidades discretas: 1,2,3…. Éstos, junto con los números negativos: -1,-2,-3….., forman a los números enteros, denotados mediante la letra Z. Los números negativos permiten representar formalmente deudas, y permiten generalizar la resta de cualesquiera dos números naturales.

Otro tipo de números son los números fraccionarios, y tanto cantidades inferiores a una unidad, como números mixtos, los números fraccionarios pueden ser expresados siempre como cocientes de enteros $\frac{2}{8},\frac{3}{3}\frac{5}{10},2\frac{1}{7},\frac{-2}{9},....$



A los números fraccionarios también se les llama **números racionales**, usualmente se definen para que incluya tanto a los racionales positivos, como a los racionales negativos y el cero.El conjunto de todos los números fraccionarios es el conjunto de los números racionales. Este conjunto de números de designa como Q.

Pero existen otro tipo de números que desde los antiguos griegos se conocen, números que corresponden a relaciones geométricas (por ejemplo la diagonal de un cuadrado de lado uno) son números no enteros que tampoco son racionales, usualmente estos números se les llaman no racionales, equivalente a **numero irracional** {I}.

Cualquier número irracional puede representarse como una sucesión de números racionales.

Un número real puede ser un número racional o un número irracional. Los números racionales son aquellos que pueden expresarse como el cociente de dos números enteros, tal como 3/4, -21/3, 5, 0, 1/2, mientras que los irracionales son todos los demás. Los números racionales también pueden describirse como aquellos cuya representación decimal es eventualmente periódica, mientras que los irracionales tienen una expansión decimal aperiódica:

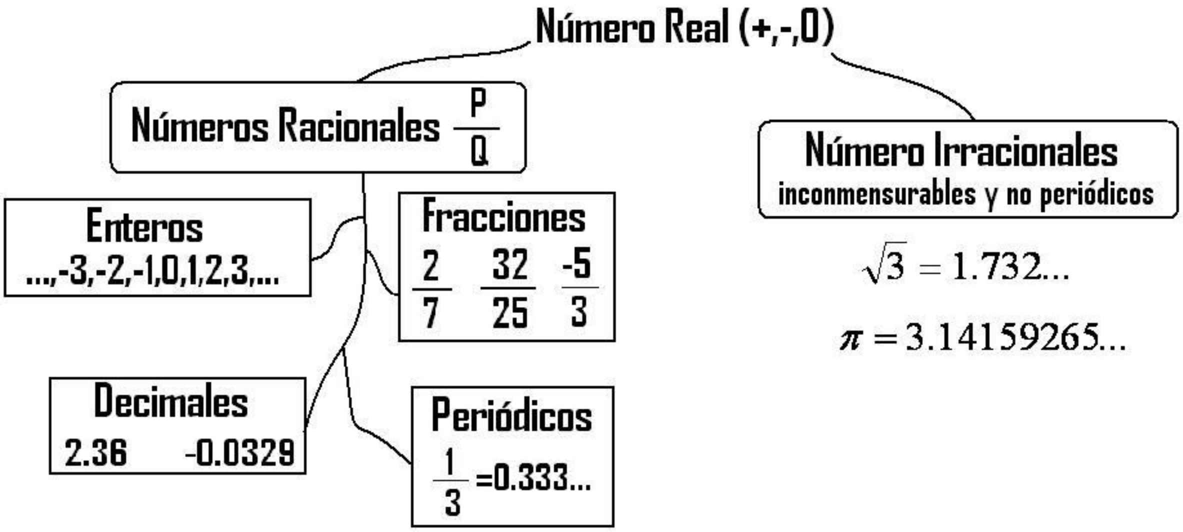
Ejemplos

1/4 = 0,250000... Es un número racional puesto que es periódico a partir del tercer número decimal.

5/7 = 0,7142857142857142857.... Es racional y tiene un período de longitud 6 (repite 714285).

$\frac{\sqrt[3]{7}+1}{2} =$ 456465591386194 es irracional y su expansión decimal es aperiódica.

A la unión de todos los números racionales y los irracionales se les conoce como los **números reales** {R}.



Ejercicio. Dibujar una recta numérica y señalar los diferentes tipos de números que la forman.

Definición

Un **número**, en ciencia, es una abstracción que representa una cantidad o una magnitud. En matemáticas un número puede representar una cantidad métrica o más generalmente un elemento de un sistema numérico, así los números complejos usualmente no son interpretables como una cantidad o magnitud del mundo real sino formas de representar objetos del mundo real, o un número ordinal representará un orden de una serie.

Todos los números pueden ordenarse en una recta. De esta manera, podemos determinar si un número es mayor o menor que otro, dependiendo del lugar que ocupa a esta recta se le llama **recta numérica.**

Un número es menor, cuando está ubicado a la izquierda de otro en la recta numérica, o sea, está más cerca del 0 y, decimos que es mayor, cuando se ubica a la derecha de otro y está más alejado del cero.

Si miramos la recta anterior, podemos ver que el número 2 está ubicado a la izquierda del número 3 y además, está más cerca del cero, por lo tanto, decimos que el número 2 es menor que el número 3.

De la misma manera, si miras nuevamente la recta, podrás ver que el número 5 está ubicado a la derecha del número 4 y más alejado del cero, por lo tanto cabe mencionar, que el número 5 es mayor que el número 4.

¿Cómo simbolizamos si un **número es mayor o menor**?

Utilizamos el símbolo <, para indicar que un número es menor que otro. Por ejemplo, sabemos al mirar la recta numérica que el número 3 es menor que el número 5 y lo representamos de la siguiente forma: 3 < 5

Utilizamos el símbolo >, para indicar que un número es mayor que otro. Por ejemplo, el número 5 es mayor que el número 4, y lo representamos de la siguiente forma: 5 > 4

1.3 Conjuntos

La palabra conjunto generalmente la asociamos con la idea de agrupar objetos, pero no tienen que ser necesariamente cosas tangibles sino también pueden ser cosas que existen solo en nuestro pensamiento como por ejemplo una idea, un sentimiento, una letra etc. Un conjunto no es más que la agrupación de varios elementos que comparten características o rasgos similares.

Ejemplo: el conjunto de los colores del arcoíris es:

AI = {Rojo, Naranja, Amarillo, Verde, Azul, Añil, Violeta}

Los números pueden ser usados para la comprensión de conjuntos y de la clasificación de estos. Con los números naturales contamos los elementos de un conjunto (número cardinal). O bien expresamos la posición u orden que ocupa un elemento en un conjunto (ordinal).

El conjunto de los números naturales está formado por:

N= {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,...}

Por ejemplo, para los números naturales, si se considera la propiedad de ser un número primo, el conjunto de los números primos es: P = {2, 3, 5, 7, 11, 13, ...}

Del conjunto de números naturales se puede observar que:

- La suma y el producto de dos números naturales es otro número natural.
- La diferencia de dos números naturales no siempre es un número natural, sólo ocurre cuando el minuendo es mayor que sustraendo.
- (5 – 3) Pertenece Conjunto de los números naturales
- (3 – 5) No pertenece Conjunto de los números naturales

Un conjunto queda definido únicamente por sus miembros y por nada más. En particular, un conjunto puede escribirse como una lista de elementos, pero cambiar el orden de dicha lista o añadir elementos repetidos no define un conjunto nuevo. Por ejemplo:

S = {Lunes, Martes, Miércoles, Jueves, Viernes} = {Martes, Viernes, Jueves, Lunes, Miércoles}

AI = {Rojo, Naranja, Amarillo, Verde, Azul, Añil, Violeta} = {Amarillo, Naranja, Rojo, Verde, Violeta, Añil, Azul}.

Los enteros son números reales …,−3,−2,−1,0,1,2,3,… que se denotan por el símbolo Z y se pueden escribir como

Z = {…,−2,−1,0,1,2,…}

Los números racionales son números reales que pueden ser expresados como razón de dos enteros. Se denota el conjunto de los números racionales por Q, así que

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in Z \right\}$$

Como se mencionó antes un conjunto suele definirse mediante una propiedad que todos sus elementos poseen.

En particular, un conjunto puede escribirse como una lista de elementos, pero cambiar el orden de dicha lista o añadir elementos repetidos no define un conjunto nuevo.

Por ejemplo:

S = {Lunes, Martes, Miércoles, Jueves, Viernes} = {Martes, Viernes, Jueves, Lunes, Miércoles}

AI = {Rojo, Naranja, Amarillo, Verde, Azul, Añil, Violeta}

= {Amarillo, Naranja, Rojo, Verde, Violeta, Añil, Azul}.

Notación de conjuntos

Pertenece=$\in$

Ejemplo:

$x \in A \rightarrow$ "x pertenece a A", "x está en A" o "x en A".

No pertenece=$\notin$

Ejemplo:

$x \notin A \rightarrow$ "x no pertenece a A", "x no está en A" o "x no en A".

Conjunto vacío.- carece de elementos, se llama conjunto vacío o nulo y se simboliza **"$\varnothing$".**

Conjunto universal.- conjunto que contiene todos los elementos que intervienen en una discusión, se llama conjunto universal o universo y se denota con la letra **U**.

Ejemplo:

Si A= {0, 1, 2}, B= {3, 4, 5}, C= {5,7}, D= {0, 1, 3} y E= {3, 5, 7, 2}; entonces el mínimo conjunto universal que puede considerarse para estos conjuntos es **U**= {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} porque **U** tiene los elementos de los conjuntos A, B, C, D y E.

Los conjuntos pueden ser finitos o infinitos. El conjunto de los números naturales es infinito, pero el conjunto de los planetas en el Sistema Solar es finito. Además, los conjuntos pueden combinarse mediante operaciones, de manera similar a las operaciones con números.

Ejercicio.

Escribir explícitamente los siguientes conjuntos:

A el conjunto de los números naturales menores que 10.

B el conjunto de los colores del arcoíris.

C el conjunto de las vocales.

Existen varias maneras de referirse a un conjunto. Lo más usual en matemáticas es de forma extensiva que consiste en listar todos los elementos y encerrar entre llaves.

Ejemplo:

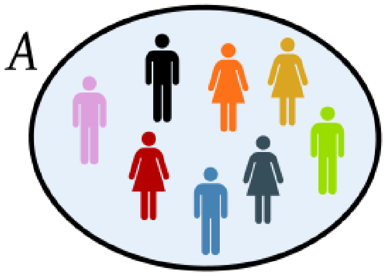
A = {verde, blanco, rojo}

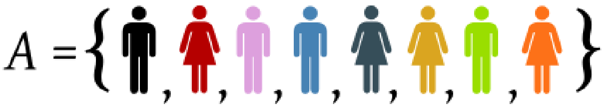
B = {a, e, i, o, u}

También se puede utilizar la forma descriptiva mediante una propiedad, por ejemplo:

A = {Números naturales menores que 5}

D = {Número de años de los compañeros de 3 semestre}





Otra notación habitual para denotar por comprensión es:

A = {m : m es un número natural, y 1 ≤ m ≤ 5}

D = {p : p es el número de años de los compañeros de 3 semestre}

En estas expresiones los dos puntos («:») significan «tal que».

Ejemplo: Presentar el conjunto C de números impares, de forma extensiva y por comprensión.

a) C= {1357,…}
b) C= {x∈**N**: x es impar}

Definición

Un **conjunto** es una colección de objetos llamados elementos. Los elementos del conjunto pueden ser cualquier cosa: personas números, colores, letras, figuras, etc. Se dice que un **elemento** pertenece al conjunto si está definido como incluido de algún modo dentro de él.

Diagrama de Venn

Los **diagramas de Venn** son esquemas usados en la teorí de conjuntos. Estos diagramas muestran colecciones (conjuntos) de cosas (elementos) por medio de líneas cerradas.

Los diagramas de Venn, se usan para representar gráficamente a un conjunto o más, junto con el conjunto universal que lo contiene.

Subconjuntos.- un conjunto A es subconjunto de un conjunto B si todo elemento de A es elemento de B, se simboliza "⊆" y se lee "es subconjunto de", "está contenido en" o "contenido en".

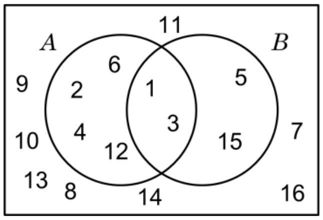
- Cuando un conjunto B tiene al menos un elemento que no pertenece a un conjunto A siendo este, subconjunto de B; se dice que A es subconjunto propio del conjunto B y se denota A⊂B.
- El conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto A; ∅⊆A
- Todo conjunto A es subconjunto de sí mismo; A⊆A
- B⊄A; se lee "B no está contenido en A" o "B no es subconjunto de A".

Con los diagramas de Venn es posible representar las relaciones de intersección, inclusión y disyunción sin cambiar la posición relativa de los conjuntos

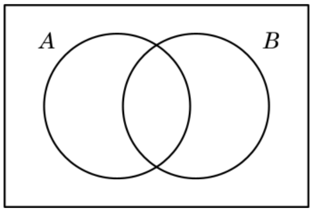
Intersección

Dado que los conjuntos pueden tener elementos comunes, las regiones encerradas por sus líneas límite se superponen. El conjunto de los elementos que pertenecen simultáneamente a otros dos es la *intersección* de ambos.

A = {1; 2; 3; 4; 6; 12}
B = {1; 3; 5; 15}
U = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16}



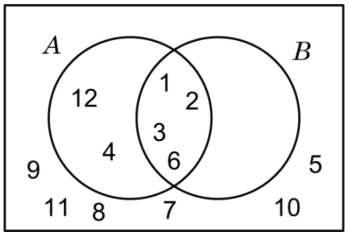
A = {*x* | *x* es divisor natural de 12}
B = {*x* | *x* es divisor natural de 15}
U = {*x* | *x* es natural menor o igual que 16}



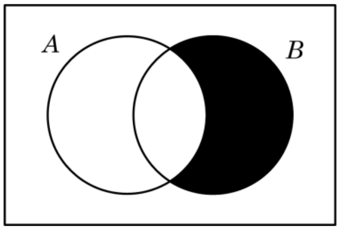
Inclusión

Si todos los elementos de un conjunto son parte de los elementos de otro, se dice que el primero es un ***subconjunto*** del segundo o que *está incluido* en el segundo. En los diagramas de Venn, todas las regiones de superposición posibles deben ser representadas. Y, cuando hay regiones que no contienen elementos (*regiones vacías*), la situación se indica anulándolas (con un color de fondo distinto).

A = {1; 2; 3; 4; 6; 12}
B = {1; 2; 3; 6}
U = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12}



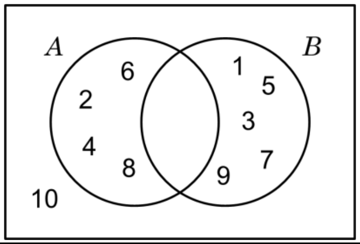
A = {*x* | *x* es divisor natural de 12}
B = {*x* | *x* es divisor natural de 6}
U = {*x* | *x* es natural menor o igual que 12}



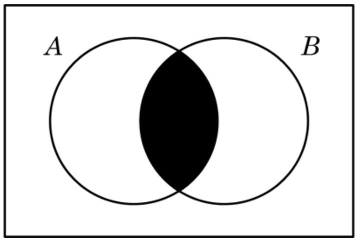
Disyunción

Cuando los conjuntos no tienen elementos comunes, la región de superposición queda vacía.

A = {2; 4; 6; 8}
B = {1; 3; 5; 7; 9}
U = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10}



A = {*x* | *x* es par y de una cifra}
B = {*x* | *x* es impar y de una cifra}
U = {*x* | *x* es natural menor o igual que 10}



1.4 Plano cartesiano

La finalidad de un plano cartesiano es describir la posición de puntos, los cuales se encontrarán representados por sus coordenadas o parejas ordenadas en rectas numéricas.

Producto cartesiano es la ordenación de ciertos elementos de dos en dos formando parejas de la forma (x,y) llamadas parejas ordenadas.

Es cuando se ordenan ciertos elementos de dos diferentes conjuntos, tomando de dos en dos uno de cada conjunto, se obtienen las parejas de la forma (x, y) asociando un valor del eje x y otro del eje y a esta forma de ordenar se les llama coordenadas o parejas ordenadas.

1. Dos parejas ordenadas (a,b) y (c,d) son iguales si y solo si a=c y b=d.
2. El producto cartesiano de los conjuntos A y B denotado por AxB se define:

   AxB= {(a,b): a∈A, b∈B}

Ejemplo:

1.- Conjunto A= {0,1}→parejas ordenadas son (0,0), (0,1), (1,0) y (1,1).

2.- Si A= {a,b} y B={c,d}, determinar AxB y BxA

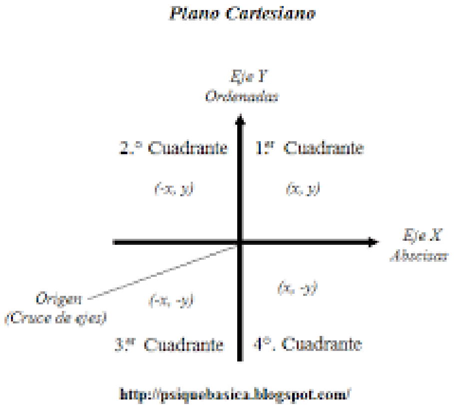
AxB= {(a,c), (a,d), (b,c), (b,d)}

BxA= {(c,a), (c,b), (d,a), (d,b)}

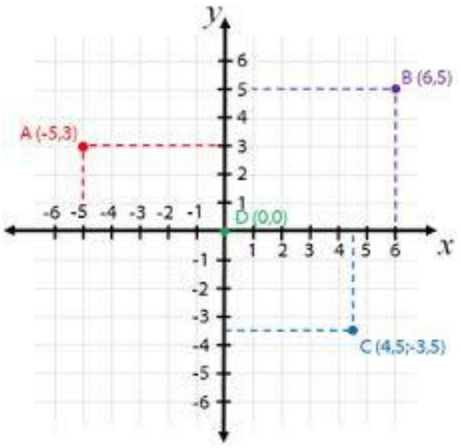
El plano cartesiano

El **plano cartesiano** es un sistema de referencias que se encuentra conformado por dos rectas numéricas, una horizontal y otra vertical, que se cortan en un determinado punto. A la horizontal se la llama eje de las

abscisas o de las ‘equis’ y al vertical eje de las **ordenadas** o de las ‘yes’, en tanto, el punto en el cual se cortarán se denomina origen.



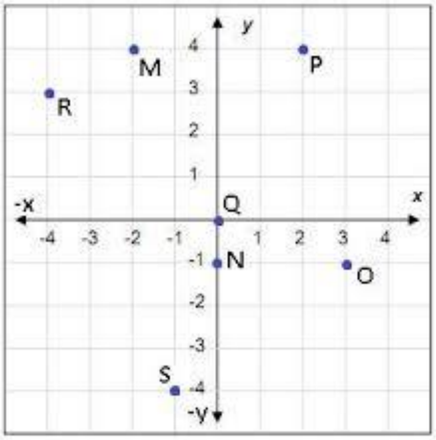
Las coordenadas cartesianas, se formarán asociando un valor del eje x y otro del eje y. En tanto, para localizar los puntos en el plano cartesiano se tienen que localizar las abscisas o valor de las x, se contarán las unidades correspondientes en dirección derecha, si son positivas y en dirección izquierda, si son negativas, partiendo del punto de origen que es el 0. Y luego, desde donde se localizó el valor de x, se procederá a contar las unidades correspondientes hacia arriba en caso de ser positivas, hacia abajo, en caso de ser negativas y de esta manera se localiza cualquier punto dada las coordenadas.



El plano cartesiano es muy útil para conocer las distancias que separan un lugar de otro, por ejemplo supongamos que nos encontramos en un lugar al cual lo relacionamos con las coordenadas (0,0) y queremos saber la distancia a la cual se encuentra otro lugar al cual nos queremos dirigir, que, supongamos queda a cinco cuadras al norte y seis al este, puede ser plasmada a través de un plano cartesiano, tomando como origen del plano aquel en el cual nos encontramos nosotros, es decir el punto B.

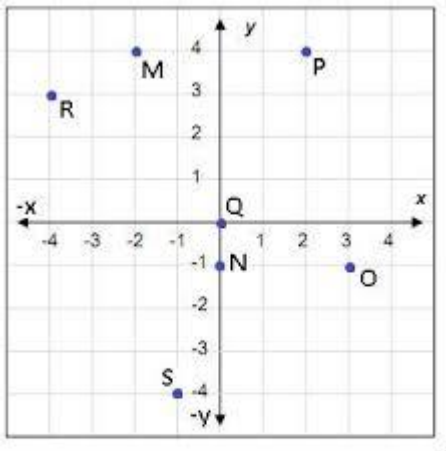
El plano cartesiano euclidiano se le atribuye al reconocido matemático y filósofo francés del siglo XVII René Descartes, por haber promovido la necesidad de tomar un punto de partida sobre el cual edificar todo el conocimiento.

Ejemplo: Encuentra la longitud del segmento recto que une los puntos P y S.

 	Solución: Lo primero que se tiene que hacer es localizar las coordenadas de los dos puntos. P(2,4) y S(-1,-4), existen varias formas de medir dicha longitud (gráfica y analíticamente). Una forma es trazar un triángulo rectángulo con vértices en P(2,4), S(-1,-4) y (2,-4). Ya que se tiene dibujado el triángulo rectángulo, se calculan las distancias de un punto a otra con la siguiente fórmula: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

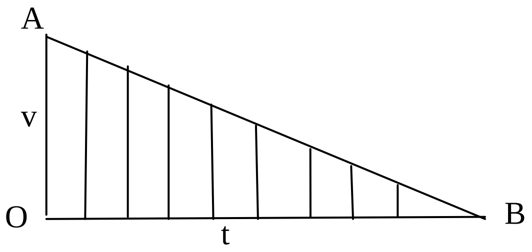
1

Ejercicio. Encontrar las coordenadas de los puntos que se muestran en el plano cartesiano.



1.4.1 Gráficas

En la Edad Media el estudio de funciones aparece ligado al concepto de movimiento, Nicolás Oresme (1323-1392) fue uno de los primeros en representar gráficamente unos ejes coordenados donde relacionó el cambio de la velocidad con respecto al tiempo.



Representación gráfica de Oresme; una velocidad que decrece uniformemente desde el valor OA, hasta B.

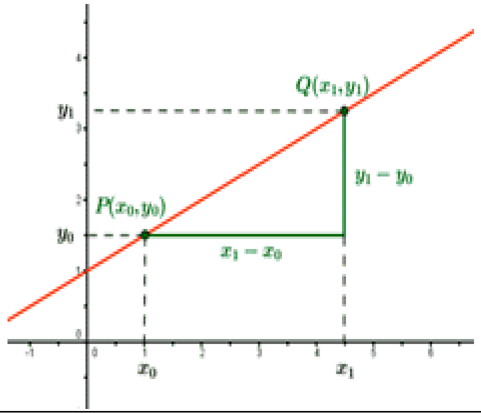
Definición

Gráfica y Gráfico son las denominaciones de la **representación** de datos, generalmente numéricos, mediante recursos gráficos (líneas, vectores, superficies o símbolos); también es el nombre de un conjunto de puntos que se plasman en coordenadas cartesianas y sirven para analizar el comportamiento de un proceso o un conjunto de elementos o signos que permiten la interpretación de un fenómeno.

Representación gráfica del producto cartesiano

Para realizar una gráfica se necesita identificar los puntos coordenados en el plano cartesiano, por ejemplo:

Encontrar la longitud del segmento recto que une los puntos P y S.



Solución:

Lo primero que se tiene que hacer es localizar las coordenadas de los dos puntos. $P(x_0, y_0)$ y $Q(x_1,y_1)$, existen varias formas de medir dicha longitud (gráfica y analíticamente).

Una forma es trazar un triángulo rectángulo con vértices en P, Q y (x_1, y_0).

Ya que se tiene dibujado el triángulo

rectángulo, se calculan las distancias de un punto a otra con la siguiente fórmula: $d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$

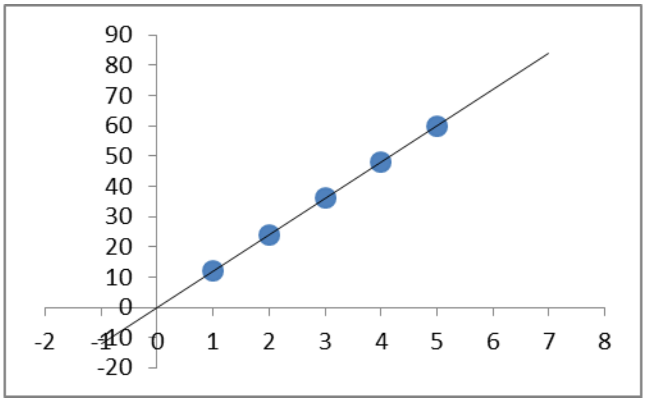
Tablas de valores

Una tabla es una representación de datos, mediante pares ordenados, expresan la relación existente entre dos magnitudes o dos situaciones.

Una gráfica es la representación en unos ejes de coordenadas de los pares ordenados de una tabla.

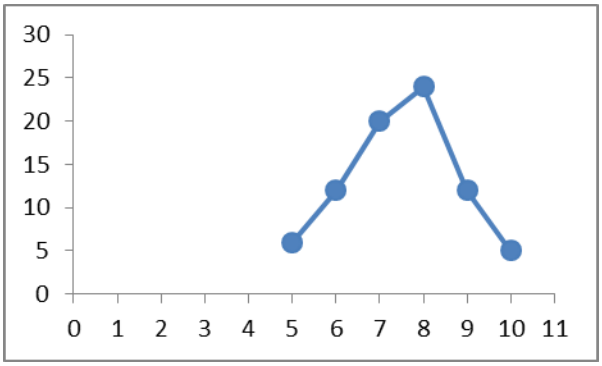
La siguiente tabla muestra la variación del precio de las papas, según el número de kilogramos que compremos.

Kg de papas	1	2	3	4	5
Precio en $	12	24	36	48	60



La siguiente tabla nos indica el número de alumnos que obtienen una calificación en un examen.

Calf.	**Nº de alumnos**
5	6
6	12
7	20
8	24
9	12
10	5



Ejercicios

Hacer un dibujo gráfico o un bosquejo donde se refleje la solución de un problema matemático

Tabular y graficar el crecimiento de conejos:

Una pareja de conejos tiene 7 conejos cada 5 meses cuantos conejitos habrán tenido después de 3 años.

2.1. Ecuaciones

Una **ecuación** es una igualdad matemática entre dos expresiones algebraicas, denominadas *miembros*, en las que aparecen valores conocidos o *datos*, y desconocidos o *incógnitas*, relacionados mediante operaciones matemáticas.

2.1.1. Incógnitas y variables

Los valores conocidos pueden ser números, coeficientes o constantes; y también variables cuya magnitud pueda ser establecida a través de las restantes ecuaciones de un *sistema*, o bien mediante otros procesos. Las **incógnitas,** representadas generalmente por letras, constituyen los valores que se pretende hallar. Por ejemplo, en la ecuación:

$$\overbrace{3x-1}^{\text{primer miembro}} = \overbrace{9+x}^{\text{segundo miembro}}$$

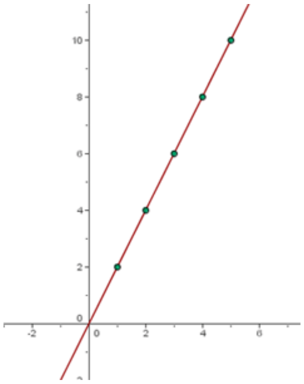
La variable x representa la incógnita, mientras que el coeficiente 3 y los números 1 y 9 son constantes conocidas. La igualdad planteada por una ecuación será cierta o falsa dependiendo de los valores numéricos que tomen las incógnitas; se puede afirmar entonces que una ecuación es una *igualdad condicional*, en la que sólo ciertos valores de las variables (incógnitas) la hacen cierta.

El término **variable** se puede definir como toda aquella característica que identifica a una realidad y que se puede medir y estudiar, esta característica varía, y esa variación se puede observar, medir y estudiar.

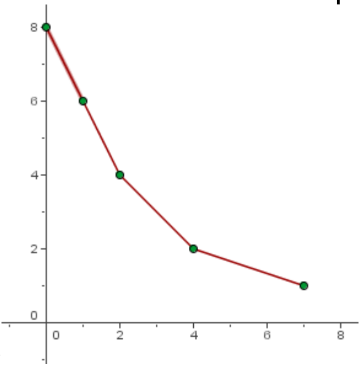
Se llama ***solución*** de una ecuación a cualquier valor individual de dichas variables que la satisfaga. Para el caso dado, la solución es:

$$x = 5$$

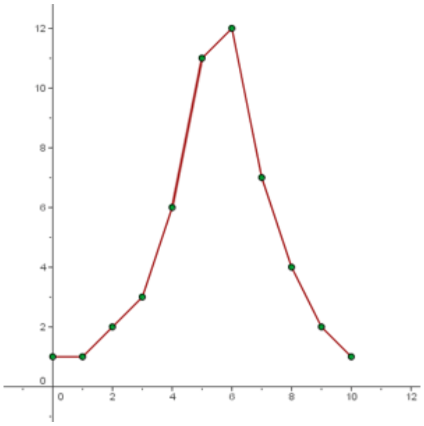
Una gráfica es creciente si al aumentar la variable independiente aumenta la otra variable.



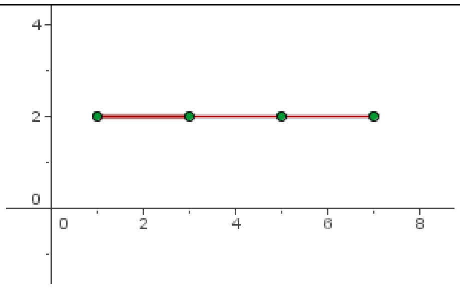
Una gráfica es decreciente si al aumentar la variable independiente disminuye la otra variable



Una gráfica puede tener a la vez partes crecientes y decrecientes.



Una gráfica es constante si al variar la variable independiente la otra permanece invariable.



2.1.2. Formas y ecuaciones en la geométricas

Al estudio de ciertas líneas y figuras geométricas aplicando técnicas básicas del análisis matemático y del álgebra en un determinado sistema de coordenadas se le conoce como geometría analítica. Lo novedoso de la geometría analítica es que permite representar figuras geométricas mediante ecuaciones u otro tipo de expresiones matemáticas.

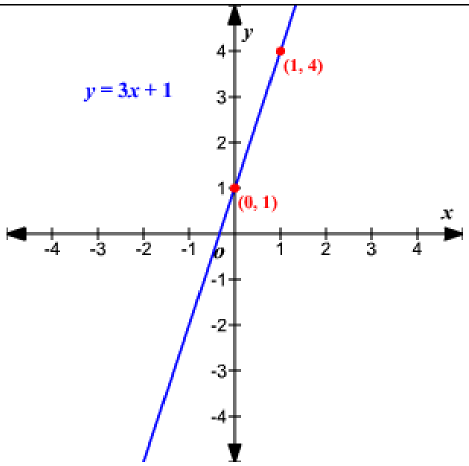
La idea básica de la geometría analítica es que a cada punto en un plano cartesiano le corresponde un par ordenado de números y a cada par ordenado de números le corresponde un punto en un plano, es decir, se relaciona la matemática y el álgebra con la geometría analítica por medio de correspondencias.

Además, las ecuaciones algebraicas corresponden con figuras geométricas. Eso significa que las líneas y ciertas figuras geométricas se pueden expresar como ecuaciones y, a su vez, las ecuaciones pueden graficarse como líneas o figuras geométricas. En particular, las **rectas** pueden expresarse como **ecuaciones de primer grado** y las **circunferencias** y el resto de cónicas como **ecuaciones de segundo orden.**

Ecuación de la recta

La **recta** se puede entender como un conjunto infinito de puntos alineados en una única dirección. Vista en un plano, una recta puede ser horizontal, vertical o diagonal (inclinada a la izquierda o a la derecha).

Una recta es la representación gráfica de una expresión algebraica o **ecuación lineal de primer grado**.



De acuerdo a uno de los postulados de la Geometría Euclidiana, para determinar una línea recta sólo es necesario conocer dos puntos (A y B) de un **plano cartesiano**, con **abscisas (x)** y **ordenadas (y)**. Conocidos esos dos puntos, todas las rectas del plano, sin excepción, quedan incluidas en la ecuación

Ax + By + C = 0 que se conoce como: la **ecuación general**.

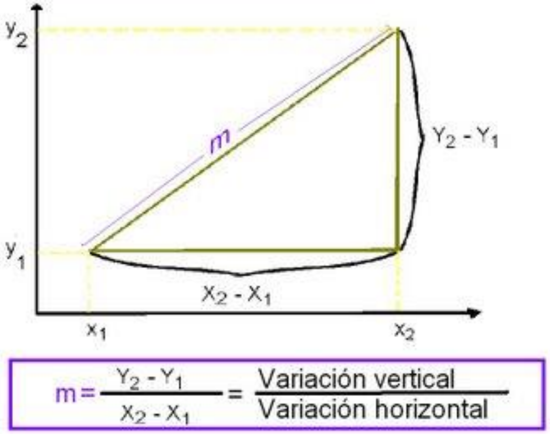
Teorema

La ecuación general de primer grado **Ax + By + C = 0**, donde A, B, C pertenecen a los **números reales**; y en que A y B no son simultáneamente nulos, representa una línea recta.

Hay varias formas de representar la ecuación de la recta otra forma es:

$$y = mx + b$$

Donde $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ representa la pendiente de la recta y **b** una constante conocido como el coeficiente de posición.



Ejemplo

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A (2, – 4) y que tiene una pendiente de menos 1/3.

Al sustituir los datos en la ecuación, resulta lo siguiente:

$y – y_1 = m(x – x_1)$

$y – (–4) = – 1/3(x – 2)$

$3(y + 4) = –1(x – 2)$

$3y + 12 = –x + 2$

$3y +12 + x – 2 = 0$

$3y + x + 10 = 0$

$x + 3y + 10 = 0$

Ejercicio.

¿Cuál es la pendiente y el coeficiente de posición de la recta **4x – 6y + 3 = 0**?

Ecuación de la circunferencia

Ecuación Ordinaria de la Circunferencia

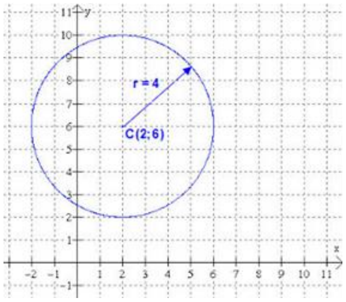
Dados las coordenadas del centro de la circunferencia C(h;k) y el radio "r" de la misma, podemos utilizar la siguiente ecuación para determinar el valor de "y" correspondiente a un valor de "x".

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es C(2;6) y con radio r = 4.

$$(x - 2)^2 + (y - 6)^2 = 4^2$$



Ecuación Canónica de la Circunferencia

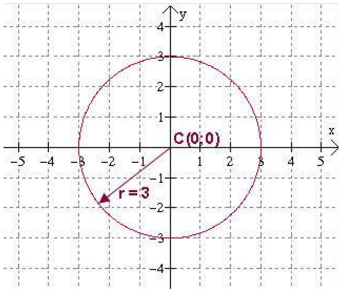
Sean ahora las coordenadas del centro de la circunferencia C(0;0) y el radio "r", podemos utilizar la siguiente ecuación para determinar el valor de "y" correspondiente a un valor de "x".

$$x^2 - y^2 = r^2$$

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el origen y con radio r = 3

$$x^2 + y^2 = 3^2$$



Ecuación General de la Circunferencia

Si conocemos el centro y el radio de una circunferencia, podemos construir su ecuación ordinaria, y si operamos los cuadrados, obtenemos la forma general de la ecuación de la circunferencia, así:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2\text{ ; desarrollando}$$

$$x^2-2xh+h^2+y^2-2yk+k^2=r^2\text{ ; ordenando}$$

$$x^2+y^2-2xh\ 2yk+h^2+k^2-r^2=0\text{; agrupando}$$

$$x^2+y^2+\underbrace{(-2h)}_{D}x+\underbrace{(-2k)}_{E}y+\underbrace{(h^2+k^2-r^2)}_{F}=0\text{ ; renombrando}$$

$$\boxed{x^2+y^2+Dx+Ey+F=0}$$

Ejemplo:

Hallar la ecuación general de la circunferencia con centro C(2;6) y radio r = 4

$(x - 2)^2 + (y - 6)^2 = 4^2$

$x^2 - 2(2x) + 2^2 + y^2 - 2(6y) + 6^2 = 4^2$

$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 12y + 36 = 16$

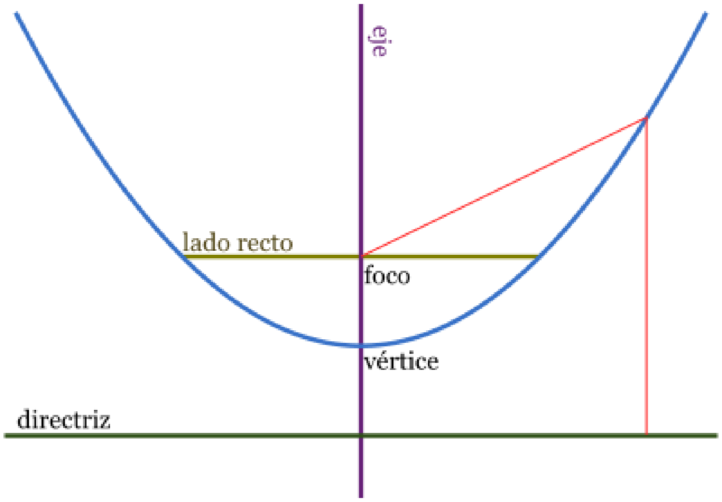
$x^2 + y^2 - 4x - 12y + 4 + 36 - 16 =0$

$x^2 + y^2 - 4x - 12y + 24 = 0$

$D = -4$, $E = -12$, $F = +24$

Ecuación de la parábola

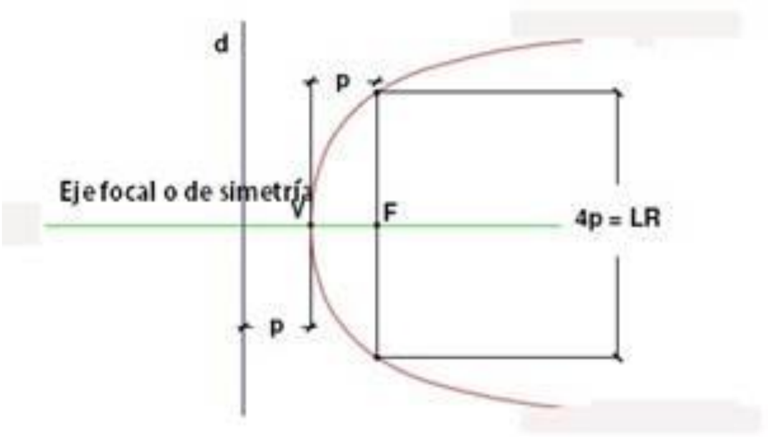
Se denomina **parábola** al lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de una recta dada, llamada directriz, y de un punto exterior a ella, llamado foco.



Esta forma geométrica, la parábola, expresada como una ecuación, cuenta con una serie de elementos o parámetros que son básicos para su descripción, y son:

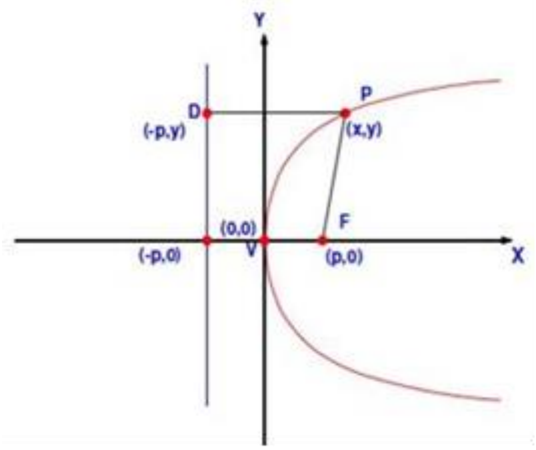
- **Vértice** (V): Punto de la parábola que coincide con el eje focal (llamado también eje de simetría).
- **Eje focal** (o de simetría) (ef): Línea recta que divide simétricamente a la parábola en dos brazos y pasa por el vértice.
- **Foco** (F): Punto fijo de referencia, que no pertenece a la parábola y que se ubica en el eje focal al interior de los brazos de la misma y a una distancia p del vértice.
- **Directriz** (d): Línea recta perpendicular al eje focal que se ubica a una distancia p del vértice y fuera de los brazos de la parábola.
- **Distancia focal** (p): Parámetro que indica la magnitud de la distancia entre vértice y foco, así como entre vértice y directriz (ambas distancias son iguales).
- **Cuerda**: Segmento de recta que une dos puntos cualesquiera, pertenecientes a la parábola.
- **Cuerda focal**: Cuerda que pasa por el foco.
- **Lado recto** (LR): Cuerda focal que es perpendicular al eje focal.

En el Plano Cartesiano una parábola puede tener su vértice en cualquier par de coordenadas y puede estar orientada hacia arriba, hacia abajo o hacia la izquierda o la derecha.

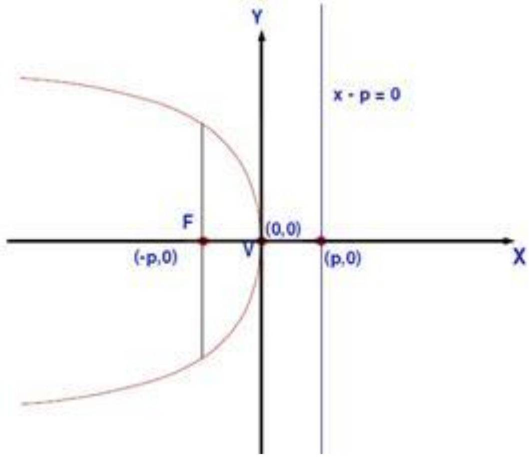


Ecuaciones de la parábola con vértice en el origen

Parábola cuyo vértice está en el origen, su eje focal o de simetría coincide con el eje de las X (abscisas) y que está orientada (se abre) hacia la derecha. $y^2 = 4px$ (ecuación de la parábola en su forma ordinaria o canónica). Cuando la parábola se abre hacia la izquierda (sentido negativo) del eje de las abscisas "X", la ecuación de la parábola es $y^2 = –4px$.

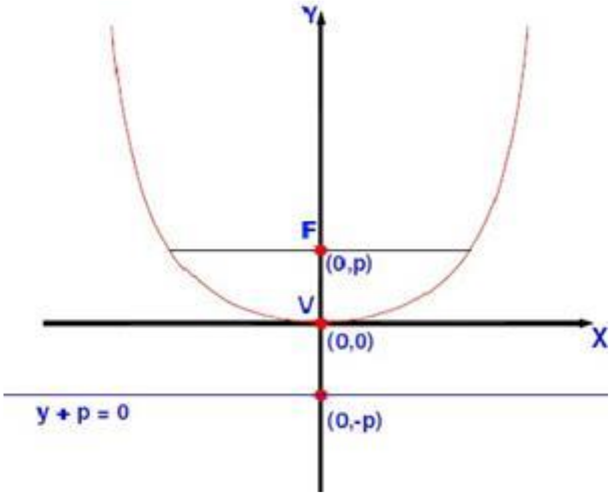


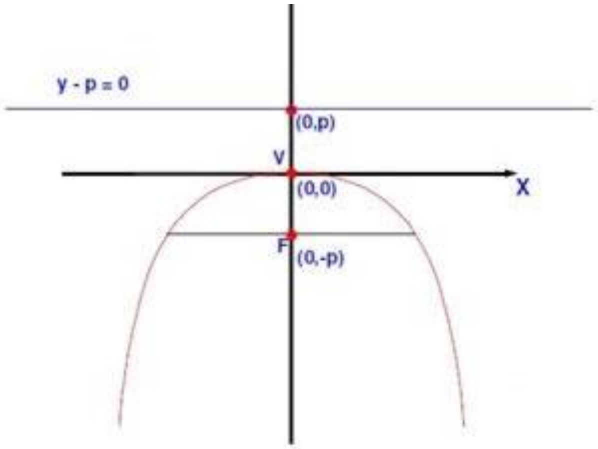
$y^2 = 4px$



$y^2 = –4px$

Cuando la parábola se abre hacia arriba (sentido positivo) en el eje de las ordenadas “Y” la ecuación de la parábola es $x^2 = 4py$, y cuando la parábola se abre hacia abajo (sentido negativo) en el eje de las ordenadas “Y” su ecuación es $x^2 = –4py$





$x^2 = –4py$

$x^2 = 4py$

El **parámetro p** (que marca la distancia focal) señala la distancia entre el **foco** y el **vértice**, que es igual a la distancia entre el **vértice** y la **directriz**.

Si en la ecuación de la parábola la **incógnita x es la elevada al cuadrado**, significa que la curvatura de la misma se abre hacia arriba o hacia abajo, dependiendo del signo del **parámetro p**.

Cuando el **parámetro p es positivo**, la parábola **se abre “hacia arriba”** y cuando es **negativo se abre “hacia abajo”**.

Ahora, si en la ecuación de la parábola la **incógnita y es la elevada al cuadrado**, la curvatura de la misma será hacia la derecha o hacia la izquierda. En este caso, cuando el **parámetro p es positivo**, la parábola se **abre “hacia la derecha”** y cuando es **negativo se abre “hacia la izquierda”**.

Ejemplo:

Obtener la ecuación, el foco y la directriz de la parábola con vértice en el origen y que contiene al punto B(3, 4), además su eje de simetría (o eje focal) es paralelo al eje X.

Solución:

El punto B (3, 4) nos indica que: x = 3, y = 4

Sustituyendo las coordenadas del punto B en la ecuación

$$y^2 = 4px$$
$$4^2 = 4p(3)$$
$$16 = 12p$$
$$p = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

Entonces

$$y^2 = 4(\tfrac{4}{3})x$$
$$y^2 = \frac{16}{3}x$$

Donde

$$F = \left(\frac{4}{3}, 0\right)$$

Y directriz

$$x = -\frac{4}{3}$$

Ecuación de la parábola cuyo vértice no está en el origen

La parábola se abra hacia la derecha (sentido positivo) en el eje de las abscisas “X”.

Ecuación de la parábola (y – k)2 = 4p(x – h)

La parábola se abra hacia la izquierda (sentido negativo) del eje de las abscisas “X”.

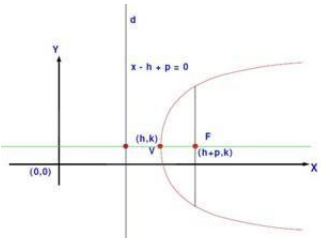
Ecuación de la parábola (y – k)2 = 4p(x – h)

La parábola se abra hacia arriba (sentido positivo) del eje de las ordenadas “Y”

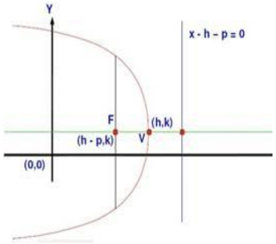
Ecuación de la parábola (x – h)2 = 4p(y – k)

La parábola se abra hacia abajo (sentido negativo) del eje de las ordenadas “Y”.

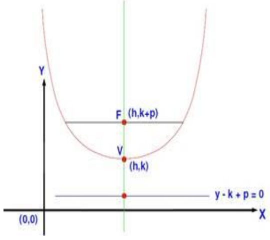
Ecuación de la parábola $(x – h)2 = –4p(y – k)$



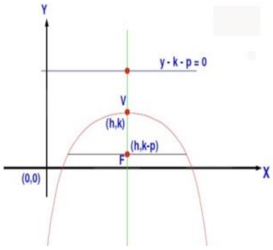
$(y – k)2 = 4p(x – h)$



$(y – k)2 = 4p(x – h)$



$(x – h)2 = 4p(y – k)$



$(x – h)2 = –4p(y – k)$

Ejercicio.

Encontrar la ecuación de la parábola con vértice en el punto (3, 2) y foco en (5, 2).

Determine las coordenadas del vértice (V), del foco (F), la longitud del lado recto (LR) y la ecuación de la directriz (D), en una parábola cuya ecuación ordinaria o canónica es

$$(x + 6)2 = –24(y – 2)$$

Ecuación de la parábola en su forma general

$$Ax^2 + Bx + Cy + D = 0$$

Que es la ecuación de una parábola horizontal en su forma general. Análogamente, para una parábola de orientación vertical, la ecuación en su forma general será:

$$Ay^2 + Bx + Cy + D = 0$$

2.2. Relación

Correspondencia es equivalente a Relación. En nuestra lengua, decir “en relación a”, es equivalente a decir “corresponde a”.

Ejemplos:

- En una tienda, cada artículo está relacionado con su precio; o sea, a cada artículo le corresponde un precio.

- A cada libro le corresponde un numero de paginas
- A cada ser humano le corresponde una fecha de nacimiento

En los ejemplos anteriores se puede identificar que en una correspondencia o relación se involucran dos conjuntos, en matemáticas una **Relación** es la correspondencia de un primer conjunto, llamado **Dominio**, con un segundo conjunto, llamado **Recorrido, Contradominio o Rango**, de manera que a cada elemento del Dominio le corresponde uno o más elementos del contradominio.

Ejemplo 1.

Si A = {2, 3} y B = {1, 4, 5}, encontrar tres relaciones definidas de A en B.

Solución

El producto cartesiano de A x B está conformado por las siguientes parejas o pares ordenados:

$$A \times B = \{(2, 1), (2, 4), (2, 5), (3, 1), (3, 4), (3, 5)\}$$

Y cada uno de los siguientes conjuntos corresponde a relaciones definidas de A en B:

$$R1 = \{(2, 1), (3, 1)\}$$

$$R2 = \{(2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$$

$$R3 = \{(2, 4), (3, 5)\}$$

La relación R1 se puede definir como el conjunto de pares cuyo segundo elemento es 1, esto es,

$$R1 = \{(x, y) \mid y = 1\}.$$

La relación R2 está formada por los pares cuyo primer componente es menor que el segundo componente,

$$R2 = \{(x, y) \mid x < y\}$$

Y la relación R3 está conformada por todos los pares que cumplen con que el segundo componente es dos unidades mayor que el primer componente, dicho de otro modo,

$$R3 = \{(x, y) \mid y = x + 2\}$$

Así, se puede continuar enumerando relaciones definidas a partir de A x B. La regla que define la relación se puede escribir mediante ecuaciones o desigualdades que relacionan los valores de x e y.

Ejercicio.

Dados los conjuntos C = {1, –3} y D = {2, 3, 6}, encontrar todos los pares ordenados (x, y) que satisfagan la relación

R = {(x, y) | x + y = 3}

Representación gráfica de las relaciones

Las relaciones se pueden presentar de forma gráfica o con diagramas para los pares ordenados se pueden representar gráficamente por medio de puntos en el plano cartesiano o por diagramas sagitales. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Si A = {1, 2, 3, 4, 5} y B = {1, 3, 5, 7, 9} y R la relación definida por la regla

R = {(x, y) | y = 2x + 1}, graficar R.

Solución

Los pares ordenados que pertenecen a la relación (que cumplen con y = 2x + 1) son:

R = {(1, 3), (2, 5), (3, 7), (4, 9)}

Y la gráfica correspondiente es la siguiente:

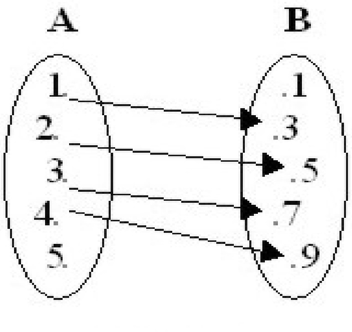
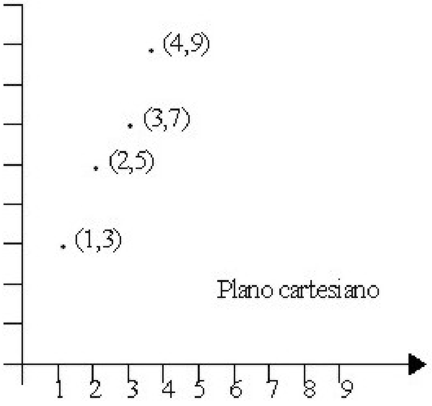


Diagrama sagital



Variables dependientes e independientes

A los elementos del conjunto dominio se le llaman **variables independientes** y los elementos del rango o contradominio se le llaman **variables dependientes**.

Función

La función es un ente matemático que se fue construyendo a través del tiempo y su estudio matemático comenzó con las matemáticas modernas en el siglo XVII, el concepto fue evolucionando hasta que a comienzos del siglo XIX, se formuló la definición de **función** como **relación entre dos variables**, que es la que actualmente se maneja en muchos libros de texto.

Es por ello que una **función** puede verse como una regla de correspondencia entre dos conjuntos de tal manera que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y sólo un elemento del segundo conjunto.

Ejemplo: a cada número entero posee un único cuadrado, que resulta ser un número natural

…	−2	−1	±0	+1	+2	+3	…
…	+4	+1	+0	+1	+4	+9	…

Esta asignación constituye una función entre el conjunto de los números enteros Z y el conjunto de los números naturales N.

- Al primer conjunto se le da el nombre de dominio.
- Al segundo conjunto se le da el nombre de contradominio o imagen.

Función

Sean A y B dos conjuntos, que pueden o no ser distintos. Una relación entre un elemento variable x de A y un elemento variable y de B, se llama relación funcional en *y*, si para todo *x* en *A*, existe un único *y* en *B*, el cual está en la relación dada con *x*.

Notación

Usualmente la notación que se usa para las funciones es f(x), aunque muchas veces se abrevia a simplemente f o y.

Representación esquemática del concepto de función

Ejemplo es el área *A* de un círculo en función de su radio *r*: el valor del área es proporcional al cuadrado del radio, $A = \pi r^2$. Del mismo modo, la duración *t* de un viaje de un auto entre dos ciudades separadas por una distancia *d* de 50 km depende de la velocidad *v* a la que este se desplace: la duración es inversamente proporcional a la velocidad, d / v. A la primera magnitud (el área, la duración) se la denomina variable dependiente, y la cantidad de la que depende (el radio, la velocidad) es la variable independiente.

La idea de relaciones funcionales va mucho más allá del dominio matemático por ejemplo, en la naturaleza existen muchos fenómenos que pueden ser representados por una función, también en ciencias como la geometría, la mecánica y muchas áreas más.

La regla de correspondencia para una función generalmente se maneja con una formulación matemática de forma explícita por ejemplo la ecuación de la recta representa una función ; tomando valores del conjunto dominio, se puede obtener el conjunto del contradominio.

Las funciones son muy útiles para representar situaciones de la vida cotidiana y para modelar fenómenos físicos, etc.

Ejemplos:

El costo de comprar fruta y el número de kilos comprados.

El costo de una llamada telefónica y su duración.

Velocidad de un auto y el tiempo utilizado para recorrer una distancia.

Otro ejemplo:

El precio de un viaje en taxi viene dado por:

$$y = 20 + 0.5\,x$$

Donde x el tiempo en minutos que dura el viaje.

Como podemos observar la función relaciona dos variables x e y.

x es la variable independiente**.**

y es la variable dependiente (depende de los minutos que dure el viaje).

A continuación vamos a representar matemáticamente con una función el siguiente problema:

Una señora vende manteles a $ 1,250 cada uno.

Para producir cada mantel, le implica a la señora tener gastos fijos como la renta de un local, pago de luz, etc. haciendo un total de $ 4,500.00 al mes. También hay otros gastos que varían como los gastos por la compra del material; tela, hilos agujas etc. La señora dice que los costos de la materia prima representan un 40 % de lo que cuesta el mantel. Con esta información se puede conocer el número mínimo de manteles que debe vender la señora para cubrir los gastos.

Sea x el número de manteles que vende la señora.

Si la señora vende x número de manteles se puede obtener la expresión matemática como:

Aumentando los gastos fijos por mes

El costo del material para la elaboración del mantel es del 0.4, es decir $500.00 cada uno.

Entonces la expresión matemática que representa al problema es:

Para saber cuántos manteles debe vender la señora tenemos que ver que sustituyendo el valor de x el resultado debe ser igual o mayor que cero.

Esto quiere decir que el número mínimo es 9.

Ejercicio.

De las funciones a las que se refieren los siguientes enunciados, separa las variables en dependientes e independientes:

- La electricidad consumida y el importe del recibo a pagar.
- La superficie de un cuadrado y la longitud del lado de dicho cuadrado.
- La velocidad a la que circula un vehículo y el espacio recorrido.
- El importe a pagar y el número de litros repostados en una gasolinera.

Generalmente, existen 3 formas de expresar una función: por medio de una tabla de valores, una gráfica o por una fórmula.

Una tabla de valores es una tabla donde aparecen algunos valores de la variable independiente *x* y sus correspondientes valores de la variable dependiente *y*. El uso de este tipo de tablas para expresar una función es característico de las Ciencias Experimentales, como la Física o la Química, en las que un proceso se estudia primero en el laboratorio y se recogen mediante instrumentos de medida una serie de datos o valores que se tabulan para una posterior interpretación. Con ellos se pretende obtener una ley o función que gobierne el proceso.

Tabla de valores	
X	**y**
0	6
1	1
2	9
3	2
4	3
5	5
6	4
7	7
8	6
9	3
10	8
11	9
12	2

La gráfica de una función es el dibujo, sobre unos ejes coordenados, de todos los pares (x,f(x)) donde x recorre todos los valores del dominio de la función. Como ya quedó claro y = f(x), así que la 2ª coordenada y de cada uno de estos puntos no es más que la correspondiente imagen de la 1ª coordenada x.

Una prueba de la recta vertical se utiliza para determinar si una relación trazada en un gráfico es una función o no. Para determinar a partir de la gráfica el valor de y = f(x) que corresponde a un valor de x concreto, debemos trazar la recta perpendicular al eje OX que pase por ese valor de x y el punto en el que esta recta corte a la gráfica es el valor de f(x). Cada recta perpendicular debe cortar en un único punto a la gráfica, ya que en otro caso habría algún valor de x que tendría dos imágenes, lo cual no debe suceder.

Esta gráfica no representa una función

porque la recta vertical corta dos puntos.

La fórmula o ecuación de una función es la expresión, en términos de operaciones algebraicas o no, de la relación de dependencia entre las dos variables: x, variable independiente; y variable dependiente.

La fórmula nos dice qué operaciones debemos hacer con cada valor de x para obtener su valor correspondiente y = f(x).

Problema: Dada f(x) = 3x – 4, encontrar f(5).

f(5) = 3(5) – 4   Sustituye 5 por x en la función.

f(5) = 15 – 4   Simplifica la expresión en el lado derecho de la ecuación.

f(5) = 11

Respuesta: Dada f(x)= 3x – 4, f(5) = 11.

Anexo D

D RELATOS DE GRABACIONES

Tabla D. Relatos de la intervención

Relatos	Relación de los relatos con los principios de la EMR
1. **Mtra.:** Buenos días muchachos	Presentación
2. **Alumnos**. Buenos días	
3. Mtra.: Como les decía hoy vamos a empezar ver el tema de la función, entonces vamos a tratar de reconstruir el concepto, y vamos a tratar de realizar actividades donde ustedes vean como ya desde la antigüedad ya se tenía la idea de la función pero se ha ido modificando, hoy en día tenemos un concepto que no se parase como era antes aunque pueden ser equivalentes pero en ocasiones les cuesta trabajo a ustedes entender y no solo a ustedes sino hasta a nosotros los profes. Entonces lo que yo vengo a proponer es que lo veamos por medio de actividades, para eso quiero que contesten un ejercicio.	Principio de interacción Principio de interconexión
4. **Alumno A:** ¿Vamos a jugar?	
5. **Mtra.:** Si vamos a jugar.	
6. **Mtra.:** Pasen	
7. **Alumna nueva:** Hola	Principio de reinvención guiada
8. **Mtra.:** Quieres sentarte aquí	
9. **Alumna nueva:** Quiero saber que…	
10. **Mtra.:** Vamos a ver el tema de función pero vamos a grabar la clase….	
11. **Mtra.:** Alguien falta de hoja, entonces lo que quiero es que lean el ejercicio y lo respondan en la parte de abajo o en la parte de atrás, pero escriban todo lo que necesitan para resolver el problema cuentas, ideas o me pueden llamarme y les puedo decir que escribir, porque a veces, muchas veces no escribimos todo lo que estamos pensando pero escribimos solo una parte por ejemplo una cuenta, pero no escribimos que significa y si no me dicen que significa yo no voy a saber leerlo, hagan de cuenta que están haciendo un examen entonces tienen que poner todo lo que pensaron para resolverlo, lo primero es leerlo después si ya lo entendieron contestarlo.	

12. **Mtra.:** Solamente el ejercicio, los demás puntos son otra cosa.	**Principio de reinvención guiada**
13. **Mtra.:** Pueden preguntar también.	
14. Los Alumnos siguen tratando de contestar el ejercicio, algunos escriben cuentas únicamente, entonces la maestra interviene.	

15. **Mtra.:** ¿Que cuenta hiciste aquí para obtener eso?	**Principio de**

16. **Alumno C:** Solo puse cuanto le tocaba a cada quien. 17. **Mtra.:** Puedes poner entonces un enunciado ¿Cuánto le tocaba a cada quién?	**reinvención guiada**
18. **Mtra.:** No borren, solo escriban que significa esa cuenta. 19. **Alumno C:** ¿Dónde escribo? 20. **Mtra.:** Puede ser ahí mismo o en la parte de atrás. 21. **Mtra.:** Pueden comentar con sus compañeros también.	**Principio de reinvención guiada** **Principio de interacción**
22. **Mtra.:** ¿Terminamos? ¿Quién me quiere explicar cómo resolvió el problema? ¿Cuánto pago cada uno? 23. **Alumno A:** treinta y uno cincuenta 24. **Mtra.:** ¿De a como le tocaba a cada uno? 25. **Alumno A:** de a veinte seis.	**Principio de actividad** **Principio de interacción**
26. **Mtra.:** Entonces el problema era … ¿?¿Marco? 27. **Alumno D:** he, cuanto pagamos cada uno 28. **Mtra.:** pero que dice el problema?, ¿Cómo lo resolviste? 29. **Alumno D:** este, primero dividí trescientos cincuenta entre trece, que eran las trece personas, a cada uno le tocaba de vente seis pero como se retiraron …. Ya que le diga otro.	**Principio de actividad** **Principio de interconexión**
30. **Mtra.:** A ver por acá, Fernando.	**Principio de interacción**
31. **Alumno B:** Pues esté, la cuenta era de trescientos cincuenta pesos pues en total, pero como se retiraron, eran trece Alumnos que consumieron los que consumieron, la cuenta en total fue de trescientos cincuenta pesos, pero se retiraron siete, quedaron seis nada más, esas seis personas pagaron de cincuenta y ocho pesos treinta y tres con tres centavos del almuerzo, si todos hubieran pegado las trece personas les tocaba de a veinte y seis pesos, pero como se retiraron siete personas les toco de a cincuenta y ocho punto treinta y tres a las seis personas que se quedaron.	**Principio de realidad**
32. **Mtra.:** En realidad creen ustedes que pagaron cincuenta y ocho punto treinta tres centavos? 33. **Alumnos:** No, no 34. **Alumna E:** No, porque se redondean los puntos decimales.	**Principio de interacción** **Principio de niveles** **Principio de interconexión**

35. **Alumno B:** pagaron cincuenta y nueve pesos.	
36. **Mtra.:** Ahora piensen, en esa cuentita tan simple están ustedes usando muchos conceptos que han aprendido de las matemáticas, hagan una lista de qué conceptos matemáticos utilizaron por ejemplo, que deben saber primero, que deben conocer. 37. **Alumno B:** Suma 38. **Mtra.:** Sumar 39. **Alumno A:** restar 40. **Alumno D:** dividir 41. **Mtra.:** dividir 42. **Alumno C:** y multiplicar 43. **Mtra.:** Multiplicar	**Principio de niveles** **Principio de interacción** **Principio de interconexión**
44. **Alumno A:** en donde multiplicar aquí, amigo ponter?. 45. **Alumno B:** en ninguno, jaja	**Principio de interacción**
46. **Mtra.:** Aparte fíjense, haber mmm 47. **Alumno B:** usar la lógica 48. **Mtra.:** Si pero que suman, que restan que multiplican, que dividen? 49. **Alumno B:** sumamos amigos, restamos amigos 50. **Alumno C:** dinero	**Principio de interacción** **Principio de interconexión**

51. **Mtra.:** fíjense hay dos cosas, restan amigos, dinero?	**Principio de interacción**
52. **Alumno C:** sociedad y economía	
53. **Alumno A:** es que en este caso, primero hay que contar a las personas	
54. **Mtra.:** que significa contar	**Principio de niveles**
55. **Alumno D:** se suman	
56. **Mtra.:** que suman	
57. **Alumno D:** las personas que se consideran	**Principio de interacción**
58. **Mtra.:** entonces fueron y trajeron a las personas para contarlas y….	
59. **Alumno A:** y después las corrimos, jajaj	
60. **Mtra.:** jajja, ahí ya están haciendo una abstracción matemática, pero lo están representando por medio de… que son estas cosas	
61. **Alumna A:** números	
62. **Mtra.:** números, los números son un concepto matemático que ya desde, … haber desde cuando creen ustedes que se inventaron los números	
63. **Alumno B:** uuuy desde la aparición del hombre	

64. **Mtra.:** casi, casi, el hombre siempre se ha preguntado sobre los fenómenos físicos entonces hizo una relación entre la abstracción del pensamiento y los fenómenos físicos, una de estas cosas de matemáticas fueron los símbolos, antes que los números porque primero fueron símbolos y ya después algunos de estos símbolos se convirtieron en números, de que año creen que datan los números	**Principio de interconexión**

65. **Mtra.:** Resuelvan los ejercicios que corresponden a la actividad 2 66. **Mtra.:** vayan haciendo su mesa vamos a trabajar los seis 67. **Mtra.:** los caballeros de la mesa redonda 68. **Mtra.:** y Fernando y Juan Carlos van a pasar a exponer su ejercicio al pisaron y los demás les vamos ayudar 69. **Alumno E:** no maestra 70. **Mtra.:** si Fernando cuenta por cuatro 71. **Alumno C**: y nos faltan los otros dos 72. **Mtra.:** por eso los otros dos lo van hacer entre los seis 73. **Alumno A:** como le hacemos 74. **Alumno C:** no más a si al cuadrado 75. **Alumno D:** redonda no que redonda 76. **Mtra.:** si quieren meter los pies debajo de la mesa pues tienes que dar la vuelta a la mesa y si quieres a si nomas pues a si nomas 77. **Alumno A:** pero a si cabe 78. **Mtra.:** pues nomas recórrela para atrás 79. **Mtra.:** a ver Fernando y Juan Carlos al pisaron 80. **Alumno A:** ha no manches Juan Carlos donde esta 81. **Alumno C:** Ya tiraste a tu tocayo 82. **Alumno E:** ya lo tiraste	**Principio de interacción** **Principio de reinvención guiada** **Principio de realidad** **Aquí están resolviendo ejercicios de la vida cotidiana** **Principio de interacción** **Principio de actividad** **Principio de interacción**

83. **Maestro:** Que pase Juan Carlos el de Jarácuaro 84. **Alumno C:** que pase Jarácuaro a explicar el problema 85. **Alumno A:** choclas que te tomas	**Principio de interacción**

86. **Mtra.:** bueno por lo menos no va a tener falta el de Jaracuaro por si decide regresar un día de estos	**Principio de interacción**
87. **Alumno A:** Si ya aquí vive	
88. **Alumno B:** de quien es	

89. **Mtra.:** a ver cuál es el problema	**Principio de interacción**
90. **Alumno E:** ha dice pues que va a repartir a tres hermanos el terreno y lo vamos a repartir en tres partes iguales que tienen de un lado (78 mts) y de otro 4mts, que proporción les toca a los tres hermanos, en partes iguales	**Principio de niveles**
91. **Mtra.:** y como lo van a repartir en partes iguales	**Principio de interconexión**
92. **Alumno A:** a mí se me ocurre algo maestra	
93. **Mtra.:** a ver	**Principio de niveles**
94. **Alumno A:** puedo, yo sé pues que ustedes ya lo resolvieron amigos pero por ejemplo aquí si empezamos ponemos una línea imaginaria aquí podemos sacar un rectángulo y aquí es más fácil dividirlo, igualmente aquí expandimos esta línea pues ya se hace como un? cómo se llama un triángulo rectángulo y a si es más fácil dividirlo y sacar la proporción, yo sé que así lo hicieron amigos	**Principio de interconexión** **Principio de reinvención guiada**
95. **Alumno F:** no	
96. **Alumno E:** es que a esto sacar el área total para sacar mejor de ahí de eso sumarle ya todo y de ahí sacar o dividir tres hermanos	
97. **Mtra.:** si a si como les dice su compañero es una buena forma la otra seria e hacer cuadrados de un modo y entonces checar cuantos cuadrados tienen cuantos se les forman y dividirlos	

98. **Alumno D:** es más fácil sacarle el área no y ya dividirla	**Principio de interconexión**
99. **Alumno E:** por eso pues para eso tienes que hacer esto	
100. **Alumno C:** para eso tienes que dividir	
101. **Alumno E:** aquí a completar los seis juegos iguales	**Principio de niveles**
102. **Alumno A:** ósea circulando y dividirlo	
103. **Mtra.:** Bueno entonces los siguientes dos, primero van a	

trabajar los seis para que sea más rápido organícense como le hacen lo que quiero es que se agilice el trabajo y acabar esos ejercicios y cuanto tardan	

104. **Alumno D:** cálculos (desatarios) lo que los patrones mandan	**Principio de interacción**
105. **Alumno E:** 20	

106. **Mtra.:** Pues lo mismo este van hacer un ejercicio que tenga que ver con los salarios otro con el movimiento de dos cuerpos, uno donde tú eres el patrón.	**Principio de interacción**
107. **Alumno E:** A yo soy el patrón	
108. **Mtra.:** ¿Cómo le vas hacer para repartir salarios, gastos y ganancias?	**Principio de niveles**
109. **Alumno E:** para robar	
110. **Mtra.:** para robar también hay que saber hacer cuentitas, porque si tienes cien mil pesos y tienes cincuenta trabajadores no les vas a pagar tres mil a cada quien o sí?	

111. **Alumno D:** tú eres el presidente	**Principio de interacción**
112. **Mtra.:** Cincuenta empleados. no les vas a pagar cierta cantidad si no tienes	
113. **Alumno D:** tú eres Benito Juárez	**Principio de interconexión**
114. **Mtra.:** Tienen que checar cuánto ganan cuanto les van a repartir se van a repartir cuánto va hacer la inversión	
115. **Alumno D:** y cuánto va hacer el porciento de mi ganancia	**Principio de realidad**
116. **Mtra.:** Si cuanto vas a ganar también	**Principio de actividad**
117. **Alumno D:** tienes que robar algo	
118. **Mtra.:** si como quieran pero ya pónganse a trabajar	
119. **Alumno E:** pues no me atarugo unos cinco pesos a cada cosa pero pues abra que hacer las cuentas más rápido	

120. **Alumno F:** como lo hicieron aquí, metes unos diez en la nómina de trabajadores como estaban aquí	
121. **Alumno D:** he y	
122. **Alumno E:** a pues hay que hacerlo pues	
123. **Alumno D:** si pasa	

124. **Alumno F:** Ira, porque no lo hacemos como ejemplo de los jinetes, que el que el contrates en una parte y luego este, … hay que ponerlo en una cuadrilla de jinetes llamados	**Principio de interacción**
125. **Mtra.:** Y al último los jinetes son los que ganan menos	
126. **Alumno A:** ya pues expliquen	
127. **Alumno E:** los (ciles) picosos	
128. **Alumno F:** una cuadrilla de jinetes de la cuadrilla de aguilitas de Cherán	
129. **Alumno E:** a simón la cuadrilla de la aguilita de jinetes de chercán	
130. **Alumno E:** a ver pónganle	
131. **Alumno C:** a si	**Principio de interacción**
132. **Alumno E:** Jinetes es con	
133. **Alumno D:** con g di	
134. **Alumno E:** ….	
135. **Alumno D:** con g de jinetes 2. Con j de jinetes	
136. **Alumno E:** yo ya le puse con g	
137. **Alumno C:** me prestan sacapuntas	
138. **Alumno B:** ¿cómo?	
139. **Alumno E:** la cuadrilla de la aguililla de Cherán. Esto suele ser una cuadrilla	
140. **Alumno F:** he se van a presentar el próximo, … Cuando van estas en San Pedro?	**Principio de interacción**
141. **Alumno A:** el 26	
142. **Alumno C:** ya se presentaron no	
143. **Alumno A:** a simón ya se presentaron con pepe salas	**Principio de realidad**
144. **Alumno D:** si, Y si nos robaron	
145. **Alumno F:** se presentaron	
146. **Alumno E:** se presentaron en la monumental de San Pedro Pareo creo	
147. **Alumno F:** se presentaron en la monumental de san Pedro Pareo	**Principio de actividad**
148. **Alumno A:** se presentaron	
149. **Alumno D:** en Apatzingán ponle	
150. **Alumno A:** se presentaron en Apatzingán	
151. **Alumno F:** con cinco ganaderías de,…	
152. **Alumno E:** ya para robar está bien	

153. **Alumno C:** para ti o para Cherán 154. **Mtra.:** Todos esos datos debes ser claros para el que está leyendo	

155. **Alumno A:** se presentó en Apatzingán pero ponle versos este nuevo bato	**Principio de interacción**
156. **Alumno F:** los destructores	
157. **Alumno A:** los rostros sagrados	
158. **Alumno D:** los rostros sagrados pero son de la selección michoacana	
159. **Alumno F:** que vengan a ver los toros de selección michoacana	
160. **Alumno A:** si	**Principio de interacción**
161. **Alumno D:** no, fueron los de,…	
162. **Alumno C**: y vas empezar, que le vamos a poner	
163. **Alumno A:** no sé, electro, panda, rosa	
164.	
165. **Alumno E:** podemos hacerle un paro a sami como los barbaros de los divinos de	
166.	
167. **Alumno D:** los toros divinos del profeta días	
168.	
169. **Alumno C:** que	
170.	
171. **Alumno D:** y que como le están poniendo	
172.	
173. **Alumno E:** ¿? ganaderías que malboro	**Principio de interacción**
174.	
175. **Alumno D:** mano a mano	
176.	
177. **Alumno F:** tengo una idea mejor	
178.	
179. **Alumno D:** de que	
180.	
181. **Alumno E:** de los toros de Joan Sebastián	
182.	
183. **Alumno F:** de rancho barriga	
184.	
185. **Alumno A:** si rancho barriga	Principio de interacción
186.	
187. **Alumno C:** ya valió barriga	
188.	
189. **Alumno E:** rancho barriga	
190. **Alumno C**: ya valió barriga	Principio de actividad
191. **Alumno E:** quiero su amistad	
192. **Alumno F:** el contrato era por cuanto	
193. **Alumno D:** de quince6. En serio	

284. **Mtra.:** Y entonces así como van acá a Nahuatzén 285. **Alumno D:** ahí sì conviene pues 286. **Mtra.:** A porque ahí les dan 287. **Alumno D:** porque a i les dan palmas 288. **Mtra.:** ¿?	**Principio de realidad** **Principio de actividad**

289. **Alumno D:** no por ejemplo ahí como van palmas no se le gana al jefe de cuadrilla si no que llevan palmas y ahí para que te anoten te cobran quinientos 290. **Mtra.:** Ha 291. **Alumno D:** porque ya no le dan nada 292. **Mtra.:** Entonces ahora si todo lo de las palmas para el jinete 293. **Alumno D:** si a i si lo que te den	**Principio de interacción** **Principio de realidad**

294. **Alumno F:** a i si te dan feria como unos seiscientos 295. **Mtra.:** No a veces hasta cinco mil o a si 296. **Alumno D:** seis siete mil 297. **Alumno A:** pero lo dan por familia no 298. **Alumno D:** si 299. **Alumno A:** porque yo una vez fui a los toros y luego al jinete le regalaron una sala y no sé qué y dinero como diez mil pesos	**Principio de interconexión** **Principio de interacción**

300. **Mtra.:** Porque ahí los que dan el regalo son las “marichas” y en la casa de la maricha hacen fiesta 301. **Mtra.:** Y entonces todos los que están y todos los padrinos y familiares llevan algo para la palma entonces pueden llevar dinero, pueden llevar cobijas y otras cosas 302. **Alumno D:** si lo que tiene es que te dan como unos cinco mil y a través salen unos quinientos y como el padrino da otros 500 y van saliendo de todas partes y ay te van dando más y a si 303. **Alumno A:** cuanto dan 304. **Alumno E:** mejor me voy a casar con la maricha mejor 305. **Alumno A:** dos 306. **Mtra.:** No algunos si se casan con la maricha	**Principio de interacción** **Principio de actividad** **Principio de realidad**

307. **Alumno F:** y de rato se pueden ¿? A si 308. **Alumno D:** como quitar a si 309. **Alumno F:** ee por cinco mil pesos 310. **Alumno** D: si …. 311. **Mtra.:** Pero imagínate	**Principio de interacción**

312. **Alumno D:** pero ahí mismo se va es que como por ejemplo a veces si como cuando van a si nomas ¿? Les dan chance 313. **Alumno C:** les dan chance a los padrinos 314. **Alumno D:** no les dan chance a si por cuadrilla como a uno o a dos no más por ejemplo a todos los demás van ya. Y por ejemplo a uno que llevas te dice saca las chelas o a si 315. **Alumno C:** -¿? 316. **Alumno D:** y el que te lleva ya wey aliviáname con algo o a si el dinero se va yendo 317. **Mtra.:** Y también la palma vea 318. **Alumno D:** si la palma también se la tienes que repartir o	**Principio de interacción** **Principio de realidad** **Principio de actividad** **Principio de interacción**

no es que te dan un chingo	
319. **Alumno A:** ¿? ayúdame con algo	
320. **Alumno D:** y siempre es así pues, y cuanto	
321. **Mtra.:** Y cuando los accidentes	**Principio de actividad**
322. **Alumno D:** también pues ahí	
323. Alumno F: casi todo uno anda quebrado de las costillas y otro también del pie y otro de la columna y a si cuando van a si nomas ya cuando acabamos de juntar todo les damos unos doscientos trescientos	**Principio de interacción guiada**
324. **Mtra.:** Y cuando es por contrato eso no les cubre el contrato	**Principio de interconexión**
325. **Alumno D:** no	
326. **Alumno A:** es que las aseguradoras por lo general dicen que no	
327. **Alumno A:** aja	
328. **Alumno D:** poner seguro de jinetes es una perdida ahí	
329. **Mtra.:** Entonces el siguiente ejercicio para terminar	
330. **Alumno C:** movimiento de cuerpos celestes	
331. **Alumno A:** ¿?	
332. **Alumno F:** tiene buenos movimientos	
333. **Alumno A:** si ¿?	
334. **Alumno F:** ¿?	
335. **Mtra.:** Cuánto dura una vuelta de la luna que tanto saben de astronomía	
336.	
337. **Alumno C:** u bien poquito	

338. **Mtra.:** Cuál es la distancia de la tierra al sol	**Principio de interconexión**
339. **Alumno A:** nomas que el equinoccio se da el veintiuno y va a pegara	
340. **Mtra.:** Que es el equinoccio	
341. **Alumno A:** es cuando ¿? cuándo es el día dura mas	**Principio de actividad**
342. **Alumno F:** porque es más	
343. **Mtra.:** Pero por que dura más?	**Principio de interconexión**
344. **Alumno A:** porque es el más largo de la rotación de	
345. **Mtra.:** Como se mueve	
346. **Alumno A:** con forma elíptica	
347. **Mtra.:** Como	**Principio de niveles**
348. **Alumno A:** elíptica	
349. **Mtra.:** Quien con quien	**Principio de interacción**
350. **Alumno A:** ee uumm maestra quien es el ¿? en el centro	
351. **Alumno D:** va ser este con	
352. **Alumno C:** con el que sea	**Principio de interconexión**
353. **Alumno A:** pues no muy en el centro pero es el sol	
354. **Mtra.:** Entonces este, fíjense hay muchos movimientos	
355. **Alumno A:** pero el sol siempre guía	
356. **Mtra.:** A pues como	
357. **Alumno A:** pues si	
358. **Mtra.:** A ver porque es equinoccio	
359. **Alumno A:** no le estoy diciendo	

360. **Mtra.:** A ver	**Principio de niveles**
361. **Alumno A:** pues es cuando el día dura más es el día más largo	
362. **Mtra.:** Pero por que dura más	
363. **Alumno A:** pues yo le estoy, pues cuando está en el punto más lejano el sol de la tierra	**Principio de interconexión**
364. **Mtra.:** A ha entonces eso tiene que ver desde uff desde el tiempo de galileo ya se habían conocido todo esto de los movimientos tanto de la luna como del sol, bueno ustedes saben que han estado cambiando las ideas del centro del universo a ver en este tiempo, porque si se fijan en los ejercicios les dije que íbamos ir viendo así como como fue e como fue avanzando las matemáticas a través de la historia. Repartición de tierras pues es antes, pero ya después más para acá ya el origen de donde está el sol, donde está la tierra, pues también ha ido cambiando; Hay teorías que dicen que la tierra estaba en una plataforma	**Principio de niveles**

365. **Alumno D:** ¿? Que atlas	**Principio de interacción**
366. **Mtra.:** Si si, entonces en este tiempo ya de conocer el movimiento de los cuerpos celestes este pues ya es el tiempo de galileo incluso antes tenían que ver mucho la religión no podía decir alguien que no pero este, antes se creía que la tierra era la que estaba en el centro y que el que daba vueltas era el sol, pero ya los que trabajaban en ese tiempo en la ciencia pues se dieron cuenta de que era al revés de que el que estaba en el centro era el sol y los que estaban a las orillas eran los planetas, que los planetas y que los planetas giraban en forma electica alrededor del sol entonces la trayectoria de la tierra e pues e como es elipse hay épocas en que está más cercas del sol y hay épocas cuando está más alejado y donde está más alejado es pues es cuando tarda más más tiempo el día ¿ por qué cuánto tarda un día?	**Principio de interconexión**

367. **Alumno A:** veinticuatro horas	**Principio de niveles**
368. **Mtra.:** Seguros	
369. **Alumno A:** si	
370. **Alumno C:** no	
371. **Alumno D:** no	**Principio de actividad**

372. **Alumno E:** no	
373. **Alumno D:** el día	**Principio de realidad**
374. **Alumno D:** dura como amanece como a las seis treinta verdad	
375. **Alumno A:** no es la luz del día	
376. **Alumno E:** la luz del sol	
377. **Mtra.:** Hee	
378. **Alumno A:** es la luz del sol lo del día	

379. **Mtra.:** Es que como se define un día	**Principio de interconexión**
380. **Alumno A:** por veinte y cuatro horas	
381. **Mtra.:** no eso ya eso es más moderno e la definición del día era cuando sale el sol y cuando se mete el sol	
382. **Alumno C:** cuando sale el sol y se mete el sol	**Principio de reinvención guiada**
383. **Mtra.:** Entonces el sol no sale todos los días a la misma hora ni se mete a la misma hora	
384. Alumno C: qué tal si le da flojera	**Principio de interacción**
385. **Alumno B**: si	
386. **Alumno D:** un día se le pegan las cobijas y queda empernado	**Principio de reinvención guiada**
387. **Alumno C:** heee	
388. **Mtra.:** A ver entonces con la información que ustedes tienen de la duración del día de los movimientos planetarios planteen un ejercicio	
389. **Alumno E:** en un verano en un verano que hacen sale más temprano sale más temprano el sol vea	
390. **Alumno E:** no	

391. **Mtra.:** en verano son los días más largos	**Principio de niveles**
392. **Alumno C:** eso lo vimos con la maestra	

393. **Mtra.:** Y en diciembre son los días más cortos 394. **Alumno C:** más cortos es por el cambio de horario 395. **Alumno E:** si con razón	
396. **Mtra.:** Bueno no es por el cambio de horario es porque el sol sale más tarde y se mete más temprano 397. **Alumno E:** es que le da más frio maestra 398. **Alumno C:** como es diciembre 399. **Mtra.:** Y por eso es más frio pero también la radiación pega más directa 400. **Alumno E:** ya casi me voy a dormir 401. **Mtra.:** Entonces para terminar hagamos eso y nos vamos	**Principio de niveles** **Principio de interconexión**
402. **Alumno E:** pablo 403. 404. **Alumno A:** he 405. 406. **Alumno E:** “Pablis” 407. 408. **Alumno A:** que paso 409. 410. **Alumno E:** cualquier problema 411. 412. **Alumno C:** que no es la de galileo sobre la tierra 413. 414. **Alumno A:** yo pensé que la cuadrilla de jinetes 415. 416. **Alumno E:** no es cierto 417. 418. **Alumno A:** su pues neta pregúntale al moja mayor 419. 420. **Alumno E:** este 421. 422. **Alumno D:** porque ningún mes tiene treinta y cinco días 423. 424. **Mtra.:** ¿Por qué?	**Principio de interacción** **Principio de realidad** **Principio de interconexión** **Principio de reinvención guiada**

425. **Alumno E:** porque los mayas a si lo predijeron	**Principio de interacción**
426. **Mtra.:** No	
427. **Alumno D:** porque los calendarios no tienen	**Principio de reinvención guiada**
428. **Mtra.:** Como es que como se hace un calendario	
429. **Alumno E:** basado en los equinoccios	**Principio de niveles**
430. **Alumno A:** en los movimientos remotos	
431. **Alumno F:** he y, si es cierto	
432. **Alumno C:** en el movimiento de las ostras	**Principio de interacción**
433. **Alumno E:** las ostras	
434. **Alumno A:** en	
435. **Alumno D:** como se llama el dar la vuelta la tierra al sol rotación no	**Principio de reinvención guiada**
436. **Alumno A:** ponle cuantos días tarda en dar la vuelta	
437. **Alumno D:** la tierra	
438. **Alumno E:** el sol a la luna	
439. **Alumno C:** ¿? El sol a la luna	
440. **Alumno D:** el sol a la luna	
441. **Alumno D:** cuanto tiempo tardan en hacer en ese mismo punto	
442. **Mtra.:** O alinearse	

443. **Alumno C:** cuantas veces da la vuelta la luna en la tierra este ¿? 444. **Alumno A:** hee yo tampoco le pongo tanto nivel 445. **Mtra.:** Cuantas vueltas da la luna en una año o en una vuelta que da la tierra alrededor del sol 446. **Alumno C:** a eso es lo que iba a decir 447. **Mtra.:** Pero es cuestión de o sea fíjense la idea está bien pero a veces lo que se nos cuesta trabajo es la 448. **Alumno A:** la redacción 449. **Alumno E:** el escrito 450. **Mtra.:** Primero es la idea y después escribirlo en forma escrita. 451. **Mtra.:** Ya para la siguiente clase que nos veamos va hacer el trabajo de la forma escrita a la forma …..	**Principio de interacción** **Principio de reinvención guiada**

452. **Alumno A:** esto se lo traigo de tarea 453. **Mtra.:** No. Les voy a dejar otra tarea no se preocupen 454. **Alumno D:** Aa 455. **Alumno E:** aaa 456. **Alumno C:** aaaa 457. **Alumno A:** ha 458. **Mtra.:** No, no les voy a dejar tarea 459. **Alumno F:** mira fíjense como se exaltan 460. **Alumno A:** cuánto tarda en dar una vuelta la tierra al sol 461. **Alumno F:** auméntale unos sesenta 462. **Alumno D:** si mejor la tierra al sol 463. **Alumno A:** a y ya le ponemos trescientos sesenta y cinco verdad maestra 464. **Mtra.:** Pues es que ahí depende mucho de los	**Principio de interacción** **Principio de niveles** **Principio de reinvención**

conocimientos que ustedes que ustedes tengan	**guiada**
465. **Alumno E:** y donde lo escribimos maestra porque ya no me cabe.	
466. **Mtra.:** A ver a ver ahorita en ¿?	
467. **Alumno D:** cuantas vueltas da	
468. **Alumno A:** cuantos	
469. **Alumno D:** ponle cien en el día a final de cuentas vamos a ver.	
470. **Alumno A:** si para que veamos cuantas vueltas da la tierra	**Principio de interacción**
471. **Alumno E:** cómo es que lo habías hecho tú	
472. **Alumno C:** son poquitas; tenia cuantas vueltas da la luna alrededor de la tierra en este un año o	
473. **Alumno E:** ya hay así	
474. **Alumno A:** ya así	
475. **Alumno E:** da un año	

476. **Mtra.:** Y esa respuesta me la traen de tarea	**Principio de interacción**
477. **Alumno A:** sale y vale maestra	
478. **Alumno D:** cuantas vueltas da la luna alrededor del sol	
479. **Mtra.:** Noo, bueno también la pueden traer del sol si lo ven como un resortito moviéndose	**Principio de interacción**
480. **Alumno C:** porqué estas metiendo la hoja	
481. **Alumno D:** ya acabamos	
482. **Alumno E:** deja término	
483. **Mtra.:** Muy bien entonces ya me pueden ir dando las hojitas	**Principio de actividad**
484. **Alumno A:** podemos salir	
485. **Mtra.:** Pues nace, depende de su maestro que ¿?	
486. **Alumno E**: sin nombre verdad	
---------------------------------**Segunda sesión**---	**Principio de niveles**
487. **Mtra.:** Ya	
488. **Alumno E:** tres mil cien el día del taller.	
489. **Mtra.:** A ver, hoy vamos empezar a elaborar ejercicios de cuando hay cambios, se acuerdan el último ejercicio de la clase pasada.	
490. **Alumno A:** si	
491. **Mtra.:** Cual era	
492. **Alumno C:** lo del movimiento de los de los astros.	
493. **Alumno A:** aja.	
---	
494. **Mtra.:** Y con el movimiento de los astros hay cosas que lo relacionan ya desde hace ya mucho tiempo como los horóscopos este antes también se usaban en el tiempo de siembra, para el tiempo de pesca, a ver entonces, ustedes díganme algún fenómeno que crea que cambia con el tiempo.	**Principio de actividad**
495. **Alumno E:** algún fenómeno que cambia con el tiempo	
496. **Alumno A:** el clima.	
497. **Mtra.:** cómo cambia el clima.	
498. **Alumno C:** dependiendo de la humedad va cambiando la temperatura, por ejemplo un día puede un día puede estar	**Principio de realidad**

lluvioso (y al siguiente día puede amanecer con mucha nieve o puede amaneces con más frio.	
--- 499. **Mtra.:** Bueno ahorita esos cambios climáticos es un problema que ya no se puede establecer como antes, antes estaba bien establecida en tal mes llueve, en tal mes hace aire, ahora en cualquier mes del año llueve, en tal mes hace frio, pero bueno supongamos que sí lo es …. Digan otras cosas que sean más claras, que si la pueden calificar que no quede lugar a duda, por ejemplo; ustedes cuando nacieron tenían un peso, una talla y cuando fue pasando el tiempo estas características cambiaron. 500. Alumno C: perdón 501. **Alumno E:** yo engorde pero luego baje. 502. **Alumno A:** yo también maestra estoy más gorda.	**Principio de interconexión**
503. **Mtra.:** La siguiente actividad que quiero que realicen es la siguiente: en una tabla de dos columnas escriban en una de ellas la edad y en la otra su estatura comenzando desde que nacieron (los datos no tienen que ser exactos). 504. **Alumno A:** listo maestra. 505. **Mtra.:** ¿ya terminaron? 506. **Alumno C:** No 507. **Alumno B:** ya casi 508. **Alumno G:** así maestra.	**Principio de realidad**
509. **Mtra.:** si muy bien --- 510. **Mtra.:** Vamos a ver otro ejemplo de un fenómeno que cambie con el tiempo, mmm la milpa; pues como, ¿cuánto tardara en crecer la milpa? 511. **Alumno E:** de cuándo siembran a cuándo salen 512. **Mtra.:** Si. 513. **Alumno E:** como unas tres semanas yo creo.	**Principio de niveles**
514. **Mtra.:** Pero en alcanzar los dos metros 515. **Alumno E:** a pues no. 516. **Alumno C:** como unos tres meses no. 517. **Alumno E:** más 518. **Alumno C:** no abril, mayo, junio, agosto. 519. **Alumno E:** como medio año casi. 520. **Alumno B:** medio año entonces. 521. **Alumno A:** aja. 522. **Mtra.:** Escriban en un párrafo eta idea en forma de un ejercicio ---	**Principio de interacción**
523. **Mtra.:** Entonces fíjense ahí sí pueden decir al mes creció tanto a los dos meses e creció tanto y no pueden decir que al tercer mes en vez que hubiera aumentado haya disminuido porque es una cosa que siempre va variando pero asía un	**Principio de reinvención**

sentido, que otra cosa pueden relacionar con de esta forma asi como les digo en este ejercicio otro fenómeno que ustedes conozcan cosas que van creciendo pero que no pueden regresarse al mismo tiempo, porque por ejemplo pueden decir engordaste o que dijiste eso lo vamos a tratar más adelante.	**guiada**
524. **Alumno E:** engorde y después rebaje. 525. **Mtra.:** A ha pero cuando tenías diecisiete tenías un peso, cuando tenías dieciocho tenías un peso mayor, cuando tenías diecinueve volviste a tener el de diecisiete pero es diferente porque ya no tienes diecisiete años entonces a cada edad le corresponde un peso o cada edad le corresponde un tamaño e que más.	**Principio de interacción**
526. **Alumno B:** los árboles. 527. **Mtra.:** Los que. 528. **Alumno B:** los árboles.	
529. **Mtra.:** Los árboles el crecimiento de los árboles casi, cualquier crecimiento está relacionado con variar. 530. **Alumno E:** economía. 531. **Mtra.:** De qué. 532. **Alumno C:** la migración no, porque los migrantes también varían o no. 533. **Alumno E:** la migración sí. 534. **Mtra.:** Este depende hay unas cosas que son más bien cíclicas no tanto que vallan evolucionando.	**Principio de reinvención guiada**
535. **Mtra.:** por lo pronto vamos a seguir trabajando con los ejercicios de crecimiento; los ejercicios que redactaron realicen la tabla de las dos columnas y después traten de graficar esos datos.	**Principio de niveles**
536. **Alumno A:** vamos a copiar los de los compañeros 537. **Mtra.:** primero solo los que ustedes redactaron eso que dices es la siguiente actividad. 538. **Alumno G:** así maestra 539. **Mtra.:** si así, ayúdale a tu compañero 540. **Mtra.:** cómo vas 541. **Alumno B:** no escribí el ejercicio de la milpa.	
542. **Mtra.:** Dime tu idea y te ayudo 543. **Alumno B:** de cuando van creciendo en los meses. 544. **Mtra.:** poder ser que el enunciado empiece diciendo que tú vas a sembrar maíz en el mes de mayo, y que en el mes de junio las plantas de maíz mide no se tu sabes eso, después en el mes de julio volviste a medir la altura de las plantas y ya tenían determinada altura después en agosto. Si me entendiste.	**Principio de niveles**
545. **Alumno B:** si -- 546. **Alumno C:** cuales son los fenómenos que son cíclicos 547. **Mtra.:** Por ejemplo las mariposas monarca este hacen su recorrido cada año pero ya es un ciclo por que las que se van no	**Principio de realidad y de actividad**

son las mismas que las que llegan.	
548. **Alumno E:** no pero maestra sigue si sigue también lo de la evolución así como las libélulas que eran de un tamaño enorme.	
549. Mtra.: A ha.	
550. **Alumno E:** y tuvieron que evolucionar a un tamaño pequeño para poder sobre vivir.	
551. **Mtra.:** Ha si si.	
552. **Alumno E:** ósea qué.	**Principio de actividad**
553. **Mtra.:** Pero con ¿??.	
554. **Alumno E:** eso también con el tiempo también.	
555. **Mtra.:** Si.	
556. **Alumno E:** con las, por los diferentes factores también pueden sacar.	
557. **Mtra.:** si casi cualquiera evolución de cualquier animal este el crecimiento de la población u que más con fenómenos naturales.	
558. **Alumno A:** huracanes	
559. **Mtra.:** Uumm	
560. **Alumno E:** no	
561. **Alumno A:** si	**Principio de interconexión**
562. **Mtra.:** a ver expliquen cómo.	
563. **Alumno A:** Por los cambios climáticos y la depredación del medio ambiente.	
---	
564. **Mtra.:** pero como se puede decir o predecir eso, hay o no hay huracán, en qué mes y en qué lugar, cuando ocurre eso, etc. hace algunos años los adultos mayores tenían conocimientos de esas cosas, también se tenían bien establecidos los meses y los lugares posibles y tu pedias predecir, bueno ahora hay una forma de hacer eso al registrar los fenómenos por ejemplo en el año dos mil cinco revisar si hubo o no huracanes y en donde en el año dos mil seis hacer un registro y bla blablá y n l el año dos mil quince así de varios años ya vas a tener una posible predicción para próximos años pero no se comportan de forma igual, vamos a ver un fenómeno de crecimiento; por ejemplo los conejos ¿Cuántos conejos tienen las conejas?	
565. **Alumno E:** dependiendo no.	
566. **Mtra.:** Uuummm si pero cuantos creen, ó sea, hay como un promedio.	
567. **Alumno C:** como unos diez.	
568. **Alumno E:** no nooooo.	
569. **Alumno A:** yo nunca he tenido conejos.	
570. **Alumno B:** ni yo.	
571. **Mtra.:** A ver bueno las personas.	
572. **Alumno E:** yo conozco una señora que tiene entre doce y algo jajaja.	

573. **Mtra.:** No pero cuantos hijos pueden tener las mamás. 574. **Alumno E:** cuantos pues unos traen seistillisos. 575. **Mtra.:** Aja pero lo más común. 576. **Alumno E:** uno. 577. **Alumno A:** uno. --- 578. **Mtra.:** Entonces a ver supón que una mama tiene un hijo cada año cuantos va a tener en quince años. 579. **Alumno A:** Quince. 580. **Alumno E:** siete y medio. 581. **Mtra.:** Porque siete y medio. 582. **Alumno B:** Si tiene uno cada año pues quince. 583. **Alumno E:** aja. 584. **Mtra.:** Bueno. 585. **Alumno C:** siete y medio, jajaj. 586. **Alumno E:** no maestra es imposible casi. 587. **Mtra.:** Que? a pues sí. 588. **Alumno E:** ¿si se puede? 589. **Alumno B:** sí. 590. **Alumno C:** que me perdí. 591. **Mtra.:** Que no se puede tener quince hijos uno cada año. 592. **Alumno C:** si se puede pero sería pues desgastante no. 593. **Mtra.:** Ha pero, si es posible 594. **Alumno C:** de que se puede se pude. 595. **Alumno E:** pues as de cuanta apenas va a tener uno y ya va estar embarazada de otro. 596. **Alumno B:** si se puede. 597. **Mtra.:** No porque son nueve meses si se puede. 598. **Alumno C:** como le hacían antes tenían uno chiquito y ya con el otro cargado. 599. **Alumno E:** es que no tenían tele. --- 600. **Mtra.:** A ver lo que quiero que hagan que ustedes redacten un ejercicio donde se vea el cambio en el tiempo. 601. **Alumno A:** un ejercicio donde se vea el cambio en el tiempo. 602. **Mtra.:** Aja. 603. **Alumno A:** hasta yo que soy el camarógrafo. 604. **Mtra.:** Si ya este ponen pause y horita le continuamos. 605. **Alumno A:** yo paso el de Juan Carlos.	
606. **Mtra.:** A ver leerlo. 607. **Alumno A:** una mujer sexualmente activa tiene un hijo aproximadamente al año si actualmente tiene dieciocho años cuántos hijos tendrá a los treinta y siete años sabiendo que ya tiene tres hijos. 608. **Mtra.:** A ver a quien le gustaría resolver ese. 609. **Alumno F:** a ver préstamelo.	**Principio de realidad**

610. **Alumno D:** préstalo.	**Principio de actividad**
611. **Alumno F:** una mujer sexualmente activa.	
612. **Alumno D:** adicta al jajajaja.	
613. **Mtra.:** A ver el siguiente.	
614. **Alumno E:** yo.	
615. **Mtra.:** Ya déjaselo a él ese ejercicio.	**Principio de reinvención guiada**
--	
616. **Alumno E:** tres gallinas ponen dos huevos por día durante dos meses y medio, cuántos huevos en total ponen las tres gallinas durante esos dos meses y medio.	
617. **Mtra.:** Quien quiere ese.	
618. **Alumno F:** que lo repita de nuevo.	
619. **Alumno D:** que.	
620. **Alumno E:** le borro la respuesta.	
621. **Mtra.:** Eee sí.	
622. **Alumno G:** Ya pues un ejemplo entre los dos.	**Principio de interacción**
623. **Alumno E:** no falta.	
624. **Alumno C:** el pato quiere la respuesta.	
625. **Alumno G:** pues ahí esta esto de los cuatro.	
626. **Alumno A:** pues de una vez pato.	
627. **Mtra.:** Ya pásaselo.	
--	**Principio de interconexión**
628. **Alumno E:** (emaname).	
629. **Alumno F:** (emáname).	
630. **Mtra.:** A ver quién va a leer Ireri o Gina.	
631. **Alumno C:** ya acabaste Ireri.	
632. **Alumno B:** sí.	
633. **Alumno C:** para ponerlo.	
634. **Alumno B:** dice un par de conejos tienen diez conejos cada tres meses cuántos conejos tendrán en seis años.	
635. **Alumno A:** apoco todo el tiempo los conejos.	**Principio de niveles**
636. **Alumno B:** sí.	
637. **Alumno C:** sin parar.	
--	
638. **Mtra.:** A ver este ya nada más faltas tú verdad, a ver lee el tuyo Gina y que escoja cualquiera de los dos.	
639. **Alumno C:** maría tiene doce años y su mama veintiocho, cuántos tenía la mama de maría cuando ella tenía 12 y cuántos tendrá María cuando su mama tenga cincuenta.	
640. **Alumno G:** mejor ese.	**Principio de interconexión**
641. **Mtra.:** Pues pásenselo ese.	
642. **Alumno C:** cuál.	
643. **Alumno G:** el de ahí.	
644. **Mtra.:** y el otro lo van a resolver entre los que ya los	

hicieron.	
645. **Alumno C:** queeee	**Principio de reinvención guiada**
646. **Alumno A:** que lo haga Ireri	
647. **Alumno C:** que haga Ireri que fue la que dijo.	
648. **Alumno B:** entonces aquí no o que donde sea.	
649. **Mtra.:** Ya.	
650. **Alumno A:** si ira yo te dejo este lugar aquí.	
651. **Alumno E:** y yo que adonde.	
652. **Alumno B:** pues ahí.	
653. **Alumno E:** no quiero estar a tu lado ya lo sabes.	**Principio de interconexión**
654. **Alumno D:** midieron ciento cincuenta huevos.	
655. **Alumno E:** ósea qua dividir el año en los meses que son tres meses son serían los estos.	
656. **Alumno C:** doce doce entre qué.	
--	
657. **Mtra.:** no los están haciendo, hablen en voz alta para que los oiga, a ver quién acabo de aquí.	
658. **Alumno A:** doce entre tres	
659. **Alumno C:** doce entre tres.	
660. **Alumno D:** e me dieron ciento cincuenta huevos.	**Principio de actividad**
661. **Mtra.:** Que hiciste.	
662. **Alumno B:** 4.	
663. **Alumno E:** igual a cuatro.	
664. **Alumno D:** este pero dice que tres gallinas ponen tres huevo por día en durante dos meses y medio.	
665. **Alumno C:** cuatro.	
666. **Alumno E:** ahora esos cuatro.	**Principio de4 interacción**
667. **Alumno C:** los multiplicamos por los diez conejos que tiene la pareja.	
668. **Alumno B:** cada año.	
669. **Alumno E:** cuatro por diez igual a cuarenta.	
670. **Alumno C:** son cuarenta los que tiene al año.	
671. **Alumno D:** cuantos huevos en total ponen las gallinas durante esos dos meses y medio.	
672. Alumno E: son cuarenta por seis no.	**Principio de realidad**
673. **Alumno D:** suponiendo que los meses los tamos poniendo de treinta días.	
--	
674. **Mtra.:** A ahí eso ponlo ahí suponiendo que los meses tienen treinta días.	**Principio de reinvención guiada**
675. **Alumno C:** aja.	
676. **Alumno E:** igual a.	
677. **Alumno C:** seis cero doscientos cuarenta.	
678. **Alumno A:** doscientos cuarenta más o menos.	
679. **Mtra.:** Todos hagan todo lo que consideren importante ahí	

pónganle en la hoja todas las personas que traigan. 680. **Alumno C:** doscientos cuarenta y medio cuanto son. 681. **Alumno E:** dos. 682. **Alumno C:** dos. 683. **Alumno E:** que serian.	
684. **Alumno B:** veinte. 685. **Alumno E:** veinte. 686. **Alumno C:** veinte doscientos. 687. **Alumno B:** doscientos sesenta. 688. **Alumno C:** más sesenta, no más veinte. 689. **Alumno E:** más veinte. 690. **Alumno C:** más veinte que son el medio año. 691. **Alumno A:** más veinte sí.	**Principio de realidad**
692. **Alumno B:** doscientos sesenta. 693. **Alumno C:** aja. 694. **Alumno E:** pero no más veinte veda 695. **Alumno C:** sí. 696. **Alumno E:** igual a.	**Principio de actividad**
697. **Alumno A:** doscientos sesenta conejos. 698. **Alumno E:** más esto ya se multiplica por que son dos conejos. 699. **Alumno C:** pero es que he ósea un par de conejos te refieres a que los dos son conejas. 700. **Alumno E:** dos ponen o nomas uno.	**Principio de interacción**
701. **Alumno C:** o que o que los dos conejos son una pareja esos esos. 702. **Alumno B:** son una pareja. 703. **Alumno C:** a entonces así. --	**Principio de actividad**
704. **Mtra.:** y eso pónganlo ahí suponiendo que la pareja es un hembra y un macho. 705. **Alumno E:** a ver ya escríbele. 706. **Alumno C:** suponiendo que los dos conejos son hembra y macho. 707. **Alumno B:** que qué, los conejos.	**Principio de actividad**
708. **Alumno C:** son una pareja casada. 709. **Alumno E:** son novios. 710. **Alumno C:** son novios. 711. **Alumno E:** se quieren mucho por eso tuvieron tantos conejos. 712. **Alumno A:** la chaca y coneja, cosita.	**Principio de interacción**
713. **Mtra.:** Cuántos conejos tuvieron. 714. **Alumno C:** doscientos sesenta. 715. **Mtra.:** Y si los quisieran vender a como los darían. 716. **Alumno A:** trescientos baros. 717. **Alumno E:** tan como a veinticinco. 718. **Alumno C:** como cincuenta baros cada conejo.	**Principio de reinvención guiada**

719. **Alumno A:** es que son sementales. 720. **Alumno B:** casi mil pesos.	
721. **Mtra.:** Que será mejor tener gallinas ponedoras o conejos. 722. **Alumno A:** gallinas.	**Principio de niveles**
723. **Alumno E:** los conejos comen más también. 724. **Alumno D:** conviene mejor tener puercos. 725. **Alumno A:** cuchis.	
726. **Alumno C:** qué se reproducirá más rápido un conejo o una gallina. 727. **Alumno E:** los conejos los conejos. 728. **Alumno A:** pero que se consume más.	**Principio de reinvención guiada**
729. **Alumno C:** que se reproducirá más. 730. **Alumno E:** eso a mí no me interesa simplemente.	
731. **Mtra.:** No sí. ---	**Principio de niveles**
732. **Alumno E:** hay compradores que te compran dependiendo el producto. 733. **Alumno D:** no los conejos casi no los compran. 734. **Alumno C:** pero es que también depende de para que los quieres.	
735. **Alumno A:** si cierto y a mí me duele matar un conejo. 736. **Alumno E:** para nacatamales. 737. **Alumno D:** yo siento, que se distribuye mejor la mariguana y más rápido.	**Principio de interconexión**
738. **Alumno E:** hoy nada que ver marihuana, hoy ese esta moto maestra sáquelo del salón. 739. **Alumno A:** sáquelo Maestra	
---	**Principio de niveles**
740. **Mtra.:** Este, ahora quien expone sus problemas resueltos, pónganse de acuerdo quien lo va a pasar a exponer al pisaron. 741. **Alumno B:** safo.	
742. **Alumno A:** safo. 743. **Alumno E:** safo.	**Principio de interacción**
744. **Alumno A:** Gina. 745. **Alumno C:** yo por que	
746. **Alumno E:** Dice que un par de conejos tiene diez conejos en tres meses ¿cuántos conejos tendrá en seis años y medio? Cuándo nos estamos refiriendo al par de conejos es de que es una pareja el hombre y la mujer como quien dice hembra y macho y pos son este tres meses tres meses y son diez conejos en los tres meses, en estos tres meses son igual a diez conejos ósea que van hacer seis años y medio seis años y medio.	**Principio de interacción**
747. **Mtra.:** a ver los que están acá le están entendiendo por que ahorita me lo van a platicar otra vez y a resolver ustedes, apúntenlo porque este ahorita me lo van explicar y si no le están	

entendiéndome pues pregúntenme.	**Principio de interconexión**
748. **Alumno E:** ahora si lo que hicimos nosotros fue sacarle al año los meses que son este doce meses por año dividimos entre los meses que son los tres cuantos tiene serian doce entre tres igual a cuatro y de ahí este multiplicamos verdad, multiplicamos los que es cuatro por los diez, los cuatro meses que serían por año y por los diez conejos que son por cada año, serian cuatro por diez igual a cuarenta, y de ahí este multiplicamos los cuarenta por seis años, serian seis años cuarenta por seis.	
749. **Mtra.:** Tienen diez conejos o diez parejas.	
750. **Alumno E:** diez conejos.	
751. **Mtra.:** y no que dos son pareja.	**Principio de actividad**
752. **Alumno E:** no.	
753. **Mtra.:** Entonces cuantas parejas tienen.	
754. **Alumno E:** nomas es una pareja.	
755. **Mtra.:** A ya los tres meses tienen diez conejos.	**Principio de realidad**
756. **Alumno E:** es una pareja diez conejos aja. Por eso ya multiplicamos los cuarenta por los seis años que no sale doscientos cuarenta más el medio año que ahí anda sobrando que son los que como quien dice dos veces más estos serían los conejos más de ese medio año le sumamos a estos doscientos cuarenta los veinte que serían doscientos sesenta esos seis años y medio.	**Principio de niveles**
757. **Mtra.:** no te pusieron atención pero a ver.	
758. **Alumno E:** no pues.	
759. --	**Principio de interconexión**
760. **Mtra.:** A ver quiero que hagan una mesa cuadrada vamos a trabajar en una mesa redonda todos al mismo tiempo.	
761. **Alumno E:** ya me siento, gracias por su atención.	**Principio de interacción**
762. **Alumno A:** un fuerte abrazo al compañero Fer bravo.	
763. **Mtra.:** deja veo si puedo conseguir las notas que te hacen falta.	
--**Tercera sección**---------------------------------	
764. **Mtra.:** Hola Buenos días	**Principio de interconexión**
765. **Alumno A:** quien será el camarógrafo hoy	
766. **Alumno B:** que sea Gina	
767. **Alumno G:** si le toca a Gina	
768. **Mtra.:** Quieres Gina	
769. **Alumno C:** ya que	
770. **Mtra.:** vamos a continuar con el tema pero ahora vamos a trabajar en forma diferente, ahora vamos a seguir leyendo el	**Principio de**

material que les di hace dos clases, ustedes me van ayudar a leer por párrafos uno a la vez. Comiencen donde empieza con símbolos.	**interconexión**
771. **Alumno A:** Símbolos. Existen objetos y documentos antiguos en donde se encuentran los planteamientos a problemas de su tiempo, de los planteamientos que se tiene conocimiento están por ejemplo las tablillas de barro que datan de años 1900 a. C., en escritura con símbolos que contienen ternas pitagóricas, el calendario babilónico donde, por ejemplo, se observan figuras geométricas para medir la distancia de la tierra a los planetas. También son conocidos los papiros egipcios como el de Moscú que data de 1850 a. C., la cultura griega aportó………	**Principio de reinvención guidad** **Principio de actividad**
772. **Mtra.:** En su libreta dibujen un símbolo	
773. **Mtra.:** Terminaron? Pasen su libreta a su compañero de al lado.	
774. **Mtra.:** Revisen lo que hicieron sus compañeros y pongan una palomita si creen que está bien	
775. **Alumno A:** ponme la palomita carnal.	
776. **Alumno C:** compa tú también ponme una palomita.	
777. **Mtra.:** Ahora pongan un nombre al símbolo de sus compañeros y regresen las libretas.	**Principio de interconexión**
778. **Mtra.:** revisen el nombre que pusieron sus compañeros a sus símbolos. Era lo que ustedes estaban pensando al realizar el dibujo.	
779. **Alumno A:** no pus no	
780. **Mtra.:** ahora ven la importancia de estar de acuerdo en tener un consenso sobre las definiciones?	
781. **Mtra.:** seguimos con la definición de símbolo	
782. **Alumno B:** Definición Símbolo. El concepto de símbolo (una palabra que deriva del latín simbŏlum) sirve para representar, de alguna manera, una idea que puede percibirse a partir de los sentidos y que presenta rasgos vinculados a una convención aceptada a nivel social. El símbolo no posee semejanzas ni un vínculo de contigüidad con su significado, sino que sólo entabla una relación convencional…	**Principio de actividad**
783. **Alumno B:** ese no sabe leer	
784. **Alumno A:** Que lea Ireri mejor	
785. **Mtra.:** Todos tienen que leer así que mejor pongan atención porque me van a explicar lo que lea su compañero	
786. **Mtra.:** De acuerdo a la definición que leyó su compañero creen ustedes que su dibujo cumple con los requisitos para ser símbolo?	**Principio de niveles**
787. **Alumno A:** es que, maestra primero hubiéramos leído la definición.	
788. **Mtra.:** Bueno, la idea de esta actividad es precisamente que ustedes se den cuenta de lo importante que es una definición, pero también no estaban tan apartados de la realidad. Inocentemente o conscientemente ustedes tienen algunos	

criterios para elaborar su dibujo si no, no lo habrían hecho, pero claro no lo tenían bien identificado y por eso es posible que les halla falta algún elemento.	**Principio de niveles**
789. **Alumno B:** por eso decía 790. **Alumno A:** aaa 791. **Mtra.:** Sigamos con la lectura.	
792. **Alumno C:** El plano cartesiano es un sistema de referencias que se encuentra conformado por dos rectas numéricas, una horizontal y otra vertical, que se cortan en un determinado punto. A la horizontal se la llama eje de las abscisas o de las ‘equis’ y al vertical eje de las ordenadas o de las ‘yes’, en tanto, el punto en el cual se cortarán se denomina origen. 793. **Mtra.:** Quien sabía lo que es un plano cartesiano	**Principio de interconexión**
794. **Alumno C:** yo 795. **Alumno G:** también 796. **Mtra.:** Recuerden que uno de los ejercicios que elaboraron les pedí que graficaran sus datos. 797. **Alumno A:** Si	
798. **Alumno G:** si 799. **Mtra.:** Alguien tuvo problemas para graficar sus datos	**Principio de niveles**
800. **Alumno A:** No 801. **Mtra.:** y se sabían la definición de plano cartesiano 802. **Alumno A:** si pero, no bien 803. **Alumno B:** no	
804. **Alumno C:** yo si me la sabia 805. **Mtra.:** Me puedes decir la definición pero sin leer tus notas	**Principio de actividad**
806. **Alumno C:** no pues maestra, así no se vale 807. **Mtra.:** Miren, en ocasiones nos equivocamos al decir que no conocemos alguna definición porque no la sabemos recitar, pero si conocemos sus elementos que la definen y su rol que tienen con eso es suficiente. 808. **Mtra.:** Saben que es la abscisa. 809. **Alumno A:** la de las equis “X”	
810. **Mtra.:** pero que es 811. **Alumno A:** es la línea de abajo	**Principio de niveles**
812. **Mtra.:** abajo, que abajo. Si se fijan debemos de tener mejor control de los elementos que necesitamos. En principio necesitamos un marco de referencia, por eso los dos ejes y los acomodamos perpendicularmente entonces a uno se le da el nombre de las abcisas y al otro de coordenadas. 813. **Alumno C:** eso sí, muy bien muy bien, jajaj	
814. **Mtra.:** bueno lo que sigue del texto nos lo vamos a saltar porque son cosas que ustedes ya saben y solo lo puse ahí para recordar, vamos a pasarnos hasta donde empieza lo de función.	**Principio de niveles**

815. **Alumno G:** en la página …	
816. **Mtra.:** No, no no, perdón en donde dice ecuación. Pero antes díganme que es una ecuación	**Principio de interconexión**
817. **Alumno E:** es una función	
818. **Mtra.:** bueno aun no llegamos a esa parte pero entonces que es una función.	
819. **Alumno E:** una expresión matemática	
820. **Mtra.:** mmm, sigamos con el texto y cuando lleguemos a función vemos si una expresión matemática es una función.	**Principio de niveles**
821. **Alumno E**: está bien	
822. **Alumno B:** Ecuaciones. Una ecuación es una igualdad matemática entre dos expresiones algebraicas, denominadas miembros, en las que aparecen valores conocidos o datos, y desconocidos o incógnitas, relacionados mediante operaciones matemáticas.	
823. **Mtra.:** que entienden por una expresión algebraica	**Principio de interacción**
824. **Alumno E:** una expresión matemática	
825. **Mtra.:** si, se acuerdan que hicieron unos ejercicios donde necesitaban poner el ejercicio que tenían de forma escrito a formas algebraica.	
826. **Alumna A:** Cuando teníamos el problema de las tortillas.	
827. **Mtra.:** Recuérdenme que decía el ejercicio.	
828. **Alumno C:** que el kilo de tortillas costaba 11 pesos y con 50 pesos cuantos kilos podíamos comprar	
829. **Mtra.:** puedes pasar al pizarrón a anotar tu expresión algebraica	
830. Alumno A: 50=11X+6	**Principio de interconexión**
831. **Mtra.:** aja, esa x que representa entonces	
832. **Alumno A:** el número de kilos que se puede comprar	
833. **Mtra.:** sigamos con el texto	
834. **Alumno C:** Incógnitas y variables. Los valores conocidos pueden ser números, coeficientes o constantes; y también variables cuya magnitud pueda ser establecida a través de las restantes ecuaciones de un sistema, o bien mediante otros procesos. Las incógnitas, representadas generalmente por letras, constituyen los valores que se pretende hallar…	**Principio de realidad**
835. **Mtra.:** En el ejercicio de las tortillas, la x representa una variable si o no.	
836. **Alumno B:** si	
837. **Mtra.:** es una incógnita?	

838. **Alumno B:** no se	
839. **Mtra.:** que entienden por una incógnita.	
840. **Alumno B:** algo que no conocemos.	
841. **Mtra.:** entonces creen que la x es o no incógnita	
842. **Alumno A:** puede ser.	**Principio de interconexión**
843. **Mtra.:** supongan ahora que su mama les da un billete para que compren dos kilos de tortillas, como quedaría una expresión algebraica, pasa al pizarrón Luis por favor.	
844. **Alumno A:** Pero solo si me ayudan.	
845. **Mtra.:** claro todos te vamos ayudar.	
846. **Alumno A:** de cuanto es el billete	
847. **Mtra.:** no sabemos.	
848. **Alumno C:** pero nos vamos a gastar 22 pesos porque el kilo cuesta 11 pesos	
849. **Alumno B:** ponle una x al billete, y copia la expresión anterior	
850. **Alumno A:** x=22+y	**Principio de actividad**
851. **Mtra.:** que dicen ustedes	
852. **Alumno B:** no quedaría al revés	
853. **Mtra.:** como al revés	
854. **Alumno B:** la x donde va la y	
855. **Alumno A:** Y=22+x	
856. **Mtra.:** porque	
857. **Alumno A:** yo he visto en los libros	
858. **Mtra.:** generalmente en los libros ponen esas letras pero ustedes le pueden asignar cualquier letra solo deben saber que significa.	**Principio de realidad**
859. **Mtra.:** vamos a suponer diferentes cantidades al billete y calculemos cuanto sobre, vamos a ponerlo en dos columnas para después graficarlo.	
860. **Alumno B:** eso es fácil	
861. **Mtra.:** nos puedes platicar tu idea	
862. **Alumno B:** claro, suponemos que es de a 50 pesos, entonces a 50 le quitamos lo que cuestan los dos kilos nos sobran… 28, en la tabla pongo 50 en un lado y 28, después supongo que es de 100, otro de 200 y uno de quinientos aunque no creo que mi mama me de uno de quinitos.	**Principio de realidad**
863. **Mtra.:** que dicen los demás entienden lo que dice su compañero.	
864. **Alumno A:** si	
865. **Alumno C:** yo no sé a cuál le pongo "x" y a cual "y"	**Principio de reinversión guiada**
866. **Mtra.:** Le puedes explicar a tu compañero como le hiciste.	
867. **Alumno B:** si, voy o bienes	
868. **Mtra.:** pueden juntarse con un compañero para que terminen la tabla y la grafiquen.	
869. **Mtra.:** terminaron	
870. **Alumno C:** ya maestra	
871. **Mtra.:** quien pasa al pizarrón	
872. **Alumno A:** le toca al de Paracuaro	

873. **Mtra.:** ni modo te toco, al pizarrón	**Principio de interconexión**
874. **Alumno C:** me da pena	
875. **Mtra.:** todos te vamos apoyar en caso que lo necesitas, adelante.	
876. **Mtra.:** vez, lo hiciste muy bien.	
877. **Mtra.:** ahora vamos a encontrar una recta que pase por dos puntos de la gráfica que ya tienen, pero quiero que vean como a partir de datos también pueden obtener expresiones algebraicas.	
878. **Alumno A:** y como le vamos hacer	
879. **Mtra.:** se acuerdan que vimos eso en el curso de primer semestre, bueno los que llevaron matemáticas conmigo, pero los otros profes también lo vieron, solo es cuestión de recordar.	**Principio de interconexión**
880. **Alumno B:** yo no lo vi maestra.	
881. **Mtra.:** eso lo ven también en la secundaria y en la prepa, pero para los que no se acuerdan ahí en al material tienen unas formulas a ver si se acuerda.	
882. **Alumno A:** es lo que yo decía, por eso.	
883. **Mtra.:** hagan una mesa redonda para resolver el problema.	
884. **Mtra.:** Seguimos entonces, a quien le toca la lectura	
885. **Alumno A:** Maestra Ireri no quiso leer la vez pasada	
886. **Mtra.:** a ver Ireri te toca, sigue hasta relación.	
887. **Alumno G:** Relación. Correspondencia es equivalente a Relación. En nuestra lengua, decir “en relación a”, es equivalente a decir “corresponde a”….Ejemplos: En una tienda, cada artículo está relacionado con su precio; o sea, a cada artículo le corresponde un precio…A cada libro le corresponde un número de páginas…A cada ser humano le corresponde una fecha de nacimiento.	**Principio de niveles**
888. **Mtra.:** Invéntense otro dos ejemplos y anótenlos en su libreta que son los que voy a tomar en cuenta para el examen.	
889. **Mtra.:** seguimos?.	
890. **Mtra.:** se fijan que tenemos dos variables en esos ejercicios.	
891. **Alumno A:** “exis” y “ye”	**Principio de actividad**
892. **Mtra.:** Aja, uno es dependiente y otra independiente, es decir a partir de una se puede conocer la otra si conocemos la relación.	
893. **Mtra.:** Fer dime uno de tus ejemplos.	
894. **Alumno A:** Yo, jajaj. Este Luis es el novio de lola, jajaj	
895. **Mtra.:** entonces tienen una relación entre Luis y Lola. Díganme otro ejemplo.	**Principio de niveles**
896. **Alumno C:** la casa grande es blanca.	
897. **Mtra.:** de esos dos ejemplos cuales serían las variables	
898. **Alumno A**: Luis, Lola y casa grande con blanca.	
899. **Mtra.:** están de acuerdo los demás.	
900. **Alumno B:** si	
901. **Mtra.:** vamos a seguir leyendo.	

902. **Alumno A:** Variables dependientes e independientes. A los elementos de A se le llaman variables independientes y los elementos de B se le llaman variables dependientes.	**Principio de niveles**
903. **Mtra.:** en sus ejemplos cuál sería su variable dependiente	
904. **Alumno A:** Lola de Luis	
905. **Mtra.:** porque	
906. **Alumno A:** porque es mujer	
907. **Mtra.:** están de acuerdo que porque Lola es mujer es la variable dependiente	
908. Alumno G: no, jajaj	
909. **Mtra.:** pues no verdad en ese caso sería Luis porque los hombres son los dependientes, jajaj	**Principio de interacción**
910. **Mtra.:** No se crean, para saber cuál es la variable se puede ver en la tabla en una columna pongan el nombre "X" y en la otra "Y", entonces cualquiera puede ser la dependiente porque pueden poner cualquiera de las dos en una columna. Entonces vamos a ponernos de acuerdo, si ponen una ecuación a la que se encuentre en el lado derecho será la dependiente, se acuerdan en el ejercicio de las tortillas donde podían cambiar la "exis" por la "y", acá también se puede hacer eso pero si tienen una expresión algebraica tienen que tomar en cuenta las reglas de los signos para despejar.	**Principio de interconexión**
911. **Mtra.:** ya casi terminamos, vamos con la función Gina creo que te toca.	
912. **Alumno E:** Función. La función es un ente matemático que se fue construyendo a través del tiempo y su estudio matemático comenzó con las matemáticas modernas en el siglo XVII, el concepto fue evolucionando hasta que a comienzos del siglo XIX, se formuló la definición de función como relación entre dos variables, que es la que actualmente se maneja en muchos libros de texto…Es por ello que una función puede verse como una regla de correspondencia entre dos grupos de variables de tal manera que a cada variable dependiente de un grupo le corresponde una y sólo una variable independiente del segundo grupo.	**Principio de realidad**
913. **Mtra.:** Ya notaron la diferencia de sus notas con las notas que está leyendo su compañera?	**Principio de interacción**
914. **Alumno A:** Le cambio conjunto por grupo	
915. **Mtra.:** así es, resulta que la definición correcta es la que ustedes tienen anotada ahí con la palabra conjunto, solo que nosotros aun o hemos definido lo que es, pero intuitivamente pueden considerarlo como similares, observaron lo importante que es partir de una definición.	
916. **Alumno G:** Si	**Principio de niveles**
917. **Mtra.:** Es por eso que deben tener la definición formal, no sé si nos dé tiempo de trabajar el concepto de función formalmente, por lo pronto vamos a seguir con los ejercicios que estamos trabajando.	
918. **Mtra.:** que dice el ejercicio que se encuentra en sus notas	

919. **Alumno B:** Cada número entero posee un único cuadrado, que resulta ser un número natural.	
920. **Mtra.:** vamos a completar la tabla, consideren los números del cero al 5 positivos y negativos. Pónganlos en una columna, y después calculan el cuadrado y lo anotan en la otra columna.	**Principio de reinvención guiada**
921. **Alumno B:** como en el otro ejercicio?	
922. **Mtra.:** si, cuando terminen me avisan	
923. **Alumno A:** ya maestra	
924. **Mtra.:** donde está tu tabla	
925. **Alumno C:** es que lo hicimos en equipo maestra	
926. **Mtra.:** todos deben tener escritos los ejercicios recuerden que es una de las partes que voy a evaluar, hay que anotar la tabla.	
927. **Mtra.:** Una vez que ya todos tienen su tabla hay que graficar	
928. **Alumno A:** ¿en equipo?	**Principio de interconexión**
929. **Mtra.:** no, individualmente	
930. **Mtra.:** Ahora si, en equipo comenten y digan si lo que están haciendo se parece a la definición que leyeron.	
931. **Alumno B:** Júntense para acá.	
932. **Alumno A:** ¿Y esto qué?	
933. **Alumno G:** vamos a leer lo que dice la definición	
934. **Mtra.:** muy bien buen punto.	
935. **Alumno A:** La función es un ente matemático…	
936. **Alumno G:** como que si no?	**Principio de niveles**
937. **Alumno A:** si maestra si es	
938. **Mtra.:** Cual es la función?	
939. **Alumno B:** la tabla de datos	
940. **Mtra.:** quien da mas	
941. **Alumno A:** la grafica	
942. **Mtra.:** otro, otro…	
943. **Alumno G:** el enunciado	
944. **Mtra.:** vuelvan a comentar y quiero que me den una respuesta pero que todos estén de acuerdo.	
945. **Alumno G:** ya tenemos la respuesta correcta.	
946. **Mtra.:** cuál es?	
947. **Alumno A:** el enunciado	
948. **Mtra.:** resulta que los tres casos es una posible representación	**Principio de niveles**
949. **Alumno A:** ya ven yo les decía y no me hacían caso	
950. **Alumno B:** si, si tú siempre tienen la razón	
951. **Alumno A:** verdad que si maestra.	
952. **Mtra.:** A veces, a veces	
953. **Mtra.:** Vamos con la lectura mejor	
954. **Alumno B:** Al primer conjunto se le da el nombre de dominio. Al segundo conjunto se le da el nombre de contradominio o imagen.	
955. **Mtra.**: Otra vez estos conceptos entran dentro la teoría de	**Principio de**

conjuntos, pero veamos los como los grupos de cosas que están en una columna y en otra o variables dependientes contra variables independientes, pero si vamos hacer un ejercicio con los trabajos anteriores. A cada uno de los ejercicios póngame un lado cuales son las variables dependientes y cuales las independientes, a las dependientes les agrega el apeido dominio y a las independientes contradominio o rango.	**interconexión**
956. **Alumno A:** a todos?	
957. **Mtra.:** Si	
958. **Alumno A:** son muchos maestra.	
959. **Alumno G:** no estés llorando y apúrate que ya me quiero ir.	**Principio de interacción**
960. **Alumno A:** maestra ya vamos acabar	
961. **Mtra.:** ya casi unas dos o tres cositas más y terminamos	
962. **Mtra.:** entonces las funciones se pueden representar de varias formas, con una expresión algebraica, con un enunciado, con una tabla o con una gráfica.	
963. **Alumno B:** Maestra pero cuál es la mejor.	
964. **Mtra.:** díganme ustedes	
965. **Alumno C:** la forma algebraica	
966. **Mtra.:** todas las formas son correctas, solo que deben saber identificar sus componentes.	
967. **Mtra.:** la idea principal de estas clases es que ustedes puedan pasar de una forma a otra.	
968. **Alumno A:** uuy maestra eso está bien fácil.	
969. **Mtra.:** vamos a ver entonces, esta grafica creen ustedes que representa una función?	
970. **Alumno B:** Si	
971. **Mtra.:** pues resulta que no, mira si trazamos una línea perpendicular al eje “exis” troza a la gráfica en dos puntos, que quiere decir eso	
972. **Alumno A:** ni idea	
973. **Mtra.:** se acuerdan que dijimos que por cada variable del dominio solamente habría una única variable independiente en el contradominio	
974. **Alumno C:** Si	
975. **Mtra.:** el hecho de que pase por dos puntos quiere decir que a esta variable dependiente le corresponden dos variables independientes	
976. **Mtra.:** entonces no cualquier gráfica representa una función, están de acuerdo.	
977. **Alumno C:** aja	
978. **Mtra.:** con esta grafica ustedes pueden obtener una expresión algebraica, un enunciado o una tabla de datos, pero recuerden que no es una función.	
979. **Mtra.:** Traten de obtener la expresión algebraica, la tabla de datos y el enunciado	
980. **Mtra.:** Para terminar más rápido divídanse de dos en dos y unos obtenga una cosa y otro otra y después las juntamos	

981. **Alumno A:** Ireri tu conmigo

982. **Mtra.:** se acuerdan como se obtiene la ecuación de la circunferencia? Y si no revisen sus notas

983. **Alumno B:** Ha es como el ejercicio que decía que los números enteros tenían un positivo y un negativo o algo así verdad maestra.

984. **Alumno G:** Traes regla, para ir obteniendo los valores y ponerlos en una tabla de valores.

985. **Mtra.:** Nos estamos tardando mucho en este ejercicio, no que ya se querían ir

986. **Alumno G:** si pero el enunciado no nos sale

987. **Mtra.:** Otra vez júntense todos en mesa redonda para que se copien los resultados ahorita les ayudo.

988. **Mtra.:** De tarea quiero que realicen 2 enunciados y obtengan la tabla la expresión y la gráfica. De esos ejercicios voy a sacar el examen, así que pueden pasarse los ejercicios de todos si quieren. Vamos a seguir la lectura para terminar

989. **Alumno A:** Notación. Usualmente la notación que se usa para las funciones es f(x), aunque muchas veces se abrevia a simplemente f o y.

990. **Mtra**.: Es probable que ahora que quieran hacer su tarea se encuentre con esta notación, para que no haya reclamos quiero que escriban esta expresión y=2x+2 y me digan si es una función o no.

991. **Alumno A:** si maestra

992. **Mtra.:** y como sabes

993. **Alumno A:** es igual a la que teníamos en un ejemplo.

994. **Mtra.:** muy bien y esta otra f(x)=3x+5

995. **Alumno G:** Si maestra, es la misma solo con notación diferente

996. **Mtra.:** Bueno eso es lo que quería que vieran.

997. **Mtra.:** para la tarea si tienen dudas me pueden buscar antes del jueves lo más tempano que puedan porque ese día voy hacer el examen, también se pueden apoyar con el material que les di en las hojas.

998. **Mtra.:** pásenme sus libretas para revisarles lo que hicieron esta clase.

999. **Mtra.:** enumeren cada una de las actividades.

1000. **Alumno C:** le vamos a entregar la libreta

1001. **Alumno E:** le ponemos nombre.

1002. **Mtra.:** si pónganle su nombre pero solo les voy a revisar y se las devuelvo.

1003. **Mtra.:** A los que ya les revise la libreta nos vemos el jueves temprano para el examen, será a la primera hora para que lleguen pronto.