



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

---

SECRETARÍA ACADÉMICA  
DOCTORADO EN EDUCACIÓN

**“NIVELES DE PENSAMIENTO DE LOS MAESTROS DE PRIMARIA  
ACERCA DE LA PROBABILIDAD Y SU VÍNCULO CON LOS  
PROPÓSITOS Y CONTENIDOS DE LOS MATERIALES OFICIALES”**

T E S I S  
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:  
**DOCTOR EN EDUCACIÓN**  
P R E S E N T A :  
**OREL SALINAS ROBLES**

T U T O R :  
**DR. ERNESTO SÁNCHEZ SÁNCHEZ**

MEXICO, D. F.

DICIEMBRE DE 2007

## AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Ernesto Sánchez Sánchez, por su confianza y su interés en lo largo de este proceso, por compartir conmigo sus saberes y experiencias en el ámbito de la investigación. Cómo no recordar aquellos momentos en donde la luz del final del túnel no se veía, gracias maestro.

A la Dra. Verónica Hoyos Aguilar, por formar parte del comité y otorgarme fuerzas para terminar el proceso.

A la Dra. Alicia Avila Storer, por regalarme su paciencia, entrega y dedicación para que el trabajo mejorara día con día.

Al Dr. José Luis Cortina Morfín, por subirse a la nave al final de la travesía. Leer minuciosamente el trabajo y dar acertadamente sugerencias que permitieron mejorar la investigación notoriamente y aterrizar el vuelo.

A la Dra. Mariana L. Sáiz Roldán quién aceptó gustosamente leer el trabajo y dar sugerencias pertinentes para dar más claridad a los temas abordados.

Al Dr. Miguel Mercado Martínez, gracias maestro, por la amistad y perseverancia que me inculcaste en todo el proceso de la investigación. Por leer el trabajo y por tus observaciones valiosas.

Al Dr. Rodrigo Cambray Núñez, por compartir conmigo esta travesía y darme su apoyo y sugerencias.

Muy especialmente a mi familia: Lupita, orel, orli y Orey, gracias por su paciencia y apoyo en todo el camino. Por estar conmigo, ahora, hoy y siempre, a ellos con cariño.

A los profesores de primaria del estado de Chiapas que me dieron la oportunidad de estudiar sus conocimientos acerca de la probabilidad y convertir su información en este trabajo, a todos ellos gracias.

A los Drs. José Antonio Serrano Castañeda, Eduardo Mancera Martínez, Guadalupe Terezhina Bertussi, Emiliano Hernández, Jordán Orantes, Lic. Carlos Ramos, Mtra. Elda Pérez Guzmán, Lic. Jesús Martínez y Lic. Obed Ochoa.

Y a todos los que buscan mejorar la enseñanza de las matemáticas y no descansan por conseguirlo. Gracias.

## INDICE

|  | Pág. |
|--|------|
| <b>Índice</b> .....  | iii  |
| <b>Introducción</b> .....  | viii |
| <b>Capítulo 1. El problema de Investigación</b>  |      |
| 1.1.- Caracterización del problema de Investigación.....                                       | 001  |
| 1.2.- Importancia del problema de Investigación.....   | 003  |
| 1.3.- Preguntas de Investigación.....  | 007  |
| 1.4.- Antecedentes.....  | 007  |
| 1.5.- Los sujetos de Investigación.....  | 008  |
| <b>Capítulo 2. Presupuestos teóricos de referencia</b>   |      |
| 2.1.- El pensamiento acerca de probabilidad.....   | 010  |
| 2.1.1.- Concepción clásica.....  | 010  |
| 2.1.2.- Concepción Frecuencial.....  | 011  |
| 2.1.3.- Concepción subjetiva.....  | 012  |
| 2.2.- Errores más comunes en probabilidad.....   | 013  |
| 2.3.- Aleatoriedad y causalidad.....   | 015  |
| 2.4.- Nociones de combinatoria.....  | 018  |
| 2.5.- Investigaciones en Estocástica.....  | 019  |
| 2.6.- Enseñanza de la probabilidad en el currículo.....  | 023  |
| 2.7.- Concepciones de probabilidad de los niños. Una revisión<br>Psicológica y pedagógica..... | 029  |
| <b>Capítulo 3. El proceso metodológico</b>   |      |
| 3.1.- El diseño de la investigación.....   | 034  |
| 3.1.1.- La primera etapa del estudio.....  | 036  |
| 3.1.2.- La segunda etapa del estudio.....  | 037  |
| 3.2.- Construcción del marco conceptual .....  | 040  |

|   |     |
|---|-----|
| 3.2.1.- caracterización de los niveles de pensamiento identificados<br>en la Primera Etapa de la Investigación..... | 042 |
| 3.2.2.- Caracterización de los niveles de pensamiento identificados en<br>la Segunda Etapa de la Investigación..... | 046 |
| 3.3.- Sistematización de datos.....   | 053 |

**Capítulo 4. Pensamiento de los profesores sobre probabilidad, combinatoria, variación, aleatoriedad y juegos de azar**

|   |     |
|---|-----|
| 4.1.- El concepto de probabilidad.....  | 055 |
| 4.2.- La interpretación de probabilidades en una Situación de<br>'pronóstico del tiempo'..... | 057 |
| 4.3.- Uso del razonamiento combinatorio.....  | 066 |
| 4.4.- Comprensión de la variabilidad en función del tamaño de las<br>muestras.....            | 074 |
| 4.5.- El juego de los dados: Utilización de la teoría Laplaciana.....                         | 079 |
| 4.6.- Reconocimiento de los profesores de sucesos aleatorios.....                             | 086 |
| 4.7.- Caracterización de los fenómenos aleatorios.....  | 103 |
| 4.8.- Fenómenos aleatorios considerados por los profesores.....                               | 105 |
| 4.9.- Fenómenos no aleatorios considerados por los profesores.....                            | 107 |
| 4.10.- Qué significa azar para los profesores.....  | 109 |
| 4.11.- Interpretación y valoración de los fenómenos.....                                      | 110 |
| Resumen de las observaciones.....   | 118 |
| Conclusión general: El pensamiento probabilístico de los<br>profesores.....                   | 119 |

**Capítulo 5. Interpretación de los profesores del tema “Predicción y azar” del Programa de Estudio**

|  |     |
|--|-----|
| 5.1.- Contenido Número 1: “Predicción de hechos y sucesos en situaciones<br>sencillas en las que no interviene el azar”..... | 123 |
| 5.2.- Contenido Número 2: “Identificación y realización de juegos en los que<br>interviene o no interviene el azar”.....     | 125 |
| 5.3.- Contenido Número 3: “Registro de resultados de experimentos  |     |

|  |     |
|--|-----|
| aleatorios” .....  | 128 |
| 54.- Contenido Número 4: “Identificación de la noción del espacio Muestral” .....  | 131 |
| 5.5.- Contenido Número 5: “Uso de expresiones más probable y menos probable en la predicción de resultados” .....                      | 133 |
| 5.6.- Contenido Número 6: “Experimentos aleatorios y análisis de los resultados posibles y de los casos favorables” .....              | 135 |
| 5.7.- Contenido Número 7: “Identificación de la noción de evento” .....  | 138 |
| 5.8.- Contenido Número 8: “Identificación de la mayor o menor probabilidad de los eventos” .....                                       | 141 |
| 5.9.- Contenido Número 9: “Identificación de fenómeno o experimento aleatorio” .....   | 143 |
| 5.10.- Contenido Número 10: “Comparación de dos eventos a partir del número de casos favorables sin cuantificar su probabilidad” ..... | 146 |
| 5.11.- Construcción de problemas propuestos para trabajar los contenidos.....  | 148 |
| 5.11.1.- Contenido Número 1: “Predicción de hechos y sucesos en situaciones sencillas en las que no interviene el azar” .....          | 150 |
| 5.11.2.- Contenido Número 2: “Identificación y realización de juegos en los que interviene o no interviene el azar” .....              | 151 |
| 5.11.3.- Contenido Número 3: “Registro de resultados de experimentos aleatorios” .....   | 153 |
| 5.11.4.- Contenido Número 4: “Identificación de la noción del espacio muestral” .....  | 154 |
| 5.11.5.- Contenido Número 5: “Uso de expresiones más probable y Menos probable en la predicción de resultados” .....                   | 156 |
| 5.11. 6.- Contenido No. 6: Experimentos aleatorios y análisis de los resultados posibles y de los casos favorables.....                | 158 |
| 5.11. 7.- Contenido Número 7: “Identificación de la noción de evento” .....  | 160 |
| 5.11.8.- Contenido Número 8: “Identificación de la mayor o menor probabilidad de los eventos” .....                                    | 161 |

|   |     |
|---|-----|
| 5.11.9.- Contenido Número 9: “Identificación de fenómeno o experimento aleatorio”.....  | 163 |
| 5.11.10.- Contenido Número 10: “Comparación de dos eventos a partir del número de casos favorables sin cuantificar su probabilidad”.. | 165 |
| 5.12.- Tipo de idea que toman en cuenta al construir sus actividades....  | 167 |
| 5.12.1.- Pensamientos Uniestructurales.....   | 169 |
| 5.12.2.- Pensamientos Preestructurales.....   | 173 |
| 5.12.3.- Ningún tipo de pensamiento.....  | 174 |

**Capítulo 6. Niveles de pensamiento de los profesores en conceptos de probabilidad frente a las actividades y problemas de los libros de texto**

|  |     |
|--|-----|
| 6.1.- Pregunta 1: Registro de resultados de eventos de azar.....   | 181 |
| 6.1.1.- Niveles de pensamiento con respecto al contenido abordado en la actividad y la justificación dada a su respuesta.....    | 184 |
| 6.2.- Pregunta 3: Uso de las expresiones más probable y menos probable.....  | 186 |
| 6.2.1.- Niveles de pensamiento con respecto al contenido abordado en la actividad y la justificación dada a su respuesta.....    | 189 |
| 6.3.- Pregunta 5: Problemas de combinatoria.....   | 191 |
| 6.3.1.- Niveles de pensamiento con respecto al contenido abordado en la actividad y la justificación dada a su respuesta.....    | 194 |
| 6.4.- Pregunta 7: Experimento aleatorio y análisis de casos favorables....   | 196 |
| 6.4.1.- Niveles de pensamiento con respecto al contenido abordado en en la actividad y la justificación dada a su respuesta..... | 199 |
| 6.5.- Pregunta 9: Análisis de resultados posibles y casos favorables.....  | 202 |
| 6.5.1.- Niveles de pensamiento con respecto al contenido abordado en la actividad y la justificación dada a su respuesta.....    | 205 |
| 6.6.- Pregunta 10: Probabilidades de eventos.....  | 208 |
| 6.6.1.- Niveles de pensamiento con respecto al contenido abordado en la actividad y la justificación dada a su respuesta.....    | 211 |
| 6.7.- Pregunta 11: Registro de experimentos aleatorios.....  | 214 |
| 6.7.1.- Niveles de pensamiento con respecto al contenido abordado en   |     |

|  |            |
|--|------------|
| la actividad y la justificación dada a su respuesta.....   | 217        |
| 6.8.- Pregunta 12: Identificación de eventos seguros, azarosos e<br>imposibles.....  | 220        |
| 6.8.1.- Niveles de pensamiento con respecto al contenido abordado en<br>la actividad y la justificación dada a su respuesta..... | 224        |
| 6.9.- Ideas implícitas en las actividades que sugieren los profesores<br>para abordar la probabilidad.....                       | 228        |
| 6.9.1.- Actividades propuestas sin relación con el contenido.<br>Pensamiento preestructural.....                                 | 229        |
| 6.9.2.- Actividades propuestas relacionadas con el contenido.<br>Pensamiento Uniestructural.....                                 | 232        |
| 6.10.- Tipo de idea que toman en cuenta los profesores al<br>construir sus actividades.....                                      | 236        |
| 6.10.1.- Ejemplos de ideas ubicadas en el Nivel Preestructural.....  | 238        |
| 6.10.2.- Ejemplos de ideas para construir actividades ubicadas<br>en el nivel uniestructural.....                                | 239        |
| <b>Capítulo 7. Conclusiones</b>  |            |
| 7.1. Aportaciones más importantes del trabajo.....   | 243        |
| 7.1.1. El problema de investigación.....   | 243        |
| 7.1.2. Presupuestos teóricos.....  | 243        |
| 7.1.3. El proceso metodológico.....  | 244        |
| 7.1.4. Las nociones de experiencia aleatoria y de probabilidad.....  | 245        |
| 7.1.5. Las respuestas a las situaciones planteadas en el texto.....  | 247        |
| 7.1.6. Las interpretaciones de los contenidos curriculares.....  | 248        |
| 7.1.7. Reflexiones finales y recomendaciones.....  | 249        |
| <b>Referencias.....</b>  | <b>251</b> |
| <b>Anexos.....</b>   | <b>260</b> |

## INTRODUCCIÓN

La presente investigación tuvo el objetivo central de indagar los niveles de pensamiento que muestran los profesores de primaria con respecto a las nociones básicas de probabilidad y la relación de ese pensamiento con los contenidos de probabilidad del currículo de primaria. Realizar una investigación de este tipo es importante, porque si los profesores de la escuela primaria tienen una mejor concepción del contenido probabilístico esto contribuirá a mejorar la enseñanza que impartan con sus alumnos en la escuela.

El problema de hacer un diagnóstico de lo que piensan los maestros en esta materia es importante, ya que algunos investigadores (e. g. Fischbein, 1975; Yost, 1962; Hoeman y Ross, 1982) consideran que los temas de probabilidad y estadística deben ser comenzados a enseñar desde edades tempranas (3 a 6 años), y que las deficiencias en los temas de probabilidad se deben a que no se estudian a lo largo del currículo.

El hecho de que los temas de probabilidad aparezcan en el plan y programas de la escuela primaria se basa en esa consideración; sin embargo, en la práctica hay grandes dificultades para que las actividades de probabilidad y estadística puedan llevarse a cabo. Por lo anterior, los diagnósticos sobre el pensamiento de los profesores son necesarios para saber qué saben de probabilidad y con ello poder diseñar estrategias que permitan hacerles llegar el conocimiento que aun les falta por adquirir.

En la obtención de los datos empíricos de esta investigación participaron 25 docentes que laboran en la región centro del estado de Chiapas (Cintalapa, Jiquipilas y Tuxtla Gutiérrez). Para obtener la información se diseñaron tres cuestionarios que se aplicaron en dos fases. El primer cuestionario fue aplicado en

la primera fase y únicamente participaron 14 de los 25 docentes, en éste se obtuvo información acerca de los niveles de pensamiento de los profesores sobre probabilidad, combinatoria, variación, aleatoriedad y juegos de azar.

Los resultados obtenidos después del análisis de las respuestas de los profesores dadas en este cuestionario, se constató que la mayoría de los maestros se ubican en el nivel uniestructural, pero también un buen número se ubica en preestructural. Muy pocos casos se encuentran en un nivel multiestructural. Esto significa que la gran mayoría de los profesores sólo captan un aspecto de los conceptos, pero no dos o más de los que suelen estar constituidos.

En la segunda fase se aplicaron dos cuestionarios a 25 profesores, en esta fase se incluyen los 14 maestros cuestionados en la primera fase. El segundo cuestionario aplicado consistió en mostrarles diez contenidos de probabilidad: siete propuestos por el programa de educación primaria y tres sugeridos por el investigador. Con los resultados de este cuestionario se obtuvo la forma en que los profesores de educación primaria del estudio interpretan los contenidos propuestos en el programa oficial con respecto al eje predicción y azar.

En las respuestas de los maestros se constata que la mayoría trató de que sus interpretaciones se aproximaran a los contenidos propuestos por el programa. Por lo general las ideas expresadas toman en cuenta las experiencias particulares de los profesores. De esta manera, se muestra que un porcentaje significativo de las interpretaciones de los maestros se sitúa dentro del pensamiento de tipo uniestructural. Por lo regular consideran uno o varios elementos incluidos en el contenido, pero sin profundizar su tratamiento en las interpretaciones dadas.

El tercer cuestionario aplicado en esta segunda fase tuvo el propósito de obtener información acerca de los niveles de pensamiento de los profesores en conceptos de probabilidad frente a las actividades y los problemas de los libros de texto. El cuestionario se integró con diez actividades tomadas de los libros de texto de matemáticas con las que es posible identificar conceptos probabilísticos.

En el análisis de las respuestas dadas por los profesores a las actividades propuestas, se encontró que tuvieron en general pocas dificultades; los obstáculos

más relevantes surgieron en las actividades relacionadas con la combinatoria, el análisis de los resultados posibles y casos favorables y en la probabilidad de eventos. El pensamiento reflejado en las respuestas de los profesores se orientó, fundamentalmente, al nivel uniestructural, sus ideas se aproximan a lo esperado aunque no profundizan en sus justificaciones.

No hay que perder de vista que los profesores que participaron en este estudio trabajan en una región del estado de Chiapas considerada como de bajo desempeño, donde no se han efectuado investigaciones de este tipo. Por lo que nos parece interesante documentar sus niveles de pensamiento acerca de probabilidad.

Este estudio contribuiría indudablemente al campo de la investigación en educación matemática y de manera específica a la probabilidad, para contar con información acerca de lo que sabe el maestro de probabilidad y con ello identificar las situaciones probabilísticas que se les complican y que tienen dificultades para comprenderlas.

El reto que se desprende de esta investigación es el de buscar formas de cómo hacer para que profesores de contextos como el investigado puedan nivelarse y construir cabalmente al aprendizaje de la probabilidad en primaria.

Se ha podido constatar en este trabajo que los profesores del estudio muestran pocos conocimientos acerca de probabilidad, tanto de manera conceptual como de algunos de los contenidos probabilísticos propuestos en el plan y programas de estudio 1993 de la escuela primaria. En el proceso de la investigación se pueden encontrar formas para clarificar cuáles son los aspectos que deben fortalecerse.

En efecto, el marco de trabajo de Biggs y Collis (1991) que señala ciclos de desarrollo formados por etapas preestructurales, uniestructurales, multiestructurales y relacionales nos ha llevado a analizar los conceptos de probabilidad, explorando cómo pueden ser percibidos por parte de los profesores.

De tal manera, que para interpretar el nivel de pensamiento mostrado por el maestro, fue necesario analizar primeramente el concepto y enunciar los componentes que lo integran.

Para ello, el nivel preestructural es aquella idea proporcionada por el profesor que no tenga nada que ver con ninguno de los componentes que integran el concepto; para el nivel uniestructural se tomaron en cuenta las ideas de los maestros que incluyera uno de los componentes del concepto; para el nivel multiestructural, se consideraron las ideas de los docentes que contemplaran al menos dos o tres componentes del concepto, sin ser éstos el total de componentes, lo que significa, que para este nivel la idea no será completa; en cambio en el nivel relacional la idea dada por el maestro tendrá que considerar todos los componentes que integran el concepto de manera clara y coherente.

Por ejemplo, si consideramos el concepto de probabilidad; una idea uniestructural sería identificar únicamente la probabilidad con el azar, esta idea solo incluye el azar; percibirlo de manera multiestructural podría ser considerar la probabilidad como una medida del azar, en esta idea se consideran los componentes medida y azar; finalmente una idea relacional podría ser como la siguiente, expresar en el cálculo del cociente de casos posibles entre casos favorables o manifestar que se puede aproximar con las frecuencias relativas, en estas dos posibles ideas se contempla la totalidad de componentes incluidos en las teorías clásica y frecuencial de la probabilidad.

Tomar en cuenta el concepto y descomponerlo en los elementos que lo conforman surgió de la idea central de conocer qué saben los profesores de primaria acerca de las nociones probabilísticas, cómo se han apropiado de ellas, cómo interpretan las actividades probabilísticas propuestas en los materiales oficiales y observar si existe algún vínculo entre lo que conocen y los materiales.

Esta idea permitió tener un acercamiento hacia los estudios que se han llevado a cabo con respecto a la probabilidad para saber cómo han sido trabajados por los investigadores de esta temática. En un primer momento nos centramos en la conjetura de que los saberes de los maestros con respecto a las nociones de probabilidad eran muy limitadas, y por ello, al momento de trabajarlas en el aula, se promovían en los alumnos concepciones erróneas de la probabilidad.

En este sentido, y a través de comentarios informales dados por los maestros supimos que existe un desconocimiento de algunos profesores acerca de las concepciones de probabilidad existentes como la clásica, la frecuencial y la subjetiva. Conjeturamos que los maestros cuentan con pocos recursos para diseñar actividades didácticas que promuevan el aprendizaje de las nociones básicas de probabilidad, y por ello, recurren frecuentemente al uso de las actividades propuestas en los textos de matemáticas oficiales.

Estas conjeturas fueron constatadas mediante los resultados obtenidos en la investigación, efectivamente los profesores mostraron en lo general un pensamiento uniestructural con respecto a las nociones básicas de la probabilidad, revelaron pocos elementos para construir actividades y, por lo regular, tomaron como modelo las propuestas en los libros de texto; también muy pocos profesores hicieron uso de las fichas propuestas en los ficheros de actividades didácticas.

Es claro que aún hay un largo camino que recorrer para conocer el pensamiento de los profesores y para encontrar maneras de transformarlo a niveles más avanzados (multiestructural y relacional), sin embargo, en este trabajo se propone un acercamiento que delinea ciertas maneras de avanzar en ese problema.

El trabajo está estructurado en siete capítulos los cuales presentan las siguientes ideas:

Capítulo 1: El problema de investigación. En éste capítulo se caracteriza el problema de investigación, se da a conocer la importancia que tiene y las preguntas de investigación, así como los antecedentes de la investigación y se caracteriza a los sujetos del estudio.

Capítulo 2. Presupuestos teóricos. En éste capítulo se presentan los pensamientos acerca de la probabilidad, en la que se muestra la concepción clásica, la frecuencial y la subjetiva. Se presentan los errores más comunes en probabilidad, como el sesgo de equiprobabilidad, el sesgo de representatividad y el sesgo del resultado aislado. Se presentan los conceptos de aleatoriedad y causalidad, las nociones de combinatoria, las investigaciones en estocástica, la forma en que se da la enseñanza de la probabilidad en el currículo. Las

investigaciones efectuadas en relación con la probabilidad, de manera específica, las concepciones de probabilidad.

Capítulo 3.- El proceso metodológico. En esta parte se muestra el diseño de la investigación, las preguntas centrales, y la descripción de cada una de las etapas que comprendieron el estudio. Se presenta la construcción del marco conceptual y se caracterizan los niveles de pensamiento, preestructurales, uniestructurales, multiestructurales y relacionales (Biggs y Collis, 1991) que se utilizaron como categorías de análisis y la sistematización de los datos encontrados.

Capítulo 4.- Pensamiento de los profesores sobre probabilidad, combinatoria, variación, aleatoriedad y juegos de azar. Aquí se muestran los resultados obtenidos mediante el análisis de la información empírica proporcionada por las respuestas dadas por los profesores en el cuestionario que se diseñó con el fin de obtener datos acerca de los conceptos de probabilidad, combinatoria, variación, aleatoriedad y juegos de azar.

Se muestra cómo la mayoría de los maestros se ubican en el nivel uniestructural, únicamente tienden a retomar en sus respuestas a las preguntas del cuestionario un solo aspecto de los conceptos probabilísticos involucrados. Pocos profesores implican uno o dos aspectos del concepto, así como también un número considerable se ubica en preestructural; es decir, que no involucran ningún elemento del concepto.

Capítulo 5.- La interpretación de los profesores del tema “Predicción y Azar” del programa de estudio. En este apartado se muestran los resultados obtenidos respecto a cómo los maestros interpretaron los contenidos probabilísticos que les toca enseñar, así como respecto a las sugerencias que hicieron en relación a cómo trabajar los contenidos en el aula con sus estudiantes.

Se muestra cómo los profesores se ubicaron en su mayoría en el nivel uniestructural debido a que únicamente trataron de que sus interpretaciones se aproximaran a los contenidos propuestos. Algunos maestros retoman los elementos enunciados en los contenidos presentados en el cuestionario; otros sencillamente no los incluyen e incorporan más bien distintos elementos de

probabilidad, razón por la que muchas interpretaciones se alejan completamente de los que propone el contenido del programa oficial.

Capítulo 6.- Niveles de pensamiento de los profesores en conceptos de probabilidad frente a las actividades y problemas de los libros de texto. En este capítulo se muestra la información obtenida a partir de las respuestas de los profesores, al cuestionario que se diseñó para conocer cómo interpretan la información probabilística propuesta en los materiales educativos oficiales, en particular, la información que les proporcionan las actividades contenidas en los libros de texto oficiales.

Se muestra cómo los maestros resuelven las actividades propuestas en el cuestionario, con qué contenido probabilístico lo relacionan, así como los argumentos que dan acerca del contenido que implican; es decir, cómo justifican sus respuestas. De este modo, los resultados obtenidos muestran que la mayoría de los maestros se ubican en el nivel uniestructural, en sus respuestas se aprecia una relación mínima con el contenido que enuncian, además de que la justificación del contenido que se trabaja en la actividad no es clara y muchas veces sólo repiten ideas similares.

Resulta interesante mencionar que algunos profesores mostraron ideas preestructurales en los contenidos referidos a la probabilidad de eventos y a la identificación de eventos seguros; confunden un evento seguro con uno azaroso e imposible; no identifican los resultados posibles ni valoran a partir de casos favorables.

Capítulo 7.- Conclusiones. Se presentan las ideas más relevantes construidas mediante el análisis de las observaciones obtenidas en el desarrollo de la investigación.

Referencias y Anexos. Se enlistan las referencias y una bibliografía complementaria. Al final se incluyen formatos de los cuestionarios que se aplicaron en las diferentes etapas de la investigación.

Esta tesis es el resultado de varios años de dedicación y estudio acerca de las nociones de probabilidad que muestran los profesores implicados en esta investigación. Además de ser un esfuerzo compartido, ya que esto no hubiera sido

posible sin tomar en cuenta los apoyos necesarios de las personas dedicadas a la investigación en esta temática, quienes a través de sus sugerencias y recomendaciones lograron que finalmente se construyera este documento que ponemos a la disposición de todos los interesados en conocer el fascinante mundo de la probabilidad.

# CAPÍTULO I

## EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

### 1.1. Caracterización del problema de investigación

¿Por qué es importante estudiar el nivel de pensamiento de los maestros sobre probabilidad? Porque si tomamos en cuenta que el docente juega un papel importante en los aprendizajes que adquieren los alumnos en la escuela, entonces debe preocuparnos los resultados que los estudiantes obtienen cuando se les aplica exámenes para evaluar los conocimientos que adquieren acerca de los contenidos escolares, aún más cuando éstos no son los esperados. En este sentido, al revisar los resultados de la evaluación realizada a una muestra representativa de alumnos de sexto de primaria y de tercero de secundaria a nivel nacional por el INEE (Instituto Nacional de Evaluación Educativa) en el año 2005, se encontró que los estudiantes en su mayoría no cuentan con los conocimientos necesarios para resolver problemas y actividades en la asignatura de matemáticas y español considerados como propios de esos niveles educativos.

Asimismo, esta evaluación mostró que una cantidad considerable de estudiantes fracasa en la asignatura de matemáticas, porque no adquieren las habilidades y conocimientos mínimos indispensables para aprender los contenidos curriculares. En este sentido, existe una pobreza de aprendizajes logrados por el paso de la escuela primaria.

Tomando en cuenta los niveles que presenta el estudio realizado por el INEE (2005, 68) en lo que respecta a la probabilidad, la evaluación nos muestra

que los alumnos evaluados se ubican en su mayoría en los niveles denominados por debajo del nivel básico y el nivel básico; lo que significa que, en primaria los estudiantes no logran resolver problemas sencillos de probabilidad que impliquen realizar un análisis combinatorio (INEE, 2005,181); en secundaria, la mayoría no sabe resolver problemas de conteo, determinar la probabilidad de eventos mutuamente excluyentes, utilizar la regla de la suma o la regla del producto. De este modo, se puede considerar que los alumnos pueden identificar situaciones de azar pero se les dificulta el análisis de dichos eventos.

Los estados que muestran un bajo nivel en los aprendizajes de matemáticas son Chiapas, Guerrero, Michoacán y Tabasco (INEE, 2005,76), estados que muestran condiciones socioeconómicas bajas, situaciones que se reflejan en algunos casos en la obtención de niveles más bajos en el aprendizaje.

Asimismo, encontramos que los resultados de las pruebas aplicadas por PISA (Programme for International Student Assessment) 2000 y 2003 en México con jóvenes de 15 años, arrojaron resultados similares al del INEE 2005 en cuanto a la asignatura de matemáticas, por lo que con respecto al promedio de la OCDE (Organización para la cooperación y el desarrollo económico), “México tiene un porcentaje de estudiantes en el nivel 0 casi 5 veces más grande, un poco más del doble en el nivel 1, el mismo porcentaje en el nivel 2, menos de la mitad en el nivel 3 y menos de una décima parte en los niveles 4, 5 y 6” (Vidal, 2004, Pág. 84).

Estos resultados nos indican que la mayoría de los jóvenes de 15 años mexicanos, mostraron un poco conocimiento para resolver problemas matemáticos. En probabilidad se obtuvo también como resultado una media significativamente menos al promedio de la OCDE, los estados mexicanos que ocuparon los lugares más bajos fueron Campeche, Chiapas, México, Puebla y Veracruz.

Los resultados de estas evaluaciones concluyen que “los puntajes promedios alcanzados por los jóvenes mexicanos de 15 años evaluados por PISA, sitúa a México detrás de todos los países de la OCDE... La mayoría de los jóvenes mexicanos de 15 años alcanzan sólo los niveles más bajos de

competencia que definen las escalas de la prueba PISA, muy pocos alcanzan los niveles más altos. (Vidal, 2004, Pág. 170)

Consideramos que una de las instituciones que tiene mayor influencia en cuanto al aprendizaje de las matemáticas es la escuela, por lo que nos parece importante conocer qué sabe el profesor que trabaja en la escuela primaria acerca de probabilidad, esto con la intención de documentar estos saberes para mostrar el conocimiento que posee el maestro y lo que aún le hace falta por conocer, esto nos podría ayudar a entender el efecto que puede tener el conocimiento del profesor en el aprendizaje de sus alumnos.

Estas situaciones nos hicieron plantear algunos cuestionamientos. Nuestro primer reto fue ¿cómo documentar los niveles de pensamiento que tienen los profesores sobre probabilidad?, ¿cómo interpretan los contenidos de probabilidad propuestos en los materiales oficiales? y ¿los niveles de pensamiento de los maestros sobre probabilidad tendrán alguna influencia en la interpretación de los contenidos probabilísticos? Estas preguntas nos ayudaron a construir inquietudes más finas acerca de la investigación realizada.

Al responder los cuestionamientos tenemos la oportunidad de saber qué niveles de pensamiento tienen los docentes sobre probabilidad, reflejando en sus respuestas qué tanto conoce acerca del concepto probabilístico, así como también sobre los contenidos escolares implicados en el plan y programas de estudio 1993. Buscar una respuesta acerca de los niveles de pensamiento que poseen los profesores nos permitió visualizar una serie de actividades que teníamos que hacer para encontrarla. Así, nos dimos a la tarea de realizar una revisión de la literatura disponible, en la que encontramos algunas investigaciones sobre concepciones de matemática en general y de probabilidad, e investigaciones de carácter general de la matemática, las cuales nos permitieron obtener información acerca de los estudios que se han efectuado en probabilidad.

### **1.2. Importancia del problema de investigación**

Realizar una investigación con profesores de primaria en el estado de Chiapas, México acerca de lo que saben de probabilidad es importante porque no

se ha efectuado ninguna indagación de este tipo en este contexto, además porque estos profesores trabajan en un estado considerado como de bajo desempeño, ya que, según los resultados de las pruebas efectuadas por el INEE 2005, PISA 2000 y PISA 2003 los estudiantes del estado de Chiapas se ubicaron en los niveles más bajo de conocimiento matemático y probabilístico.

Por lo que, consideramos de gran importancia conocer las nociones de probabilidad con que cuentan algunos de los profesores de primaria que laboran en una región del estado de Chiapas, así como los saberes que tienen de la información propuesta en los materiales oficiales de la SEP sobre esta temática. Todo lo anterior con la finalidad de conocer, contrastar y reflexionar en estos niveles, para que a través de los resultados obtenidos en esta investigación tengamos la posibilidad de documentar lo que saben y ubicarlos en los niveles de pensamiento correspondientes. Suponemos que al saber lo que conoce el profesor tendremos también la oportunidad de identificar las situaciones probabilísticas que aún les hace falta conocer.

Lo interesante también de este estudio es que a pesar de tratarse de una muestra representativa de profesores de primaria de una región del estado de Chiapas, podemos suponer que otros docentes que laboran en diferentes partes de la República Mexicana podrían estar en las mismas condiciones con respecto a los saberes probabilísticos, esto debido a que pueden estar trabajando en las mismas circunstancias que los profesores de esta investigación. Es decir, realizar sus prácticas en escuelas urbanas en estados de bajo desempeño (Chiapas, Guerrero, Michoacán, Tabasco; Vidal, 2005, Pág. 86). Además si consideramos que los profesores del estudio tienen una formación parecida a otros que trabajan en otros estados de la República, ya que las escuelas formadoras de docentes a nivel nacional tienen programas semejantes, es de suponerse que sus saberes podrían coincidir, sobre todo si hablamos de contextos sociales, familiares y culturales similares a los de la investigación que realizamos.

Consideramos que uno de los primeros pasos para suponer lo que sucede en el aula con respecto a lo que podría enseñar el profesor acerca de probabilidad, es saber qué piensan, qué saben y qué conocen sobre probabilidad,

ya que de cualquier manera los saberes de los docentes se implican en la enseñanza y tienen sus efectos en el aprendizaje de los estudiantes.

La estructuración de este estudio se basa en la idea de que los niveles de pensamiento personales de cada maestro, se refleja de manera prioritaria en el desempeño de su labor educativa. Es decir, que los niveles de pensamiento que tienen de las nociones probabilísticas, influyen de alguna manera en su trabajo con los estudiantes, por lo que los alumnos podrían apropiarse de las nociones de probabilidad que posee su profesor.

Coincidimos con Thompson en la interpretación de que la enseñanza escolar está influenciada por los pensamientos que tienen los docentes (Thompson, 1982). Esto es precisamente lo que puede suceder en la enseñanza de la probabilidad en la escuela primaria. Creemos que muchos docentes tienen pocos conocimientos acerca de lo que es la probabilidad, y conocen poco de su existencia en la vida cotidiana. En algunas pláticas informales que realizamos con profesores ante situaciones de probabilidad, constatamos que las confunden con situaciones deterministas, y otros no conocen de su existencia.

No conocer la probabilidad ha llevado a los profesores a tomar decisiones equivocadas en situaciones cotidianas, a muchos fenómenos que pueden atribuirse al azar, a la probabilidad, aunque para muchos no tiene sentido. Sin embargo, atribuimos a estos fenómenos otras causas, desde la mala suerte hasta la equivocación o descuidos personales. Por ejemplo: si vamos a tomar un camión a determinada hora, creemos que va a salir puntualmente. Pero al darnos cuenta de que no salió a la hora indicada, nos molestamos y le echamos la culpa a las personas, a los conductores, sin tomar en cuenta otros factores ajenos a la voluntad de las personas, y que pueden ser ocasionados por el azar, este tipo de situación nos permite tener ideas acerca de la probabilidad, de la incertidumbre, de entender que en muchas ocasiones no sabemos lo que va a pasar.

Fue un camino difícil buscar la información que nos permitiera establecer ciertos criterios acerca de qué es el pensamiento y cómo emplearlo para identificar los pensamientos que poseen los profesores de este estudio acerca de la probabilidad. Nos pareció interesante el planteamiento de las concepciones que

hace Thompsom (1992:132), y que relacionamos con el pensamiento que tratamos en esta investigación, como una estructura mental más general, la cual abarca “las creencias, las imágenes mentales, los significados, las ideas, los pensamientos, los conceptos, las proposiciones, las reglas, el gusto, las preferencias, conscientes e inconscientes”. Retomamos de esta definición los aspectos referidos a las ideas, el pensamiento o las creencias del maestro acerca de los cuestionamientos que les planteamos en torno a la probabilidad.

En esta investigación nos referimos al pensamiento del profesor como las ideas que expresaron a través de sus respuestas a los cuestionarios aplicados, que nos mostró su nivel de pensamiento respecto a las nociones básicas de probabilidad. Para caracterizar el nivel de pensamiento tomamos como referencia las jerarquías propuestas por Biggs y Collis (1991) quienes caracterizan los niveles de pensamiento en preestructural, uniestructural, multiestructural y relacional.

Lo que sí es interesante diferenciar es el pensamiento y el conocimiento. Consideramos que mediante un pensamiento puede comprometerse apasionadamente un punto de vista, o también considerar la diferencia entre más probable y menos probable. Es decir, a través del pensamiento se puede creer que se tiene una cierta posibilidad de certeza en lo que manifiesta. Por ejemplo: alguien puede pensar y decir “creo que encontrarán vida en Marte, si han encontrado agua”, situación que tiene una gran distancia entre el que conoce o tiene claramente el conocimiento. Asimismo, una diferencia notoria entre el pensamiento y el conocimiento, es que este último involucra acuerdos y criterios generales que pueden probar su validez. Por tanto, el pensamiento puede ser equivocado; en cambio, el conocer tiene que enunciar lo que es realmente. En otras palabras, el pensamiento manifiesta lo que creemos de las cosas, y el conocimiento lo que es concretamente.

Consideramos que el profesor puede tener un pensamiento y una creencia de probabilidad —muy arraigada— que difícilmente pueda desechar o cambiar; sin embargo, conocerlas nos permitirá clasificarlos según las características que presenten.

Por ello, es sumamente interesante el planteamiento inicial que hicimos, acerca de saber qué tanto conoce de probabilidad el profesor de primaria. Más aún al priorizar los conocimientos probabilísticos que tiene al respecto de los fenómenos o sucesos aleatorios de la vida cotidiana, porque consideramos que su conocimiento probabilístico lo ha adquirido mediante las experiencias cotidianas.

### **1.3. Preguntas de investigación**

- ¿Cuál es el nivel de pensamiento que tienen profesores de educación primaria de una región del estado de Chiapas respecto a las nociones básicas de probabilidad?
- ¿En qué formas éstos profesores de educación primaria en servicio interpretan y utilizan las informaciones probabilísticas propuestas en los materiales de la SEP?

### **1.4.-Antecedentes**

La inquietud principal para efectuar este estudio fue conocer a través del pensamiento de probabilidad que tienen los maestros, qué tanto saben y conocen acerca de la probabilidad y cómo interpretan los contenidos probabilísticos propuestos en los materiales oficiales que proporciona la SEP. Partimos de la idea de que el pensamiento y creencia que tienen los profesores tienen efectos en los aprendizajes de los estudiantes a través de la enseñanza.

Así mismo, creemos que si el pensamiento de probabilidad con que cuentan los maestros es erróneo o inadecuado, al ser utilizado en la enseñanza por consecuencia se obtendrán aprendizajes erróneos. Es decir, que si un docente tiene una noción de probabilidad incorrecta o la maneja mal, de la misma forma la planteará a sus alumnos, lo que repercutirá en que la noción sea comprendida e interpretada erróneamente.

En las investigaciones que se han efectuado acerca de la probabilidad, como la de Hawkins y Kapadia (1984), se formulan algunas preguntas interesantes que pueden servirnos como referencia para realizar investigaciones probabilísticas. Si bien estas cuestiones ya han sido abordadas en algunas

investigaciones, no han sido respondidas en su totalidad, por lo que existe la posibilidad de profundizar en ellas.

a) ¿Cuáles son las concepciones de probabilidad que tienen los niños en diferentes edades?

b) ¿Cómo podrían cambiarse esas concepciones?

c) ¿Cuál sería la relación entre las concepciones intuitivas y subjetivas y las concepciones que se transmiten en el aula y que constituyen el conocimiento de la probabilidad formal?

d) ¿Hay una edad óptima para introducir la probabilidad en la enseñanza formal de los niños?

e) ¿Hay una enseñanza óptima y técnicas de aprendizaje que toman en cuenta las concepciones espontáneas de los niños acerca de sus nociones de probabilidad, mientras éstos desarrollan su comprensión por el conocimiento formal de la probabilidad?

Nuestra investigación se orienta hacia la primera interrogante, en el sentido de identificar los niveles de pensamiento de probabilidad, pero en vez de trabajarlas con los estudiantes, nos orientamos al trabajo con los profesores de educación primaria.

### **1.5.- Los sujetos de Investigación**

La presente investigación se llevó a cabo en el estado de Chiapas, México, con profesores de educación primaria en servicio. En la primera fase de la investigación, que consistió en obtener información acerca de los niveles de pensamiento de fenómenos de azar de los maestros, se cuestionó a 14 docentes. En la segunda fase, referida a la obtención de información acerca de la interpretación de la propuesta oficial, se cuestionó a los 14 de la primera fase y a 11 más, conformando un total de 25 docentes.

Se consideró incrementar el número de profesores en la investigación, porque queríamos saber si el nivel de pensamiento acerca de probabilidad encontrado en la primera fase variaba en sujetos distintos o si se conservaba; es decir, observar si el pensamiento del maestro tenía alguna diferencia, toda vez

que los participantes en la primera fase tenían al menos una idea del tipo de cuestionario que se les aplicó, pero no los que se integraban.

Las características de los sujetos de investigación fueron:

- Ser maestro de educación primaria en servicio.
- Tener la disponibilidad de responder los cuestionarios.
- Trabajar en el estado de Chiapas.

La aplicación de los cuestionarios se llevó a cabo en los hogares de los profesores al término de sus labores escolares. De este modo, se estuvo presente cuando los maestros respondieron el cuestionario, lo cual nos dio la oportunidad de recogerlo el mismo día en que se aplicó y tener la seguridad de que realmente fue resuelto por el profesor.

De manera general se encontró que los profesores investigados tienen en su mayoría un pensamiento de tipo uniestructural acerca de las nociones de probabilidad, en sus respuestas únicamente expresaron una idea que caracteriza el concepto en cuestión, no incluyen ideas más finas, ni profundizan en él.

## CAPÍTULO 2

### PRESUPUESTOS TEÓRICOS

#### 2.1 El pensamiento acerca de probabilidad

Nuestro análisis parte de la idea de que el término probabilidad tiene muchas acepciones, lo cual depende del argumento que presente el sujeto y de la relación que prevalezca entre algunos supuestos planteados por una postulación teórica existente. Es mediante el establecimiento de estas relaciones como se puede ubicar en un principio el pensamiento que manifiesta el sujeto con respecto a la probabilidad, y el cual puede relacionarse con los siguientes presupuestos teóricos.

##### 2.1.1 Concepción clásica

Una concepción clásica retoma la idea de que la probabilidad de obtener un resultado en un evento es igual a la de cualquier otro resultado posible, siempre y cuando éstos sean equiprobables. Por ejemplo, si un dado común tiene seis caras numeradas del 1 al 6, se dice que la probabilidad de obtener un número cualquiera, ya sea 1, 2, 3, 4, 5 o 6, es la misma, o sea que cada número tiene  $1/6$  de probabilidad de salir.

En este mismo ejemplo se puede considerar que cada número (1, 2, 3, 4, 5 o 6) es un miembro aleatorio de esta clase. Es decir, que a cada uno le corresponde 1 de las 6 oportunidades que tiene en total. Así, argumentamos que éste es un fenómeno aleatorio y que todos sus resultados son equiprobables.

La equiprobabilidad es una característica que poseen los fenómenos aleatorios, cuyos elementos tienen la misma oportunidad de ocurrencia. Tal definición nos remite relacionar el cálculo de probabilidades con los juegos de azar, tomando en cuenta aquellos en los que el número de posibilidades es finito. Esta situación se argumenta mediante la idea proporcionada por Batanero (1998:17), quien menciona “que al surgir el cálculo de probabilidades se relaciona la aleatoriedad con la equiprobabilidad de los diferentes resultados; es decir, un fenómeno sería aleatorio si todos sus resultados son equiprobables”.

Si pensamos con detenimiento la definición de equiprobabilidad, podemos argumentar que sólo es posible que ocurra en juegos de azar que cuenten con un número finito de posibilidades. Pero, ¿qué nos garantiza, por ejemplo, que los lados de un dado sean realmente iguales?. Esto debería suceder, porque en caso contrario ya no nos garantizaría la equiprobabilidad.

Sin embargo, a situaciones del mundo físico y natural, como los latidos del corazón o el color de los ojos de un individuo, no podremos aplicar el principio de equiprobabilidad, ya que las personas tienen características que las hacen diferentes y únicas, razón por la cual el término de equiprobabilidad fallaría. De esta manera la probabilidad clásica se puede estimar.

### 2.1.2 Concepción frecuencial

Para responder a situaciones en las que no se puede implementar la equiprobabilidad, existe un segundo sustento teórico que podría ayudarnos a resolver esta cuestión. Se trata de la concepción frecuencial, la cual está supeditada al número de repeticiones en que aparece un resultado. Con ello, logramos manifestar que si registramos casos, a la larga podríamos suponer cuál es el resultado más esperado. En este caso la probabilidad frecuencial se tiene que observar varios eventos para que se pueda estimar un resultado probable.

De esta manera, si registramos el color de ojos de los recién nacidos en un hospital, a la larga y a través del estudio de las frecuencias quizá podríamos suponer el color de ojos del próximo bebé que nazca, aunque esto no garantice que así sea.

Para validar los resultados obtenidos mediante la aplicación de una concepción frecuencial, preocupa el número de repeticiones que un experimento se debe llevar a cabo y que a partir de ese número quede probada su aleatoriedad.

Esto significa que para aplicar la probabilidad frecuencial en el lanzamiento de dados o monedas, el sujeto tiene que llevar a cabo varios eventos y registrar los resultados obtenidos y a partir del análisis de las frecuencias podrá estimar un próximo resultado.

En estos dos tipos de pensamiento de probabilidad podemos deducir que se identifica una propiedad objetiva que se asigna al suceso o elemento de una clase, como un color o un sexo si se tratara de una persona. Además que en la concepción clásica basta con conocer el número de resultados probables que pueden ocurrir en un evento y a partir de ello se puede estimar el resultado más probable, como en el caso del lanzamiento de un dado que se sabe que son seis los números (1, 2, 3, 4, 5 y 6) y que a cada uno le corresponde una probabilidad de  $1/6$ ; en cambio, en la frecuencial, se tienen que observar y conocer posibles resultados para determinar uno próximo, lo que significa que en un evento como en el del lanzamiento de los dados, el sujeto tiene que registrar los resultados que vaya obteniendo al lanzar y el dado, después de varios eventos, el sujeto podrá estimar cuál podría ser el próximo resultado, pero tomando en cuenta los resultados anteriores.

### 2.1.3 Concepción subjetiva

Kyburg (citado por Batanero, 1999) critica las visiones anteriores y propone una interpretación de aleatoriedad que toma en cuenta el conocimiento que posee el sujeto de la situación. Argumenta que lo que puede ser aleatorio para una persona puede no serlo para otra. La aleatoriedad no es una propiedad física objetiva, sino que tiene un carácter subjetivo.

Aparece aquí la concepción subjetiva de la probabilidad, en cuyos casos todas las probabilidades serían condicionales. La concepción subjetiva se aplica a situaciones en las que tenemos cierta información que puede modificar nuestro juicio sobre la probabilidad o la aleatoriedad de un suceso.

Es así como los pensamientos de probabilidad pueden estar influidos por el grado de conocimiento que tenga la persona hacia el fenómeno o suceso en cuestión. Por ejemplo, para una concepción frecuencial de probabilidad, tendría que observarse primero las estadísticas para ver en los registros cuántos años en promedio han vivido la mayoría de las personas, por lo que, después de haber analizado la estadística, podría aceptarse que el número de años de vida de una persona es de 60 años, si se considera como punto de partida los datos estadísticos.

Para una concepción subjetiva de la probabilidad en la que un sujeto que estudia el fenómeno, tiene referencia de la vida escandalosa, desenfrenada y sin cuidados que ha llevado una persona, estos datos pueden modificar el número asignado por la estadística, en este caso reduciéndolo; pero puede elevarlo si se sabe que la persona se cuida y vive adecuadamente.

Estas ideas, proporcionadas en los supuestos teóricos, nos hacen pensar en lo importante que es conocer su existencia, ya que el pensamiento emitido por los profesores podría referirse a alguna en particular. Aunque también podrían expresar un pensamiento diferente, o que sus argumentos no estén contemplados en algunas de las anteriores.

## **2.2 Errores más comunes en probabilidad**

Entre los pensamientos erróneos más comunes en probabilidad encontramos los siguientes sesgos: de equiprobabilidad, de representatividad y del enfoque del resultado aislado. Entendiéndose como sesgo a la forma en que interpretan el resultado de un evento y que implican en sus decisiones; es decir, de las ideas que se valen y justifican el por qué han decidido elegir ese resultado y no otro.

El sesgo de equiprobabilidad se describe como una tendencia del individuo a pensar que los eventos aleatorios son equiprobables por naturaleza (Lecoutre, 1992), esto significa que juzgan los resultados igualmente probables cuando, en realidad, sus probabilidades no son iguales. En general, es una tendencia a asignar probabilidades iguales a los eventos simples de cualquier espacio muestral. Como espacio muestral se entiende a la noción de que cada fenómeno o

experimento aleatorio tiene asociado un conjunto de posibles resultados. Un evento podrá ser considerado como cualquier experimento aleatorio, un juego de azar o simplemente un suceso determinista.

En el sesgo de representatividad, Kahneman, Slovic y Tversky (1982), encontraron que las personas, al usar la heurística de representatividad, tendían a estimar la probabilidad de un evento con base en lo bien que un resultado representa algunos aspectos de la población original. Es decir, que se tiene la tendencia a creer que los resultados de los fenómenos aleatorios deben ser parecidos al espacio muestral.

Esto significa, que creen que aun en pequeñas muestras se debe reflejar la distribución de una población o el proceso por el cual son generados los resultados aleatorios. Por ejemplo, Para saber cuántos hombres (H) y cuántas mujeres (M) pueden tener un matrimonio; muchos creen que en una familia con seis hijos es más probable que ocurra la secuencia HMMHMH, que las secuencias HHHMMM, situaciones que desde el punto de vista normativo carecen de valor ya que todas las secuencias tienen la misma posibilidad de ocurrir.

En el lanzamiento de monedas podemos encontrar otro ejemplo de este sesgo, porque al lanzar una moneda se sabe que la probabilidad de águila es la misma que la de sol e igual a un medio; el sujeto que razona con base a este sesgo de representatividad esperaría que el resultado de seis lanzamientos debería resultar tres águilas y tres soles, en forma desordenada.

Otro ejemplo de confianza en la representatividad ocurre al no tomar en cuenta el tamaño de la muestra, ya que los sujetos creen que se tiene la misma posibilidad de obtener al menos 7 bolas blancas en 10 extracciones, que 70 bolas blancas de 100, considerando que en una urna hay bolas blancas y bolas negras. La representatividad también ha sido utilizada para explicar el efecto del reciente negativo o falacia del jugador; estas personas creen que después de una serie de soles en un volado, sería más probable que cayeran águilas. Lo que implica pensar en un resultado diferente al que ha estado saliendo en más ocasiones.

Konold (1989), citado por Shaughnessy (1992), identificó que las personas usan el sesgo del resultado aislado o aproximación al resultado para interpretar probabilidades frecuentes. En general, es una tendencia a ver un resultado no como parte de un conjunto de resultados, sino como una manifestación que confirma o niega una probabilidad. En este sentido, las personas orientadas a los resultados podrían creer que su tarea es decidir correctamente el próximo resultado, en vez de estimar lo que es probable que ocurra. Así por ejemplo, al lanzar dos dados obtener una suma igual a 7 tiene la mayor probabilidad, de ahí se espera que el resultado de la experiencia sea 7; cuando se hace y no ocurre, los estudiantes afectados por el sesgo del resultado aislado dirán que algo está mal en el dado, o que 7 no tiene la mayor probabilidad, o que la teoría es contradictoria.

### **2.3 Aleatoriedad y causalidad**

Para acercarnos a una definición de la aleatoriedad es importante revisar cómo lo consideran algunos autores especialistas en el ramo. En el diccionario del uso del español de Moliner (1983, citado por Batanero, 1999:15) se encuentra la siguiente definición: “Incierto. Se dice de aquello que depende de la suerte o del azar”, y el azar es “la supuesta causa de los sucesos no debidos a una necesidad natural ni a una intervención humana ni divina”. Batanero (1999:15) explica que en esta acepción lo aleatorio sería contrapuesto a aquello de lo que se conoce sus causas, mientras que el azar personificaría una supuesta causa de los fenómenos aleatorios.

Esta idea de aleatoriedad fue reconocida y empleada desde la antigüedad hasta el comienzo de la Edad Media. Durante este tiempo la aleatoriedad se utilizaba para adivinar el futuro, tomar decisiones y en los juegos, para que nadie tuviera ninguna ventaja.

Se suponía que la aleatoriedad no podía ser controlada por los humanos. También, se creía que lo que era aleatorio para una persona lo era para cualquier otra. Nadie tenía ventaja, se creía que nadie podía prever con certeza lo que ocurriría. Era muy difícil encontrar a alguna persona que tuviera la seguridad en los sucesos. Sin embargo, creemos que muchos individuos se valían de la

credulidad de las personas para sacar provecho de la situación; en esta etapa “se consideraban adivinos y mediante la utilización de los dados y de los huesos de astrálogo se creía que podían adivinar el futuro y tomar decisiones” (Batanero, 1999:15).

Apareció también la idea de suponer que todo fenómeno tenía una causa: “Nada sucede por azar sino que todo ocurre por una razón y por una necesidad” (Leucippus, siglo V a. C., citado por Batanero, 1999:16). Así, se incorpora la idea de que lo que puede ser aleatorio para una persona puede no serlo para otra. Ante esta situación, se encuentra presente un carácter subjetivo, en otras palabras, el reconocimiento de lo aleatorio dependerá de la subjetividad de la persona.

Batanero retoma la acepción de Poincaré y manifiesta que: “El azar no es más que la medida de nuestra ignorancia. Los fenómenos fortuitos son, por definición, aquellos cuyas leyes ignoramos”. Sin embargo, al mismo Poincaré no le satisfizo esta definición, ya que existen ciertos fenómenos cuyas leyes no conocemos y que son considerados deterministas. Un ejemplo de ello es la muerte, no sabemos cuándo ni cómo moriremos pero tenemos que morir; por tanto, se puede considerar como algo que no podemos predecir tan fácilmente.

En cuanto a los fenómenos de los cuales ignoramos sus leyes, Poincaré diferencia los aleatorios o fortuitos, acerca de los cuales el cálculo de probabilidades nos informará de manera provisional, de los que no lo son, y sobre los cuales no existe posibilidad de predicción hasta que hayamos encontrado las leyes que lo rigen.

En este sentido, Ayer (1974, citado por Batanero, 1999:17) indica que un fenómeno se considera aleatorio si se comporta de acuerdo con el cálculo de probabilidades. Una causa muy pequeña determina, a veces, un efecto considerable y decimos que el resultado es aleatorio porque la predicción resulta imposible.

Con el surgimiento del cálculo de probabilidades la aleatoriedad se relaciona con la equiprobabilidad de los diferentes resultados; es decir, un fenómeno sería aleatorio si todos sus resultados son equiprobables. Esto se debe a que los primeros desarrollos teóricos se relacionaron con los juegos de azar,

donde el número de posibilidades era finito y el principio de la indiferencia podía considerarse razonable. Es decir, que el principio de la indiferencia es el desconocimiento de saber como se realiza el lanzamiento del dado, como se tira, por lo que suponemos que cada cara del dado es igual de probable (equiprobable). Por tanto, el 4 tiene una probabilidad entre seis. Por lo que deducimos que tiene  $1/6$  de probabilidad de que salga; lo que no indica que el 4 tiene que salir una de cada 6 veces. En realidad no sabemos que resultado vamos a obtener con seguridad.

Poco a poco se incluyeron en las situaciones consideradas aleatorias, no únicamente los juegos de azar, sino también fenómenos naturales, situación que permite la inclusión de la idea de independencia, que se considera un requisito imprescindible para asegurar la aleatoriedad de un suceso en experimentos repetidos. Sin embargo, el resultado de un experimento aleatorio es para Batanero (1999:18) “determinado pero desconocido, dependiente de la ignorancia del hombre”.

La idea de equiprobabilidad es muy importante para definir la aleatoriedad, como en los casos de tener una clase finita, sobre todo cuando definimos las muestras aleatorias, por ejemplo, todos los elementos tienen la misma probabilidad de ser elegidos. No obstante, cuando aplicamos la idea de probabilidad a situaciones del mundo físico o natural, como el grupo sanguíneo de un recién nacido o cualquier otra característica hereditaria, no podemos utilizar el principio de equiprobabilidad; podríamos decir, en este caso, que un objeto es miembro aleatorio de una clase si pudiéramos elegirlo mediante un método que proporcionase a cada miembro de la clase una cierta frecuencia relativa *a priori* a la larga; aquí se estaría usando una concepción frecuencial de la probabilidad, que es donde se incluye el análisis estadístico.

Kilburg (1974, citado por Batanero, 1999:19) considera que si un objeto es o no considerado miembro de una clase, depende del conocimiento que cada individuo tenga sobre el mismo. Lo que puede ser aleatorio para una persona puede no serlo para otra. En este sentido, la aleatoriedad no es una propiedad física —objetiva— sino que tiene un carácter subjetivo; y coincide con la

probabilidad subjetiva, por lo que las probabilidades serían condicionales, sobre todo en situaciones en las que tenemos más información y que pueden hacer que cambiemos nuestro juicio sobre la aleatoriedad o la probabilidad de un suceso. Generalmente hablando, la probabilidad condicional de un evento A dado otro evento E, denotada  $P(A/B)$  es la probabilidad de que el evento A ocurra cuando sabemos que el evento B ocurrió. Esta es la razón por la cual se llama condicional a esta probabilidad. La probabilidad de que el evento A ocurra está condicionada por la ocurrencia de B. Esta información adicional sobre A se incluye en el cómputo de su probabilidad condicional cuando analizamos los resultados posibles que se pueden observar cuando sabemos que B ha ocurrido.

Entre los modelos básicos de procesos que se emplean para generar secuencias aleatorias, se encuentran los dispositivos físicos, como elegir a ciegas una bola de una urna llena de bolas de distintos colores. Dispositivos como dados, ruletas, tómbolas con fichas, integran un sistema antiguo, familiar y natural de obtener resultados aleatorios; este método también se emplea en clase con los alumnos, aprovechando el interés que muestran hacia los juegos de azar.

## **2.4 Nociones de combinatoria**

Piaget e Inhelder (1951) consideran que el desarrollo de la idea de azar en el niño es complementario al que realizan para el de la relación causa-efecto. Para estos investigadores, sin la comprensión de la causación, no hay un marco de referencia para identificar los fenómenos aleatorios; ellos creen que no es sino hasta la etapa de las operaciones concretas cuando los niños pueden comprender la idea de azar.

Los autores citados incluyen la idea de que cada caso aislado de un evento es indeterminado o imprevisible, pero que si se conoce el conjunto de posibilidades, se puede volver previsible. Para conocer las posibilidades se retoma el razonamiento combinatorio, que nos permite obtener todos los resultados posibles.

A través de la combinatoria se encuentra el número total de posibilidades que tiene un evento. En este sentido, la combinatoria puede concebirse como una

técnica de recuento que permite calcular el número de resultados viables que pueden obtenerse en un evento, con lo cual es posible identificar los casos favorables, relacionándola así con la probabilidad de ocurrencia de ese caso. También puede utilizarse para tomar una decisión con respecto al caso que más nos favorezca.

Las operaciones combinatorias pueden definirse mediante experimentos aleatorios, que pueden incluir las características siguientes: extracción con o sin remplazamiento, ordenada o no ordenada. Esta conexión entre los experimentos compuestos y la combinatoria se clarifica con el uso del diagrama de árbol.

El diagrama de árbol es una representación icónica fundamental, porque en éste se observa la estructura multipaso del experimento completo. Por ello, las operaciones combinatorias, más que ser algoritmos de cálculo de probabilidades en espacios probabilísticos complejos, proporcionan una interpretación clara de la estructura interior de los experimentos y el encadenamiento de sucesivos experimentos en un complejo mayor.

Leffin (1971, citado por Shaughnessy, 1992:51) encontró en su estudio evidencias de que los estudiantes no siempre lograban aplicar con éxito la información de un espacio muestral descrito en forma correcta para calcular las probabilidades y, por tanto, sólo exhibían una comprensión parcial del concepto de un modelo de probabilidad. Leffin también identificó que el concepto de combinaciones era de difícil comprensión para un niño en los grados 4-7.

Así, la combinatoria como técnica de conteo, puede ser aplicada y útil para el cálculo de probabilidades.

## **2.5 Investigaciones en estocástica**

La estocástica es un término europeo que incluye probabilidad y estadística. Razón por la cual, las intuiciones, los prejuicios, las interpretaciones erróneas, los malos entendidos y las explicaciones no normativas son temas abundantes en la investigación del aprendizaje de la probabilidad y estadística.

Se sabe que los psicólogos (cognitivos, del desarrollo y conductistas) fueron los constructores de teoría estocástica y la mayoría procede de Europa, ya que en

Norteamérica las investigaciones en este campo por parte de los educadores matemáticos han sido escasas.

En México existen estudiosos que se han encargado de hacer investigación en probabilidad, como son los casos de Sánchez (1996) con la investigación: *Conceptos teóricos e ideas espontáneas sobre la noción de independencia estocástica en profesores de bachillerato: un estudio de casos*; Alatorre (1991), *Los contextos, las creencias y las intuiciones: acerca de Cobb, Tversky y Kahneman*; Castro (1993), *Conflictos cognitivos en la adquisición de conceptos de probabilidad*, entre otros. En mayor medida proceden del departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV, perteneciente al IPN.

La probabilidad y estadística son importantes para el manejo de datos y la toma de decisiones, por lo que han sido incorporadas al *currículum* de la escuela primaria en México; los contenidos propuestos implican en su desarrollo que los estudiantes adquieran elementos que les permitan tomar decisiones.

A pesar de ello, al poner en práctica las actividades para abordar los contenidos propuestos, éstas no han logrado obtener resultados significativos. Hasta el momento la mayoría de los profesores dan poca importancia al estudio de la probabilidad y estadística. Esto hace que los estudiantes también consideren de poca relevancia a esta área notable de la matemática.

Desde 1989, en los estándares publicados por el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM), ya se recomendaba introducir un número significativo de conceptos estocásticos en los diferentes grados escolares.

Respecto al estado actual que guarda la estocástica en escuelas y universidades, se tiene constancia de que aparece desde hace tiempo como parte integral del *currículum* de matemática en la mayoría de los países europeos. En Estados Unidos no se considera una de las principales corrientes en la matemática escolar. Un estudio demostró que sólo 2% de los estudiantes estadounidenses egresados de la universidad han tomado un curso de probabilidad y estadística, aunque 90% de ellos cursaron estudios de álgebra (De Beres: 1988, citado en Shaughnessy: 1992).

Asimismo, en las escuelas secundarias de Estados Unidos, Shaughnessy (1992:4) menciona que “la probabilidad y estadística se trata de manera superficial; incluso, algunos maestros están tentados en omitirla porque muchos estudiantes no la eligen dentro de las opciones. Esta situación es desafortunada ya que la probabilidad y estadística es una ciencia matemática importante para todos los estudiantes, que puede servirles para tomar decisiones”.

Al revisar los estudios sobre estocástica, y de acuerdo con Shaughnessy (1992:17), encontramos dos tipos de estudio: el primero investiga las ideas e intuiciones primitivas de la probabilidad y la estadística, los conceptos erróneos, las falacias en el razonamiento y los sesgos en los juicios. El segundo tipo de investigación se preocupa por influir en las ideas o pensamiento, incluso en modificarlos si es posible.

En este sentido, los psicólogos tratan de influir en la forma de pensar de la gente por medio de la manipulación de tareas que les presentan. De hecho, algunos se han interesado en los temas de entrenamiento específico en el razonamiento estocástico (Nisbett, Fong, Lehman y Chang: 1987; Well, Powatsek y Óbice, 1990, citado en Shaughnessy, 1992:17).

Por otra parte, los educadores matemáticos han encontrado que es importante tomar en cuenta las ideas estocásticas previas de los estudiantes antes de intentar enseñarles los conceptos matemáticos de probabilidad y estadística.

Garfield (1988, citado en Shaughnessy, 1992:5) enuncia cuatro temas que obstruyen la enseñanza efectiva de la estocástica:

- El papel de la probabilidad y la estocástica en el *currículum*.
- Los vínculos entre la investigación y la instrucción.
- La preocupación de los maestros de matemáticas.
- La forma en que actualmente se evalúa el aprendizaje.

Asimismo, en el NCTM, en *the teaching and assessing of mathematical problem solving* durante 1989 (Shaughnessy, 1992:6), expresan las siguientes preocupaciones:

- Dificultades al evaluar la resolución de problemas matemáticos (Marshall, 1989).

- Dificultades de cambiar las creencias y los conceptos de los maestros (Thompson, 1989).
- Importancia de hacer conexiones y vínculos entre la investigación y la instrucción (Carpenter, Lester, 1989).

Existe una relación entre la enseñanza de la probabilidad y estadística con las dificultades para la resolución de problemas; esta situación ha sido planteada por Shaughnessy (1992:6), quien indicó que la enseñanza y el aprendizaje de la estocástica “implican la construcción de modelos de fenómenos físicos, el desarrollo y el uso de estrategias, tales como: las estrategias de simulación y muestreo, y la evaluación de varios y diferentes acercamientos a los problemas para monitorear posibles ideas y representaciones equivocadas”.

White (1974), McKinley (1960) y Shulte (1968) “encontraron que los logros de los estudiantes en cuanto a los conceptos de probabilidad aumentaron de manera significativa después de una unidad de probabilidad. Se determinó que el avance en probabilidad se relacionaba con la habilidad para los cálculos, apropiación de los conceptos, comprensión de la lectura, habilidades en el lenguaje y el avance general en matemáticas” (Citados por Shaughnessy, 1992:52).

Fischbein y sus colegas fueron los primeros en informar de los grandes cambios en las intuiciones y los conceptos acerca de la probabilidad durante la instrucción. Cuando los niños, incluso los de edad preescolar, recibían instrucción de tipo Piagetiana, con tareas de razón de probabilidad, mejoraron sus predicciones de los resultados. También se observó mejora cuando se impartió una instrucción acerca de las tareas de estimación de combinatoria (Fischbein *et al.*, 1991).

Konold (1993) menciona que: “Mucho antes de su introducción formal a la probabilidad, los estudiantes se han enfrentado a innumerables situaciones relacionadas con la incertidumbre y han aprendido a utilizar palabras tales como probable, azar, independencia, suerte, oportunidad, justo, improbable. Tienen un entendimiento coherente que les permite verbalizar oraciones con esas palabras, comprensibles para los demás en situaciones cotidianas. Es dentro de esta

maraña de resultados que los estudiantes intentan integrar y así dar sentido a sus experiencias en el salón de clase”.

Konold (1993) considera que los estudiantes pueden confrontar y superar sus ideas erróneas en estocástica, a través de la siguiente estrategia de instrucción. Solicitar a los estudiantes que: “Verifiquen si sus ideas coinciden con la de los demás; verifiquen si sus ideas son consistentes con sus propias ideas acerca de otras cosas relacionadas y verifiquen si sus ideas van de acuerdo con la evidencia empírica”.

## **2.6 Enseñanza de la probabilidad en el currículo**

Al revisar el Plan y Programas de Estudio 1993 (SEP, 1993), considerado el documento que contiene la información más reciente en cuanto a los cambios curriculares, encontramos que presenta la siguiente información respecto a la enseñanza de la probabilidad en la escuela primaria.

Los temas de probabilidad se ubican en el eje temático denominado “Predicción y azar” y su enseñanza se inicia a partir del tercer grado de primaria, con un tratamiento didáctico efectuado mediante la intuición y situaciones de juego.

Con las actividades que se efectúan en el eje de predicción y azar, se pretende introducir a los estudiantes en la reflexión de situaciones en las que es posible saber lo que va a pasar y en otras en las que no hay ninguna posibilidad de saberlo; con relación a esto en el libro para el maestro de tercer grado, puntualiza: “Esto sin precisar que, en algunos casos, el no saber puede deberse a la falta de información, mientras que en otros no es posible obtener la información porque se está, precisamente, en situaciones de azar” (SEP, 1999a:38).

Una estrategia que se sugiere en la enseñanza de la probabilidad, es que se aborde el eje de predicción y azar tomando en cuenta algunos juegos para que los niños observen sus características y los analicen mediante preguntas como la siguiente: ¿Se gana porque se tiene una estrategia o por pura suerte?

En el libro de texto de matemáticas de tercer grado en las páginas 64, 96 y 144, se encuentran juegos que permiten cubrir los objetivos planteados en esta

interrogante como: la lotería, el gato, carrera a diez, el dominó o adivinar el número (SEP, 1999c).

La palabra *azar* se introduce hasta el final del tercer grado, para caracterizar algunos juegos en los que interviene únicamente la suerte del jugador (dados, lotería), a diferencia de otros en los que es necesaria la habilidad del jugador (canicas, trompo).

En este grado, el término *azar* se puede asociar con la palabra suerte que manejan los niños, mientras que el *no azar* se refiere a los juegos en los que siempre hay una estrategia para ganar (SEP, 1999c:38).

Se debe puntualizar que no todos los juegos son de azar, ya que en los que interviene una estrategia para ganar, si ésta es descubierta el juego ya no permitiría alguna duda para ganarlo; este tipo de juegos no son de azar.

Ante ello, reconocemos que según el Plan y Programas de Estudio 1993 (SEP, 1993), el concepto central para desarrollar en el tercer grado es el *azar*, y se debe distinguir entre *hechos y sucesos en situaciones sencillas en las que no interviene el azar*, para compararlos con situaciones en las que sí interviene. Es decir, que el niño tiene que distinguir entre resultados que se puedan predecir con seguridad y resultados azarosos.

El reconocimiento del alumno sobre la imprevisibilidad de un resultado en una experiencia no constituye una comprensión. Para Piaget, “la comprensión del azar presupone la apreciación del carácter irreversible de una mezcla, y, por tanto, la posesión de un esquema combinatorio” (Godino, 1987:54). En este caso, la mezcla sucede cuando se revuelven bolas de varios colores. Por ejemplo, si presentamos al niño una bandeja con dos compartimentos, uno con ocho bolas rojas y el otro con ocho bolas negras, al inclinar la bandeja se produce una mezcla de las bolas; si preguntamos al niño qué pasa si volvemos la bandeja a su posición original, los niños pequeños nos dirán que las bolas vuelven a su estado original, o que todas las blancas ocuparán el lugar de las rojas, en estas respuestas se observa que no comprenden la naturaleza irreversible de la mezcla aleatoria lo cual les impide una apreciación del azar.

Esta misma idea nos permite suponer que Piaget habla de que el azar es reconocido si el niño lo conceptualiza como el resultado de una interacción de procesos independientes. Él sostiene que lo anterior requiere de un pensamiento formal y de una base combinatoria; de otro modo, sería difícil que el niño comprenda que hay fenómenos en que no se puede predecir el resultado.

En un experimento como el que propone Piaget, una vez que el niño se haya convencido de que no puede predecir un resultado, podría preguntársele si cree que alguien más puede predecirlo; esto aportaría información acerca de la *objetividad* que el niño atribuye al azar.

En cuarto grado (SEP, 1999b:49) se introduce la noción de mayor o menor probabilidad de que ocurra un evento y por qué sucede esto; como en el caso de *canicas de colores* de la página 114, donde se analiza la posibilidad de sacar de una caja una canica de un color determinado.

En este grado se debe dar mucha importancia al término *azar*, por lo que habrá que realizar situaciones en las que intervenga dicho término para que el niño pueda comprenderlo de la mejor manera posible. En este mismo grado se introducen tres aspectos importantes que ayudarán a la construcción de las nociones de probabilidad: primero, la *representación* como un instrumento que proporciona conocimientos de las experiencias aleatorias; segundo, la asociación de expresión de *lenguaje* común en situaciones de tipo probabilístico; y, tercero, la *experiencia* del niño en situaciones de juego.

Esto se puntualiza en el libro para el maestro al enunciar que: “El registro de las diferentes posibilidades en un juego de azar y la comparación de los registros y respuestas entre los compañeros es importante para que el alumno intuya la posibilidad de predecir, o instrumentar una manera para ganar el juego” (SEP, 2002a:49).

Consideramos que el concepto de *registro de resultados* es difícil de comprender. Para su comprensión, creemos que se debe repetir varias veces un experimento en condiciones similares, de manera que los alumnos observen los resultados y los identifiquen para que después puedan representarlos.

En quinto grado (SEP, 2002b) aparece el trabajo con las *permutaciones*, la *resolución de problemas de conteo* y la *realización de experimentos aleatorios*, aproximándose a la cuantificación de la probabilidad al identificar la mayor o menor probabilidad de que ocurra un evento. En este grado se sugiere plantear juegos de azar simples, con dados y monedas, que posibiliten el desarrollo del pensamiento probabilístico del alumno, el ejercicio de la intuición en relación con los fenómenos aleatorios y el enfrentamiento con la necesidad de cuantificar la predicción.

En las intenciones didácticas propuestas en el libro para el maestro se menciona: “Analizar diversos tipos de información y utilizar diagramas de árbol para organizar y cuantificar las combinaciones posibles” (SEP, 2002b:46).

Se sugiere que los alumnos interactúen con la finalidad de encontrar las combinaciones en los problemas planteados, cuyas variables *contexto*, *cantidad* y *tipo de datos* permiten responder a situaciones con diferentes grados de dificultad.

La actividad promueve el uso de diagramas de árbol como una herramienta que permite encontrar de manera más rápida el número total de combinaciones posibles. Asimismo, se promueve en las lecciones el uso de tablas de doble entrada con el fin de organizar las combinaciones que se pueden establecer entre los elementos de dos conjuntos. Se sugiere emplear material concreto que sirva de apoyo a los estudiantes al momento de hacer las combinaciones.

Las nociones de *experimento* y *suceso aleatorio* así como el carácter imprevisible del azar son reforzadas mediante experimentos efectuados en el lanzamiento de dados, monedas y juegos con ruletas. Tales experimentos sirven además para adquirir en forma progresiva la noción de probabilidad a partir de las frecuencias de los eventos. En el libro para el maestro se enuncia la intención didáctica como sigue: “Descubrir que la probabilidad de un evento en una situación aleatoria depende del número de veces que se repite en relación con el total de eventos” (SEP, 2002b:106).

En las actividades propuestas en el libro de texto de quinto grado se implica el contenido *análisis de resultados posibles* y *de casos favorables*; para ello, se sugiere el uso de cubos de colores para su desarrollo, se trata de que el

estudiante analice los casos posibles de un evento que permitan predecir el resultado, elaborar diagramas de árbol para verificar las predicciones y cuantificar las posibilidades reales de que suceda un evento determinado en una situación azarosa (SEP, 2002b:136).

En quinto grado también se introducen problemas *combinatorios* asociados a las listas de resultados de una experiencia. Es decir, se comienza a prefigurar el concepto de *espacio muestral* y se continúa el uso de representaciones, pero ahora para describir listas de posibilidades de un resultado.

Hay una diferencia en las listas que resultan de la repetición continua de una experiencia y la lista de los posibles resultados de la experiencia. La primera se asocia con *la frecuencia relativa* y la segunda, con el *espacio muestral*. Se comienza a trabajar el concepto de evento y se ponderan las probabilidades de eventos, para su desarrollo se sugiere el uso de ruletas y de dados.

En sexto grado se profundiza el trabajo de la probabilidad con el propósito de que los niños desarrollen la idea de azar mediante experimentos aleatorios y diagramas de árbol, así como otras técnicas sencillas de la combinatoria para enumerar casos (SEP, 1993:70).

Se sugiere que al realizar experimentos como el lanzamiento de dados, volados, giros de ruletas y extracción de urnas, los alumnos tengan una clara noción de *experiencia aleatoria*, que exploren el carácter imprevisible del azar y que observen la aparición de regularidades en experimentos repetidos. Esto les permitirá desarrollar nociones para estudiar la fórmula clásica de la probabilidad y la noción frecuencial de la probabilidad.

En este grado se profundiza en el desarrollo de las capacidades de los alumnos en cuanto a la predicción de resultados, la noción de frecuencia y el uso de recursos para organizar y representar los resultados obtenidos. En el libro para el maestro se señala así la intención didáctica: “Predecir los resultados de un juego de azar. Registrar en tablas y gráficas los resultados del juego para analizar la frecuencia de los eventos” (SEP, 2003:44). Para exponer este contenido se propone la lección “El juego disperejo”, que trata de que los niños anticipen y justifiquen los posibles resultados del juego de azar, lo cual favorecerá la

construcción de hipótesis que los alumnos podrán verificar durante el desarrollo y al final del juego.

Para abordar problemas de combinatoria se propone “usar el diagrama de árbol como recurso para contar todos los casos posibles en problemas de combinatoria. Inferir la regla que resuelve este tipo de problemas” (SEP, 2003:86). Las actividades propuestas en el libro de texto permiten a los estudiantes reflexionar y apropiarse de ideas que les faciliten la resolución de problemas de combinatoria; en el desarrollo de las actividades se sugiere que haya una interacción dinámica entre los estudiantes, a través de la cual confronten sus puntos de vista y construyan conocimientos respecto a la combinatoria.

Hemos dado cuenta de cómo el Plan y Programas de Estudio 1993 y los libros para el maestro recomiendan que se debe trabajar la probabilidad. En ellos se manifiesta que ésta se debe abordar de manera gradual, aunque en el paso de un grado a otro se pierde la secuencia, ya que no se profundiza en los temas anteriores, sino que se dan como “comprendidos”.

Es decir, que en el grado siguiente la probabilidad ya no se toma de la misma forma que en el año anterior. Por ejemplo, en el tercer grado se inicia con la realización de juegos para observar e identificar si se trata o no de un juego de azar; en cuarto grado se trabaja con los juegos de azar y se inicia con el registro de los sucesos; en quinto grado se pasa de los registros a la combinatoria y uso del diagrama de árbol, donde los niños hacen combinaciones; y en sexto grado se trabaja el diagrama de árbol, que si bien esta situación se inicia en quinto grado pero se profundiza en el siguiente grado.

Los conceptos de *frecuencia* y *frecuencia relativa* se introducen de manera directa en sexto grado. Es decir, que los términos se explican en el libro del alumno, dando un concepto de los mismos.

Creemos que la probabilidad proporciona una excelente oportunidad a los estudiantes para matematizar, de crear herramientas matemáticas que les permitan estudiar un fenómeno o una situación que no sea propiamente del campo de las matemáticas. Por eso es importante que la escuela primaria oriente y enseñe a los educandos a discutir, argumentar sus predicciones y contestarlas

con lo que realmente sucede. Es decir, que se les enseñe a ser dueños de su propia certidumbre, y con ello puedan tomar mejores decisiones.

## **2.7 Concepciones de probabilidad de los niños.**

### **Una revisión psicológica y pedagógica**

Anne S. Hawkins y Armes Kapadia (1984) realizaron la investigación acerca de las concepciones de probabilidad de los niños, éstos identificaron en ella varias preguntas clave acerca del entendimiento de probabilidad de los niños. Asimismo, presentan definiciones de probabilidad y hacen un recuento de los diversos usos que le han dado los investigadores a esta terminología. Hacen además un reconocimiento acerca del poco uso que ha tenido la probabilidad en el campo de la psicología y la pedagogía, por lo que aseveran que ha sido insuficiente para entender con claridad la probabilidad.

Al igual que estos investigadores, consideramos que la enseñanza de la probabilidad no se ha desarrollado con bases y sustentos psicológicos ni pedagógicos que se orienten a la obtención de aprendizajes significativos, ni tampoco que exista una estrategia determinada que se ponga en práctica al enseñar la probabilidad.

Hawkins y Kapadia (1984) consideran que la probabilidad está dividida en los siguientes tipos:

- a) Probabilidad *a priori*. Se considera como la obtenida haciendo una suposición de probabilidad igual en el mismo espacio, a la que también se le puede llamar probabilidad teórica o clásica.
- b) Probabilidad frecuencial. Es la probabilidad calculada a partir de las frecuencias relativas obtenidas de resultados diferentes en ensayos repetidos.
- c) Probabilidad subjetiva e intuitiva. Considera que a una magnitud mayor o menor, la probabilidad es una expresión de creencia personal o percepción.
- d) Probabilidad formal. Este tipo de probabilidad se calcula usando las leyes matemáticas de probabilidad.

La probabilidad subjetiva da juicio para tener una relación con la evidencia, cuando no hay un acercamiento formal. En este tipo de probabilidad no hay

respuesta buena ni mala, por tanto, los defensores de esta idea dicen que la probabilidad subjetiva no sería un tema de enseñanza.

Hawkins y Kapadia (1984) no coinciden con la idea de dar un juicio de probabilidad con base en la mayor o menor probabilidad de lo correcto; consideran que los juicios de probabilidad subjetiva e intuitiva se empiezan a manifestar mediante los juicios personales; es decir, que forman parte del proceso de construcción de la probabilidad. Los autores citados consideran que la probabilidad subjetiva podría ser la adecuada para trabajar la probabilidad en las escuelas, ya que para la enseñanza de la probabilidad formal creen que se requiere de algún conocimiento de las fracciones, en tanto que la probabilidad subjetiva podría ser más accesible a los niños y quizá manejada con mayor facilidad que la formal.

En esta investigación se enfatiza que no existe una técnica que obtenga de manera satisfactoria los datos precisos que ayuden a entender la naturaleza exacta del desarrollo que implican los niños en el entendimiento de la probabilidad. No se ha logrado postular un instrumento que dé cuenta cabal de los procesos que siguen los niños para aprender la probabilidad.

Entre los investigadores que se han dedicado al estudio del desarrollo de la cognición de la probabilidad, encontramos que Piaget e Inhelder (1951) plantean en su estudio que los niños tienen que atravesar por un periodo de desarrollo para que comprendan la idea de azar; en cambio, Fischbein (1975, citado por Batanero, 1998, 89) enfatiza el uso de la instrucción a través de la intuición para acceder a la comprensión del azar. Esta situación la hace contraria a la postulación de Piaget, ya que Fischbein no considera las edades para acceder a un conocimiento probabilístico, y cree que niños de edades pequeñas pueden tener un razonamiento probabilístico al hacer uso de las intuiciones.

Resulta interesante tener idea de la postulación de Piaget en cuanto a los estadios de desarrollo y cómo los sujetos atraviesan por ellos; saber qué pueden hacer y comprender los niños de diferentes edades con respecto a la probabilidad, nos puede ser útil a los profesores para el diseño de actividades cuyo grado de dificultad corresponda a la etapa en la que se encuentra el estudiante.

La postura de Fischbein con relación al uso de la intuición de los niños para comprender los aspectos de la probabilidad, también nos parece relevante, ya que al ser empleada por los maestros en la instrucción, los niños podrán, a través de la intuición, poner en práctica las hipótesis que tengan sobre las nociones, con lo cual tendrán un mayor acercamiento a lo que se persigue en la escuela.

Algunas teorías psicológicas enfatizan que el hombre es capaz de hacer juicios de probabilidad desde pequeño. Por ejemplo, la teoría de la información plantea a menudo que el hombre presupone que la propia información es estocástica. Predice con cierto grado de certeza o indica que el proceso de esa información será probabilística. Estes' (1950, citado por Hawkins y Kapadia, 1984) indicó que la teoría del aprendizaje es un buen ejemplo del modelo matemático del desarrollo cognitivo, basado en la facilidad clara del hombre para hacer inferencias en la estadística, al probar la repetición de los elementos en su ambiente para derivar conceptos.

Los niños en edades tempranas pueden manifestar ideas estocásticas a través de un lenguaje probabilístico construido a su manera debido a la facilidad que tienen de desarrollar el lenguaje. Esta situación muestra que los pequeños son capaces de generar nuevas formas lingüísticas para referirse a las cuestiones probabilísticas que reflejan el modelo, pero no necesariamente la naturaleza exacta del lenguaje que han visto u oído.

La teoría de la comunicación (Kapadia, 1984) asume que el hombre percibe sólo un pequeño fragmento de la información disponible, mientras que la parte perdida lo hace por conjetura a través de una presunción fundada en probabilidades. Estas suposiciones reflejarán las expectativas subjetivas, porque los mensajes variarán en la redundancia e incertidumbre.

Nos parece interesante esta apreciación, ya que en el aula el maestro tendrá que comunicar ciertos mensajes, pero al no contar con la información completa, tendrá que recurrir a otras situaciones que reforzarán su comunicación, implicando para ello el uso de una información probabilística que hará más entendible lo que quiere comunicar.

Kapadia (1984) menciona que: Un niño puede hacer sus juicios de predicción en la incertidumbre y, aún más, podría procesar la probabilidad de una mejor manera, en la medida en que razone la probabilidad como una habilidad cognoscitiva fundamental. Esta idea puede permitirnos determinar cómo se desarrollan los conceptos de probabilidad y cómo se pueden adoptar.

Las inferencias que el hombre realiza en las ciencias naturales y sobre su medio ambiente son inductivas. Las generalizaciones que efectúa de las cosas van más allá de las evidencias que tiene o que puede tener con la experiencia directa. El hombre puede pensar cómo razonar por los principios hipotéticos-deductivos, mientras predice los eventos de manera alternada y los verifica para confirmarlos o también para decir cuándo está disconforme con los resultados. Los juicios de probabilidad serán entonces fundamentales en la adaptación del hombre, desde que las predicciones se basan en una necesidad de extrapolación de las frecuencias observadas.

De acuerdo con las postulaciones teóricas dadas por Fischbein, quien difiere con las proporcionadas por Piaget, consideramos que los niños pueden entender la probabilidad en edades tempranas, sobre todo si se les provee un proceso de instrucción que genere en ellos la oportunidad de conocer más abiertamente las situaciones de probabilidad que los conduzcan a utilizar y operar con los términos de predicción y oportunidad.

Resaltamos la importancia de entender la propuesta de Fischbein: si tomamos en cuenta en nuestra práctica docente el uso de la instrucción para favorecer la construcción de ideas probabilísticas en los niños, podría ayudar a realizar procesos más productivos con el propósito de que el estudiante se apropie de ideas probabilísticas que le permitan conocer dónde y cuándo se pueden utilizar en el mundo cotidiano.

Fischbein (1975, citado por Batanero, 1998) puntualizó que las habilidades de la cognición probabilística que tienen los niños pequeños pueden modificarse y desarrollarse a través de la instrucción. En cambio, las postulaciones realizadas por Piaget e Inhelder (1951) no indican qué puede hacerse para favorecer la construcción de las nociones probabilísticas en los niños; sólo presentan las cosas

que no pueden hacer, ya que enuncian que los conceptos probabilísticos pueden realizarse hasta que los niños se encuentren en la etapa de las operaciones formales. Sin embargo, consideramos que si no enseñamos a los pequeños situaciones de probabilidad, menos podrán hacerlas.

Las investigaciones realizadas por Shaughnessy (1981) describen las visiones más interesantes de cómo los alumnos perciben y actúan en situaciones de probabilidad. Muestra sugerencias útiles para que se utilicen en el aula, pero no indica cómo se deben emplear. Por ejemplo, el concepto de representatividad surge de un punto de vista psicológico, nos indica que una persona basa sus resultados en la opinión que se tiene con respecto a un evento particular; es decir, que este tipo de personas que basan sus juicios en la representatividad, estimarían la probabilidad de un evento con base en lo bien que un resultado representa algunos aspectos de la población original.

En las investigaciones referidas a la probabilidad, en este apartado se han abordado tres aspectos interesantes:

1. El proceso de desarrollo del concepto de probabilidad (Piaget e Inhelder, 1951). El proceso de desarrollo se ha explorado por medio del comportamiento que manifiestan las personas como una función de la edad.
2. La posibilidad de modificar el concepto de probabilidad que las personas adquieren (Fischbein, 1975). En los experimentos explora el papel del premio, del castigo o de la instrucción.
3. Los conceptos erróneos y el uso de estrategias que se examinan en los experimentos de probabilidad, se identifican a través de los efectos de la recencia negativa o falacia del jugador y el análisis secuencial de las contestaciones que dan los sujetos en los eventos que se realizan (Shaughnessy, 1983).

## CAPÍTULO 3

### EL PROCESO METODOLÓGICO

Este capítulo detallará cómo desarrollamos el estudio: la construcción del diseño de la investigación, la revisión de la literatura, la obtención de los datos empíricos, el análisis de los datos y el proceso que asumimos en la sistematización de los datos y la construcción del presente reporte.

#### 3.1. El diseño de la investigación

Inicialmente, el estudio se planteó con el problema de indagar cómo los docentes de primaria trabajan la enseñanza de la probabilidad. Nos interesaba tomar en cuenta dos aspectos importantes de la práctica de los profesores: por un lado, saber sus conocimientos de probabilidad y por otro, las estrategias didácticas que emplean.

Pensábamos que al conocer las nociones de probabilidad de los maestros, podríamos averiguar también algunas de sus carencias, creencias, pensamientos y concepciones erróneas que tienen sobre el tema. Asimismo, conoceríamos el pensamiento y creencia del profesor acerca de cómo aprende el niño las nociones de probabilidad, y los recursos con los que cuenta para llevar a cabo la enseñanza. Pero mediante la revisión de la literatura, así como la reflexión del estudio realizado, poco a poco nos dimos cuenta de que esta primera intención era muy amplia.

El proceso de reflexión que efectuamos nos permitió delimitar los cuestionamientos, hasta centrar la idea en el estudio del pensamiento que posee el profesor en cuanto a nociones de probabilidad.

Precisamente la revisión de la literatura nos permitió efectuar un diseño de investigación apropiado al estudio elegido, por lo que nuestros cuestionamientos centrales quedaron integrados en dos preguntas centrales.

- ¿Qué nivel de pensamiento muestran los profesores de educación primaria de una región del estado de Chiapas respecto a las nociones básicas de probabilidad?
- ¿De qué forma éstos profesores de educación primaria en servicio interpretan la información probabilística propuesta oficialmente en el programa y en los textos de matemáticas?

La investigación se realizó en dos etapas; la primera con la intención de conocer el nivel de pensamiento de los profesores al resolver cuestionamientos acerca de nociones básicas de probabilidad y fenómenos de azar. Esta información se obtuvo al aplicar un cuestionario que involucró preguntas acerca de probabilidad y fenómenos de azar. Los resultados obtenidos en esta etapa se presentan en el capítulo 4 titulado: Pensamiento de los profesores sobre probabilidad, combinatoria, variación, aleatoriedad y juegos de azar.

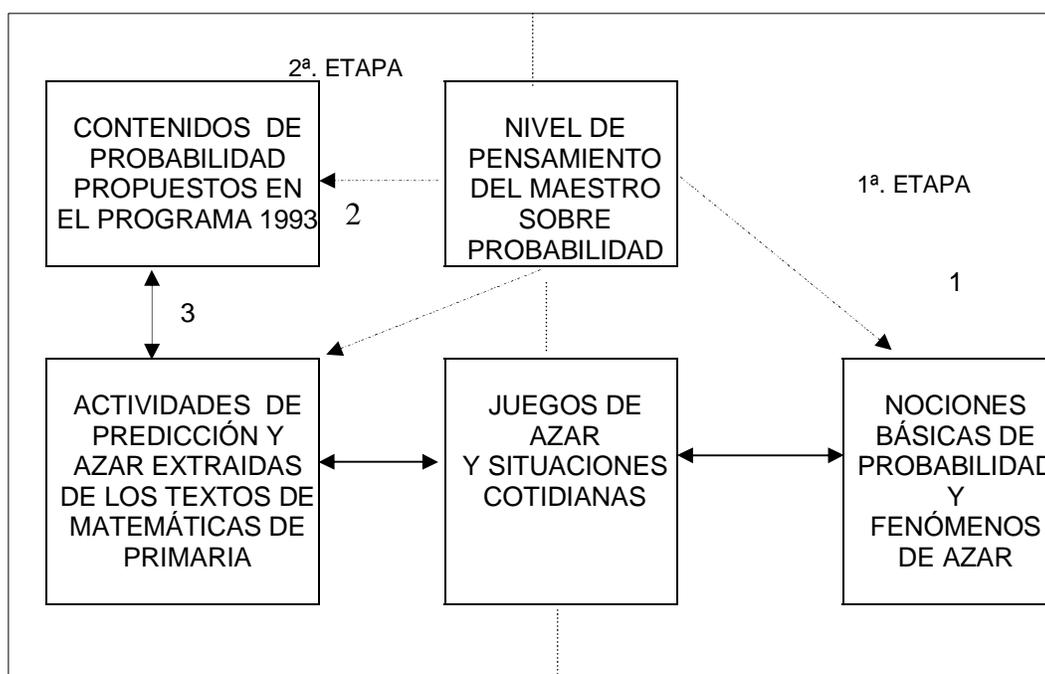
La segunda etapa de la investigación se llevó a cabo en dos momentos, el primero al aplicar un cuestionario que presentó a los profesores 10 contenidos que se trabajan en el eje de predicción y azar en la escuela primaria, 7 de éstos fueron retomados del Plan y Programas de estudio 1993 y los 3 restantes fueron propuestos por el investigador por considerar relevante conocer qué piensan los docentes respecto de los conceptos de evento, espacio muestral y fenómeno aleatorio. El propósito era saber de qué manera interpretan los contenidos y qué tipo de problemas sugieren para desarrollar en la práctica.

El segundo cuestionario implicado en esta segunda fase fue construido con 10 actividades extraídas de los libros de texto gratuito de matemáticas de educación primaria y propuestas para abordar el eje temático de Predicción y azar. La intención era conocer cómo interpretan los profesores de primaria en servicio la

información probabilística que les proporcionan las actividades contenidas en los libros de texto oficiales.

La información proporcionada por los profesores al resolver los cuestionarios aplicados en las dos etapas de la investigación, nos aportaron elementos necesarios para ubicarla en el nivel de pensamiento que el maestro muestra en cada idea enunciada en su respuesta. Para caracterizar el nivel de pensamiento del profesor utilizamos las jerarquías propuestas por Biggs y Collis (1991), señaladas como preestructural, uniestructural, multiestructural y relacional.

El cuadro 1 muestra las etapas que se desarrollaron en la investigación para obtener la información.



CUADRO 1: LAS ETAPAS COMPRENDIDAS EN EL ESTUDIO

### 3.1.1. La primera etapa del estudio

Para obtener la información que nos permitiera caracterizar el nivel de las nociones básicas de probabilidad del profesor de educación primaria, consideramos retomar el cuestionario que aplicó Pilar Azcárate Godet (1996), en el estudio denominado el conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad, en el caso de la educación primaria. El propósito de este estudio fue realizar una caracterización de las diferentes

tipologías de concepciones de probabilidad detectadas en un grupo de futuros profesores. Los resultados del estudio realizado por Azcárate muestran los siguientes tipos de concepciones: las explicaciones causales como eje del razonamiento probabilístico, la indecisión ante la incertidumbre, el poder del determinismo, la duda ante la incertidumbre, y abriendo pasos a la incertidumbre.

Utilizamos el cuestionario empleado por Azcárate porque consideramos que contenía los planteamientos suficientes para identificar el tipo de pensamiento del maestro de educación primaria respecto a nociones básicas de probabilidad. Cambiamos el contexto de algunas preguntas del cuestionario, ya que tomaban como referencia al país de España, y el nuestro fue aplicado a 14 profesores de educación primaria que trabajan en la región centro del estado de Chiapas, México.

El cuestionario aplicado a los maestros (ver anexo 1) se integró con preguntas que nos proporcionaron información acerca de:

- El concepto de probabilidad de los profesores.
- La interpretación de probabilidades en una situación de 'pronóstico' del tiempo.
- Uso del razonamiento combinatorio.
- Comprensión de la variabilidad en función del tamaño de las muestras.
- El juego de los dados: utilización de la teoría laplaciana.
- Reconocimiento de los profesores de sucesos aleatorios.
- Caracterización de los fenómenos aleatorios.
- Fenómenos aleatorios considerados por los profesores.
- Fenómenos no aleatorios considerados por los profesores.
- Qué significa el azar para los profesores.
- Interpretación y valoración de los fenómenos (aleatorios y deterministas).

### 3.1.2. La segunda etapa del estudio

Para obtener información de cómo interpretan los profesores de primaria los contenidos de probabilidad e identificar su nivel de pensamiento con base en sus

respuestas, se diseñó un cuestionario estructurado por 10 contenidos: 7 de ellos propuestos en los programas de educación primaria, se retomaron contenidos de tercero, cuarto, quinto y sexto grado; 3 fueron sugeridos por el investigador para rescatar el pensamiento del profesor acerca de las nociones de evento, espacio muestral y fenómeno aleatorio (ver anexo 2).

La consigna central fue solicitar a los maestros que anotaran su interpretación de los contenidos y que construyeran un problema que se orientara al trabajo del contenido propuesto y que se podría desarrollar con los estudiantes de primaria.

Los contenidos que integraron el cuestionario fueron los siguientes:

1. Predicción de hechos y sucesos en situaciones sencillas en las que no interviene el azar.
2. Identificación y realización de juegos en los que interviene o no interviene el azar.
3. Registro de resultados de experimentos aleatorios.
4. Identificación del espacio muestral.
5. Uso de las expresiones “más probable” y “menos probable” en la predicción de resultados.
6. Experimentos aleatorios y análisis de los resultados posibles y de los casos favorables.
7. Identificación de la noción de evento.
8. Identificación de la mayor o menor probabilidad de los eventos.
9. Identificación de fenómeno o experimento aleatorio.
10. Comparación de dos eventos a partir del número de casos favorables sin cuantificar su probabilidad.

Para obtener información de los maestros acerca de cómo interpretan la propuesta oficial, se diseñó un cuestionario que incluía actividades contenidas en los libros de texto de matemáticas de cuarto a sexto grado de primaria. La intención central del cuestionario era obtener información sobre los conocimientos probabilísticos de los profesores con relación a las actividades presentadas (ver anexo 3).

El cuestionario se integró con 12 actividades retomadas de los textos de matemáticas, las actividades seleccionadas nos proporcionaron información acerca de:

- Registro y análisis de resultados de eventos de azar.
- Uso de los términos más probable y menos probable.
- Problemas de combinatoria.
- Experimento aleatorio, análisis de casos favorables.
- Análisis de resultados posibles y casos favorables.
- Probabilidad de eventos.
- Registro de experimentos aleatorios.
- Identificación de eventos seguros, azarosos e imposibles.
- Ideas implícitas en las actividades que sugieren los profesores para abordar la probabilidad.
- Tipo de idea que toman en cuenta los profesores al construir sus actividades.

Primero se pidió a los profesores que resolvieran las actividades propuestas en el cuestionario. Después, observamos si las respuestas de los profesores a las actividades eran correctas o incorrectas. Las actividades solicitaban en su mayoría una justificación a las respuestas dadas, lo cual hizo posible que las ideas proporcionadas nos caracterizaran el nivel de pensamiento de los maestros respecto a las nociones probabilísticas (propias de la predicción y azar) abordadas en las actividades.

Una vez resueltas las actividades se solicitó a los maestros que nos indicaran qué contenidos de probabilidad se trabajan en ellas y que justificaran por qué consideraban que dicho contenido se abordaba en la actividad.

En el análisis de las respuestas emitidas por el maestro, tomamos en cuenta si el contenido indicado por éste correspondía con el propuesto en el programa y con la intención misma de la actividad. Respecto a las justificaciones mostradas por los profesores en cuanto a los contenidos que relacionaban con las actividades, observamos si tenían una correspondencia directa con el contenido que proponían y con la actividad presentada.

La intención de la pregunta: *Di cómo lo has trabajado o cómo lo trabajarías*, pretendía obtener ideas de cómo construyen los profesores actividades para trabajar la probabilidad en el aula. La información proporcionada a esta pregunta, nos permitió analizar si las actividades que sugieren tienen relación con la actividad propuesta en el cuestionario y con el contenido que señala el programa oficial.

### **3.2 Construcción del marco conceptual**

Para caracterizar el nivel de pensamiento de los profesores acerca de las nociones básicas de probabilidad, nos dimos a la tarea de buscar un marco conceptual que nos permitiera analizar la información obtenida en los cuestionarios aplicados a los maestros de educación primaria. Esto nos llevó a revisar la propuesta de Biggs y Collis (1991) quienes proponen niveles de pensamiento para ubicar el conocimiento, creencia o idea que muestran los sujetos hacia los conceptos.

El marco presentado por Biggs y Collis (1991) es conocido por las siglas en inglés SOLO (Structure of the observed learning outcome), que significa “estructura del resultado de aprendizaje observado”. Estos autores proponen que el pensamiento de un sujeto puede caracterizarse de acuerdo con las ideas o conocimiento que éste posea acerca de un concepto en particular. Para ello, primero se tiene que caracterizar el concepto mediante sus componentes que lo integran. Por ejemplo: si se le pregunta a un sujeto qué es la probabilidad, primero se tiene que definir la idea que responda la pregunta, de tal forma que en ésta se reflejen todos los componentes que integran el concepto. Para este caso, podría responderse a través de la definición laplaciana de la siguiente manera: *“La probabilidad es un número que mide el grado de incertidumbre con el que ocurre un evento y se determina mediante el cociente del número de casos favorables entre el número de casos posibles”*.

Para analizar y ubicar el nivel de pensamiento del sujeto, se tendría que descomponer la definición en los componentes que la integran, en la definición anterior acerca del concepto de probabilidad se encuentran los componentes:

medida, incertidumbre, evento, casos favorables, casos posibles. Por lo que una respuesta completa consideraría todos esos componentes en su idea.

Según las jerarquías propuestas por Biggs y Collis (1991), se consideraría un pensamiento de tipo preestructural aquella respuesta que no contenga ninguno de los componentes en su idea; es decir, que se dé una respuesta sin relación alguna con el concepto. Un pensamiento de tipo uniestructural, sería aquel cuya respuesta incluya al menos alguno de los componentes del concepto. Un pensamiento de tipo multiestructural estaría ejemplificado con una respuesta que incluya dos o más componentes del concepto; y un pensamiento de tipo relacional, sería aquella respuesta que considere todos los componentes del concepto de manera clara y coherente. Los profesores que no respondan a la pregunta, no se les ubicará en ningún nivel de pensamiento, debido a que no nos proporcionan ninguna información.

La idea de utilizar las jerarquías de Biggs y Collis (1991) en nuestro estudio tenía por objetivo identificar en las respuestas de los profesores a los cuestionarios, su nivel de pensamiento respecto a las nociones básicas de probabilidad, la interpretación de los contenidos propuestos en el programa oficial, y los conceptos de probabilidad frente a las actividades contenidas en los libros de textos oficiales.

Partimos del supuesto de que las nociones probabilísticas están compuestas por diferentes componentes, y que el profesor puede manifestar a través de sus ideas alguno o varios de éstos; también consideramos que difícilmente un maestro pueda tener un conocimiento probabilístico completo que dé cuenta de un nivel de pensamiento óptimo, que en las jerarquías propuestas por Biggs y Collis (1991) estarían caracterizadas en un nivel de tipo relacional.

El primer acercamiento que puede mostrar un sujeto respecto a un concepto se encuentra gobernado por los conocimientos, creencias y pensamientos adquiridos en otros contextos o frente a otro tipo de tareas, generalmente poco pertinentes a la complejidad del nuevo contenido.

El sujeto responde a tareas con respuestas no pertinentes, suponiendo relaciones artificiales o deseadas (preestructural). En el esfuerzo de tratar de

comprender, los sujetos perciben y se concentran en un componente pertinente (uniestructural); ese componente puede o no ser uno de los más importantes del sistema, pero el sujeto responde preguntas y realiza acciones que requieren el conocimiento de ese contenido basado sólo en ese componente. Puede ocurrir que la percepción de cómo funciona ese componente sea equivocada, pero aun cuando sea descrito apropiadamente, será insuficiente para dar cuenta del contenido que se quiere aprender.

En una segunda etapa, el sujeto percibe que el sistema tiene más componentes, entonces pone atención al menos en otro de ellos; así, al realizar una tarea que requiere ese contenido elige algo del conocimiento que tiene de alguno de esos componentes o de ambos, pero los concibe de manera aislada, no logra construir las interrelaciones que hay entre ellos (multiestructural). Es sólo cuando descubre las relaciones entre los componentes, que el sujeto tiene el conocimiento apropiado de ese contenido y lo puede utilizar de manera productiva en las tareas (relacional).

Los niveles de pensamiento sugeridos en las jerarquías propuestas por Biggs y Collis (1991) fueron utilizados en el análisis de la información obtenida al aplicar los cuestionarios a los profesores en las dos etapas de la investigación, esto permitió construir criterios que se incluyeron en la caracterización del nivel de pensamiento del maestro acerca de las nociones básicas de probabilidad, la interpretación de los contenidos de probabilidad, y con respecto a la resolución de actividades contenidas en los libros de texto.

### 3.2.1 Caracterización de los niveles de pensamiento identificados en la Primera Etapa de la Investigación

Esta etapa se denominó: Pensamiento de los profesores sobre probabilidad, combinatoria, variación, aleatoriedad y juegos de azar. Para ubicar las ideas manifestadas por los maestros al responder al cuestionario aplicado en torno a sus nociones básicas de probabilidad, fue necesario primero responder las preguntas para conocer la respuesta esperada, misma que se tomó como referencia para caracterizar el nivel de pensamiento. Después de establecer la respuesta esperada, se analizó para identificar sus componentes con la finalidad

de ubicar las ideas de los profesores de acuerdo con los componentes que tomaron en cuenta en sus respuestas. Y que se situaron de acuerdo con criterios que se construyeron para ubicar las ideas en el nivel de pensamiento correspondiente.

A continuación presentamos algunos ejemplos que muestran cómo ubicamos las ideas de los profesores en el nivel de pensamiento que corresponden según las jerarquías de Biggs y Collis (1991), enunciamos la respuesta esperada a las preguntas, los componentes involucrados y los criterios contruidos para ubicar el tipo de pensamiento del profesor, acerca de:

- El concepto de probabilidad de los profesores.

¿Qué es la probabilidad?

Se consideró como respuesta esperada la definición laplaciana: La probabilidad es un número que mide el grado de incertidumbre con el que ocurre un evento y se determina mediante el cociente del número de casos favorables entre el número de casos posibles.

Los componentes involucrados en la definición son:

Medida.

Incertidumbre.

Evento.

Casos favorables.

Casos posibles.

El siguiente cuadro muestra los criterios considerados para caracterizar el tipo de pensamiento del profesor acerca del concepto de probabilidad:

| NIVEL DE PENSAMIENTO   |  |   |   |
|--|--|---|---|
| PREESTRUCTURAL   | UNIESTRUCTURAL   | MULTIESTRUCTURAL  | RELACIONAL  |
| - Los conceptos que utiliza en su definición son idiosincrásicos y no contienen elementos de la definición | - Considera algún concepto pertinente a la definición, es decir, una de las siguientes nociones: <i>medida</i> , | - Considera varios conceptos pertinentes a la definición, pero de manera independiente o sin relacionarlos adecuadamente. | - Considera varios conceptos pertinentes a la definición, relacionados de manera conveniente. |

|           |   |  |  |
|-----------|---|--|--|
| anterior. | <i>incertidumbre, evento, casos favorables, casos posibles.</i> | Podrían ser al menos dos de las siguientes nociones: <i>Medida, incertidumbre, evento, casos favorables, casos posibles.</i> | Por ejemplo: decir que es <i>una medida que se calcula dividiendo los casos favorables entre los casos posibles o es la medida de la incertidumbre de un evento.</i> |
|-----------|---|--|--|

- El juego de los dados: utilización de la teoría laplaciana.

En la pregunta: se lanzan dos dados cúbicos y se calcula el producto de los números que aparecen. Si el resultado es par gana el jugador B y si es impar el jugador A.

¿Qué jugador escogerías ser?

¿Es justo el juego?

¿Por qué?

Para obtener el resultado correcto se debe seguir un procedimiento y hacer cálculos, así como conocer el espacio muestral que se obtiene al lanzar dos dados; después, obtener los productos de los resultados posibles, hacer una lista con los resultados favorables y calcular las probabilidades y tomar una decisión.

Los componentes involucrados son:

Espacio muestral.

Obtener los productos.

Casos favorables (enumeración de casos favorables).

Casos posibles (listado de casos).

Calcular probabilidades.

El siguiente cuadro presenta los criterios considerados para identificar el tipo de pensamiento del profesor:

| NIVEL DE PENSAMIENTO                   |                               |  |                               |
|--|-------------------------------|--|-------------------------------|
| PREESTRUCTURAL                         | UNIESTRUCTURAL                | MULTIESTRUCTURAL                         | RELACIONAL                    |
| Responder sin considerar los criterios | Elegir la opción correcta sin | Manifestar al menos dos de los criterios | Responder adecuadamente y con |

|   |   |             |                    |
|---|---|-------------|--------------------|
| posibles.<br>- Dar respuestas inapropiadas.<br>- No ser congruente en sus respuestas. | contradecirla con la argumentación.<br>- Juego injusto.<br>- Indicar la proporción correcta.<br>- Tomar en cuenta los casos posibles y casos favorables.<br>- Probabilidad. | anteriores. | argumentos claros. |
|---|---|-------------|--------------------|

- Caracterización de los fenómenos aleatorios.

En la pregunta: Para que un fenómeno sea aleatorio, ¿qué características debe poseer?

Los siguientes elementos o nociones son componentes de algún aspecto de la aleatoriedad:

- No se puede predecir con seguridad.
- Presencia del azar.
- Incertidumbre.
- Múltiples posibilidades.
- Causa- efecto (elementos causales).
- Juegos de azar.
- Desconocimiento de los resultados (falta de información).
- Grado de incertidumbre.
- Experiencia.
- Contexto del suceso.
- Variabilidad.
- Reproducibilidad en las mismas condiciones.

En el cuadro siguiente se muestran los criterios construidos para identificar el nivel de pensamiento del profesor:

| NIVEL DE PENSAMIENTO               |  |                                      |                                 |
|------------------------------------|--|--------------------------------------|---------------------------------|
| PREESTRUCTURAL                     | UNIESTRUCTURAL                           | MULTIESTRUCTURAL                     | RELACIONAL                      |
| - Si da argumentos fuera de lo que | - Si incluye al menos un elemento propio | - Considerar dos o más criterios que | - Argumentar de manera clara la |

|   |                     |                               |               |
|---|---------------------|-------------------------------|---------------|
| puede ser aleatorio.<br>- Considerarlos como deterministas. | de la aleatoriedad. | caractericen la aleatoriedad. | aleatoriedad. |
|---|---------------------|-------------------------------|---------------|

Los profesores que no respondieron las preguntas del cuestionario no se le ubicó en ningún tipo de pensamiento, debido a que al no mostrar ninguna información no es posible determinar lo que piensan, por lo que optamos no considerarlos en nuestro análisis.

### 3.2.2 Caracterización de los niveles de pensamiento identificados en la Segunda Etapa de la Investigación

Esta etapa se desarrolló en dos momentos, en el primero se aplicó un cuestionario que nos permitió obtener información de cómo interpretan los profesores de primaria los contenidos probabilísticos propuestos en el programa oficial. Para analizar la información proporcionada, primero nos dimos a la tarea de interpretarlos con la intención de establecer los criterios sobre la respuesta esperada; es decir, pronunciar una posible respuesta que se pueda dividir en sus componentes, los cuales nos apoyaron para ubicar las ideas enunciadas por los maestros en sus respuestas al cuestionario en el nivel de pensamiento correspondiente y acordes a las jerarquías propuestas por Biggs y Collis (1991).

A continuación presentamos algunos ejemplos de la caracterización que realizamos para identificar el nivel de pensamiento de los profesores con base en la interpretación que dieron acerca de los contenidos de probabilidad. Primero mostramos el contenido, luego enunciamos la interpretación esperada, señalamos sus componentes y exhibimos un cuadro con los criterios construidos para ubicar en el nivel de pensamiento las ideas proporcionadas por los profesores en el cuestionario.

Contenido: predicción de hechos y sucesos en situaciones sencillas en las que no interviene el azar.

La interpretación esperada considera que el contenido hace referencia a situaciones en las que se tiene la seguridad de lo que va a ocurrir. Es posible tomar en cuenta los sucesos deterministas o fenómenos que se pueden predecir.

Los componentes identificados son: se sabe que va a ocurrir, son hechos deterministas, no existe duda en los resultados, se puede anticipar el resultado, se puede predecir, no interviene el azar, se conocen los resultados, hay seguridad en lo que va a pasar.

Los criterios tomados en cuenta para caracterizar el nivel de pensamiento de los profesores fueron los siguientes:

| NIVEL DE PENSAMIENTO   |  |                                      |  |
|--|--|--------------------------------------|--|
| PREESTRUCTURAL   | UNIESTRUCTURAL   | MULTIESTRUCTURAL                     | RELACIONAL   |
| - Las respuestas de los profesores que contradigan lo propuesto en el contenido. | -Toma en cuenta en su interpretación una de las nociones implicadas. | - Toma en cuenta dos o más nociones. | - Muestra en su interpretación un argumento amplio y claro, con respecto al contenido. |

Contenido: registro de resultados de experimentos aleatorios.

La interpretación esperada debe considerar la forma en que los alumnos registran los experimentos aleatorios y cómo recuperan la información de los resultados que se generan al realizar una experiencia aleatoria.

Los componentes identificados en la interpretación esperada son: registro de resultados, experimentos aleatorios, realización de la experiencia aleatoria, frecuencias, análisis de los resultados y azar.

Los criterios tomados en cuenta para caracterizar el nivel de pensamiento de los docentes fueron los siguientes:

| NIVEL DE PENSAMIENTO  |  |  |   |
|---|--|--|---|
| PREESTRUCTURAL  | UNIESTRUCTURAL   | MULTIESTRUCTURAL   | RELACIONAL  |
| - Respuestas dadas por los maestros que no tomen en cuenta los registros de resultados y las que sean confusas. | -Toma en cuenta en su interpretación una de las nociones implicadas: <i>registro de resultados, experimento aleatorio.</i> | - Toma en cuenta las dos nociones: registro de resultados y experimento aleatorio. | - Muestra en su interpretación un argumento amplio y claro. |

Para analizar la información de los maestros acerca de las construcciones de problemas que se les solicitó anotar en el cuestionario, consideramos tomar en cuenta si lo que proponían tenía relación con el contenido o no; si el problema construido tenía relación con el contenido, observamos qué componentes incluía y a partir de ello, los ubicamos en el nivel de pensamiento correspondiente.

Los criterios para ubicar los problemas propuestos por los maestros en el cuestionario fueron los siguientes:

| NIVEL DE PENSAMIENTO   |  |
|--|--|
| PREESTRUCTURAL   | UNIESTRUCTURAL   |
| -Actividades que no tienen relación con los contenidos propuestos en las actividades del cuestionario. | -Actividades relacionadas con los contenidos propuestos en las actividades del cuestionario y que toman al menos alguno de los componentes enunciados en la interpretación esperada del contenido. |

Después de observar si las actividades sugeridas tienen o no relación con los contenidos propuestos en el cuestionario, nos pareció interesante identificar en éstas el tipo de idea predominante con la intención de saber qué elementos de probabilidad consideran los profesores, de qué manera sugieren aplicarlos en la práctica, y finalmente, ubicar las ideas en el nivel de pensamiento que corresponden según las jerarquías propuestas por Biggs y Collis (1991).

Las ideas identificadas en las propuestas de los maestros fueron ubicadas en el siguiente cuadro de acuerdo con el nivel de pensamiento con que se relaciona:

| NIVELES DE PENSAMIENTO   |  |
|--|--|
| PREESTRUCTURALES   | UNIESTRUCTURALES   |
| -Quienes no presentan ideas claras en sus sugerencias.<br>-Quienes proponen el trabajo en equipos. | -Quienes consideran que la actividad se debe llevar de manera práctica.<br>-Quienes consideran que la actividad tome en cuenta el uso de material concreto.<br>-Quienes consideran que se debe trabajar actividades similares a las propuestas por el libro de texto.<br>-Quienes consideran que se debe tomar en cuenta el juego. |

|  |  |
|--|--|
|  | <p>-Quienes sugieren que se utilicen las actividades de los libros de texto.</p> <p>-Quienes sugieren actividades de libros comerciales.</p> |
|--|--|

En el segundo momento de esta etapa, se aplicó un cuestionario integrado por 12 actividades extraídas de los libros de texto de matemáticas de primaria, con el propósito de obtener la información que nos proporcionara el nivel de pensamiento de los profesores en conceptos de probabilidad frente a las actividades propuestas en los libros de texto.

Para el análisis de la información obtenida a través del cuestionario, contestamos las actividades con anterioridad para establecer las respuestas esperadas y señalamos los componentes que integran cada respuesta. De acuerdo con los componentes identificados, construimos criterios para ubicar el nivel de pensamiento por los maestros en las respuestas dadas a las actividades.

A continuación presentamos un ejemplo de cómo analizamos las respuestas y cómo las ubicamos en el nivel de pensamiento correspondiente:

Actividad propuesta en el cuestionario:

*Yoatzin y Sonia hicieron un experimento con un dado. Marcaron las caras del dado como se indica abajo:*

- De color azul las caras que tienen 1, 2, 3 y 4 puntos.
- De color rojo las caras que tienen 5 y 6 puntos.

*Antes de lanzar el dado, tratan de adivinar el color que va a salir.*

*¿A qué color le apostarías tú para ganar? (1.1)*

*Si se lanza 30 veces el dado, ¿qué crees que se repetirá más veces, el color azul o el rojo? (1.2) ¿por qué? (1.3) [SEP, Matemáticas, cuarto grado, 1999:76]*

La respuesta esperada era que el profesor respondiera que apostaría al color azul, y al lanzar 30 veces el dado, se esperaba que anotara que el color que más se repite es el azul, en su justificación que considere que tiene el mayor número de posibilidades de salir porque hay más caras pintadas de color azul.

Los componentes identificados en la respuesta esperada fueron: experimento aleatorio, repetibilidad de los eventos en las mismas condiciones, resultados posibles, reconocimiento del espacio muestral, resultados favorables, registro de experimento aleatorio, presencia del azar.

Los criterios para ubicar el nivel de pensamiento del maestro en sus respuestas a la actividad fueron las siguientes:

| NIVEL DE PENSAMIENTO                                     |  |   |  |
|--|--|---|--|
| PREESTRUCTURAL   | UNIESTRUCTURAL   | MULTIESTRUCTURAL  | RELACIONAL                                       |
| - Ideas no previstas.<br>- Ideas que carecen de sentido. | - Toma en cuenta uno de los criterios:<br><i>resultados posibles, resultados favorables, espacio muestral, mayor probabilidad, más probable, experimento aleatorio, registro de resultados, análisis de frecuencias.</i> | -Incluir al menos dos de los criterios:<br><i>resultados posibles, resultados favorables, espacio muestral, mayor probabilidad, más probable, experimento aleatorio, registro de resultados, análisis de frecuencias.</i> | - Razonamientos adecuados y argumentos precisos. |

En el cuestionario se solicitó a los profesores que indicaran con qué contenido de probabilidad relacionaban la actividad propuesta y la razón por la que lo referían a ese contenido. Para analizar la información obtenida, tomamos en cuenta el contenido de probabilidad con el que el programa oficial relaciona la actividad, además incluimos algunos elementos que inferimos en la actividad que presentamos en el cuestionario. Esto nos permitió establecer las respuestas esperadas además de enunciar los componentes que las conforman y, a partir de eso, construir los criterios que nos permitieron ubicar las respuestas de los maestros en el nivel de pensamiento correspondiente.

Para mostrar cómo analizamos las respuestas de los profesores, presentamos una actividad del cuestionario, el contenido con el que la relaciona la propuesta oficial y los criterios que consideramos para ubicar el nivel de pensamiento del profesor respecto al contenido con que relaciona la actividad.

La actividad incluida en el cuestionario fue:

- Raúl y Jaime hicieron un experimento con canicas de colores.  
Tratan de adivinar de qué color van a sacar una canica. Observa cómo lo hacen.
- Introducen en una caja 10 rojas y 5 azules.
  - Tapan la caja y la agitan.
  - Sin ver, sacan una canica.
  - Introducen la canica otra vez en la caja.
  - Agitan nuevamente la caja.
  - Sacan otra vez una canica.

Raúl y Jaime repitieron varias veces el experimento. ¿Qué color de canica crees que salió más veces? \_\_\_\_\_ (1) ¿Por qué? \_\_\_\_\_ (2) [SEP, *Matemáticas, cuarto grado, 1999:114*]

El contenido que relaciona el programa oficial con la actividad es: uso de los términos más probable y menos probable. De la actividad se infiere también que se trabaja registro de experimentos aleatorios, análisis de resultados de situaciones de azar.

Los criterios utilizados para caracterizar el nivel de pensamiento de los docentes fueron:

| NIVEL DE PENSAMIENTO   |   |   |
|--|---|---|
| PREESTRUCTURAL   | UNIESTRUCTURAL  | MULTIESTRUCTURAL  |
| - Que el contenido propuesto no tenga relación con la actividad. | - Que el contenido propuesto incluya un elemento de probabilidad: más probable, experimento aleatorio, análisis de resultados, situaciones de azar. | - Que el contenido sugerido tenga relación con el contenido propuesto en el programa oficial.<br><br>- Que incluyan en su justificación más de un elemento de probabilidad: más probable, experimento aleatorio, análisis de resultados, situaciones de azar. |

En el cuestionario se solicitó a los maestros que mencionaran con qué actividades han trabajado el contenido o cómo lo trabajarían con el propósito de conocer qué tipo de actividades proponen para abordar los contenidos de probabilidad. Al revisar las respuestas de los profesores encontramos que algunas de las situaciones propuestas no tenían relación alguna con la actividad ni con el contenido propuesto en el programa oficial.

Esta idea nos permitió relacionarla con el nivel preestructural, por lo que al revisar las actividades que tenían relación con la actividad, nos dimos a la tarea de identificar qué aspectos de la probabilidad se retomaban y si se contemplaban en los componentes que enunciarnos en los resultados de la actividad propuesta y en

los contenidos formulados en el programa. Con esta información, ubicamos las respuestas de los maestros en el nivel de pensamiento correspondiente.

Los criterios utilizados para identificar el nivel de pensamiento del profesor con respecto a las actividades que proponen para trabajar la probabilidad, considero lo siguiente:

| NIVELES DE PENSAMIENTO   |  |
|--|--|
| PREESTRUCTURALES   | UNIESTRUCTURALES   |
| -Actividades propuestas por los maestros que no tienen ninguna relación con los contenidos de probabilidad implicados en las actividades del cuestionario. | -Actividades propuestas por los maestros que tienen relación con los contenidos de probabilidad implicados en las actividades del cuestionario y que incluyen al menos alguno de los componentes que integran las respuestas esperadas en las actividades. |

Después de analizar las propuestas de actividades de los profesores para abordar la probabilidad, consideramos interesante identificar la idea que se prioriza en ellas para saber qué aspectos de probabilidad incluyen y de qué manera las implican en las actividades. Los resultados obtenidos de este análisis nos permitieron construir criterios para caracterizar las ideas de los maestros en el nivel de pensamiento que muestran.

El cuadro siguiente presenta los criterios implicados para ubicar la idea del profesor en el nivel de pensamiento que le corresponde según las jerarquías propuestas por Biggs y Collis (1991).

| NIVELES DE PENSAMIENTO   |  |
|--|--|
| PREESTRUCTURALES   | UNIESTRUCTURALES   |
| -Quienes no presentan ideas claras en sus sugerencias.<br>-Quienes proponen el trabajo en equipos. | -Quienes consideran que la actividad se debe llevar de manera práctica.<br>-Quienes consideran que la actividad tome en cuenta el uso de material concreto.<br>-Quienes consideran que se debe trabajar actividades similares a las propuestas por el libro de texto.<br>-Quienes consideran que se debe tomar en cuenta el juego. |

|  |  |
|--|--|
|  | <ul style="list-style-type: none"><li>-Quienes sugieren que se utilicen las actividades de los libros de texto.</li><li>-Quienes sugieren actividades de libros comerciales.</li></ul> |
|--|--|

### 3.3 Sistematización de datos

Para sistematizar la información obtenida del análisis e interpretación de los datos, consideramos relevante abordarlos de acuerdo con las etapas que desarrollamos en la investigación, por lo que estructuramos la información en capítulos. Para ello, decidimos dar cuenta primero del contexto en el que se llevó a cabo la investigación, resaltar los cuestionamientos centrales, dar cuenta del marco teórico, precisar el proceso metodológico, describir el análisis y los resultados de los niveles de pensamiento encontrados en cada etapa, acerca de las nociones básicas de probabilidad, interpretación de los contenidos de probabilidad, actividades contenidas en los textos y construcción de problemas.

En cada etapa de la investigación se señalaron las ideas relevantes encontradas, que nos sirvieron para identificar el nivel de pensamiento de los profesores, y que nos dieron pie a realizar una interpretación y análisis de los datos encontrados en los cuestionarios. También incluimos nuestros conocimientos personales al respecto; es decir, buscamos comunicar los hallazgos que nos dieron pautas para identificar los niveles de pensamiento de los profesores sobre probabilidad, así como la forma en que interpretan la propuesta oficial de la SEP.

## **CAPÍTULO 4**

### **PENSAMIENTO DE LOS PROFESORES SOBRE PROBABILIDAD, COMBINATORIA, VARIACIÓN, ALEATORIEDAD Y JUEGOS DE AZAR**

#### **Introducción**

En este capítulo se analizan las respuestas de los profesores a las preguntas del primer cuestionario que se les aplicó (ver anexo 1). Para dicho análisis, se definen algunos aspectos de cada concepto que permiten aplicar las jerarquías de Biggs y Collis (1991) y, de acuerdo con ellas, se pueden proponer niveles de pensamiento de los maestros respecto de cada noción tratada. En general, y de acuerdo a la elaboración que aquí se hace de las jerarquías para cada noción, la mayoría de los maestros se ubican en el nivel uniestructural, pero también un buen número se ubica en el nivel preestructural. Muy pocos casos se encuentran en un nivel multiestructural. Esos resultados significan que la gran mayoría de los maestros sólo captan un aspecto de los conceptos, pero no dos o más de los que suelen estar constituidos; por ejemplo, en la noción de probabilidad ven lo azaroso, pero no que es una medida; en la noción de fenómeno aleatorio ven el aspecto de incertidumbre, pero no la reproducibilidad, en la noción de azar no pueden encontrar nociones más básicas que lo determinen, como independencia o interacción. En lo que sigue se presenta la información que justifica estos comentarios.

#### **4.1.- El concepto de probabilidad**

Con los resultados a la pregunta ¿Qué es la probabilidad?, que se expondrán adelante, se observa que la mayoría de los maestros examinados tienen una noción uniestructural de la probabilidad; entienden que la probabilidad se refiere a situaciones impredecibles pero no alcanzan a verla como una medida y tampoco pueden indicar cómo se calcula. Se considera entonces, que los maestros tienen grandes dificultades para comprender el concepto de probabilidad debido a que no perciben que es una medida de la incertidumbre. En consecuencia, carecen de una noción cuantitativa de la probabilidad, sea mediante la definición Laplaciana, sea mediante una definición frecuencial.

##### **Pregunta: ¿Qué es la probabilidad?**

En el análisis es suficiente partir de la definición de Laplace de probabilidad pues es la que generalmente se enseña. Las situaciones comunes en los niveles elementales apelan a esta noción ya que en ellas es posible el cálculo de la probabilidad a partir de los datos del problema. En cambio, las situaciones que involucran una definición frecuencial son menos comunes y presentan mayores dificultades; es más común encontrarla en los cursos con énfasis en la estadística.

##### *Definición de Laplace:*

*La probabilidad es un número que mide el grado de incertidumbre con el que ocurre un evento y se determina mediante el cociente del número de casos favorables entre el número de casos posibles.*

Los elementos pertinentes al concepto son:

Medida

Incertidumbre

Evento

Casos favorables

Casos posibles

En la siguiente tabla se describen los criterios que se usaron para clasificar los conceptos de probabilidad del profesor de acuerdo a la escala de Biggs y Collis:

| PREESTRUCTURAL   | UNIESTRUCTURAL  | MULTIESTRUCTURAL   | RELACIONAL  |
|--|---|--|---|
| - Los conceptos que utiliza en su definición son idiosincrásicos y no contienen elementos de la definición anterior. | - Considera alguno de los elementos pertinentes a la definición pero no más de uno:<br>- <i>Medida</i> ,<br>- <i>Incertidumbre</i> ,<br>- <i>Evento</i> ,<br>- <i>Casos favorables</i> ,<br>- <i>Casos posibles</i> . | - Considera dos o más elementos pertinentes a la definición, pero de manera independiente o sin relacionarlos adecuadamente. Podrían ser al menos dos de las siguientes nociones: <i>Medida</i> , <i>incertidumbre</i> , <i>evento</i> , <i>casos favorables</i> , <i>casos posibles</i> . | - Considera varios elementos pertinentes a la definición, relacionados de manera conveniente. Por ejemplo: decir que <i>es una medida que se calcula dividiendo los casos favorables entre los casos posibles o es la medida de la incertidumbre de un evento</i> . |

El siguiente cuadro 1 muestra las frecuencias y porcentaje de los niveles en que se ubicaron las respuestas de los profesores:

| NIVELES DE PENSAMIENTO | FRECUENCIA | %   |
|------------------------|------------|-----|
| PREESTRUCTURALES       | 5          | 35  |
| UNIESTRUCTURALES       | 8          | 57  |
| MULTIESTRUCTURALES     | 1          | 7   |
| RELACIONALES           | 0          | 0   |
| NO CONTESTÓ            | 0          | 0   |
| TOTAL                  | 14         | 100 |

CUADRO 1: TABLA DE FRECUENCIAS NOCIONES DE PROBABILIDAD

A continuación mostramos las respuestas de los profesores en los niveles correspondientes:

| NIVEL          | CARACTERÍSTICAS  |
|----------------|--|
| Preestructural | M1: Es una situación donde el individuo da soluciones probables a un problema sobre lo que piensa en acercamiento sobre algunas definiciones.<br><br>M2: Es una respuesta que puede ser probable.<br><br>M5: Es algo que puede suceder y esperado. |

|                  |   |
|------------------|---|
|                  | <p>M9: Es la ciencia que estudia, las posibilidades, situaciones que pasan en los hechos.</p> <p>M13: Es aquella supuesta respuesta o respuestas a una pregunta planteada.</p>  |
| Uniestructural   | <p>M3: Probabilidad es un juego al azar logrado a un conjunto de combinaciones, es algo que no es seguro.</p> <p>M4: Es cuando una situación tiene probables respuestas, dos o más, pero no es posible saber en el momento una exacta.</p> <p>M6: Es algo que puede suceder o no.</p> <p>M7: Es algo que puede suceder o no.</p> <p>M8: Probabilidad es lo que no se tiene seguridad que es probable que pase o no los hechos.</p> <p>M10: Es aquello que posiblemente suceda o se llevará a cabo.</p> <p>M11: Es algo que se acerca de lo que sucederá y que no es seguro.</p> <p>M12: Probabilidad es un acto o un hecho que tiene posibilidad que suceda y no puede.</p> |
| Multiestructural | <p>M14: Evento que puede suceder o no ocurrir (no es seguro) [Esta respuesta incluye el término técnico “evento” además de la idea de incertidumbre]</p>  |
| Relacional       | No hubo respuestas que pudieran ser clasificadas en este nivel  |

*Resumen:* Todos los profesores asocian la probabilidad con la incertidumbre, pero nadie la concibe como una medida; tampoco le asignan un procedimiento de cálculo.

#### **4.2.- La interpretación de probabilidades en una Situación de ‘pronóstico del tiempo’**

De las respuestas referidas a la situación del pronóstico del tiempo, se infiere que los profesores examinados no consideran la noción de variación al interpretar la situación y presentan muy a menudo el sesgo del resultado aislado; es decir, piensan que un 70% de probabilidad de que el evento ocurra significa que va a ocurrir; de este modo piensan que si no ocurrió, el pronóstico entonces

fue inapropiado. Dicho de otra manera, no toman en cuenta que las probabilidades no predicen lo que va a ocurrir en un solo experimento u observación, El hecho de que no llueva en un día no contradice la probabilidad de 70% de lluvia. En general, no tienen recursos para interpretar de manera apropiada el 70% de probabilidad.

**Pregunta 1a: ¿Qué significa para ti cuando escuchas al hombre que pronostica el tiempo decir que mañana hay un 70% de posibilidades de que llueva?**

Para definir las jerarquías para analizar las respuestas a esta pregunta se consideran las definiciones frecuencial y subjetiva de probabilidad. Aunque ambas son poco comunes en los medios escolarizados a nivel elemental, parece imposible interpretar de forma probabilística la situación sin alguna de ellas.

a) Frecuencial:

*Qué a lo largo de muchas observaciones se ha determinado que 7 de cada 10 días que presentan características semejantes a las de hoy ha llovido al día siguiente.*

b) Subjetiva:

*Es una medida de la creencia del hombre que pronostica el tiempo; significa que de acuerdo a las condiciones climatológicas que se presentan hoy (humedad, nubosidad, viento, etc.) piensa que hay 7 posibilidades de que llueva contra 3 de que no llueva.*

Los siguientes conceptos están presentes ya sea en una u otra de las definiciones anteriores:

- Repetición de observaciones en las mismas condiciones.
- Razón de 7:3.
- Comparación de probabilidades.
- Medida.
- Creencia.

El siguiente cuadro 2 muestra las frecuencias y porcentaje de los niveles en que se ubicaron las respuestas de los profesores:

| NIVELES DE PENSAMIENTO | FRECUENCIA | %  |
|------------------------|------------|----|
| PREESTRUCTURALES       | 5          | 35 |

|                    |    |     |
|--------------------|----|-----|
| UNIESTRUCTURALES   | 5  | 35  |
| MULTIESTRUCTURALES | 3  | 22  |
| RELACIONALES       | 0  | 0   |
| NO CONTESTO        | 1  | 7   |
| TOTAL              | 14 | 100 |

CUADRO 2: TABLA DE FRECUENCIAS 'PRONOSTICO DEL TIEMPO' (1a)

Las respuestas de los profesores fueron clasificadas de acuerdo a la jerarquía de Biggs y Collis como se muestra en la siguiente tabla:

| NIVEL            | CARACTERÍSTICAS  |
|------------------|--|
| Preestructural   | <p>M2: Que el ser humano, principalmente las personas de mayor edad por las experiencias vividas les sirve para emitir juicios de probabilidad, como lo enseña la historia que las personas antepasadas existían signos o señales que les servía para predecir.</p> <p>M5: Que si el hombre del tiempo predetermina lo que va a suceder eso ocurrirá.</p> <p>M9: Significa que las encuestas casi siempre han acertado.</p> <p>M12: Manifiesta su conocimiento empírico.</p> <p>M14: Que Dios ha dado conocimiento al hombre, para inventar aparatos sofisticados y poder tener conocimiento de los fenómenos naturales, así poder estar prevenidos.</p> |
| Uniestructural   | <p>M6: Porque para eso vemos el tiempo y cuando decimos que hay una preparación o que posible llueva es cuando vemos que el cielo esta nublado.</p> <p>M7: Existe una gran posibilidad de lluvia.</p> <p>M8: Que puede llover mañana.</p> <p>M11: De que es muy probable que llueva porque las posibilidades son elevadas.</p> <p>M13: De que es probable que llueva.</p>  |
| Multiestructural | <p>M3: Que puede ser cierto porque esta basado en un estudio metereológico del estado del tiempo.</p> <p>M4: Que hay la posibilidad de que llueva de manera parcial en algunos</p>   |

|            |  |
|------------|--|
|            | lugares, porque de acuerdo al porcentaje hay más posibilidades de que llueva y menos de que no llueva.<br><br>M10: Que hay un alto porcentaje de que va a llover, pero no es seguro. |
| Relacional | No hubo respuestas que pudieran ser clasificada en este nivel  |

*Resumen.* Los profesores toman en cuenta la impredecibilidad del evento y consideran mayor la posibilidad de que llueva tomando en cuenta la proporción manifiesta en la pregunta. Sólo un profesor (M4) menciona explícitamente la posibilidad de que no llueva, a pesar de que el enunciado se refiere a la lluvia (en contraposición a la no-lluvia). Un maestro asume que un “70% de lluvia” significa que va a llover. Se nota la ausencia de consideraciones cuantitativas que asignen algún significado más preciso al número “70%”.

**Pregunta 1b: Si el hombre que pronostica el tiempo dijo que tenía un 70% de posibilidades de que lloviese al día siguiente y en realidad no llovió. ¿Qué opinas sobre la afirmación de que había un 70% de posibilidades de que lloviese?**

Para definir las jerarquías se propondrá una respuesta extensa que desde el punto de vista del investigador es apropiada. Con base en ella, se enlistarán los elementos que contiene en forma de conceptos aislados. La respuesta propuesta es:

*Opino que no llovió como resultado del azar y aunque el pronóstico fuera correcto (70%), los resultados varían: a la larga 7 de cada 10 días llueve y 3 de cada 10 no llueve.*

Los elementos pertinentes de la anterior respuesta son:

- Percepción de la variación.
- Un pronóstico de 70% no significa que necesariamente va a llover.
- Aunque hoy no ocurrió, a la larga en días semejantes lloverá 7 de cada 10 veces.
- Como la probabilidad es de 7 de lluvia X 3 de no lluvia, probablemente ahora ocurrió uno de esos 3 días y no refuta el pronóstico.

El siguiente cuadro 3 muestra las frecuencias y porcentaje de los niveles en que se ubicaron las respuestas de los profesores:

| NIVELES DE PENSAMIENTO | FRECUENCIA | %   |
|------------------------|------------|-----|
| PREESTRUCTURALES       | 6          | 42  |
| UNIESTRUCTURALES       | 4          | 29  |
| MULTIESTRUCTURALES     | 1          | 7   |
| RELACIONALES           | 0          | 0   |
| NO CONTESTÓ            | 3          | 22  |
| TOTAL                  | 14         | 100 |

CUADRO 3: TABLA DE FRECUENCIAS 'PRONOSTICO DEL TIEMPO' (1b)

Los enunciados de los profesores fueron clasificados en los niveles definidos como se muestra en la siguiente tabla:

| NIVEL            | CARACTERÍSTICAS  |
|------------------|--|
| Preestructural   | <p>M4: Considero que hubo un mal pronóstico al afirmar que había más posibilidades de que lloviera.</p> <p>M5: Que las posibilidades o predeterminaciones que hace el hombre del tiempo son falsas.</p> <p>M6: Que no llovió porque la lluvia se transformo en aire.</p> <p>M12: Que fallo ese conocimiento que había adquirido a través de la experiencia.</p> <p>M13: Que fue falso ese porcentaje.</p> <p>M14: Que el hombre no conoce los designios de Dios, y que Dios es el único que hace las cosas a su entera voluntad.</p> |
| Uniestructural   | <p>M7: No se puede saber.</p> <p>M8: No es confiable 100%.</p> <p>M9: La naturaleza es impredecible.</p>   |
| Multiestructural | <p>M10: Que el hombre del tiempo no es que se haya equivocado sino de que era probable de que lloviera.</p> <p>M11: De que en este lugar estuvo el 30% restante de posibilidades que no lloviera.</p>  |
| Relacional       | No hubo respuestas de este nivel   |

*Resumen.* Cuatro profesores consideran que el pronóstico fue erróneo ya que no llovió; cinco mencionan la impredecibilidad; dos de ellos, dan un argumento

más razonado que incluye la incertidumbre y la probabilidad, el último agrega la proporcionalidad. Se observa nuevamente que cuatro maestros asumen que “70% de lluvia” significa que va a llover. Por otro lado, el maestro M11 se acerca a una idea relacional, pero carece de un lenguaje más preciso para expresarse, en particular, se vuelve a manifestar la falta de consideraciones cuantitativas que le den significado al número “70%” y “30%”.

**Pregunta 1c: *Para comprobar la bondad de las predicciones realizadas por un determinado hombre que pronostica el tiempo, observas lo que realmente ocurre durante 10 días, para los cuales había anunciado un 70% de posibilidades de que lloviese. Constatas que en 3 de estos 10 días no llovió ¿Qué piensas sobre la precisión de las predicciones de ese hombre que pronostica el tiempo?***

El hecho de que 3 días no haya llovido y 7 sí, apoya el pronóstico de 70% de lluvia, pero sin ser contundente. Sería apresurado afirmar que “el hecho prueba que el pronóstico es verdadero” o algo semejante. La razón es que la muestra es aún pequeña; bajo la hipótesis, por ejemplo, de que haya 50% de probabilidad de llover, un resultado de 7 a 3 es aún posible. Surge nuevamente la importancia de tener en cuenta la posibilidad de la variación de los resultados observados con relación a la predicción teórica.

Bajo este criterio se considera que los elementos pertinentes para la jerarquización son:

- El resultado apoya el pronóstico.
- No lo comprueba porque interviene el azar (la muestra es pequeña).
- Comparación de probabilidades.
- Medida.
- Repetición.
- Razón 7-3.

El siguiente cuadro 4 muestra las frecuencias y porcentaje de los niveles en que se ubicaron las respuestas de los profesores:

| NIVELES DE PENSAMIENTO | FRECUENCIA | %  |
|------------------------|------------|----|
| PREESTRUCTURALES       | 7          | 50 |

|                    |    |     |
|--------------------|----|-----|
| UNIESTRUCTURALES   | 5  | 36  |
| MULTIESTRUCTURALES | 0  | -   |
| RELACIONALES       | 0  | -   |
| NO CONTESTÓ        | 2  | 14  |
| TOTAL              | 14 | 100 |

CUADRO 4: TABLA DE FRECUENCIAS 'PRONOSTICO DEL TIEMPO' (1c)

A continuación se transcriben los enunciados dados por los profesores y se clasifican en los niveles definidos:

| NIVEL            | CARACTERÍSTICAS   |
|------------------|---|
| Preestructural   | <p>M5: Que posiblemente sus predicciones sean al azar y no da la seguridad de confiar en él.</p> <p>M6: Que en este año no lloverá mucho como en otros.</p> <p>M7: Que el hombre nunca podrá ser más sabio que la naturaleza.</p> <p>M8: Que no hay que creer mucho en esta información.</p> <p>M9: Que no son del todo confiable.</p> <p>M10: Que tuvo razón ya que verdaderamente si llovió en 3 de 10 días.</p> <p>M14: Que tanto el hombre como los aparatos pueden cometer errores.</p>  |
| Uniestructural   | <p>M1: Que la posibilidad de predicción se da de manera más acertada porque se cuenta con la información requerida, lograda a través de la avanzada tecnología que hoy en día se tiene para predecir los fenómenos físicos con mayor prontitud por la gente especializada en estos conocimientos.</p> <p>M4: Si las predicciones del hombre del tiempo salieran ciertas de acuerdo a su pronóstico, pienso que sus cálculos fueron bien precisos y bien estudiados y justificados.</p> <p>M11: Que sus predicciones fueron correctas en un 100 %</p> <p>M12: Que coincidió en sus predicciones porque llovió 7 de los diez días.</p> <p>M13: De que hubo un 70% de posibilidades.</p> |
| Multiestructural | No hubo respuestas de este nivel.   |
| Relacional       | No hubo respuestas de este nivel.   |

*Resumen.* Seis profesores dan argumentos sin considerar el enunciado, responden sin tomar en cuenta que la afirmación dada en la pregunta es favorable a la experiencia. Cinco profesores ratifican lo indicado en la pregunta.

**Pregunta 1d: ¿Qué pensarías de tal afirmación si comprobaras que fueron 7, en vez de 3, los días en que no llovió?**

Una respuesta razonable es decir que el resultado no apoya el pronóstico, sin embargo, no sería apropiado concluir que el pronóstico es erróneo. No se puede decir nada concluyente debido a que la muestra es pequeña y, por tanto, sujeta a variaciones importantes.

Con base en los anteriores considerandos, los elementos pertinentes a considerar en las respuestas son:

- El resultado no apoya el pronóstico.
- No lo contradice.
- Comparación de probabilidades.
- Medida.
- Razón 3:7.

El siguiente cuadro 5 muestra las frecuencias y porcentaje de los niveles en que se ubicaron las respuestas de los profesores:

| NIVELES DE PENSAMIENTO | FRECUENCIA | %   |
|------------------------|------------|-----|
| PREESTRUCTURALES       | 7          | 49  |
| UNIESTRUCTURALES       | 4          | 28  |
| MULTIESTRUCTURALES     | 0          | -   |
| RELACIONALES           | 0          | 0   |
| NO CONTESTÓ            | 3          | 21  |
| TOTAL                  | 14         | 100 |

CUADRO 5: TABLA DE FRECUENCIAS 'PRONOSTICO DEL TIEMPO' (1d)

A continuación se enuncian las respuestas de los profesores clasificadas en los niveles correspondientes:

| NIVEL            | CARACTERÍSTICAS  |
|------------------|--|
| Preestructural   | <p>M4: Pensaría que se hizo un mal pronóstico porque no va de acuerdo al porcentaje o posibilidades de las predicciones que da a conocer el hombre que da los datos.</p> <p>M5: Que prácticamente lo que determina el hombre del tiempo es falso.</p> <p>M7: No haría entonces mucho caso a lo enunciado.</p> <p>M8: Que es inconfiable lo que dicen.</p> <p>M9: Lo contrario de la afirmación anterior.</p> <p>M12: De que sus cálculos empíricos no se realizaron como él pensaba.</p> <p>M14: Que esa persona, únicamente está inventando el estado del tiempo, o lo hace para obtener ganancias.</p> |
| Uniestructural   | <p>M10: Que ahí ya hubo un porcentaje menor que el que se pronosticó.</p> <p>M11: Que sus predicciones fueron correctas en un 30%</p> <p>M13: Que fue un 30% de su afirmación.</p> <p>M6: La posibilidad está entre los 10 días pueden ser 3 o 5 o 7 o 8 o hasta 10 días.</p>  |
| Multiestructural | No hubo respuestas de este nivel   |
| Relacional       | No hubo respuestas de este nivel   |

*Resumen.* Seis profesores opinan que al no ocurrir lo que el hombre del tiempo pronostica, su predicción es errónea. Cuatro profesores toman en cuenta la presencia del azar, situación que los lleva a pensar que el hombre del tiempo no se equivocó.

*Conclusión:* Gran parte de las respuestas obtenidas se ubican en el nivel Preestructural. La mayoría de los profesores adolecen del sesgo del resultado aislado; es decir, un solo resultado lo toman como confirmatorio o que refuta el pronóstico. El complemento está ubicado en Uniestructural, puesto que toman en cuenta el carácter azaroso de la situación, pero no la medida de los eventos; en los preguntas relacionadas al pronóstico del tiempo algunos perciben que la coincidencia entre un pronóstico y los resultados reales confirma la veracidad del pronóstico, pero en el caso en que no coinciden, sus respuestas son confusas; sin

embargo, no lo consideran como un resultado que contradiga el pronóstico. Aunque la naturaleza de la pregunta dificulta una interpretación cuantitativa, hay maneras de interpretar la situación de modo que se encuentre el significado del número “70%” involucrado; ningún profesor intentó buscar una explicación del origen de ese número o una interpretación más precisa.

### **4.3.- Uso del razonamiento combinatorio**

Para Freudenthal (1973:596) la combinatoria simple es la parte más importante de la probabilidad elemental y la enseñanza de la probabilidad debe tenerlo en cuenta. Es pues importante explorar el pensamiento de los maestros en este tema. El concepto formal más elemental de la combinatoria es la regla del producto, sin embargo, la combinatoria está precedido por procedimientos informales que van desde realizar conteos mediante listados asistemáticos e incompletos hasta la realización de listas con un sistema organizado. Por más rudimentarios que parezcan los procedimientos de búsqueda asistemáticos y completos, veremos que son difíciles de realizar por los maestros en un contexto sencillo de formación de comités. El problema de la formación de comités es complejo porque requiere del concepto de combinación, sin embargo, en nuestra exploración no se busca que los profesores apliquen la fórmula de las combinaciones para llegar a las respuestas correctas sino sólo que desplieguen algunos procedimientos informales que reflejen sus ideas combinatorias.

**Pregunta: Con un grupo de 10 personas es necesario formar el mayor número posible de comisiones diferentes.**

**A).- Si las comisiones pueden ser de 2 o de 6 personas. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones piensas que es verdad?**

**Opción 1A.- Se pueden formar menos comisiones diferentes de 2 personas que de 6 personas.**

**Opción 2A.- Se pueden formar tantas comisiones de 2 personas como de 6 personas.**

**Opción 3A.- Se pueden formar más comisiones diferentes de 2 personas que de 6 personas.**

**¿Por qué?**

Para saber cuántas comisiones se pueden formar es importante considerar el número total de sujetos y el número que integrarán una comisión, con ello, se deben integrar las comisiones y contarlas.

Un procedimiento es tomar diez números: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y tratar de hacer todos los posibles comités tanto de tamaño 2 como de tamaño 6; hay 45 comités de tamaño 2, como se muestra en el arreglo de la tabla. Es más complicado hacer la lista de los comités de tamaño 6; sin embargo, no es necesario contar los 210 arreglos, basta enlistar 45 de ellos y ver que todavía es posible continuar para obtener más; de donde la respuesta es que hay más comités de 6 personas que de 2. Hay dos aspectos importantes que deben tenerse en cuenta en esta solución, uno el concepto de comité "potencial", es decir, la idea de que los comités formados no tienen que ser ajenos sino que un comité es diferente a otro si al menos una persona es diferente. El otro aspecto es que se requiere un método de conteo sistemático que permita describir todos los comités y no repetir uno ya contado. A continuación se presentan las tablas que habrían podido hacer los profesores.

Comités de 2 personas tomados de un conjunto de 10:

01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09  
 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19  
 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29  
 34, 35, 36, 37, 38, 39  
 45, 46, 47, 48, 49  
 56, 57, 58, 59  
 67, 68, 69  
 78, 79  
 89

Algunos comités de 6 personas tomados de un conjunto de 10:

|        |        |        |        |        |
|--------|--------|--------|--------|--------|
| 012345 | 012346 | 012347 | 012348 | 012349 |
| 023456 | 023457 | 023458 | 023459 |        |
| 034567 | 034568 | 034569 |        |        |
| 045678 | 045679 |        |        |        |

15

|        |        |        |        |    |
|--------|--------|--------|--------|----|
| 056789 |        |        |        |    |
| 123456 | 123457 | 123458 | 123459 |    |
| 134567 | 134568 | 134569 |        | 10 |
| 145678 | 145679 |        |        |    |
| 156789 |        |        |        |    |
| 234567 | 234568 | 234569 |        |    |
| 245678 | 245679 |        |        | 6  |
| 256789 |        |        |        |    |
| 345678 | 345679 |        |        | 3  |
| 356789 |        |        |        |    |
| 456789 |        |        |        | 1  |
| 024567 | 024568 | 024569 |        |    |
| 025678 | 025679 |        |        | 6  |
| 026789 |        |        |        |    |
| 035678 | 035679 |        |        | 3  |
| 036789 |        |        |        |    |
| 124567 | 124568 | 124569 |        |    |
| 125678 | 125679 |        |        | 6  |
| 126789 |        |        |        |    |

Se han contado 50 comités de tamaño 6, con lo cual ya se puede responder a la pregunta.

La solución más sofisticada consiste en aplicar las fórmulas de combinatoria:

$$\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!8!} = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 45$$

$$\binom{10}{6} = \frac{10!}{6!4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$$

Para analizar las respuestas de los maestros se proponen los siguientes elementos:

- Considerar comisiones no ajenas como diferentes si al menos difieren en un elemento
- Tener un procedimiento para generar comisiones (Incluye la idea de hacer y deshacer comités)
- Observar si las comisiones propuestas no están repetidas
- Conocer procedimientos de conteo (regla del producto y combinaciones)

Se definen los siguientes niveles teniendo en cuenta posibles ideas de los profesores:

| PREESTRUCTURAL  | UNIESTRUCTURAL   | MULTIESTRUCTURAL   | RELACIONAL   |
|---|--|--|--|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>- Incluye el que no deshacen comités.</li> <li>- Consideran el número total de sujetos, forman comités y no los deshacen.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Deshacen comités</li> <li>- Proponen listas incompletas de comités</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Consideran dos criterios de los anteriores.</li> <li>- Deshacen comités y emplean cálculo aritmético.</li> <li>- Uso de la regla del producto.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Utilización y explicación adecuada de la combinatoria.</li> </ul> |

El siguiente cuadro 6A muestra las frecuencias y porcentaje de los niveles en que se ubicaron las respuestas de los profesores con respecto a la pregunta A, según la opción elegida:

| NIVELES DE PENSAMIENTO | OPCIÓN 1 <sup>a</sup> |    | OPCIÓN 2A  |   | OPCIÓN 3A  |    |
|------------------------|-----------------------|----|------------|---|------------|----|
|                        | FRECUENCIA            | %  | FRECUENCIA | % | FRECUENCIA | %  |
| NO CONTESTÓ            | 0                     | -  | 0          | - | 0          | -  |
| PREESTRUCTURALES       | 2                     | 14 | 0          | - | 12         | 86 |
| UNIESTRUCTURALES       | 0                     | -  | 0          | - | 0          | -  |
| MULTIESTRUCTURALES     | 0                     | -  | 0          | - | 0          | -  |
| RELACIONALES           | 0                     | -  | 0          | - | 0          | -  |
| TOTAL                  | 2                     | 14 | 0          | - | 12         | 86 |

CUADRO 6A: TABLA DE FRECUENCIAS: RAZONAMIENTO COMBINATORIO.

A continuación presentamos los enunciados de los profesores para cada opción elegida.

*Opción 1A. Se pueden formar menos comisiones diferentes de 2 personas que de 6 personas\**

| NIVEL            | CARACTERÍSTICAS  |
|------------------|--|
| Preestructural   | M6: De seis no, pero de 2 si se formarían 5 comisiones de 2<br>M8: (no se es algo que requiere tiempo para analizar) |
| Uniestructural   | No hubo respuestas de este nivel   |
| Multiestructural | No hubo respuestas de este nivel   |
| Relacional       | No hubo respuestas de este nivel   |

\* Opción correcta

*Opción 2A, se pueden formar tantas comisiones de 2 personas como de 6 personas<sup>+</sup>. No hubo elección de esta opción por parte de los profesores.*

<sup>+</sup> Opción incorrecta

*Opción 3A, se pueden formar más comisiones diferentes de 2 personas que de 6 personas. ¿Por qué?\**

| NIVEL          | CARACTERÍSTICAS  |
|----------------|--|
| Preestructural | M1: Porque sabemos el número exacto de personas que participan en el grupo y por ello podemos decidir cuantas comisiones hacer, por lo que es más factible decidir que las comisiones sean de 2 personas para lograr tener mayores opciones de información sobre aquello que necesitamos saber, y tomar decisiones más acertadas.<br>M2: Porque en un grupo de 10 personas se forman 5 comisiones formadas de 2 personas.<br>M3: Sí, porque el total de personas en el grupo son 10 y pueden formarse 5 comisiones de 2 personas, mientras que de 6 personas se formaría 1 comisión y sobrarían 4 personas.<br>M4: Verdadero, porque se utilizan menos personas por cada comisión y se pueden formar 5 comisiones de 2 personas.<br>M5: Sí, porque habrá más integrantes en los equipos a formar.<br>M7: Sería ésta por que las comisiones tendrán más integrantes.<br>M9: Esta es la verdadera por que se pueden formar más comisiones de |

|                  |   |
|------------------|---|
|                  | <p>tres personas.</p> <p>M10: Sí, porque hay más posibilidades de formar más comisiones con grupos de 2 que de 6</p> <p>M11: Sí porque se formarían 5 comisiones diferentes.</p> <p>M12: Esta afirmación es la correcta porque se pueden formar 5 comisiones de 2 personas.</p> <p>M13: Se pueden formar más combinaciones de 2 personas porque se pueden formar 20 comisiones.</p> <p>M14: Si solo hay 10 personas, no se puede dos comisiones de 6.</p> |
| Uniestructural   | No hubo respuestas de este nivel  |
| Multiestructural | No hubo respuestas de este nivel  |
| Relacional       | No hubo respuestas de este nivel  |

\*\* Opción incorrecta.

*Resumen.* De manera general, los profesores únicamente forman comités con el número de sujetos indicados, no intentan desagrupar para formar otros diferentes, los profesores no han elaborado esquemas combinatorios.

***B).- Si las comisiones pueden ser de 3 o de 7 personas. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones piensas que es verdad?***

***Opción 1B.- Se pueden formar menos comisiones diferentes de 7 personas que de 3 personas.***

***Opción 2B\*.- Se pueden formar tantas comisiones diferentes de 7 personas que de 3 personas.***

***Opción 3B.- Se pueden formar más comisiones diferentes de 7 personas que de 3 personas.***

***¿Por qué?***

Este problema es más simple que el anterior pues la suma de 3 y 7 es 10 y esto hace equiparable cada comité de tamaño 3 con un comité formado por 7, a saber, el complementario, como se ilustra en seguida:

012 ↔ 3456789

013 ↔ 2456789

014 ↔ 2356789

.....

Se deduce entonces que la respuesta correcta es la opción 2B.

Los problemas presentes en esta pregunta fueron análogos a la parte a).

De este modo, el pensamiento de los profesores se considera en los niveles:

| PREESTRUCTURAL                                     | UNIESTRUCTURAL   | MULTIESTRUCTURAL  | RELACIONAL  |
|--|--|---|---|
| - Si únicamente forma comisiones y no las deshace. | - Si forma comisiones, las deshace y forma otras, sin llegar al total. | - Si forma colecciones, las deshace y llega al resultado total. | - Si utiliza alguna técnica de cálculo, diagrama de árbol o regla del producto. |

El siguiente cuadro 6B muestra las frecuencias y porcentaje de los niveles en que se ubicaron las respuestas de los profesores con respecto a la pregunta B, según la opción elegida:

| NIVELES DE PENSAMIENTO | OPCIÓN 1B  |    | OPCIÓN 2B  |    | OPCIÓN 3B  |    |
|------------------------|------------|----|------------|----|------------|----|
|                        | FRECUENCIA | %  | FRECUENCIA | %  | FRECUENCIA | %  |
| NO CONTESTÓ            | 0          | -  | 0          | -  | 0          | -  |
| PREESTRUCTURALES       | 9          | 65 | 3          | 21 | 2          | 14 |
| UNIESTRUCTURALES       | 0          | -  | 0          | -  | 0          | -  |
| MULTIESTRUCTURALES     | 0          | -  | 0          | -  | 0          | -  |
| RELACIONALES           | 0          | -  | 0          | -  | 0          | -  |
| TOTAL                  | 9          | 65 | 3          | 21 | 2          | 14 |

CUADRO 6B: TABLA DE FRECUENCIAS: RAZONAMIENTO COMBINATORIO.

A continuación ubicamos los enunciados que proporcionaron los profesores.

*Opción 1B, Se pueden formar menos comisiones diferentes de 7 personas que de 3 personas.*

| NIVEL          | CARACTERÍSTICAS   |
|----------------|---|
| Preestructural | <p>M2: Porque integran más personas una comisión por lo tanto reduce el número de personas para formar más comisiones.</p> <p>M3: Sí porque de 7 personas se forma 1 comisión y sobran 3 personas, mientras que de 3 personas se forman 3 comisiones y sobra 1 persona.</p> <p>M4: Verdadero.</p> |

|                  |   |
|------------------|---|
|                  | <p>M6: De 7 no pero de 3 si.</p> <p>M9: Esta porque se pueden formar 3 comisiones de 3 personas aunque sobre un elemento.</p> <p>M10: Sí, se forman menos de 7.</p> <p>M11: Sí, porque de 7 personas solo se formaría una comisión.</p> <p>M12: Sí, porque de 7 personas nada más se puede formar 1 comisión, en cambio de 3 personas se forman 3 comisiones.</p> <p>M13: SI PORQUE SON MAS PERSONAS.</p> |
| Uniestructural   | No hubo respuestas de este nivel  |
| Multiestructural | No hubo respuestas de este nivel  |
| Relacional       | No hubo respuestas de este nivel  |

*Opción 2B, Se pueden formar tantas comisiones diferentes de 7 personas que de 3 personas*

| NIVEL            | CARACTERÍSTICAS   |
|------------------|---|
| Preestructural   | <p>M7: Considero que ésta por que hay más personas.</p> <p>M8: Tal vez ésta.</p> <p>M1: Considero esta opción, porque no tenemos un limite de participantes por lo que existe la posibilidad únicamente de pensar en las personas que se necesitan para formar dichas comisiones.</p> |
| Uniestructural   | No hubo respuestas de este nivel  |
| Multiestructural | No hubo respuestas de este nivel  |
| Relacional       | No hubo respuestas de este nivel  |

*Opción 3B, Se pueden formar más comisiones diferentes de 7 personas que de 3 personas. ¿Por qué?*

| NIVEL          | CARACTERÍSTICAS                              |
|----------------|--|
| Preestructural | M5: Sí, porque se pueden formar más equipos. |

|                  |  |
|------------------|--|
|                  | M14: Sí, porque no ajustan para más comisiones de 7. |
| Uniestructural   | No hubo respuestas de este nivel                     |
| Multiestructural | No hubo respuestas de este nivel                     |
| Relacional       | No hubo respuestas de este nivel                     |

*Conclusión.* Las respuestas a estas preguntas indican que la mayoría de los profesores no han construido las operaciones combinatorias, ya que imaginan la conformación de comités sólo dividiendo el total de personas entre el número de comités. Las operaciones combinatorias exigen la reversibilidad en la siguiente forma: elegir un comité de la población y registrarlo, después deshacer el comité e incorporar sus miembros a la población; volver a formar otro comité y verificar que no coincide con los formados previamente.

#### **4.4.- Comprensión de la variabilidad en función del tamaño de las muestras.**

Los problemas del tamaño de la muestra son complicados pues involucran nociones sutiles como la de la ley de los grandes números y cálculos complicados como el de las distribuciones binomiales y normales. Sin embargo, se decidió mantener esta pregunta del cuestionario de Azcárate (1996) a pesar de que se sabía de antemano que los maestros no cuentan con las herramientas matemáticas para resolverlos porque la intención era sólo explorar si los maestros tienen ideas intuitivas sobre la relación entre la variabilidad y el tamaño de la muestra.

Es importante la idea de que hay más variabilidad respecto al valor esperado en muestras pequeñas que en muestras grandes, de modo que se deben esperar desviaciones mayores, en términos relativos, a la media o al valor esperado en muestras pequeñas que en muestras grandes.

**Pregunta:** *En cierta ciudad hay dos hospitales. En el más pequeño se registran 15 nacimientos diarios, por término medio al año, mientras que en el otro hospital, de mayor dimensión, se registran 45 nacimientos diarios aproximadamente.*

***Tú sabes que en general el 50% del total de recién nacidos son varones, sin embargo, si nos centramos en un recuento diario ese porcentaje fluctúa.***

***En cada uno de los hospitales indicados se han contabilizado, a lo largo de todo un año, los días en los que el porcentaje de varones superó el 70% de los nacimientos de dicho día. ¿En qué hospital crees que esa circunstancia ha ocurrido un mayor número de días?***

Para dar una respuesta adecuada a esta pregunta, es necesario entender el concepto de variabilidad, en el sentido de reconocer que la magnitud de las desviaciones del valor esperado está en función del tamaño de las muestras y que es más fácil que haya desviaciones mayores en las muestras pequeñas que en las grandes.

Una analogía puede ser ilustrativa. ¿Qué es más fácil obtener más del 70% de águilas en tres volados o en nueve volados? En el primer caso, la probabilidad de obtener más de 70% de águilas es  $\frac{1}{8} = 0.125$ , ya que hay un resultado (AAA) de ocho:

|            |     |
|------------|-----|
| <b>AAA</b> | SAA |
| AAS        | SAS |
| ASA        | SSA |
| ASS        | SSS |

Para contar el caso de nueve no es posible enlistar las  $2^9 = 512$  posibilidades. En su lugar se puede hacer el cálculo binomial correspondiente, teniendo en cuenta que cuando el número de águilas es 7, 8 y 9, se tiene que el número de águilas es mayor que el 70%:

$$\left( \binom{9}{7} + \binom{9}{8} + \binom{9}{9} \right) \div 2^9 = (36 + 9 + 1) / 2^9 \approx 0.09$$

Claramente la probabilidad de que haya más del 70% de águilas es mayor en la muestra pequeña (0.125) que en la muestra grande (0.09).

Elementos involucrados:

- Variabilidad.

- Tamaño de la muestra.
- Proporcionalidad.
- Ley de los grandes números.
- Múltiples posibilidades.
- Menor probabilidad.
- Mayor probabilidad.
- Interpretación frecuencial.

Se definen los siguientes niveles para clasificar las respuestas de los profesores:

| PREESTRUCTURAL  | UNIESTRUCTURAL  | MULTIESTRUCTURAL                                    | RELACIONAL   |
|---|---|---|--|
| - Mencionar ideas que no tienen nada que ver con el concepto.<br>- Confundir el espacio muestral como espacio físico. | - Tomar en cuenta en su argumento uno de los elementos involucrados.<br>- Responder la opción correcta. | - Dar un argumento que incluya dos elementos o más. | - Argumento que incluya el concepto de variabilidad. |

Los pensamientos de los profesores se ubicaron en los siguientes niveles (cuadro 7):

| NIVELES DE PENSAMIENTO | En el hospital pequeño |    | En el gran hospital |    | Hay las mismas posibilidades |    |
|------------------------|------------------------|----|---------------------|----|------------------------------|----|
|                        | FRECUENCIA             | %  | FRECUENCIA          | %  | FRECUENCIA                   | %  |
| NO CONTESTÓ            | 0                      | -  | 0                   | -  | 0                            | -  |
| PREESTRUCTURALES       | 0                      | -  | 7                   | 50 | 5                            | 36 |
| UNIESTRUCTURALES       | 2                      | 14 | 0                   | -  | 0                            |    |
| MULTIESTRUCTURALES     | 0                      | -  | 0                   | -  | 0                            | -  |
| RELACIONALES           | 0                      | -  | 0                   | -  | 0                            | -  |
| TOTAL                  | 2                      | 14 | 7                   | 50 | 5                            | 36 |

CUADRO 7: TABLA DE FRECUENCIAS: ESPACIO MUESTRAL.

Los profesores que orientaron sus respuestas a -En el pequeño- presentaron los siguientes argumentos:

| NIVEL | CARACTERÍSTICAS |
|-------|-----------------|
|-------|-----------------|

|                  |  |
|------------------|--|
| Preestructural   | No hubo respuestas de este nivel   |
| Uniestructural   | M4: Porque nacen menos y el porcentaje de varones, reduce cada día en comparación con el hospital grande.<br>M11: Es más probable en el hospital pequeño |
| Multiestructural | No hubo respuestas de este nivel   |
| Relacional       | No hubo respuestas de este nivel   |

Respuestas orientadas a -En el gran hospital-. (Opción no adecuada)

| NIVEL            | CARACTERÍSTICAS  |
|------------------|--|
| Preestructural   | M3: En este hospital, porque ahí se registran el mayor número de nacimientos.<br>M5: En éste.<br>M6: Si porque es amplio y caben más personas.<br>M7: Existe más probabilidad.<br>M8: Por que aquí nacen más niños.<br>M9: En este hospital por que es de mayor dimensión. A mayor dimensión mayor posibilidad.<br>M10: En el gran hospital. |
| Uniestructural   | No hubo respuestas de este nivel   |
| Multiestructural | No hubo respuestas de este nivel   |
| Relacional       | No hubo respuestas de este nivel   |

Respuestas orientadas hacia -Hay las mismas posibilidades de que sea en uno u otro hospital-:

| NIVEL          | CARACTERÍSTICAS  |
|----------------|--|
| Preestructural | M1: Sí, porque se contabiliza de acuerdo al número de recién nacidos en cada hospital.<br>M2: Por que es diario.<br>M12: No, para que esto suceda deben tener los hospitales la misma dimensión. |

|                  |  |
|------------------|--|
|                  | M13: SI, PORQUE SE PIDE PORCENTAJE NO CANTIDAD.<br>M14: Sí, cada número tiene su porcentaje. |
| Uniestructural   | No hubo respuestas de este nivel   |
| Multiestructural | No hubo respuestas de este nivel   |
| Relacional       | No hubo respuestas de este nivel   |

*Resumen.* De manera general, los profesores no reconocen que en las muestras pequeñas es más fácil que se den los resultados que en muestras grandes. Tres profesores consideran como importante el tamaño físico de los hospitales, no presentan claridad en cuanto al reconocimiento del porcentaje como una representación de la cantidad enunciada. Se centran exclusivamente en las cantidades absolutas, fijándose en el número de varones.

Los maestros sesgan su respuesta hacia el heurístico de la representatividad (Kahneman, Slovic y Tversky, 1982) consideran que si la probabilidad de que nazca hombre o mujer es del 50% aproximadamente, piensan que este porcentaje tiene que ser trasferido en todas las representaciones que se den hacia este fenómeno y en cualquier muestra, siempre tienden a respetar esta proporción.

Para ellos, lo mismo le da que sean de 2 nacimientos 1, que de 200 nacimientos 100. Estos tipos de razonamientos han sido estudiados por Hope y Kelly (1983), Kahneman, Slovic y Tversky (1982) y Shaughnessy (1981) quienes han puesto de manifiesto la existencia de errores sistemáticos y conductas estereotipadas persistentes en la toma de decisiones por parte de los individuos ante situaciones de tipo probabilístico.

En general, esta pregunta resultó demasiado complicada para los maestros y posiblemente no llegaron a comprender en qué consistía el problema, pues no dieron muestras de apoyarse en modelos sencillos o en ideas intuitivas sobre tamaño de muestra y variación.

#### ***4.5- El juego de los dados: Utilización de la Teoría Laplaciana***

Los profesores examinados no emplean la teoría Laplaciana para justificar sus elecciones. En la regla de Laplace se enuncia que: “*La probabilidad es la razón del número de casos favorables al número de casos posibles, siempre que todos los resultados sean igualmente probables*” (Batanero, 1991).

Las respuestas de algunos profesores consideran la presencia del azar entendida como el desconocimiento de no saber quien puede ganar, ante ello, les da lo mismo elegir a cualquier jugador. No toman en cuenta el espacio muestral, por lo que no incluyen los casos posibles y los casos favorables.

**Pregunta: Tenemos el siguiente juego: se lanzan dos dados cúbicos y se calcula el producto de los números que aparecen. Si el resultado es par gana el jugador B y si es impar el jugador A.**

**¿Qué jugador escogerías ser?**

**¿Es justo el juego?**

**¿Por qué?**

Para llegar a los resultados correctos se debe seguir un procedimiento y hacer cálculos. Primero se debe conocer el espacio muestral; es decir, los resultados posibles que pueden darse al lanzar los dos dados, segundo, obtener los productos de los resultados posibles, hacer una lista con los resultados favorables, estimar y calcular las probabilidades, decidir por el que sea más favorable y seleccionarlo.

Por lo que al analizar la posible respuesta, encontramos que, los elementos involucrados en la definición son:

- Espacio muestral.
- Obtener los productos.
- Casos favorables (enumeración de casos favorables).
- Casos posibles (listado de casos).
- Calcular probabilidades.

Los pensamientos de los profesores se ubicaran en los niveles:

| PREESTRUCTURAL                         | UNIESTRUCTURAL                                     | MULTIESTRUCTURAL               | RELACIONAL                    |
|--|--|--------------------------------|-------------------------------|
| Responder sin considerar los criterios | Elegir la opción correcta sin contradecirla con la | Manifestar al menos dos de los | Responder adecuadamente y con |

|   |  |                       |                    |
|---|--|-----------------------|--------------------|
| posibles.<br>- Dar respuestas inapropiadas.<br>- No ser congruente en sus respuestas. | argumentación.<br>- Juego injusto.<br>- Indicar la proporción correcta.<br>- Tomar en cuenta los casos posibles y casos favorables.<br>- Probabilidad. | critérios anteriores. | argumentos claros. |
|---|--|-----------------------|--------------------|

Las respuestas de los profesores se ubicaron en los siguientes niveles (cuadro 8A):

| NIVELES DE PENSAMIENTO | FRECUENCIA | %   |
|------------------------|------------|-----|
| NO CONTESTÓ            | 1          | 7   |
| PREESTRUCTURALES       | 11         | 77  |
| UNISTRUCTURALES        | 1          | 7   |
| MULTISTRUCTURALES      | 1          | 7   |
| RELACIONALES           | 0          | -   |
| TOTAL                  | 14         | 100 |

CUADRO 8A: TABLA DE FRECUENCIAS 'EL JUEGO DE LOS DADOS" (LOS PRODUCTOS)  
Los argumentos de los profesores se situaron en los siguientes niveles:

| NIVEL          | CARACTERÍSTICAS            |                     |  |
|----------------|----------------------------|---------------------|--|
|                | ¿Qué jugador escoger ser?  | ¿Es justo el juego? | ¿Por qué?  |
| Preestructural | M1: Cualquier opción.      | M1: Si.             | M1: Es un juego de posibilidades (de azar).  |
|                | M2: A ó B.                 | M2: No.             | M2: Son juegos de azar.  |
|                | M3: Cualquiera de los dos. | M3: Si.             | M3: Porque las posibilidades son las mismas para ambos jugadores.                    |
|                | M5: Cualquiera.            | M5: Si.             | M5: Porque es azaroso.   |
|                | M6: El B.                  | M6: No.             | M6: Porque el A debe ser el ganador y no el B porque el abecedario empieza por la A. |

|                  |  |                  |  |
|------------------|--|------------------|--|
|                  | M7: Cualquiera.                          | M7: Desde luego. | M7: Por que están parejos.   |
|                  | M8: Cualquiera podría ser A por ejemplo. | M8: Si.          | M8: Por que no hay posibilidades altas para uno más que para otro.         |
|                  | M9: A ó B.                               | M9: Si.          | M9: Por que es un juego de azar.   |
|                  | M10: Cualquiera.                         | M10: Si.         | M10: Porque cualquiera tiene la misma posibilidad.                         |
|                  | M11: Jugador A.                          | M11: Si.         | M11: Porque hay las mismas posibilidades para los dos jugadores.           |
|                  | M14: B.                                  | M14: Si.         | M14: Los productos de los dados son el mismo número de par como impar.     |
| Uniestructural   | M4: Cualquiera de los dos.               | M4: No.          | M4: Porque los dos tienen diferentes posibilidades.                        |
| Multiestructural | M12: Jugador B.                          | M12: No.         | M12: Porque la mayoría de los resultados de estos productos es número par. |
| Relacional       | No hubo respuestas de este nivel         |                  |  |

*Resumen.* Doce profesores se ubican en el nivel preestructural; dos de ellos eligen apropiadamente el jugador que tiene más posibilidades, pero se contradicen en sus argumentos que proponen como justificación, cinco presentan ideas no adecuadas, y cuatro manifiestan incongruencia entre sus respuestas.

Ubicamos un profesor en Uni-estructural, éste reconoce únicamente la existencia de que los jugadores tienen distintas posibilidades. Un maestro se ubicó en el nivel multi-estructural debido a que eligió adecuadamente el jugador con más posibilidades, ubicó al juego como injusto, e indicó que los resultados que más se manifiestan son los pares.

***Modificamos el juego. Ahora en lugar de calcular el producto, calculamos la suma de los números obtenidos al lanzar los dos dados.***

**¿Qué jugador escogerías ser en este caso, el A (que gana con impares) o el B (que gana con pares)?**

Para resolver la pregunta ¿Qué jugador escogerías ser? y tomar una decisión más adecuada, se tiene que conocer el espacio muestral y posteriormente usar la regla de Laplace.

Elementos involucrados:

- Lista de resultados posibles (espacio muestral).
- Obtener las sumas.
- Contar casos favorables (enumerar los favorables).
- Contar casos posibles.
- Razón de los casos favorables y casos posibles.
- Calcular las probabilidades.

Las respuestas de los profesores se pueden ubicar en los siguientes niveles:

| PREESTRUCTURAL                                  | UNIESTRUCTURAL  | MULTIESTRUCTURAL                           | RELACIONAL   |
|---|---|--|--|
| - Elección inadecuada y argumento incongruente. | - Elección adecuada e indicar al menos un criterio en el argumento. | - Elección adecuada y argumento aceptable. | - Elección adecuada y argumento claro y coherente. |

Los pensamientos de los profesores se ubicaron en los siguientes niveles (cuadro 8B):

| NIVELES DE PENSAMIENTO | FRECUENCIA | %   |
|------------------------|------------|-----|
| NO CONTESTÓ            | 2          | 14  |
| PREESTRUCTURALES       | 12         | 86  |
| UNIESTRUCTURALES       | 0          | -   |
| MULTIESTRUCTURALES     | 0          | -   |
| RELACIONALES           | 0          | -   |
| TOTAL                  | 14         | 100 |

CUADRO 8B: TABLA DE FRECUENCIAS 'EL JUEGO DE LOS DADOS' (SUMAS OBTENIDAS)

Los argumentos de los profesores se situaron en los niveles:

|  | CARACTERÍSTICAS                |           |
|--|--------------------------------|-----------|
|  | ¿Qué jugador escogerías ser en | ¿Por qué? |

| NIVEL            | este caso, el A (que gana con impares) o el B (que gana con pares) |  |
|------------------|--|--|
| Preestructural   | M2: A ó B.   | M2: Ambos tienen posibilidades de ganar.                     |
|                  | M3: Cualquiera de los dos.   | M3: Porque se tiene el mismo número de posibilidades.        |
|                  | M4: B.   | M4: Porque tiene la probabilidad de sumar más números.       |
|                  | M5: Cualquiera.  | M5: Es azar.   |
|                  | M6: El B.  | M6: Porque así me lo imagino que ganaría el jugador del par. |
|                  | M7: El "B".  | M7: Porque el último número es par y mayor que el impar.     |
|                  | M8: el B.  | M8: por que los pares tienen más probabilidad.               |
|                  | M9: cualquiera.  | M9: Porque con los dos se puede ganar.                       |
|                  | M10: cualquiera.   | M10: porque los 2 tienen las mismas posibilidades.           |
|                  | M11: El jugador A.   | M11: Las posibilidades son iguales.                          |
|                  | M12: El B.   | M12: Tiene 2 posibilidades más de ganar.                     |
| M14: A           | M14: Se vale hablar de suerte y en este caso sería suerte.         |  |
| Uniestructural   | No hubo respuestas de este nivel                                   |  |
| Multiestructural | No hubo respuestas de este nivel                                   |  |
| Relacional       | No hubo respuestas de este nivel                                   |  |

*Resumen.* En lo general, los profesores no argumentan su elección considerando la teoría Laplaciana, no se observa la utilización del espacio muestral. Cinco de los profesores que eligen la opción correcta reconocen la

presencia del azar en cuanto a que ambos jugadores pueden ganar, pero no reconocen los casos favorables de los casos posibles.

Cinco hacen una elección inadecuada y presentan argumentos incongruentes, y dos maestros eligen inadecuadamente al jugador, Uno identifica el azar y el otro lo relaciona con la suerte.

***Si tuvieras que apostar una gran cantidad de dinero al resultado de sumar los dos números obtenidos al lanzar los dados.***

***¿A qué número preferirías apostar, al 5 o al 6?***

Se necesita nuevamente determinar el espacio muestral y aplicar la definición Laplaciana, después de conocer los casos posibles y los casos favorables para cada resultado. Una vez obtenidas las probabilidades se deben comparar las fracciones. Otra forma es simplemente comparar los casos favorables a cada evento.

Elementos involucrados:

- Espacio muestral.
- Casos posibles.
- Casos favorables.
- Mayor probabilidad.
- Menor probabilidad.

Los enunciados de los profesores se clasifican en los niveles definidos a continuación:

| PREESTRUCTURAL  | UNIESTRUCTURAL   | MULTIESTRUCTURAL   | RELACIONAL   |
|---|--|--|--|
| - Si su elección no es adecuada y su argumento es incongruente. | - Si su elección es adecuada y su argumento contiene un elemento de los descritos arriba | - Si su elección es adecuada y su argumento contiene al menos dos elementos de los descritos arriba. | - Si su elección es adecuada y su argumento claro y coherente. |

Se obtiene la siguiente tabla después de aplicar las anteriores categorías a las respuestas de los profesores (cuadro 8C):

| NIVELES DE PENSAMIENTO | FRECUENCIA | %  |
|------------------------|------------|----|
| NO CONTESTÓ            | 3          | 22 |
| PREESTRUCTURALES       | 8          | 57 |

|                    |    |     |
|--------------------|----|-----|
| UNIESTRUCTURALES   | 3  | 21  |
| MULTIESTRUCTURALES | 0  | -   |
| RELACIONALES       | 0  | -   |
| TOTAL              | 14 | 100 |

CUADRO 8C: TABLA DE FRECUENCIAS (APOSTAR AL 5 O AL 6)

Los argumentos de los maestros se situaron en los siguientes niveles:

| NIVEL            | CARACTERÍSTICAS                                 |   |
|------------------|---|---|
| Preestructural   | ¿A qué número preferirías apostar, al 5 o al 6? | ¿Por qué?   |
|                  | M4: 5.  | M4: Porque la probabilidad es más rápida de sumar.  |
|                  | M6: Al 6.                                       | M6: Porque el 6 es número par.  |
|                  | M7: 6.  | M7: Por que obtendría más puntos al sumar.  |
|                  | M8: 5.  | M8: Por que es impar.   |
|                  | M9: a cualquiera de los dos.                    | M9: Porque con los dos se puede hacer la combinación.                                       |
|                  | M10: al 6.                                      | M10: porque se pueden sumar las diferentes caras y tiene uno la posibilidad.                |
|                  | M11: al 6.                                      | M11: el resultado sería mayor.  |
|                  | M14: 6.   | M14: Porque el resultado es mayor y se cree que se apuesta por el que gana mayor resultado. |
| Uniestructural   | M3: Al 6.                                       | M3: Porque hay mayor número de posibilidades.   |
|                  | M5: 6.  | M5: Tiene mayor probabilidad de ganar.  |
|                  | M12: Al 6.                                      | M12: Tiene más posibilidades para ganar.  |
| Multiestructural | No hubo respuestas de este nivel                |   |

|            |                                  |
|------------|----------------------------------|
| Relacional | No hubo respuestas de este nivel |
|------------|----------------------------------|

*Resumen.* De los Once docentes ubicados en el nivel preestructural, cinco eligen la opción del jugador apropiada pero dan argumentos incongruentes, y tres maestros muestran respuestas incongruentes al cuestionamiento. Tres profesores se ubicaron en el nivel uniestructural, eligen al jugador adecuado e incluyen la idea de mayor posibilidad.

De manera general, los profesores dan respuestas sin tomar en cuenta la probabilidad, no consideran el espacio muestral por lo que no incluyen ni la proporción de los resultados con respecto a los casos posibles, ni indican la presencia de la mayor o menor probabilidad con respecto a los resultados. Muestran un desconocimiento de la teoría Laplaciana.

#### **4.6- Reconocimiento de los profesores de sucesos aleatorios**

**Pregunta:** *A continuación te describimos brevemente una serie de sucesos. ¿Cuáles de los sucesos descritos piensas que son aleatorios; es decir, relacionados con el azar? Justifica en cada caso el porqué los consideras aleatorios o no aleatorios.*

Para caracterizar a los sucesos aleatorios, retomamos la postulación de M. Moliner (1983) al referirse a lo aleatorio como “*Incierto. Se dice de aquello que depende de la suerte o al azar*”, siendo el azar “*la supuesta causa de los sucesos no debidos a una necesidad natural ni a una intervención humana ni divina*”. En esta acepción lo aleatorio sería contrapuesto a todo aquello de lo que se conoce sus causas y el “azar” estaría personificado como supuesta causa de los fenómenos aleatorios.

Se retoma aquí la idea manejada en los estudios realizados por Nisbett y Ross (1980); Evans (1984); Pérez Echevarría (1988), según los cuales el propio contexto en que está inmersa la situación, la información experiencial sobre dicho contexto y el sentido que tienen de ese hecho concreto, determinan los juicios y decisiones del sujeto para caracterizar la aleatoriedad.

Elementos involucrados:

- no se puede predecir con seguridad.
- Presencia del azar.
- Aleatoriedad.
- Incertidumbre.
- Múltiples posibilidades.
- Causa- efecto (elementos causales).
- Juegos de azar.
- Desconocimiento de los resultados (falta de información).
- Grado de incertidumbre.
- Experiencia.
- Contexto del suceso.

Los pensamientos de los profesores se ubicaran en los niveles:

| PREESTRUCTURAL  | UNIESTRUCTURAL   | MULTIESTRUCTURAL   | RELACIONAL  |
|---|--|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>- Si da argumentos fuera de lo que puede ser aleatorio.</li> <li>- Considerarlos como deterministas.</li> <li>- Pensar que es la acción de adivinar.</li> <li>- Justificaciones inapropiadas.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Si incluye al menos un elemento propio de la aleatoriedad.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Considerar dos o más criterios que caractericen la aleatoriedad.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>- argumentar de manera clara la aleatoriedad.</li> </ul> |

### La aleatoriedad en contextos naturales

**Tarea:** A continuación te describimos brevemente una serie de sucesos. ¿Cuáles de los sucesos descritos piensas que son aleatorios, es decir, relacionados con el azar? Justifica en cada caso el porqué los consideras aleatorios o no aleatorios.

- 1.- La germinación o no germinación de una semilla plantada. ¿Por qué?
- 2.- La próxima idea que te venga a la cabeza. ¿Por qué?
- 3.- Coger la gripe el mes que viene. ¿Por qué?
- 4.- Estar expuesto a coger la gripe el mes que viene. ¿Por qué?

Como se puede apreciar, los enunciados 1, 2, 3 y 4 son situaciones que se ubican en contextos naturales: germinación de una planta, ideas que vienen a la cabeza y coger la gripe. Todos son sucesos referidos a una situación en el futuro. Los eventos de los puntos 1 y 3 son claramente aleatorios, puesto que no se pueden predecir. El evento del enunciado 2 tiene un sesgo subjetivo, pues habrá quien afirme que las ideas que pensamos son deliberadas y no debidas al azar y habrá quien defienda lo contrario, que nos vienen ideas sin control alguno. Finalmente, el enunciado 4 se refiere a un evento prácticamente seguro, pues cualquier persona está expuesta a la gripe en todo momento.

El siguiente cuadro 9 muestra las frecuencias y porcentaje de los niveles en que se ubicaron las respuestas de los profesores con respecto al contexto natural:

| Pregunta | Nivel   | Aleatorio |     | No Aleatorio |     | Sin respuesta |     |
|----------|---------|-----------|-----|--------------|-----|---------------|-----|
| 1        | NINGUNO | -         | 0%  | -            | 0%  | 1             | 7%  |
|          | PRE     | 2         | 14% | 4            | 29% | -             | 0%  |
|          | UNI     | 2         | 14% | 4            | 29% | -             | 0%  |
|          | MULTI   | 1         | 7%  | -            | 0%  | -             | 0%  |
| 2        | NINGUNO | -         | 0%  | -            | 0%  | 2             | 14% |
|          | PRE     | 2         | 14% | 6            | 43% | -             | 0%  |
|          | UNI     | 4         | 29% | -            | 0%  | -             | 0%  |
|          | MULTI   | -         | 0%  | -            | 0%  | -             | 0%  |
| 3        | NINGUNO | -         | 0%  | -            | 0%  | 1             | 7%  |
|          | PRE     | 2         | 14% | 1            | 7%  | -             | 0%  |
|          | UNI     | 10        | 72% | -            | 0%  | -             | 0%  |
|          | MULTI   | -         | 0%  | -            | 0%  | -             | 0%  |
| 4        | NINGUNO | -         | 0%  | -            | 0%  | 1             | 7%  |
|          | PRE     | 3         | 22% | 2            | 14% | -             | 0%  |
|          | UNI     | 5         | 36% | 3            | 21% | -             | 0%  |
|          | MULTI   | -         | 0%  | -            | 0%  | -             | 0%  |

CUADRO 9.- RECONOCIMIENTO DE LA ALEATORIEDAD EN EL CONTEXTO NATURAL

A continuación se describe con mayor detalle lo que ocurrió con cada pregunta.

**1.- La germinación o no germinación de una semilla plantada. ¿Por qué?**

El siguiente cuadro 9.1 muestra las frecuencias y porcentaje de los niveles en que se ubicaron las respuestas de los profesores:

| La germinación o no germinación de una semilla plantada. | SI ES ALEATORIO |     | NO ES ALEATORIO |     | SIN RESPUESTA |    |
|--|-----------------|-----|-----------------|-----|---------------|----|
|  |                 |     |                 |     |               |    |
| NINGUNO  |                 |     |                 |     | 1             | 7% |
| PREESTRUCTURAL   | 2               | 14% | 4               | 29% | -             | 0% |
| UNIESTRUCTURAL   | 2               | 14% | 4               | 29% | -             | 0% |
| MULTIESTRUCTURAL   | 1               | 7%  | -               | 0%  | -             | 0% |
| RELACIONAL   | -               | 0%  | -               | 0%  | -             | 0% |
| TOTAL  | 5               | 35% | 8               | 58% | 1             | 7% |

CUADRO 9.1.- TABLA DE FRECUENCIAS GERMINACIÓN O NO DE UNA SEMILLA.

Los argumentos de los maestros se situaron en los siguientes niveles:

| NIVEL            | CARACTERÍSTICAS   |
|------------------|---|
| Preestructural   | M3: No aleatorio, porque por lo general todas las semillas germinan.<br>M12: No. Sabemos que va a germinar o nacer.<br>M14: No, porque todas las plantas germinan.<br>M7: Aleatorio, por que si es una semilla tiene que germinar.<br>M5: Aleatorio, si se le pone agua entrará en periodo de germinación.<br>M6: La germinación porque a eso se le llama experimento y se ve en la clase de naturales.           |
| Uniestructural   | M2: No aleatorios, porque este depende de otros factores para su germinación.<br>M4: No aleatorio, porque la planta nacerá si se cuida para que germine la semilla.<br>M11: No es aleatorio, una semilla en buen estado y el ambiente adecuado siempre germina.<br>M8: NO Aleatorio. Puede ser estéril.<br>M9: aleatorio, por que no se sabe si no va a germinar.<br>M10: Si, porque no sabemos si va a germinar. |
| Multiestructural | M13: ALEATORIO. NO TODAS LAS SEMILLAS GERMINAN SIEMPRE  |

|            |                                  |
|------------|----------------------------------|
|            | PORQUE INFLUYEN VARIOS FACTORES. |
| Relacional | No hubo respuestas de este nivel |

*Resumen.* Siete profesores se ubican en el nivel preestructural, tres consideran al fenómeno como no aleatorio e indican una justificación de tipo determinista. Tres lo consideran aleatorio, dos dan argumentos deterministas, y otro simplemente indica que es un experimento.

Seis maestros manifiestan un pensamiento uniestructural, cuatro lo consideran no aleatorio y piensan que el resultado se debe a otros factores, dos indican que es aleatorio y argumentan con la presencia del azar.

Uno de los profesores se ubicó en el nivel multiestructural, menciona que es un fenómeno aleatorio, identifica la presencia del azar y considera la inclusión en el resultado a otros factores.

Son interesantes los casos de tres profesores que consideran que es no-aleatorio el fenómeno. Al parecer lo que los mueve a hacer esa valoración es la posibilidad de modificar las probabilidades del evento, es decir, de ejercer cierto control; por ejemplo, tener cuidados y tenerla en un ambiente adecuado.

## **2.- La próxima idea que te venga a la cabeza. ¿Por qué?**

El siguiente cuadro 9.2 muestra las frecuencias y porcentaje de los niveles en que se ubicaron las respuestas de los profesores:

| La próxima idea que te venga a la cabeza. | SI ES ALEATORIO |     | NO ES ALEATORIO |     | SIN RESPUESTA |     |
|---|-----------------|-----|-----------------|-----|---------------|-----|
|   |                 |     |                 |     |               |     |
| NINGUNO                                   | -               | 0%  | -               | 0%  | 2             | 14% |
| PREESTRUCTURAL                            | 2               | 14% | 6               | 43% | -             | 0%  |
| UNIESTRUCTURAL                            | 4               | 29% | -               | 0%  | -             | -   |
| MULTIESTRUCTURAL                          | -               | 0%  | -               | 0%  | -             | -   |
| RELACIONAL                                | -               | 0%  | -               | 0%  | -             | -   |
| TOTAL                                     | 6               | 43% | 6               | 43% | 2             | 14% |

CUADRO 9.2.- TABLA DE FRECUENCIAS LA PRÓXIMA IDEA QUE TE VENGA A LA CABEZA.

Los argumentos de los maestros se situaron en los siguientes niveles:

| NIVEL          | CARACTERÍSTICAS   |
|----------------|---|
| Preestructural | M2: No aleatorio, porque no son juegos. Son situaciones de pensamiento. |

|                  |  |
|------------------|--|
|                  | M5: No sé. Porque es difícil de saber.<br>M7: No aleatorio, por que si sé que idea se me vendrá.<br>M10: NO, porque esta seguro que me va a venir una idea sea la que sea.<br>M11: NO ES ALEATORIO. ESTA PENSANDO.<br>M13: No es aleatorio, las ideas las generamos concientemente<br>M9: Aleatorio, por que no se me ocurre nada.<br>M12: Si, puede ser una idea satisfactoria. |
| Uniestructural   | M3: Aleatoria, porque nadie puede anticipar la próxima idea.<br>M4: Aleatorio, porque no sabemos que idea puede surgir de nuestra mente.<br>M8: Aleatorio. No puedo saber que me ocurrirá.<br>M14: Si es aleatorio. No se cual es la idea.   |
| Multiestructural | No hubo respuestas de este nivel   |
| Relacional       | No hubo respuestas de este nivel   |

*Resumen.* Diez profesores se ubican en el nivel preestructural. Seis de ellos consideran que no es aleatorio sus argumentos no incluyen la aleatoriedad, tres de éstos indican que una idea es una situación del pensamiento, dos lo ven como determinista y uno incluye el azar. Dos de los maestros manifiestan que el fenómeno es aleatorio, sus argumentos no consideran algún elemento de la aleatoriedad.

Cuatro maestros dan un pensamiento uniestructural, ubican el fenómeno como aleatorio y lo argumentan mediante el razonamiento de que no se sabe lo que ocurrirá.

### **3.- Coger la gripe el mes que viene. ¿Por qué?**

El siguiente cuadro 9.3 muestra las frecuencias y porcentaje de los niveles en que se ubicaron las respuestas de los profesores:

| Coger la gripe el mes que viene | SI ES ALEATORIO |     | NO ES ALEATORIO |    | SIN RESPUESTA |    |
|---------------------------------|-----------------|-----|-----------------|----|---------------|----|
|                                 |                 |     |                 |    |               |    |
| NINGUNO                         |                 |     |                 |    | 1             | 7% |
| PREESTRUCTURAL                  | 2               | 14% | 1               | 7% | -             | 0% |
| UNIESTRUCTURAL                  | 10              | 72% | -               | 0% | -             | 0% |
| MULTIESTRUCTURAL                | -               | 0%  | -               | 0% | -             | 0% |

|            |    |     |   |    |   |    |
|------------|----|-----|---|----|---|----|
| RELACIONAL | -  | 0%  | - | 0% | - | 0% |
| TOTAL      | 12 | 86% | 1 | 7% | 1 | 7% |

CUADRO 9.3.- TABLA DE FRECUENCIAS COGER LA GRIPE EL MES QUE VIENE.

Los argumentos de los maestros se situaron en los siguientes niveles:

| NIVEL            | CARACTERÍSTICAS  |
|------------------|--|
| Preestructural   | M2: No aleatorio, porque está afirmando.<br>M12: No. Depende nuestro estado de salud.<br>M9: Aleatorio, porque no soy enfermizo.   |
| Uniestructural   | M3: Aleatorio, porque nadie puede predecir su enfermedad.<br>M4: Aleatorio, porque me puede dar o no la gripe.<br>M5: Aleatorio. Porque no se sabe.<br>M6: Si casi la mayoría de personas. Porque al llover refresca la tierra.<br>M7: Aleatorio, porque no se sabe.<br>M8: Aleatorio, No sabría.<br>M10: Si, porque no sabemos si va a ocurrir.<br>M11: ALEATORIO. NO SE SABE.<br>M13: Aleatorio. No se sabe si ocurrirá.<br>M14: Si aleatorio, porque no se si me de o no. |
| Multiestructural | No hubo respuestas de este nivel   |
| Relacional       | No hubo respuestas de este nivel   |

*Resumen.* Cuatro profesores se ubican en el nivel preestructural, dos lo consideran no aleatorio, quienes no dan razones apropiadas. Uno más lo considera aleatorio e indica que depende de la salud.

Diez maestros tienen un pensamiento uniestructural. Consideran al fenómeno como aleatorio, la mayoría da un argumento basado en la idea de *no predicción*.

#### **4.- *Estar expuesto a coger la gripe el mes que viene. ¿Por qué?***

El siguiente cuadro 9.4 muestra las frecuencias y porcentaje de los niveles en que se ubicaron las respuestas de los profesores:

| Coger la gripe el mes que viene | SI ES ALEATORIO |     | NO ES ALEATORIO |     | SIN RESPUESTA |    |
|---------------------------------|-----------------|-----|-----------------|-----|---------------|----|
|                                 |                 |     |                 |     |               |    |
| NINGUNO                         |                 |     |                 |     | 1             | 7% |
| PREESTRUCTURAL                  | 3               | 22% | 2               | 14% | -             | 0% |
| UNIESTRUCTURAL                  | 5               | 36% | 3               | 21% | -             | 0% |

|                  |   |     |   |     |   |    |
|------------------|---|-----|---|-----|---|----|
| MULTIESTRUCTURAL | - | 0%  | - | 0%  | - | 0% |
| RELACIONAL       | - | 0%  | - | 0%  | - | 0% |
| TOTAL            | 8 | 58% | 5 | 35% | 1 | 7% |

CUADRO 9.4.- TABLA DE FRECUENCIAS ESTAR EXPUESTO A COGER LA GRIPE.

Los argumentos de los maestros se situaron en los siguientes niveles:

| NIVEL            | CARACTERÍSTICAS  |
|------------------|--|
| Preestructural   | M3: no aleatorio, porque todos estamos expuestos a diversas enfermedades<br>M6: Una parte de población. Porque hay personas o niños que no se cuidan.<br>M4: No aleatorio, porque hay probabilidad que pueda dar la gripe.<br>M9: aleatorio, no es probable.<br>M14: Si, por el cambio de clima que tenemos.   |
| Uniestructural   | M2: Aleatorio, porque esta expuesto todos los días.<br>M5: Aleatorio. Porque no sabemos.<br>M7: Aleatorio, porque no se sabe.<br>M8: Aleatorio. No se puede saber puede ocurrir o no ocurrir.<br>M10: NO, porque siempre estamos expuestos a la gripe.<br>M11: NO ALEATORIO. HAY LA MISMA POSIBILIDAD DE CONTAGIARSE O NO.<br>M12: Si. No sabemos si podemos estar contagiados de ese virus.<br>M13: No es aleatorio. Siempre estamos expuestos. |
| Multiestructural | No hubo respuestas de este nivel   |
| Relacional       | No hubo respuestas de este nivel   |

*Resumen.* De acuerdo a sus argumentos, ninguno de los profesores identificó el fenómeno como determinista, a pesar de que analizaron la situación desde sus puntos de vista y dieron respuestas diversas en cuanto a ubicarlo como aleatorio o no aleatorio. Hay algunas respuestas que parecen contradictorias, como M3, M10, M11. Los maestros que indicaron que es aleatorio incluyeron el azar únicamente.

### La aleatoriedad en el contexto de juego

**Tarea:** *A continuación te describimos brevemente una serie de sucesos. ¿Cuáles de los sucesos descritos piensas que son aleatorios, es decir,*

*relacionados con el azar? Justifica en cada caso el porqué los consideras aleatorios o no aleatorios.*

*5.- El número que se obtiene al lanzar un dado cúbico. ¿Por qué?*

*6.- Acertar el número que marca un dado ya lanzado, pero que no puedes ver. ¿Por qué?*

*7.- La cantidad de caras que se obtienen en 100 lanzamientos de una moneda sin trucar. ¿Por qué?*

Estas preguntas 5, 6 y 7 se refieren a situaciones de juego, las preguntas 5 y 7 se refieren a eventos futuros y la 6 a un evento pasado, en cuanto al espacio muestral la 5 tiene 6 resultados posibles, la 6 presenta 2 resultados posibles, si y no; la 7 tiene 100 resultados posibles. En la 5 y la 7 interviene el azar, en cambio la pregunta 6 tiene que ver con ausencia de información.

La mayoría de los profesores se ubicaron en un nivel uniestructural, se observó una facilidad para percibir la aleatoriedad en esas situaciones. Los argumentos indicaron la presencia del azar, la incertidumbre y las múltiples posibilidades. Aparece comúnmente el sesgo de la equiprobabilidad, así como la confusión de ver a la aleatoriedad como una situación que se puede adivinar. (Ver cuadro 10)

El siguiente cuadro 10 muestra las frecuencias y porcentaje de los niveles en que se ubicaron las respuestas de los profesores con respecto al contexto de juego:

| Pregunta | Nivel | Aleatorio |     | No Aleatorio |     | Sin respuesta |    |
|----------|-------|-----------|-----|--------------|-----|---------------|----|
| 5        | PRE   | 1         | 7%  | 2            | 14% | -             | 0% |
|          | UNI   | 11        | 79% | -            | 0%  | -             | 0% |
|          | MULTI | -         | 0%  | -            | 0%  | -             | 0% |
| 6        | PRE   | 4         | 28% | -            | 0%  | -             | 0% |
|          | UNI   | 10        | 72% | -            | 0%  | -             | 0% |
|          | MULTI | -         | 0%  | -            | 0%  | -             | 0% |
| 7        | PRE   | 4         | 28% | -            | 0%  | -             | 0% |
|          | UNI   | 10        | 72% | -            | 0%  | -             | 0% |
|          | MULTI | -         | 0%  | -            | 0%  | -             | 0% |

CUADRO 10.- RECONOCIMIENTO DE LA ALEATORIEDAD EN EL CONTEXTO DE JUEGO.

A continuación se describen con más detalle los resultados.

### 5.- El número que se obtiene al lanzar un dado cúbico. ¿Por qué?

| El número que se obtiene al lanzar un dado cúbico. | SI ES ALEATORIO |     | NO ES ALEATORIO |     | SIN RESPUESTA |    |
|--|-----------------|-----|-----------------|-----|---------------|----|
|  |                 |     |                 |     |               |    |
| PREESTRUCTURAL                                     | 1               | 7%  | 2               | 14% | -             | 0% |
| UNIESTRUCTURAL                                     | 11              | 79% | -               | 0%  | -             | 0% |
| MULTIESTRUCTURAL                                   | -               | 0%  | -               | 0%  | -             | 0% |
| RELACIONAL   | -               | 0%  | -               | 0%  | -             | 0% |
| TOTAL  | 12              | 86% | 2               | 14% | -             | 0% |

CUADRO 10.1.- TABLA DE FRECUENCIAS EL NÚMERO QUE SE OBTIENE AL LANZAR UN DADO.

Los argumentos de los maestros se situaron en los siguientes niveles:

| NIVEL            | CARACTERÍSTICAS  |
|------------------|--|
| Preestructural   | M3: No aleatorio, porque se conoce ya el número.<br>M5: Aleatorio, porque es imposible saberlo<br>M14: No, tiene que caer un número cualquiera que sea.  |
| Uniestructural   | M1: Aleatorio, porque se tiene la posibilidad de pronosticar más no estar seguro de acertar.<br>M2: Aleatorio, porque no sabe donde puede caer, por las 3 caras.<br>M4: Aleatorio, porque no sabe que número caerá.<br>M6: Depende en la suerte porque a veces cae por decir lleva todo ahí ya gano.<br>M7: Aleatorio, porque es impredecible.<br>M8: Aleatorio. No sabemos.<br>M9: Aleatorio, por que no se sabe que número caera.<br>M10: Sí, porque no sabemos que número va a caer.<br>M11: Si es aleatorio. No se sabe que ocurrirá.<br>M12: Si. No sabemos que número va a caer.<br>M13: ALEATORIO. NO SE SABE QUE VA A OCURRIR. |
| Multiestructural | No hubo respuestas de este nivel   |
| Relacional       | No hubo respuestas de este nivel   |

*Resumen:* Tres profesores se ubicaron en el nivel preestructural, dos consideraron el fenómeno como no aleatorio; uno indica que ya se conoce el número y otro porque piensa que de cualquier manera va a caer un número pero

no incluye el azar, uno lo considera aleatorio pero lo justifica como imposible. Once de los maestros se situaron en el nivel uniestructural, identificaron el fenómeno como aleatorio, nueve consideran la incertidumbre, uno da cuenta de la presencia del azar y uno argumento mediante la suerte.

**6.- Acertar el número que marca un dado ya lanzado, pero que no puedes ver. ¿Por qué?**

| Acertar el número que marca un dado ya lanzado, pero que no puedes ver. | SI ES ALEATORIO |      | NO ES ALEATORIO |    | SIN RESPUESTA |    |
|---|-----------------|------|-----------------|----|---------------|----|
|   |                 |      |                 |    |               |    |
| PREESTRUCTURAL  | 4               | 28%  | -               | 0% | -             | 0% |
| UNIESTRUCTURAL  | 10              | 72%  | -               | 0% | -             | 0% |
| MULTIESTRUCTURAL  | -               | 0%   | -               | 0% | -             | 0% |
| RELACIONAL  | -               | 0%   | -               | 0% | -             | 0% |
| TOTAL   | 14              | 100% | -               | 0% | -             | 0% |

CUADRO 10.2.- TABLA DE FRECUENCIAS ACERTAR EL NÚMERO QUE MARCA UN DADO.

| NIVEL          | CARACTERÍSTICAS  |
|----------------|--|
| Preestructural | <p>M6: Porque no, porque es un juego.</p> <p>M9: Aleatorio, por que se va a adivinar.</p> <p>M10: Si, porque como puedes adivinar el número, como también te puedes equivocar.</p> <p>M13: ALEATORIO. NO SE SABE CON EXACTITUD QUE NUMERO VA A CAER SERIA CASUALIDAD ADIVINAR.</p>   |
| Uniestructural | <p>M1: Aleatorio, porque cabe dentro de las posibilidades de acertar.</p> <p>M2: Aleatorio, porque tiene que elegir entre muchos.</p> <p>M3: Aleatorio, porque desconocía el número que había caído.</p> <p>M4: Aleatorio, porque no se sabe que número esta marcado.</p> <p>M5: Aleatorio, porque no sabemos.</p> <p>M7: Aleatorio. Porque por lo mismo el número esta dado pero no hemos visto.</p> <p>M8: aleatorio. No conocemos el número.</p> <p>M11: Aleatorio. No se sabe que número marcará.</p> <p>M12: Si. Tenemos duda de lo que va a suceder.</p> <p>M14: Si, no lo he visto y si le acierto es azar.</p> |

|                  |                                  |
|------------------|----------------------------------|
| Multiestructural | No hubo respuestas de este nivel |
| Relacional       | No hubo respuestas de este nivel |

*Resumen:* Cuatro profesores se ubican en preestructural, tres consideran que el resultado se puede adivinar, uno lo considera un juego sin considerar el azar. Diez maestros se ubicaron en uniestructural, cinco de ellos argumentan mediante el desconocimiento de la información, dos incluyen la incertidumbre, dos indican la presencia del azar y uno introduce la idea de múltiples posibilidades.

**7.- La cantidad de caras que se obtienen en 100 lanzamientos de una moneda sin trucar. ¿Por qué?**

| La cantidad de caras que se obtienen en 100 lanzamientos de una moneda sin trucar. | SI ES ALEATORIO |      | NO ES ALEATORIO |    | SIN RESPUESTA |    |
|--|-----------------|------|-----------------|----|---------------|----|
|  |                 |      |                 |    |               |    |
| PREESTRUCTURAL   | 4               | 28%  | -               | 0% | -             | 0% |
| UNIESTRUCTURAL   | 10              | 72%  | -               | 0% | -             | 0% |
| MULTIESTRUCTURAL   | -               | 0%   | -               | 0% | -             | 0% |
| RELACIONAL   | -               | 0%   | -               | 0% | -             | 0% |
| TOTAL  | 14              | 100% | -               | 0% | -             | 0% |

CUADRO 10.3.- TABLA DE FRECUENCIAS LA CANTIDAD DE CARAS QUE SE OBTIENEN.

| NIVEL          | CARACTERÍSTICAS   |
|----------------|---|
| Preestructural | M8: Aleatorio. Es imposible adivinar.<br>M11: Aleatorio, existen las mismas posibilidades de que caiga una u otra.<br>M13: ALEATORIO. PORQUE HAY LA MISMA POSIBILIDAD.  |
| Uniestructural | M1: aleatorio, porque pueden distribuirse de diversas formas.<br>M2: Aleatorio, porque hay muchos.<br>M3: Aleatorio, porque desconocemos el número de veces que va a caer una cara.<br>M4: Aleatorio, porque no se sabe exactamente la cantidad que sumará en los 100 lanzamientos.<br>M5: por qué aleatorio porque es juego azaroso.<br>M7: Aleatorio, porque no se sabe con precisión.<br>M9: aleatorio, por que es azar. |

|                  |   |
|------------------|---|
|                  | M10: Si, porque no sabes lo que va a caer.<br>M12: Sí, No es seguro de que caigan al mismo lado la moneda.<br>M14: Si. No se sabe cual cae. |
| Multiestructural | No hubo respuestas de este nivel  |
| Relacional       | No hubo respuestas de este nivel  |

*Resumen.* Tres profesores dan argumentos preestructurales, consideran la situación como aleatoria, dos incluyen el sesgo de la equiprobabilidad, uno confunde la aleatoriedad con la adivinanza. Diez maestros presentan ideas uniestructurales, toman la situación como aleatoria, seis consideran la incertidumbre, dos incluyen la idea de múltiples posibilidades y dos dan cuenta de la presencia del azar. Un maestro no contestó por lo que no se le consideró en ningún nivel de pensamiento.

*Conclusión.* La aleatoriedad en contextos de juegos es identificada con facilidad por los maestros, el argumento más frecuente es la afirmación contenida en la definición: “no se puede saber lo que va a ocurrir”.

#### **La aleatoriedad en el contexto atmosférico:**

8.- Si llovió en Tuxtla Gutiérrez, Chiapas el 13 de Abril de 1935. ¿Por qué?

9.- Si lloverá mañana en Tuxtla Gutiérrez, Chiapas. ¿Por qué?

10.- Si lloverá en Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, dentro de un mes. ¿Por qué?

Los planteamientos 8, 9 y 10 son situaciones que se ubican en el **contexto atmosférico** familiar a los profesores, ya que se ubica en la región a la que pertenecen. La pregunta 8 toma en cuenta el tiempo pasado, la 9 y 10 incluyen el tiempo futuro. Las tres situaciones dan origen a un espacio muestral con dos eventos posibles, si y no, pero no equiprobable. La 8 se considera no aleatoria cuando se tiene la información disponible.

El resultado de las observaciones nos indica que la mayoría de respuestas se ubicaron en el nivel uniestructural; los maestros identifican el tiempo del fenómeno pero no explican adecuadamente la aleatoriedad, mencionan la incertidumbre, la existencia de información, la probabilidad, algunos argumentos

son incongruentes, otros apelan a la presencia de un poder superior. (Ver cuadro 11)

El siguiente cuadro 11 muestra las frecuencias y porcentaje de los niveles en que se ubicaron las respuestas de los profesores con respecto al contexto atmosférico:

| Pregunta | Nivel | Aleatorio |     | No Aleatorio |     | Sin respuesta |    |
|----------|-------|-----------|-----|--------------|-----|---------------|----|
| 8        | PRE   | -         | 0%  | 7            | 51% | -             | 0% |
|          | UNI   | 3         | 21% | 4            | 28% | -             | 0% |
|          | MULTI | -         | 0%  | -            | 0%  | -             | 0% |
| 9        | PRE   | 1         | 7%  | 4            | 0%  | -             | 0% |
|          | UNI   | 9         | 65% | -            | 0%  | -             | 0% |
|          | MULTI | -         | 0%  | -            | 0%  | -             | 0% |
| 10       | PRE   | 5         | 35% | 1            | 7%  | -             | 0% |
|          | UNI   | 8         | 58% | -            | 0%  | -             | 0% |
|          | MULTI | -         | 0%  | -            | 0%  | -             | 0% |

CUADRO 11.- RECONOCIMIENTO DE LA ALEATORIEDAD EN EL CONTEXTO ATMOSFÉRICO.

A continuación se describe el análisis con más detalle.

### **8.- Si llovió en Tuxtla Gutiérrez, Chiapas el 13 de Abril de 1935. ¿Por qué?**

| Si llovió en Tuxtla Gutiérrez,<br>Chiapas el 13 de Abril de 1935. | SI ES<br>ALEATORIO |     | NO ES<br>ALEATORIO |     | SIN<br>RESPUESTA |    |
|---|--------------------|-----|--------------------|-----|------------------|----|
| PREESTRUCTURAL  | -                  | 0%  | 7                  | 51% | -                | 0% |
| UNIESTRUCTURAL  | 3                  | 21% | 4                  | 28% | -                | 0% |
| MULTIESTRUCTURAL  | -                  | 0%  | -                  | 0%  | -                | 0% |
| RELACIONAL  | -                  | 0%  | -                  | 0%  | -                | 0% |
| TOTAL   | 3                  | 21% | 11                 | 79% | -                | 0% |

CUADRO 11.1.- TABLA DE FRECUENCIAS SI LLOVIÓ EN TUXTLA GUTIÉRREZ, CHIAPAS EL 3 DE ABRIL DE 1935.

| NIVEL          | CARACTERÍSTICAS   |
|----------------|---|
| Preestructural | M2: No aleatorio, porque ya sucedió.<br>M3: No aleatorio, porque se conoce la fecha y ocurrió este evento.<br>M5: No, porque aleatorio, porque ya paso. |

|                  |  |
|------------------|--|
|                  | <p>M9: No aleatorio, porque aseguran que si llovió.</p> <p>M11: NO ALEATORIO, POR LA INFORMACIÓN QUE SE NOS DA.</p> <p>M12: No, Ya se tiene conocimiento de este suceso.</p> <p>M13: No aleatorio, es un hecho que ya sucedió.</p>   |
| Uniestructural   | <p>M1: No aleatorio, porque podemos considerar que existe un registro de lluvias para obtener esta información.</p> <p>M4: No aleatorio, porque se puede investigar en el centro metereológico si llovió o no llovió.</p> <p>M8: No aleatorio, Por que alguien si lo sabe.</p> <p>M14: no. Porque hay documentos que afirman que si llovió, no hay azar.</p> <p>M6: Si, porque casi por lo regular en esta epoca siempre llueve.</p> <p>M7: Aleatorio, por que nadie lo sabe.</p> <p>M10: Si, porque no se puede saber, a quien preguntarle, no hay.</p> |
| Multiestructural | No hubo respuestas de este nivel   |
| Relacional       | No hubo respuestas de este nivel   |

*Resumen.* La mayoría de los docentes situó el fenómeno como no aleatorio. Siete profesores se ubican en preestructural, todos consideran el fenómeno como no aleatorio, cinco indican que es un hecho pasado y dos dan argumentos incongruentes. Siete maestros se sitúan en uniestructural, cuatro lo consideran como no aleatorio y lo justifican mediante la existencia de información; dos consideran al suceso como aleatorio, señalan que no se tiene información y la respuesta de M6 se basa en su conocimiento personal del contexto. La inclusión de conocimiento previo del contexto en situaciones en las que se deben analizar datos es un arma de doble filo, muchas veces inhibe lo que realmente dicen los datos.

### **9.- Si lloverá mañana en Tuxtla Gutiérrez, Chiapas. ¿Por qué?**

| Si lloverá mañana en Tuxtla<br>Gutiérrez, Chiapas. | SI ES<br>ALEATORIO |    | NO ES<br>ALEATORIO |     | SIN<br>RESPUESTA |    |
|--|--------------------|----|--------------------|-----|------------------|----|
|  |                    |    |                    |     |                  |    |
| PREESTRUCTURAL                                     | 1                  | 7% | 4                  | 28% | -                | 0% |

|                  |    |     |   |     |   |    |
|------------------|----|-----|---|-----|---|----|
| UNIESTRUCTURAL   | 9  | 65% | - | 0%  | - | 0% |
| MULTIESTRUCTURAL | -  | 0%  | - | 0%  | - | 0% |
| RELACIONAL       | -  | 0%  | - | 0%  | - | 0% |
| TOTAL            | 10 | 72% | 4 | 28% | - | 0% |

CUADRO 11.2.- TABLA DE FRECUENCIAS SI LLOVERÁ MAÑANA EN TUXTLA GUTIÉRREZ, CHIAPAS.

| NIVEL            | CARACTERÍSTICAS   |
|------------------|---|
| Preestructural   | M1: Aleatorio.<br>M5: Si aleatorio. Porque se encuentra en tiempo de lluvias.<br>M6: Puede ser, porque como vuelvo a repetir porque estamos en época de lluvia.<br>M7: Aleatorio, porque solo Dios sabe.<br>M2: No aleatorio, porque esta afirmando que lloverá.  |
| Uniestructural   | M3: aleatorio, porque se desconoce lo que vaya a ocurrir.<br>M4: Aleatorio, porque no se puede saber exactamente si llovera.<br>M8: Aleatorio, No sabemos.<br>M9: Aleatorio, por que no se sabe.<br>M10: Si, porque puede llover como no puede.<br>M11: ALEATORIO. NO SE SABE CON EXACTITUD.<br>M12: Si, se tiene la duda si lloverá o no.<br>M13: Aleatorio. No se sabe si lloverá.<br>M14: Si, no lo sabemos. Puede haber casualidad. |
| Multiestructural | No hubo respuestas de este nivel  |
| Relacional       | No hubo respuestas de este nivel  |

*Resumen.* Cinco docentes se ubican en preestructural, cuatro consideran el suceso como aleatorio, dos basan su argumento en la consideración de su contexto particular: “estamos en época de lluvia”, uno indica la presencia de un poder superior y otro no argumenta. Un profesor lo considera como no aleatorio pero su argumento es incongruente. Nueve profesores se sitúan en uniestructural, sus argumentos son variantes de “no se puede saber”.

#### **10.- Si lloverá en Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, dentro de un mes. ¿Por qué?**

|  |                    |                    |                  |
|--|--------------------|--------------------|------------------|
| Si lloverá en Tuxtla Gutiérrez,<br>Chiapas dentro de un mes. | SI ES<br>ALEATORIO | NO ES<br>ALEATORIO | SIN<br>RESPUESTA |
|--|--------------------|--------------------|------------------|

|                  |    |     |   |    |   |    |
|------------------|----|-----|---|----|---|----|
| PREESTRUCTURAL   | 5  | 35% | 1 | 7% | - | 0% |
| UNIESTRUCTURAL   | 8  | 58% | - | 0% | - | 0% |
| MULTIESTRUCTURAL | -  |     | - | 0% | - | 0% |
| RELACIONAL       | -  |     | - | 0% | - | 0% |
| TOTAL            | 13 | 93% | 1 | 7% | - | 0% |

CUADRO 11.3.- TABLA DE FRECUENCIAS SI LLOVERÁ EN TUXTLA GUTIÉRREZ, CHIAPAS DENTRO DE UN MES.

| NIVEL            | CARACTERÍSTICAS  |
|------------------|--|
| Preestructural   | M1: Aleatorio.<br>M5: Aleatorio. Porque se encuentra en periodos de lluvias.<br>M6: Si.<br>M7: Aleatorio por que es época de lluvias.<br>M14: Si, porque es tiempo de agua.<br>M2: No aleatorio, porque esta afirmando.  |
| Uniestructural   | M3: Aleatorio, porque no aseguramos con exactitud.<br>M4: Aleatorio, porque no puede saberse.<br>M8: Aleatorio, No se sabe bien.<br>M9: Aleatorio, por que puede que llueva o no.<br>M10: Si, porque no sabemos con seguridad lo que va a pasar.<br>M11: ALEATORIO. NO SE PUEDE PREDECIR.<br>M12: Si. Existe la probabilidad de que llueva.<br>M13: Aleatorio. No se sabe si ocurrirá. |
| Multiestructural | No hubo respuestas de este nivel   |
| Relacional       | No hubo respuestas de este nivel   |

*Resumen.* Seis profesores se ubican en preestructural, cinco indican que el suceso es aleatorio, M7 y M14 vuelven a responder teniendo en cuenta su conocimiento personal, dos no argumentan. Un maestro lo considera como no aleatorio pero su argumento es incongruente. Ocho docentes se sitúan en uniestructural, mencionan que el suceso es aleatorio, siete toman en cuenta lo que no se puede saber o predecir y uno incluye el término probabilidad.

#### **4.7- Caracterización de los fenómenos aleatorios**

En la teoría de la probabilidad se entiende que un fenómeno aleatorio debe tener dos características: sus resultados particulares son impredecibles (aleatoriedad) y puede ser reproducido en condiciones semejantes (reproducibilidad).

Las observaciones manifiestan que la mayoría de los profesores ven la condición de la aleatoriedad, pero ignoran la reproducibilidad. En consecuencia, se ubican en un nivel uniestructural. La aleatoriedad se expresa en formas equivalentes como incertidumbre, múltiples posibilidades, desconocimiento de la información, no se puede predecir con seguridad y probabilidad. No se encuentran argumentos más amplios, ni anunciados de manera formal; en particular, es de primera importancia la reproducibilidad.

Las caracterizaciones realizadas por los maestros son congruentes con las observaciones de Green (1982) quien indicó que muchos sujetos consideran la aleatoriedad como algo que puede ocurrir o no, pero no se tiene la certeza de que ocurra.

**Pregunta:** *Para que un fenómeno sea aleatorio. ¿Qué características debe poseer?*

Los siguientes elementos o nociones son indicadores de algún aspecto de la aleatoriedad y pueden ayudarnos a identificar niveles de pensamiento:

- no se puede predecir con seguridad.
- Presencia del azar.
- Incertidumbre.
- Múltiples posibilidades.
- Causa- efecto. (elementos causales).
- Juegos de azar.
- Desconocimiento de los resultados. (falta de información).
- Grado de incertidumbre.
- Experiencia.
- Contexto del suceso.
- Variabilidad.
- Reproducibilidad en las mismas condiciones.

De acuerdo a ello, los enunciados de los profesores se ubicaron en los niveles:

| PREESTRUCTURAL   | UNIESTRUCTURAL   | MULTIESTRUCTURAL   | RELACIONAL                                    |
|--|--|--|---|
| - Si da argumentos fuera de lo que puede ser aleatorio.<br>- Considerarlos como deterministas. | - Si incluye al menos un elemento propio de la aleatoriedad. | - Considerar dos o más criterios que caractericen la aleatoriedad. | - argumentar de manera clara la aleatoriedad. |

Con este código la clasificación de las respuestas de los profesores dio como resultado el siguiente cuadro 12:

| NIVELES DE PENSAMIENTO | FRECUENCIA | %   |
|------------------------|------------|-----|
| NINGUNO                | 2          | 15% |
| PREESTRUCTURALES       | 1          | 7%  |
| UNIESTRUCTURALES       | 10         | 71% |
| MULTIESTRUCTURALES     | 1          | 7%  |
| RELACIONALES           | -          | 0%  |
| TOTAL                  | 14         | 100 |

CUADRO 12: TABLA DE FRECUENCIAS (APOSTAR AL 5 O AL 6)

A continuación se transcriben los argumentos y su clasificación:

| NIVEL            | CARACTERÍSTICAS  |
|------------------|--|
| Preestructural   | M5: Ser aleatorio y tener opciones.  |
| Uniestructural   | M2: Haber probabilidad dentro de muchos.<br>M3: Desconocemos con exactitud lo que va a ocurrir.<br>M4: No saber el resultado. Buscar su probabilidad.<br>M7: Que sea probable o no de que se realice.<br>M8: No saber con exactitud si ocurrirá o no.<br>M9: no saber el resultado de éste.<br>M10: que los fenómenos que se mencionen, estemos seguros, qué tanto pueden ocurrir, como también no pueden ocurrir.<br>M12: Es aquel en el que no se conoce cuál será el resultado que se obtenga.<br>M13: Que no se sepa con exactitud lo que ocurrirá.<br>M14: casual, desconocido. |
| Multiestructural | M1: Debemos saber que de dos o más acontecimientos sólo uno puede presentarse, pero no sabemos de antemano cual ocurrirá.  |
| Relacional       | No hubo respuestas de este nivel   |

*Resumen.* Un profesor se ubicó en preestructural presenta un argumento incongruente. Diez maestros se ubican en uniestructural, tres toman en cuenta la incertidumbre, tres indican un desconocimiento de la información, dos incluyen una característica uno múltiples posibilidades, otro probabilidad y dos consideran que no se puede predecir con seguridad. Un profesor incluyó dos características la incertidumbre y múltiples posibilidades.

#### **4.8- Fenómenos aleatorios considerados por los profesores**

De acuerdo a las observaciones realizadas, la mayoría de los maestros dan ejemplos de fenómenos aleatorios. El contexto que más incluyen es el de juego, incluyen en éstos la idea de ganar o perder; planteando de esta manera, un espacio muestral con dos opciones, como la de responder sí o no. Situaciones que nos indican que se tiene un conocimiento muy reducido, así como no incluir espacios muestrales más amplios, razón que nos manifiesta su desconocimiento.

**Pregunta:** *Se te ocurren otros fenómenos aleatorios. Descríbelos brevemente.*

Los pensamientos de los profesores se ubicaron en los siguientes niveles (cuadro 13):

| NIVELES DE PENSAMIENTO | FRECUENCIA | %    |
|------------------------|------------|------|
| NINGUNO                | 4          | 28%  |
| PREESTRUCTURALES       | 0          | 0%   |
| UNIESTRUCTURALES       | 10         | 72%  |
| MULTIESTRUCTURALES     | -          | 0%   |
| RELACIONALES           | -          | 0%   |
| TOTAL                  | 14         | 100% |

CUADRO 13: TABLA DE FRECUENCIAS -FENÓMENOS ALEATORIOS-

Los argumentos de los profesores se situaron en los siguientes niveles:

| NIVEL          | CARACTERÍSTICAS                   |
|----------------|-----------------------------------|
| Preestructural | No hubo respuestas de este nivel. |
| Uniestructural | M2: Canicas. Águila o sol.        |

|                  |   |
|------------------|---|
|                  | <p>M3: ¿Ganará el cruz azul a Rosario central de Argentina? ¿Cuántos goles anotará el cruz azul? ¿Jugará Palencia con la selección el próximo partido? ¿Amanecerá nublado el día de mañana?</p> <p>M4: - Estar expuesto a una caída.<br/>- Sacarme el número premiado de una rifa.<br/>- Que sea o no sea campeón el Cruz Azul.</p> <p>M7: Carrera de autos. Futbol. Rifa.</p> <p>M8: - Tómbola. – Sismo. – Accidente de tránsito.<br/>- Conflicto armado.</p> <p>M9: - Un temblor. – Un apagón.<br/>– La muerte de una persona. – Sacarse la lotería.</p> <p>M10: - Si el taxi donde viajo va a chocar.<br/>- Si mañana cuando me levante me va a doler la espalda<br/>- Si mi marido va a estar de buen humor mañana.</p> <p>M12: - Si se saca un dulce de una caja sin ver, los posibles resultados son: un dulce verde, un dulce rojo, un dulce amarillo y un dulce azul.<br/>- Comprar un billete de la lotería para ver si resulta premiado en un sorteo.<br/>- Sacar una canica de la caja, con los ojos vendados, para ver si es azul.<br/>- Lanzar un dado para ver si cae 2.</p> <p>M13: - Jugar la lotería. -Jugar la ruleta. -Participar en una rifa.</p> <p>M14: ¿Se terminará el agua dulce que existe en el mundo?</p> |
| Multiestructural | No hubo respuestas de este nivel  |
| Relacional       | No hubo respuestas de este nivel  |

*Resumen.* Cuatro profesores no respondieron por lo que no se les ubicó en ningún nivel de pensamiento. Diez maestros se situaron en uniestructural. Sus propuestas incluyen la idea de ganar o perder, ocurrir o no ocurrir, no involucran diversidad de situaciones ni toman en cuenta otros elementos de la aleatoriedad.

3 de los 10 profesores refirieron sus ejemplos únicamente a juegos de azar, uno presentó un ejemplo de situación natural, un maestro incluyó ejemplo de juegos deportivos y situación natural; cuatro de los diez incluyeron juegos de azar, uno de ellos presentó además un juego deportivo, otro incluyó además una situación natural, uno mostró además una situación social. De esta manera, siete profesores incluyeron ejemplos de juegos de azar.

#### 4.9- Fenómenos no aleatorios considerados por los profesores

Los fenómenos no – aleatorios o Determinísticos son aquellos cuyos resultados se pueden prever con exactitud, generalmente con la ayuda del conocimiento científico o con conocimientos de la vida diaria. Un ejemplo del primer caso es prever el tiempo que tarda en llegar al piso un objeto que se deja caer de determinada altura; aunque la gente común y corriente ignore cómo calcular ese tiempo, el fenómeno es determinístico pues la ciencia ha encontrado leyes que gobiernan ese fenómeno. Un ejemplo de fenómenos determinísticos conocido por todos es que mañana amanecerá.

**Pregunta:** *Se te ocurren otros fenómenos que consideres no aleatorios. Descríbelos.*

Los pensamientos de los profesores se ubicaron en los siguientes niveles (cuadro 14):

| NIVELES DE PENSAMIENTO | FRECUENCIA | %   |
|------------------------|------------|-----|
| NINGUNO                | 4          | 28% |
| PREESTRUCTURALES       | -          | 0%  |
| UNIESTRUCTURALES       | 6          | 44% |
| MULTIESTRUCTURALES     | 4          | 28% |
| RELACIONALES           | -          | 0%  |
| TOTAL                  | 14         | 100 |

CUADRO 14: TABLA DE FRECUENCIAS -FENÓMENOS NO ALEATORIOS-

Los argumentos de los profesores se situaron en los siguientes niveles:

| NIVEL          | CARACTERÍSTICAS   |
|----------------|---|
| Preestructural | No hubo respuestas de este nivel  |
| Uniestructural | <p>M2: Decidir a que lugar se dirige uno<br/>M3: -Se va a secar el mar.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- volarán los pájaros.</li> <li>- Se romperá el cristal con una piedra lanzada.</li> </ul> <p>M4: - Comprar zapatos de mi talla para ver si me viene.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Saber la fecha en que entregaré una casa que estoy construyendo.</li> </ul> |

|                  |  |
|------------------|--|
|                  | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Saber cuántos litros le caben a una cisterna.</li> </ul> <p>M10: - Mañana va a amanecer.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Saldremos a recreo a las 11:00 A. M.</li> <li>- Todos los días comemos.</li> </ul> <p>M12: - Sumar 3+5 para ver si el resultado es 8.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Sacar una canica de la caja, con los ojos vendados, para ver si es azul. (En la caja hay puras azules).</li> <li>- Decir que mañana va a amanecer.</li> <li>- Hoy anochecerá.</li> <li>- Decir que mañana saldrá el sol.</li> </ul> <p>M14: No llueve hoy 6 de Junio, porque el sol está muy fuerte.</p> |
| Multiestructural | <p>M7: Anochecer.<br/>Amanecer.<br/>Estaciones del año.<br/>Que el tiempo pase.</p> <p>M8: - El horario de un programa.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Quitar grasa con jabon.</li> <li>- entrar al agua sin mojarse.</li> </ul> <p>M9: - La suma de dos números.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- El producto de dos números.</li> <li>- La división de un número.</li> </ul> <p>M13: - Realizar operaciones matemáticas.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Lanzar una pelota para ver si ésta cae.</li> </ul>   |
| Relacional       | No hubo respuestas de este nivel   |

*Resumen.* Cuatro profesores no respondieron por lo que no se les ubicó en ningún nivel de pensamiento. Seis se situaron en uniestructural, dan ejemplos de situaciones cotidianas, en algunas se nota la posibilidad de concebirlas como aleatorias. Cuatro se relacionaron en multiestructural, las situaciones que proponen pueden predecirse sin dificultad y sin temor a equivocarse.

La mayoría de los profesores buscan fenómenos no aleatorios de situaciones físicas que ocurren en el tiempo, y su carácter determinista surge de poder predecir lo que ocurrirá, por ejemplo, “saldrá el sol”. El caso de M12 introduce un enunciado que no es de naturaleza física sino informativa, a saber, “sumar 3+5 para saber si es 8”.

#### 4.10- Qué significa el azar para los profesores

Para Piaget (1951) el azar (físico) es la interacción de múltiples procesos independientes. Esto permite definir el azar en términos de las nociones de independencia, interacción y multiplicidad. Esta caracterización permitiría identificar respuestas multiestructurales, serían aquellas que hablan de la interacción y la independencia. La primera se puede expresar con palabras como “se encuentran”, “chocan”, etc.; la segunda, con expresiones como “no se sabía”, “no se vieron”, “no tienen memoria”, etc. referidas a procesos múltiples. Sin embargo, ninguna de esas nociones se encuentra en las respuestas de los maestros, por lo que llevaría a clasificarlos como preestructurales. Hemos decidido considerar los argumentos que expresan sinónimos del azar como uniestructurales.

**Pregunta:** ¿Qué significado tiene para ti la palabra azar?

Las respuestas de los profesores se ubicaron en los siguientes niveles (cuadro 15):

| NIVELES DE PENSAMIENTO | FRECUENCIA | %   |
|------------------------|------------|-----|
| NO CONTESTÓ            | 1          | 7%  |
| PREESTRUCTURALES       | -          | 0%  |
| UNIESTRUCTURALES       | 13         | 93% |
| MULTIESTRUCTURALES     | -          | 0%  |
| RELACIONALES           | -          | 0%  |
| TOTAL                  | 14         | 100 |

CUADRO 15: TABLA DE FRECUENCIAS -SIGNIFICADO DE AZAR-

| NIVEL          | CARACTERÍSTICAS                  |
|----------------|----------------------------------|
| Preestructural | No hubo respuestas de este nivel |

|                  |   |
|------------------|---|
| Uniestructural   | <p>M1: Son situaciones que permiten realizar una especie de introducción a la probabilidad sin llegar a cuantificarla</p> <p>M2: No tener la certeza de ganar o perder, de elegir lo deseado, etc.</p> <p>M3: Es un evento en el que puede ocurrir o no ocurrir.</p> <p>M4: Desconocer que probabilidad de saber exactamente anticipadamente que puede suceder en un fenómeno.</p> <p>M5: Que puede ocurrir (si) ó (no) algún hecho.</p> <p>M6: Casualidad, desgracia imprevista, estorbo en el juego de pelota.</p> <p>M7: Algo que puede o no ocurrir.</p> <p>M8: Que no sabemos lo que en realidad pasara.</p> <p>M9: Suerte.</p> <p>M10: para mi significa que son sucesos que tienen la misma probabilidad de ocurrir como de no ocurrir.</p> <p>M11: ES ALGO QUE NO SE SABE QUE VA A PASAR.</p> <p>M12: Indica probabilidad, duda, incertidumbre.</p> <p>M13: Que no se sabe cual es el resultado de un evento, porque existen las mismas posibilidades de que ocurra una u otra.</p> <p>M14: casualidad.</p> |
| Multiestructural | No hubo respuestas de este nivel  |
| Relacional       | No hubo respuestas de este nivel  |

*Resumen.* 13 profesores se situaron en uniestructural, cuatro indican que es una situación que puede ocurrir o no, cuatro mencionan que es algo que no se sabe, dos incluyen la duda, dos la casualidad y uno la suerte.

#### **4.11- Interpretación y valoración de los fenómenos**

Las observaciones nos señalan que los profesores presentan dificultades para dar valoraciones a los fenómenos y argumentar con elementos propios del azar y la probabilidad. Sin embargo, nos muestran ideas de carácter general promovidos mediante el conocimiento de sus experiencias particulares, bajo la perspectiva de considerar de manera central sus propios contextos, lo que los conduce a no tomar en cuenta los contextos que se retoman en los planteamientos. Para los sucesos planteados en el contexto de juego, los maestros toman en cuenta en sus explicaciones ideas como: puede ocurrir o no, suerte, casualidad, duda, probabilidad, pero no profundizan en ellas. En los

contextos atmosféricos y naturales, los profesores orientan sus opiniones basadas en sus experiencias, por lo que los ubican como eventos seguros, planteando sus causas que los llevan a concretar esta idea. Sin embargo, hay un cierto alejamiento hacia el reconocimiento de la presencia del azar, puntualizan más los elementos causales, priorizando las condiciones atmosféricas. Ninguno de los maestros plantea ideas concretas acerca de la incertidumbre, la equiprobabilidad, la aleatoriedad o el azar para argumentar sus valoraciones. En algunos planteamientos, los valores dados no reflejan lo que indican en sus argumentos.

**Pregunta:** *Asigna un valor numérico, entre 0 y 10, que exprese la confianza que tienes en la ocurrencia de los siguientes sucesos. Explica en que te has basado en cada caso para dar los diferentes valores numéricos.*

*Por ejemplo:*

- *Que se derrumbe el techo en ese momento..... 0*
- *Que estés leyendo este escrito ahora mismo..... 10*

Los argumentos de los profesores se ubicaron en los siguientes niveles (cuadro 16).

| SITUACIÓN   | PREESTRUCTURAL |     | UNIESTRUCTURAL |     | MULTIESTRUCTURAL |     | RELACIONAL |    |
|---|----------------|-----|----------------|-----|------------------|-----|------------|----|
|   |                |     |                |     |                  |     |            |    |
| 1.- Obtener una cruz (X) al tirar una moneda, después de haber tenido una secuencia de cuatro caras (C, C, C, C) en los cuatro lanzamientos anteriores. | 6              | 42% | 3              | 22% | 2                | 14% | -          | 0% |
| 2.- Conseguir un 3 al lanzar un dado cúbico.  | 9              | 63% | 3              | 22% | 1                | 7%  | -          | 0% |
| 3.- Encender la luz al pulsar el interruptor.   | 4              | 28% | 9              | 64% | -                | 0%  | -          | 0% |
| 4.- No coger la gripe el mes que viene.   | 5              | 35% | 7              | 50% | -                | 0%  | -          | 0% |
| 5.- Que nieve este verano en Tuxtla Gutiérrez.  | 3              | 21% | 10             | 71% | -                | 0%  | -          | 0% |
| 6.- Que llueva mañana en Tuxtla Gutiérrez, Chiapas.   | 3              | 21% | 10             | 71% | -                | 0%  | -          | 0% |

CUADRO16. FRECUENCIAS OBTENIDAS EN LA VALORACIÓN DE LOS FENÓMENOS.

**1.- Obtener una cruz (X) al tirar una moneda, después de haber tenido una secuencia de cuatro caras (C, C, C, C) en los cuatro lanzamientos anteriores.**

Las observaciones nos muestran que a pesar de ser un fenómeno del contexto de juego, hay dificultad para valorar de acuerdo a lo esperado, es decir, considerar ideas que nos conduzcan a pensar que los profesores reconocen que la oportunidad de obtener una cruz es igual a la de obtener una cara, debido a que la probabilidad de ocurrencia es la misma.

No presentan justificaciones ampliadas, en el sentido, de incluir más de dos elementos en su argumentación, se quedan únicamente regidos bajo una sola idea para justificar sus valoraciones.

Los argumentos se ubicaron en la siguiente forma:

| NIVEL            | CARACTERÍSTICAS  |
|------------------|--|
| Preestructural   | M9: cuando menos 1 posibilidad.<br>M11: 5.<br>M3: 8, porque después de 4 caras hay la posibilidad de que sea cruz.<br>M4: 9, porque después de sacar caras puede obtenerse cruz.<br>M7: 10, por suerte<br>M12: 0 Es probable que se obtenga una X, después de los 4 lanzamientos |
| Uniestructural   | M8: 5 puede ser "c" o "X".<br>M5: 5, puede ser cara o X.<br>M14: 5- No sería tan posible de que caiga nuevamente C.  |
| Multiestructural | M10: 4, porque es tan probable que caiga como que no.<br>M13: (5) porque existen las mismas posibilidades de caiga cara o cruz.  |
| Relacional       | No hubo respuestas de este nivel   |

*Resumen.* Seis profesores se sitúan en preestructural, dos valoran pero no argumentan y cuatro valoran y argumentan de manera incongruente.

Tres maestros se ubican en uniestructural, valoran adecuadamente, abren la posibilidad de que cualquiera de las caras puede salir; estos profesores se conducen de acuerdo a la *falacia del jugador*. Dos se consideran multiestructurales, su valoración es adecuada, justifican a través de señalar que se tiene igual oportunidad y que cualquier resultado puede darse.

## 2.- Conseguir un 3 al lanzar un dado cúbico.

Conseguir un tres al lanzar un dado tiene probabilidad  $1/6$ , dividiendo 10 entre 6 se obtiene 1.66, de donde una confianza entre 1 y 2 (más cercano a 2) es la conveniente. Vamos a ubicar en uniestructural a quienes dan una valoración adecuada o un argumento adecuado, pero no ambos. Los que responden dando una valoración conveniente y un buen argumento se ubican en multiestructurales. Las observaciones nos indican que los profesores tienen al menos una idea para argumentar sus valoraciones, aunque estas no estén acordes a los valores que proponen. La mitad de los maestros consideran al fenómeno como imposible; es decir, piensan que no se puede conseguir un tres. Ninguno de los maestros plantea la equiprobabilidad como argumento, por lo que nadie considera la valoración de un sexto, se percibe la dificultad que tienen los profesores para dar argumentos más finos para la cuantificación presentada. Razón que los conduce a dar ideas generales características del azar y la probabilidad. No hay inclusión de la aleatoriedad.

Los pensamientos de los profesores se ubicaron de la manera siguiente:

| NIVEL            | CARACTERÍSTICAS  |
|------------------|--|
| Preestructural   | M1: 0.<br>M2: 0.<br>M5: 0 imposible.<br>M7: "0" no se puede obtener.<br>M8: "0" imposible.<br>M11: 0 ES POCO PROBABLE<br>M12: 0, Es probable que caiga ese número.<br>M14: 2 No me dices cuantas veces lo tengo que lanzar<br>M9: 0 posibilidades o 10 posibilidades por q' no es seguro |
| Uniestructural   | M3: 5 porque las posibilidades es igual para cualquier número<br>M4: 5, puede o no conseguir el resultado<br>M13: (5) porque si hay posibilidad de conseguir un 3  |
| Multiestructural | M10: 3, porque es poca la probabilidad de que caiga 3.   |
| Relacional       | No hubo respuestas de este nivel   |

*Resumen.* Nueve profesores se situaron como preestructurales, ocho dan una valoración de cero, dos de ellos no presentan argumentos, tres incluyen

argumentos que ubican el fenómeno como imposible, no toman en cuenta la probabilidad, el azar, la equiprobabilidad o la incertidumbre, dos muestran ideas de azar no relacionadas con la valoración y uno valora con dos y da un argumento incongruente. Tres maestros se ubicaron en uniestructural, dan una valoración de cinco, sin embargo, incluyen en la argumentación una idea como: la duda y la probabilidad, tres valoran con cinco y argumentan con igual probabilidad, puede o no ocurrir y la probabilidad, uno da un valor de tres y justifica con la idea de menor probabilidad. Uno de los maestros se ubicó en multiestructural, valoró con 3, e incluyó la probabilidad.

### **3.- Encender la luz al pulsar el interruptor.**

Encender la luz se considera una experiencia determinista cuya confianza en general debe ser 10.

Las observaciones nos permiten deducir que los profesores incluyen en sus argumentos ideas obtenidas a través de su experiencia, ya que, por lo regular se considera que al pulsar la luz esta enciende, situación que los lleva a justificar de manera determinista, no toman en cuenta la presencia del azar aunque sea de manera mínima, otros consideran la presencia de las causas que pueden determinar la ocurrencia del suceso, situación importante ya que estas pueden causar que no se prenda la luz, posibilidades que deben tomarse en cuenta. Aunque se identifica que sus argumentos son generales y no proponen argumentos más finos.

| NIVEL          | CARACTERÍSTICAS  |
|----------------|--|
| Preestructural | M1: 10.<br>M2: 10.<br>M5: 3 porque no hay luz, corto, no hay foco ó no hay interruptor<br>M7: 5 por si se va la luz.   |
| Uniestructural | M3: 9 porque si hay energía enciende, la posibilidad de que no haya energía es mínima.<br>M4: 10, si hay energía la probabilidad es que enciende la luz.<br>M8: 10 por que la luz si prendera.<br>M9: De 10 cinco posibilidades son seguras.<br>M10: 10, porque ya sé que al pulsar el interruptor la luz va a encenderse.<br>M11: 8, A LO MEJOR NO HAY CORRIENTE. |

|                  |  |
|------------------|--|
|                  | M12: 10. Es seguro que encienda la luz.<br>M13: (10) porque la luz se va a encender siempre.<br>M14: 5, Puede haber luz como no puede haber. |
| Multiestructural | No hubo respuestas de este nivel   |
| Relacional       | No hubo respuestas de este nivel   |

*Resumen.* Cuatro maestros se ubican en preestructural, dos valoran el fenómeno con diez pero no dan argumentos, y dos valoran de manera inapropiada porque se desvinculan de sus argumentos. Nueve se sitúan en uniestructural, cinco valoran con diez, cuatro de ellos lo consideran como un evento seguro y uno argumenta que puede o no ocurrir; dos dan una valoración de cinco, uno de nueve, y uno de ocho, éstos incluyen la idea de causalidad, en el entender de que una causa puede causar que encienda o no.

#### **4.- No coger la gripe el mes que viene.**

De acuerdo a las observaciones se deduce que los profesores argumentan mediante la presencia del azar, a través de la posibilidad de que ocurra o no el suceso, no profundizan en sus justificaciones. Los que presentan algunas causas como elementos que pueden influir en el coger o no la gripe, no incluyen la presencia del azar. Aprecian la ocurrencia del fenómeno desde sus apreciaciones personales.

| NIVEL          | CARACTERÍSTICAS  |
|----------------|--|
| Preestructural | M1: 0.<br>M2: 0.<br>M5: 0, no soy alergica.<br>M7: 10 no es invierno.<br>M12: 0, existe cierta posibilidad de que se apropie la gripa.   |
| Uniestructural | M3: 10 porque puede haber tomado vitaminas en contra de esta enfermedad.<br>M4: 5, porque puede o no puede darme la gripa.<br>M8: 5 me puedo resfriar.<br>M10: 5, porque me puedo contagiar aunque yo no quiera.<br>M11: 5 ES IGUALMENTE PROBABLE.<br>M13: (5) porque existen las mismas posibilidades de que me dé o no la gripa.<br>M14: 9 Porque a mi casi no me da la gripa. |

|                  |                                  |
|------------------|----------------------------------|
| Multiestructural | No hubo respuestas de este nivel |
| Relacional       | No hubo respuestas de este nivel |

*Resumen.* Cinco profesores se ubican en preestructural, cuatro valoran con cero, dos de ellos no argumentan y uno indica una causa y no toma en cuenta la presencia del azar, uno valora con 10 indica el tiempo como un elemento que permite que no cogerá la gripa, razón incongruente porque se desconoce el tiempo que habrá el mes que viene. Siete se sitúan en uniestructural, cinco dan una valoración de cinco, toman en su justificación la idea de que puede suceder o no, uno valora con diez, argumentando una posible causa que le permite no contagiarse, no incluye la presencia del azar, un profesor valora con nueve y argumenta mediante su experiencia personal, no incluye la posibilidad de poder coger la gripe.

#### **5.- Que nieve este verano en Tuxtla Gutiérrez.**

Las observaciones nos muestran que los maestros toman en cuenta el conocimiento que tienen acerca de la ocurrencia del fenómeno, descartando la posibilidad de que ocurra en el contexto anunciado, debido a que éste no ha ocurrido nunca, razones que los conducen a considerarlo como un evento imposible, los que incluyen una mínima posibilidad de ocurrencia lo hacen con temor a pensar que su ocurrencia significa una situación no común. Se nota claramente que la base considerada en sus argumentaciones es propiciada mediante sus propias experiencias.

| NIVEL          | CARACTERÍSTICAS   |
|----------------|---|
| Preestructural | M1: 0.<br>M2: 0.<br>M10: 10, porque ya sé que en Tuxtla nunca neva y mucho menos en verano.   |
| Uniestructural | M3: 0 porque de acuerdo a la situación geográfica no tiene la altitud considerada por los rangos establecidos donde neva.<br>M4: 0, no porque en el verano no cae nieve, hace calor y llueve.<br>M5: 0 nunca ocurre este hecho o fenómeno.<br>M7: "0" imposible por su altitud.<br>M8: "0" nunca pasará.<br>M9: 0 posibilidades si neva es por que se va a acabar el mundo. |

|                  |   |
|------------------|---|
|                  | M11: 0 PORQUE NUNCA HA NEVADO.<br>M12: 0, Hay cierta posibilidad de que suceda ese fenómeno.<br>M13: (0) porque no ocurrirá.<br>M14: 2 nunca ha caído nieve en Chiapas. |
| Multiestructural | No hubo respuestas de este nivel  |
| Relacional       | No hubo respuestas de este nivel  |

*Resumen.* Tres profesores se ubican en preestructural, dos valoran con cero el fenómeno pero no argumentan, y uno valora con diez lo que contradice lo que argumenta. Diez maestros se ubican en uniestructural, nueve valoran con cero, y uno con dos, las justificaciones tomadas consideran la imposibilidad de que ocurra el fenómeno, debido al conocimiento de que esto no ha sucedido, además toman en cuenta las condiciones atmosféricas del lugar, su altitud y el tiempo.

#### **6.- Que llueva mañana en Tuxtla Gutiérrez, Chiapas.**

Las observaciones nos indican que la mayoría de los argumentos consideran el tiempo como una de las causas que origina el fenómeno, basado en la propia experiencia; sin embargo, pocos incluyen en ella la presencia del azar, en el entender que el tiempo no garantiza la ocurrencia del suceso. Resalta la inclusión de elementos causales, al considerar el tiempo lo hacen desde su apreciación contextual y no del contexto anunciado en el suceso. Se prioriza la incertidumbre en algunos argumentos, situación que permite una congruencia entre la valoración y su justificación.

| NIVEL          | CARACTERÍSTICAS  |
|----------------|--|
| Preestructural | M1: 10.<br>M2: 0.<br>M12: 0, Es probable de que llueva.  |
| Uniestructural | M3: 5 porque la posibilidad es la misma en que puede llover, como no.<br>M4: 5, puede o no puede llover.<br>M5: 10 porque es tiempo de lluvia.<br>M7: 10 es tiempo de agua.<br>M8: 10 es tiempo de lluvias en nuestra región.<br>M9: 50% que si llueva.<br>M10: 5, porque puede llover ya que es temporada de lluvia.<br>M11: 10 PORQUE SI ES EPOCA DE LLUVIAS Y AHÍ HA ESTADO |

|                  |  |
|------------------|--|
|                  | LLOVIENDO.<br>M13: (5) porque existen las mismas posibilidades de llueva o no.<br>M14: 7 Si porque es el tiempo de agua. |
| Multiestructural | No hubo respuestas de este nivel   |

*Resumen.* Tres maestros se ubican en preestructural, dos dan valoraciones pero no argumentan, y uno valora con diez pero no presenta argumentos. Diez se sitúan en uniestructural, cinco valoran con cinco el fenómeno en sus argumentos incluyen la posibilidad de ocurrencia, cuatro valoran con diez e indican que si va a llover manifestando una de las causas, no incluyen la presencia del azar, uno valora con siete y manifiesta que hay más posibilidades de que ocurra el fenómeno.

### Resumen de las observaciones

- Todos los profesores participantes asocian el concepto de probabilidad con la incertidumbre, pero ninguno la concibe como una medida; tampoco le asignan un procedimiento de cálculo
- En situaciones contextualizadas como los *pronósticos del tiempo*, los profesores no tienen procedimientos cuantitativos para interpretar la probabilidad.
- También en la situación de pronóstico del tiempo, los profesores se comportan de acuerdo al sesgo del resultado aislado.
- Con relación a las operaciones combinatorias, la manera en que forman comités es dividiendo el total de elementos entre el tamaño del comité; es decir, no interpretan la formación de comités de forma combinatoria.
- Respecto a la variabilidad, no exhiben recursos que les permita comprender la relación del tamaño de la muestra con la probabilidad de que una muestra presente proporciones alejadas de las proporciones esperadas.
- Con relación a problemas estándares de lanzamiento de dados los maestros no determinan el espacio muestral y, por tanto, no siguen un procedimiento para calcular las probabilidades de variables sencillas como el *producto de los resultados de lanzar un dado o su suma*.

- La aleatoriedad en contextos de juegos es identificada con facilidad por los maestros, el argumento más frecuente es la afirmación contenida en la definición: “no se puede saber lo que va a ocurrir”
- Algunos profesores juzgan eventos en los que pueden tener algo de control como no-aleatorios, es decir, cuando tienen la posibilidad de modificar las probabilidades del evento, por ejemplo, sembrar una semilla para obtener una plantita no es aleatorio porque se pueden tener cuidados y echarle agua, etc.
- La mayoría de los profesores buscan fenómenos no aleatorios de situaciones físicas que ocurren en el tiempo, y su carácter determinista surge de poder predecir lo que ocurrirá, por ejemplo, “saldrá el sol”. Sin embargo, uno introduce un enunciado que no es de naturaleza física sino informativa, a saber, “sumar 3+5 para saber si es 8”.
- La mayoría de los maestros identifican a los fenómenos aleatorios por la característica de aleatoriedad; es decir, como algo “que no se puede predecir”; sin embargo, ninguno tiene en cuenta la característica de reproducibilidad bajo las mismas condiciones.
- Los profesores muestran una idea irreducible del concepto de azar, es decir, no pueden descomponerlo en otros conceptos como los de independencia, interacción y/o multiplicidad de causas. Sólo pueden definir el concepto con sinónimos (incertidumbre, probabilidad, etc.) o ilustrarlo con ejemplos.

### **Conclusión general: El pensamiento probabilístico de los profesores**

El análisis que se ha hecho de las nociones básicas de probabilidad, combinatoria, y variabilidad, a través de situaciones que involucran pronósticos del tiempo, juegos de azar, nacimiento de niños, etc. muestran que el pensamiento de los profesores sobre esas nociones y situaciones, captura sólo un aspecto (uniestructural) de los varios que se deben tener en cuenta para una comprensión aceptable. Al no tener las nociones básicas de forma más rica (multiestructural) se hace imposible relacionar unas nociones con otras trayendo como consecuencia un conocimiento fragmentario. Esta imagen del pensamiento probabilístico de los maestros de primaria que fueron examinados, a pesar de no ser optimista,

proporciona elementos de los aspectos particulares que deberían de fortalecerse en los esfuerzos de su actualización profesional en el campo de la probabilidad. Por ejemplo, Priorizar la idea de medida en el concepto de probabilidad, en el desarrollo de procedimientos combinatorios informales (en particular enfatizando la reversibilidad), en tareas que discutan la variabilidad con relación al tamaño de la muestra o número de repeticiones, etc.

El marco de Biggs y Collis (1991) ha sido útil para caracterizar el pensamiento de los estudiantes ya que valora lo que el profesor sabe sobre cada noción, aunque este conocimiento sea parcial (uniestructural) pero señala cómo enriquecerlo para volverlo más rico (multiestructural) y finalmente convertirlo en conocimiento relacional. Hace falta diseñar actividades destinadas a cubrir esos aspectos. Sin embargo, las actividades que se les ha aplicado a los profesores no están en los contextos en que el maestro acostumbra a tratar el tema en sus clases o en el contexto de las lecciones que debe ofrecer a sus estudiantes (ya que se da el caso de que no las llevan efectivamente a la práctica). El objetivo de la siguiente fase de la investigación es explorar lo que pasa con el pensamiento probabilístico del maestro en el contexto de las situaciones que los documentos oficiales proporcionan al maestro para su desempeño en clase.

## CAPÍTULO 5

### LA INTERPRETACIÓN DE LOS PROFESORES DEL TEMA “PREDICCIÓN Y AZAR” DEL PROGRAMA DE ESTUDIO

#### Título de la actividad

Interpretación que los profesores dan a los contenidos propuestos en el programa oficial con respecto a la predicción y el azar.

#### Objetivo de investigación

Conocer la forma en que los profesores de primaria interpretan los contenidos propuestos en el programa oficial con respecto al eje predicción y azar, y cuáles son las actividades que sugieren para su aplicación en la práctica.

#### Instrumento

El instrumento utilizado consiste en un cuestionario de diez contenidos: siete propuestos por el programa de educación primaria y tres sugeridos por el investigador, A continuación se presenta el cuestionario que respondieron los maestros.

#### Cuestionario sobre el eje de predicción y azar en la escuela primaria

Maestro: los siguientes contenidos se trabajan en el eje de predicción y azar de la escuela primaria, propuestos por la SEP en los programas oficiales. Anota por favor cómo los interpretas y construye un problema.

Nombre: \_\_\_\_\_.

Escuela: \_\_\_\_\_.

Zona escolar: \_\_\_\_\_.

Grado que atiendes: \_\_\_\_\_.

Fecha: \_\_\_\_\_.

**Predicción de hechos y sucesos en situaciones sencillas**

**en las que no interviene el azar.**

Interpretación:

\_\_\_\_\_.

\_\_\_\_\_.

Construye un problema que se centre en el conocimiento de este contenido y pueda plantearse a los alumnos:

\_\_\_\_\_.

\_\_\_\_\_.

### Procedimiento

Después de leer el cuestionario, se les pidió a los profesores que escribieran cuál es su interpretación y qué actividades promoverían con los alumnos. Posteriormente, se analizaron las respuestas de los profesores; en particular, se revisaron las ideas explícitas acerca de la interpretación de los contenidos —que se relacionan con las posibles ideas esperadas—, lo cual permitió ubicarlas en los niveles propuestos por Biggs y Collis, los resultados se exponen en los apartados 5.1 a 5.10. De manera análoga, se procedió con los problemas propuestos por los maestros, estos resultados conforman el apartado 5.11.

### Resultados

*Conclusión general.* La mayoría de los profesores trataron de que sus interpretaciones se aproximaran a los contenidos propuestos en el programa oficial. Las ideas expresadas toman en cuenta las experiencias particulares de los maestros. Algunos retoman los elementos enunciados en los contenidos; otros sencillamente no los incluyen e incorporan más bien distintos elementos de probabilidad, razón por la que muchas interpretaciones se alejan completamente de lo que propone el contenido del programa oficial.

Los contenidos cuya interpretación representa sistemáticamente una dificultad mayor para los profesores fueron: “Identificación del espacio muestral” y “Comparación de dos eventos a partir del número de casos favorables sin cuantificar su probabilidad”. Específicamente, los maestros no fueron capaces de asociar la idea de espacio muestral con los resultados posibles. Por lo que corresponde a los eventos, la mayoría tampoco pudo establecer la comparación con la actividad central. Un porcentaje significativo de las interpretaciones se sitúa dentro del pensamiento de tipo uniestructural; por lo regular consideran uno o varios elementos incluidos en el contenido, pero sin profundizar su tratamiento en las interpretaciones dadas.

### 5.1. Contenido Número 1: “Predicción de hechos y sucesos en situaciones sencillas en las que no interviene el azar”

El término *predicción* se emplea habitualmente para referirse a situaciones en las que se tiene la seguridad de lo que va a ocurrir. Dicho de otro modo, en situaciones en las cuales se sabe lo que va a pasar, se habla de sucesos deterministas y son éstos los que se pueden predecir.

Las nociones implícitas en este contenido son: se sabe lo que va a ocurrir; son hechos deterministas; no existe duda de los resultados; es posible anticipar el resultado; se puede predecir; no interviene el azar; se conocen los resultados; hay seguridad en lo que va a pasar.

Se dice entonces que los profesores hacen una interpretación de tipo:

| PREESTRUCTURAL   | UNIESTRUCTURAL                                  | MULTIESTRUCTURAL                                    | RELACIONAL  |
|--|---|---|---|
| - Cuando sus respuestas contradicen lo propuesto en el contenido del programa oficial. | - Si consideran una de las nociones implícitas. | - Si toman en cuenta dos o más nociones implícitas. | - Cuando muestran un argumento amplio y claro con respecto al contenido del programa oficial. |

El cuadro 1 muestra la frecuencia y el porcentaje de los niveles en que se ubicaron las respuestas de los profesores.

**Cuadro 1.** Frecuencia y porcentaje de los niveles de pensamiento de los profesores.

| <b>NIVELES DE PENSAMIENTO</b> | <b>FRECUENCIA</b> | <b>%</b> |
|-------------------------------|-------------------|----------|
| Preestructural                | 5                 | 20       |
| Uniestructural                | 19                | 76       |
| Multiestructural              | 1                 | 4        |
| Relacional                    | -                 | 0        |
| No contestó                   | -                 | 0        |
| <i>Total</i>                  | 25                | 100      |

La tabla que sigue muestra las características que corresponden al nivel de pensamiento de los profesores.

| <b>NIVELES DE PENSAMIENTO</b> | <b>CARACTERÍSTICAS</b>  |
|-------------------------------|---|
| Preestructural                | <p>M6: Tener conocimiento de que algunos hechos y sucesos pueden predecirse, es decir, que existe la posibilidad de que sucedan.</p> <p>M12: Predecir si en algún suceso interviene la suerte.</p> <p>M20: En este contenido se pueden trabajar las estrategias para ganar un juego.</p> <p>M21: En este contenido aparecen juegos combinatorios.</p> <p>M24: Sacar una canica de un frasco oscuro que contiene canicas de varios colores es un evento aleatorio, puesto que se desconoce el resultado seguro que se va a obtener.</p>  |
| Uniestructural                | <p>M1: El niño debe analizar algunos hechos o sucesos para poder anticipar el resultado; es la forma de introducir los conocimientos del eje temático de probabilidad y azar.</p> <p>M2: El niño puede llevar a cabo un experimento como prueba, y después ser capaz de predecir un resultado.</p> <p>M3: En estos sucesos los niños conocen con anticipación los resultados.</p> <p>M4: Podrían ser acontecimientos en los que no interviene el azar; por ejemplo, predecir las condiciones climáticas.</p> <p>M5: Son situaciones en las que no necesariamente interviene el azar.</p> <p>M7: Son hechos en los cuales se está seguro de lo que va a suceder.</p> <p>M8: Cuando se predice un suceso del que conocemos los datos y por tanto el resultado, como la visita al museo, al cine, etcétera.</p> <p>M9: Son eventos en los que uno está seguro de lo que va a suceder.</p> <p>M10: Dar respuesta a algún planteamiento del que sabemos lo que va a suceder.</p> |

|                  |   |
|------------------|---|
|                  | <p>M11: En cada evento se anticipan los resultados tomando en cuenta que no es azaroso.</p> <p>M13: Predecir si en algunos sucesos hay cierta seguridad de lo que va a ocurrir, pues no interviene el azar.</p> <p>M14: Predecir o diagnosticar una solución en ciertos hechos deterministas.</p> <p>M15: Actividades en las que no interviene la casualidad.</p> <p>M16: Se entiende que, en este suceso, el resultado se obtiene antes de realizar la actividad.</p> <p>M17: Son hechos en los cuales se sabe lo que pasará al hacer predicciones.</p> <p>M18: Si no interviene el azar, se trata entonces de situaciones deterministas.</p> <p>M19: Un juego en el que conozco el resultado posible.</p> <p>M22: Si tenemos la seguridad de que un suceso va a pasar, es un hecho.</p> <p>M23: Estamos seguros de lo que va a suceder.</p> |
| Multiestructural | M25: Son todas las cosas que, por lógica, ya sabemos que van a suceder, y nos podemos anticipar a su predicción.  |
| Relacional       | No hubo respuestas de este nivel.   |

### Resumen

Cinco profesores se ubican en el nivel preestructural; sus respuestas se confunden e incluyen el azar, es decir, contradicen totalmente lo que el contenido enuncia.

Diecinueve maestros interpretan de manera uniestructural, ya que sólo incluyen una noción en su interpretación. Únicamente un profesor se situó en el nivel multiestructural al incluir dos nociones en su interpretación: saber lo que va a ocurrir y poder anticipar el resultado.

### 5.2. Contenido Número 2: “Identificación y realización de juegos en los que interviene o no el azar”

Este contenido pretende mostrar a los estudiantes que existen juegos en los cuales el azar sí está presente y otros en los que no interviene. Con dicho contenido deberán darse cuenta de que es más fácil saber quién podrá ser el ganador en un juego en el que no interviene el azar que en uno donde sí interviene.

Las nociones implícitas en el contenido son: identificar juegos de azar; realización de juegos de azar; identificar juegos que no son de azar; realizar juegos que no son de azar; caracterización de los juegos de azar y de los que no son de azar.

Se dice entonces que los profesores hacen una interpretación de tipo:

| <b>PREESTRUCTURAL</b>  | <b>UNIESTRUCTURAL</b>                                    | <b>MULTIESTRUCTURAL</b>                        | <b>RELACIONAL</b>                          |
|--|--|--|--|
| - Si las respuestas no toman en cuenta ninguna de las nociones o se desvían totalmente de lo esperado. | - Cuando toman en cuenta una de las nociones implícitas. | - Si consideran dos o más nociones implícitas. | - Si muestran un argumento amplio y claro. |

El cuadro 2 muestra la frecuencia y el porcentaje de los niveles en que se ubicaron las respuestas de los profesores.

**Cuadro 2.** Frecuencia y porcentaje de los niveles de pensamiento de los profesores.

| <b>NIVELES DE PENSAMIENTO</b> | <b>FRECUENCIA</b> | <b>%</b> |
|-------------------------------|-------------------|----------|
| Preestructural                | 2                 | 8        |
| Uniestructural                | 14                | 56       |
| Multiestructural              | 8                 | 32       |
| Relacional                    | -                 | 0        |
| No contestó                   | 1                 | 4        |
| Total                         | 25                | 100      |

La tabla que sigue muestra las características que corresponden al nivel de pensamiento de los profesores.

| <b>NIVELES DE PENSAMIENTO</b> | <b>CARACTERÍSTICAS</b>  |
|-------------------------------|---|
| Preestructural                | M18: Son proposiciones disyuntivas.<br>M24: Utilizar un diagrama de árbol, ya que permite conocer la lista de resultados posibles en un evento determinado.                 |
| Uniestructural                | M1: Analizar algunos eventos o sucesos en los que sea posible anticipar el resultado.<br>M2: Realizar algunos eventos o sucesos en los que se pueda anticipar el resultado. |

|                  |  |
|------------------|--|
|                  | <p>M3: Sucesos en los cuales no se sabe con anticipación lo que puede ocurrir.</p> <p>M4: Son juegos en los que no necesariamente interviene el azar, por ejemplo: jugar con dados pero alterando el número de puntos de sus caras.</p> <p>M8: Conocer al ganador en un juego de azar.</p> <p>M12: Que los niños reconozcan y realicen juegos en los que interviene la suerte o la probabilidad.</p> <p>M13: Que el niño identifique si en un juego interviene o no el azar.</p> <p>M15: Pueden ser juegos con reglas estables y otros en los que no se sabe cómo va a terminar.</p> <p>M16: Se entiende que si no interviene el azar estamos hablando de la posibilidad de que ocurra en un evento. Si se realiza un experimento es una tentativa para obtener el resultado. Si ese evento es el resultado después de hacer un intento donde no se sabe de antemano el resultado.</p> <p>M17: La posibilidad que tiene un evento si se realiza un experimento para obtener el resultado después de hacer un intento en donde no se sabe el resultado.</p> <p>M20: Pensar que en este contenido se van a conocer las expresiones <i>más probable que e igualmente probable que</i> en la predicción de resultados.</p> <p>M21: Lanzamiento de un dado.</p> <p>M22: Si no sabemos con seguridad lo que va a pasar, es un hecho o suceso de azar.</p> <p>M23: Una quiniela en una final de futbol.</p> |
| Multiestructural | <p>M5: Son sucesos en los que no interviene el azar. Identificar los juegos en los que puede intervenir o no el azar.</p> <p>M6: Que los niños distingan que existen juegos en los cuales interviene el azar y otros en los que no interviene.</p> <p>M7: Se van a identificar los juegos en los que interviene el azar y por qué en otros no existe azar.</p> <p>M9: Son eventos en los que puede tener seguridad o no de lo que va a pasar.</p> <p>M10: Plantear problemas en los cuales sabemos lo que va a suceder y que el mismo problema también sea azaroso.</p> <p>M11: Que el niño reconozca los juegos azarosos y en los que se ponen en juego las habilidades.</p> <p>M14: Realizar juegos en los que interviene el azar y otros en los que no</p>  |

|            |   |
|------------|---|
|            | interviene, e identificar cada uno por medio de sus diferencias.<br>M25: El azar interviene cuando no podemos predecir lo que va a pasar, y cuando el azar no interviene casi estamos seguros de lo que puede pasar por medio de la predicción. |
| Relacional | No hubo respuestas de este nivel.   |

### Resumen

Las interpretaciones de dos maestros se ubicaron en el nivel preestructural, puesto que no consideraron específicamente alguna idea referida a los juegos de azar y no azar. Catorce profesores se incluyen en el nivel uniestructural al proponer algún aspecto solicitado, como involucrar el azar o situaciones deterministas.

Ocho maestros se ubican en el nivel multiestructural, pues incluyeron en su interpretación las dos situaciones: la presencia del azar y la ausencia de azar.

Ninguno de los profesores planteó en su interpretación ambos aspectos: identificar y realizar los juegos. Un profesor no contestó por lo que no se ubicó en ningún nivel de pensamiento.

### 5.3. Contenido Número 3: “Registro de resultados de experimentos aleatorios”

Lo que se pretende recuperar en este contenido es la forma en que los alumnos registran los experimentos aleatorios. Podría considerarse, también, la forma en que los niños recuperan la información de los resultados generados al realizar una experiencia aleatoria.

Las nociones implícitas en el contenido son: registro de resultados; experimentos aleatorios; realización de la experiencia aleatoria; frecuencias; análisis de resultados, y azar.

Se dice entonces que los profesores hacen una interpretación de tipo:

| PREESTRUCTURAL  | UNIESTRUCTURAL   | MULTIESTRUCTURAL  | RELACIONAL                                 |
|---|--|---|--|
| - Cuando las respuestas dadas por los maestros no toman en cuenta los | - Si consideran una de las nociones implícitas: el registro de | - Si toman en cuenta las dos nociones: el registro de resultados y el experimento | - Si muestran un argumento amplio y claro. |

|  |   |            |  |
|--|---|------------|--|
| registros de resultados o bien son confusas. | resultados o bien el experimento aleatorio. | aleatorio. |  |
|--|---|------------|--|

El cuadro 3 muestra la frecuencia y el porcentaje de los niveles en que se ubicaron las respuestas de los profesores.

**Cuadro 3.** Frecuencia y porcentaje de los niveles de pensamiento de los profesores.

| NIVELES DE PENSAMIENTO | FRECUENCIA | %   |
|------------------------|------------|-----|
| Preestructural         | 8          | 32  |
| Uniestructural         | 10         | 40  |
| Multiestructural       | 6          | 24  |
| Relacional             | -          | 0   |
| No constestó           | 1          | 4   |
| Total                  | 25         | 100 |

La tabla que sigue muestra las características que corresponden al nivel de pensamiento de los profesores.

| NIVELES DE PENSAMIENTO | CARACTERÍSTICAS  |
|------------------------|--|
| Preestructural         | <p>M3: Realizar diversos experimentos en los que interviene el azar.</p> <p>M8: Realizar una actividad sin conocer el resultado.</p> <p>M15: Que depende de un evento.</p> <p>M18: Registrar datos en una tabla de valores.</p> <p>M20: Los experimentos aleatorios son aquellos en los que no se conocen los resultados con seguridad.</p> <p>M23: Son los resultados y sucesos que siguen las leyes de probabilidad.</p> <p>M24: Es una experiencia porque no se conoce con seguridad el resultado.</p> <p>M25: Da a entender que, de una u otra forma, los fenómenos se mezclan o son aliados entre sí.</p> |
| Uniestructural         | <p>M1: Que el educando registre los datos de cada experimento y ello le permita analizar los sucesos y efectuar comprobaciones.</p> <p>M2: Registrar en una tabla los datos de un experimento.</p> <p>M6: Que el niño aprenda a registrar los resultados posibles de un experimento.</p> <p>M7: Se van registrando los resultados de los experimentos que se hagan.</p>  |

|                  | <p>M9: De varios eventos que se realicen, ir registrando los resultados.</p> <p>M11: Elaborar una tabla y anotar los resultados de los experimentos.</p> <p>M12: Interpretar en una gráfica los resultados anotados.</p> <p>M16: Es el control que se lleva al realizar cualquier actividad, en tablas o gráficas.</p> <p>M17: Son los resultados que se anotan en tablas o gráficas de los experimentos realizados.</p> <p>M21: Se pueden desarrollar diferentes formas de organizar los resultados, y el resultado se obtiene al sumar los puntos.</p>  |            |        |            |   |  |  |   |  |  |   |  |  |
|------------------|---|------------|--------|------------|---|--|--|---|--|--|---|--|--|
| Multiestructural | <p>M4: Son registros de frecuencias de hechos en los que interviene el azar.</p> <p>M5: Los registros de sucesos o hechos en los que interviene el azar.</p> <p>M10: Registrar en una tabla los resultados de algunos experimentos azarosos.</p> <p>M13: Llevar a cabo un registro de un experimento de azar.</p> <p>M14: Realizar diversos experimentos aleatorios y registrar los resultados en una tabla o en una gráfica.</p> <p>M22: Representarlos en una tabla de frecuencias, lanzar un dado 20 veces:</p> <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th style="text-align: center;">NÚMERO</th> <th style="text-align: center;">MARCAS</th> <th style="text-align: center;">FRECUENCIA</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="text-align: center;">1</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">2</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">3</td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table> | NÚMERO     | MARCAS | FRECUENCIA | 1 |  |  | 2 |  |  | 3 |  |  |
| NÚMERO           | MARCAS  | FRECUENCIA |        |            |   |  |  |   |  |  |   |  |  |
| 1                |   |            |        |            |   |  |  |   |  |  |   |  |  |
| 2                |   |            |        |            |   |  |  |   |  |  |   |  |  |
| 3                |   |            |        |            |   |  |  |   |  |  |   |  |  |
| Relacional       | No hubo respuestas de este nivel.   |            |        |            |   |  |  |   |  |  |   |  |  |

### Resumen

Ocho profesores se ubican en el nivel preestructural, y de éstos, cuatro se refieren al azar pero no toman en cuenta el registro de resultados y cuatro presentan ideas confusas. Diez maestros están en el nivel uniestructural: ocho incluyen el registro de datos del experimento; uno lo enuncia como una gráfica de datos para interpretar, y otro más lo muestra como control de resultados.

Seis profesores pertenecen al nivel multiestructural, ya que sus interpretaciones aluden al registro, las frecuencias y al azar. La mayoría de los profesores no incluyeron las nociones enunciadas en el contenido: registro de resultados y experimento aleatorio. Un profesor no contestó por lo que no se le ubicó en ningún nivel de pensamiento.

#### 5.4. Contenido Número 4: “Identificación de la noción del espacio muestral”

Este contenido fue propuesto por el investigador y en él se aprecia que, dada la complejidad de la noción de espacio muestral, no es muy usual en la enseñanza de la probabilidad, sobre todo, cuando los profesores tienen poca familiaridad con ella. El espacio muestral se concibe, pues, como el número de resultados posibles que se pueden tener en un evento. Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado, se tienen las siguientes posibilidades: 1, 2, 3, 4, 5 o 6; esto significa que el espacio muestral para este evento es de 6, porque los posibles resultados que pueden suceder son seis.

Las nociones implícitas en este contenido son: espacio muestral; resultados posibles; total de resultados que se pueden obtener en una experiencia aleatoria.

Se dice entonces que los profesores hacen una interpretación de tipo:

| PREESTRUCTURAL   | UNIESTRUCTURAL  | MULTIESTRUCTURAL   | RELACIONAL   |
|--|---|--|--|
| - Cuando las respuestas de los maestros no consideran el azar o la noción de aleatoriedad. | - Si se refieren a los resultados de un evento o si consideran que son producto de una experiencia aleatoria. | - Si señalan los resultados posibles en una experiencia aleatoria y aclaran que se refieren al espacio muestral. | - Cuando muestran un argumento amplio y claro, y además lo ejemplifican. |

El cuadro 4 muestra la frecuencia y el porcentaje de los niveles en que se ubicaron las respuestas de los profesores.

**Cuadro 4.** Frecuencia y porcentaje de los niveles de pensamiento de los profesores.

| NIVELES DE PENSAMIENTO | FRECUENCIA | %   |
|------------------------|------------|-----|
| Preestructural         | 11         | 44  |
| Uniestructural         | 3          | 12  |
| Multiestructural       | 1          | 4   |
| Relacional             | -          | 0   |
| No contestó            | 10         | 40  |
| Total                  | 25         | 100 |

La tabla que sigue muestra las características que corresponden al nivel de pensamiento de los profesores.

| NIVEL DE PENSAMIENTO | CARACTERÍSTICAS  |
|----------------------|--|
| Preestructural       | <p>M1: Que el niño identifique el lugar o los lugares en donde se realiza el fenómeno, los hechos o sucesos, y las relaciones que hay con el medio ambiente.</p> <p>M3: Se considera la forma en que se desarrolla el planteamiento de los eventos que se desean conocer, para registrar los resultados obtenidos.</p> <p>M7: De varios juegos o sucesos, van a ver qué es lo que los caracteriza.</p> <p>M8: Conocer el volumen que ocupa un cuerpo en determinado espacio.</p> <p>M9: Explicar en qué consiste el espacio muestral.</p> <p>M15: No tengo clara la idea de lo que es un espacio muestral; entiendo que se refiere a un grupo específico en el que uno se basa para hablar de lo general.</p> <p>M16: Considero que, de un determinado número de cuentas, se sacarán algunas para ver qué porcentaje puede obtenerse de la cantidad total.</p> <p>M17: Que de un determinado número de eventos se sacarán algunas para ver qué porcentaje puede obtenerse de la cantidad total.</p> <p>M21: Como una muestra.</p> <p>M22: Que los niños llevan a la escuela cajas de distintos tamaños, toquen lo que limitan; esos cuerpos se llaman caras.</p> <p>M25: Como todos los acontecimientos que nos rodean y que nos sirven de modelo en el proceso educativo.</p> |
| Uniestructural       | <p>M11: Reconocer un evento y sus posibles resultados.</p> <p>M13: Son los resultados posibles de un evento.</p> <p>M18: Manera de informar las posibilidades de un evento.</p>  |
| Multiestructural     | <p>M6: Que los alumnos identifiquen que a la totalidad de resultados posibles en un experimento se les llama espacio muestral.</p>   |
| Relacional           | <p>No hubo respuestas de este nivel.</p>   |

### Resumen

Once maestros proponen interpretaciones preestructurales; seis tienen ideas confusas; uno indica que son las características de un juego; otro señala que es una muestra; uno más indica que se debe explicar qué es y dos consideran el espacio físico.

Tres profesores se ubican en el nivel uniestructural y se refieren a los posibles resultados. Sólo uno da una interpretación multiestructural concreta, que

es la totalidad de resultados posibles. Diez profesores no contestaron por lo que no se les ubicó en ningún nivel de pensamiento.

Debe hacerse hincapié en que la mayoría de los maestros tienen ideas confusas con respecto al espacio muestral (concepto que no se aclara ni siquiera en los libros de texto, aunque se presenta de manera implícita).

### 5.5. Contenido Número 5: “Uso de expresiones más probable y menos probable en la predicción de resultados”

Se trata de predecir cuáles son los resultados de un experimento aleatorio mediante el uso de las expresiones *más probable* y *menos probable*; esto significa que para saber cuál de los resultados es más probable o menos probable se debe conocer cuál es el espacio muestral o el total de resultados posibles.

Las nociones implícitas son: espacio muestral; total de resultados posibles; mayor probabilidad (el que tiene más casos favorables); menor probabilidad (el que tiene menos casos favorables).

Se dice entonces que los profesores hacen una interpretación de tipo:

| PREESTRUCTURAL  | UNIESTRUCTURAL   | MULTIESTRUCTURAL                              | RELACIONAL                                 |
|---|--|---|--|
| - Si las respuestas de los profesores no incluyen los términos y, además, son confusas. | - Cuando toman en cuenta una de las nociones implícitas. | - Si consideran dos o más nociones implícitas | - Si muestran un argumento amplio y claro. |

El cuadro 5 muestra la frecuencia y el porcentaje de los niveles en que se ubicaron las respuestas de los profesores.

**Cuadro 5.** Frecuencia y porcentaje de los niveles de pensamiento de los profesores.

| NIVELES DE PENSAMIENTO | FRECUENCIA | %   |
|------------------------|------------|-----|
| Preestructural         | 5          | 20  |
| Uniestructural         | 17         | 68  |
| Multiestructural       | 2          | 8   |
| Relacional             | -          | 0   |
| No constestó           | 1          | 4   |
| Total                  | 25         | 100 |

La tabla que sigue muestra las características que corresponden al nivel de pensamiento de los profesores.

| <b>NIVELES DE PENSAMIENTO</b> | <b>CARACTERÍSTICAS</b>   |
|-------------------------------|--|
| Preestructural                | <p>M5: Son hechos en los que puede ser probable o no que acontezcan los sucesos.</p> <p>M7: En situaciones en las que no hay azar se van a utilizar esas expresiones.</p> <p>M10: Que el alumno, a través de estas expresiones, dé respuesta a algunos problemas planteados.</p> <p>M21: Experimentos aleatorios.</p>  |
| Uniestructural                | <p>M1: El niño analiza diversos hechos y sucesos para identificar las posibilidades que se tienen.</p> <p>M20: Se maneja la probabilidad que puede haber en un juego a través de actividades.</p> <p>M2: Que cada niño identifique quién tiene más posibilidades en un evento.</p> <p>M3: Se predice con las expresiones la probabilidad de los eventos.</p> <p>M6: Que los niños sepan utilizar las expresiones <i>más probable</i> y <i>menos probable</i> en las predicciones de los resultados.</p> <p>M8: Realizar un juego en donde intervenga la predicción de resultados.</p> <p>M13: Que el niño use las expresiones <i>más probable</i> y <i>menos probable</i> al predecir resultados de un evento.</p> <p>M14: Hay sucesos en los cuales se puede predecir si es más probable o menos probable el resultado por sus características.</p> <p>M16: Es cuando cierto evento tiene mayor posibilidad de salir en un juego determinado, y menor posibilidad cuando tiene menor oportunidad de salir.</p> <p>M17: En donde se utilicen las expresiones para predecir lo que va a pasar según el evento.</p> <p>M4: Acontecimientos en los que es más o menos probable que sucedan las cosas.</p> <p>M9: De varios enunciados, se clasifica qué es lo más probable y qué es lo menos probable.</p> <p>M11: Que el alumno sepa utilizar las expresiones <i>más probable</i> y <i>menos probable</i> según las posibilidades.</p> <p>M25: Hay acontecimientos más probables y algunos menos probables.</p> <p>M15: Acercamiento a un resultado mediante estas dos frases.</p> |

|                  |  |
|------------------|--|
|                  | <p>M18: Para poder anticipar posibles resultados de algunos eventos aleatorios.</p> <p>M24: Mencionar con anterioridad un posible acontecimiento o resultado de tal evento.</p> <p>M23: Es cuando hay cierta probabilidad de que sucedan los hechos.</p>   |
| Multiestructural | <p>M12: Es más probable que salga una canica roja porque hay más canicas de ese color; por tanto, es menos probable que salga una canica azul porque hay menos canicas de ese color.</p> <p>M22: <i>Más probable y menos probable.</i> En una caja se ponen 10 manzanas rojas y 7 manzanas verdes.</p> |
| Relacional       | No hubo respuestas de este nivel.  |

### Resumen

Cuatro profesores se ubican en el nivel preestructural, éstos confunden que es lo que propone el contenido: pasan por alto los términos enunciados.

Dieciocho dan interpretaciones uniestructurales, siete afirman que hay que predecir con las expresiones; cinco señalan los términos *más probable y menos probable*; tres orientan su idea a la identificación de posibilidades; tres más se refieren a la anticipación y uno menciona la probabilidad.

Dos maestros interpretan de manera multiestructural, esto es, se refieren a los términos y ejemplifican. No obstante, la mayoría de los maestros no señalaron con precisión el uso de los términos, ni indicaron cómo se pueden ejemplificar. Un profesor no contestó por lo que no se ubicó en ningún nivel de pensamiento.

### 5.6. Contenido Número 6: “Experimentos aleatorios y análisis de los resultados posibles y de los casos favorables”

La intención de este contenido es que los estudiantes lleven a cabo experimentos aleatorios, identifiquen el espacio muestral, conozcan los posibles resultados que se obtienen al realizar el experimento y, por tanto, sepan distinguir qué resultados son favorables para ellos. Esto significa que los niños deben darse cuenta de qué resultados los conducen a ganar y cuáles no les son favorables; de esta manera, advertirán que los experimentos aleatorios pueden considerarse favorables o no favorables de acuerdo con las posibilidades que se tengan de ganar o de *atinarle* a un posible resultado.

Las nociones implícitas son: experimentos aleatorios; espacio muestral; total de resultados posibles; casos favorables; aleatoriedad; incertidumbre.

Se dice entonces que los profesores hacen una interpretación de tipo:

| <b>PREESTRUCTURAL</b>   | <b>UNIESTRUCTURAL</b>                                    | <b>MULTIESTRUCTURAL</b>                             | <b>RELACIONAL</b>                          |
|---|--|---|--|
| - Si las respuestas de los profesores no consideran ninguna de las nociones o se desvían totalmente de lo esperado. | - Cuando toman en cuenta una de las nociones implícitas. | - Si toman en cuenta dos o más nociones implícitas. | - Si muestran un argumento amplio y claro. |

El cuadro 6 muestra la frecuencia y el porcentaje de los niveles en que se ubicaron las respuestas de los profesores.

**Cuadro 6.** Frecuencia y porcentaje de los niveles de pensamiento de los profesores.

| <b>NIVELES DE PENSAMIENTO</b> | <b>FRECUENCIA</b> | <b>%</b> |
|-------------------------------|-------------------|----------|
| Preestructural                | 4                 | 16       |
| Uniestructural                | 12                | 48       |
| Multiestructural              | 8                 | 32       |
| Relacional                    | -                 | 0        |
| No constestó                  | 1                 | 4        |
| Total                         | 25                | 100      |

La tabla que sigue muestra las características que corresponden al nivel de pensamiento de los profesores.

| <b>NIVELES DE PENSAMIENTO</b> | <b>CARACTERÍSTICAS</b>   |
|-------------------------------|--|
| Preestructural                | M2: El juego de lanzar una moneda para saber quién adivina lo que cae y registrar los datos en una tabla. O los dados de diferentes colores.<br>M7: Realizar diferentes ejercicios cuya respuesta pueda favorecer en determinada forma.<br>M8: Realizar una actividad para formar palabras.<br>M23: Es cuando en los juegos no siempre interviene el azar sino que, según la habilidad del jugador, es posible que gane. |
| Uniestructural                | M3: A través de los experimentos aleatorios se analizan los resultados posibles, juzgando la mayor o menor probabilidad en los casos.<br>M4: Realizar experimentos para conocer los resultados posibles.   |

|                  |  |
|------------------|--|
|                  | <p>M5: Comprobar los sucesos a partir de experimentos para saber los posibles resultados obtenidos.</p> <p>M6: Que los niños aprendan que los experimentos aleatorios son aquellos cuyo resultado no se puede predecir antes de que se produzca el acontecimiento, pero es posible conocer los resultados que puede haber.</p> <p>M9: De varios eventos, analizar los resultados.</p> <p>M10: Realizar experimentos y registrar los resultados para luego analizarlos.</p> <p>M11: Realizar experimentos y analizar los resultados.</p> <p>M18: Calificar los resultados de eventos como posibles o imposibles.</p> <p>M20: Plantear una situación de probabilidad y pedir a los alumnos que hagan comparaciones o propongan explicaciones que se completen con las palabras <i>mayor</i>, <i>menor</i> o <i>igual</i>.</p> <p>M21: Hacer experimentos y registrar en una tabla los resultados para su análisis.</p> <p>M22: Lanzar una moneda al aire 20 veces.</p> <p>M24: Estas situaciones pueden presentarse en eventos con el mismo número de casos favorables, mayor o menor probabilidad.</p>                            |
| Multiestructural | <p>M1: Realizar varios experimentos para comprobar los resultados estimados con anterioridad, y ver qué factores son favorables para acertar en la predicción.</p> <p>M12: Es la probabilidad de adivinar el volado en un 50 por ciento, ya que sólo hay dos opciones (sol y águila). A mayor número de opciones, menor será la probabilidad de acertar.</p> <p>M13: Llevar a cabo experimentos donde interviene el azar y analizar los resultados posibles, así como los casos favorables.</p> <p>M14: Realizar varias veces sucesos aleatorios, y analizar los resultados posibles y los casos favorables.</p> <p>M15: Son los que dependen de un suceso eventual donde uno se percata de lo posible y de lo favorable.</p> <p>M16: Es la valoración que se realiza después de realizar los experimentos, tanto en casos favorables como en los resultados posibles obtenidos.</p> <p>M17: Son experimentos en los que se analizan los resultados que puede haber y favorecen a un determinado jugador.</p> <p>M25: Es la mezcla de todos los factores que intervienen y, así, hacer los resultados favorables y posibles.</p> |
| Relacional       | No hubo respuestas de este nivel.  |

**Resumen**

Cuatro profesores se ubican en el nivel preestructural, dos indican que hay que realizar la experiencia; uno da una respuesta descontextualizada; otro más alude a los juegos de habilidades —estos últimos no tomaron en cuenta las nociones implícitas en el contenido—.

Doce ofrecen interpretaciones uniestructurales, cuatro hacen referencia a resultados posibles; cuatro al análisis de los resultados; uno menciona casos favorables; uno a tipos de eventos; uno más emplea los términos *mayor probabilidad* y *menor probabilidad*, y uno señala una experiencia.

Ocho maestros dan interpretaciones multiestructurales; en particular, incluyen los resultados posibles y los casos favorables. No se dio ninguna interpretación que explicara la forma en que se podría desarrollar el contenido, ni propusieron ejemplos.

Un profesor no constató por lo que no se le ubicó en ningún nivel de pensamiento.

**5.7. Contenido Número 7: “Identificación de la noción de Evento”**

El interés central de este contenido es que los alumnos se den cuenta de que un evento puede ser cualquier experimento aleatorio, un juego de azar o simplemente un suceso determinista.

Esto, con la finalidad de reconocer que un evento es una situación en particular, pero que también puede ser compuesto.

Por ejemplo, un evento puede consistir en el lanzamiento de un dado para ver qué número cae o simplemente lanzar una moneda para ver si cae águila o sol. En el caso del dado el evento particular sería: (1) (2) (3) (4) (5) (6); en el lanzamiento de la moneda puede ser (águila) (sol). En cambio, en un evento compuesto sería: (1, 2, 3), lo que significa que “ocurre en una sola tirada si cae el 1, el 2 o el 3”.

Las nociones implícitas son: posibles resultados de una experiencia; un resultado o un conjunto de resultados u observaciones; un subconjunto del espacio muestral.

Se dice entonces que los profesores hacen una interpretación de tipo:

| <b>PREESTRUCTURAL</b>  | <b>UNIESTRUCTURAL</b>                                | <b>MULTIESTRUCTURAL</b>                             | <b>RELACIONAL</b>                         |
|--|--|---|---|
| - Cuando las respuestas de los profesores no consideran una situación azarosa. | - Si toman en cuenta una de las nociones implícitas. | - Si toman en cuenta dos o más nociones implícitas. | - Si ofrecen un argumento amplio y claro. |

El cuadro 7 muestra la frecuencia y el porcentaje de los niveles en que se ubicaron las respuestas de los profesores.

**Cuadro 7.** Frecuencia y porcentaje de los niveles de pensamiento de los profesores.

| <b>NIVELES DE PENSAMIENTO</b> | <b>FRECUENCIA</b> | <b>%</b> |
|-------------------------------|-------------------|----------|
| Preestructural                | -                 | 0        |
| Uniestructural                | 20                | 80       |
| Multiestructural              | 1                 | 4        |
| Relacional                    | 4                 | 16       |
| No contestó                   | -                 | 0        |
| Total                         | 25                | 100      |

La tabla que sigue muestra las características que corresponden al nivel de pensamiento de los profesores.

| <b>NIVELES DE PENSAMIENTO</b> | <b>CARACTERÍSTICAS</b>  |
|-------------------------------|---|
| Preestructural                | No hubo respuestas de este nivel.   |
| Uniestructural                | M1: Que el individuo identifique, a través de un juego, cuántas veces lo realizó para acertar la probabilidad.<br>M3: Se desea que el alumno descubra de manera práctica y sencilla lo que es un evento, sobre algo que es impredecible o inseguro.<br>M5: Lo que pasaría en un evento de azar.<br>M7: Identificar algo que se va a realizar.<br>M8: Buscar un resultado probable de una actividad.<br>M9: Explicar a los alumnos lo que es un evento.<br>M10: Identificar experiencias aleatorias.<br>M11: Reconocer qué es un evento.<br>M12: En el evento de la ruleta de tres colores, tres jugadores tienen la probabilidad de ganar ya que hay tres sectores y tres jugadores; la |

|                  |   |
|------------------|---|
|                  | <p>probabilidad es la misma para los tres.</p> <p>M13: Que el alumno conozca que un evento es un acontecimiento o suceso.</p> <p>M14: Identificar diversos eventos como azarosos o deterministas.</p> <p>M15: Es un suceso que no se puede prever.</p> <p>M16: Conocer algo —un resultado después de hacer un intento— donde no se sabe de antemano el resultado que viene en el otro intento.</p> <p>M17: Conocer el resultado después de hacer un intento, donde no se sabe de antemano el resultado que viene en el otro intento.</p> <p>M18: Es la realización de un experimento aleatorio.</p> <p>M20: Cuando se realizan juegos deportivos, la realización de rifas o carreras de caballos, etcétera.</p> <p>M21: Como sacar una canica roja de una caja con canicas rojas y blancas.</p> <p>M22: En un juego de azar, ganar o perder depende de la suerte. En otros juegos, ganar o perder depende de la habilidad del jugador; por ejemplo: el juego del timbiriche se juega con dos o más participantes.</p> <p>M23: Es cuando sucede algo imprevisto.</p> <p>M25: Como un acontecimiento, un suceso imprevisto.</p> |
| Multiestructural | M6: Que los niños identifiquen que un evento es uno o varios de los resultados posibles que se obtienen al hacer un experimento.  |
| Relacional       | No hubo respuestas de este nivel.   |

### Resumen

Veinte se sitúan en el nivel uniestructural; en general, lo señalan como un suceso, una experiencia, un resultado, un juego o proponen una situación de azar, pero no profundizan en su interpretación.

Un solo maestro se ubica en el nivel multiestructural, pues en su interpretación incluye la idea de un resultado o varios resultados posibles en una experiencia.

La mayoría tiene nociones uniestructurales que se aproximan a la noción de evento, sin embargo, no concretan realmente la idea; este concepto está incluido en los textos, aunque no se conceptualiza, y tal vez por ello los maestros tratan de interpretarlo de acuerdo con su propia experiencia.

Cuatro profesores no se ubicaron en ningún nivel, no dieron ninguna interpretación al contenido propuesto en el programa oficial.

### 5.8. Contenido Número 8: “Identificación de la mayor o menor probabilidad de los eventos”

El objetivo de este contenido es que los estudiantes rescaten y construyan la idea sobre la mayor o menor probabilidad que tiene un resultado en una experiencia aleatoria. Esto los lleva a conocer que un resultado es un evento y que cada uno de los posibles resultados tiene una probabilidad de ocurrir, lo que, a su vez, conduce a identificar cuál tiene mayor o menor probabilidad. En este sentido, es importante que el alumno reconozca que no siempre se va a ganar aun cuando se conozca la posible estimación de los resultados esperados.

Las nociones implícitas son: mayor probabilidad; menor probabilidad; evento; espacio muestral; resultados posibles; casos favorables; estimación de probabilidad.

Se dice entonces que los profesores hacen una interpretación de tipo:

| PREESTRUCTURAL   | UNIESTRUCTURAL                                       | MULTIESTRUCTURAL                                   | RELACIONAL                                 |
|--|--|--|--|
| - Cuando las respuestas de los maestros incluyen argumentos confusos . | - Si toman en cuenta una de las nociones implícitas. | - Cuando consideran dos o más nociones implícitas. | - Si muestran un argumento amplio y claro. |

El cuadro 8 muestra la frecuencia y el porcentaje de los niveles en que se ubicaron las respuestas de los profesores.

**Cuadro 8.** Frecuencia y porcentaje de los niveles de pensamiento de los profesores.

| NIVELES DE PENSAMIENTO | FRECUENCIA | %   |
|------------------------|------------|-----|
| Preestructural         | 3          | 12  |
| Uniestructural         | 16         | 64  |
| Multiestructural       | 4          | 16  |
| Relacional             | -          | 0   |
| No contestó            | 2          | 8   |
| Total                  | 25         | 100 |

La tabla que sigue muestra las características que corresponden al nivel de pensamiento de los profesores.

| NIVELES DE PENSAMIENTO | CARACTERÍSTICAS   |
|------------------------|---|
| Preestructural         | <p>M9: Identificar enunciados de menor o mayor probabilidad.</p> <p>M22: Construir dos dados con las mismas caras numeradas del 1 al 6.</p> <p>M23: Es cuando tenemos planeado algún evento, pero por alguna razón no se lleva a cabo.</p>  |
| Uniestructural         | <p>M1: Que el niño, a través de los hechos o sucesos, compruebe la mayor o menor probabilidad que tiene cada evento.</p> <p>M3: Este contenido se trabaja para que los niños se den cuenta de qué eventos tienen más o menos probabilidad.</p> <p>M4: Conocer la mayor o menor probabilidad de los eventos en un caso determinado.</p> <p>M5: Probabilidad mayor o menor en un determinado evento.</p> <p>M6: Que los niños adquieran los conocimientos que las probabilidades se dan entre el 0 y 1, y que se expresan con fracciones y decimales.</p> <p>M7: De una serie de eventos, clasificar cuáles son los que tienen mayor o menor probabilidad.</p> <p>M8: Registrar los resultados de un evento con mayor o menor probabilidad.</p> <p>M10: Realizar eventos donde se utilice los términos <i>mayor probabilidad</i> o <i>menor probabilidad</i>.</p> <p>M12: La mayor probabilidad de ganar es de Marcos ya que tiene dos sectores, y la de perder es de Mauricio y Martina ya que ellos tienen un sector cada uno.</p> <p>M14: Identificar cuando existe más probabilidad o menos en ciertos eventos por sus características.</p> <p>M15: Si es más o menos probable un suceso.</p> <p>M17: Son eventos en donde se identifica quién tiene mayor o menor probabilidad de ganar.</p> <p>M18: Cuantificación de casos favorables.</p> <p>M20: Se les explica a los alumnos que la suma de las partes coloreadas de una ruleta se denominan eventos posibles; las partes coloreadas de azul son los eventos favorables para ese color, lo mismo sucede para el amarillo.</p> <p>M21: En los experimentos aleatorios.</p> <p>M25: Se puede clasificar a los eventos según su grado de trascendencia o importancia para que se lleve a cabo.</p> |
| Multiestructural       | <p>M11: Usar las palabras <i>mayor probabilidad</i> o <i>menor probabilidad</i> si hay más posibilidades o no, de acuerdo con las condiciones favorables o desfavorables.</p> <p>M13: Que el niño identifique cuándo es mayor o menor la probabilidad de</p>  |

|            |   |
|------------|---|
|            | <p>acuerdo con el número de veces que hay cierto elemento.</p> <p>M16: Según la cantidad de oportunidad que se les presenten a los eventos, su probabilidad será mayor; y al contrario, cuando es escasa o menos favorable de ser dichos eventos.</p> <p>M24: En estas situaciones pueden presentarse eventos con el mismo número de casos favorables (mayor o menor probabilidad).</p> |
| Relacional | No hubo respuestas de este nivel.   |

### Resumen

Tres maestros se sitúan en el nivel preestructural dan argumentos confusos. Dieciséis interpretaron de manera uniestructural, puesto que únicamente señalan los términos, pero no indican cómo se deben obtener en el análisis de los resultados de la experiencia.

Cuatro se ubican en el nivel multiestructural; sus interpretaciones incluyen la mayor probabilidad y la menor probabilidad en un evento y consideran los resultados que favorecen a cada expresión. Debe destacarse que la mayoría de los profesores intentan interpretar el contenido, pero no aclaran que aspectos hay que considerar para obtener la mayor o menor probabilidad. Dos no interpretan el contenido por lo que no se ubicaron en ningún nivel de pensamiento.

### 5.9. Contenido Número 9: “Identificación de fenómeno o experimento aleatorio”

Una experiencia aleatoria es aquella en la cual no se conoce con certeza su resultado, por lo que no se puede predecir con seguridad. Pueden darse muchos resultados; los posibles resultados se pueden conocer y con ello estimar la probabilidad en que podrían ocurrir. Existe la presencia del azar, de la incertidumbre, de la duda.

Las nociones implícitas son: variabilidad de resultados; incertidumbre; duda; azar; aleatoriedad.

Se dice entonces que los profesores hacen una interpretación de tipo:

| PREESTRUCTURAL                 | UNIESTRUCTURAL                      | MULTIESTRUCTURAL                        | RELACIONAL                          |
|--------------------------------|-------------------------------------|---|-------------------------------------|
| - Cuando las respuestas de los | - Cuando toman en cuenta una de las | - Si toman en cuenta dos o más nociones | - Si muestran un argumento amplio y |

|  |                      |             |        |
|--|----------------------|-------------|--------|
| maestros no consideran ninguno de los aspectos anteriores. | nociones implícitas. | implícitas. | claro. |
|--|----------------------|-------------|--------|

El cuadro 9 muestra la frecuencia y el porcentaje de los niveles en que se ubicaron las respuestas de los profesores.

**Cuadro 9.** Frecuencia y porcentaje de los niveles de pensamiento de los profesores.

| <b>NIVELES DE PENSAMIENTO</b> | <b>FRECUENCIA</b> | <b>%</b> |
|-------------------------------|-------------------|----------|
| Preestructural                | 4                 | 16       |
| Uniestructural                | 20                | 80       |
| Multiestructural              | -                 | 0        |
| Relacional                    | -                 | 0        |
| No contestó                   | 1                 | 4        |
| Total                         | 25                | 100      |

La tabla que sigue muestra las características que corresponden al nivel de pensamiento de los profesores.

| <b>NIVELES DE PENSAMIENTO</b> | <b>CARACTERÍSTICAS</b>  |
|-------------------------------|---|
| Preestructural                | M8: Realizar una actividad para conocer el resultado de un evento.<br>M12: Es cuando un jugador tiene más posibilidades de ganar.<br>M15: Identificar un suceso pasajero.<br>M25: Son todos los aspectos materiales y espirituales que nos rodean y que se relacionan entre sí.   |
| Uniestructural                | M1: Que los niños, a través de la realización de hechos o sucesos, observen los fenómenos o experimentos que se analizan y los identifiquen.<br>M3: Con este contenido los niños conocerán los experimentos que son o no son aleatorios.<br>M7: Que el alumno identifique algún fenómeno aleatorio.<br>M9: Identificar lo que es un evento aleatorio.<br>M10: Realizar varios planteamientos para identificar experimentos aleatorios.<br>M13: Distinguir cuando un fenómeno o experimento es de azar.<br>M14: Identificar por sus características los fenómenos o experimentos aleatorios. |

|                  |  |
|------------------|--|
|                  | <p>M2: Llevar a cabo un juego de dados o lanzar un dado.</p> <p>M4: Son los pasos en que se registran acontecimientos en donde interviene el azar.</p> <p>M5: Son registros en los que se acumulan o integran datos obtenidos en juegos de azar.</p> <p>M6: Que los alumnos puedan identificar que hay fenómenos que se pueden predecir, y hay otros fenómenos que no se pueden predecir con certeza que ocurrirán.</p> <p>M11: Que el niño identifique un fenómeno en donde interviene el azar.</p> <p>M16: Cuando no se conoce cuál será el resultado que se obtenga.</p> <p>M17: Es un experimento en donde no se sabe el resultado.</p> <p>M18: Será aleatorio si el resultado de un evento no se anticipa con seguridad.</p> <p>M22: Se experimenta con base en diferentes objetos, como dados, canicas de diferentes colores, monedas.</p> <p>M24: Que el experimento aleatorio carece de seguridad, porque el resultado se obtendrá al efectuarse dicho experimento.</p> <p>M20: Que los niños sepan cuándo un experimento puede ser más probable o menos probable.</p> <p>M21: La probabilidad proporciona una oportunidad para estudiar un fenómeno.</p> <p>M23: Es cuando registramos en una tabla los sucesos que pueden llegar a realizarse.</p> |
| Multiestructural | No hubo respuestas de este nivel.  |
| Relacional       | No hubo respuestas de este nivel.  |

### Resumen

Cuatro profesores se sitúan en el nivel preestructural dan argumentos que omiten la presencia del azar. Veinte maestros ofrecen interpretaciones uniestructurales; diez incluyen la presencia del azar; siete indican que se debe identificar el experimento; en su interpretación tres maestros dan por sentada la presencia de la probabilidad.

Sin embargo, las interpretaciones de los maestros no profundizan en lo que es un fenómeno o un experimento aleatorio. Un profesor no interpretó el contenido por el cual no se le ubicó en ningún nivel de pensamiento.

### 5.10. Contenido Número 10: “Comparación de dos eventos a partir del número de casos favorables sin cuantificar su probabilidad”

Este contenido promueve la idea de reconocer los casos favorables que se tienen en cada evento. O, en otras palabras, que a partir del reconocimiento del espacio muestral del evento sea posible identificar los casos favorables que se tienen en su realización al elegir un resultado, sin cuantificar su probabilidad; ello podría hacerse mediante el uso de los términos *mayor, menor o igual probabilidad*.

Así pues, se puede tomar una decisión más adecuada con respecto al posible resultado, reconociendo de antemano las posibilidades que existen a favor y en contra de nuestra selección.

Aunque la decisión permite elegir el resultado más favorable, eso no garantizará el resultado, por lo que uno debe estar consciente de que en el azar no hay nada seguro: todo es incierto.

Además, promueve la idea de que al realizar un experimento aleatorio se obtiene un resultado al que se le denomina evento. En este sentido, se tiene que todos los posibles resultados que pueden ocurrir al llevarse a cabo un experimento aleatorio serán los eventos posibles de ese experimento.

Las nociones implícitas son: evento; espacio muestral; casos favorables; sin cuantificar; presencia del azar; aleatoriedad; incertidumbre; toma de decisiones; mayor, menor o igual probabilidad.

Se dice entonces que los profesores hacen una interpretación de tipo:

| PREESTRUCTURAL  | UNIESTRUCTURAL  | MULTIESTRUCTURAL                                   | RELACIONAL                                |
|---|---|--|---|
| - Cuando las respuestas de los profesores son confusas y no tienen ninguna relación con el contenido. | - Si toman en cuenta en su interpretación una de las nociones implícitas. | - Cuando consideran dos o más nociones implícitas. | - Si ofrecen un argumento amplio y claro. |

El cuadro 10 muestra la frecuencia y el porcentaje de los niveles en que se ubicaron las respuestas de los profesores.

**Cuadro 10.** Frecuencia y porcentaje de los niveles de pensamiento de los profesores.

| Niveles de pensamiento | Frecuencia | %   |
|------------------------|------------|-----|
| Preestructural         | 6          | 24  |
| Uniestructural         | 10         | 40  |
| Multiestructural       | 2          | 8   |
| Relacional             | -          | 0   |
| No contestó            | 7          | 28  |
| Total                  | 25         | 100 |

La tabla que sigue muestra las características que corresponden al nivel de pensamiento de los profesores.

| NIVELES DE PENSAMIENTO | CARACTERÍSTICAS  |
|------------------------|--|
| Preestructural         | <p>M1: Que los niños identifiquen la probabilidad que tienen al competir con otro niño.</p> <p>M7: Comparar el resultado de dos actividades.</p> <p>M8: Comparar dos eventos después de tener un resultado.</p> <p>M10: Realizar eventos sin registrarlos en tablas.</p> <p>M23: Es cuando realizamos los eventos en la zona; por ejemplo, el concurso de escolta y de aprovechamiento.</p> <p>M24: Que en dicha situación interesa que el o los eventos obtengan una.</p>   |
| Uniestructural         | <p>M3: Con este contenido los niños comparan dos eventos sin cuantificar su probabilidad.</p> <p>M4: Comparar dos eventos a partir de casos favorables sin que intervenga la probabilidad.</p> <p>M11: Realizar dos eventos y anotar los casos favorables, compararlos y advertir en dónde hubo más casos favorables.</p> <p>M14: Comparar dos eventos con probabilidades favorables sin dar con anticipación un resultado.</p> <p>M16: Se tiene que comparar las veces que salga equis evento sin tomar el valor que se obtiene.</p> <p>M17: Se hace la comparación de dos eventos sin tomar el valor que se obtiene.</p> <p>M18: Contar solamente los casos favorables para cada participante.</p> <p>M21: En una experiencia aleatoria que dé dos o más acontecimientos, sólo uno puede presentarse pero no sabemos de antemano cuál ocurrirá.</p> <p>M22: Pueden presentarse eventos con el mismo número de casos favorables y eventos con diferente número de casos favorables.</p> |

|                  |  |
|------------------|--|
|                  | M25: Los eventos los podemos clasificar como favorables; algunos más que otros y con más probabilidad, según la dimensión del caso.  |
| Multiestructural | M6: Que el niño aprenda que la probabilidad se representa por medio de una fracción que indica el número de eventos probables contra el total de eventos.<br>M13: Comparar dos eventos tomando en cuenta el número de casos que se repiten, sin realizar proporciones de probabilidades. |
| Relacional       | No hubo respuestas de este nivel.  |

### Resumen

Seis profesores se ubican en el nivel preestructural, tienen ideas confusas y descontextualizadas con el azar.

Diez comparten características uniestructurales y señalan únicamente los conceptos comparar eventos y casos favorables, pero sin justificar cómo se debe realizar el análisis del experimento azaroso. Dos maestros se sitúan en el nivel multiestructural y sus interpretaciones incluyen la probabilidad, la fracción, la proporcionalidad y el número de eventos probables. En general, los profesores enuncian únicamente las ideas señaladas en el contenido, pero no las explican a profundidad. Siete profesores no interpretaron el contenido por lo que no se ubicaron en ningún nivel de pensamiento.

#### 5.11. Construcción de problemas propuestos para trabajar los contenidos

A fin de tener una idea general acerca de las actividades que construyeron los profesores para abordar el contenido, se identificó de entrada si existía una relación entre la actividad construida y el contenido; es decir, si las actividades que construyeron se relacionan con el contenido de probabilidad y si, además, pueden trabajarse en el aula con los alumnos, de acuerdo con las jerarquías propuestas por Biggs y Collis. Los pensamientos implícitos en la construcción de problemas se concentran en el cuadro 11:

**Cuadro 11.** Frecuencias de los contenidos propuestos.

|   | <b>Preestructurales</b> | <b>%</b> | <b>Uniestructurales</b> | <b>%</b> | <b>Multiestructurales</b> | <b>%</b> |
|---|-------------------------|----------|-------------------------|----------|---------------------------|----------|
| 1 | 6                       | 24       | 19                      | 76       | 0                         | 0        |
| 2 | 4                       | 16       | 11                      | 44       | 10                        | 40       |
| 3 | 12                      | 48       | 9                       | 36       | 4                         | 16       |

|    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|
| 4  | 19 | 76 | 4  | 16 | 2  | 8  |
| 5  | 4  | 16 | 8  | 32 | 13 | 52 |
| 6  | 8  | 32 | 16 | 64 | 1  | 4  |
| 7  | 8  | 32 | 17 | 68 | 0  | 0  |
| 8  | 11 | 44 | 9  | 36 | 5  | 20 |
| 9  | 7  | 28 | 7  | 28 | 11 | 44 |
| 10 | 15 | 60 | 5  | 20 | 5  | 20 |

### Conclusión general

Un porcentaje alto de profesores construyeron problemas relacionados de algún modo con el contenido propuesto. La mayoría incluyó la utilización de los fenómenos aleatorios, sobre todo, juegos de azar y el uso de monedas, dados y ruletas. Esto se ha vuelto una práctica común en la enseñanza de la probabilidad en la escuela primaria.

Los profesores tuvieron más dificultades para construir problemas en los contenidos “Registro de los resultados de experimentos aleatorios”, “Identificación de la noción de espacio muestral”, “Identificación de la mayor o menor probabilidad de los eventos” y “Comparación de dos eventos a partir del número de casos favorables sin cuantificar su probabilidad”.

En la construcción de problemas los maestros revelaron, de nuevo, que poseen una noción general de la probabilidad, es decir: para ellos basta con incluir la idea de azar o de experimento aleatorio y de esa manera creen que cumplen con los propósitos de los contenidos.

Nuestra hipótesis es que los profesores han elaborado una concepción de probabilidad de carácter general o, dicho en otros términos, la probabilidad tiene que ver con situaciones en las que no se sabe con seguridad lo que va a ocurrir, lo cual es desde luego correcto. Sin embargo, no debe perderse de vista que la probabilidad conlleva otros elementos que permiten realizar acciones específicas, como el uso de los términos *mayor probabilidad* o *menor probabilidad*, la cuantificación de la probabilidad, que se enuncian en los contenidos propuestos para su trabajo. En este aspecto vale la pena motivar a los maestros para que logren identificar y efectuar las actividades que se pueden trabajar en la

probabilidad y, sobre todo, entender que la probabilidad puede servir para tomar decisiones en muchos actos de nuestra vida.

### 5.11.1. Contenido Número 1: “Predicción de hechos y sucesos en situaciones sencillas en las que no interviene el azar”

La construcción de problemas que se sitúan en el nivel preestructural se traduce en actividades que tienen que ver con el azar. En las de tipo uniestructural se incluyen las situaciones que no tienen que ver con el azar, pero que no se enuncian como tales.

A continuación se muestran algunas construcciones de los profesores en el tipo de pensamiento que se ubicaron.

| NIVEL          | CARACTERÍSTICAS   |
|----------------|---|
| Preestructural | <p>M2: Escribe si sucede o no sucede en algunas oraciones dadas por el maestro.</p> <p>M5: Predecir si mañana asistirán todos los niños a la escuela.</p> <p>M12: Ejemplo de si va a llover. El alumno va a anticipar el resultado.</p> <p>M15: Escriban hechos importantes sucedidos la semana pasada. Una vez realizado comenten si están seguros que volverá a suceder.</p> <p>M19: Juanito coloca 10 canicas rojas y 2 canicas verdes dentro de una caja. ¿Qué es más probable que saque: 2 canicas rojas o 2 verdes?</p> <p>M24: Jugar a lanzar una moneda al aire para ver qué cara cae es una experiencia donde se pone en práctica dicha situación.</p>   |
| Uniestructural | <p>M1: Analizar algunas situaciones y que escriban <i>falso</i> o <i>verdadero</i>: “El agua del tanque está sucia”, “Miguel es más alto que Juan”.</p> <p>M3: Que los niños digan cuántos meses o días tiene el año 2002. Si meto mi mano al agua, ¿se mojará?</p> <p>M4: Realizar un registro sobre las condiciones del clima en un mes.</p> <p>M6: Si Juan cumplió ocho años, el próximo año cumplirá _____.</p> <p>M7: Pedro y Juan están jugando con una pelota que avientan hacia arriba. ¿Hacia dónde crees que va a caer?</p> <p>M13: Por ejemplo, si en una caja ponemos varios dulces de ese mismo sabor, existe la seguridad de que al sacar un dulce será de ese sabor.</p> <p>M16: Sumar <math>100 + 100</math> para ver si el resultado es 200.</p> <p>M22: Si nos paramos bajo la lluvia y nos mojamos será un hecho o suceso.</p> |

|                  |   |
|------------------|---|
|                  | M25: La contaminación perjudica la salud. |
| Multiestructural | No llegan a este nivel.                   |
| Relacional       | No llegan a este nivel.                   |

### Resumen

Seis profesores se ubican en el nivel preestructural; la construcción de problemas incluye la presencia del azar, pero olvidaron lo que se pide en el propio contenido, es decir: deben ser situaciones en las que precisamente no intervenga el azar. Esto indica que los maestros no analizaron adecuadamente el contenido propuesto.

Diecinueve maestros se ubican en el nivel uniestructural; proponen algunas preguntas que tienen respuesta determinada, o sea, no existe la presencia del azar. Muestran en sus planteamientos situaciones cotidianas como referencia, ejercicios aritméticos y algunos enunciados afirmativos. Ningún profesor incluyó en la construcción de problemas la utilización de juegos de estrategias o de habilidades, como se propone en los textos para diferenciar la presencia del azar.

#### 5.11.2. Contenido Número 2: “Identificación y realización de juegos en los que interviene o no interviene el azar”

La construcción de problemas que se sitúan en el nivel preestructural se refiere a situaciones que no consideran la intervención del azar o no indican qué hacer con ello.

En las de tipo uniestructural se incluyen las que consideran tanto el azar como el no azar, pero no mencionan qué hacer con ello. Las de tipo multiestructural se refieren a situaciones azarosas y no azarosas, y por lo menos intentan explicar que se deben identificar las situaciones.

Los profesores que no dieron ninguna interpretación no se les ubicó en ningún nivel de pensamiento.

A continuación se presentan algunas construcciones de los profesores en el tipo de pensamiento que se ubicaron.

| NIVEL          | CARACTERÍSTICAS  |
|----------------|--|
| Preestructural | M4: Jugar con dados, pero alterando el número de puntos en sus caras.<br>M24: En una fiesta ofrecen dos menús: barbacoa y mariscos. La |

|                  |   |
|------------------|---|
|                  | <p>barbacoa era de pollo y de res; los mariscos eran pulpo y camarones.<br/>Además, se podía tomar aguas de frutas o refrescos embotellados.<br/>¿Cuántas opciones tuvieron los invitados para escoger su platillo?</p>   |
| Uniestructural   | <p>M3: Que los niños identifiquen los juegos en que interviene el azar. Un partido de fútbol, las carreras de caballos, la lotería.<br/>M12: Que realicen juegos como las canicas, volados, trompo, lotería, y distingan juegos de azar y de probabilidad.<br/>M13: Realizar un juego con dos dados y anotar cuántas veces cae la suma de los números posibles (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12). Analizar si interviene o no el azar.<br/>M14: Realizaría el juego del gato.<br/>M17: Carmen sabe jugar muy bien al gato e invita a Luis para ver quién gana. ¿Quién crees que ganará?<br/>_____. ¿Por qué? _____.<br/>M23: Poner a jugar a los niños dominó y que un niño sea el mismo que empiece en todos los juegos.<br/>M2: Lanzar una moneda al aire. ¿Será que cae o no cae?</p> |
| Multiestructural | <p>M5: Jugar con dados e identificar que es un juego de azar, y mencionar otros juegos en los que no intervenga el azar.<br/>M6: Si unos niños juegan lotería y otros juegan dominó, ¿quiénes crees que realizan un juego de azar?<br/>M11: Lleven a cabo juegos de canicas, de tiro al blanco, dominó, etc., y reconozcan los juegos de azar y los que no lo son.<br/>M18: Ejemplificar las proposiciones azarosas y las deterministas mediante experimentos.<br/>Predicción: la tala de los bosques afecta el medio ambiente.<br/>Azar: al jugar volados caerá águila o sol.</p>  |
| Relacional       | No hubo respuestas de este nivel.   |

### Resumen

Dos profesores se situaron en el nivel preestructural, uno tiene una idea confusa pues no se percata de lo que significa alterar los números de los dados; otro más indica un problema de combinatoria. Ninguno de estos maestros incluyó en la construcción de problemas juegos en lo que interviniera el azar y donde no interviniera.

Once se ubican en el nivel uniestructural, ya que en sus construcciones de problemas toman en cuenta la intervención del azar o la no intervención del azar.

Diez muestran construcciones multiestructurales —suponen tanto la presencia del azar como su no presencia—, pues por lo menos indican las situaciones con respecto a lo enunciado en el contenido.

Dos no construyeron ningún tipo de problema, por lo que no se les ubicó en ningún nivel de pensamiento.

### 5.11.3. Contenido Número 3: “Registro de los resultados de experimentos aleatorios”

La construcción de problemas que se sitúan en el nivel preestructural omite los registros de resultados como un aspecto central que debe trabajarse.

En la construcción de tipo uniestructural se incluyen problemas que toman en cuenta situaciones de la experiencia y del registro, pero sin comentarios de su uso. La de tipo multiestructural señala, además, el uso de tablas y gráficas para ubicar los registros de resultados.

A continuación se presentan algunas construcciones de los profesores en el tipo de pensamiento que se ubicaron.

| NIVEL          | CARACTERÍSTICAS  |
|----------------|--|
| Preestructural | M6: Si lanzamos dos monedas al aire, ¿cuántos resultados posibles hay?<br>M7: Si tiro 10 veces una moneda, ¿qué cara es más probable que caiga?<br>M8: Que el niño realice el experimento con un dado y ganará el que saque más números pares.<br>M9: Echar varias veces un volado y observar qué cae más veces: ¿sol o águila?<br>M14: Si colocas en una caja varias fichas de diferentes colores y metes la mano para sacar una y repites varias veces este experimento, ¿qué color de ficha crees que saldrá más veces?<br>M24: Tirar una piedra a un blanco para ver si le pega o no.<br>M15: Cuando la nube está gris es que va a llover. |
| Uniestructural | M2: Formar equipos de cuatro elementos. Cada uno tira el dado y va registrando sus datos para después analizar quién hizo más puntos.<br>M4: Lanzar una moneda al aire y llevar un registro de cuántas veces cae águila o sol.<br>M13: Poner en una caja canicas de diferentes colores, por ejemplo, 5 rojas, 4 azules, 3 verdes y 2 blancas, y realizar un registro de cuántas  |

|                  |   |
|------------------|---|
|                  | <p>veces sale cada color.</p> <p>M18: Que los alumnos pongan canicas de distintos colores en una urna y que todos saquen una canica para que cada quien registre el color que saque.</p>  |
| Multiestructural | <p>M3: Los alumnos juegan a los volados y registran los resultados en tablas y elaboran una gráfica.</p> <p>M12: Participará con un dado numerado del 1 al 6 y registrará en una tabla el resultado de cada lanzamiento. Analizará qué números cayeron más, cuáles menos y cuáles en término medio.</p> <p>M21: Lanzamientos de dados cuyas caras son de diferente color. Los alumnos deben arrojar los dados un número determinado de veces, registrar en una tabla cuántas ocasiones salió cada color.</p> <p>M22: Contestar las preguntas de acuerdo con el resultado de la tabla.<br/>¿Qué número fue el más frecuente? ¿Qué número fue el menos frecuente? ¿Qué números tuvieron la misma frecuencia? Estos resultados se pueden representar en una gráfica.</p> |
| Relacional       | No hubo respuestas de este nivel.   |

### Resumen

Diez profesores se ubican en el nivel preestructural, enuncian una experiencia pero no incluyen el registro de resultados.

Nueve se sitúan en el nivel uniestructural, incluyen las ideas de experimento y registro, aunque sin indicar dónde y cómo lo presentarán. Cuatro presentan construcciones multiestructurales al señalar las nociones de experimentos, registros, tablas y gráficas; es decir, indican cómo llevarían a cabo los registros de las experiencias.

Dos no construyeron actividades, por lo que no se les ubicó en ningún nivel de pensamiento.

#### 5.11.4. Contenido Número 4: “Identificación de la noción de espacio muestral”

La construcción de problemas que se sitúan en el nivel preestructural se refiere básicamente a enunciados que no se aproximan a la noción de espacio muestral, ni lo orientan hacia el azar.

En la construcción de tipo uniestructural se consideran los problemas que especifican la idea de resultado. La orientada hacia el nivel multiestructural se refiere a los posibles resultados, pero sin profundizar en ellos.

A continuación se presentan algunas construcciones de los profesores en el tipo de pensamiento que se ubicaron.

| NIVEL          | CARACTERÍSTICAS  |
|----------------|--|
| Preestructural | <p>M1: Observación de un fenómeno natural, por ejemplo: temporada de lluvia, porque aunque llueva en la misma región hay sitios en donde no está ocurriendo.</p> <p>Jugar <i>stop</i>. Hacer un círculo y dividirlo en partes colocando en éstas los nombres de estados de la República Mexicana; el juego consiste en que un niño “declare la guerra” contra otro estado; el niño que ocupa ese lugar [el del estado al que se le ha declarado la guerra] entra al centro y grita <i>stop</i>; los demás corren y al grito se paran. El niño que se halla en el centro tiene que hacer una estimación de la distancia desde el punto central hasta el niño; calcula los pasos que luego tiene que corroborar.</p> <p>M25: Si no se desarrollan adecuadamente los programas no se alcanzarán los objetivos.</p> <p>M7: Realizar varias actividades parecidas y señalar qué tienen en común, para que de esta manera se tome como una muestra.</p> <p>M8: Que el alumno construya cuerpos geométricos por medio de cubos, para conocer el volumen de figuras diferentes.</p> <p>M9: ¿Qué frutas les gusta comer más a los niños?</p> <p>M18: Los alumnos de quinto grado realizaron una investigación sobre el tabaquismo; de 50 viviendas investigaron 10.</p> <p>M21: Pronóstico del estado del tiempo.</p> |
| Uniestructural | <p>M3: Tres niños juegan al disparejo, se apuntan los resultados para hacer un registro y ver quién gana los volados. Así se dará el espacio muestral.</p> <p>M13: Lanzar una moneda al aire y anotar los resultados; ver si cae águila o sol.</p> <p>M16: En una bolsa se depositan 100 canicas de varios colores y se determina cuántas veces van a sacar los equipos y después se calcula el porcentaje obtenido por equipo. Gana el equipo que tenga más puntos.</p> <p>M17: En una caja se depositan 50 canicas de varios colores, se determina cuántas veces van a sacar los equipos y después se calcula el porcentaje obtenido por equipo. Gana el equipo que tenga más puntos.</p>  |

|                  |  |
|------------------|--|
| Multiestructural | M6: De las fichas de dominó se saca una al azar. ¿Cuál es la totalidad de resultados posibles? ¿Cuál es la totalidad de fichas cuyos puntos suman 7?<br>M11: Lanzar un dado y reconocer que sólo pueden caer los números del 1 al 6. |
| Relacional       | No hubo respuestas de este nivel.  |

### Resumen

Ocho profesores se sitúan en el nivel preestructural, seis indican actividades pero no se orientan a los resultados ni al azar y dos presentan ideas descontextualizadas.

Cuatro se ubican en el nivel uniestructural e indicaron, por lo menos, una idea con respecto al resultado. Dos se concentran en el nivel multiestructural y en la construcción de los problemas se refieren al total de resultados sin profundizar mucho en ellos. Once no construyeron problemas por lo que no se les ubicó en ningún nivel de pensamiento.

#### 5.11.5. Contenido Número 5: “Uso de las expresiones más probable y menos probable en la predicción de resultados”

La construcción de problemas que se sitúan en el nivel preestructural no consideran el uso de las expresiones e indican situaciones confusas.

En la de tipo uniestructural se consideraron los problemas que muestran el experimento e indican únicamente los de más posibilidades. La de tipo multiestructural mencionan las expresiones *más probable* y *menos probable*, pero no señalan la predicción de resultados.

A continuación se presentan algunas construcciones de los profesores en el tipo de pensamiento que se ubicaron.

| NIVEL          | CARACTERÍSTICAS   |
|----------------|---|
| Preestructural | M23: Poner a jugar canicas a cuatro niños, pero hay uno que es muy hábil para el juego.<br>M25: La contaminación afecta la salud. Siempre que está nublado llueve.              |
| Uniestructural | M2: Poner canicas de diferentes colores y de distintos números para ver cuál tiene más posibilidad de salir.<br>M7: Hoy ha estado lloviendo mucho, entonces mañana va a llover. |

|                  |   |
|------------------|---|
|                  | <p>M11: Plantear un problema a un niño, como colocar canicas de varios colores y que se dé cuenta de que entre más canicas haya de cierto color, es más frecuente que salga dicho color y, por tanto, tiene mayor probabilidad.</p> <p>M21: Lanzar una moneda un número determinado de veces.</p> <p>M24: Si se lanzara una moneda al aire se podría predecir qué cara caerá. Juan dirá que caerá águila y Lupita dirá que caerá sol. ¿Quién acertó en su predicción?</p>   |
| Multiestructural | <p>M1: Echar en una caja corcholatas de diferentes colores, por ejemplo: 30 rojas, 10 amarillas, 20 verdes y 10 azules, y que el niño conteste las preguntas y escriba qué es más probable o menos probable: ¿sacar una roja o una verde?, ¿sacar una amarilla o una verde?, ¿sacar una azul o una roja?, etcétera.</p> <p>M3: Se escriben expresiones para que, con el experimento, los niños busquen los resultados de probabilidad. En una caja se deposita canicas de colores en diferentes cantidades.</p> <p>M4: Si hoy está nublado, ¿será más probable o menos probable que llueva?</p> <p>M6: Si tenemos 3 canicas azules, 4 rojas, 6 moradas, 5 verdes y 2 amarillas en una caja, ¿de qué canicas hay más? ¿Qué es más probable que saquemos: una canica morada o una azul?, ¿de cuáles hay menos: rojas o amarillas?, ¿es menos probable sacar una canica roja?</p> <p>M12: Experimento con canicas de colores. Dos niños tratan de adivinar de qué color van a sacar una canica. Introducen en una caja 10 canicas rojas y 5 azules, tapan la caja y la agitan. Sin ver sacan una canica, introducen la canica otra vez en la caja, agitan la caja, sacan otra vez una canica y repiten varias veces el experimento.</p> <p>M17: María juega con 5 pelotas amarillas y 2 rojas. Se tapa los ojos y escoge una pelota. Luego devuelve la pelota y repite el juego 10 veces. ¿Qué crees que es más probable que escoja: pelotas amarillas o rojas?<br/>         _____ . ¿Por qué? _____ .</p> |
| Relacional       | No llegan a este nivel.   |

### Resumen

Dos profesores se ubicaron en el nivel preestructural, uno planteó un juego de estrategia, y uno más señala una idea confusa.

Ocho se sitúan en el nivel uniestructural, cuatro toman en cuenta el experimento e incluyen la idea de más posibilidades, y cuatro señalan el uso de la probabilidad o la presencia del azar.

Trece maestros expresan ideas multiestructurales, sus problemas incluyen las nociones de experimento, más probable y menos probable.

Dos no construyeron ningún problema por lo cual no se les ubicó en ningún nivel de pensamiento.

#### 5.11.6. Contenido Número 6: “Experimentos aleatorios y análisis de los resultados posibles y de los casos favorables”

La construcción de problemas que se sitúan en el nivel preestructural no explica la relación entre los resultados posibles y los casos favorables.

En la de tipo uniestructural se incluye la idea del azar y se hace referencia a por lo menos una situación que se relaciona con el contenido. La de tipo multiestructural incluye las nociones de experimento, resultados posibles y casos favorables, pero no de manera clara.

A continuación se presentan algunas construcciones de los profesores en el tipo de pensamiento que se ubicaron.

| NIVEL          | CARACTERÍSTICAS   |
|----------------|---|
| Preestructural | <p>M1: Que los niños jueguen cinco veces “Carrera al 20”. En este juego participan dos niños, uno empieza poniendo un número del 0 al 3 al que sólo pueden sumarle el 1 o el 2 de manera sucesiva; gana el que llegue primero a 20. Esto le permite al niño analizar cada jugada, si suma 1 o 2 y ver las posibilidades que le permiten ganar.</p> <p>M23: Que los niños formen equipos para jugar a las cartas, pero que haya uno en cada equipo que lo sepa jugar bien.</p> <p>M8: Que el alumno forme palabras con dados que contienen letras del abecedario.</p> <p>M9: Hoy cenaré tacos.</p> <p>M18: Ejemplos: en la noche lloverá. En la noche aparecerá el sol. Si se trata de cuantificar, entonces se busca el porcentaje de probabilidad.</p> <p>M25: Si el coche no tiene gasolina no puede caminar.</p> |
| Uniestructural | <p>M2: Poner en una caja dados de diferentes colores: 5 rojos, 4 verdes, 3 azules y un amarillo. Juegan Juan y Lulú. Si sale un rojo gana Juan y si sale cualquier otro dado gana Lulú. ¿Quién tiene más oportunidad de ganar?</p>  |

|                  |   |
|------------------|---|
|                  | <p>M3: En una caja tengo 15 canicas rojas, 10 azules, 10 verdes y 5 amarillas. ¿Qué canicas tienen más probabilidad de salir?, ¿cuáles tienen la misma probabilidad?</p> <p>M13: Organizar un juego en el cual se tiren 2 dados y hacer la suma de los puntos que salgan; analizar con qué números es más posible ganar y con cuáles no hay resultados favorables.</p> <p>M4: Recortar las letras de una palabra, revolverlas en una bolsa y llevar un registro (sacar 30 veces las letras y volverlas a echar a la bolsa) y anotar las frecuencias.</p> <p>M5: Poner en una caja 15 fichas —7 blancas y 8 rojas—, registrar cuántas veces se obtiene una ficha roja o una blanca al sacarlas 20 veces de la caja.</p> <p>M7: Pedro y Rosa juegan con un dado de colores que tiene 4 caras de color rojo y 2 azules. ¿Quién crees que ganará?</p> <p>M10: Dibujen una pelota blanca en un papelito, y en otros 2 del mismo tamaño, una pelota negra. Doblen los papelitos y pídanle a un compañero que elija 2 al azar. Repitan el paso anterior 20 veces y registren los resultados en una gráfica. Contesten algunos planteamientos.</p> <p>M11: Tirar un vaso desechable y anotar cuántas veces cae boca abajo, cuántas boca arriba y cuántas de lado. Hacerlo 30 veces y analizar cuál es el resultado que se repite más.</p> <p>M20: Poner en una caja pelotas o canicas de colores. Si se saca sin ver una pelota de la caja, las preguntas serían: ¿cuál es color de la pelota con mayor probabilidad de salir?, ¿cuál es el color de la pelota con menor probabilidad de salir?</p> |
| Multiestructural | <p>M6: Si se lanza una moneda al aire, ¿cuáles son los resultados posibles? Caer sol o caer águila. ¿Por qué?</p>   |
| Relacional       | No hubo respuestas de este nivel.   |

### Resumen

Seis profesores se sitúan en el nivel preestructural, dos se refieren a juegos de estrategia o habilidad, y cuatro enuncian un juego que no se relaciona con el contenido.

Dieciséis se ubican en el nivel uniestructural, cinco incluyen en sus problemas ideas de experimento y casos favorables; dos emplean las nociones de experimentos, registros o frecuencias; seis incluyen ideas de experimento y

predicción, y tres se inclinan por ideas de experimento y de mayor o menor probabilidad.

Un maestro propone una idea multiestructural, esto es: señala en el problema la experiencia, sus resultados posibles, los casos favorables y alienta el análisis.

Dos no construyeron problemas por lo que no se les ubicó en ningún nivel de pensamiento.

### 5.11.7. Contenido Número 7: “Identificación de la noción de evento”

La construcción de problemas que se sitúan en el nivel preestructural se refiere a situaciones confusas. En la de tipo uniestructural se incluyen problemas que consideran algún aspecto de la probabilidad (resultado, experimento, predicción, juego), pero que no aclaran que se refieren al evento en sí.

A continuación presentamos algunas construcciones de los profesores en el tipo de pensamiento que se ubicaron.

| NIVEL          | CARACTERÍSTICAS   |
|----------------|---|
| Preestructural | M21: Colocar en una caja canicas rojas y blancas.<br>M23: Que vayan registrando en su cuaderno los eventos que sucedan de improvisado.<br>M25: Si no participan en la hora social no saldrán al receso.   |
| Uniestructural | M1: Los niños tienen que lanzar una moneda al aire y registrar su resultado hasta que caigan 15 veces águila; el niño cuantificará cuántas veces lanza la moneda al aire y cada vez que la lanza es un evento.<br>M3: Se pueden plantear o realizar varios experimentos para comparar qué eventos tienen más o menos probabilidad de salir sobre lo que es seguro o imprevisto.<br>M13: Al trabajar con dados cada vez que se tira el par de dados es un evento o suceso.<br>M17: Pepe y sus amigos juegan a lanzar monedas. Después de saber el resultado que salió tratan de adivinar lo que saldrá. Si lo adivinan ganan; si no pierden el doble.<br>M20: Carrera de caballos. Participan, por ejemplo, 10 caballos. El problema sería: de todos los caballos, ¿cuál crees que va a llegar en primer lugar? Menciona el número o nombre del caballo. |

|                  |  |
|------------------|--|
|                  | <p>M6: Si lanzamos un dado, ¿cuáles son los resultados posibles?, ¿que caiga 1, 2, 3, 4, etc.? A cada uno de los resultados se les llamará evento.</p> <p>M12: Marcos, Martina y Mauricio están jugando con una ruleta de 3 colores diferentes; cada uno gira la ruleta. Si se detiene en el sector naranja gana Marcos; en el sector azul gana Martina y en el sector verde gana Mauricio.</p> <p>M8: Que los alumnos jueguen por parejas utilizando dados numerados y el ganador será el que obtenga mayor puntuación, por lo que tendrá que ir sumando los puntos en cada tiro que realice.</p> <p>M10: Sacar canicas de una bolsa donde hay canicas de diferentes colores.</p> <p>M11: Plantear que un suceso es un evento, como tirar los dados.</p> <p>M14: Si prendo un cerillo y coloco la parte encendida en la yema de mi dedo, ¿me quemará?</p> |
| Multiestructural | No hubo respuestas de este nivel.  |
| Relacional       | No hubo respuestas de este nivel.  |

### Resumen

Tres maestros se sitúan en el nivel preestructural, anotaron ideas confusas que no se relacionan con la noción de evento.

Diecisiete se ubicaron en el nivel uniestructural, en las respuestas de ocho está implícito el resultado de una experiencia, pero no mencionan que esto sea el evento; cuatro señalan la realización de un juego; dos indican el resultado de una experiencia; dos orientan su enunciado a los posibles resultados de una experiencia, y uno se refiere a las experiencias de azar y predicción.

Cinco no construyeron ningún problema por lo cual no se les ubicó en ningún nivel de pensamiento.

#### 5.11.8. Contenido Número 8: “Identificación de la mayor o menor probabilidad de los eventos”

La construcción de problemas que se sitúan en el nivel preestructural enuncia sólo las situaciones, pero no hace referencia a los términos. En la de tipo uniestructural se consideraron aquellos problemas que implican los términos, pero no los enuncian concretamente. La de tipo multiestructural presenta una idea más próxima al contenido e incluye las nociones implícitas.

A continuación presentamos algunas construcciones de los profesores en el tipo de pensamiento que se ubicaron.

| NIVEL          | CARACTERÍSTICAS   |
|----------------|---|
| Preestructural | <p>M4: Mañana lloverá si estamos en el mes de marzo.</p> <p>M9: Los niños sacaron buena calificación. Los niños bailan en la clausura.</p> <p>M14: Es época de lluvias, ¿lloverá mañana?</p> <p>M22: Jorge y Gabriela están jugando con dos dados iguales que tienen en sus caras los mismos números. Si al caer los dos números es 6 o menos gana Gabriela; si la suma es mayor o igual a 7 gana Jorge.</p> <p>M24: Si en una bolsa se tienen botones de diferentes colores, sacar un botón rojo es igualmente probable que sacar un botón de color verde o azul; sacar un botón negro es un evento imposible.</p> <p>M25: Todos los viernes se lleva a cabo la hora social de la escuela. Los políticos invitaron a maestros y alumnos para escuchar temas de política enfrente de la escuela.</p>  |
| Uniestructural | <p>M5: En una caja hay 100 canicas: 90 amarillas y 10 verdes. ¿Qué color es más probable obtener?</p> <p>M11: Que escriban en tarjetas la palabra <i>matemáticas</i> y que reconozcan qué letra tiene mayor probabilidad al sacarlas de una caja cerrada.</p> <p>M17: Rocío, Juan y Beto juegan a la ruleta que tiene 4 sectores pintados: uno azul, otro verde y dos rojos. Si al girar la ruleta la aguja se detiene en el rojo gana Rocío, si se detiene en el naranja gana Beto y si es el verde gana Juan. ¿Quién crees que tenga más probabilidad de ganar?_____. ¿Por qué? _____.</p> <p>M6: En una bolsa tenemos 4 canicas rojas, 6 amarillas, 8 azules y 2 blancas.</p> <p>La probabilidad del evento “canica roja” es _____.</p> <p>La probabilidad del evento “canica azul” es _____.</p> <p>La probabilidad del evento “canicas amarilla” es _____.</p> <p>La probabilidad del evento “canica blanca” es _____.</p> <p>La probabilidad del evento “canica negra” es _____.</p> <p>M8: El juego de la ruleta. Girar una ruleta que tenga diferentes fracciones de colores (<math>1/4</math>, <math>1/8</math>, <math>1/3</math>) y ganará el que repita la fracción.</p> <p>M7: Clasifica de mayor a menor el grado de probabilidad:</p> <p>▲ Mañana va a llover _____.</p> <p>▲ Si tiro una moneda al aire cae _____.</p> |

|                  |   |
|------------------|---|
|                  | <p>▲ Si meto mi mano al fuego me quemo _____.</p> <p>▲ En la tarde se nublará _____.</p>  |
| Multiestructural | <p>M1: Que los niños hagan sus ruletas de colores, recorten un círculo y lo dividan en 6 partes; que pinten 3 partes de verde, 2 de rojo y una de azul y coloquen una manecilla en el centro; la giren 10 veces y registren los datos para ir comprobando qué color tiene mayor o menor probabilidad.</p> <p>M3: En un corral hay 50 pavos, 30 gallinas, 15 patos y 5 gallos. ¿Qué ave tiene menor probabilidad de que la atrapen primero?, ¿con cuál existe mayor probabilidad de que la atrapen primero?</p> <p>M10: Dar vuelta a una ruleta cuya mitad es de color rojo, un cuarto de color verde, un octavo de color amarillo y un dieciseisavo de color blanco y ver cuál es más o menos probable.</p> <p>M13: Colocar en una caja varias canicas de diferentes colores y que el niño descubra que, dependiendo del color que se repita más, hay mayor probabilidad, y por consiguiente, al haber menos canicas de equis color será menor la probabilidad.</p> |
| Relacional       | No hubo respuestas de este nivel.   |

### Resumen

Ocho profesores se ubicaron en el nivel preestructural, únicamente dieron ejemplos de experiencias sin vincular los términos.

Nueve se situaron en el nivel uniestructural, cinco se refieren a las nociones de experimento y más probable; tres señalan la identificación de probabilidad, y uno indica que hay que clasificar con las expresiones pero no ejemplifica. Cinco muestran ideas multiestructurales, a saber: incluyen las nociones de experimento y la identificación de la mayor o menor probabilidad en la experiencia.

Tres no contestaron la pregunta por lo que no se les ubicó en ningún nivel de pensamiento.

#### 5.11.9. Contenido Número 9: “Identificación de fenómeno o experimento aleatorio”

La construcción de problemas que se sitúan en el nivel preestructural no aclara que las situaciones se refieran al azar o son confusas. En la de tipo uniestructural los problemas se orientan al uso de juegos de azar para identificar,

pero no presentan ejemplos claros. Las de tipo multiestructural aluden a situaciones de azar, aunque no profundizan en su tratamiento.

A continuación presentamos algunas construcciones de los profesores en el tipo de pensamiento que se ubicaron.

| NIVEL            | CARACTERÍSTICAS   |
|------------------|---|
| Preestructural   | <p>M5: Llevar un registro de los días en que llueve en un mes equis.</p> <p>M23: Hacer un registro donde los niños anoten los días en que va a hacer calor.</p> <p>M22: El desarrollo de un plano para armar un cubo y darse cuenta de qué sucede. ¿Cuánto suman las caras opuestas del dado? Si cae la cara con el número 5, ¿qué cara estará hacia abajo?</p> <p>M25: La falta de infraestructura en las escuelas trae como consecuencia el bajo nivel educativo.</p>   |
| Uniestructural   | <p>M3: Que de un determinado número de expresiones los niños identifiquen los fenómenos aleatorios. “Los pollos comen maíz”, “El caballo blanco ganará la carrera”, “México le ganará a España en el futbol”.</p> <p>M6: Tacha las proposiciones que son predecibles:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▲ Sacarse la lotería.</li> <li>▲ Prender fuego a un papel para ver si se quema.</li> <li>▲ Meterse al río y no mojarse.</li> </ul> <p>M7: Poner varios enunciados, por ejemplo:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▲ Lloverá mañana.</li> <li>▲ Si saco un cubo de hielo del refrigerador, ¿qué le pasará?</li> </ul> <p>M13: Trabajar con el juego de canicas y el juego de serpientes y escaleras, y que el niño descubra cuál es un juego de azar y por qué.</p> <p>M18: Se realizan dos experimentos:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▲ Quemar papel. ¿Qué pasará?</li> <li>▲ Tirar una moneda al aire. ¿Caerá sol o águila?</li> </ul> <p>M8: Que el alumno utilice un diagrama de árbol para encontrar más opciones en dicho evento, por ejemplo: combinaciones de alimentos, colores, prendas de vestir.</p> |
| Multiestructural | <p>M1: Construir dados que tengan diferentes colores en las caras, por ejemplo: 2 caras rojas, una azul, 2 verdes, una amarilla. Lanzar 20 veces el dado, registrar los resultados y analizarlos.</p> <p>¿Cuántas veces cayó la cara amarilla? _____.</p> <p>¿Cuántas veces cayó la cara verde? _____.</p>  |

|            |   |
|------------|---|
|            | <p>¿Cuántas veces cayó la cara roja? _____.</p> <p>Y cuestionar los aspectos que se deseen observar.</p> <p>M2: Lupe y Pepe juegan a lanzar 2 dados. Si la suma de los números de los dados es 6 o menos gana Lupe y si es mayor que 7 gana Pepe.</p> <p>M11: Tirar 2 dados y darse cuenta de que es un experimento aleatorio.</p> <p>M16: Lanzar una moneda con una cara azul y otra roja, para ver si cae del lado azul o del rojo. El experimento se realiza por equipos y se registra en tablas y gráficas hasta obtener los puntos que se fijen los participantes; puede ser 10, 15 o 20 tiradas por equipos.</p> <p>M21: Tirar dados. ¿Qué número es más probable que salga?</p> <p>M24: Cuando se lanza un dado, ¿cuánto suman las caras opuestas del dado? Si lanzas el dado al aire, ¿sabes qué cara caerá hacia arriba?</p> |
| Relacional | No hubo respuestas de este nivel.   |

### Resumen

Cuatro maestros se sitúan en el nivel preestructural, dos hacen referencia a registros de fenómenos atmosféricos, y dos enuncian un juego confuso.

Siete se ubican en el nivel uniestructural, seis se orientan a identificar fenómenos aleatorios mediante juegos de azar y uno menciona el empleo de un diagrama de árbol en un problema de combinatoria.

Once caen dentro del nivel multiestructural, ya que en su construcción señalan las nociones de experiencias relacionadas con un fenómeno aleatorio.

Tres no construyeron problemas por lo que no se les ubicó en ningún nivel de pensamiento.

#### 5.11.10. Contenido Número 10: “Comparación de dos eventos a partir del número de casos favorables sin cuantificar su probabilidad”

La construcción de problemas que se sitúan en el nivel preestructural presenta ideas generales de situaciones, pero no se relacionan con lo que propone el contenido del programa oficial. En la de tipo uniestructural toman en cuenta algún aspecto enunciado en el contenido de manera implícita, sin embargo, no aclaran ninguno.

La de tipo multiestructural presenta problemas más formales; consideran como referencia las situaciones problemáticas propuestas en los textos que les

sirven de modelo, pero no aclaran que se refieren al uso de las comparaciones de eventos.

A continuación presentamos algunas construcciones de los profesores en el tipo de pensamiento que se ubicaron.

| NIVEL            | CARACTERÍSTICAS  |
|------------------|--|
| Preestructural   | <p>M1: Que los niños jueguen con dos dados y los lancen por turnos. A un niño le toca sumar los puntos que salgan y al otro restarlos. Gana el que, al sumar o restar, tiene el número mayor. Puede cambiarse la estrategia dependiendo del grado.</p> <p>M8: Que el alumno registre los resultados de dos eventos. Por ejemplo:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▲ Buscar las combinaciones de prendas de vestir.</li> <li>▲ Hacer reparticiones de enteros en fracciones.</li> </ul> <p>M9: Jugar volados. Sacar de una caja canicas de varios colores.</p> <p>M13: Realizar un juego con dos dados en el que, al sumar los puntos que salgan, se gane.</p> <p>M21: Realizar dos acontecimientos al mismo tiempo.</p> <p>M23: Que los alumnos hagan sus anotaciones de acuerdo con los que ellos piensan que va a salir favorable.</p> |
| Uniestructural   | <p>M3: Si lanzo una moneda 50 veces, ¿cuál caerá más veces: águila o sol? En una caja deposito 30 canicas rojas y 20 azules. Si saco una canica sin ver, ¿qué color saldrá primero?</p> <p>M4: Lanzar un dado y predecir que salga un número mayor al 6.</p> <p>M7: Si pongo en un bote 50 pececitos y 25 caracolitos, ¿qué es lo más seguro que saque? ¿Por qué? ¿Y cuál tiene menos probabilidad?</p> <p>M10: En un recipiente hay 5 esferas rojas, 4 azules, 2 verdes y 4 amarillas. Si se sacan al azar, ¿qué color tiene más probabilidad de salir?, ¿qué color tiene menos probabilidad de salir?, ¿qué color tiene igual probabilidad de salir que el azul?</p>   |
| Multiestructural | <p>M6: En una hielera hay 35 paletas de 4 sabores diferentes. ¿Qué probabilidad existe de sacar una de fresa si hay 5 de ese sabor?</p> <p>Eventos probables: _____.</p> <p>Total de eventos: _____.</p> <p>Probabilidad; _____.</p> <p>M12: Óscar y Olga van a jugar. Ambos comienzan con 10 000 puntos. Olga tira 2 dados, si la suma de los 2 dados es 10 o 7, Óscar le da 500 puntos a Olga. Si la suma de los 2 dados es un número diferente, Olga le</p>   |

|            |   |
|------------|---|
|            | <p>da 100 puntos a Óscar. El ganador es el jugador que acumule más puntos en 20 tiradas. ¿Crees que Olga debe aceptar el juego con estas reglas? ¿Por qué? ¿Crees que alguno de los jugadores tiene ventaja? ¿Quién?</p> <p>M16: Lanzar un dado cuyos resultados posibles son: 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Resultados pares: 2, 4 y 6. Resultados impares: 1, 3 y 5. Dos alumnos pueden jugarlo, uno para los pares y otro los impares. Se hace un registro en una tabla y se comparan los resultados. Par = 100 puntos. Impar = 50 puntos.</p> <p>M17: Pedro y Lulú juegan a las canicas. Utilizan 2 cajas, en una ponen 10 canicas rojas y 5 azules; en la otra, 10 azules y 5 naranjas. Si sacan una canica de cada caja, ¿qué canica es más probable que saquen? ¿En qué evento es más seguro que saquen la canica amarilla? ¿Qué canica tiene menos probabilidad?</p> <p>M18: Si cada uno tira un dado para ver quién obtiene el mayor número. En este caso tienen la misma probabilidad.</p> |
| Relacional | No hubo respuestas de este nivel.   |

### Resumen

Nueve maestros se situaron en el nivel preestructural, de ellos sólo seis enuncian una experiencia, pero no dan otra indicación; uno propone un problema confuso; uno expresa un problema de combinatoria sin indicaciones que lo orienten hacia el contenido propuesto, y uno señala que se anoten los resultados.

Cinco se ubican en el nivel uniestructural, en tres están implícitas las nociones de experiencia y resultados, y dos señalan la experiencia y los términos *más probable* y *menos probable*.

Cinco se orientan al nivel multiestructural y muestran una construcción más completa, pues incluyen los términos *experiencia*, *resultados* y *casos favorables*.

Seis no construyeron ninguna idea por lo que no se les ubicó en ningún nivel de pensamiento.

### 5.12. Tipo de idea que toman en cuenta al construir sus actividades

De las sugerencias expresadas por los maestros con respecto a la construcción de problemas para abordar los contenidos, nos pareció relevante interpretar el tipo de idea que se puede recuperar de sus planteamientos y que

toman en cuenta al construir sus actividades. Entre éstas destacamos las siguientes:

**Pensamientos uniestructurales:**

- a) Quienes plantean situaciones para analizarlas.
- b) Quienes plantean registros de situaciones cotidianas.
- c) Quienes solicitan predicción de sucesos.
- d) Quienes consideran experiencias deterministas.
- e) Quienes sugieren actividades de combinación.
- f) Quienes plantean ejercicios prácticos y juegos.
- g) Quienes toman en cuenta experimentos aleatorios.

**Pensamientos preestructurales**

- h) Quienes toman en cuenta operaciones aritméticas.

**Ningún tipo de pensamiento**

- i) Quienes no sugieren ninguna situación.

En el cuadro 12 se muestran los datos obtenidos a partir del análisis de las respuestas dadas por los profesores con respecto a la construcción de problemas que se pueden trabajar al abordar los contenidos de probabilidad.

Nótese que la mayoría de los maestros expresan ideas que se ubican en el pensamiento uniestructural y ello significa que están presentes, por lo menos, algunos de los posibles elementos que se trabajan en la probabilidad.

En el análisis realizado se tomó en cuenta la idea predominante en los problemas presentados por los profesores; las ubicamos de acuerdo con este criterio y, posteriormente, se sumaron las frecuencias obtenidas en cada contenido para tener la frecuencia total de la idea en cuestión.

Es decir, los resultados exponen el porcentaje global de la idea contenida en todos los contenidos propuestos.

**Cuadro 12.** Frecuencias para la construcción de problemas.

|  |    | TIPO DE PENSAMIENTO |    |   |   |    |    |   |    |   |   |    |    |                |    |         |    |   |    | T-%     |
|--|----|---------------------|----|---|---|----|----|---|----|---|---|----|----|----------------|----|---------|----|---|----|---------|
|  |    | UNIESTRUCTURAL      |    |   |   |    |    |   |    |   |   |    |    | PREESTRUCTURAL |    | NINGUNO |    |   |    |         |
|  |    | A                   | %  | B | % | C  | %  | D | %  | E | % | F  | %  | G              | %  | H       | %  | I | %  |         |
| C<br>O<br>N<br>T<br>E<br>N<br>I<br>D<br>O<br>S | 1  | 5                   | 20 | 2 | 8 | 6  | 24 | 6 | 24 | 1 | 4 | -  | -  | -              | -  | -       | -  | 5 | 20 | 25-100  |
|  | 2  | 7                   | 28 | - | - | -  | -  | - | -  | 1 | 4 | 13 | 52 | 1              | 4  | 2       | 8  | 1 | 4  | 25-100  |
|  | 3  | 5                   | 20 | - | - | -  | -  | - | -  | - | - | 11 | 44 | 7              | 28 | 2       | 8  | - | -  | 25-100  |
|  | 4  | 4                   | 16 | - | - | 1  | 4  | - | -  | - | - | 3  | 12 | 4              | 16 | 11      | 44 | 2 | 8  | 25-100  |
|  | 5  | 7                   | 28 | - | - | 2  | 8  | - | -  | - | - | 6  | 24 | 8              | 32 | 2       | 8  | - | -  | 25-100  |
|  | 6  | 7                   | 28 | - | - | 1  | 4  | - | -  | - | - | 9  | 36 | 6              | 24 | 2       | 8  | - | -  | 25-100  |
|  | 7  | 8                   | 32 | - | - | 2  | 8  | - | -  | - | - | 2  | 8  | 8              | 32 | 5       | 20 | - | -  | 25-100  |
|  | 8  | 16                  | 64 | - | - | -  | -  | - | -  | - | - | 2  | 8  | 4              | 16 | 3       | 12 | - | -  | 25-100  |
|  | 9  | 4                   | 16 | 2 | 8 | 1  | 4  | - | -  | 1 | 4 | 2  | 8  | 11             | 44 | 3       | 12 | 1 | 4  | 25-100  |
|  | 10 | 10                  | 40 | - | - | 1  | 4  | - | -  | - | - | 3  | 12 | 5              | 20 | 6       | 24 | - | -  | 25-100  |
|  | +  | 73                  | 29 | 4 | 2 | 14 | 6  | 6 | 2  | 3 | 1 | 51 | 20 | 54             | 22 | 36      | 14 | 9 | 4  | 250-100 |

### 5.12.1. Pensamientos Uniestructurales

La idea que los profesores retomaron con más frecuencia para construir su problema fue la de plantear situaciones para analizarlas. De éstas hubo setenta y tres respuestas, lo que representa un 29 por ciento del total.

C1-M1: Analizar algunas situaciones y escribir *falso* o *verdadero*:

“El agua del tanque está sucia”, “Miguel es más alto que Juan”,  
“El perro no ladra”.

C2-M3: Que los niños identifiquen los juegos en que interviene el azar: un partido de fútbol, las carreras de caballos, la lotería.

C3-M20: Un problema sería con la ruleta. Por ejemplo, dividir la ruleta en dos colores: de azul una mínima parte y de rojo la mayor parte, o viceversa. Observar las ruletas y completar con las palabras *mayor*, *menor* o *igual*.

C4-M9: ¿Qué frutas les gusta comer más a los niños?

C5-M5: En verano será más o menos probable que haga calor.

No todas las propuestas de los profesores se refieren al azar. Algunas sólo anotan situaciones para analizar, como el caso del C1-M1 y C4-M9. Se encontraron también juegos y problemas relativos al azar, como C2-M3 y C3-M20; otras indican algunas situaciones cotidianas —C5-M5— en las que habría que buscar una respuesta de acuerdo con el conocimiento del sujeto, por lo que el azar podría estar ausente. Sin embargo, se considera que la idea de construir problemas probabilísticos con base en el análisis de situaciones es realmente útil

y, por tanto, se debe cuidar que las actividades estén orientadas a ello. Vale la pena señalar que a las propuestas aún les falta información que dé cuenta de lo que se desea trabajar con la actividad; esto no aparece en la mayoría de las situaciones propuestas.

El hecho de que los maestros propongan experimentos aleatorios para abordar los contenidos de probabilidad es significativo; se encontraron cincuenta y cuatro respuestas orientadas hacia este tipo (22 por ciento del total).

C2-M10: Poner una caja con canicas rojas, verdes y amarillas y plantear las siguientes interrogantes: ¿es seguro sacar una canica de la caja?, ¿es seguro sacar una canica roja?

C3-M4: Lanzar una moneda al aire y llevar un registro de cuántas veces cae águila o sol.

C6-M6: Si se lanza una moneda al aire, ¿cuáles son los resultados posibles: que caiga águila o que caiga sol?, ¿qué caerá: águila o sol?, ¿por qué?

C9-M4: Registrar cuántas veces cae águila o sol al lanzar una moneda 50 veces.

Los experimentos aleatorios que proponen los maestros se concentran, fundamentalmente, en el uso de volados y en el modelo de urna, actividades sugeridas ampliamente en los libros de texto. Se considera que esto es indicio de que los profesores construyen los problemas de acuerdo con los conocimientos que han adquirido directamente de los libros de texto (propuesta oficial).

Otro aspecto que destaca es que los contenidos de probabilidad se trabajan de forma práctica (por ejemplo, el uso de juegos en la construcción de problemas); 22 por ciento del total, que representan cincuenta y un respuestas orientadas a este tipo.

C2-M8: Jugar tiro al blanco y que el dardo caiga en el centro. El lanzamiento de una moneda: águila o sol.

C5-M8: El juego de las canicas chinas. Poner 10 canicas negras, 5 rojas y 3 amarillas en una cajita para que los niños utilicen las

expresiones *más probable* y *menos probable* al obtener los resultados.

C7-M8: Que los alumnos formen parejas y jueguen con dados numerados; el ganador será el que sume más puntos después de todos sus turnos.

Los juegos que predominan en las propuestas son el tiro al blanco, el modelo de urna, los volados y los dados. Tales juegos también aparecen en la propuesta oficial; lo interesante sin embargo es que el maestro pueda apoyarse en estas actividades y construir otras similares, trabajando apropiadamente los contenidos probabilísticos.

Con menos frecuencia, se encuentran las ideas referidas a la predicción de sucesos. De éstas tenemos catorce respuestas, que representan 6 por ciento del total.

C1-M10: Que el alumno conteste si es seguro que mañana amanecerá.

C4-M21: Pronóstico del estado del tiempo.

C6-M12: Adivinar el resultado de un volado.

C9-M6: Tachar las proposiciones que son predecibles: Sacarse la lotería; prenderle fuego a una hoja de papel para ver si se quema; meterse al río y no mojarse.

Se observa que las ideas de los maestros son adecuadas para referirse tanto a las experiencias deterministas como a las azarosas. Una situación de este tipo se encuentra en C9-M6; la predicción de situaciones cotidianas se presenta en C4-M21 y C1-M10. Por su parte, C6-M12 plantea la predicción como el hecho de adivinar situaciones, idea esta que es confusa pues no se trata de adivinar situaciones sino, más bien, predecirlas tomando en cuenta los factores que intervienen, sobre todo para tomar decisiones.

Seis respuestas de los maestros (2 por ciento) plantearon situaciones deterministas como problemas para abordar contenidos de probabilidad.

C1-M9: Un sólido expuesto al sol.

C1-M13: Por ejemplo, si en una caja ponemos varios dulces de un mismo sabor, existe la seguridad de que al sacar un dulce sea de ese sabor.

C1-M25: La contaminación perjudica la salud.

Los problemas planteados por los profesores se orientaron al trabajo del contenido de predicción de hechos y sucesos en los que interviene el azar. Parecería que los maestros sólo tomaron en cuenta la primera parte del contenido —que se relaciona con la predicción— y, en este sentido, los eventos predecibles sin mucha dificultad son justamente los deterministas. Quizá ésta sea la razón por la cual aparecieron dichas propuestas en los problemas construidos por los maestros.

Con respecto al registro de situaciones cotidianas, se encuentran cuatro respuestas orientadas a este tipo, que representan el 2 por ciento del total.

C1-M4: Realizar un registro sobre las condiciones del clima en un mes.

C9-M5: Llevar un registro de los días en que llueve en cierto mes.

C9-M23: Hacer un registro en el que los niños anoten los días en que va a hacer calor.

El análisis de las situaciones climatológicas resulta fructífero para el trabajo de probabilidad. De acuerdo con las estaciones del año, es posible identificar cierta probabilidad para que los días tengan características típicas de la estación; los encargados del estudio del tiempo se basan en esta información para pronosticar el estado del tiempo. Empero, el pronóstico del tiempo —por más que se esté bien informado— varía debido tanto a las condiciones atmosféricas existentes como a los cambios de la propia naturaleza; esto ayuda a entender que el azar se encuentra presente en las condiciones climatológicas y, en consecuencia, no se pueden predecir.

En menor escala se encuentran las ideas que se refieren al uso de la combinatoria para resolver los problemas propuestos. Hubo sólo tres respuestas de este tipo, que representan el 1 por ciento del total.

C1-M21: Combinar un número diferente de faldas y blusas para armar diferentes conjuntos de ropa.

C2-M24: En una fiesta ofrecen dos menús: barbacoa y mariscos. La barbacoa era de pollo y de res; los mariscos eran pulpo y camarones. Además, se podía tomar agua de fruta o refrescos embotellados. ¿Cuántas opciones tuvieron los invitados para escoger su platillo?

Aunque la combinatoria se introduce en el eje de predicción y azar, en ninguno de los contenidos propuestos se pide la utilización de problemas de combinación o de diagramas de árbol. Se presume entonces que los profesores la incluyeron únicamente porque saben de su existencia, pero no tienen claro en qué contenido se desarrolla ni qué idea se favorece con el trabajo de este tipo de actividades.

### 5.12.2. Pensamientos Preestructurales

Nueve respuestas de los profesores (4 por ciento) se orientaron al uso de operaciones aritméticas para resolver el problema propuesto.

C1-M16: Sumar  $100 + 100$  para ver si el resultado es 200.

C2-M16: Un jugador se identifica como par y el otro como impar. Se turnan tirando dos dados. Al número mayor se le resta el menor, si la diferencia es par gana un punto el jugador par; si no, el punto es para el jugador impar. Gana el jugador que llegue primero a diez puntos. El cero se toma como par.

| Juan (par)  | Lupita (impar) |
|-------------|----------------|
| $4 - 2 = 2$ | $6 - 3 = 3$    |
| $5 - 5 = 0$ | $2 - 1 = 1$    |
| $6 - 4 = 2$ | $4 - 3 = 1$    |

Se considera que los maestros plantearon este tipo de problemas para mostrar situaciones deterministas; sin embargo, no fueron apropiadas para el contenido que se propuso, que tenía que ver directamente con situaciones de azar. Por tanto, las propuestas de los maestros no son adecuadas para abordar la

probabilidad. C1-M16 y C2-M16 enfocaron el problema al uso de la suma y la resta, por lo que quizá ayude a los estudiantes a fortalecer la aplicación de estas operaciones en problemas que lo requieran.

### **5.12.3. Ningún tipo de Pensamiento**

Treinta y seis profesores no construyeron un problema para determinados contenidos, lo cual representa 14 por ciento del total. El contenido que más dificultad presentó fue el de “Identificación de la noción de espacio muestral”. Once profesores no lo respondieron (44 por ciento); es un concepto probabilístico cuyo significado es sin duda difícil de comprender, amén de que los maestros tampoco muestran cómo emplearlo. Por si fuera poco, en los libros de texto no se aclara dicho concepto.

Los contenidos que le siguen en dificultad son “Identificación de la noción de evento” y “Comparación de dos eventos a partir del número de casos favorables sin cuantificar su probabilidad”; en ellos cinco profesores no respondieron (20 por ciento). Se asume que no construyeron problemas porque no conocen el significado de evento ni el de cuantificación de probabilidad, y aunque en sus interpretaciones anotaron una idea relacionada con el contenido, no intentaron construir el problema. Esta situación revela que si no tienen nociones de cómo construir actividades didácticas o problemas para trabajar los contenidos, retomarán básicamente las que proporciona el libro de texto. Ésta es, por tanto, una oportunidad para desarrollar con los profesores talleres que incorporen el diseño de actividades para el trabajo de la probabilidad en la escuela primaria.

En cuanto a los demás contenidos, sólo hubo entre dos y tres profesores que dejaron los casilleros sin respuesta. Se observó que los profesores que no anotaron ningún problema también tuvieron dificultades para interpretar el contenido. Esto nos lleva a sospechar que los maestros tienen “huecos” en el conocimiento probabilístico. Es más, se halló que M15 y M19 dejaron nueve de diez casilleros vacíos; ello demuestra que por lo menos estos dos profesores o no quisieron responder los cuestionamientos o tienen serias dificultades para interpretar los contenidos de probabilidad y construir problemas.

En términos generales, existe congruencia entre los maestros que interpretan el contenido y construyen el problema; los profesores que interpretan mínimamente el contenido y tienen dificultades para construir problemas probabilísticos, así como los maestros que se equivocaron en la interpretación del contenido y, en consecuencia, no pudieron construir el problema. Por último, se encontraron profesores que no hicieron ninguna de las dos cosas, como M19.

Finalmente, puesto que la mayoría de los profesores de este estudio se ubicaron en un pensamiento de tipo uniestructural, suponemos que les falta más información y conocimiento acerca de los contenidos y las actividades que pueden abordarse en la enseñanza de la probabilidad.

## CAPÍTULO 6

### **NIVELES DE PENSAMIENTO DE LOS PROFESORES EN CONCEPTOS DE PROBABILIDAD FRENTE A LAS ACTIVIDADES Y LOS PROBLEMAS DE LOS LIBROS DE TEXTO**

La información que se presenta en este capítulo proviene tanto de las respuestas de los profesores como de las preguntas y actividades de los libros de texto de matemáticas de tercero a sexto grado de primaria. El objetivo de recabar y analizar esta información es responder a la pregunta: ¿cómo interpretan los profesores de educación primaria en servicio la información probabilística propuesta en los materiales educativos oficiales, en particular, la información que les proporcionan las actividades contenidas en los libros de texto oficiales?

Esta pregunta cobra una relevancia especial, pues se ha observado que la manera en que los estudiantes trabajan y asimilan el material sobre probabilidad de los libros de texto depende en gran medida de la interpretación que de él haga el maestro. Como se vio en el capítulo 4, los profesores hacen una interpretación de tipo uniestructural en la mayoría de conceptos básicos de probabilidad, así que parece razonable preguntar si el material oficial ayuda a superar esta visión o si, por el contrario, la fomenta.

En el capítulo 5 se revisaron los contenidos de probabilidad de los materiales oficiales y se confirmó que entre los profesores priva el pensamiento uniestructural, esto es, plantean interpretaciones que incluyen por lo menos un elemento del contenido, pero sin profundizar en él.

**Descripción de la actividad**

*Título de la actividad.* Alude al nivel de pensamiento de los profesores en conceptos de probabilidad frente a las actividades y los problemas de probabilidad de los libros de texto.

*Objetivo de la actividad.* Indaga en qué nivel de pensamiento se ubican los profesores y determina con qué profundidad conocen los conceptos de probabilidad de educación primaria a través de un cuestionario basado en las actividades de probabilidad propuestas en los libros de texto.

*Participantes.* En esta experiencia participaron veinticinco profesores de educación primaria; catorce de ellos tomaron parte en la experiencia anterior y el resto se incorporó en esta etapa. Fueron convocados por el autor de la tesis, quien les aplicó el cuestionario.

Los criterios para la selección de participantes fueron: ser profesor de educación primaria en servicio, pertenecer a la región central del estado de Chiapas y, desde luego, tener el interés por participar en el estudio. Se consideró incrementar el número de profesores en esta etapa de la investigación porque queríamos saber si el nivel de pensamiento encontrado en la primera fase variaba con respecto a sujetos distintos o si este nivel se conservaba, en otras palabras, deseábamos observar si el pensamiento del maestro acerca de la probabilidad tenía alguna diferencia, toda vez que quienes participaron en la primera fase tenían ya una idea del tipo de cuestionario que se les aplicó y los que se integraban no.

*Instrumento.* Es un cuestionario que contiene diez actividades tomadas de los libros de texto de matemáticas con las que es posible identificar conceptos probabilísticos. También se les pidió que indicaran qué contenido se relaciona con la actividad, y cómo lo han trabajado o cómo lo trabajarían. El cuestionario se presenta en forma completa en el anexo 2; a título de ejemplo reproducimos la primera actividad del cuestionario:

## Cuestionario 1

Compañero maestro, el siguiente cuestionario tiene la finalidad de rescatar tus conocimientos acerca de algunas actividades que se proponen trabajar en los libros de texto de la escuela primaria en el eje de predicción y azar.

Se plantean algunas actividades y te pedimos que las resuelvas. Menciona qué contenidos de probabilidad se trabajan, por qué, cómo los has trabajado con tus alumnos o cómo los trabajarías.

Nombre: \_\_\_\_\_

Escuela: \_\_\_\_\_

Zona escolar: \_\_\_\_\_

Grado que atiende: \_\_\_\_\_

Fecha: \_\_\_\_\_

1. Yoatzin y Sonia hicieron un experimento con un dado. Marcaron las caras del dado como se indica abajo:

- De color azul las caras que tienen 1, 2, 3 y 4 puntos.
- De color rojo las caras que tienen 5 y 6 puntos.

Antes de lanzar el dado, tratan de adivinar el color que va a salir.

¿A qué color le apostarías para ganar? \_\_\_\_\_

Si se lanza 30 veces el dado, ¿qué crees que se repetirá más veces: el color azul o el rojo? \_\_\_\_\_ ¿Por qué \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

¿Qué contenido se trabajaría? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

¿Por qué? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Di cómo lo has trabajado o cómo lo trabajarías? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

## Procedimiento

La aplicación del cuestionario se realizó en los hogares de los profesores, después de concluidas las labores educativas, se aplicó por las tardes. El tiempo fue razonable y de acuerdo con las competencias de los maestros; es decir, se permitió que los profesores contestaran el cuestionario sin presión alguna (el tiempo promedio fue de una hora y media a dos horas). Antes de la aplicación se

comentó cuáles eran las intenciones del cuestionario, se les entregó y el aplicador estuvo con ellos durante su desarrollo.

*Procedimiento de análisis de los resultados.* En la resolución de actividades sólo se evaluaron como respuestas correctas, parcialmente correctas, incorrectas y sin respuesta; el análisis se realizó con base en los argumentos dados en la respuesta —situación que permitió ubicarlos en los diferentes niveles—; lo mismo se hizo con el contenido que relaciona la actividad con su justificación.

## Resultados

El cuadro 13 muestra el número de la pregunta analizada (el orden no es consecutivo, porque de las preguntas del cuestionario únicamente se presentan los resultados del análisis de situaciones que no son semejantes; por ejemplo, de las preguntas 1 y 2 —en donde se trabajó el mismo contenido y se obtuvieron resultados parecidos— se seleccionó la número 1 para no repetir situaciones similares). Asimismo, se observa la situación o el tema al que se da énfasis en el cuestionamiento, el grado escolar en que se propone trabajar y el número de respuestas correctas obtenidas de los cuestionarios resueltos por los profesores. También se ubican las respuestas en los niveles de pensamiento, tomando en cuenta las jerarquías propuestas por Biggs y Collis. De este modo, en el nivel preestructural se ubican las respuestas incorrectas, en el uniestructural las respuestas de los profesores que resuelven de manera parcial las actividades y en el multiestructural las respuestas correctas, pero que no profundizan en ella.

**Cuadro 13.** Resultados obtenidos de las actividades propuestas en el cuestionario.

|        | No. | Situación / Tema                                 | Grado | Respuestas correctas obtenidas | NIVELES DE PENSAMIENTO |     |       |     |
|--------|-----|--|-------|--------------------------------|------------------------|-----|-------|-----|
|        |     |  |       |                                | Pre                    | Uni | Multi | Rel |
| P<br>R | 1   | Dados: comparación de probabilidades             | 4º    | 24                             | 1                      | 23  | 1     | -   |
|        | 3   | Canicas: Frecuencias y comparación de problemas. | 4º    | 24                             | 0                      | 24  | 1     | -   |

|                                 |    |   |    |    |    |    |    |   |
|---------------------------------|----|---|----|----|----|----|----|---|
| E<br>G<br>U<br>N<br>T<br>A<br>S | 5  | Formación de parejas:<br>combinatoria   | 4º | 11 | 14 | 8  | 3  | - |
|                                 | 7  | Lavar trastes: probabi-<br>lidad y juego justo.                                   | 5º | 15 | 7  | 3  | 15 | - |
|                                 | 9  | Cubos en una bolsa.<br>Secuencias de<br>pruebas. Comparación<br>de probabilidades | 5º | 9  | 13 | 12 | -  | - |
|                                 | 10 | Dos dados.<br>Probabilidad de la<br>suma de dos dados                             | 5º | 7  | 17 | 7  | 1  | - |
|                                 | 11 | Disparejo. Espacio<br>muestral  | 6º | 12 | 1  | 23 | 1  | - |
|                                 | 12 | Experiencias aleatorias<br>y determinísticas.                                     | 6º | 5  | 0  | 10 | 5  | - |

El cuadro 14 presenta la información derivada del análisis de las respuestas de los profesores en las actividades propuestas por el cuestionario. Se toman como *correctas* aquellas respuestas que responden adecuadamente lo requerido en la pregunta; se consideran *aproximadas* las respuestas que, de algún modo, hacen referencia a lo solicitado, aunque sin concretarlo con certeza; se juzgan como *incorrectas* las que se desvían totalmente de lo esperado. Presentamos, también, el número de maestros que no respondieron las actividades.

**Cuadro 14.** Ubicación de las respuestas dadas a las actividades del cuestionario.

|             | CORRECTAS |     | APROXIMADAS |     | INCORRECTAS |     | SIN RESPUESTA |    |
|-------------|-----------|-----|-------------|-----|-------------|-----|---------------|----|
| Pregunta 1  | 24        | 96% | -           | 0%  | -           | 0%  | 1             | 4% |
| Pregunta 3  | 24        | 96% | -           | 0%  | -           | 0%  | 1             | 4% |
| Pregunta 5  | 11        | 44% | -           | 0%  | 12          | 48% | 2             | 8% |
| Pregunta 7  | 15        | 60% | 3           | 12% | 6           | 24% | 1             | 4% |
| Pregunta 9  | 9         | 36% | 3           | 12% | 13          | 52% | -             | 0% |
| Pregunta 10 | 7         | 28% | 1           | 4%  | 16          | 64% | 1             | 4% |
| Pregunta 11 | 12        | 48% | 12          | 48% | 0           | 0%  | 1             | 4% |
| Pregunta 12 | 5         | 20% | 20          | 80% | -           | 0%  | -             | 0% |

## Resumen general

En las actividades propuestas, los profesores tuvieron en general pocas dificultades; los obstáculos más relevantes surgieron en las actividades relacionadas con la combinatoria, el análisis de resultados posibles y casos favorables y en la probabilidad de eventos.

El pensamiento reflejado en las respuestas de los profesores se orientó, fundamentalmente, al nivel uniestructural (sus ideas se aproximan a lo esperado, aunque no profundizan en sus justificaciones).

Con respecto a los contenidos de las actividades propuestas, los profesores se ubican en el nivel uniestructural. En sus respuestas se aprecia una relación mínima con el contenido que enuncian, además de que la justificación del contenido que se trabaja en la actividad no es clara y muchas veces sólo repiten ideas similares, por ejemplo: “M3: La probabilidad a través del juego de azar”, que justifican así: “M3: Porque se realizan los eventos para conocer la probabilidad”. Se encontró, pues, que sí hay relación entre el contenido y su justificación, pero no con la actividad, puesto que para ello es condición *sine qua non* utilizar el contenido: “Registro y análisis de resultados de eventos de azar”. Tienen ideas preestructurales en los contenidos referidos a la probabilidad de eventos y a la identificación de eventos seguros; confunden un evento seguro con uno azaroso e imposible; no identifican los resultados posibles ni los valoran a partir de casos favorables.

### 6.1. Pregunta 1: Registro de resultados de eventos de azar

De acuerdo con las observaciones, la mayoría de los profesores no tuvieron dificultades para hallar la solución a la actividad; sin embargo, sí hubo diferencias en los argumentos esgrimidos acerca de sus elecciones. Tales diferencias indican que la mayoría de los profesores poseen ideas uniestructurales; consideran que el evento que tiene mayor oportunidad es aquél con más posibilidades, representado por la mayor cantidad de caras marcadas con color azul; sin embargo, no ofrecen

argumentos más finos que incluyan términos como: *resultados posibles, casos favorables, espacio muestral o experimento aleatorio.*

PREGUNTA 1: Yoatzin y Sonia hicieron un experimento con un dado. Marcaron las caras del dado como se indica abajo:

- De color azul las caras que tienen los 1, 2, 3 y 4 puntos.
- De color rojo las caras que tienen 5 y 6 puntos.

Antes de lanzar el dado, tratan de adivinar el color que va a salir.

¿A qué color le apostarías tú para ganar? \_\_\_\_\_ (1.1)

Si se lanza 30 veces el dado, ¿qué crees que se repetirá más veces: el color azul o el rojo? \_\_\_\_\_ (1.2) ¿Por qué? \_\_\_\_\_ (1.3)

[*Matemáticas. Cuarto grado, México, SEP, 1999, p. 76.*]

La respuesta esperada tiene que ver con el color azul, si tomamos en cuenta que hay más lados del dado pintados de ese color. Por lo que en la respuesta número 1.1 se espera que se responda con el color azul. La pregunta 1.2 tendría que darse de la misma manera, ya que tendrían más posibilidades de salir. Asimismo, se espera que la razón de su elección tenga que ver con el mayor número de posibilidades.

Las nociones implícitas son: experimento aleatorio; repetibilidad de los eventos en las mismas condiciones; resultados posibles y el reconocimiento del espacio muestral; resultados posibles; resultados favorables; registro de experimento aleatorio, y presencia del azar.

Los niveles de pensamientos se ubican de la siguiente forma:

| PREESTRUCTURAL   | UNIESTRUCTURAL  | MULTIESTRUCTURAL  | RELACIONAL  |
|--|---|---|---|
| <p>↗ Ideas no previstas.<br/>↗ Ideas que carecen de sentido.</p> | <p>↗ Toman en cuenta alguno de estos criterios: resultados posibles, resultados favorables, espacio muestral, mayor probabilidad, más probable, experimento</p> | <p>↗ Incluyen por lo menos dos de estos criterios: resultados posibles, resultados favorables, espacio muestral, mayor probabilidad, más probable, experimento aleatorio, registro de</p> | <p>↗ Razonamientos adecuados y argumentos precisos.</p> |

|  |  |                                      |  |
|--|--|--------------------------------------|--|
|  | aleatorio, registro de resultados o análisis de frecuencias. | resultados, análisis de frecuencias. |  |
|--|--|--------------------------------------|--|

Con respecto a las respuestas dadas por los maestros en la actividad se observó:

|            | CORRECTAS |     | APROXIMADAS |    | INCORRECTAS |    | SIN RESPUESTA |    |
|------------|-----------|-----|-------------|----|-------------|----|---------------|----|
|            |           |     |             |    |             |    |               |    |
| Pregunta 1 | 24        | 96% | -           | 0% | -           | 0% | 1             | 4% |

**Cuadro 1.** Frecuencia y porcentaje de los niveles en que se ubicaron los argumentos de los maestros para la pregunta 1.

| NIVELES DE PENSAMIENTO | FRECUENCIA | %   |
|------------------------|------------|-----|
| No contestó            | -          | 0   |
| Preestructural         | 1          | 4   |
| Uniestructural         | 23         | 92  |
| Multiestructural       | 1          | 4   |
| Relacional             | -          | 0   |
| Total                  | 25         | 100 |

La tabla que sigue muestra las características que corresponden al nivel de pensamiento de los profesores.

| NIVELES DE PENSAMIENTO | CARACTERÍSTICAS   |
|------------------------|---|
| Preestructural         | M9: Tiene mayor número de puntos [se refiere al rojo].  |
| Uniestructural         | M2: Porque tiene más caras pintadas de azul.<br>M14: Porque la mayoría de las caras del dado son azules.<br>M3: Porque es más probable que se repita el color azul.<br>M5: Porque existe mayor probabilidad de que caiga el color azul que el color rojo. |
| Multiestructural       | M8: Porque la probabilidad del rojo es $\frac{4}{6}$ o $\frac{2}{3}$ y la del azul es $\frac{2}{6}$ en cada evento, ya que el evento se reduce a dos resultados en donde se tiene la probabilidad $\frac{2}{3}$ para azul y $\frac{1}{3}$ para rojo.      |
| Relacional             | No hubo respuestas de este nivel.   |

**Resumen**

Un profesor se ubica en el nivel preestructural: su argumento considera el número de puntos que se logran obtener en la suma de los colores, lo cual es inapropiado para lo que se solicita.

Veintitrés se sitúan en el nivel uniestructural: trece toman en cuenta el mayor número de caras pintadas del dado, dos incluyen la expresión *más probable* y ocho indican la mayor probabilidad. Sólo un maestro se sitúa en el nivel multiestructural, su argumento considera la proporcionalidad en números fraccionarios e incluye la probabilidad.

Una respuesta en el nivel relacional supondría que el sujeto incluyese la noción de espacio muestral o el azar relacionado con la probabilidad; no se encontró ninguna respuesta con esta característica.

**6.1.1. Niveles de pensamiento con respecto al contenido abordado en la actividad y la justificación dada a su respuesta**

*Resumen.* De acuerdo con las observaciones realizadas, la mayoría de los profesores se ubican en el nivel uniestructural. Mencionan básicamente elementos generales de la probabilidad, la idea subyacente es que si se señala una idea general entonces cualquier situación que se trabaje está implícita en ella. El conocimiento que tienen no les permite, sin embargo, construir conceptos más refinados.

La actividad 1 —según el material oficial— promueve el contenido “Registro de resultados de experimentos de azar”. No obstante, esta actividad permite reflexionar acerca de la probabilidad como tal, o sea: es probable que ocurra o no la elección del color ganador; la actividad hace hincapié en los resultados posibles y los casos favorables, el espacio muestral y el análisis de los resultados.

El cuestionamiento final de la actividad, aunque no lo indique, invita a realizar el experimento (lanzar el dado 30 veces). Esta situación permite, desde luego, llevar un registro que dé cuenta de las veces en que ocurrió cada resultado.

De este modo, el estudiante reflexionará en cómo obtener una aproximación de los posibles resultados, lo cual indica también que existe la posibilidad de que dichos resultados se den de varias maneras.

**Cuadro 2.** Frecuencia y porcentaje de los niveles en que se ubicaron los argumentos de los maestros con respecto al contenido que (suponen) se trabaja en la actividad. Pregunta 1:

| NIVELES DE PENSAMIENTO | FRECUENCIA | %    |
|------------------------|------------|------|
| No contestó            | -          | 0    |
| Preestructural         | 2          | 8%   |
| Uniestructural         | 18         | 72%  |
| Multiestructural       | 5          | 20%  |
| Relacional             | -          | 0%   |
| Total                  | 25         | 100% |

Los argumentos se ubicaron en los siguientes niveles de pensamiento:

| NIVELES DE PENSAMIENTO | CARACTERÍSTICAS  |   |
|------------------------|--|---|
|                        | Contenido  | Argumento   |
| Preestructural         | M2: Predecir<br>M25: Probabilidad y predicción   | M2: Se está adivinando lo que se cree que va a pasar.<br>M25: Porque nos anticipamos a lo que puede pasar.  |
| Uniestructural         | M1: Probabilidad<br>M3: La probabilidad a través del juego de azar<br>M4: Probabilidad | M1: Corresponden al eje temático de probabilidad y azar.<br>M3: Porque se realizan los eventos para conocer la probabilidad.<br>M4: Porque se plantean acontecimientos en los que los acontecimientos que sucederán |

|                  |   |   |
|------------------|---|---|
|                  | M9: Predicción y azar   | pueden ser probables o no serlo.<br>M9: No se sabe lo que va a caer.  |
| Multiestructural | M7: Registro de resultados de experimentos de azar<br><br>M8: Análisis de los resultados de un juego de azar.<br><br>M14: Registro de resultados de experimentos de azar<br><br>M20: Registrar resultados de un juego de azar | M7: Porque hay que repetir el juego varias veces para ver qué color se repite más.<br><br>M8: El niño tiene que experimentar para obtener los resultados.<br><br>M14: Porque se van a analizar los resultados de los eventos en que el color cayó más veces y por qué.<br><br>M20: Porque se tiene que hacer una gráfica para verificar las veces que caen los colores. |
| Relacional       | No hubo respuestas de este nivel  |   |

### Resumen

Dos profesores se ubicaron en el nivel preestructural: piensan que se trabaja el contenido de predicción y probabilidad, y por su argumentación, consideran que es factible anticipar o adivinar resultados.

Dieciocho se sitúan en el nivel uniestructural, plantean al menos un elemento que se trabaja en probabilidad o lo toman como un contenido general; en sus argumentos son congruentes con el contenido que enuncian y dan una orientación adecuada al trabajo de la probabilidad. Asimismo, proponen ideas como registrar, ordenar, estimar, aunque no amplían sus argumentos.

Los cinco que caen en el nivel multiestructural indican, en el contenido, una relación apropiada con la actividad propuesta, y ofrecen argumentos congruentes.

### 6.2. Pregunta 3: Uso de las expresiones *más probable* y *menos probable*

*Resumen.* La mayoría de los profesores consideran que el resultado con más oportunidad es aquel que tiene una mayor cantidad de objetos, lo que le favorece en el resultado; no incluyen, por cierto, el azar, ni implican la variabilidad de resultados, ni la aleatoriedad en sus explicaciones.

PREGUNTA 3: Raúl y Jaime hicieron un experimento con canicas de colores. Tratan de adivinar de qué color van a sacar una canica. Observa cómo lo hacen.

- a) Introducen en una caja 10 rojas y 5 azules.
- b) Tapan la caja y la agitan.
- c) Sin ver, sacan una canica.
- d) Introducen la canica otra vez en la caja.
- e) Agitan nuevamente la caja.
- f) Sacan otra vez una canica.

Raúl y Jaime repitieron varias veces el experimento. ¿Qué color de canica crees que salió más veces? \_\_\_\_ (1) \_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_ (2) \_\_\_\_

[*Matemáticas. Cuarto grado, México, SEP, 1999, p. 114.*]

La intención es hacer que los profesores tomen en cuenta la posibilidad de ocurrencia de un resultado de acuerdo con el número de oportunidades que se tengan.

Esto indica que a un número mayor de oportunidades le corresponde, también, un número mayor de ocurrencia. Aunque ésta no sea realmente la que suceda, en el entendido de que la probabilidad de que ocurra de esa manera es incierta.

Las nociones implícitas son: resultados esperados, color que tiene mayor cantidad, más probable, aleatoriedad y presencia del azar.

Los niveles de pensamiento se ubican de la siguiente manera:

| PREESTRUCTURAL   | UNIESTRUCTURAL   | MULTIESTRUCTURAL  | RELACIONAL   |
|--|--|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>↗ Ideas no previstas.</li> <li>↗ Ideas que carecen de sentido.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>↗ Toman en cuenta alguno de estos criterios: más probable, menos probable, porque hay más, porque hay menos.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>↗ Incluyen por lo menos dos de estos criterios: más probable, menos probable, porque hay más, porque hay menos.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>↗ Razonamientos adecuados y argumentos precisos.</li> </ul> |

Con respecto a las respuestas dadas por los maestros en la actividad se observó:

|            | CORRECTAS |     | APROXIMADAS |    | INCORRECTAS |    | SIN RESPUESTA |    |
|------------|-----------|-----|-------------|----|-------------|----|---------------|----|
|            |           |     |             |    |             |    |               |    |
| Pregunta 3 | 24        | 96% | -           | 0% | -           | 0% | 1             | 4% |

Las justificaciones dadas a sus respuestas se ubicaron de la siguiente manera:

**Cuadro 3.** Frecuencia y porcentaje de los argumentos en la pregunta 3.

| NIVELES DE PENSAMIENTO | FRECUENCIA | %   |
|------------------------|------------|-----|
| No contestó            | -          | 0   |
| Preestructural         | -          | 0   |
| Uniestructural         | 24         | 96  |
| Multiestructural       | 1          | 4   |
| Relacional             | -          | 0   |
| Total                  | 25         | 100 |

La tabla que sigue muestra las características que corresponden al nivel de pensamiento de los profesores:

| NIVELES DE PENSAMIENTO | CARACTERÍSTICAS   |
|------------------------|---|
| Preestructural         | Ningún profesor se ubicó en este nivel.   |
| Uniestructural         | M1: En las cajas hay más rojas que azules.<br>M15: Es la que más probabilidad tiene de salir porque son 10.<br>M16: Son más las rojas y tiene más probabilidad.<br>M17: Tiene mayor probabilidad.<br>M19: Porque es el color que se repite más. |
| Multiestructural       | M11: Porque la roja representa 2/3 del total y la azul 1/3.   |
| Relacional             | No hubo respuestas de este nivel  |

## Resumen

Veinticuatro profesores se ubicaron en el nivel uniestructural, ya que sus justificaciones se refieren, fundamentalmente, a la presencia de la cantidad: como hay más canicas de ese color, tiene más probabilidad.

Un solo maestro se situó en el nivel multiestructural al argumentar tanto principios de la teoría laplaciana como el uso de fracciones.

### 6.2.1. Niveles de pensamiento con respecto al contenido abordado en la actividad y la justificación dada a su respuesta

*Resumen.* En la mayoría de los maestros se detectaron ideas uniestructurales acerca del contenido que relacionan con la actividad: incluyen ideas muy concretas con respecto al contenido que enuncian, pero no realizan análisis más finos ni muestran relaciones claras en lo propuesto en la actividad presentada

El contenido de los materiales oficiales es “Las expresiones *más probable* y *menos probable*”; esta actividad involucra el trabajo con registros de experimentos aleatorios y el análisis de resultados de situaciones de azar.

**Cuadro 4.** Frecuencias y porcentaje de los niveles en que se ubicaron los argumentos de los maestros con respecto al contenido que (suponen) se trabaja en la actividad.  
Pregunta 3:

| NIVELES DE PENSAMIENTO | FRECUENCIA | %   |
|------------------------|------------|-----|
| No contestó            | -          | 0   |
| Preestructural         | 2          | 8   |
| Uniestructural         | 17         | 68  |
| Multiestructural       | 6          | 24  |
| Relacional             | -          | 0   |
| Total                  | 25         | 100 |

Los argumentos se ubicaron en los siguientes niveles de pensamiento:

| NIVELES DE PENSAMIENTO | CARACTERÍSTICAS  |   |
|------------------------|--|---|
|                        | Contenido  | Argumento   |
| Preestructural         | M3: Predicción de los experimentos<br><br>M9: Predicción y azar  | M3: Porque se conoce el resultado del evento.<br><br>M9: Se repiten más canicas rojas.  |
| Uniestructural         | M1: Probabilidad de eventos<br><br>M2: Más probable, menos probable<br>M9: Predicción y azar<br>M25: Predicción y probabilidad<br><br>M5: Registro de resultados de experimentos aleatorios<br><br>M6: Registro de los resultados de un experimento de azar<br><br>M8: Análisis de resultados posibles y de casos favorables<br>M14: Realizar experimentos aleatorios<br>M19: Realización de juegos donde interviene el azar<br>M22: Experimentos aleatorios y análisis de los resultados posibles y de los casos favorables<br>M24: Expresiones <i>más probable</i> o <i>menos probable</i><br>M25: Predicción y probabilidad | M1: Sirve para comprobar los experimentos sobre posibles resultados.<br><br>M2: Sin comprobar resultados.<br>M9: Se repiten más canicas rojas.<br>M25: Porque es lógico que hay más rojas y hay más probabilidad.<br>M5: Porque realizan varias veces la actividad para comprobar los resultados.<br><br>M6: Con ello aprenden la estimación de resultados de diferentes juegos de azar.<br><br>M8:<br><br>M14: Porque lo realiza muchas veces.<br>M19: Es un juego donde no se sabe lo que va a pasar.<br>M22: Porque tratan de adivinar qué color será el más probable que salga.<br>M24: Porque existen cantidades diferentes de objetos.<br>M25: Porque es lógico que hay más rojas y hay más probabilidad. |
| Multiestructural       | M12: Uso de las expresiones <i>más probable</i> y <i>menos probable</i> en la predicción de resultados<br>M13: Experimentos donde  | M12: Es más probable que las rojas ser repitan más veces que las azules ya que hay más.<br>M13: Hay más probabilidad en las   |

|            |  |   |
|------------|--|---|
|            | <p>interviene la probabilidad.</p> <p>M16: Usar las expresiones <i>más probable</i> o <i>menos probable</i> al realizar y analizar juegos de azar</p> <p>M17: Usar las expresiones <i>más probable</i> o <i>menos probable</i> al realizar y analizar juegos de azar</p> <p>M18: Identificar los casos favorables a cada evento</p> <p>M20: Usar las expresiones <i>más probable</i> o <i>menos probable</i> al realizar y analizar juegos de azar</p> | <p>canicas rojas que azules.</p> <p>M16: Por la mayor probabilidad que tienen las rojas en relación con las azules.</p> <p>M17: La probabilidad es más cuando hay mayor cantidad de un determinado color.</p> <p>M18: Identifica la probabilidad de cada evento (más o menos probable).</p> <p>M20: Porque es un juego de probabilidades.</p> |
| Relacional | No hubo respuestas de este nivel   |   |

### Resumen

Dos profesores cayeron en el nivel preestructural: uno de ellos señaló una situación determinista —no incluida en el contenido— y el otro no dio un argumento congruente entre el contenido y su justificación.

Diecisiete maestros manifestaron ideas uniestructurales: presentaron ideas muy concretas e incluyeron un elemento de probabilidad en el contenido; cuatro consideran la probabilidad; cuatro utilizan las expresiones *más probable* y *menos probable*; tres refieren al registro de resultados y otros tres se orientan a los fenómenos aleatorios; dos enuncian casos posibles y favorables, y uno señala la comparación de eventos.

Seis maestros se ubicaron en el nivel multiestructural, lo que significa que el contenido y la justificación se relacionan con la actividad propuesta, sus ideas son concretas aunque no profundizan en sus explicaciones, incluyen las expresiones *más probable*, *menos probable* y *experiencia aleatoria*; explican por qué se tiene más probabilidad de obtener el resultado de acuerdo con los casos favorables.

### 6.3. Pregunta 5: Problemas de combinatoria

*Resumen.* Los profesores trataron de hacer combinaciones, aunque no todos mostraron los procedimientos utilizados. La mayoría se ubicó en el nivel de

pensamiento uniestructural; sólo tres señalaron cómo realizaron sus combinaciones. Once maestros tuvieron la siguiente idea en mente: como son ocho niños, sólo se pueden hacer cuatro parejas (no se concibe que es posible desintegrarlas para formar otras).

PREGUNTA 5: Éstos son los niños y las niñas que van a salir en un bailable: Flor, Rosa, Carmen, Laura, Ramón, Juan, Daniel y Tomás. Rosa dijo: "Yo puedo formar pareja con Ramón, con Juan, con Daniel o con Tomás. ¿De cuántas maneras se puede formar parejas entre un niño y una niña?

(1)

[*Matemáticas. Cuarto grado, México, SEP, 1999, p. 168.*]

La situación presentada es un problema de combinatoria. Se espera que los alumnos realicen las combinaciones (pueden utilizar técnicas de conteo como los arreglos o el diagrama de árbol para obtener el número de combinaciones posibles). El número de combinaciones es 16.

Las nociones implícitas son: combinaciones, resultados posibles, uso del diagrama de árbol, arreglos y estimación de resultados.

Los niveles de pensamiento se ubican de la siguiente manera:

| PREESTRUCTURAL                                       | UNIESTRUCTURAL   | MULTIESTRUCTURAL   | RELACIONAL  |
|--|--|--|---|
| <p>^ Presentan ideas distintas de las esperadas.</p> | <p>^ Toman en cuenta alguna de estas nociones implícitas: combinaciones posibles, resultados posibles, uso del diagrama de árbol, arreglos o estimación de resultados.</p> | <p>^ Incluyen por lo menos dos de estas nociones: combinaciones posibles, resultados posibles, uso del diagrama de árbol, arreglos o estimación de resultados.</p> | <p>^ Razonamientos adecuados y argumentos precisos.</p> |

Con respecto a las respuestas dadas por los maestros en la actividad se observó:

|            | CORRECTAS |     | APROXIMADAS |    | INCORRECTAS |     | SIN RESPUESTA |    |
|------------|-----------|-----|-------------|----|-------------|-----|---------------|----|
| Pregunta 5 | 11        | 44% | -           | 0% | 12          | 48% | 2             | 8% |

Las justificaciones dadas a sus respuestas se ubicaron de la siguiente manera:

**Cuadro 5.** Frecuencia y porcentaje de los argumentos en la pregunta 5.

| NIVELES DE PENSAMIENTO | FRECUENCIA | %   |
|------------------------|------------|-----|
| No contestó            | 2          | 8   |
| Preestructural         | 12         | 48  |
| Uniestructural         | 8          | 32  |
| Multiestructural       | 3          | 12  |
| Relacional             | -          | 0   |
| Total                  | 25         | 100 |

Los argumentos se ubicaron en los siguientes niveles:

| NIVEL DE PENSAMIENTO | CARACTERÍSTICAS  |   |   |      |       |      |        |       |       |        |      |
|----------------------|--|---|---|------|-------|------|--------|-------|-------|--------|------|
| Preestructural       | M1: 4<br>M9: 12  |   |   |      |       |      |        |       |       |        |      |
| Uniestructural       | M7: De 16 maneras<br>M8: De 16 maneras.<br>M11: De 16 maneras.<br>M13: 16 veces.<br>M15: 16.<br>M20: De 16 maneras.<br>M24: De 16 formas.<br>M25: De 16 formas.  |   |   |      |       |      |        |       |       |        |      |
| Multiestructural     | M2: De 4 maneras cada uno, en total serán 16 parejas.<br><br><table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>M</th> <th>H</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Flor</td> <td>Ramón</td> </tr> <tr> <td>Rosa</td> <td>Daniel</td> </tr> <tr> <td>Laura</td> <td>Tomás</td> </tr> <tr> <td>Carmen</td> <td>Juan</td> </tr> </tbody> </table><br>M6: Flor-Ramón, Flor-Juan, Flor-Daniel, Flor-Tomás, etcétera; 16 forman.<br>M18: Entre los 8 niños dan 16 parejas distintas: $4 \times 4 = 16$ . | M | H | Flor | Ramón | Rosa | Daniel | Laura | Tomás | Carmen | Juan |
| M                    | H  |   |   |      |       |      |        |       |       |        |      |
| Flor                 | Ramón  |   |   |      |       |      |        |       |       |        |      |
| Rosa                 | Daniel   |   |   |      |       |      |        |       |       |        |      |
| Laura                | Tomás  |   |   |      |       |      |        |       |       |        |      |
| Carmen               | Juan   |   |   |      |       |      |        |       |       |        |      |
| Relacional           | No hubo respuestas de este nivel.  |   |   |      |       |      |        |       |       |        |      |

## Resumen

Catorce profesores cayeron en el nivel preestructural —sus respuesta fueron incorrectas—; once respondieron que eran cuatro combinaciones; y uno señaló que eran doce combinaciones. La mayoría consideró las combinaciones concretas de los niños, es decir, toman un niño y una niña para formar una pareja, lo que los llevó a integrar únicamente cuatro parejas con el total de niños y niñas propuestos; piensan que una vez integradas las parejas ya no pueden disolverse.

Ocho maestros se ubicaron en el nivel uniestructural, únicamente respondieron adecuadamente sin explicaciones. 3 tienen explicaciones multiestructurales, éstos incluyeron además de la respuesta una explicación o ejemplo, enumerar combinaciones o presentar la multiplicación (regla del producto) Ninguno empleo el diagrama de árbol, solamente presentaron algunos arreglos para encontrar las combinaciones.

Dos maestros no contestaron por lo que no se les ubicó en ningún nivel de pensamiento.

### **6.3.1. Niveles de pensamiento con respecto al contenido abordado en la actividad y la justificación dada a su respuesta**

*Resumen.* En la mayoría de los maestros se detectaron ideas uniestructurales; se refieren por lo menos a una técnica de conteo (diagrama de árbol o arreglo), sin explicar en qué consiste cada una. Resalta, empero, la idea de buscar combinaciones.

Con respecto al contenido que se trabaja en la actividad: problemas de combinatoria, se espera que los alumnos realicen acciones de combinación. Al revisar las respuestas hallamos las siguientes ideas que manifiestan cuál es el contenido que se trabaja en la actividad.

**Cuadro 6.** Frecuencia y porcentaje de los niveles en que se ubicaron los argumentos de los maestros con respecto al contenido que (suponen) se trabaja en la actividad. Pregunta 5.

| NIVELES DE PENSAMIENTO | FRECUENCIA | %   |
|------------------------|------------|-----|
| No contestó            | -          | 0   |
| Preestructural         | 4          | 16  |
| Uniestructural         | 16         | 64  |
| Multiestructural       | 5          | 20  |
| Relacional             | -          | 0   |
| Total                  | 25         | 100 |

Los argumentos se ubicaron en los siguientes niveles:

| NIVELES DE PENSAMIENTO | CARACTERÍSTICAS  |  |
|------------------------|--|--|
|                        | Contenido  | Argumento  |
| Preestructural         | <p>M2: Registro de datos</p> <p>M9: Procesos de cambio</p> <p>M23: Probabilidad</p> <p>M25: Predicción</p>   | <p>M2: No contestó.</p> <p>M9: Es variable la combinación de parejas.</p> <p>M23: Porque todo cabe en lo posible.</p> <p>M25: Porque sabemos cuántas parejas formar.</p>   |
| Uniestructural         | <p>M1: Registro de eventos.</p> <p>M3: Uso de diagrama del árbol para contar el número de resultados posibles</p> <p>M6: Juegos combinados</p> <p>M10: Uso de diagramas de árbol para contar el número de resultados posibles</p> <p>M14: Utilizar tablas de doble entrada para conteo de arreglos</p> <p>M18. Organizar la información en diagramas</p> | <p>M1: Se utiliza el diagrama de árbol para ver las parejas posibles.</p> <p>M3: Porque así los alumnos llegan a los resultados.</p> <p>M6: Ellos aprenden el diagrama de árbol.</p> <p>M10: A través de los diagramas de árbol se pueden estimar resultados.</p> <p>M14: Se realizan diversas estimaciones de resultados posibles.</p> <p>M18: Porque hay que reconocer la utilidad de los diagramas para concentrar información.</p> |

|                  |  |  |
|------------------|--|--|
| Multiestructural | <p>M7: Uso de diagramas de árbol para encontrar el número de resultados posibles</p> <p>M8: Uso de diagramas de árbol para resolver problemas de conteo</p> <p>M13: Combinaciones con diagrama de árbol</p> <p>M21. Uso de diagramas de árbol en problemas de conteo</p> <p>M22: Usos de diagrama de árbol para resolver problemas de conteo</p> | <p>M7: Porque primero vamos a ver una niña con todos los niños, luego así sucesivamente y lo hacemos a través del diagrama de árbol.</p> <p>M8: Se forman todas las parejas mediante la utilización del diagrama de árbol.</p> <p>M13: Se combinan las parejas: 4 hombres por 4 mujeres, que dan un total de 16 parejas.</p> <p>M21: Porque de esa manera obtendrá los resultados posibles.</p> <p>M22: Se busca cuántas combinaciones posibles pueden resultar.</p> |
| Relacional       | No hubo respuestas de este nivel   |  |

### Resumen

Cuatro maestros se sitúan en el nivel preestructural, tres no ofrecen explicaciones adecuadas respecto del contenido que proponen, ni tienen relación con la actividad propuesta, en tanto que uno se refiere al registro pero no aclara la idea ni justifica.

Dieciséis se ubican en el nivel uniestructural (señalan un elemento de probabilidad); seis se refieren al diagrama de árbol; seis mencionan problemas de combinatoria; dos hacen referencia a los registros; uno a las tablas de doble entrada y uno señala la organización de información. Las justificaciones son muy concretas y no toman en cuenta la actividad.

Cinco profesores esgrimieron ideas de índole multiestructural: refieren en el contenido el uso del diagrama de árbol como técnica de conteo, dan explicaciones de cómo se utiliza el diagrama pero no lo ejemplifican.

#### 6.4. Pregunta 7: Experimento aleatorio y análisis de casos favorables

*Resumen.* Entre los profesores prevalece la idea de que el problema consiste en buscar el resultado que tenga más oportunidades de salir, y al

obtenerlo, lo relacionan con la consigna implícita en la actividad. Sin embargo, algunos maestros relacionan la actividad con el azar en general y consideran que los dos resultados tienen igual oportunidad; no toman en cuenta el análisis de los casos favorables. Ninguno explica con detalle los elementos que intervienen en la actividad.

La pregunta 7 favorece la reflexión acerca de los resultados posibles en un juego y, con base en ello, se puede argumentar si es justo o no, es decir: se identifica cuál de los resultados tiene la mayor oportunidad de salir y se justifica así cuál tiene ventaja, de suerte que para saber esta posibilidad es preciso conocer los resultados posibles mediante el espacio muestral.

PREGUNTA 7: Elena y su hermano Andrés deben decidir quién lava los trastes de la comida. Elena sugiere que lo decidan tirando un dado con las caras numeradas del 1 al 6. Si sale 3 o un número mayor, Andrés lava los trastes; si sale un número menor que 3, los lava Elena. ¿Crees que el trato sea justo? \_\_\_\_\_(1)\_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_(2)\_\_\_\_\_ ¿Es más probable que lave los trastes Elena, o que los lave Andrés? \_\_\_\_\_(3)\_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_(4)\_\_\_\_\_

[*Matemáticas. Quinto grado*, México, SEP, 2000, p. 76.]

El juego no es justo, ya que tienen más oportunidades de salir los números que le corresponden a Andrés y, en consecuencia, hay más posibilidad de que él lave los trastes. Al revisar el espacio muestral tenemos que a Andrés le corresponden los números 3, 4, 5 y 6; a Elena le tocan sólo el 1 y 2. En suma, observamos que Andrés tiene la mayor probabilidad de que salga alguno de sus números y, por ende, le tocaría a lavar los trastes.

Las nociones implícitas son: espacio muestral, trato justo, trato injusto, menos oportunidades, más oportunidades, mayor probabilidad, menor probabilidad, aleatoriedad.

Los niveles de pensamiento se ubican de la siguiente manera:

| PREESTRUCTURAL  | UNIESTRUCTURAL  | MULTIESTRUCTURAL  | RELACIONAL  |
|---|---|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>⤴ Ideas no previstas.</li> <li>⤴ Ideas que carecen de</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>⤴ Toman en cuenta alguno de estos</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>⤴ Incluyen por lo menos dos de estos criterios:</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>⤴ Razonamientos adecuados y</li> </ul> |

|          |   |  |                      |
|----------|---|--|----------------------|
| sentido. | <p>critérios: más probable, menos probable, porque hay más, porque hay menos, trato justo, trato injusto, espacio muestral, justificar.</p> | <p>más probable, menos probable, porque hay más, porque hay menos, trato justo, trato injusto, espacio muestral, justificar.</p> | argumentos precisos. |
|----------|---|--|----------------------|

Con respecto a las respuestas dadas por los maestros en la actividad se observó:

|            | CORRECTAS |     | APROXIMADAS |     | INCORRECTAS |     | SIN RESPUESTA |    |
|------------|-----------|-----|-------------|-----|-------------|-----|---------------|----|
| Pregunta 7 | 15        | 60% | 3           | 12% | 6           | 24% | 1             | 4% |

Las justificaciones dadas a sus respuestas se ubicaron de la siguiente manera:

**Cuadro 7.** Frecuencia y porcentaje de los argumentos en la pregunta 7.

| NIVELES DE PENSAMIENTO | FRECUENCIA | %   |
|------------------------|------------|-----|
| No contestó            | 1          | 4   |
| Preestructural         | 6          | 24  |
| Uniestructural         | 3          | 12  |
| Multiestructural       | 15         | 60  |
| Relacional             | -          | 0   |
| Total                  | 25         | 100 |

Los argumentos se ubicaron en los siguientes niveles:

| NIVEL          | CARACTERÍSTICAS  |
|----------------|--|
| Preestructural | <p>M4: Sí. Están parejos.<br/>Igual. Porque están parejos.</p> <p>M9: Sí. Los dos tienen razón.<br/>Sí. Tiene mayores números.</p> <p>M24: Sí. Porque nadie tiene ventajas.<br/>No. Porque los dos tienen las mismas posibilidades.</p> <p>M25: Sí. Porque no se sabe lo que va a pasar.<br/>No. No se sabe lo que va a pasar.</p> |

|                  |  |
|------------------|--|
| Uniestructural   | <p>M3: No. Lleva ventaja —en probabilidad— de que salga de 3 a 6.<br/>No. Porque Andrés lleva más probabilidad de que pierda.</p> <p>M10: No. Con el 3 o menos de 3 hay menos probabilidad de que salga Elena; va a salir mayor que 3.</p> <p>M16: No. Puede salir 3, 4, 5 o 6.<br/>No. Porque tiene cuatro opciones.</p>  |
| Multiestructural | <p>M1: No. Tiene mayores posibilidades de ganar Elena; para Andrés es más probable que caiga el 3, 4, 5 o 6.</p> <p>M2: No. Elena le lleva ventaja a Andrés. Para Andrés serán cuatro caras del dado; para Elena sólo son dos caras.</p> <p>M11: No. Porque Elena tiene <math>\frac{1}{3}</math> de probabilidad en el evento y su hermano <math>\frac{2}{3}</math>.<br/>Andrés. Porque es más probable que salga del 3 al 6 que del 1 al 2.</p> |
| Relacional       | No hubo respuestas de este nivel.  |

### Resumen

Seis profesores se sitúan en el nivel preestructural: toman en cuenta el azar, pero sus respuestas no son adecuadas a la actividad. Creen que el juego es justo, aunque pasan por alto los casos favorables, lo cual es útil para determinar si el juego es justo o injusto.

Tres caen en el nivel uniestructural, indican que el trato no es justo, pero se equivocaron en la selección del que lleva la ventaja.

Quince maestros se ubican en el nivel multiestructural, es decir: dan respuestas adecuadas a las preguntas, no profundizan en sus justificaciones, enuncian los casos favorables y señalan por qué el trato no es justo.

Un maestro no contestó por lo que no se le ubicó en ningún nivel de pensamiento.

#### 6.4.1. Niveles de pensamiento con respecto al contenido abordado en la actividad y la justificación dada a su respuesta

*Resumen.* Los maestros relacionan la actividad con un solo aspecto de la probabilidad, tratan de relacionar lo que enuncian con lo que interpretan de la actividad, lo que los limita a relacionar claramente el contenido que proponen.

La propuesta oficial indica que el contenido trabajado en esta actividad es de experimentos aleatorios, sin embargo, pensamos que se favorece también el trabajo del espacio muestral y el reconocimiento de la mayor o menor probabilidad, situaciones que permiten tratar de entender los planteamientos que hacen los profesores al respecto. Entre las respuestas de los maestros encontramos.

**Cuadro 8:** Frecuencia y porcentaje de los niveles en que se ubicaron los argumentos de los maestros con respecto al contenido que (suponen) se trabaja en la actividad. Pregunta 7.

| NIVELES DE PENSAMIENTO | FRECUENCIA | %   |
|------------------------|------------|-----|
| No contestó            | -          | 0   |
| Preestructurales       | 2          | 8   |
| Uniestructurales       | 16         | 64  |
| Multiestructurales     | 7          | 28  |
| Relacionales           | -          | 0   |
| Total                  | 25         | 100 |

Los argumentos se ubicaron en los siguientes niveles

| NIVELES DE PENSAMIENTO | CARACTERÍSTICAS  |  |
|------------------------|--|--|
|                        | Contenido  | Argumento  |
| Preestructural         | M1: Probabilidad<br>M16: Realización de experimento aleatorios   | M1: No contestó.<br>M16: Por la posibilidad que ambos tienen de hacer la actividad ya que los datos son igual para los dos.  |
| Uniestructural         | M2: Más probable o menos probable<br>M6: Uso de las expresiones <i>más probable, menos probable</i><br>M3: Experimentos aleatorios | M2: No contestó.<br>M6: Aprende a estimar resultados con las "terminaciones" <i>más probable o menos probable</i> .<br>M3: Corresponde a la predicción.<br>M4: Porque es igualmente probable |

|                  |  |   |
|------------------|--|---|
|                  | <p>M4: Probabilidad</p> <p>M5: Probabilidad de eventos</p> <p>M8: Realización de los trabajos aleatorios</p> <p>M9: Predicción y azar</p> <p>M14: Estimar la probabilidad de un evento</p> <p>M15: Experimentos de juegos de azar</p> <p>M19: Experimentos donde interviene el azar dando un resultado posible</p> <p>M22: Identificación de la mayor o menor probabilidad de los eventos</p> <p>M24: Eventos más probables y menos probables.</p> <p>M25: Azar.</p> | <p>que ocurran cualquiera de los dos hechos.</p> <p>M5: Porque hay probabilidad en los dos casos.</p> <p>M8: También Elena podría lavar los trastes ya que es como un juego de azar.</p> <p>M9: Es conveniente que se utilicen estas clases de juego para medir el azar.</p> <p>M14: Porque se va a estimar el resultado que es más probable que salga.</p> <p>M15: Aquí se ve que el trato es justo pero no se sabe qué va a caer, puede ser favorable o desfavorable.</p> <p>M19: No contestó.</p> <p>M22: Porque tratamos de identificar la probabilidad de quien puede ser el elegido.</p> <p>M24: Porque no se sabe quién o qué saldrá.</p> <p>M25: Alguno de los dos puede lavarlo.</p> |
| Multiestructural | <p>M7: Realización de experimentos aleatorios</p> <p>M11: Uso de las expresiones <i>más probable</i> y <i>menos probable</i> en la predicción de resultados</p> <p>M12: Uso de las expresiones <i>más probable</i> y <i>menos probable</i> en la predicción de resultados.</p>   | <p>M7: Porque no sabemos quién va a ganar aunque hay más probabilidad de que salga 3, 4, 5 o 6.</p> <p>M11: Porque de acuerdo con la probabilidad de cada uno de los sucesos se puede predecir que es más probable o menos probable.</p> <p>M12: Es más probable que le toque a Andrés ya que a él le tocaron 4 caras y a Elena 2 caras.</p>  |

|            |   |   |
|------------|---|---|
|            | M13: Eventos donde existe mayor o menor probabilidad<br>M17: Realización de experimentos aleatorios<br>M21: Experimentos aleatorios y análisis de resultados<br>M23: Probabilidad | M13: Al haber más números hay más probabilidad.<br>M17: Por la posibilidad que ambos tienen.<br>M21: Porque es más probable que salgan 3 o un número mayor.<br>M23: Es probable que salgan más números del 3 al 6, pero no es seguro. |
| Relacional | No hubo respuestas de este nivel  |   |

## Resumen

Dos docentes se ubican en el nivel preestructural, uno menciona la probabilidad pero no la justifica y el otro señala los fenómenos aleatorios pero su justificación no es congruente con la actividad.

Dieciséis profesores caen en el nivel uniestructural, señalan algún elemento de probabilidad, por ejemplo: mayor o menor probabilidad, probabilidad, experimento aleatorio, estimar la probabilidad (en sus justificaciones consideran exclusivamente la presencia del azar).

Siete maestros se sitúan en el nivel multiestructural, tres se refieren al fenómeno aleatorio, explican el evento que tiene mayor probabilidad e incluyen el azar; tres señalan los términos *mayor probabilidad* y *menor probabilidad* e indican que un evento tiene mayor probabilidad cuando hay más elementos; uno menciona la probabilidad, justifica el evento de mayor probabilidad e incluye la presencia del azar.

### 6.5. Pregunta 9: Análisis de resultados posibles y casos favorables

*Resumen.* Los profesores destacan el número de colores en vez del número de resultados posibles y casos favorables, de lo que se infiere que subyace un pensamiento de tipo uniestructural; no proponen explicaciones más finas que incluyan los elementos implícitos en la actividad.

Trece maestros manifestaron ideas preestructurales que incluyen el azar, pero no toman en cuenta lo que la actividad solicita con respecto al jugador que tiene más oportunidad de ganar.

Esto tiene que ver con el análisis de resultados posibles y de casos favorables, lo que indica que se debe representar el espacio muestral para poder decidir, sobre todo para identificar qué resultado tiene más probabilidad de salir.

PREGUNTA 9: Ángela y Jacinto tienen tres cubos iguales, uno verde, uno azul y uno rojo. Los ponen en una bolsa de papel, escogen uno sin ver, anotan el color que les salió y lo regresan a la bolsa. Después, escogen otro cubo sin ver. Jacinto gana si salen dos cubos del mismo color, y Ángela gana si salen dos cubos diferentes.

¿Se podría saber quién tiene más oportunidades de ganar?

\_\_\_\_\_ (1) ¿Por qué? \_\_\_\_\_ (2)

[*Matemáticas. Quinto grado*, México, SEP, 2000, p. 135.]

La respuesta esperada es que sí se puede saber quién tiene más oportunidades de ganar. Para ello, es necesario identificar el espacio muestral del experimento, esto es, una vez que se sabe que hay nueve posibles resultados en la actividad: V-V, V-A, V-R, A-V, A-A, A-R, R-V, R-A y R-R, podemos identificar que tres de estos resultados se refieren a dos cubos del mismo color —existen por tanto seis opciones para cubos de diferentes colores—. Con esto se puede responder la pregunta y deducir que hay más oportunidades de que salgan dos cubos de diferente color.

Las nociones implícitas son: espacio muestral, casos favorables, casos posibles, azar, experimento aleatorio, estimación de resultados.

Los niveles de pensamiento se ubican de la siguiente manera:

| PREESTRUCTURAL   | UNIESTRUCTURAL   | MULTIESTRUCTURAL  | <i>Relacional</i>                                       |
|--|--|---|---|
| <p>⤴ Ideas que no consideran análisis de resultados posibles y casos favorables, o que</p> | <p>⤴ Toman en cuenta alguno de estos criterios: casos favorables, resultados</p> | <p>⤴ Incluyen por lo menos dos de estos criterios: casos favorables, resultados posibles,</p> | <p>⤴ Razonamientos adecuados y argumentos precisos.</p> |

|   |   |   |  |
|---|---|---|--|
| se desvíen del propósito del contenido. | posibles, estimación de probabilidad, presencia del azar. | estimación de probabilidad, presencia del azar. |  |
|---|---|---|--|

Con respecto a las respuestas dadas por los maestros en la actividad se observó:

|            | CORRECTAS |     | APROXIMADAS |     | INCORRECTAS |     | SIN RESPUESTA |    |
|------------|-----------|-----|-------------|-----|-------------|-----|---------------|----|
| Pregunta 9 | 9         | 36% | 3           | 12% | 13          | 52% | -             | 0% |

Las justificaciones dadas a sus respuestas se ubicaron de la siguiente manera:

**Cuadro 9.** Frecuencia y porcentaje de los argumentos en la pregunta 9.

| NIVELES DE PENSAMIENTO | FRECUENCIA | %   |
|------------------------|------------|-----|
| No contestó            | -          | 0   |
| Preestructural         | 13         | 52  |
| Uniestructural         | 12         | 48  |
| Multiestructural       | -          | 0   |
| Relacional             | -          | 0   |
| Total                  | 25         | 100 |

Los argumentos se ubicaron en los siguientes niveles:

| NIVEL DE PENSAMIENTO | CARACTERÍSTICAS   |
|----------------------|---|
| Preestructural       | M3: No, porque todos tienen la misma probabilidad.<br>M10: No, porque es un experimento aleatorio.<br>M22: No, no sabemos qué colores van a sacar.<br>M21: Igual, hay igual número de cubos y tienen los mismos colores.  |
| Uniestructural       | M4: Sí, es lógico que ganará Ángela, porque no hay dos cubos iguales.<br>M16: No, Ángela puede ganar por los colores diferentes.<br>M1: Sí, es más probable que saquen dos cubos de diferente color.<br>M2: Sí, Ángela tiene más oportunidades de ganar que Jacinto.<br>M8: Ángela tiene más posibilidades de sacar cubos diferentes.<br>M12: Sí, Ángela tiene dos posibilidades de que le salgan cubos diferentes. |

|                  |   |
|------------------|---|
|                  | M15: Ángela tiene más opciones y mayor probabilidad.<br>M18: Sí, hay dos diferentes a una y solamente hay uno igual a otro. |
| Multiestructural | No hubo respuestas de este nivel.   |
| Relacional       | No hubo respuestas de este nivel.   |

## RESUMEN

Trece maestros se sitúan en el nivel preestructural, pues sus respuestas no se relacionan con lo solicitado en el problema (las respuestas implican el azar, sin embargo, no son las apropiadas); cuatro indican que se tiene la misma probabilidad; cuatro incluyen al azar; cuatro consideran que hay la misma cantidad de cubos, y uno señala que es un experimento aleatorio.

Doce profesores manifiestan un nivel de pensamiento de tipo uniestructural, nueve relacionan su respuesta con lo que la pregunta requiere pero no profundizan en ella, la idea que más resalta es la de mayor probabilidad por tener más posibilidad. Ninguno de los docentes dio ejemplos o por qué se considera que el resultado de mayor probabilidad es el que tiene más posibilidades; tres dan respuestas parciales, aciertan en el nombre del jugador con más oportunidad pero no justifican adecuadamente.

### 6.5.1. Niveles de pensamiento con respecto al contenido abordado en la actividad y la justificación dada a su respuesta

*Resumen.* La mayoría de los profesores mencionan un contenido relacionado con el azar —aunque vinculado escasamente con lo propuesto en la actividad— y ello hace que en sus propuestas exista una desconexión entre el contenido, la actividad y su justificación. Las aproximaciones tienen que ver con situaciones generales pero que, por lo menos, muestran relación con la actividad.

La propuesta oficial propone realizar un análisis de resultados posibles y de casos favorables, aspecto en el que coincidimos puesto que sólo a través del reconocimiento del espacio muestral se sabe cuáles son los resultados posibles. Una vez obtenidos, se puede deducir qué opción tiene mayor probabilidad de ocurrir. Entre las respuestas de los profesores encontramos las siguientes:

**Cuadro 10.** Frecuencia y porcentaje de los niveles en que se ubicaron los argumentos de los maestros con respecto al contenido que (suponen) se trabaja en la actividad. Pregunta 9.

| NIVELES DE PENSAMIENTO | FRECUENCIA | %   |
|------------------------|------------|-----|
| No contestó            | -          | 0   |
| Preestructural         | 11         | 44  |
| Uniestructural         | 13         | 52  |
| Multiestructural       | 1          | 4   |
| Relacional             | -          | 0   |
| Total                  | 25         | 100 |

Los argumentos se ubicaron en los siguientes niveles:

| NIVEL          | CARACTERÍSTICAS   |  |
|----------------|---|--|
|                | Contenido   | Argumento  |
| Preestructural | M7: Experimentos aleatorios<br><br>M8: Identificación y realización de juegos en los que interviene el azar<br>M9: Azar<br>M16: Registro en tablas y gráficas de los resultados de los diferentes experimentos<br>M18: Exponer ejemplos de experiencias aleatorias<br>M19: Por el número de colores que se repiten<br>M20: Registro de los resultados de un juego de azar<br><br>M22: El azar<br>M24: Eventos probables y menos probables<br>M25: No contestó | M7: Porque los dos tienen los mismos colores y los mismos números de cubos.<br><br>M8: Los cubos son de diferente color.<br>M9: Hay diferencia en colores.<br>M16: Se tienen que hacer anotaciones y control de datos.<br><br>M18: Esto es un juego de azar.<br><br>M19: No contestó.<br><br>M20: Porque se tiene que elaborar una gráfica para anotar el color del dado que salga.<br>M22: No contestó.<br>M24: Porque no se sabe el resultado.<br>M25: No se sabe qué puede salir. |
| Uniestructural | M1: Probabilidad  | M1: Se quiere ver quién tiene más  |

|                  |   |  |
|------------------|---|--|
|                  | <p>M2: Probabilidad</p> <p>M3: Identificación de mayor o menor probabilidad</p> <p>M10: Registro de experimentos aleatorios</p> <p>M11: Experimentos aleatorios y azar</p> <p>M12: Predicción</p> <p>M13: Predicción de eventos de mayor o menor probabilidad</p> <p>M14: Realizar experimentos aleatorios</p> <p>M15: Más o menos probabilidad de eventos</p> <p>M21: Análisis y resultados de casos favorables</p> <p>M23: Azar</p> | <p>posibilidades de acertar.</p> <p>M2: Se quiere saber quién tiene más posibilidades de acertar.</p> <p>M3: Porque es necesario que los alumnos se den cuenta de cuál tiene más probabilidad.</p> <p>M10: No sabemos lo que sucederá.</p> <p>M11: Porque tienen la misma probabilidad de ganar.</p> <p>M12: Hay dos posibilidades de que salgan cubos de otro color y una posibilidad de que salga una igual.</p> <p>M13: Al haber tres cubos de diferente color, Ángela tiene mayor probabilidad.</p> <p>M14: Porque es posible que los dos obtengan el mismo resultado.</p> <p>M15: Se pretende saber cuál es más probable o menos probable que salga.</p> <p>M21: Hay la misma cantidad de cubos y están pintados iguales.</p> <p>M23: No sabemos qué colores de cubo van a sacar, los dos tienen la oportunidad de ganar.</p> |
| Multiestructural | M4: Análisis de resultados posibles y de casos favorables   | M4: Porque en este caso hay más resultados favorables para una de las partes.  |
| Relacional       | No hubo respuestas de este nivel  |  |

## Resumen

Once maestros se ubican en el nivel preestructural, las ideas que expresan en el contenido tienen que ver con la probabilidad, sin embargo, no guardan ninguna relación con lo que se propone en la actividad, ni aclaran qué quieren manifestar en el contenido que sugieren.

Los trece docentes que caen en el nivel uniestructural señalan en el contenido algún aspecto de la probabilidad y en su justificación incluyen la presencia del azar, empero no hay ninguna explicación que sea congruente con lo que anuncian en el contenido.

Un profesor ofrece una idea de nivel multiestructural: indica el contenido que se aborda en la actividad y lo justifica con un análisis de los casos favorables, aunque no amplía su argumento.

### 6.6. Pregunta 10: Probabilidad de eventos

*Resumen.* Los maestros tuvieron dificultades para resolver esta actividad; la mayoría alude a aspectos de la probabilidad, pero sin considerar lo requerido para responder la actividad. No poseen conocimientos acerca del espacio muestral o el número de resultados posibles ni de casos favorables. El pensamiento de tipo uniestructural se caracteriza por ideas concretas, como que a mayor cantidad de números hay más probabilidad, pero sin profundizar en el análisis.

PREGUNTA 10: Jorge y Gabriela están jugando con dos dados iguales que tienen en sus caras los números de 1 al 6. Si al caer los dados la suma de los dos números es 6 o más, gana Gabriela; si la suma es mayor o igual a 7, gana Jorge. ¿Quién crees que tenga más oportunidades de ganar?  
\_\_\_\_\_ (1) ¿Por qué? \_\_\_\_\_ (2)

[*Matemáticas. Quinto grado*, México, SEP, 2000, p. 190.]

Se hace hincapié en el uso de la probabilidad de los eventos, por lo que se trata de reconocer también el espacio muestral para responder los cuestionamientos que se realizan en la actividad. En este sentido, la respuesta esperada es que señale a Jorge como el que tiene más oportunidades de ganar, justificando con base en el reconocimiento del espacio muestral (Jorge tiene más oportunidades) o también señalando que Jorge tiene 21 posibilidades y a Gabriela únicamente le corresponden 15 oportunidades.

Las nociones implícitas son: probabilidad de eventos, resultados posibles, espacio muestral, casos favorables, aleatoriedad, variabilidad de resultados, azar, mayor probabilidad, menor probabilidad.

Los niveles de pensamiento se ubican de la siguiente manera:

| PREESTRUCTURAL                                     | UNIESTRUCTURAL   | MULTIESTRUCTURAL   | RELACIONAL                                       |
|--|--|--|--|
| ↖ Quienes no expliquen adecuadamente la respuesta. | ↖ Consideran alguno de estos criterios: resultados posibles, análisis de resultados, casos favorables, mayor probabilidad, menor probabilidad, presencia del azar. | ↖ Incluyen por lo menos dos de los criterios: resultados posibles, análisis de resultados, casos favorables, mayor probabilidad, menor probabilidad, presencia del azar. | ↖ Razonamientos adecuados y argumentos precisos. |

Con respecto a las respuestas dadas por los maestros en la actividad se observó:

|             | CORRECTAS |     | APROXIMADAS |    | INCORRECTAS |     | SIN RESPUESTA |    |
|-------------|-----------|-----|-------------|----|-------------|-----|---------------|----|
| Pregunta 10 | 7         | 28% | 1           | 4% | 16          | 64% | 1             | 4% |

Las justificaciones dadas a sus respuestas se ubicaron de la siguiente manera:

**Cuadro 11.** Frecuencia y porcentaje de los argumentos en la pregunta 10.

| NIVELES DE PENSAMIENTO | FRECUENCIA | %   |
|------------------------|------------|-----|
| No contestó            | -          | 0   |
| Preestructural         | 17         | 68  |
| Uniestructural         | 7          | 28  |
| Multiestructural       | 1          | 4   |
| Relacional             | -          | 0   |
| Total                  | 25         | 100 |

Los argumentos se ubicaron en los siguientes niveles

| NIVEL DE PENSAMIENTO | CARACTERÍSTICAS   |
|----------------------|---|
| Preestructural       | M3: Igual, porque con los eventos tienen la misma probabilidad.<br>M4: Ninguno, porque puede ganar cualquiera de los dos.<br>M8: Los dos, porque no conocen los puntos que van a resultar.<br>M13: No contestó. Tiene más combinaciones Gabriela tiene más oportunidad de ganar.<br>M19: Gabriela, es más probable que caigan los números menores.<br>M25: Nadie, porque es un juego de azar.                                 |
| Uniestructural       | M1: Jorge, hay más números mayores.<br>M11: Jorge, porque de 36 probabilidades, 12 serían con resultados de 6 y menos, y 24 de 7 y más.<br>M6: Jorge tiene más posibilidades.<br>M9: Jorge tiene mayores números.<br>M12: A Jorge le pueden caer los números mayores y a Gabriela tienen que ser menores de 6.<br>M17: Jorge, hay más probabilidad de que la suma sea 7 o mayor.<br>M23: Jorge tiene más opciones para sumar. |
| Multiestructural     | M2: Jorge tiene 21 oportunidades de ganar; Gabriela sólo tiene 14 oportunidades.  |
| Relacional           | No hubo respuestas de este nivel.   |

## Resumen

Diecisiete maestros se sitúan en el nivel preestructural, de ellos nueve indican que existe igual oportunidad en ambos jugadores; dos señalan que cualquiera puede ganar; dos afirman que ninguno porque se desconocen los resultados; tres mencionan que Gabriela tiene más oportunidad, por lo que aunque se justifica el argumento no es congruente con lo que la actividad solicita.

Siete profesores caen en el nivel uniestructural y sus respuestas son adecuadas. Seis refieren que Jorge tiene más oportunidades, pero no aclaran por qué; uno intenta dar las posibilidades que le favorecen a cada jugador pero no logra concretarlo; uno da una idea del nivel multiestructural: consideró el espacio muestral y trató de obtener los casos favorables de cada jugador, acertó en uno pero se equivocó en el segundo.

### 6.6.1. Niveles de pensamiento con respecto al contenido abordado en la actividad y la justificación dada a su respuesta

*Resumen.* La mayoría de los maestros presentaron contenidos que no tienen justificación adecuada con lo señalado en la actividad, aunque éstos son aspectos de probabilidad y que tratan de dar un argumento de este tipo sin lograrlo. Las nociones próximas se ubican en el nivel uniestructural, mencionan un elemento de la probabilidad y sus argumentos son congruentes pero muy concretos.

Con respecto al contenido que se trabaja en la actividad, lo que propone la propuesta oficial tiene que ver con la probabilidad de eventos, situación que puede estar bien orientada, además de permitir pensar en la identificación del espacio muestral o el análisis de resultados de un experimento aleatorio. Observemos las respuestas de los profesores.

**Cuadro 12:** Frecuencia y porcentaje de los niveles en que se ubicaron los argumentos de los maestros con respecto al contenido que (suponen) se trabaja en la actividad. Pregunta 10.

| NIVELES DE PENSAMIENTO | FRECUENCIA | %   |
|------------------------|------------|-----|
| No contestó            | 1          | 4   |
| Preestructural         | 13         | 52  |
| Uniestructural         | 11         | 44  |
| Multiestructural       | -          | 0   |
| Relacional             | -          | 0   |
| Total                  | 25         | 100 |

Los argumentos se ubicaron en los siguientes niveles

| NIVELES DE PENSAMIENTO | CARACTERÍSTICAS  |   |
|------------------------|------------------|---|
|                        | Contenido        | Argumento   |
|                        | M1: Probabilidad | M1: Forman parte del eje temático de probabilidad y azar. |

|                |  |   |
|----------------|--|---|
| Preestructural | <p>M2: Probabilidad</p> <p>M4: Probabilidad de eventos</p> <p>M5: Probabilidad</p> <p>M8: Identificación y realización de juegos en los que interviene el azar</p> <p>M11: Todos los anteriores ya mencionados</p> <p>M16: Comparación de dos eventos a partir de casos diferentes</p> <p>M19: Realización de juegos donde interviene el azar</p> <p>M12: No contestó</p> <p>M13: Problemas de combinatoria</p> <p>M20: Registro de los resultados de un juego de azar</p> <p>M24: Registro de resultados de experimentos de azar</p> <p>M25: Azar</p> | <p>M2: Es probabilidad y azar.</p> <p>M4: Porque es igualmente probable que gane cualquiera de los dos.</p> <p>M5: Porque hay igual probabilidad en los dos casos.</p> <p>M8: Al realizar la actividad se registrarán los resultados.</p> <p>M11: Porque se trabaja predicción y azar, mayor o menor probabilidad, el diagrama de árbol, registro, gráfica de eventos, etcétera.</p> <p>M16: Se comparan los eventos a partir del resultado que se obtiene.</p> <p>M19: Porque es un juego de probabilidades.</p> <p>M12: No contestó.</p> <p>M13: Al combinar los números de los dos dados se hacen las sumas.</p> <p>M.20: Porque los niños tienen que anotar en un registro las probabilidades del juego.</p> <p>M24: Porque se trata de registrar las veces que caigan los dados.</p> <p>M25: No se sabe.</p> |
|                | <p>M3: Identificación de mayor o menor probabilidad de eventos</p> <p>M6: Estimación de la probabilidad de un evento</p> <p>M7: Realizar experimentos aleatorios</p> <p>M9: Predicción y azar</p> <p>M10: Comparación de dos eventos a partir de resultados diferentes</p>   | <p>M3: Porque se comparan los resultados de los eventos.</p> <p>M6: Se anticipa la probabilidad de ganar.</p> <p>M7: Porque no sabemos que es lo que va a salir.</p> <p>M9: Hay más probabilidad de que gane Gabriela.</p> <p>M10: Nos ayuda a predecir algún evento determinado, pues con ello</p>   |

|                  |  |  |
|------------------|--|--|
| Uniestructural   | <p>M14: Realizar experimentos aleatorios</p> <p>M15: Experimentos que dependen del azar</p> <p>M17: Comparación de dos eventos a partir de casos favorables</p> <p>M18: Exponer ejemplos de experiencias aleatorias donde estudien los resultados posibles</p> <p>M21: Comparación de eventos a partir de casos favorables sin cuantificar su probabilidad</p> <p>M22: Identificación de la mayor o menor probabilidad de eventos</p> <p>M23: Predicción</p> | <p>se calcula la posibilidad de acertar el resultado.</p> <p>M14: Van a estimar el número que va a caer.</p> <p>M15: No sabemos qué pueda pasar.</p> <p>M17: Porque se hace la comparación en donde uno tiene más oportunidad de ganar.</p> <p>M18: Porque en este caso deben saber que uno de ellos tiene mayor posibilidad.</p> <p>M21: Tienen la misma probabilidad.</p> <p>M22: Tenemos que identificar la probabilidad de que gane uno de los dos.</p> <p>M23: Es una probabilidad de que sea así, pero no es seguro.</p> |
| Multiestructural | No hubo respuestas de este nivel   |  |
| Relacional       | No hubo respuestas de este nivel   |  |

## Resumen

Si bien sus respuestas consideran algún elemento de probabilidad, trece profesores se sitúan en el nivel preestructural; sus argumentos son incongruentes y no guardan relación con la actividad; cuatro se refieren a la probabilidad; tres al registro; dos, a juegos de azar; uno, a la comparación; uno, a la combinatoria; uno, al azar; uno da una idea descontextualizada, y uno señala la mayor o menor probabilidad.

Once maestros caen en el nivel uniestructural, al considerar en el contenido una idea relacionada con la probabilidad y sus justificaciones se relacionan mínimamente con la actividad, además incluyen el azar.

Un profesor no contestó por lo que no se le ubicó en ningún nivel de pensamiento.

### 6.7. Pregunta 11: Registro de experimentos aleatorios

*Resumen.* En sus respuestas los maestros no toman en cuenta la posibilidad de que los jugadores empaten en el juego, sólo piensan que es posible ganar o perder el juego, así como la inclusión de que se tienen dos oportunidades: que salga águila o que salga sol, no muestran la evidencia de tomar en cuenta el número de resultados posibles para dar sus respuestas.

Sin embargo, tienen la idea de que no siempre se tendrá un ganador, que todos tienen oportunidad de ganar y sus argumentos se centran en que existe la misma probabilidad y, por la presencia del azar, no dan explicaciones más finas que consideren los aspectos implícitos en la actividad.

PREGUNTA 11: ¿Algunas veces has jugado “disparejo”? Se juega entre tres compañeros; cada uno tira una moneda al aire y ve si cae águila o sol. Gana el que obtenga el resultado diferente de los otros dos.

¿Crees que siempre habrá un ganador? \_\_\_\_\_ (1) \_\_\_\_\_ ¿Por qué?  
 \_\_\_\_\_ (2) \_\_\_\_\_ ¿Crees que los tres jugadores tienen las mismas oportunidades de ganar? \_\_\_\_\_ (3) \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_ (4) \_\_\_\_\_ [Matemáticas.

Sexto grado, México, SEP, 2001, p. 36.]

Se trata de identificar las oportunidades que se tienen para ganar. Por tanto, la respuesta esperada es que no siempre habrá un ganador, porque las tres monedas pueden caer de un mismo lado (águila o sol), así como que se reconozca que si es un juego limpio, los tres tienen las mismas posibilidades de ganar.

Las nociones implícitas son: espacio muestral, azar, experimento aleatorio, casos favorables, estimación de resultados.

Los niveles de pensamiento se ubican de la siguiente manera:

| PREESTRUCTURAL  | UNIESTRUCTURAL  | MULTIESTRUCTURAL   | RELACIONAL  |
|---|---|--|---|
| <p>⤴ Las respuestas que no consideran la presencia del azar.</p> <p>⤴ Ideas confusas.</p> | <p>⤴ Toman en cuenta alguno de estos criterios: espacio muestral, azar, casos</p> | <p>⤴ Incluyen por lo menos dos de estos criterios: espacio muestral, azar, casos favorables,</p> | <p>⤴ Razonamientos adecuados y argumentos precisos.</p> |

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  | favorables, estimación de resultados, experimento aleatorio. | estimación de resultados, experimento aleatorio. |  |
|--|--|--|--|

Con respecto a las respuestas dadas por los maestros en la actividad se observó:

|             | <i>Correctas</i> |     | APROXIMADAS |     | INCORRECTAS |    | SIN RESPUESTA |    |
|-------------|------------------|-----|-------------|-----|-------------|----|---------------|----|
| Pregunta 11 | 12               | 48% | 12          | 48% | 0           | 0% | 1             | 4% |

Las justificaciones dadas a sus respuestas se ubicaron de la siguiente manera:

**Cuadro 13.** Frecuencia y porcentaje de los argumentos en la pregunta 11.

| NIVELES DE PENSAMIENTO | FRECUENCIA | %   |
|------------------------|------------|-----|
| No contestó            | 1          | 4   |
| Preestructural         | -          | 0   |
| Uniestructural         | 23         | 92  |
| Multiestructurales     | 1          | 4   |
| Relacional             | -          | 0   |
| Total                  | 25         | 100 |

Los argumentos se ubicaron en los siguientes niveles:

| NIVEL DE PENSAMIENTO | CARACTERÍSTICAS   |
|----------------------|---|
| Preestructural       | No hubo respuestas de este nivel.   |
| Uniestructural       | M3: No, porque a veces caen todos iguales.<br>Sí, porque todos tienen la misma probabilidad y cualquiera puede ganar.<br>M5: No; se puede dar el caso de que caigan iguales.<br>Sí, porque a lo mejor a los otros dos les sale diferente.<br>M7: No, porque a lo mejor los tres dicen lo mismo.<br>Sí, porque todos tienen un turno para tirar y tienen la misma oportunidad. |

|                  |   |
|------------------|---|
|                  | <p>M10: No, porque hay la misma posibilidad entre que caiga parejo o disparejo.<br/>Sí, porque todos tienen la oportunidad de lanzar su moneda.</p> <p>M11: No, pueden caer las tres monedas en una sola figura.<br/>Sí, porque la probabilidad en cada uno de ellos puede ser la misma.</p> <p>M15: No; las tres monedas pueden caer águila o sol.<br/>Sí; los tres tienen las mismas posibilidades.</p> <p>M16: No; pueden caer tres águilas o soles en las tres monedas.<br/>Sí; por las dos opciones que tienen ambos jugadores.</p> <p>M1: No; son las mismas posibilidades para los tres.<br/>Sí; tienen las mismas posibilidades.</p> <p>M6: Sí; alguien de ellos tendrá la suerte de tirar disparejo.<br/>Sí; los tres tienen las mismas posibilidades.</p> <p>M8: Sí; siempre cae diferente cara de la moneda en cada tiro que se hace.<br/>Sí, porque el juego de azar determina el resultado.</p> <p>M13: Sí; a dos niños siempre les caerá el mismo lado de la moneda.<br/>Sí; la probabilidad es la misma.</p> |
| Multiestructural | No hubo respuestas de este nivel.   |
| Relacional       | No hubo respuestas de este nivel.   |

### Resumen

En veinticuatro docentes se detectan ideas de tipo uniestructural: doce responden correctamente, mientras que doce lo hacen de manera parcialmente correcta, en particular, confunden algunas ideas pero todos señalan las mismas oportunidades; no consideran el empate, sólo al ganador. Ninguno de los maestros justificó sus respuestas mediante el uso del espacio muestral; no reconocen, que puede existir un ganador, un perdedor y la posibilidad de empate en el juego.

Un profesor no respondió por lo que no se le ubicó en ningún nivel de pensamiento.

### 6.7.1. Niveles de pensamiento con respecto al contenido abordado en la actividad y la justificación dada a su respuesta

*Resumen.* La mayoría de los profesores ubicó el contenido acerca de la probabilidad, incluyen en sus justificaciones la presencia del azar y sus argumentos son generales. Asimismo, señalan que se trabaja el azar pero no indican cómo, o simplemente ofrecen argumentos de tipo conceptual.

Con respecto al contenido que se aborda en la actividad —la propuesta oficial señala que es el registro de experimentos aleatorios—, pensamos que también pueden inferirse el espacio muestral y la cuantificación de la probabilidad en un experimento aleatorio. Los profesores orientaron sus respuestas como se muestra.

**Cuadro 14:** Frecuencia y porcentaje de los niveles en que se ubicaron los argumentos de los maestros con respecto al contenido que (suponen) se trabaja en la actividad. Pregunta 11.

| NIVELES DE PENSAMIENTO | FRECUENCIA | %   |
|------------------------|------------|-----|
| No contestó            | 1          | 4   |
| Preestructural         | 4          | 16  |
| Uniestructural         | 20         | 80  |
| Multiestructural       | -          | 0   |
| Relacional             | -          | 0   |
| Total                  | 25         | 100 |

Los argumentos se ubicaron en los siguientes niveles:

| NIVELES DE PENSAMIENTO | CARACTERÍSTICAS   |  |
|------------------------|---|--|
|                        | Contenido   | Argumento  |
| Preestructural         | M1: Probabilidad y azar<br>M2: Probabilidad<br>M9: Predicción y azar<br>M16: Registro de experimentos | M1: No contestó.<br>M2: Es parte del eje temático.<br>M9: Siempre habrá un ganador.<br>M16: Por el control que se debe |

|                | aleatorios   | llevar al momento de la realización de la actividad.  |
|----------------|--|---|
| Uniestructural | <p>M3: Experimentos aleatorios</p> <p>M7: Realización de juegos aleatorios</p> <p>M11: Experimentos aleatorios</p> <p>M14: Realización de juegos aleatorios</p> <p>M18: Experimentar situaciones aleatorias con un número pequeño de resultados con la misma probabilidad</p> <p>M21: Experimentos aleatorios</p> <p>M4: Probabilidad de eventos</p> <p>M5: Probabilidad</p> <p>M6: Estimación de probabilidades de un evento</p> <p>M8: Registro de los resultados de un juego de azar</p> <p>M10: Registro de experimentos aleatorios</p> <p>M16: Registro de experimentos aleatorios</p> <p>M17: Registro de experimentos aleatorios</p> <p>M20: Registro de los resultados de un juego de azar</p> <p>M13: Eventos en donde interviene el azar</p> | <p>M3: Porque los niños registran los resultados.</p> <p>M7: Porque son juegos en los que no sabemos qué va a suceder.</p> <p>M11: Porque no se puede predecir un resultado.</p> <p>M14: Porque no se sabe el posible resultado.</p> <p>M18: Experimentar situaciones aleatorias con un número pequeño de resultados con la misma probabilidad</p> <p>M21: Se juega lanzando una moneda.</p> <p>M4: Porque son probables los eventos.</p> <p>M5: Porque son probables los tres eventos.</p> <p>M6: En él se estiman las posibilidades que tiene cada uno de los jugadores.</p> <p>M8: Hay que realizar el juego del disparejo para conocer resultados.</p> <p>M10: No se sabe qué va a suceder.</p> <p>M16: Por el control que se debe llevar al momento de la realización de la actividad.</p> <p>M17: Se registran los datos para ver quién ganó.</p> <p>M20: Porque se tienen que anotar los resultados para saber quién va a ganar.</p> <p>M13: Al tirar la moneda y caer águila o sol es un evento azaroso</p> |

|                  |  |  |
|------------------|--|--|
|                  | M15: Azar<br>M19: Identificación y realización de juegos donde interviene el azar<br>M23: Azar<br>M25: Azar<br>M22: Identificación de la mayor o menor probabilidad de eventos<br>M24: Eventos más probable y menos probables. | M15: Depende del azar.<br>M19: No contestó.<br>M23: No sabemos quién va a ser el ganador.<br>M25: Porque es cuestión de suerte.<br>M22: Se busca quién tiene la probabilidad de ganar.<br>M24: Porque en los eventos azarosos nunca se sabe qué va a caer. |
| Multiestructural | No hubo respuestas de este nivel   |  |
| Relacional       | No hubo respuestas de este nivel   |  |

## Resumen

Cuatro maestros se sitúan en el nivel preestructural, señalan contenidos relacionados con el azar pero no con la actividad, sus ideas son confusas.

Veinte profesores caen en el nivel uniestructural, seis aluden a experimentos aleatorios y justifican argumentando que tienen la misma probabilidad, porque registran resultados, no se sabe qué sucede o dan un ejemplo; cuatro señalan el registro de resultados y justifican mediante la consideración de que es un control; cuatro mencionan que son situaciones donde interviene el azar y justifican con ejemplos o simplemente enuncian la presencia del azar; tres orientan el contenido a mayor o menor probabilidad y justifican con que tienen la mayor probabilidad y la presencia del azar; dos enuncian la probabilidad y justifican con la idea de que son probables, y uno se refiere a la estimación de resultados. Estos profesores señalan sólo un aspecto de la probabilidad, pero sus argumentos no son completos, algunos indican qué pero no mencionan cómo, y viceversa.

Un profesor no contestó por lo que no se le ubicó en ningún nivel de pensamiento.

### 6.8. Pregunta 12: Identificación de eventos seguros, azarosos e imposibles

*Resumen.* La mayoría de los profesores tuvieron dudas para identificar los eventos seguros. Algunos consideran que un evento imposible es seguro o bien azaroso. Nos parece, en definitiva, que no hay una interpretación adecuada de evento seguro, y lo que hacen es elegir de acuerdo con lo que ellos creen que es un evento seguro. Pasan por alto su característica central: tener la seguridad de que ocurra la situación.

PREGUNTA 12: De las siguientes situaciones, marca con una cruz aquellas de las que estés seguro del resultado:

1. Que salga águila cuando se lanza una moneda ..... ( )
2. Que saques una canica verde de una urna que contiene sólo canicas blancas ..... ( )
3. Que llueva el domingo ..... ( )
4. Que saques una canica blanca de una urna que sólo contiene canicas blancas ..... ( )
5. Que saques una canica verde de una urna que contiene canicas verdes y blancas ..... ( )
6. Que salga 3 al tirar un dado ..... ( )
7. Que haya clases mañana ..... ( )
8. Que salga un número entre 1 y 6 al tirar un dado ..... ( )
9. Que al sacar 3 canicas de una urna que tiene canicas verdes y azules, 2 sean del mismo color ..... ( )

[*Matemáticas. Sexto grado*, México, SEP, 2001, p. 71.]

Se trata de que los profesores identifiquen los eventos deterministas de un conjunto de eventos que se les presenta (eventos azarosos y eventos imposibles, por ejemplo). Lo que se espera es que los maestros reconozcan claramente aquellos eventos donde se tiene toda la seguridad de qué va a suceder. La respuesta esperada es que señalen el evento 4 y el 8, los cuales son efectivamente eventos deterministas.

Las nociones implícitas son: eventos deterministas, evento seguro, evento imposible, evento azaroso.

Los niveles de pensamiento se ubican de la siguiente manera:

| <i>Preestructural</i>  | <b>UNIESTRUCTURAL</b>  | <b>MULTIESTRUCTURAL</b>  | <b>RELACIONAL</b>                                |
|--|--|--|--|
| ^ No señalan ningún evento seguro.<br>^ Confunden evento seguro con azaroso. | ^ Identifican las situaciones seguras.<br>^ Señalan un evento determinista y ofrecen una explicación mínima. | ^ Se refieren a eventos seguros como deterministas, pero no profundizan en su explicación. | ^ Razonamientos adecuados y argumentos precisos. |

Con respecto a las respuestas dadas por los maestros en la actividad se observó:

|             | <b>CORRECTAS</b> |     | <b>APROXIMADAS</b> |     | <b>INCORRECTAS</b> |    | <b>SIN RESPUESTA</b> |    |
|-------------|------------------|-----|--------------------|-----|--------------------|----|----------------------|----|
|             |                  |     |                    |     |                    |    |                      |    |
| Pregunta 12 | 5                | 20% | 20                 | 80% | -                  | 0% | -                    | 0% |

Las justificaciones dadas a sus respuestas se ubicaron de la siguiente manera:

**Cuadro 15.** Frecuencia y porcentaje de los argumentos en la pregunta 12.

| <b>NIVELES DE PENSAMIENTO</b> | <b>FRECUENCIA</b> | <b>%</b> |
|-------------------------------|-------------------|----------|
| No contestó                   | -                 | 0        |
| Preestructural                | -                 | 0        |
| Uniestructural                | 20                | 80       |
| Multiestructural              | 5                 | 20       |
| Relacional                    | -                 | 0        |
| Total                         | 25                | 100      |

Los argumentos se ubicaron en los siguientes niveles:

| <b>NIVELES DE PENSAMIENTO</b> | <b>CARACTERÍSTICAS</b>  |
|-------------------------------|---|
| Preestructural                | Ningún profesor se ubicó en este nivel.   |
| Uniestructural                | M1:<br>(1):<br>(2): X = Que saques una canica verde de una urna que contiene sólo |

|  |   |
|--|---|
|  | <p>canicas blancas.</p> <p>(3):</p> <p>(4): <math>X =</math> Que saques una canica blanca de una urna que sólo contiene canicas blancas.</p> <p>(5):</p> <p>(6):</p> <p>(7):</p> <p>(8): <math>X =</math> Que salga un número entre 1 y 6 al tirar un dado.</p> <p>(9):</p> <p>M3:</p> <p>(1):</p> <p>(2): <math>X =</math> Que saques una canica verde de una urna que contiene sólo canicas blancas.</p> <p>(3):</p> <p>(4): <math>X =</math> Que saques una canica blanca de una urna que sólo contiene canicas blancas.</p> <p>(5):</p> <p>(6):</p> <p>(7): <math>X =</math> Que haya clases mañana.</p> <p>(8):</p> <p>(9):</p> <p>M6:</p> <p>(1):</p> <p>(2):</p> <p>(3):</p> <p>(4): <math>X =</math> Que saques una canica blanca de una urna que sólo contiene canicas blancas.</p> <p>(5):</p> <p>(6):</p> <p>(7): <math>X =</math> Que haya clases mañana.</p> <p>(8): <math>X =</math> Que salga un número entre 1 y 6 al tirar un dado.</p> <p>(9):</p> <p>M9:</p> <p>(1): <math>X =</math> Que salga águila cuando se lanza una moneda.</p> <p>(2):</p> <p>(3):</p> <p>(4): <math>X =</math> Que saques una canica blanca de una urna que sólo contiene</p> |
|--|---|

|  |   |
|--|---|
|  | <p>canicas blancas.</p> <p>(5):</p> <p>(6):</p> <p>(7): <math>X =</math> Que haya clases mañana.</p> <p>(8): <math>X =</math> Que salga un número entre 1 y 6 al tirar un dado.</p> <p>(9):</p> <p>M10:</p> <p>(1):</p> <p>(2):</p> <p>(3):</p> <p>(4): <math>X =</math> Que saques una canica blanca de una urna que sólo contiene canicas blancas.</p> <p>(5):</p> <p>(6):</p> <p>(7):</p> <p>(8): <math>X =</math> Que salga un número entre 1 y 6 al tirar un dado.</p> <p>(9): <math>X =</math> Que al sacar 3 canicas de una urna que tiene canicas verdes y azules, 2 sean del mismo color.</p> <p>M19:</p> <p>(1): <math>X =</math> Que salga águila cuando se lanza una moneda.</p> <p>(2):</p> <p>(3):</p> <p>(4): <math>X =</math> Que saques una canica blanca de una urna que sólo contiene canicas blancas.</p> <p>(5):</p> <p>(6):</p> <p>(7): <math>X =</math> Que haya clases mañana.</p> <p>(8): <math>X =</math> Que salga un número entre 1 y 6 al tirar un dado.</p> <p>(9): <math>X =</math> Que salga un número entre 1 y 6 al tirar un dado.</p> <p>M18:</p> <p>(1):</p> <p>(2):</p> <p>(3):</p> <p>(4): <math>X =</math> Que saques una canica blanca de una urna que sólo contiene canicas blancas.</p> <p>(5):</p> <p>(6):</p> |
|--|---|

|                  |   |
|------------------|---|
|                  | (7):<br>(8):<br>(9):  |
| Multiestructural | M4:<br><br>(1):<br><br>(2):<br><br>(3):<br>(4): $X =$ Que saques una canica blanca de una urna que sólo contiene canicas blancas.<br><br>(5):<br><br>(6):<br><br>(7):<br>(8): $X =$ Que salga un número entre 1 y 6 al tirar un dado.<br><br>(9): |
| Relacional       | No hubo respuestas de este nivel.   |

### Resumen

Veinte maestros mencionan ideas de tipo uniestructural, ya que en sus señalamientos toman en cuenta los eventos seguros, sin embargo, los confunden con otros; dieciséis confunden el evento seguro con lo azaroso; dos confunden lo seguro con lo imposible; uno confunde seguro con azaroso y con imposible; uno sólo identificó un evento seguro, le faltó otro.

Cinco profesores se sitúan en el nivel multiestructural, esto es, señalan correctamente los eventos seguros. Las confusiones de los profesores se relacionan fundamentalmente con el desconocimiento de lo que significa el evento seguro, por ello tratan de reflexionar —sin éxito— acerca de las situaciones presentadas.

#### 6.8.1. Niveles de pensamiento con respecto al contenido abordado en la actividad y la justificación dada a su respuesta

*Resumen.* Un amplio porcentaje de profesores relaciona la actividad con contenidos que pertenecen al azar propiamente, pero no infieren que éstos sean

diferentes de los eventos seguros, ni los caracterizan. Los contenidos que tienen una vinculación con la actividad se refieren a hechos en donde existe la seguridad de que sucederán, y hacen una comparación con los azarosos, es decir: aquellos en los cuales no se sabe qué va a ocurrir. Ninguno asocia el evento seguro con un evento determinista.

La lección de la cual se seleccionó la actividad señala que se trabaja el contenido de registro de experimentos aleatorios; sin embargo, consideramos que la actividad hace énfasis en el análisis e identificación de eventos, lo que revela que se deben reconocer eventos de tipo determinista, azaroso e imposibles. La respuesta esperada tiene que ver precisamente con la identificación de eventos deterministas. Obsérvense cuáles son las respuestas de los profesores.

**Cuadro 16:** Frecuencia y porcentaje de los niveles en que se ubicaron los argumentos de los maestros con respecto al contenido que (suponen) se trabaja en la actividad. Pregunta 12.

| NIVELES DE PENSAMIENTO | FRECUENCIA | %   |
|------------------------|------------|-----|
| No contestó            | 1          | 0   |
| Preestructural         | 12         | 48  |
| Uniestructurales       | 6          | 24  |
| Multiestructurales     | 6          | 24  |
| Relacionales           | -          | 0   |
| Total                  | 25         | 100 |

Los argumentos se ubican en los siguientes niveles:

| NIVELES DE PENSAMIENTO | CARACTERÍSTICAS   |   |
|------------------------|---|---|
|                        | Contenido   | Argumento   |
| Preestructural         | M3: Experimentos cuyo resultado depende del azar<br>M4: Probabilidad de eventos<br>M6: Registro de resultados de experimentos de azar | M3: Porque se trabaja con la predicción.<br>M4: Porque es probable que ocurran los eventos.<br>M6: En el se puede saber si interviene el azar o no. |

|                  |  |  |
|------------------|--|--|
|                  | <p>M8: Juegos combinatorios</p> <p>M9: Predicción y azar</p> <p>M14: Identificación de la mayor o menor probabilidad de los eventos</p> <p>M16: Comparación de diversos eventos a partir de dos casos favorables sin cuantificar su probabilidad.</p> <p>M20: Uso de las expresiones <i>más probable</i> y <i>menos probable</i> al realizar y analizar juegos de azar</p> <p>M21: Diversos experimentos aleatorios y probabilidad</p> <p>M24: Eventos más probables y menos probables</p> | <p>M8: Al mismo tiempo que predecimos un evento interviene el azar.</p> <p>M9: Hay probabilidad.</p> <p>M14: Porque existe una mayor probabilidad de estimar el resultado por sus características.</p> <p>M16: Por algunas situaciones que no tienen probabilidad, si el evento es el mismo que se trata, * Canicas verdes, sólo blancas.</p> <p>M20: Porque son juegos de azar.</p> <p>M21: Hay lanzamiento de dados y monedas, probabilidad de un evento.</p> <p>M24: Porque algunas cuestiones son más probables y otras menos.</p> |
| Uniestructural   | <p>M1: Analizar información de eventos</p> <p>M2: Análisis de eventos de azar y no son azar</p> <p>M10: Comparación de eventos sin comparación de resultados</p> <p>M17: Comparación de dos eventos a partir del número de casos favorables sin cuantificar su probabilidad</p> <p>M23: Predicción</p> <p>M25: Predicción</p>  | <p>M1: Analizar las posibilidades del acierto o no acierto.</p> <p>M2: Hay algunos resultados seguros y otros no.</p> <p>M10: Porque se plantean varios eventos azarosos o seguros.</p> <p>M17: Porque hay casos en los que se puede saber el resultado.</p> <p>M23: En algunos casos se sabe lo que va a suceder.</p> <p>M25: Porque estamos seguros de lo que va a suceder.</p>  |
| Multiestructural | <p>M7: Analizar situaciones aleatorias o determinantes</p>   | <p>M7: Porque estamos analizando situaciones en la que estamos seguros qué sucede.</p>   |

|            |  |  |
|------------|--|--|
|            | <p>M11: Experimento aleatorio (determinismo y azar)</p> <p>M12: Predicción de hechos y sucesos en situaciones sencillas en las que no intervienen el azar</p> <p>M13: Eventos en donde no influye el azar</p> <p>M15: Resultados más probables y posibles</p> <p>M18: Analizar situaciones aleatorias o determinantes</p> <p>M19: Identificación y realización de juegos donde no interviene el azar</p> | <p>M11: Porque hay eventos en los que se pueden determinar anticipadamente los resultados, y otros son producidos por el azar.</p> <p>M12: En el resultado de dar las respuestas correctas es porque la predicción tiene que ser verdadera.</p> <p>M13: Todas las situaciones tienen una seguridad.</p> <p>M15: Se pide estar seguro del resultado.</p> <p>M18: Existen enunciados, en el que antes de realizar el experimento, se sabe el resultado.</p> <p>M19: Porque sabemos o nos adelantamos al resultado.</p> |
| Relacional | No hubo respuestas de este nivel   |  |

### Resumen

Doce profesores se hallan en el nivel preestructural, puesto que no toman en cuenta el evento seguro. Mencionan alguna situación de probabilidad, pero ésta se aleja del propósito de la actividad; aluden al azar, la probabilidad, el registro, la combinatoria, la mayor o menor probabilidad, la comparación o predicción, aunque no relacionan dichos conceptos con la actividad; en sus justificaciones subyace la idea de la probabilidad, pero no son capaces de profundizar en ella.

Seis maestros caen en el nivel uniestructural, dos señalan el análisis de la información como vía para identificar eventos y justifican la búsqueda del evento seguro; dos se refieren a la comparación para identificar los eventos seguros; uno menciona el no azar para identificar el evento seguro, y uno señala la predicción para buscar esta clase de eventos.

En seis docentes se identifican ideas de tipo multiestructural: se refieren a los eventos deterministas y enuncian justificaciones que implican el reconocimiento de los eventos seguros.

Un profesor no contestó por lo que no se le ubicó en ningún nivel de pensamiento.

### 6.9. Ideas implícitas en las actividades que sugieren los profesores para abordar la probabilidad

A fin de tener una idea general sobre las actividades que sugieren los profesores para abordar la actividad, se identificó, en primer lugar, si existía relación entre la actividad que sugieren y la actividad propuesta, es decir, si las actividades que construyeron se relacionan con la probabilidad y si, además, pueden trabajarse en el aula con los alumnos.

De acuerdo con estas ideas, consideramos lo siguiente:

- ↗ NIVEL PREESTRUCTURAL: actividades que no tienen relación con el contenido.
- ↗ NIVEL UNISTRUCTURAL: actividades que tienen relación con el contenido.

**Cuadro 17:** Concentración de frecuencia de los niveles según la pregunta.

| NÚMERO DE PREGUNTA | NIVELES DE PENSAMIENTO |    |               |    |
|--------------------|------------------------|----|---------------|----|
|                    | PREESTRUCTURAL         | %  | UNISTRUCTURAL | %  |
| 1                  | 4                      | 16 | 21            | 84 |
| 2                  | 6                      | 24 | 19            | 76 |
| 3                  | 4                      | 16 | 21            | 84 |
| 4                  | 7                      | 28 | 18            | 72 |
| 5                  | 1                      | 4  | 24            | 96 |
| 6                  | 3                      | 12 | 22            | 88 |
| 7                  | 6                      | 24 | 19            | 76 |
| 8                  | 6                      | 24 | 19            | 76 |
| 9                  | 10                     | 40 | 15            | 60 |
| 10                 | 11                     | 44 | 14            | 56 |
| 11                 | 6                      | 24 | 19            | 76 |
| 12                 | 5                      | 20 | 20            | 80 |
| Total              | 69                     | 23 | 231           | 77 |

### 6.9.1. Actividades propuestas sin relación con el contenido. Pensamiento Preestructural

En el nivel preestructural se encuentran las actividades propuestas que no se relacionan con los contenidos implícitos en las actividades del cuestionario.

En las respuestas dadas en el cuestionario sobre la construcción de actividades, se aprecia que los contenidos con mayor dificultad son: “*análisis de resultados posibles y análisis de casos favorables*”. Tales contenidos se infieren de las preguntas 9 y 10. El número de maestros que tuvieron dificultades fue: diez en la pregunta 9, y once en la pregunta 10. Las respuestas enunciadas en el cuestionario se asemejan a las siguientes:

P9-M15: Lamento decir que no lo he trabajado.

P9-M21: Llevando una lista de resultados posibles.

P10-M10: Romper un globo rojo o verde con un dardo si en un tablero hay 30 globos de cada color.

P10-M17: Lanzando 2 dados un niño sumará los impares, y otro, los números pares, para ver quién obtiene más puntos.

A partir de las ideas de los profesores puede deducirse que no logran construir una actividad, tampoco se observa la intención de mostrar una relación con el azar, proponen únicamente una idea incongruente. M10 pretende relacionarla con el azar, sin embargo, sólo se refiere a una lista de resultados posibles que no indica de qué son, por lo que su idea se pierde. M17 pondera más una situación aritmética que de azar, hace hincapié en la suma con la finalidad de conocer quién obtiene más puntos, por lo que no hay idea de probabilidad.

En el contenido “Las expresiones *más probable* y *menos probable*”, implícito en las preguntas 3 y 4, los maestros también tuvieron dificultades; en este caso encontramos que cuatro profesores afrontaron obstáculos en la pregunta 3, y siete en la pregunta 4. Las ideas enunciadas en el cuestionario son semejantes a éstas:

P3-M22: Experimentando con lanzar ruedas, a ver cuántos tiros inserta.

P3-M5: Registrar veinte veces los resultados de arrojar una moneda al aire.

P4-M6: Jugar “Serpientes y escaleras”, y registrar las veces que cada jugador utilizó las escaleras y las serpientes.

P4-M23: Jugando al azar tipo de lotería y en equipo de cinco niños.

Las ideas presentadas no guardan relación con el azar o la probabilidad; tampoco existe la intención de tomar en cuenta las expresiones implicadas en el contenido. M22 y M5 destacan la experimentación y el registro pero no plantean alguna finalidad, al igual M6 y M23, quienes proponen juegos que no logran vincularlos con las expresiones, ni con la probabilidad.

El contenido “*Registro de resultados de experimentos aleatorios*” se involucró en las preguntas 1 y 2. En éstas se encontró que cuatro profesores tuvieron dificultades con la pregunta 1, y seis maestros con la pregunta 2. Sus ideas fueron parecidas a las siguientes:

P1-M5: No recuerdo por qué estos contenidos se trabajan en cuarto grado y yo sólo trabajo con el primer ciclo.

P2-M22: Con tarjetas y una bolsa, anotar todos los números pares y nones, que digan qué número sacaron o para construir números ejemplo (18).

P2-M6: Jugar con una *pirinola* en equipo y hacer un registro de las veces que se hizo girar la *pirinola* y en qué número cayó.

Observamos que M5 no logra diseñar la actividad y anota una justificación del porqué no puede hacerlo; dicha razón no es adecuada, ya que en la presentación de la actividad por lo menos podría haberlo intentado. M22 presenta una actividad que tiene que ver más con una operación aritmética que con la probabilidad. M6 plantea un juego carente de finalidad o para qué va a ser utilizado tal juego. Lo que sí puede deducirse es que no tiene relación con la probabilidad.

Respecto del contenido “*Uso de diagramas de árbol para el conteo de opciones*”, derivado de la pregunta 6 del cuestionario, encontramos que tres maestros enfrentaron dificultades para responder la pregunta. Las respuestas fueron análogas a las siguientes:

P6-M9: Planteando el valor unitario cómo procedimiento.

P6-M6: Se les pediría [a los alumnos] que pintaran unas casas de cinco colores y después se les preguntaría de qué otra forma pueden pintar las demás utilizando los mismos colores.

En las respuestas dadas por los profesores, observamos que su planteamiento es únicamente una idea que, definitivamente, no se orienta a la probabilidad. M9, al responder “planteando el valor unitario como procedimiento”, manifiesta una situación desvinculada por completo con el contenido de probabilidad que se propone trabajar en la actividad (el que se refiere al conteo de opciones); además, no explica a qué se refiere con su idea o cómo involucrarla en la actividad de probabilidad.

El contenido “*Experimentos aleatorios*” está implícito en las preguntas 7 y 8. En las respuestas encontramos que a seis docentes se les dificultó responder la pregunta 7, y a seis la pregunta 8. Sus respuestas fueron como las siguientes:

P7-M11: Es interesante y resulta satisfactorio si se activan los conocimientos que ya tienen los alumnos al respecto en experiencias de su vida cotidiana; sólo se tienen que buscar las estrategias adecuadas para rescatar esos conocimientos y hacerlos más sistemáticos.

P8-M22: Con pelotas.

P8-M18: Se indica que habrá mayor posibilidad de que salgan los papelitos marcados.

Como podemos apreciar las ideas expresadas por los maestros no tienen relación con la probabilidad o, por lo menos, no la explican como tal; M11 hace referencia a los conocimientos previos y M22 al uso de algún material. Por su parte, M18 involucra alguna idea de probabilidad, pero no indica concretamente una actividad particular.

El contenido “*Registro de experimentos aleatorios*” se involucró en las actividades propuestas en las preguntas 11 y 12 del cuestionario, en el análisis de las respuestas encontramos que, 6 maestros mostraron dificultades en la pregunta 11, y 5 profesores en la pregunta 5. Sus respuestas fueron como las que siguen:

P11-M7: Lo podría trabajar con los dados.

P11-M16: En un bote transparente se ponen tres canicas: 2 rojas y una blanca; en cada juego el que saca la blanca va perdiendo, hasta llegar al final de tiradas que se proponga; el equipo puede ser 10, 20, 30 veces.

|        |          |
|--------|----------|
| Azul   | 1 punto  |
| Azul   | 1 punto  |
| Blanca | 0 puntos |

P12-M21: Con monedas, canicas y dados.

En las respuestas de los maestros observamos que señalan el uso de algún material, pero no relacionan adecuadamente su uso con el contenido propuesto, que tiene que ver con el registro de resultados de experimentos aleatorios. En este sentido, la idea no se vincula con lo propuesto en el contenido.

*Resumen.* En general, las ideas presentadas por los profesores no se relacionan con la probabilidad y, por tanto, las sugerencias no recuperan, en absoluto, el sentido que se le dio a cada una de las actividades en el cuestionario; es más, en algunas ideas sólo se encuentra una justificación de por qué no pueden sugerir una actividad. Creemos, empero, que cualquier maestro de primaria debería responder acertadamente este tipo de situaciones.

Un buen número de estos profesores desconocen muchas de las actividades que se pueden tomar en cuenta en la enseñanza de la probabilidad en la escuela primaria. Una consecuencia de lo anterior es que los profesores no pudieron ofrecer una sugerencia a partir de la actividad que se les proporcionó en el cuestionario.

### **6.9.2. Actividades propuestas relacionadas con el contenido. Pensamiento Uniestructural**

Ubicamos en este nivel de pensamiento las actividades propuestas por los maestros relacionadas con los contenidos incluidos en las actividades del cuestionario.

La mayoría de los maestros establecieron una relación entre la actividad que sugieren y la actividad presentada en el cuestionario, consideramos que esto fue posible debido a que gran parte de ellos tomó como modelo el planteamiento de la actividad o, simplemente, comentó que haría una actividad similar a ella. A continuación presentamos algunas sugerencias dadas por los profesores.

a) En el contenido *“Registro de los resultados de experimentos aleatorios”*, implicado en las preguntas 1 y 2, encontramos que veintiún profesores enunciaron, en su respuesta a la pregunta 1, una idea relacionada con el contenido propuesto. Y en la pregunta 2 hallamos que diecinueve maestros relacionaron sus respuestas con el contenido. Las ideas fueron como las que siguen:

P1-M7: Lo trabajaría con canicas de diferentes colores (pero un color va a predominar más) para registrar qué color se va a repetir más.

P1-M1: Realizando las actividades que sugieren los ficheros o los libros de texto, echando en una caja un número determinado de corcholatas.

P2-M2: De igual forma y registrando los datos en una gráfica.

P2-M11: En la lección 14, “El juego al disparejo”, viene un ejercicio. Antes, se le pide al alumno que en binas hagan algo parecido con su respectivo registro. El propósito es que comprueben algo que ya conocen y lo hagan de una forma sistemática, para aplicarlo en los juegos de azar.

b) En el contenido *“Las expresiones más probable y menos probable”*, propuesto en el trabajo de las preguntas 3 y 4. Al revisar las respuestas encontramos que veintiún profesores respondieron adecuadamente la pregunta 3, y dieciocho maestros hicieron lo mismo con la pregunta 4. A continuación presentamos algunas ideas detectadas en las respuestas de los profesores.

P3-M3: Igualmente con canicas o fichas de colores que se introducen en una caja.

P3-M21: Repitiendo el experimento un determinado número de veces y llevando un registro.

P4-M9: Realizando la actividad.

P4-M14: Pidiéndoles a los niños que lleven dos tipos de objeto de dos colores diferentes, los depositen en la caja y saquen uno; deben registrar en una tabla según las veces que salgan.

c) El contenido *“Problemas de combinatoria”*, sugerido en la actividad 5 del cuestionario. Se encontró que veinticuatro maestros enunciaron una actividad relacionada con el contenido propuesto en la pregunta. Entre éstas tenemos:

P5-M1: Usando vestidos y blusas de diferentes colores u otros grupos de objetos, animales, etc., que permitan la realización de diagramas de árbol y registrar los eventos.

P5-M6: Se les pediría que hicieran combinaciones de faldas y blusas de diferentes colores para saber cuántas mudas pueden formar.

P5-M15: Formando parejas con los alumnos del salón, y registrando cuántas parejas diferentes formamos.

d) En el contenido *“Uso de diagramas de árbol para el conteo de opciones”*, implícito en la pregunta 6 del cuestionario. Se encontró que veintidós profesores relacionaron la actividad que propusieron con el contenido de la actividad del cuestionario. Entre ellas podemos enunciar:

P6-M3: Con dibujos, utilizando la combinación de los posibles platillos.

P6-M14: Agrupando alimentos y utilizando el diagrama de árbol.

P6-M16: Primero combinar los alimentos y, después, alimentos con ensaladas; posteriormente, alimentos(comida)-ensalada-postre.

e) El contenido *“Experimentos aleatorios”*, propuesto en las actividades de las preguntas 7 y 8. Se halló que diecinueve maestros enunciaron en sus respuestas una actividad que sí se relaciona con el contenido propuesto en la actividad de la pregunta 7, y diecinueve hicieron lo mismo con la pregunta 8. Las ideas manifiestas en el cuestionario son como las que siguen:

P7-M3: Realizando los experimentos de forma práctica y registrando los posibles resultados.

P7-M6: Utilizando tarjetas: 10 rojas y 5 blancas, meterlas en una caja y que un niño saque una; preguntarles al resto de los niños la probabilidad de sacar una roja.

P8-M7: Lo trabajaría poniendo juguetes en una caja, algunos se repiten varias veces, para ver qué juguete sale más.

P8-M10: Se acomodan cara abajo 3 tarjetas de hojas, 4 soles, 5 estrellas, 3 palitos; se revuelven y se realiza 4 eventos para saber cuál tarjeta sale más.

f) El contenido *“Análisis de los resultados posibles y de casos favorables”*, incluido en la pregunta 9 del cuestionario. Se encontró que quince maestros mostraron una relación apropiada con el contenido propuesto; sus ideas son como las siguientes:

P9-M3: Con experimentos, utilizando canicas u otro material apropiado.

P9-M10: Se ponen en una caja dulces de diferentes colores: 7 rojos, 6 verdes, 3 amarillos, 2 azules; se buscan los resultados.

g) El contenido *“Probabilidad de eventos”*, sugerido en el trabajo de la actividad propuesta en la pregunta 10 del cuestionario; hallamos que catorce profesores relacionaron adecuadamente las actividades construidas por ellos mismos con el contenido indicado en la actividad del cuestionario. Sus respuestas fueron como las que siguen:

P10-M3: Se realizan las actividades con el material para registrar los posibles resultados.

P10-M13: Tirando los dados con los niños y anotando cuántas combinaciones se realizan.

h) El contenido *“Registro de experimentos aleatorios”*, implícito en las preguntas 11 y 12 del cuestionario; encontramos que diecinueve maestros señalaron una relación adecuada entre las actividades que ellos construyeron y el contenido propuesto en la pregunta 11, y veinte profesores hicieron lo mismo con la pregunta 12. Sus respuestas son como las siguientes:

P11-M3: Se realizan los experimentos y se registran los resultados en tablas o gráficas.

P11-M23: Jugando con los niños a disparejo.

P12-M7: Lo trabajaría con otras situaciones: unas en las que hubiera seguridad de lo que va a pasar, y otras en las que no se sepa.

P12-M8: Comprobando los resultados de las predicciones seguras y analizar el juego de azar para conocer el resultado.

*Resumen.* Observamos en las sugerencias de actividades de los profesores que todas se relacionan con el aspecto de probabilidad que se sugiere en el contenido, sobre todo, hacen hincapié en la presencia del azar y del experimento aleatorio. Lo que postulan puede considerarse una actividad o una idea porque, por lo menos, sugieren que se lleve a cabo de manera similar y práctica, es decir: para los profesores es importante que las actividades que se presentan se realicen, utilizando los materiales enlistados en cada una de ellas.

Las respuestas de los profesores se ubicaron en el nivel uniestructural, ya que sus respuestas sólo consideran algún elemento de probabilidad, o sea, aluden a un aspecto específico de la probabilidad, pero no construyen ideas más finas. Por otra parte, ofrecen argumentos ambiguos que requieren que el lector complete las ideas de los maestros para entenderlas mejor.

### **6.10. Tipo de idea que toman en cuenta los profesores al construir sus actividades**

Al analizar las respuestas de los profesores sobre la construcción de actividades para trabajar los contenidos de probabilidad en las actividades del cuestionario, nos dimos cuenta de que existía una idea central en cada una de las respuestas de los maestros. Ello nos permitió, en un primer momento, identificarlas y enlistarlas; posteriormente, las ubicamos de acuerdo con las jerarquías sugeridas por Biggs y Collis. En este sentido, las ideas se ubicaron de la siguiente manera:

## NINGÚN NIVEL DE PENSAMIENTO

a) Quienes no sugieren ninguna situación.

## NIVEL PREESTRUCTURAL:

b) Quienes no proponen ideas claras en sus sugerencias.

c) Quienes proponen el trabajo en equipos.

## NIVEL UNIESTRUCTURAL:

d) Quienes consideran que la actividad se debe llevar de manera práctica.

e) Quienes consideran que la actividad debe tomar en cuenta el uso de material concreto.

f) Quienes consideran que se deben trabajar actividades similares a las propuestas en el cuestionario.

g) Quienes consideran que se debe tomar en cuenta el juego.

h) Quienes sugieren que se utilicen las actividades de los libros de texto.

i) Quienes sugieren actividades de libros comerciales.

Las ideas enlistadas arriba se ubicaron por niveles de acuerdo con los siguientes criterios: Los profesores que no sugieren ninguna actividad, no se les ubicó en ningún nivel de pensamiento; en el nivel preestructural situamos las ideas que no mencionan ningún elemento de probabilidad (por ejemplo: aquellas ideas que no aclaran ninguna situación probabilística, las que dan énfasis al trabajo en equipo pero no indican qué contenido probabilístico está implícito, ni cómo ha de desarrollarse el trabajo).

En el cuadro 18 (de doble entrada) se presenta, de manera vertical, el número de las preguntas del cuestionario y, de forma horizontal, el número de profesores que ubican su idea central según la lista anterior. Es decir, las letras A, B, C, D, E, F, G, H y I representan las ideas centrales identificadas en las respuestas de los maestros; éstas se ubican de acuerdo con el nivel de pensamiento al que corresponden.

**Cuadro 18:** Frecuencia de las ideas centrales en las respuestas de los maestros a las preguntas del cuestionario.

|   |    | NIVEL DE PENSAMIENTO |    |                |   |   |    |                |    |    |    |    |    |   |    |    |    |   |     | T   |     | % |  |
|---|----|----------------------|----|----------------|---|---|----|----------------|----|----|----|----|----|---|----|----|----|---|-----|-----|-----|---|--|
|   |    | NINGUNO              |    | PREESTRUCTURAL |   |   |    | UNIESTRUCTURAL |    |    |    |    |    |   |    |    |    |   |     |     |     |   |  |
| P<br>R<br>E<br>G<br>U<br>N<br>T<br>A<br>S |    | A                    | %  | B              | % | C | %  | D              | %  | E  | %  | F  | %  | G | %  | H  | %  | I | %   | T   | %   |   |  |
|   | 1  | -                    | -  | -              | - | 1 | 4  | 7              | 28 | 4  | 16 | 2  | 8  | 7 | 28 | 4  | 16 | - | -   | 25  | 100 |   |  |
|   | 2  | 1                    | 4  | -              | - | 1 | 4  | 11             | 44 | -  | -  | 4  | 16 | 7 | 28 | 1  | 4  | - | -   | 25  | 100 |   |  |
|   | 3  | 1                    | 4  | -              | - | - | -  | 8              | 32 | -  | -  | 14 | 56 | 1 | 4  | 1  | 4  | - | -   | 25  | 100 |   |  |
|   | 4  | 3                    | 12 | 2              | 8 | - | -  | 3              | 12 | 8  | 32 | 3  | 12 | 3 | 12 | 3  | 12 | - | -   | 25  | 100 |   |  |
|   | 5  | 1                    | 4  | -              | - | - | -  | 6              | 24 | 5  | 20 | 11 | 44 | - | -  | -  | -  | 2 | 8   | 25  | 100 |   |  |
|   | 6  | 1                    | 4  | -              | - | 2 | 8  | -              | -  | 2  | 8  | 14 | 56 | - | -  | 5  | 20 | 1 | 4   | 25  | 100 |   |  |
|   | 7  | 4                    | 16 | -              | - | 1 | 4  | 15             | 60 | -  | -  | 4  | 16 | - | -  | 1  | 4  | - | -   | 25  | 100 |   |  |
|   | 8  | 4                    | 16 | -              | - | 1 | 4  | 2              | 8  | 8  | 32 | -  | -  | 2 | 8  | 8  | 32 | - | -   | 25  | 100 |   |  |
|   | 9  | 1                    | 4  | -              | - | 2 | 8  | 8              | 32 | 5  | 20 | 2  | 8  | 4 | 16 | 3  | 12 | - | -   | 25  | 100 |   |  |
|   | 10 | 3                    | 12 | -              | - | - | -  | 10             | 40 | 3  | 12 | 1  | 4  | 1 | 4  | 7  | 28 | - | -   | 25  | 100 |   |  |
|   | 11 | 4                    | 16 | 1              | 4 | - | -  | 10             | 40 | 3  | 12 | 5  | 20 | - | -  | 2  | 8  | - | -   | 25  | 100 |   |  |
|   | 12 | 3                    | 12 | -              | - | - | -  | 4              | 16 | 1  | 4  | 12 | 48 | - | -  | 5  | 20 | - | -   | 25  | 100 |   |  |
| TOTAL                                     | 26 | 9                    | 3  | 1              | 8 | 3 | 82 | 27             | 39 | 13 | 74 | 25 | 25 | 8 | 40 | 13 | 3  | 1 | 300 | 100 |     |   |  |

En el cuadro se observa que el total de profesores y el porcentaje se indican en los dos últimos casilleros de las líneas horizontales, lo que muestra el número de profesores a quienes se les aplicó el cuestionario. En cambio, en el último renglón del cuadro, al final de cada línea correspondiente a cada una de las ideas centrales y de manera vertical, se muestra el total de profesores que tuvieron esa idea en particular como prioridad en la construcción de sus actividades. Así, en los datos que mostramos a continuación se indicará el número de profesores que tomaron en cuenta esa idea central, por lo que el porcentaje obtenido se expresa con respecto al total de respuestas del cuestionario; es decir, el 100% lo conforman las 300 respuestas. Si tomamos en cuenta los datos obtenidos de la idea central B, su estimación será dada mediante la fórmula:  $3 : X :: 300 : 100\%$ ; de esta manera, la representatividad de B será de 1%, que es el porcentaje que le corresponde a 3 respuestas.

### 6.10.1. Ejemplos de ideas ubicadas en el nivel preestructural

Tres maestros —que representan el 1% del total de respuestas— orientan sus sugerencias hacia el trabajo en equipo.

P4-M15: Por equipos y luego que cada equipo exponga sus resultados, ya que seguramente ninguna tabla será igual.

P11-M6: En equipo de cuatro niños y utilizando una ruleta de cuatro colores, y ver qué posibilidad tiene cada uno de ganar.

Encontramos también a ocho profesores que conforman el 3% del total de respuestas, donde no identificamos ninguna idea que se refiera al trabajo de la probabilidad.

P1-M5: No recuerdo por qué estos contenidos se trabajan en cuarto grado y yo sólo trabajo con primer ciclo.

P6-M6: Se les pediría que pintaran unas casas de cinco colores, y después se les preguntaría de qué otra forma pueden pintar las demás utilizando los mismos colores.

P6-M9. Planteando el valor unitario cómo procedimiento.

P9-M15: Lamento decir que no lo he trabajado.

### **6.10.2. Ejemplos de ideas para construir actividades ubicadas en el nivel uniestructural**

La mayoría de los profesores toman en cuenta, en la construcción de sus sugerencias, que las actividades se lleven a la práctica. En el cuadro 18, observamos que 82 respuestas, que representan el 27% del total, se centraron en esta idea. Las sugerencias fueron como las siguientes:

P1-M3: Experimentos con los dados poniendo colores diferentes en la cara de los dados.

P2-M1: Realizando los eventos.

P3-M5: Registrar 20 veces los resultados de arrojar una moneda al aire.

P4-M9: Realizando la actividad.

P5-M15: Formando parejas con los alumnos del salón y registrando cuántas parejas diferentes formamos.

P7-M3: Realizando los eventos de forma práctica y registrando los posibles resultados.

La idea que se interpreta de las sugerencias de los profesores es la de llevar a cabo las actividades; suelen ser pocos los que indican que es lo que se realizará, como P1-M3, P3-M5 y P5-M15, quienes se refieren a la utilización de dados y personas; los demás únicamente indican que debe realizarse la actividad.

Encontramos que setenta y cuatro maestros, que representan el 25% del total de respuestas, sólo mencionan que deben realizarse actividades similares, refiriéndose a las que resolvieron en el cuestionario. Ejemplos:

P1-M10: Construye un cubo de cartulina e ilumina sus caras de azul, rojo, amarillo, verde, blanco y morado; registrarlo en una tabla. Después contesta interrogantes como: ¿cuántas veces cayó el color azul?, ¿y el rojo?, ¿qué color cayó más veces?

P4-M11: Mediante la problematización de un evento parecido anticipando el resultado; posteriormente, se realiza el proceso de comprobación para que el alumno saque sus conclusiones.

P6-M23: De acuerdo con el gusto, jugando a la comidita.

Observamos que los profesores que se centraron en esta idea se refieren más que nada a la actividad presentada; algunos intentan construir otra parecida como en el caso de P1-M10, y otro únicamente lo menciona, como P4-M11.

Cuarenta profesores —que representan el 13% del total de respuestas— orientan sus sugerencias al uso de alguna actividad sugerida en los libros de texto; mencionan por ejemplo:

P1-M2: Página 76 del libro de cuarto año.

P10-M11: Se ha trabajado con el ejercicio de la lección 30, página 70, formando equipos de cuatro o cinco compañeros (jugando).

P11-M4: Como lo sugiere el libro de texto.

P12-M4: Como lo marca el libro.

A veces se señala el número de página, y en otras, simplemente se indica tomar en cuenta las actividades sugeridas en los libros de texto.

Otra idea que consideraron es la de utilizar de material concreto; tenemos a treinta y nueve profesores —que representan el 13% del total de respuestas—, es decir, enlistan el material que se utilizará para llevar a cabo la actividad.

P6-M8: Utilizando diferentes objetos, por ejemplo: platos de colores con tazas de diferentes colores.

P8-M3: Con canicas, fichas, realizando los experimentos y registrando los resultados.

P9-M3: Con experimentos, utilizando canicas u otro material apropiado.

P10-M1: Echando corcholatas, palitos, círculos de diferentes colores y diversas cantidades.

En este caso, los maestros anotan qué material se empleará (no indican cómo pero suponemos que se utilizará de la misma forma en que se presentó en la actividad); otros indican para qué, como P8-M13, y todos señalan uso de material en experimentos de azar.

El 8% del total de respuestas —correspondiente a veinticinco profesores— toma en cuenta en sus sugerencias que la actividad debe llevarse a cabo mediante juegos.

P1-M22: En algunos juegos como el del gato, la lotería.

P2-M5: Con juegos de azar (dados, tómbolas, fichas, etc.), par o non.

P4-M6: Jugar “Serpientes y escaleras” y registrar las veces que utilizó las escaleras y las serpientes cada jugador.

P8-M21: Mediante juegos con ruletas.

Si bien no todos los juegos que sugieren son propiamente de azar, los maestros hacen referencia a ellos, pensando que de esta manera los niños pueden interesarse más en las actividades.

Se encuentran ideas que se refieren al uso de libros comerciales, para tomar de ellas aquellas actividades que tengan que ver con la probabilidad o con el contenido que se trabaja. Tenemos a tres profesores, quienes conforman el 1% del total.

P5-M4: De la manera en que lo indica la guía escolar.

P6-M4: Con el uso de auxiliares didácticos como la guía escolar.

*Resumen.* En general, no todas las situaciones que sugieren los profesores para trabajar los contenidos de probabilidad abordados en las actividades del cuestionario, pueden considerarse propiamente actividades; algunas podrían calificarse, a lo sumo, como simples sugerencias.

Lo anterior lleva a pensar que, sin duda, los profesores intentaron dar una respuesta apropiada que tuviera relación con la actividad presentada; sin embargo, no todos lograron este propósito. Se nota claramente que hay cierto desconocimiento en este tipo de trabajo; además, se advierte que los contenidos de probabilidad se les dificultan a los maestros, sobre todo, en el diseño de actividades que puedan trabajarse con los estudiantes en el salón de clases.

## **CAPÍTULO 7**

### **CONCLUSIONES**

#### **7.1. Aportaciones más importantes del trabajo**

En este capítulo se presentan las observaciones más interesantes construidas a lo largo de toda la investigación y que pueden ser útiles en próximas investigaciones que se orienten a conocer más con respecto a la probabilidad, sobre todo, considerar que aún hay más cuestionamientos por resolver y qué en esta investigación no se abordaron y que todavía falta por indagar.

##### **7.1.1. El problema de Investigación**

Investigar acerca del pensamiento que tienen los profesores que trabajan en la escuela primaria fue importante porque nos dio a conocer a través de sus ideas qué tanto sabe del concepto de probabilidad. Así mismo, nos permitió conocer también la manera en que los maestros explican los contenidos que se trabajan en la escuela primaria en el eje predicción y azar, y con ello, se confirmó que el nivel de pensamiento que poseen los profesores se ubica en el uniestructural, por lo que es importante buscar la manera de cómo hacerles llegar este conocimiento a los docentes con el fin de que puedan implicarse en la práctica de la enseñanza de la probabilidad en la escuela primaria.

##### **7.1.2. Presupuestos teóricos**

Revisar los aportes teóricos acerca de la probabilidad es relevante ya que nos proporciona información acerca de lo que han encontrado los investigadores

con respecto a la probabilidad. De este modo, se pudo constatar que los profesores del estudio conocen poco sobre las definiciones que presentan los teóricos de probabilidad, cómo la definen y cómo se puede aplicar en la práctica de la enseñanza de la probabilidad.

Un aspecto de suma importancia es considerar que los estudios que se han efectuado sobre probabilidad, nos promueven la apertura de tomar en cuenta en nuestra investigación algunos conceptos definidos y que pueden incluirse como aspectos a observarse en los sujetos de estudio a través de sus ideas que nos manifiesten en sus respuestas.

### **7.1.3. El proceso metodológico**

El proceso metodológico implicado en la investigación nos permite realizar el estudio de manera concreta y con resultados propios. Esto significa que a lo largo de la investigación se va construyendo y reconstruyendo el proceso, debido a que en el desarrollo se presentan situaciones que permiten al investigador modificar en cierto sentido lo que al inicio se había planeado.

Es necesario contar con una intención bien definida para realizar la investigación desde los comienzos, ya que esto, ayudará a que no se pierda el objetivo central del estudio, aunque éste se vaya fortaleciendo a lo largo de la investigación. Sobre todo, en lo que respecta a la delimitación, de tal manera, que el investigador va concretando el objeto de estudio de manera sólida y esto permite que los resultados den cuenta cabalmente de lo que se quiere indagar.

Este estudio considero incluir en la primera etapa un cuestionario empleado en una investigación de probabilidad por la investigadora Pilar Azcárate Godet, esto se realizó con la intención de obtener información acerca de las nociones básicas de probabilidad.

En la segunda etapa se construyeron los cuestionarios, pero se tomó en cuenta que la información que nos proporcionará tendría una relación con el primer cuestionario, esto con la intención de poder realizar un análisis que nos revelará el nivel de pensamiento de los profesores acerca de la probabilidad.

#### **7.1.4. Las nociones de experiencia aleatoria y de probabilidad**

El concepto de probabilidad entraña, sin duda, un alto grado de complejidad. De acuerdo con Biggs y Collis (1991), su aprendizaje se da de modo progresivo: parte de una concepción uniestructural que evoluciona a una visión multiestructural y, eventualmente, llega a su forma relacional.

La noción de probabilidad se fundamenta en la de experiencia aleatoria, pues a partir de ésta se genera un conjunto de resultados posibles en los que se definen eventos cuya probabilidad se calcula teniendo en cuenta la cardinalidad del evento en cuestión y del espacio muestral.

El pensamiento de los profesores de primaria examinados en este estudio se ubicó, en su mayoría, en el nivel uniestructural; es decir, asocian el concepto de probabilidad sólo con algún elemento aislado de la noción, pero no son capaces de integrarlo en un conjunto de nociones interrelacionadas.

Puesto que el concepto de probabilidad se apoya en el de experiencia aleatoria, es interesante observar la manera en que los profesores captan las nociones que lo forman, en la cuál sólo consideran alguna de sus características. De acuerdo con Michel Henry —citado por Coutinho (2001)—, el concepto de experiencia aleatoria se basa en tres nociones fundamentales: *a*) aleatoriedad (o azar), *b*) reproducibilidad y *c*) espacio muestral. Con respecto al concepto de azar o aleatoriedad, los maestros sólo pueden definirlo con sinónimos o bien ilustrarlo con ejemplos; la mayoría lo identifica con la incertidumbre. Afirman, con sus propias palabras, que en la aleatoriedad “no se puede saber lo que va a ocurrir”. Cuando intentan definir qué es una experiencia aleatoria sólo tienen en cuenta el aspecto de la incertidumbre, pero pasan por alto la reproducibilidad y la noción de espacio muestral (conjunto de posibles resultados).

Por lo que corresponde a la noción de probabilidad, se anticipaba ya que era difícil que dieran una definición relacional en términos del cociente de resultados favorables entre resultados posibles; se esperaba más bien que los maestros ofrecieran una definición más simple, como que la “probabilidad es una medida de la incertidumbre”, lo cual incluye tanto la noción de medida como la de incertidumbre. Sin embargo, se constató que los profesores asocian el concepto

de probabilidad con la incertidumbre; ninguno lo concibió como *una medida*. Esta ausencia de la noción de medida puede reflejar la dificultad para darle sentido a la cuantificación de la incertidumbre y su manera de utilizarla para fines prácticos.

En general, los profesores interpretan situaciones probabilísticas en contexto de manera errónea. Por ejemplo, en las situaciones relativas al pronóstico del tiempo sus respuestas se apegan más al resultado aislado o a la aproximación al resultado, fenómeno, por cierto, advertido por Konold (1989); este sesgo indica que una persona puede creer que su tarea es decidir correctamente cuál será el próximo resultado, en vez de estimar lo que es probable que ocurra.

Para indagar cuál era el pensamiento de los maestros en situaciones de muestreo, se planteó el problema clásico del hospital:

En una ciudad hay dos hospitales. En el más pequeño se registran, por término medio al año, 15 nacimientos diarios, mientras que en el otro hospital, de mayor dimensión, se registran 45 nacimientos diarios, aproximadamente.

Se sabe que en general el 50 por ciento del total de los recién nacidos son varones, sin embargo, si nos concentramos en un recuento diario ese porcentaje fluctúa.

En cada uno de los hospitales indicados se han contabilizado, a lo largo de todo un año, los días en los cuales el porcentaje de varones superó el 70 por ciento de los nacimientos. ¿En qué hospital crees que esa circunstancia ha ocurrido un mayor número de días?

No es fácil que los maestros tengan conocimiento formal sobre la influencia del tamaño de la muestra en la variación de los resultados, hecho que tiene que ver con la Ley de los Grandes Números. Pero hay formas intuitivas de acercarse a esta noción, las cuales, sin embargo, no han sido utilizadas en la enseñanza. Se esperaba, pues, que no tomaran en cuenta la variabilidad con respecto al tamaño de la muestra. Así, se comprobó que están convencidos de que ocurre lo mismo en muestras pequeñas que en muestras grandes, aplicando quizá una idea de proporcionalidad.

Para desarrollar el concepto de probabilidad en el nivel relacional, es decir, en un nivel en el que se realicen procedimientos para calcular probabilidades, se requieren de rudimentos de combinatoria. Nuestro estudio reveló que los maestros participantes no pudieron resolver un problema de combinatoria elemental que se propuso (por ejemplo, para formar comités hacen una división simple soslayando las combinaciones). Cuando afirman que sólo hay cuatro comités posibles de un conjunto de ocho personas, están dividiendo 8 entre 2 en lugar de encontrar las combinaciones que se pueden formar con un conjunto de ocho personas en comités integrados por dos individuos, cuyo resultado son 28 combinaciones.

#### **7.1.5 Las respuestas a las situaciones planteadas en el texto**

Al advertir las dificultades de los profesores para comprender de manera relacional las nociones básicas de probabilidad, la pregunta que surge es: ¿qué parte específica de las actividades de los textos les sirve de apoyo para la enseñanza?

Para responder esta cuestión se observó cómo resolvían las tareas de los textos. La mayoría no tuvo dificultades para hallar la solución de las actividades presentadas, aunque para algunos maestros resultó muy difícil justificarlas.

Para un amplio porcentaje de profesores, las dificultades surgieron al intentar justificar sus respuestas. Tampoco pudieron aplicar la fórmula de Laplace con que se calcula la probabilidad o hacer estimaciones en las actividades presentadas, pues estos procedimientos requieren, por fuerza, un pensamiento relacional.

Los problemas que los maestros examinados enfrentaron se relacionaban, fundamentalmente, con la combinatoria. Una gran mayoría respondió de manera incorrecta las dos actividades que se plantearon sobre este tema, y muy pocos mostraron habilidad para usar los diagramas de árbol.

Tampoco pudieron construir los espacios muestrales o hacer estimaciones con base en los posibles resultados. En una lista de eventos, los maestros confunden los deterministas con los azarosos; otros hacen una fusión de todos

ellos: azarosos, deterministas e imposibles, y algunos más confunden los eventos deterministas con los imposibles.

En las sugerencias que ofrecieron sobre cómo trabajar los temas de probabilidad en clase, sólo mencionan propuestas generales que reflejan ideas vagas de cómo poder llevarlos a cabo. A la pregunta: “¿Cómo enseñarías el concepto X a tus estudiantes?” La respuesta que dieron fue: “Con ayuda de un juego”, independientemente de que X sea el concepto de probabilidad, azar, espacio muestral o experimento aleatorio.

Cuando se les pidió que enunciaran el contenido probabilístico que se prioriza en las actividades propuestas en el cuestionario, los profesores solían intercambiar los argumentos, o sea, algunos mostraban la relación entre el contenido que dicen que se trabaja en la actividad y la justificación de ésta, pero no la relacionaban con la actividad que se les presentó. En otras palabras: el maestro puede justificar lo que menciona, aunque tal justificación no esté relacionada con la actividad dada. Otros maestros señalan una relación entre la actividad del cuestionario y la justificación del contenido que, dicen, se destaca en la actividad, pero no lo vinculan con el contenido que proponen.

Algunos profesores no sugirieron actividades para utilizarlas en la enseñanza de la probabilidad, en tanto que otros anotaron ideas sin ninguna relación con la probabilidad. Un porcentaje amplio toma en cuenta la utilización del dado, las monedas y el modelo de urna. En sus respuestas se detecta la creencia de que todos los conceptos pueden enseñarse con ayuda de actividades concretas, pero en ningún caso propusieron actividades precisas para fundamentar dicha creencia.

En general, los profesores del estudio no fueron capaces de proponer actividades que facilitaran el aprendizaje de conceptos probabilísticos específicos sin recurrir a las actividades del libro de texto como referencia.

#### **7.1.6 Las interpretaciones de los contenidos curriculares**

Con respecto a las interpretaciones que los maestros ofrecen de los contenidos curriculares sobre el trabajo del eje temático de predicción y azar, se observó que

la mayoría intenta —con base en sus experiencias personales— aproximar sus respuestas a los contenidos presentados sin incluir referencias teóricas que permitan tomarlos en cuenta en sus argumentos.

No establecen, por ejemplo, la relación entre la idea de espacio muestral y los resultados posibles de una experiencia; confunden situaciones deterministas con aleatorias; piensan que el espacio muestral se refiere a un espacio físico; otros de plano no respondieron la pregunta en la que se incluía este concepto.

Por lo que toca a la construcción de problemas por parte de los profesores, se halló que el contenido “Predicción de hechos y sucesos en situaciones sencillas en las que no interviene el azar” fue el que tuvo mayores dificultades, debido en parte a que no pudieron ubicar adecuadamente qué tipo de situación se refiere al enunciar la predicción y en parte a que ésta no era de azar; es decir, no ubicaron eventos deterministas.

Los profesores construyen, en la mayoría de los casos, problemas que involucran el azar, esto es, situaciones en las cuales se hace hincapié en la intención de que el resultado no se sepa con seguridad. Además, las actividades que poseen esta característica pueden, según ellos, incluirse en el trabajo de cualquier contenido.

### **7.1.7 Reflexiones finales y recomendaciones**

El marco de interpretación utilizado, inscrito en la teoría de Biggs y Collis (1991), permite explorar el pensamiento de los maestros por medio de sus respuestas a preguntas sobre el azar y los contenidos curriculares referidos al eje temático de predicción y azar. Hemos advertido con mayor precisión qué puntos deben mejorarse para propiciar que el pensamiento de los maestros avance en cuanto a las nociones probabilísticas, a saber: nociones complementarias que les permitan pasar del nivel uniestructural a los niveles multiestructural y relacional de las nociones de probabilidad. Por ejemplo, complementar la idea de azar e incertidumbre con una noción de medida para constituir una noción multiestructural de probabilidad. Asimismo, es conveniente incluir la noción de espacio muestral en los textos de manera más explícita y decidida, así como la

noción de reproducibilidad con objeto de que una experiencia aleatoria sea algo más que “el azar”. En el último grado de primaria habría que fortalecer el trabajo con la noción de Laplace para alcanzar un nivel relacional de la probabilidad.

Los resultados de la investigación aquí presentada nos permiten afirmar que los conocimientos formales que poseen los maestros de este estudio acerca de los conceptos relacionados con la probabilidad son proveídos casi en su totalidad por los materiales de apoyo oficiales. Por otro lado, no hay que olvidar que los libros de texto se diseñaron con un enfoque didáctico constructivista —y, por tanto, están ausentes las definiciones y los procedimientos; sólo se trata de inducirlos— y son los maestros mismos quienes tienen que precisarlos. Hay, entonces, un ciclo que no termina por cerrarse: los profesores deben contar con referencias teóricas probabilísticas que les permitan tener los conocimientos suficientes para poder abordar los contenidos propuestos en el programa oficial, y puesto que se ha comprobado que no los tienen, deben ofrecerse a todos los maestros de la escuela primaria.

Esta idea se considera debido a que las características que poseen los profesores de este estudio pueden encontrarse en muchos más que trabajan en el nivel de primaria en otros estados de México, los docentes del estudio realizan sus prácticas en escuelas urbanas públicas en Chiapas, estado considerado con bajo desempeño, situación que se muestra en los resultados del INEE (Instituto Nacional de Evaluación educativa) en cuanto a la asignatura de matemáticas.

Por lo que es importante considerar que el estado de Chiapas no es el único que presenta esta situación, sino que hay otros estados como Tabasco, Michoacán, Guerrero que también presentan estas condiciones, razón por la cual suponemos que se puede encontrar a muchos profesores con un nivel uniestructural con respecto a los conceptos probabilísticos.

Una última observación que se desprende del presente estudio es la necesidad de realizar más trabajo, y con mayor profundidad, con los maestros acerca de las nociones de probabilidad con talleres de enseñanza, así como la elaboración de materiales dirigidos a los docentes para aumentar sus conocimientos sobre la materia.

## REFERENCIAS

- Azcárate, P. (1996). *El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad. Su estudio en el caso de la educación primaria*. Tesis doctoral inédita. Universidad de Cádiz.
- Batanero, C. (1991). Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria. *Revista Educación Matemática*. Vol. 18, No. 1.
- Batanero, C. (1998). *Didáctica de la probabilidad y de la estadística*. Granada, España, Editorial Síntesis.
- Batanero, C. (1999). *Razonamiento combinatorio*. Madrid, España. Editorial Síntesis.
- Batanero, C. y Serrano, L. (1995). *La aleatoriedad, sus significados y sus implicaciones educativas*. Madrid, España, Editorial Síntesis.
- Biggs, J. B.; Collis, K. F. (1991). Multimodal learning and the quality of intelligence behavior. H. A. Rowe (ed). *Intelligence, reconceptualization and measurement*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publisher.
- Coutinho, C. (2001). *Introduction aux situations aléatoires dès le Collège: de la modélisation à la simulation d' expériences de Bernoulli dans l' environnement informatique Cabri-géomètre-II*. Tesis doctoral inédita. Universidad de Grenoble, Francia.
- Fischbein et al. (1970). Comparison of ratios and the chance concept children. *Child Development*. 41, 377-389.
- Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probability thinking in children*. Dordrecht: Reidel.

- Freudenthal, Hans. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel Publishing, Company.
- Garfield, J. and Ahlgren, A. (1988). Difficulties in learning basic concepts in probability and statistic: Implications for research. *Journal for research in Mathematics Education*, Vol. 19, No. 1. pp. 44-63.
- Godino, J. D. (1987). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Madrid, España: Editorial Síntesis.
- Green, D. (1982). *Probability concepts in 11-16 years old pupil, report of research sponsored by the social science research council*. Longhborough, England: University of Technology. (Mimeo).
- Hoeman, H. W. y Ross, B. M. (1982). Children's concepts of chance and probability. En Brainerd (Ed), *Children's logical and mathematical cognition (pp. 93-121)*, Berlin: Springer Verlag.
- INEE. (2005). *El aprendizaje del español y las matemáticas en la educación básica en México*. México City: Instituto Nacional para la evaluación de la Educación.
- Kahneman, D., Slovic, P. & Tversky, A. (1982). *Judgements under uncertainty, Heuristics and biases*. New York.: Cambridge University Press.
- Kapadia R. and Borovcnick M. (1991). The Educational Perspective. En R. Kapadia and M. Borovnick (eds.), *Chance Encounters: Probability in Education, 1-26*. Printer in the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Kapadia, R. & Hawkins, A. (1984). Children's conception of probability –A pshychological and pedagogical review. *Educational Studies in Mathematics*. 15, 349-377.
- Konold, C. (1991). Understanding Students' Beliefs about probability. En E. v. Glasersfeld (Ed): *Radical Constructivism in Mathematics Education*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publisher.
- Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 557-568.

- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática, "Thales".
- Piaget, J. e Inhelder, B. (1951). *La genése de l'idée de hasar chez l'enfant*. Paris, Francia. : Presses Universitaires de France, PUF.
- SEP. (1993). *Plan y programas de estudio 1993. Educación Básica. Primaria*. México, D. F.: Editorial Ultra.
- SEP. (1994). *Matemáticas Tercer Grado. Fichero de Actividades Didácticas*. México, D. F.: Dirección general de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Básica y Normal.
- SEP. (1995a). *Matemáticas Cuarto Grado. Fichero de Actividades Didácticas*. México, D. F.: Dirección general de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Básica y Normal.
- SEP. (1995b). *Matemáticas Quinto Grado. Fichero de Actividades Didácticas*. México, D. F.: Dirección general de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Básica y Normal.
- SEP. (1998). *Matemáticas Sexto Grado. Fichero de Actividades Didácticas*. México, D. F.: Dirección general de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Básica y Normal.
- SEP. (1999a). *Matemáticas Tercer Grado. Libro para el maestro*. México, D. F.: Dirección general de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Básica y Normal.
- SEP. (1999b). *Matemáticas, Cuarto Grado. Libro del alumno*. México, D. F.: Dirección general de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Básica y Normal.
- SEP. (1999c). *Matemáticas, Tercer Grado. Libro del alumno*. México, D. F.: Dirección general de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Básica y Normal.
- SEP. (2000). *Matemáticas, Quinto Grado. Libro del alumno*. México, D. F.: Dirección general de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Básica y Normal.

- SEP. (2001). *Matemáticas, Sexto Grado. Libro del alumno*. México, D. F.: Dirección general de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Básica y Normal.
- SEP. (2002a). *Matemáticas Cuarto Grado. Libro para el maestro*. México, D. F.: Dirección general de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Básica y Normal.
- SEP. (2002b). *Matemáticas Quinto Grado. Libro para el maestro*. México, D. F.: Dirección general de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Básica y Normal.
- SEP. (2003). *Matemáticas Sexto Grado. Libro para el maestro*. México, D. F.: Dirección general de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Básica y Normal.
- Shaughnesy, J. H. (1981). Misconceptions of probability: From Systematic Errors to Systematic Experiments and Decision. En Schule y Smart (Eds): *Teaching Statistic and Probability*. Reston.: Yearbook, N. C. T. M.
- Shaugnessy, J. M. (1992). Research in Probability and Statistic: Reflections and Directions. En Grows (Ed): *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York, USA.: Macmillam Publishing Company.
- Thompson, A. (1992). Las creencias y concepciones de los maestros, una síntesis de la investigación. *Hanbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York, USA.: Macmillam Publishing Company.
- Tversky, A. & Kahneman, D. 1982. Judgements under Uncertainty, Heuristic and Biases, En D. Kahneman, P. Slovic, y A. Tversky,. *Judgements under Uncertainty, Heuristic and biases*. New York.: Cambridge University Press.
- Vidal, R., & Díaz, M. A. (2004) *Resultados de las pruebas de PISA 2000 y 2003 en México*. México City: Instituto Nacional para la evaluación de la Educación.
- Yost, P., Siegel, A. y Andrews, J. N. (1962). *Non verbal probability judgement by young children*. Child Development, 33, 769-780.

---

---

## BIBLIOGRAFÍA

- Ahlgren, A. & Garfield, J. (1991). Analysis of the probability curriculum. En R. Kapadia y M. Borovcnick, (Eds). *Chance Encounters: Probability in Education*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, pp. 107-134.
- Ahlgren, A. & Garfield, J. (1988). Difficulties in learning basic concepts in probability and stastic: Implications for research. *Journal for research in mathematics education*. Vol. 19, No. 1, pp. 44-63.
- Alatorre, S. (1991). Los contextos, las creencias y las intuiciones: acerca de Cobb, Tversky y Kahneman. *Revista de Educación Matemática*. Vol. 3, No. 1.
- Azcárate, P., Cardeñoso, J. M. y Porlán R. (1998). Concepciones de futuros profesores de Primaria sobre la noción de aleatoriedad. En *Enseñanza de las Ciencias*. 16 (1) 85-97. España.
- Batanero, C. & Sánchez E. (2005). What is the nature of high school student's conception's and misconceptions about probability? En Graham A. Jones. (ed). *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*. Printed in the Netherlands: Kluwer Academic Publishers, pp. 241-266.
- Block, D. y Papacostas A. (1986). Didáctica constructivista. Una introducción. En *Cero en conducta*. Año 1.
- Borel, E. (1971). *Las probabilidades y la vida*. Barcelona, España: Oikos-tau.
- Borovcnik, M.; Bentz, M., Kapadia, R. (1991). A probabilistic perspective. En R. Kapadia y M. Borovcnick (Eds) *Chance Encounters: Probability in Education*, Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Carraher, T. et. al. (1991). Los contextos culturales del aprendizaje de las matemáticas. En: *en la vida diez en la escuela cero*. México, D. F.: Siglo XXI editores.
- Carretero, M. (1997). *Constructivismo y educación*. México, D. F.: Editorial Progreso.

- Carrillo, J. (1995). Un modelo de categorías e indicadores para el análisis de las concepciones del profesor sobre la matemática y su enseñanza. *Revista Educación Matemática*. Vol. 7, No. 3.
- Castro F. (1993). Conflictos cognitivos en la adquisición de conceptos de probabilidad. *Revista Educación Matemática*. Vol. 5, No. 1.
- De la Peña, J. A. (Comp). *Algunos problemas de la educación en Matemáticas en México*. México, D. F.: Editorial Siglo XXI.
- Delaney, K. (1996). Exploring difficulties in teaching mathematics through investigations in the primary classroom. *For the Learning of Mathematics*. 16, 1. Vancouver, British Columbia, Canada: FLM. Publishing Association.
- Dienes, Z. (1988). *La matemática moderna en la enseñanza primaria*. Barcelona, España: Editorial Teide
- Eudave, D. (1994). Las actitudes hacia las matemáticas de los maestros y alumnos de Bachillerato. *Revista Educación Matemática*. Vol. 6. No. 1.
- Falk, R. (1979). Revision of probabilities and the time axis, *Proceedings of the Third International Conference of Psychology of Mathematics Education*, pp. 64-66.
- Fischbein, E. y Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics*. 15, pp. 1-24.
- Fischbein, E., Nello, M. S. y Marino, M. N. (1991). Factors affecting probabilistic judgements in children and adolescent. *Educational Studies in mathematics*. 22, pp. 523-549.
- Frías, S. J. M. (1999). La práctica docente: Una realidad ignorada. En: *Contribución para una teoría de la formación docente*. Morelos, México: Universidad Autónoma del Edo. de Morelos.
- Garfield, J. B. (1995). How students learn statistic. *International Statistical Review*, 63 (1), 23-54.
- Garnica, I. (1993). *Intuición y probabilidad desde el punto de vista de Fischbein*. CINVESTAV, México, D. F.: Departamento de Matemática Educativa.
- Gil F. Javier. (1994). *Análisis de datos cualitativos. Aplicaciones a la investigación Educativa*.. Barcelona, España: P.P.U.

- Glaxman, M. (1975). *Las probabilidades en la escuela*. Barcelona, España: Editorial Teide.
- Good, T. L. (1990). Teacher's belief about small-group instruction in elementary school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 21. No. 1, 2-15.
- Graham A. Jones. (ed). *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*. Printed in the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Green, D. R. (1982). A Survey of probabilistic concepts in 3.000 pupils aged 11-16 years. En D. R. Green et. al. (eds) *Proceedings of the first international conference on teaching statistics*. ICOTS 1. University of Sheffield, 2, 766-783.
- Green, D. R. (1991). A longitudinal study of pupil's probability concepts. University of Loughborough.
- Guzmán, Z. (2000). Formación, concepciones y práctica de los profesores de matemáticas. *Revista Educación Matemática*. Vol. 12, No.2. pp. 139-140.
- Hacking, I. (1975). *The emergence of probability*. Great Britain: Cambridge University Press.
- Heitele, D. (1968). *Un enfoque epistemológico en las ideas estocásticas fundamentales*. Cambridge, Massachussets.
- Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*. 6, 187-205.
- Hidalgo, J. (1997). *Investigación Educativa, una estrategia constructivista*. México, D. F: Editorial Castellanos.
- Ibarrola, M. de, et. al. (1997). *Quiénes son nuestros profesores*. México, D. F.: Fundación SNTE para la cultura del maestro mexicano.
- Inhelder B. y Piaget J. (1972). *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*. Buenos Aires, Argentina: Editorial Paídos.
- Jan Van Den Brink. (1990). Classroom research. *For the Learning of Mathematics*. 10, I, FML. Quebec, Canada: Publishing association, Montreal,
- Kapadia, R. y Borovcnick, M. (Eds) (1991). *Chance Encounters: probability in education*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publisher.

- Kasner, E. (1975). *Matemáticas e imaginación*. México, D. F.: Editorial CECSA.
- Kilpatrick, J.; Gómez, P.; Rico, L. (1995). Errores y dificultades de los estudiantes, resolución de problemas, evaluación e historia. *Educación Matemática*. México, D. F.: Grupo editorial Iberoamérica,
- Konold, C. (1983). *Conceptions of probability: Reality between a Rock and Hard Place*. Tesis doctoral. University of Massachussetts.
- Konold, C. (1993). Inconsistencies in student's reasoning about probability. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 24, No. 5, 392-414.
- Labarrere, A. F. (1987). *Bases psicopedagógicos en la enseñanza de la solución de problemas matemáticos en la escuela primaria*. Madrid, España: Editorial Pueblo y Educación.
- Laplace, Pierre Simón de (1988). *Ensayo filosófico sobre las probabilidades*. México, D. F.: Alianza Editorial Mexicana,
- Lerman, S. (1990). The role of research in the practice of Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics*. 10, 2, FML. Quebec, Canada: Publishing association, Montreal,
- Mancera, E. (1990). Investigación en Educación Matemática. *Revista Educación Matemática*. Vol. 2, No. 1
- Martínez, G. E. C., Díaz A. A. (1984). *El perfil docente y su repercusión en la reproducción de matemáticas en el nivel medio básico*. Oaxaca, México: Colección Glifo,
- Mokros, J. (1995). Children's concept of average and representativeness. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 26, No. 1, 20-39.
- Morris, R. (1990). La enseñanza de la estadística. *Estudios en educación matemática*. Vol. 7. UNESCO. Montevideo, Uruguay.
- Nesbit, N. (1999). Elementary preservice teacher's changing beliefs and instructional use of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 30, No. 1, 89-110.
- Orton, A. (1990). *Didáctica de las matemáticas. Cuestiones. Teoría y práctica en el aula*. Madrid, España: Editorial Morata.

- Parra C. & Saiz I. (comps.). (1997). *Didáctica de Matemáticas. Aportes y reflexiones*. México, D. F.: Paídos,
- Parra, C. (1983). Posición del profesor frente a los requerimientos actuales en la enseñanza de la matemática en la escuela secundaria. *VIII congreso nacional de Profesores de Matemáticas*. México.
- Peltier, Marie-Lise. (1993). Una visión general de la didáctica de las matemáticas. En: *Revista Educación Matemática*, Vol. 5, No. 2. Artículo, Francia.
- Peltier, Marie-Lise. (1999). Representaciones de los profesores de la escuela primaria sobre las matemáticas y su enseñanza. *Revista Educación Matemática*. Vol. 11, No. 3.
- Piaget, J. (1985). *Seis estudios de psicología*. México, D. F.: Seix Barral,
- Piaget, J. (1998). *Psicología y pedagogía*. México, D. F.: Editorial Ariel,
- Sánchez, E. (1996). *Conceptos teóricos e ideas espontáneas sobre la noción de independencia estocástica en profesores de bachillerato: Un estudio de casos*. Tesis doctoral, México, D. F.: Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV.
- Shaugnessy, J. H. (1983). Misconceptions of probability, systematic and otherwise; teaching probability and statistic so as to overcome some misconceptions. En Green y otros (Eds); *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistic*. Universidad de Sheffield.
- Villarreal, M. (2000). El pensamiento matemático de estudiantes universitarios de cálculo y tecnologías informativas. *Revista Educación Matemática*. Vol. 12, No. 2. pp. 140-145.
- Wilcox, S. (1991). The role of a learning community in changing preservice teacher's knowledge and beliefs about mathematics education. *For the Learning of Mathematics*. 11, 3. FML, Columbia, Canada: Publishing association, White Rock, British.
- Zemelman, H. (1987). *Conocimiento y sujetos sociales. Contribución al estudio del presente*. México, D. F.: Edición Centro de Estudios Sociológicos. Jornada II, Colegio México,

## ANEXO 1

El objetivo de este informe es conocer tus ideas generales sobre el mundo de la <<incertidumbre>>, y para ello te presentamos una serie de cuestiones en las que se requiere tu opinión, lo más razonable posible. Si el espacio reservado para tus respuestas o justificaciones no es suficiente, puedes utilizar el reverso de las diferentes páginas.

IDENTIFICACIÓN: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

(A).- En primer lugar te planteamos cuatro situaciones, léelas detenidamente, elige la opción o la respuesta que consideres más adecuada y explica detalladamente el porqué de tu decisión.

1.- ¿Qué significa para ti cuando escuchas al hombre del tiempo decir que mañana hay un 70% de posibilidades de que llueva?

\_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

Si el hombre del tiempo dijo que había un 70% de posibilidades de que lloviese al día siguiente y en realidad no llovió. ¿Qué opinas sobre la afirmación de que había un 70% de posibilidades de que lloviese?

\_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

Para comprobar la bondad de las predicciones realizadas por un determinado hombre del tiempo, observas lo que realmente ocurre durante 10 días, para los cuales había anunciado un 70% de posibilidades de que lloviese. Constatas que en 3 de estos 10 días no llovió. ¿Qué piensas sobre la precisión de las predicciones de ese hombre del tiempo?

\_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

¿Qué pensarías de tal afirmación si comprobaras que fueron 7, en vez de 3, los días en que no llovió?

\_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

2.- Con un grupo de 10 personas es necesario formar el mayor número posible de comisiones diferentes.

a).- Si las comisiones pueden ser de 2 o de 6 personas. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones piensas que es verdad?

- Se pueden formar menos comisiones diferentes de 2 personas que de 6 personas.

\_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

- Se pueden formar tantas comisiones de 2 personas como de 6 personas.

\_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

- Se pueden formar más comisiones diferentes de 2 personas que de 6 personas ¿por qué?

\_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

b).- Si las comisiones pueden ser de 3 o 7 personas. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones piensas que es verdad?

- Se pueden formar menos comisiones diferentes de 7 personas que de 3 personas.

- Se pueden formar tantas comisiones diferentes de 7 personas que de 3 personas.

- Se pueden formar más comisiones diferentes de 7 que de 3 personas ¿Por qué?

3.- En cierta ciudad, hay dos hospitales. En el más pequeño se registran 15 nacimientos diarios, por término medio al año, mientras que en el otro hospital, de mayor dimensión, se registran 45 nacimientos diarios, aproximadamente.

Tu sabes que en general el 50% del total de los recién nacidos son varones, sin embargo, si nos centramos en un recuento diario ese porcentaje fluctúa.

En cada uno de los hospitales indicados se han contabilizado, a lo largo de todo un año, los días en los que el porcentaje de varones supero el 70% de los nacimientos de dicho día. ¿En qué hospital crees que esa circunstancia ha ocurrido un mayor número de días?

-En el hospital pequeño.

-En el gran hospital.

-Hay las mismas posibilidades de que sea en uno u otro hospital.

¿Por qué?

4.- Tenemos el siguiente juego: se lanzan dos dados cúbicos y se calcula el producto de los números que aparecen. Si el resultado es par gana el jugador B y si es impar el jugador A. ¿Qué jugador escogerías ser?

¿Es justo el juego? ¿Por qué?

Modificamos el juego. Ahora en lugar de calcular el producto, calculamos la suma de los números obtenidos al lanzar los dos dados. ¿Qué jugador escogerías ser en este caso, el A (que gana con impares) o el B (que gana con pares)? ¿Por qué?

Si tuvieras que apostar una gran cantidad de dinero al resultado de sumar los dos números obtenidos al lanzar los dados. ¿A qué número preferirías apostar, al 5 o al 6?

¿Por qué?

(B) A continuación te describimos brevemente una serie de sucesos. ¿Cuáles de los sucesos descritos piensas que son aleatorios, es decir, relacionados con el azar? Justifica en cada caso el porqué los consideras aleatorios o no aleatorios.

1.-La germinación o no germinación de una semilla plantada. ¿Por qué?

2.-El número que se obtiene al lanzar un dado cúbico. ¿Por qué?

3.-Acertar el número que marca un dado ya lanzado, pero que no puedes ver. ¿Por qué?

4.-La cantidad de caras que se obtienen en 100 lanzamientos de una moneda sin trucar.

¿Por qué?

5.-Si llovió en Tuxtla Gutiérrez, Chiapas el 3 de Abril 1935.

¿Por qué?

6.-Si lloverá mañana en Tuxtla Gutiérrez, Chiapas. ¿Por qué?

7.-Si lloverá en Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, dentro de un mes.

¿Porqué? \_\_\_\_\_

8.-La próxima idea que te venga a la cabeza.

¿Porqué? \_\_\_\_\_

9.-Coger la gripe el mes que viene. \_\_\_\_\_ ¿Porqué? \_\_\_\_\_

IO.-Estar expuesto a coger la gripe el mes que vienen. \_\_\_\_\_ ¿Porqué? \_\_\_\_\_

(C) Se te ocurren otros fenómenos aleatorios. Descríbelos brevemente.

\_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

(D) Se te ocurren otros fenómenos que consideres no aleatorios. Descríbelos brevemente.

\_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

(E) Para que un fenómeno sea aleatorio, ¿qué características crees que debe poseer?

\_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

(F) ¿Qué significado tiene para ti la palabra azar?

\_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

(G).- Asigna un valor numérico, entre 0 y 10, que exprese la confianza que tienes en la ocurrencia de los siguientes sucesos. Explica en que te has basado en cada caso para dar los diferentes valores numéricos.

Por ejemplo: -

- Que se derrumbe el techo en este momento.....0
- Que estés leyendo este escrito ahora mismo.....10

1.- Obtener una cruz (X) al tirar una moneda, después de haber obtenido una secuencia de cuatro caras (C,C,C,C) en los cuatro razonamientos anteriores.

\_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

2.- Encender la luz al pulsar el interruptor.

\_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

3.- No coger la gripe el mes que viene.

\_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

4.- Conseguir un 3 al lanzar un dado cúbico.

\_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

5.- Que nieve este verano en Tuxtla Gutiérrez.

\_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

6.- Que llueva mañana en Tuxtla Gutiérrez, Chiapas.

\_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

## ANEXO 2

Maestro: Los siguientes contenidos se trabajan en el eje predicción y azar de la escuela primaria, están propuestos por la SEP en los programas, por favor anota como lo interpretas y construye un problema.

Nombre: \_\_\_\_\_

Escuela: \_\_\_\_\_

Zona Escolar: \_\_\_\_\_

Grado que atiende: \_\_\_\_\_

Fecha: \_\_\_\_\_

Predicción de hechos y sucesos en situaciones sencillas en las que no interviene el azar.

Interpretación: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Construye un problema que se centre en el trabajo de este contenido y que podrías poner a los alumnos: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Identificación y realización de juegos en los que interviene o no interviene el azar.

Interpretación: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Construye un problema que se centre en el trabajo de este contenido y que podrías poner a los alumnos: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

---

---

Registros de los resultados de experimentos aleatorios.

Interpretación: \_\_\_\_\_

---

---

Construye un problema que se centre en el trabajo de este contenido y que podrías poner a los alumnos: \_\_\_\_\_

---

---

---

Identificación de la noción de espacio muestral.

Interpretación: \_\_\_\_\_

---

---

---

Construye un problema que se centre en el trabajo de este contenido y que podrías poner a los alumnos: \_\_\_\_\_

---

---

---

Uso de expresiones “más probable” y “menos probable” en la predicción de resultados.

Interpretación: \_\_\_\_\_

---

---

---

Construye un problema que se centre en el trabajo de este contenido y que podrías poner a los alumnos: \_\_\_\_\_

---

---

---

---

---

Experimentos aleatorios y análisis de los resultados posibles y de los casos favorables.

Interpretación: \_\_\_\_\_

---

---

---

Construye un problema que se centre en el trabajo de este contenido y que podrías poner a los alumnos: \_\_\_\_\_

---

---

---

---

Identificación de la noción de evento.

Interpretación: \_\_\_\_\_

---

---

---

Construye un problema que se centre en el trabajo de este contenido y que podrías poner a los alumnos: \_\_\_\_\_

---

---

---

---

Identificación de la mayor o menor probabilidad de los eventos.

Interpretación: \_\_\_\_\_

---

---

---

---

Construye un problema que se centre en el trabajo de este contenido y que podrías poner a los alumnos: \_\_\_\_\_

---

---

---

---

---

Identificación de fenómeno o experimento aleatorio.

**Interpretación:** \_\_\_\_\_

---

---

---

---

Construye un problema que se centre en el trabajo de este contenido y que podrías poner a los alumnos: \_\_\_\_\_

---

---

---

---

---

Comparación de dos eventos a partir del número de casos favorables sin cuantificar su probabilidad.

**Interpretación:** \_\_\_\_\_

---

---

---

---

Construye un problema que se centre en el trabajo de este contenido y que podrías poner a los alumnos: \_\_\_\_\_

---

---

---

---

---

### ANEXO 3

Compañero maestro, el siguiente cuestionario tiene la finalidad de rescatar tus conocimientos acerca de algunas actividades que se proponen trabajar en los libros de texto de la escuela primaria en el eje predicción azar.

Se plantean algunas actividades, solicitamos que las resuelvas y que nos menciones que contenidos de probabilidad se trabajan, porqué; cómo lo has trabajado con tus alumnos o como lo trabajarías.

Nombre: \_\_\_\_\_

Escuela: \_\_\_\_\_

Zona Escolar: \_\_\_\_\_

Grado que atiende: \_\_\_\_\_

Fecha: \_\_\_\_\_

1.- Yoatzin y Sonia hicieron un experimento con un dado. Marcaron las caras del dado como se indica abajo:

- De color azul las caras que tienen 1,2,3 y 4 puntos.
- De color rojo las caras que tienen 5 y 6 puntos.

Antes de lanzar el dado, tratan de adivinar el color que va a salir.

¿ A qué color le apostarías tú para ganar ? \_\_\_\_\_

Si se lanza 30 veces el dado ¿qué crees que se repetirá más veces, el color azul o el rojo? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_

Contenido que se trabaja: \_\_\_\_\_

¿Por qué? \_\_\_\_\_

Di como lo has trabajado o cómo lo trabajarías: \_\_\_\_\_

2.- Si se lanza 30 veces un dado común ¿qué crees que se repetirá más veces, los nones o los pares? \_\_\_\_\_

¿Por qué? \_\_\_\_\_

Contenido que se trabaja: \_\_\_\_\_

¿Por qué? \_\_\_\_\_

Di como lo has trabajado o cómo lo trabajarías: \_\_\_\_\_

3.- Raúl y Jaime hicieron un experimento con canicas de colores. Tratan de adivinar de qué color van a sacar una canica. Observa cómo lo hacen.

a).- Introducen en una caja 10 rojas y 5 azules.  
 b).- Tapan la caja y la agitan.  
 c).- Sin ver, sacan una canica.  
 d).- Introducen la canica otra vez en la caja.  
 e).- Agitan nuevamente la caja.  
 f).- Sacan otra vez una canica.

Raúl y Jaime repitieron varias veces el experimento. ¿Qué color de canica crees que salió más veces? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_

Contenido que se trabaja: \_\_\_\_\_

¿Por qué? \_\_\_\_\_

Di como lo has trabajado o cómo lo trabajarías: \_\_\_\_\_

4.- Pon en la caja cinco canicas rojas y cinco azules. Repite 20 veces el experimento como lo hicieron Raúl y Jaime y haz un registro en una tabla.

¿cuántas veces salió la canica roja? \_\_\_\_\_ ¿cuántas veces salió la canica azul? \_\_\_\_\_

Contenido que se trabaja: \_\_\_\_\_

¿Por qué? \_\_\_\_\_

Di como lo has trabajado o cómo lo trabajarías: \_\_\_\_\_

5.- Estos son los niños y las niñas que van a salir en un bailable:  
 Flor, Rosa, Carmen, Laura, Ramón, Juan, Daniel, Tomás.  
 Rosa dijo: "Yo puedo formar pareja con Ramón, con Juan, con Daniel o con Tomás". ¿De cuántas maneras distintas se puede formar parejas entre un niño y una niña? \_\_\_\_\_

Contenido que se trabaja: \_\_\_\_\_

¿Por qué? \_\_\_\_\_

Di como lo has trabajado o cómo lo trabajarías: \_\_\_\_\_

6.- En la fonda de doña Manuela se puede elegir entre pollo o pescado y, para acompañar, se puede escoger entre papas, arroz o ensalada de lechuga, de postre gelatina o plátanos con crema, ¿Cuántos platillos distintos puede servir doña Manuela? \_\_\_\_\_

Contenido que se trabaja: \_\_\_\_\_

¿Por qué? \_\_\_\_\_

Di como lo has trabajado o cómo lo trabajarías: \_\_\_\_\_

7.- Elena y su hermano Andrés deben decidir quién lava los trastes de la comida. Elena sugiere que lo decidan tirando un dado con las caras numeradas del 1 al 6. Si sale 3 o más, Andrés lava los trastes; si sale menos de 3, los lava Elena.

¿Crees que el trato sea justo? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_

¿Es más probable que lave los trastes Elena, o que los lave Andrés? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_

Contenido que se trabaja: \_\_\_\_\_

¿Por qué? \_\_\_\_\_

Di como lo has trabajado o cómo lo trabajarías: \_\_\_\_\_

8.- Recorta 11 pedazos iguales de papel y escribe en cada uno de ellos una de las letras de la palabra MATEMÁTICAS. Dóblalos y revuélvelos hasta que no sepas cuál es cuál.

Si escoges uno de los papelitos sin ver, ¿qué letras es más probable que saques? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_

¿Qué letras tienen la misma posibilidad de salir? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_

Contenido que se trabaja: \_\_\_\_\_

¿Por qué? \_\_\_\_\_

Di como lo has trabajado o cómo lo trabajarías: \_\_\_\_\_

9.- Ángela y Jacinto tienen tres cubos iguales, uno verde, uno azul y uno rojo. Los ponen en una bolsa de papel, escogen uno sin ver, anotan el color que les salió y lo regresan a la bolsa. Después escogen otro cubo sin ver. Jacinto gana si salen dos cubos del mismo color y Ángela gana si salen dos cubos diferentes.  
¿Se podría saber quién tiene más oportunidades de ganar? \_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_

Contenido que se trabaja: \_\_\_\_\_

¿Por qué? \_\_\_\_\_

Di como lo has trabajado o cómo lo trabajarías: \_\_\_\_\_

10.- Jorge y Gabriela están jugando con dos dados iguales que tienen en sus caras los números de 1 al 6. Si al caer los dados la suma de los dos números es 6 o menos, gana Gabriela; si la suma es mayor o igual a 7, gana Jorge. ¿Quién crees que tenga más oportunidades de ganar? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_

Contenido que se trabaja: \_\_\_\_\_

¿Por qué? \_\_\_\_\_

Di como lo has trabajado o cómo lo trabajarías: \_\_\_\_\_

11.- ¿Algunas veces has jugado “Disparejo”? Se juega entre tres compañeros; cada uno tira una moneda al aire y ve si cae águila o sol. Gana el que obtenga el resultado diferente a los otros dos.  
 ¿Crees que siempre habrá un ganador? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 ¿Crees que los 3 jugadores tienen las mismas oportunidades de ganar? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

Contenido que se trabaja: \_\_\_\_\_

¿Por qué? \_\_\_\_\_

Di como lo has trabajado o cómo lo trabajarías: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

12.- De las siguientes situaciones, marca con una cruz aquellas de las que estés seguro del resultado:

- Que salga un águila cuando se lanza una moneda.....
- Que saque una canica verde de una urna que contiene sólo canicas blancas.....
- Que llueva el domingo.....
- Que saque una canica blanca de una urna que sólo contiene canicas blancas.....
- Que saque una canica verde de una urna que contiene canicas verdes y blancas.....
- Que salga 3 al tirar un dado.....
- Que haya clases mañana.....
- Que salga un número entre 1 y 6 al tirar un dado.....
- Que al sacar 3 canicas de una urna que tiene canicas verdes y azules, 2 sean del mismo color.....

Contenido que se trabaja: \_\_\_\_\_

¿Por qué? \_\_\_\_\_

Di como lo has trabajado o cómo lo trabajarías: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_