UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

SECRETARÍA ACADÉMICA

DOCTORADO EN EDUCACIÓN

EL POTENCIAL DE CABRI II EN EL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA: UN ESTUDIO DE CASO CON ESTUDIANTES DE 11–12 AÑOS DE EDAD

Tesis que para obtener el grado de
Doctor en Educación
Presenta

EDGAR ROJAS GARCÍA

TUTOR

DR. TENOCH ESAÚ CEDILLO ÁVALOS

México, D. F. Septiembre, 2007

A ELVIA,
Por que en ti siempre encuentro
Palabras de aliento
Y soluciones mágicas.
Por tu comprensión y amor,
ETERNAMENTE... GRACIAS

A mis hijas,
ZELTZIN Y REBECA I.
Por el gusto de verlas sonreír,
El placer de abrazarlas
Y el deber de cuidarlas.
GRACIAS

A mis padres
ISAÍAS Y NATIVIDAD,
Por que gracias a ustedes,
Tengo el deseo de seguir esforzándome,
Las ganas de triunfar
Y el gusto de compartir.
GRACIAS

Al DR. TENOCH E. CEDILLO ÁVALOS,

Por su constante apoyo,

Agudas observaciones

Y gran motivación.

Por Usted terminé la Tesis.

GRACIAS

I N D I C E

CAPÍTULO 1
INTRODUCCIÓN

México, al igual que el resto del mundo, ha experimentado un cambio drástico en los últimos años a causa de las constantes innovaciones tecnológicas. Sin embargo, no todas estas innovaciones se han incorporado aún a la educación, por lo que en ocasiones el mundo exterior y el mundo educativo siguen caminos diferentes. Esta situación ha provocado que los alumnos vivan en un mundo exterior lleno de nuevas tecnologías (computadoras, Internet,...) y un mundo educativo donde apenas se inicia la dotación de equipos tecnológicos. El presente trabajo se inserta dentro de esta introducción de nuevas tecnologías, pues además de tener los equipos, es necesario usarlos dentro del salón de clases de tal forma que conformen un ambiente donde sean los alumnos los principales partícipes y el profesor sea un coordinador de las actividades de ellos.

La disponibilidad de nuevas tecnologías permite acceder a un ambiente de trabajo donde los procedimientos rutinarios podrían realizarse de forma directa (Thomas, 2004) y donde los trazos geométricos pueden modificarse varias veces aprovechando la característica más poderosa del software: el modo de "arrastre" (Lins, 2004). Por otro lado, las edades de los alumnos de secundaria oscilan entre los 11 y los 15 años, periodo en el que, según Piaget, deberían ser capaces de realizar operaciones abstractas; sin embargo, estudios realizados sobre los niveles de aprendizaje geométrico, según la teoría de Van Hiele, encontraron que los alumnos permanecen al nivel 0, donde identifican y operan con formas de acuerdo a su apariencia; o al nivel 1, donde analizan figuras en términos de sus componentes y relaciones así como establecen propiedades de una clase de figuras de forma empírica (Clements y Battista, 1998), por lo que deben establecerse acciones específicas que les permitan acceder a niveles superiores.

Entre las nuevas tecnologías está la calculadora CAS, la cual cuenta con muchas potencialidades, como la edición de textos, el trabajo con variables, la graficación y tabulación de ecuaciones, y un software geométrico. Un modelo de calculadora CAS (sistema algebraico computarizado), la TI-92 plus de Texas Instruments une las facilidades de una calculadora gráfica y el potencial del software geométrico Cabri II. El presente trabajo de investigación aprovecha las facilidades que ofrece la calculadora TI-92 plus para proponer en las actividades basadas en la geometría dinámica que permiten la construcción de un ambiente de aprendizaje colaborativo. Se buscó establecer las condiciones necesarias para que el alumno se adentrarse en los diferentes contenidos geométricos por medio de la "recreación" de los contenidos de geometría escolares, entendiéndola como un "redescubrimiento" de éstos.

Por otra parte, la geometría se aboca al estudio de formas y sus propiedades. Gran parte de esas formas pueden identificarse en el entorno físico en que nos desenvolvemos; esto sugiere que el estudio de la geometría podría abordarse acudiendo a los ejemplos que se obtienen del entorno físico inmediato, encaminándolo por medio de preguntas específicas y representaciones adecuadas. Sin embargo en ocasiones la dificultad para realizar tales representaciones de forma precisa por medio del papel y el lápiz o el tiempo para modificarlos de acuerdo a los requerimientos del problema obstaculiza el logro del objetivo, provocando un desencanto en el alumno. A menudo las matemáticas son pensadas como abstractas, cuando es posible darles un tratamiento como ciencia "experimental", dándoles a los estudiantes la oportunidad de sorprenderse de lo que han creado y defender sus posiciones, incrementando con ello su habilidad para comunicar ideas matemáticas. Este trabajo experimental podría evitar que los alumnos sean receptores pasivos de las explicaciones de los maestros, o solamente se ejerciten en la aplicación de las técnicas y procedimientos vistos en el pizarrón.

En lo anterior se sustenta el objeto de estudio del presente trabajo que queda definido como: “Investigar de qué manera influye en el aprendizaje de los alumnos de 11-12 años de edad la enseñanza de la geometría mediante las actividades diseñadas para realizarse con apoyo de Cabri II”. Las actividades de enseñanza se organizaron de acuerdo con las fases propuestas por Van Hiele; asimismo el logro de los alumnos se analizó mediante los indicadores de los niveles de aprendizaje señalados también por Van Hiele.

Las siguientes preguntas de investigación pretenden aportar información que permita llegar al objeto antes planteado:

- ¿Qué influencia ejercen las herramientas dinámicas de Cabri II en el establecimiento de un ambiente de aprendizaje para la clase de geometría en la escuela secundaria?;
- ¿Qué influencia ejercen las actividades diseñadas para este estudio en el establecimiento de un ambiente de aprendizaje para la clase de geometría basado en Cabri II?;
- ¿Qué niveles de pensamiento geométrico establecidos por Van Hiele desarrollan los estudiantes cuando trabajan en un ambiente de aprendizaje basado en Cabri II?;
- ¿Qué cambios se observan en las actitudes de los estudiantes hacia las matemáticas cuando trabajan dentro de un ambiente de aprendizaje basado en Cabri II?;
- ¿Cuáles de los problemas de aprendizaje de la geometría reportados en la literatura de investigación se superan cuando trabajan en el ambiente de Cabri II?,
- ¿Cuáles se mantienen y qué otros surgen?

Dichas preguntas de investigación buscan obtener datos sobre la influencia que ejercen en el ambiente de aprendizaje para la clase de geometría, las herramientas dinámicas de Cabri II y las actividades diseñadas. También se pregunta sobre los niveles de pensamiento geométrico, según Van Hiele, que desarrollan los estudiantes cuando trabajan en un ambiente de aprendizaje basado en Cabri II y los cambios que se observan en las actitudes de los estudiantes hacia las matemáticas. Para finalizar, se realiza un análisis sobre los problemas de geometría reportados en la literatura de investigación, cuáles se superan, cuáles se mantienen o cuáles surgen cuando se trabaja en el Ambiente de Cabri II.

Los capítulos de este trabajo de investigación presentan la siguiente secuencia: En el capítulo 1 revisión de la literatura de investigación, referente teórico, metodología, resultados, análisis de resultados y conclusiones. En el capítulo 2 se mencionan dos tipos de reportes que se obtuvieron al realizar la revisión de literatura: los que se refieren a las nuevas tecnologías en general, como son el Internet y las computadoras, y los que se refieren específicamente a la enseñanza y al aprendizaje de la geometría. En el capítulo 3 se presenta una revisión de distintos referentes teóricos, especificando las razones por las que se seleccionó la teoría sobre los niveles del pensamiento geométrico diseñada por Van Hiele, tomando como punto de partida el nivel de pensamiento de los alumnos al iniciar el presente trabajo. En el capítulo 4, sobre la metodología, se presenta de forma más detallada el objeto de estudio, las preguntas de investigación, el método de análisis cualitativo y las fases de investigación (estudio piloto y estudio principal), los sujetos de estudio, el ambiente escolar y las fuentes de datos (cuestionario inicial, hojas de trabajo y entrevistas semiestructuradas). En el capítulo 5 se presentan los resultados, iniciando con las observaciones generales sobre el trabajo de grupo, las observaciones específicas al aplicar las actividades y los resultados de las entrevistas. El análisis de resultados se presenta en el capítulo 6, tanto a la luz de otras investigaciones ya reportadas en el capitulo 2, como a la luz del referente teórico propio de esta investigación. Finalmente, el capítulo 7 incluye las conclusiones y el planteamiento de nuevos problemas que surgen a partir del presente trabajo de investigación.

CAPÍTULO 2
REVISIÓN DE LA LITERATURA DE INVESTIGACIÓN

Este capítulo tiene como propósito ubicar el presente trabajo en el contexto del estado del arte de la temática a que corresponde.

Primero se mencionará lo referente a las **nuevas tecnologías** que se están empleando en el campo de la educación matemática. En esta sección se plantea la incorporación de tales tecnologías al ambiente educativo, señalando las características y los cambios que se presentan en el aula de clases; se describe la introducción de las tecnologías en la educación matemática, en especial a la geometría dinámica, la cual es una herramienta que permite al alumno reunir datos rápidamente y con precisión así como poder abordar problemas superables con relativa facilidad por las características de dicho software; se revisa el caso de la calculadora no como herramienta para el cálculo de operaciones básicas, sino como apoyo para la solución de un problema o su comprobación. En relación con la enseñanza con nuevas tecnologías, se presentan las ventajas y límites para trabajar de forma conjunta entre los alumnos, y el papel del docente al trabajar con nuevas tecnologías, que implica un nuevo perfil como orientador y planeador de clases basado en un ambiente social donde prepondera un espíritu de cuestionamiento.

En la segunda parte del capítulo se presenta lo relacionado con **la enseñanza y el aprendizaje de la geometría.** Se reportan diferentes reflexiones sobre la enseñanza de la geometría, justificándola y analizando el desvanecimiento de su enseñanza como consecuencia del uso de un lenguaje con un grado alto de dificultad que en muchos casos la ha reducido a una secuencia de procedimientos en lugar de que se utilice como una herramienta para el razonamiento. En esa parte se propone la revaloración de la enseñanza de la geometría basándola en la realidad y en el trabajo del profesor quien debe fomentar su aprendizaje por medio de preguntas específicas.

Con lo anterior se presentan las nuevas tecnologías, en especial el uso de la calculadora y del software Cabri II, que están incidiendo en el trabajo dentro del salón de clases; estos cambios plantean un ambiente donde el profesor deje de ser la única fuente de conocimiento y se convierta en el orientador del aprendizaje de la geometría con el apoyo de las nuevas tecnologías, de tal manera que se revalore a la geometría como una parte de las matemáticas íntimamente ligada a la realidad (pregunta de investigación: ¿Qué influencia ejercen las herramientas dinámicas de Cabri II en el establecimiento de un ambiente de aprendizaje para la clase de geometría en la escuela secundaria?).

Finalmente, producto de los reportes de investigación se identifican problemas específicos del aprendizaje de la geometría de donde se desprende otra de las preguntas de investigación del presente trabajo: ¿Cuáles de los problemas de aprendizaje de la geometría reportados en la literatura de investigación se superan cuando trabajan en el ambiente de Cabri II? ¿Cuáles se mantienen? ¿Qué otros surgen?

NUEVAS TECNOLOGÍAS

Incorporación al ambiente educativo.

Cuando se ofrece a los estudiantes la oportunidad de usar la tecnología para explorar la geometría y para generar conjeturas, pueden obtenerse resultados importantes. Es una gran satisfacción para el maestro hacer que el estudiante desarrolle sus “propias” matemáticas y esté deseoso de ver si existen pruebas para sus conjeturas. La generación de conjeturas usando tecnología es deseable; cuando se les da a los estudiantes la libertad de escoger e investigar sus propios modelos, hay más participación de los estudiantes y riqueza matemática en la discusión (Balacheff y Kaput, 1996).

Según Mariotti (2002), el uso de elementos tecnológicos como las calculadoras tiene una doble interpretación. Por una parte, un objeto ha sido construido de acuerdo con un conocimiento específico que asegura el cumplimiento de metas específicas; por otra hay un usuario que hace propio el uso del objeto. En otras palabras, hay un *artefacto*, esto es, un objeto en particular con sus características intrínsecas diseñadas y realizadas con el propósito de cumplir una tarea en particular; asimismo, hay un *instrumento* que es el artefacto y las modalidades de su uso. Rabardel (1995; citado por Mariotti, 2002) menciona que la noción de instrumento se refiere al sujeto y a la contraparte inicial de un uso bien adaptado de un artefacto particular.

Desde la perspectiva del sujeto, un instrumento es la unidad entre un objeto (un artefacto como recurso técnico) y la organización de las posibles acciones (utilización de esquemas que constituyen un conjunto estructurado de invariantes correspondientes a la clase de posibles operaciones). Tales esquemas funcionan como organizadores de la actividad del usuario. De acuerdo con esta definición, un instrumento es una construcción interna, cuyo desarrollo es un proceso a largo plazo; esto significa que, en diferentes momentos, diferentes instrumentos son empleados, a pesar de que realmente el mismo artefacto es usado. Por ejemplo, consideremos un simple y bien conocido artefacto: el compás. Diferentes usos esquemáticos pueden ser asociados con éste y contribuyen a la construcción de diferentes instrumentos, según sea usado para dibujar círculos, trasladar o comparar segmentos y para resolver problemas de construcciones geométricas (Mariotti, 2002).

El papel de la tecnología en la educación matemática debe consistir en estar al servicio de los objetivos que pretendemos para el aprendizaje matemático de los estudiantes (Balacheff y Kaput, 1996). Estos autores proponen que las metas de la educación matemática con relación al papel de las tecnologías pueden ser las siguientes:

- Desarrollar en los estudiantes las habilidades matemáticas que están detrás del cálculo aritmético.
- Mantener en los estudiantes los hábitos del razonamiento matemático: profundidad matemática y argumentación como base del pensamiento lógico.
- Preparar a los estudiantes en el uso sensato y efectivo de las herramientas computacionales y las tecnologías.
- Alimentar una actitud positiva, la curiosidad hacia las matemáticas y el pensamiento matemático (base del aprendizaje a lo largo de la vida)
- Preparar a los estudiantes en la comprensión del conocimiento matemático, no “predigerido” por los maestros y libros, sino como producto de nuestro propio pensamiento y exploración.

La relación entre la formación profesional en matemáticas y la correspondiente en tecnología tiene una larga historia. Por muchos años el conocimiento de las matemáticas fue un requisito para llegar a ser usuario de un equipo de cómputo. Aún ahora, cuando mucha gente utiliza las computadoras para escribir y comunicarse, uno de cada tres programas que se crean está relacionado con las matemáticas (Hirschhorn y Thompson, 1998).

Según Borba (1995), uno de los principales cambios dentro del salón de clases de matemáticas es la disponibilidad actual de computadoras, calculadoras y calculadoras gráficas, junto con un nuevo currículum para dichas herramientas. A este respecto, los Estándares del NCTM (2000) señalan que la tecnología es un componente esencial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, pues influye en los contenidos que se enseñan y apoya el aprendizaje de los estudiantes. Para hacer de la tecnología una parte esencial del salón de clases, las herramientas tecnológicas tienen que ser seleccionadas y usadas de forma que sean compatibles con las metas de instrucción. Una de las prioridades del Plan de Estudios de Secundaria en México (SEP, 1993) es ampliar y consolidar los conocimientos y habilidades matemáticas de los estudiantes, en particular las capacidades para aplicar la aritmética, el álgebra y la geometría en el planteamiento y la resolución de problemas. Las prioridades del Plan de Estudios de Secundaria en México concuerdan con otro de los principios de los Estándares del NCTM (2000), que señala que los estudiantes tienen que aprender matemáticas con entendimiento, construyendo activamente un nuevo conocimiento desde la experiencia y el conocimiento anterior.

Ahora bien, aunque las herramientas tecnológicas son consideradas un material de instrucción esencial para todos los estudiantes (NCTM, 2000) y su incorporación al ambiente educativo resulta obvia, Spiegel (1997) considera que se presentan tres obstáculos en su incorporación:

- Poca especificidad del propósito de la incorporación de las nuevas tecnologías al ambiente escolar.
- Gran parte de los recursos asignados se agotan en la provisión del hardware. Nace un nuevo fenómeno conocido como “obsolescencia tecnológica permanente”, que no es más que la creación continua de nuevas, mejores y más baratas versiones de software y hardware; pero pocas escuelas están en posibilidad de actualizar sus equipos inmediatamente.
- Se supone una homogeneidad de la población. Para planear la integración tecnológica en las escuelas públicas se necesita tomar en cuenta las necesidades y experiencias específicas de la población escolar.

Hirschhorn y Thompson (1998) señalan que no siempre es fácil encontrar un uso efectivo de la tecnología y que el aumento de las computadoras en nuestras escuelas no nos traslada automáticamente hacia la mejora educativa. Estos autores sugieren que para que esto se logre deben cumplirse cuatro condiciones:

- Más apoyo para el desarrollo de software y hardware, pues muchos productos no son comerciales por sus altos costos o su poca demanda. Además, en ocasiones el software adquirido sólo funciona en máquinas recientes, por lo que se requiere actualizarlas.
- Integración de los contenidos de las asignaturas escolares con la tecnología para poder emplearla como un apoyo logístico.
- Desarrollo profesional. La condición necesaria para la implementación tecnológica es una tarea difícil: se debe aprender tanto el uso de la computadora como formas eficientes del uso del software en la enseñanza. Lo último requiere cambios en la pedagogía del maestro, así como en el conocimiento del contenido de enseñanza. Para que la introducción de la tecnología sea verdaderamente exitosa antes es necesario asegurar la colaboración productiva entre maestros, coordinadores de tecnología y desarrolladores de currículum.
- Educación pública. Hay visiones inexactas de lo que las nuevas tecnologías pueden hacer con o para la sociedad desde las muy optimistas hasta las pesimistas. Spiegel (1997) destaca las siguientes posiciones: la apologética, que atribuye a la tecnología efectos infinitamente positivos (facilita el trabajo del hombre y democratiza las relaciones humanas); la apocalíptica, que reconoce a la tecnología como un nuevo instrumento de dominio y explotación; y la mediadora, que considera que la tecnología no es mala ni buena, sino que es el uso el que determina las consecuencias.

Noss y Hoyles (1996) proponen el uso de la computadora para reexaminar la naturaleza de las matemáticas y la educación matemática más allá del simple entendimiento y la correcta reproducción de las ideas; creando y articulando relaciones matemáticas, a este respecto proponen explorar la transformación potencial ofrecida por los *micromundos*. Un micromundo es un medio flexible, interactivo y expresivo; es un ambiente para trabajar con objetos matemáticos y sus operaciones. Algunos de los objetivos de los micromundos son:

- Examinar el rol mediador de las computadoras en el aprendizaje matemático y su efecto en la cultura.
- Crear una epistemología alternativa para las matemáticas que enmarque la importancia del dominio del conocimiento y sea apropiada para el estudiante.
- Replantear las matemáticas y la instrucción matemática; cambiar la noción de la *matemática escolar*.

Para Säljö (1999), dos de las características potenciales de los micromundos (representaciones de un fenómeno o proceso que puede ser explorado por estudiantes) son la *simulación* de eventos y procesos por medio de modelos computacionales, y el poder de *visualización* de modelos y todo tipo de fenómenos complejos. Un micromundo hace observable lo que por naturaleza es inobservable. Säljö señala que una característica psicológicamente interesante de los micromundos es que nos permiten proponer nuevas formas de *interactividad* entre el aprendiz y lo que se aprende.

Spiegel (1997) destaca que las nuevas tecnologías también presentan las siguientes características:

- Programación, capacidad para ejecutar series de instrucciones complejas, como programas de aplicación y utilitarios.
- Flexibilidad en la configuración, la facilidad de intercambiar, agregar o modificar sus características.
- Interactividad, característica que propicia el flujo bidireccional información/retroalimentación entre el usuario y el equipo.
- Multiplicidad de recursos comunicativos, como textos, gráficos, imágenes fijas y móviles, colores, sonidos y animaciones.

- Capacidad de almacenamiento que permite guardar y encontrar rápidamente grandes cantidades de información.
- Velocidad de procesamiento que hace factible tener la capacidad de resolver ágilmente operaciones lógicas y matemáticas.

Clements y Battista (1991) ponen énfasis en las funciones que cumplen las nuevas tecnologías y que no son fáciles de realizar por otros medios, por ejemplo:

- Su capacidad gráfica facilita la construcción de representaciones geométricas.
- Permiten construir un ambiente más preciso que el papel y el lápiz u otros materiales manipulables.
- Las representaciones son manipulables e interactivas.
- Fomentan una aproximación empírica que puede ser consistente con la forma de razonamiento del alumno.
- Los errores en el razonamiento son rápidamente detectados.
- Hay reportes de investigación que sugieren que las nuevas tecnologías pueden ayudar a la transición hacia lo abstracto.

Para Clements y Battista (1991) estas características permiten formular hipótesis como las que se describen a continuación acerca de los ambientes computacionales para el aprendizaje de la geometría:

- Ayudan a los estudiantes a moverse a más altos niveles del pensamiento geométrico.
- Ayudan a los estudiantes a construir un conocimiento más viable.
- Facilitan la precisión y la exactitud en el pensamiento geométrico.
- Actúan como un espejo, reflejando el pensamiento geométrico de los estudiantes hacia los maestros o hacia los estudiantes mismos.

- Ayudan a los estudiantes a moverse de lo empírico al pensamiento lógico y los animan a plantear y probar conjeturas.
- Facilitan el desarrollo en el aprendizaje y las creencias positivas acerca de la creación de ideas matemáticas.

Lo anterior depende de un contexto plurideterminado que es definido por el tipo de aplicación y el entorno cultural en el momento de utilización, el estilo de enseñanza, el interés de los alumnos y la cantidad de equipos disponibles. A este respecto, Bright y Prokosch (1995) hacen notar que diferentes tecnologías tienen diferentes efectos en los estudiantes y parecería que su introducción en el salón de clases altera la forma en que enseñan los maestros. Señalan que los rápidos avances y la disponibilidad de la tecnología han creado nuevos caminos en la forma de enseñanza en las escuelas.

Säljö (1999) reporta que al usar la computadora no se puede asegurar que los estudiantes sean capaces de construir conceptos, pero pueden usarlos para darle sentido a lo que aparece en la pantalla. Esos conceptos que utilicen los estudiantes, aunque no estén totalmente desarrollados, tienen un significado instrumental respecto a sus tareas. La tecnología provee oportunidades para la manipulación de modelos y conceptos en una manera que quizá sea viable para aprender. La tecnología incrementa el rango y naturaleza de la experiencia, y ésta puede ser aprovechada para aprender materias que son complejas y abstractas. El carácter interactivo de la tecnología moderna puede favorecer formas de razonamiento que permitan amplificar la naturaleza del modelo científico para el tratamiento de las relaciones entre objetos.

Spiegel (1997) propone que para obtener un escenario alternativo se debe:

- Maximizar el nivel de aprovechamiento de las nuevas tecnologías dentro de la escuela, utilizándola críticamente para enriquecer el estudio de las distintas disciplinas.
- Crear las condiciones para el desarrollo de un rol crítico del docente frente a las nuevas tecnologías.
- Proponer un abordaje que abra las posibilidades para la utilización significativa de las nuevas tecnologías, independizándose de la necesidad de tener “los modelos más recientes”.

Spiegel (1997) también señala que su utilización plena requiere de condiciones como las siguientes:

- Un corrimiento del eje de las evaluaciones y controles vigentes desde lo cuantitativo a lo cualitativo que se refleje en los condicionantes de tiempo para avances y logros.
- Asistencia técnica. El docente en computación debería preparar a los alumnos en el uso de la computadora, programas utilitarios y de aplicación, así como las telecomunicaciones.
- Disponibilidad plena de las nuevas tecnologías.
- Alentar la exploración, colaboración en pares, respeto y riqueza de las diferencias, aceptación de los distintos ritmos e intereses y tomar el error como un paso en la construcción del conocimiento.
- Desarrollo y evaluación de la creatividad y la inteligencia para buscar y seleccionar información, abandonando los objetivos enciclopédicos tanto de alumnos como de maestros.
- Alentar el uso (no como obligación) de las nuevas tecnologías por parte de la escuela.

En resumen, Spiegel (1997) señala que de considerar los aspectos anteriores se logrará tener una escuela dinámica por sí misma, enriquecida y potenciada con las nuevas tecnologías.

Las tecnologías en la educación matemática: geometría dinámica

Dado el impacto que la tecnología computacional ha tenido en un periodo relativamente breve, parece que ésta continuará siendo incorporada rápidamente en la práctica escolar. Entonces, es más urgente identificar los puntos cruciales alrededor de los cuales se organiza el uso de computadoras y las nuevas tecnologías relacionadas con ellas. Se necesita entender cómo y por qué las nuevas tecnologías influyen e influirán en la educación matemática (Mariotti, 2002).

Balacheff y Kaput (1996) señalan que entre los factores que afectan las formas de trabajo en las aulas están el surgimiento de las calculadoras gráficas, las computadoras, las nuevas tecnologías de la comunicación y las tecnologías computacionales interactivas. Por otra parte, también ejercen influencia el incremento gradual de las matemáticas en el plan de estudios y otros currículos que requieren medios computacionales. También debe considerarse el efecto del reemplazo del personal escolar que fue educado antes de las tecnologías electrónicas por gente que creció dentro de la riqueza tecnológica mundial. Asimismo, ya puede apreciarse el impacto de la reciente integración de la tecnología de las comunicaciones y computadoras que alienta nuevas expectativas para la educación a distancia. Dominios recientemente explorados en este ámbito son la telepresencia, el salón virtual y las intervenciones de enseñanza por pedido y a distancia. Hirschhorn y Thompson (1998) destacan cinco tipos de usos de la tecnología en el presente y futuro de la educación matemática: computadoras, calculadoras, Internet, dispositivos de entrada y de salida.

Para los matemáticos, uno de los desarrollos más importantes en la tecnología ha sido el incremento en el número de herramientas para reducir la complejidad que representa el paso de lo concreto a lo abstracto en la geometría, el álgebra y en general en toda las matemáticas. Aun más espectacular es el arribo al campo de la teoría del caos, que permite entre otras cosas, ver la creación de bellos patrones. Otra conexión entre las matemáticas y el arte se puede establecer con las teselaciones (software “tessellmania” poner ficha técnica o fecha e incluir en bibliografía) y con imágenes de fractales. Estos ejemplos apoyan la práctica de las matemáticas como una ciencia experimental.

Según Hirschhorn y Thompson (1998), a menudo las matemáticas son pensadas como abstractas, pero las nuevas tecnologías permiten visualizarla y hacen que sea más fácil acercarse a ellas; aunque continúan siendo abstractas. Algunas piezas de software de geometría dinámica han cambiado radicalmente las posibilidades para la exploración geométrica, presentando a los estudiantes un tratamiento de las matemáticas como ciencia “experimental” y un acercamiento más sencillo a contenidos matemáticos complejos. Las computadoras no sólo dibujan figuras u otros objetos o permiten jugar, sino que hacen posible relacionar las imágenes con el mundo.

La incorporación de tales tecnologías ofrece una oportunidad para cambiar significativamente el currículum dando acceso a tópicos matemáticos que aún se postergan para niveles superiores, sin embargo gran parte de la responsabilidad de los educadores matemáticos es mantenerse al corriente de dichos desarrollos. Tanto Cabri como Geometer Sketch Pad son piezas de software dinámico que permiten determinar una figura y distorsionarla una y otra vez por medio del “arrastre” directo de alguno de sus elementos (vértices, ángulos, lados,…), siempre que éstos no sean producto de otro trazo, y al realizar dichos cambios se mantienen las condiciones dadas en su definición. Por otra parte, el software estático no permite distorsionar la figura una vez situada en la pantalla, por lo que debe regresarse a las condiciones iniciales y rehacer la figura cada vez que se quiere modificar.

Dinámicos o estáticos, estos recursos permiten a los estudiantes reunir datos rápidamente y con precisión a partir de diferentes ejemplos, una tarea que sería frustrante si se intentara con papel y lápiz.

Balacheff y Kaput (1996) plantean que las nuevas tecnologías pueden propiciar nuevos enfoques de enseñanza basados en la interactividad; estas tecnologías permiten abordar problemas con el apoyo de un amplio rango de soluciones numéricas, en lugar del espectro limitado de las técnicas simbólicas. Pero la pregunta real y fuerte es discernir qué tanto del aspecto manipulativo del álgebra puede ser eliminado. La transposición computacional de los objetos matemáticos requiere exploración y selección cuidadosa de las situaciones ofrecidas a los estudiantes. Para los autores muchos de los problemas clásicos planteados en la clase de matemáticas llegan a ser obsoletos por las herramientas que ofrece Cabri II, abriendo la posibilidad de diseñar problemas que están fuera del alcance de las construcciones con papel y lápiz.

Hershkowitz *et al.* (2002) señalan que las herramientas de geometría dinámica (por ejemplo la versión dinámica de Geometry Supposer, Cabri, Geometer Sketchpad y Geometry Inventor) permiten al estudiante “arrastrar” los elementos de una figura, permitiendo la producción de un conjunto infinito de variantes a partir de la misma figura que poseen los atributos genéricos de ésta. Este método de variación de presentaciones en el software, a partir de un elemento geométrico, resuelve problemas de ambigüedad que aparecen al tomar una figura específica de toda una clase como representación única.

Los investigadores indican que los estudiantes iniciados en las tareas con geometría dinámica son capaces de capitalizar con figuras ambiguas el aprendizaje de los conceptos geométricos. Goldenberg, Cuoco y Mark (1998) señalan que la geometría dinámica ofrece un interesante ambiente de trabajo en el que se observa a los estudiantes construir y reconstruir definiciones de categorías de conceptos geométricos, porque les permite transgredir sus propios límites permitiendo un tipo de desequilibrio que de alguna manera deben resolver. La confusión puede ser benéfica o destructiva. El entendimiento de cómo lo estudiantes resuelven tales conflictos aportará mejores usos del software, tanto para maximizar las oportunidades como para minimizar los riesgos de la confusión creada por la trasgresión de las definiciones aceptadas.

Hershkowitz *et al.* (2002) mencionan que el software de geometría dinámica permite el diseño de actividades en las que los estudiantes investigan las propiedades relevantes de las figuras por medio del “arrastre”. Más específicamente, una actividad bien diseñada puede permitir a los estudiantes construir la altura de un triángulo acutángulo y después arrastrar el vértice de tal forma que vean la altura moverse fuera del triángulo.

Para Lins (2004), una de las características más poderosas de Cabri es el modo de “arrastre” que permite la deformación de figuras y las ideas de independencia y dependencia pueden ser exploradas para establecer relaciones entre los puntos de una figura. También aclara que el software que llega al ambiente del salón de clases no sólo es el software educativo, sino es un software que cada maestro ha adaptado a las necesidades y metodología de su clase para cumplir sus propósitos, es decir una versión personalizada.

La llegada de los ambientes de geometría dinámica conduce a preguntar cuál es el lugar de la *demostración* en el currículum, porque la convicción por parte del usuario puede ser obtenida de manera rápida y relativamente fácil (Hershkowitz *et al*, 2002). La operación de arrastre sobre un objeto geométrico permite a los estudiantes englobar a toda una clase de objetos en los que el atributo de interés es invariante y por lo tanto se convencen por sí mismos de la veracidad del atributo invariante. El propósito de la demostración es, entonces, proveer los medios para establecer determinada conjetura como un teorema, explicarnos por qué es verdadero, y permitir mayores generalizaciones.

Los investigadores han estudiado cómo se desempeñan los estudiantes en ambientes de aprendizaje computarizados cuando éstos enfrentan actividades basadas en preguntas abiertas, conjeturas y revisión de propiedades invariantes en una figura. Yerushalmy y Chazan (1987) puntualizan la importancia del planteamiento de problemas en el diseño de actividades de geometría. A este respecto, De Villiers (1999) ilustra cómo se pueden enriquecer las investigaciones en ambientes de geometría dinámica planteando preguntas como “¿Qué tal si…?” para hacer generalizaciones y descubrimientos. Él señala que en este caso la búsqueda de la demostración es un viaje intelectual dirigido a entender por qué la conclusión es verdadera, no un ejercicio epistemológico enfocado a tratar de establecer la verdad. Goldenberg, Cuoco y Mark (1998) sugieren que la demostración, especialmente para principiantes, puede ser motivada por la incertidumbre de no saber qué es verdad, o por la necesidad de explicar por qué un fenómeno ocurre. En muchas ocasiones una demostración es tan obvia que parece vacía y ritualista.

Dreyfus y Hadas (1996) proponen que la apreciación del estudiante hacia la demostración puede ser lograda por medio de actividades en las que la investigación empírica permita sucesos inesperados y sorprendentes. Actividades de este tipo permiten a los estudiantes experimentar la necesidad de una prueba para explicar los hallazgos sorprendentes que obtuvieron y ver la necesidad de plantear conclusiones correctas.

Diferentes tipos de actividades como las que se sugieren de manera general, fueron desarrolladas en el proyecto CompuMath, por ejemplo:

- Actividades que cuestionan la comprensión, en las que el hecho geométrico descubierto como invariante es sorprendente. Esta sorpresa pone en funcionamiento el porqué de la prueba como respuesta para la incertidumbre. Por ejemplo, si a un estudiante se le pide trazar las bisectrices de un triángulo en papel, muchos las trazarán intersecándolas en un punto. Entonces no hay sorpresa si verifican este hecho con el software de geometría dinámica pues visualizarán que sus trazos están bien y no sentirán necesidad de la prueba. Cuando el mismo resultado es obtenido como el producto de una investigación no trivial respecto al número de puntos de intersección de las bisectrices de un cuadrilátero, la oportunidad de sorprenderse se ha creado y, entonces, cuando se ve el caso del triángulo los estudiantes se sorprenden porque no esperaban que las bisectrices de un triángulo se corten en un sólo punto.

- Construcciones bajo condiciones no certeras, con las cuales los estudiantes tratan de construir una figura satisfaciendo las condiciones dadas.
- Actividades en las que las opciones gráficas y de medición del software de geometría dinámica son usadas para presentar las variaciones dinámicas de un fenómeno geométrico en tiempo real, tanto en modo numérico como gráfico. En ese contexto, las preguntas y las hipótesis establecidas en un modo pueden ser contestadas en el otro modo enriqueciendo de esta forma la investigación.
- Actividades en las cuales no se puede encontrar algún ejemplo para una conjetura hecha. Las situaciones de incertidumbre parecen permitir el dilema antes mencionado. ¿Debería continuar la búsqueda empírica o entender la imposibilidad? Con un cuidadoso diseño basado en la experimentación y en el análisis cognitivo de las acciones de los estudiantes, pueden construirse situaciones en las que ellos sientan la necesidad de una demostración.

Por otro lado, algunas personas piensan que si los estudiantes usan calculadoras nunca aprenderán las bases del cálculo aritmético. Sin embargo, hay plena evidencia de que el uso apropiado de las calculadoras puede incrementar los logros matemáticos, así como promover actitudes positivas hacia las matemáticas. Las calculadoras pueden agregar una riqueza significativa a la experiencia matemática de los estudiantes (Balacheff y Kaput, 1996).

Se han identificado tres generaciones de calculadoras gráficas: calculadoras científicas con pantallas grandes (TI-82, por ejemplo), que tienen herramientas más versátiles con un amplio rango de funciones matemáticas (por ejemplo, Casio

9850 G) y las que tienen sistemas computacionales para álgebra (CAS) y de geometría dinámica (por ejemplo, TI-92). Indudablemente, la llegada de la TI-92 (Texas Instruments) impulsó el uso de las calculadoras en la clase de matemáticas. En términos simples, la TI-92 es la integración de Derive y Cabri II en una simple calculadora de bolsillo.

Wong Ngai-Ying (2003) reporta que el uso de las calculadoras para el aprendizaje de las matemáticas provocó mucha discusión, particularmente en los tópicos de habilidades computacionales y aritmética mental. Suydam (1979) mostró que las calculadoras no eliminan las habilidades básicas si primero han sido desarrolladas en un ambiente libre de calculadoras; por lo que el punto de discusión es sobre cómo y cuándo las calculadoras deben ser introducidas.

Branca, Breedlove y King (1992) proponen cinco preguntas que los maestros deben contestar al usar calculadoras:

- ¿Las calculadoras permiten al estudiante acercarse a los conceptos matemáticos presentados?
- ¿El uso de la calculadora en una actividad matemática incrementará la confianza y la perseverancia del estudiante?
- ¿El concepto podría ser enseñado con un método inductivo?
- ¿El uso de calculadoras facilitaría el estudio de aplicaciones de la vida real?
- ¿Usar la calculadora permitiría la evaluación enfocada en los objetivos educativos relevantes?

Thomas (2004) reporta que el uso de la calculadora CAS en la clase de matemáticas no es un proceso fácil y breve, sino que toma tiempo. Su investigación muestra que los estudiantes iniciaban con aprender el uso de los botones y menús para acceder a los procedimientos de la calculadora revisando a menudo el instructivo.

El proceso de tomar decisiones sobre cuándo y cómo usar la calculadora para la resolución de problemas tiene obstáculos posteriores. Este proceso puede iniciarse con procedimientos ligados a una pregunta y después proceder a revisar casos donde la calculadora sea usada para explorar ideas conceptuales que impliquen diversos procedimientos y representaciones.

Thomas (2004) propone los siguientes casos para el uso de la calculadora CAS:

- Realización de procedimientos directos. Se usa la calculadora para cálculos simples, en lugar de hacerlos a mano.
- Revisión de procesos realizados a mano. Una vez realizado el trabajo a mano, se comprueba el resultado con la calculadora.
- Realización de un procedimiento directo complejo para facilitar el trabajo o porque el procedimiento es difícil de realizar a mano.
- Realización de un procedimiento dentro de un proceso más complejo, posiblemente para reducir el peso cognitivo. El uso de la calculadora se da como parte de la resolución de un problema más grande.
- Investigar una idea conceptual.

Ball y Kaye (2004) señalan que cuando los alumnos aprenden matemáticas por medio de una calculadora CAS, pueden usar una combinación de calculadora y papel y lápiz, y decidir cuándo es más eficiente utilizar la calculadora, basados en su experiencia previa y en su competencia personal al utilizar la calculadora o el papel y lápiz. También señala que la evaluación del trabajo con la calculadora debe ser de un tipo distinto a la forma tradicional. Las mismas autoras señalan que el estudiante que aprende matemáticas con calculadora CAS está más cerca de desarrollar nuevas formas de hacer y recordar matemáticas.

Las tecnologías y el papel del docente

La incorporación de nuevas tecnologías al ambiente educativo requiere importantes cambios contextuales que permitan desarrollar un nuevo papel del docente y, por lo tanto, un nuevo perfil de sus alumnos. Los Estándares del NCTM (2000) señalan que las decisiones para incorporar nuevas tecnologías también exigen que los maestros estén preparados y apoyen su uso para lograr las metas de instrucción. Los maestros deben experimentar cómo la tecnología puede reforzar un aprendizaje significativo de las matemáticas y explorar modelos de incorporarla en su práctica escolar. Es más, la tecnología tiene que ser colocada en el programa de matemáticas en lugar de ser únicamente tratada como otro agregado motivador. Sin la implementación de un plan coherente y comprensivo para la incorporación de la tecnología es probable que fracase el intento de mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Aunado a esto, Balacheff y Kaput (1996) señalan que los maestros no pueden explotar las nuevas tecnologías en su práctica diaria si ellos no están bien informados sobre sus posibilidades en el proceso didáctico.

Martínez *et al.*(1989) analizan el nuevo rol que debe jugar el profesor, sin olvidar que éste no representa un cambio total o un abandono de su función clásica como profesor, lo proponen más allá de orientador, guía y animador, y sugiere que debe cumplir un papel más amplio acorde con las nuevas exigencias de la sociedad. Balacheff y Kaput (1996) señalan que los maestros, usando programas de construcción geométrica, tratan de crear ambientes experimentales donde se fomente el aprendizaje cooperativo y la exploración del estudiante. Consideran los ambientes basados en computadora, no como un sistema aislado de inteligencia artificial, sino como parte de un sistema más amplio que incluye al maestro.

Borba (1995) señala que el uso de las nuevas tecnologías en el salón de clases debería ser una forma de conectar la vida de los estudiantes en la escuela con sus vidas fuera de ella, donde los videojuegos, la televisión interactiva y los juegos de computadora son cada día más populares. Para establecer esta conexión, recomienda que los profesores usen tareas en que los alumnos puedan jugar con las nuevas tecnologías, así como dirigir sus investigaciones. Sugiere que este cambio libera a los estudiantes de las situaciones donde los cálculos y dibujo de gráficas son difíciles y sin valor pedagógico en ese momento. Sin embargo, señala que es necesario que el estudiante aprenda a “enfrentar” las imprecisiones de la máquina, el diferente entendimiento de la sintaxis algebraica y la operación de una variedad de software. Hirschhorn y Thompson (1998) señalan que no hay razón para que los estudiantes pasen mucho tiempo con operaciones; ese énfasis puede ser re-orientado a la resolución de problemas y al desarrollo del sentido numérico. Las nuevas tecnologías permiten descubrir patrones a través del análisis exploratorio de datos.

Para Battista (1998), las responsabilidades de los maestros deben ser:

1. Seleccionar tareas de instrucción y guiar el trabajo de los estudiantes para que su pensamiento se vuelva más sofisticado. Esto incluye:
    - La selección de secuencias de tareas problemáticas que estén basadas en el conocimiento detallado de cómo los estudiantes construyen los significados de tópicos matemáticos específicos, así como los avances conceptuales que los estudiantes pueden lograr con esos tópicos durante el curso de la instrucción.
    - La evaluación continua de los progresos de aprendizaje de los estudiantes y el ajuste de la instrucción.
    - La motivación de los estudiantes para reflejar sus experiencias matemáticas.
2. Establecer un ambiente social que soporte un espíritu de cuestionamiento y trabajo cooperativo en grupos pequeños. Éste incluye la explicación, la ilustración con ejemplos y el recordatorio regular de las responsabilidades de los estudiantes.
3. Fomentar el diálogo productivo entre los estudiantes. Esto incluye:
    - Motivar a los estudiantes para que expliquen y justifiquen sus ideas matemáticas.

- Resaltar conflictos entre la interpretación de los estudiantes o la solución.
- Fomentar las contribuciones de los estudiantes.
- Redescribir las ideas de los estudiantes en una forma más sofisticada, pero de modo que las puedan entender.
- Introducir conceptos matemáticos, simbolismo y terminología apropiada para que los estudiantes los puedan usar al comunicar el desarrollo de sus propias ideas.

Lo propuesto por Battista concuerda con las recomendaciones que se presentan en el Libro para el Maestro de Matemáticas de Educación Secundaria (SEP, 1993b), donde se señala que es necesario que las actividades en el salón de clases se adapten a los diferentes intereses y ritmos de aprendizaje, evitando que los alumnos sean receptores pasivos de las explicaciones de los maestros, o solamente se ejerciten en la aplicación de las técnicas y procedimientos vistos en el pizarrón. Lo anterior debe realizarse en un ambiente de trabajo donde los alumnos puedan explicitar y comunicar su pensamiento sin temores, al mismo tiempo que se apropian gradualmente del vocabulario y los medios de expresión que les proporcionan las matemáticas.

Según Borba (1995), las nuevas tecnologías también introducen la necesidad de cambios en los educadores, pues alteran la “ecología” del salón de clases. Una de las principales características de su introducción es *la pérdida parcial del control*, tanto de la información como de la atención de los alumnos. Los maestros, entonces, deben ser educados en el uso de las nuevas tecnologías y en cómo disminuir *la inseguridad del “no saber”* usarlas con la misma destreza de sus alumnos.

Para Spiegel (1997), la capacitación del docente tiene que proporcionar habilidades y contenidos, propiciar la adquisición y desarrollo de estrategias y habilidades técnicas, fomentar la dinámica grupal y el conocimiento disciplinar.

También debe incluir:

- La reflexión del docente respecto a la clase que actualmente dicta y su comparación con la que quisiera tener.
- La presentación de las nuevas tecnologías al docente en el marco de sus características y posibilidades en el proceso enseñanza–aprendizaje.
- La reflexión respecto al uso actual de las nuevas tecnologías en la escuela.

Bright y Prokosch (1995) señalan que las escuelas de educación media constituyen un momento ideal para que los estudiantes adquieran un dominio en el uso de las tecnologías de todas las clases. Pero señala que primero es necesario que los maestros exploren personalmente el potencial del uso de las nuevas tecnologías en el aprendizaje de las matemáticas y en la comunicación de las ideas con la ayuda de ellas; sólo entonces los maestros podrán empezar a experimentar con mayor éxito el uso de la tecnología en la educación.

ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA

Freudenthal (1970) destaca que a lo largo de la historia las matemáticas, éstas han ocupado un lugar importante en muchas de las culturas, dando como resultado el surgimiento de grandes avances en sus diferentes ramas. Sin embargo, al revisar tanto el currículum escolar como los resultados educativos, las matemáticas continúan siendo un “lenguaje” con alto grado de dificultad. Freudenthal plantea la pregunta: ¿Cuál es el aporte de la “educación matemática” que permita un aprendizaje apegado a la realidad, significativo y de acuerdo con los “tiempos” de cada alumno? Comenius (citado en Freudenthal, 1970) postula que la mejor forma de enseñar a una persona es mostrándole lo que se tiene que hacer hasta que tarde o temprano se da la imitación en los estudiantes, lo cual abarca más que la lección; los educadores modernos señalan que la mejor forma de aprender es haciéndolo. Así como la natación no puede ser enseñada desde los libros, tampoco convence que la ciencia vista como una actividad sea aprendida con lecturas y libros, sino explorándola. Sin embargo, la respuesta tradicional de la educación como una "transferencia de la cultura" sigue prevaleciendo. La posición cultural es peligrosa al ofrecer a la juventud un material ya terminado. La educación que se provee debería crearle a la juventud la oportunidad de adquirir la herencia cultural por medio de sí mismos. Los didactas modernos necesitan, además de enseñar, dar a los alumnos la oportunidad de reinventar por sí mismos la disciplina. Este es un refuerzo moderno a la idea socrática. Recordemos que las matemáticas constituyen una actividad de búsqueda y resolución de problemas, pero también es una actividad de organización de la disciplina misma (Freudenthal, 1970).

El NCTM (2000) señala que los estudiantes deberían ver a las matemáticas como un campo de estudio excitante, útil y creativo. Durante su estancia en la escuela, muchos estudiantes solidificarán sus concepciones matemáticas, sus actitudes, su interés y su motivación. En la escuela secundaria cada estudiante seguirá sus propios tiempos de desarrollo. Algunos progresan rápidamente y otros más lentamente. Las diferencias en el desarrollo intelectual, madurez emocional y la sensibilidad de los individuos hacen especialmente importante para los maestros crear un ambiente en el salón de clases en el cual haya normas claramente establecidas que soporten el aprendizaje de cada alumno.

Las matemáticas, según Battista (1998), son una forma de razonamiento y no la ejecución de una secuencia de procedimientos. Hacemos matemáticas con nuestra mente, no con nuestras manos o herramientas. Hacer matemáticas es pensar de una manera lógica, formular y conjeturar demostraciones, plantear conclusiones, juicios e inferencias. Se hace matemáticas cuando se resuelven problemas que tienen un significado genuino para nosotros. Un principio fundamental en la investigación reciente, basado en teorías científicas del aprendizaje de las matemáticas, es que deberían estar fundamentadas en el cuestionamiento, de manera que los estudiantes aprendan matemáticas mediante la resolución de problemas y el compartimiento de ideas mediante la formulación de preguntas, el pensamiento crítico, la invención y el discurso de la clase.

En el marco de la cultura del cuestionamiento, Battista (1998) propone como responsabilidades de los estudiantes las siguientes:

- Intentar resolver y dar sentido a todos los problemas que se les propongan.
- Explicar a otros miembros de la clase cómo razonaron y justificar las soluciones de los problemas.
- Escuchar e intentar dar sentido a las explicaciones y soluciones de problemas proporcionadas por otros estudiantes. Esto incluye el pedir la aclaración si una explicación no es entendida o si las estrategias no parecen razonables.
- Trabajar cooperativamente con otros estudiantes, incluyendo el intento de llegar a un consenso sobre la solución de problemas, mientras se respeten los derechos de otros para derivar o justificar soluciones diferentes.

Si los estudiantes no están acostumbrados a participar dentro de una cultura de cuestionamiento en la clase de matemáticas, puede tomarles algunas semanas llegar a sentirse cómodos y competentes en ese ambiente de aprendizaje. Necesitarán una discusión explícita de esta nueva forma de trabajar, así como colocar letreros y mostrar ejemplos en clase sobre sus responsabilidades. Las discusiones en clase pueden ayudar a los estudiantes a desarrollar un lenguaje y un conjunto de conceptos para describir sus ideas (Battista, 1998).

Freudenthal (1970) señala que las matemáticas han sido divididas en varias ramas y en ocasiones parecería que no todas han recibido la misma atención y valoración. Con el transcurso del tiempo y como parte de una serie de eventos históricos, la geometría fue cada vez menos tomada en cuenta. En muchas ocasiones, el lugar de la geometría fue tomado por el álgebra, y en otras, las matemáticas se asumieron como campo de prácticas de la aritmética. La geometría representa un sistema conceptual bien definido y ampliamente relacionado con la realidad, empezó con el espacio físico como una organización de las experiencias espaciales del aprendiz. Muchos didactas de hoy rechazan el espacio físico como algo que tiene que ser organizado por los matemáticos, pero nadie puede rechazar que vivimos en ese espacio.

Freudenthal (1973) menciona que la geometría se asumió como un sistema conceptual perfecto, donde las cosas rigurosamente se seguían unas de otras y finalmente se unía todo por definiciones y axiomas. La geometría no sólo fue la pieza más poderosa de las ciencias deductivas, fue también el ejemplo didáctico más antiguo y más mencionado. Ahora algunos matemáticos creen que la geometría falló porque no fue suficientemente deductiva. En la opinión de Freudenthal (1973) la falla fue que el acercamiento deductivo a la geometría no fue tomado como reinvención, como lo hizo Sócrates, sino que fue impuesta a los aprendices. Por sus relaciones cercanas con la lógica, la geometría fue siempre considerada como una disciplina de la mente, más que cualquier otra parte de las matemáticas. Un programa pragmático de geometría puede restringirse a un pequeño tesoro de teoremas como el Teorema de Pitágoras, algunos teoremas obvios sobre figuras, perímetros, áreas y volúmenes. Un sistema así no requiere un sistema lógico de geometría.

¿Qué es la geometría? Freudenthal (1973) piensa que esta pregunta se puede contestar de dos formas: en el nivel más alto, por su organización axiomática; pero atento a los principios de la educación, él propone que la geometría esté en el nivel más bajo, el nivel base, en el que la geometría se concibe como el espacio donde el niño tiene que aprender a explorar, conquistar, respirar y mover. La geometría realmente es parte de las matemáticas y como tal pide más fundamentos concretos. Cuando las matemáticas van a ser enseñadas deben unirse estrechamente a la realidad. De esta forma la geometría puede ser un medio excelente para enseñar unas matemáticas llenas de relaciones. Si la geometría experimental significa que el estudiante haga experimentos, gran parte de su actividad matemática debería ser como es la actividad de un matemático creativo.

El Libro del Maestro de matemáticas (SEP, 1993) señala que la enseñanza de la geometría en México tuvo un gran descenso, entre otras razones porque en el programa oficial de matemáticas fue ubicada al final, sólo antes de la estadística y la probabilidad (las cuales tienen una problemática similar). Para remediar esta situación se recomienda que durante los tres grados la geometría se estudie a lo largo de todo el ciclo escolar, de manera que los alumnos puedan practicarla constantemente, sin que ninguno de los temas sea dejado en su totalidad al final, relacionándola con los contenidos de las demás ramas de las matemáticas, con la realidad y el resto de las ciencias.

Martínez *et al*. (1989) señalan la importancia de introducir la geometría en el marco de la educación obligatoria, pues esta disciplina está presente en múltiples ámbitos del sistema productivo, representa un aspecto importante en el estudio de los elementos de la naturaleza, es un componente esencial del arte y de las artes plásticas, y porque el conocimiento básico de la forma geométrica es indispensable para el desenvolvimiento en la vida cotidiana.

Para Battista (1998), la geometría es una forma de comprender la realidad y su enseñanza puede posibilitar esta acción. Según Piaget (citado en Battista, 1998), la comprensión real de una noción o una teoría implica su reinvención por parte del sujeto; esto implica que los estudiantes no aprenden por recepción o absorción de ideas ya definidas. Piaget postula que se aprende por reflejo y abstracción de acciones físicas y mentales que se desarrollan mientras se interactúa intencionalmente con el ambiente físico y social. La instrucción debería ayudar a cada estudiante a construir ideas matemáticas y teorías que son más complejas, abstractas y poderosas que otras que ya poseen. Con frecuencia ignoramos las formas presentes del pensamiento de los estudiantes y nos esforzamos en imponer métodos;

la actividad del sentir-hacer del estudiante es sofocada. Los estudiantes cambian desde el pensamiento intelectualmente autónomo a la dependencia al seguir reglas del libro de texto o del maestro.

El niño estudia la geometría, pero un día pregunta: ¿Por qué?, y llega así a la clave de la materia. Sólo los “asesinos de gusto” revelarían la clave previamente. El “milagro” de poner a prueba a los niños es preparar la madurez para la geometría sistemática. En el nivel inicial el niño está “pensando” por medio de sus manos y ojos; y continuará de esa forma hasta que empiece a reconsiderar esto conscientemente. El error de muchos es presionar muy temprano con ayuda de algoritmos para estimular las acciones en un nivel al que no ha llegado. Freudenthal (1973) propone que si la inversión antididáctica es aplicada, una exposición deductiva empieza con las definiciones (geometría tradicional). El maestro puede imponer un conjunto de definiciones, pero esto significa degradar a las matemáticas a algo parecido a “reglas para prescripciones arbitrarias”. La geometría tradicional fue enseñada como un sistema deductivo y considerada la única parte de las matemáticas acorde a un sistema, mientras que otras partes eran sólo colecciones de reglas; pero las cosas han cambiado. En tal aproximación rígida no se da la oportunidad al niño de explorar el espacio y los cuerpos en él, para “organizar” las materias, para “inventar” definiciones y deducciones. El sistema construido puede ser una de las armas de la educación matemática y quizá un arma realista que provea esa organización de la materia. Un sistema impuesto, sin embargo, provee al estudiante de una organización en un nivel bajo para su aprendizaje. Para Freudenthal (1970) la axiomatización es otra forma de “matar” a la geometría. Ésta es más o menos al estilo de Hilbert, con una larga lista de axiomas, muchos de ellos trivialmente parecidos. Lo que es interesante en un sistema axiomático es construir y verificar que esté completo, es revisar que la geometría se pueda coordinar, primero organizándola globalmente para conseguir un sistema axiomático, “cortando” las partes y después restaurándolas en un sistema completo. Los matemáticos activos, sin embargo, conocen muchos niveles de rigor y un buen maestro debería respetarlos

Thorpe (1989) señala que la enseñanza de la geometría ha tenido diferentes enfoques, y ha sido influenciada por las diversas propuestas, análisis y reflexiones diseñadas por diferentes investigadores, educadores matemáticos, psicólogos y profesores, entre otros. La enseñanza de la geometría debe ser revalorada, relacionándola con las diferentes áreas de las matemáticas y sobre todo aplicándola a la realidad. La enseñanza actual del álgebra (y de las matemáticas en general) no ha cambiado de como se hacía hace cincuenta años, mientras que las matemáticas y sus aplicaciones han cambiado radicalmente. Thorpe (1989) señala que es tiempo de reflejar dichos cambios, tiempo de una reevaluación mayor de los contenidos. Dicha reevaluación necesariamente empieza con la revisión de las metas de enseñanza. Los estudiantes deberían incrementar su potencial para ver los elementos matemáticos en una situación, usándolos para llegar a conclusiones pertinentes, llevando a cabo el proceso con confianza y responsabilidad. Debería enseñarse por medio de repetición y práctica cuando sea necesario reforzar y automatizar habilidades (es decir, que se adquiera el dominio de éstas). Se tienen nuevas herramientas como las calculadoras y computadoras. El uso de esas herramientas revoluciona la enseñanza.

Para Manouchehri y Lapp (2003), uno de los más notables aspectos de la enseñanza es que la intervención del maestro consista en preguntar. Las preguntas que el maestro hace a sus alumnos son centrales para el tipo de aprendizaje que tiene lugar en el salón de clases. Naturalmente, las preguntas están construidas alrededor de varias formas de pensamiento. Algunas preguntas están dirigidas a recordar la información, mientras que otras provocan la resolución de problemas o desarrollan conceptos. En un sentido general, las preguntas de los maestros controlan el aprendizaje de los alumnos, porque enfocan la atención de los estudiantes en características específicas del concepto que se explora en clase. Más aun, estas preguntas establecen y validan las percepciones de los estudiantes acerca de lo que es importante saber para tener éxito en la clase de matemáticas.

Una de las más importantes estrategias para el cuestionamiento efectivo es identificar, desde antes, las grandes ideas de la lección que se vaya a examinar y los logros matemáticos que los estudiantes pueden tener. Manouchehri y Lapp (2003) sugieren que en la planeación de la instrucción, el maestro tiene que considerar preguntas como las siguientes:

- ¿Qué es lo que quiero que los estudiantes sepan al final de la lección o unidad y cómo saber que realmente lo aprendieron?
- ¿Cómo se relacionan los nuevos conceptos con los ya discutidos en clase y cómo evaluar que los estudiantes realizan las conexiones?
- ¿Cuáles son algunas de las interpretaciones erróneas del concepto que estoy enseñando y cómo puedo determinar si mis estudiantes tienen esas interpretaciones?
- Si mi meta es medir los diferentes niveles de entendimiento de los estudiantes sobre determinado concepto, ¿qué preguntas debería hacerles?
- ¿Cuándo debería pedir ayuda a los estudiantes para distinguir similitudes y diferencias entre varios métodos y técnicas?
- ¿Qué preguntas puedo hacer que me permitan determinar cuándo los estudiantes pueden usar el procedimiento en contexto? ¿Cuándo los estudiantes pueden usar el procedimiento en una situación nueva sin decirles?
- ¿Cómo debería plantear cada pregunta para detectar las necesidades de los estudiantes de varias habilidades?

Para establecer un ambiente que fomente el aprendizaje de la geometría por medio del descubrimiento, se recopilaron extractos de varios autores de tal manera que dicho ambiente permita explorar el uso de la computadora (y en este caso el software) en la búsqueda de las características que puedan ayudar a concretar modelos de clase alternativos e identificar las nuevas posibilidades que estos ofrecen (Spiegel, 1997). En tal ambiente deben aprovecharse las posibilidades que presentan las nuevas tecnologías, las características específicas de Cabri II y las ventajas que representa su uso en la clase de matemáticas. Entre las características del ambiente se encuentran la exploración interactiva con objetos geométricos (Clements y Battista, 1991; Spiegel, 1997); la presentación y recuperación rápida de la información, la agilidad en la realización de actividades rutinarias, el respeto de las propiedades geométricas y la facilidad de diseño y rediseño de objetos geométricos (Spiegel, 1997).

La finalidad de establecer un ambiente de aprendizaje por medio del descubrimiento es promover una clase en donde el trabajo esté enfocado en que el alumno tenga la oportunidad de formular y justificar conjeturas e inferencias en el contexto de la geometría plana (Battista, 1998; Spiegel, 1997); aprender a razonar, comunicar, hacer conexiones conceptuales y resolver problemas en contextos espaciales y geométricos (Battista, 1998); manipular y reflejar numerosos ejemplos, en lugar de intentar comprender definiciones verbales (Battista, 1998; Säljö, 1999); promover desarrollos mentales dinámicos -representaciones mentales estructuradas del mundo real- (Battista 1998); y propiciar el aprendizaje activo (Spiegel, 1997).

Este ambiente de aprendizaje debe tomar en cuenta las experiencias, personalidad, intereses, conocimientos, intenciones y preferencias del maestro y de los alumnos (Wragg, 1994), promover que los alumnos utilicen su capacidad creadora en sus descubrimientos personales, en sus motivaciones intrínsecas (Hischhorn y Tompson, 1998; Martínez *et al*. 1989), realizar tareas en trabajo colaborativo (Spiegel, 1997); negociar tanto en el juego como en el trabajo formal de manera que se combinen las ideas entre los elementos del grupo (Bruner, 1984); estudiar en un ambiente donde los estudiantes controlen la exploración (Hischhorn y Thompson, 1998) y en general promover una interacción entre el estudiante y lo que aprende (Säljö, 1999).

El objetivo del ambiente es que el alumno aprenda a su propio ritmo (Spiegel, 1997); vaya avanzando de niveles de pensamiento geométrico, pasando del nivel 1 al 2 y hacia un parcial tratamiento del nivel 3 según Van Hiele (Battista, 1998), los ayude a moverse de lo empírico al pensamiento lógico (Clements y Battista, 1991), los estimule y motive (Martínez *et al*. 1989; Szendrei, 1996; Spiegel, 1997; es decir vean a las matemáticas como un campo de estudio excitante, útil y creativo (NCTM, 2000) al alimentar una actitud positiva y la curiosidad hacia las matemáticas y el pensamiento matemático (Hischhorn y Thompson, 1998) mediante la integración del currículum con la tecnología, en este caso Cabri II (Hischhorn y Thompson, 1998) y el uso de las características únicas del software para incrementar el aprendizaje (Salomon y Gardner, 1986, citado en Bright y Prokosch, 1995).

Resumen e implicaciones

En este capítulo se da sustento del presente trabajo, en especial a la pregunta de investigación que pide revisar la influencia que ejercen las herramientas dinámicas de Cabri II en el establecimiento de un ambiente de aprendizaje para la clase de geometría en la escuela secundaria, e influye en la interpretación de los resultados obtenidos. Se retomarán las ideas y posturas teóricas de los autores citados con relación a la incorporación de las nuevas tecnologías en la enseñanza de la geometría, en especial las calculadoras CAS; las posibilidades que presenta el trabajo con un software basado en la geometría dinámica; el rol del docente y las habilidades matemáticas de los alumnos mostradas al trabajar de forma cooperativa.

Con base en los trabajos de los diversos autores discutidos en este capítulo, nos proponemos atender principalmente los aspectos que se tomarán en cuenta para el diseño e instrumentación del trabajo de campo:

- La disponibilidad de calculadoras CAS como un recurso de acceso individual de los estudiantes durante todas las sesiones en el salón de clases. Esto, considerando las recomendaciones del NCTM (2000), que señala que la tecnología es un componente esencial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, y a Säljö (1999), quien reporta que la tecnología incrementa el rango y la naturaleza de la experiencia lo cual puede ser aprovechado en asignaturas que son complejas y abstractas. En el caso de la calculadora, ésta nos permite la realización rápida de cálculos simples o complicados en lugar de hacerlos “a mano”, así como la comprobación de dichos cálculos

- La incorporación de Cabri II en la clase ofrece una oportunidad para cambiar significativamente el currículum dando nuevas formas de introducirse a tópicos matemáticos diferentes o complementarios al uso del lápiz y papel, maximizando las oportunidades de un mejor entendimiento. La primera característica importante del software es que permite determinar una figura y distorsionarla una y otra vez por medio del “arrastre” directo de alguno de sus elementos (vértices, ángulos, lados,…) sin alterar las condiciones iniciales. Otra característica importante es la posibilidad de producir un conjunto infinito de diseños a partir de la misma figura, permitiendo presentar las variaciones dinámicas de un fenómeno geométrico.

- Debe haber un cambio en el **papel que desempeña el docente** dentro del salón de clases. De acuerdo con Spiegel (1997), debe alentar la exploración, la colaboración en pares, el desarrollo de la creatividad, abandonando los objetivos enciclopédicos. Asimismo, consideramos lo planteado por Borba (1995), quien señala que las nuevas tecnologías alteran la “ecología” del salón de clases y provocan la pérdida parcial de la “disciplina”.

- El trabajo colaborativo permite incrementar logros académicos, pues propicia mejores habilidades comunicativas cuando los estudiantes tienen que explicar sus estrategias con sus propias palabras y quienes los escuchan entienden la materia más claramente, y presenta interacciones grupales, sociales y académicas más exitosas cuando a los estudiantes se les requiere explicar, elaborar y defender sus posiciones, forzándolos a pensar más profundamente.

- Una de las principales características de la introducción de las nuevas tecnologías, en este caso de la calculadora TI-92 y del software Cabri II, es *la pérdida parcial del control* tanto de la información como de la atención de los alumnos. A cambio, su introducción propicia que el alumno asuma un rol más participativo al poseer un dominio mayor de las nuevas tecnologías e intentar resolver y dar sentido a los problemas que se le planteen. El desempeño del estudiante es influenciado por la discusión con sus compañeros, por lo que desarrolla su lenguaje, nuevos conceptos y nuevas formas de interactuar con sus compañeros.

- La enseñanza de la geometría debe dar oportunidad a los alumnos de reinventarla por sí mismos. De acuerdo con Freudenthal (1970), las matemáticas son una actividad de búsqueda y resolución de problemas. Su enseñanza debe verse como un campo de estudio excitante, útil y creativo (NCTM, 2000).

- La intervención del maestro debe consistir en el planteamiento de preguntas como una parte central para el tipo de aprendizaje que tiene lugar en el salón de clases (Manouchehri y Lapp, 2003). Naturalmente, las preguntas deben estar construidas alrededor de varias formas de pensamiento. Algunas preguntas deben estar dirigidas a recordar la información, mientras que otras deben provocan la resolución de problemas o el desarrollo de conceptos.

Todos estos señalamientos buscan, según Noss y Hoyles (1996), el replanteamiento de las matemáticas y de la instrucción matemática así como al cambio de la noción de las matemáticas escolares.

CAPÍTULO 3
REFERENTE TEÓRICO

En este capítulo se mencionan las posturas sobre el desarrollo del pensamiento geométrico que se emplean como referente teórico para el presente trabajo

Como se hace evidente en el desarrollo de este capítulo, el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría exige condiciones para que los estudiantes puedan progresar relacionando esta disciplina con el resto de los contenidos escolares. El proceso de aprendizaje de los alumnos sigue una serie de pasos que muestran que los avances se van dando poco a poco, iniciando con actividades concretas hasta avanzar a los dominios de la argumentación rigurosa. Por otro lado, también es necesario que el proceso de enseñanza aprendizaje siga estrategias claramente determinadas que permitan logros de acuerdo con fines establecidos previamente.

En el período de 1930 a 1950 un grupo de educadores matemáticos y psicólogos soviéticos se abocaron a estudiar las causas de las dificultades que se presentan en esta asignatura. Wirszup (1976) reportó que el cambio más radical en el currículum soviético de geometría fue introducido gracias a las investigaciones inspiradas en psicólogos y educadores occidentales. Este autor cita a Jean Piaget y a P. M. Van Hiele, educador alemán cuyo trabajo sobre la intuición en el aprendizaje de la geometría atrajo la atención de los soviéticos.

Se reportó que la desaparecida URSS revisó sustancialmente su currículum con base en los niveles de aprendizaje de Van Hiele, cuyo trabajo se centró en las dificultades que encontraban sus estudiantes con la geometría de la escuela secundaria y propuso entre sus conclusiones que esta disciplina requiere un nivel de pensamiento relativamente alto y que los estudiantes no cumplen el prerrequisito de poseer suficiente experiencia en niveles de pensamiento más bajos. Su trabajo de investigación propone niveles de pensamiento en geometría y relaciona esto con la instrucción para ayudar a lo estudiantes a moverse de un nivel al siguiente. Aquí se señalan las bases para plantear la pregunta de investigación que pide el nivel de pensamiento geométrico que desarrollan los estudiantes cuando trabajan en un ambiente de aprendizaje basado en Cabri II.

La concepción del espacio: Piaget

La teoría de PIAGET (1970) descubre los estadios de desarrollo cognitivo desde la infancia a la adolescencia: cómo las estructuras psicológicas se desarrollan a partir de los reflejos innatos, se organizan durante la infancia en esquemas de conducta, se interiorizan durante el segundo año de vida como modelos de pensamiento, y se desarrollan durante la infancia y la adolescencia en complejas estructuras intelectuales que caracterizan la vida adulta. PIAGET divide el desarrollo cognitivo en cuatro periodos importantes:

- Etapa Sensoriomotora (0 a 24 meses). La conducta del niño es esencialmente motora, no hay representación interna de los acontecimientos externos, ni piensa mediante conceptos.
- Etapa Preoperacional (2 a 7 años). Es la etapa del pensamiento y la del lenguaje que gradúa su capacidad de pensar simbólicamente, imita objetos de conducta, juegos simbólicos, dibujos, imágenes mentales y el desarrollo del lenguaje hablado.
- Etapa de las Operaciones Concretas (7 a 11 años). Los procesos de razonamiento se vuelen lógicos y pueden aplicarse a problemas concretos o reales. En el aspecto social, el niño ahora se convierte en un ser verdaderamente social y en esta etapa aparecen los esquemas lógicos de seriación, ordenamiento mental de conjuntos y clasificación de los conceptos de casualidad, espacio, tiempo y velocidad.

- Etapa de las Operaciones Formales (11 años en adelante). En esta etapa el adolescente logra la abstracción sobre conocimientos concretos observados que le permiten emplear el razonamiento lógico inductivo y deductivo. Desarrolla sentimientos idealistas y se logra formación continua de la personalidad, hay un mayor desarrollo de los conceptos morales.

Los principales temas de esta teoría son la representación del espacio y la organización progresiva de las ideas geométricas. De acuerdo con el autor la representación del espacio se construye mediante una organización motora progresiva del niño, quien interioriza acciones que resultan en sistemas operativos. En otras palabras, la representación del espacio es un conocimiento que se construye mediante la manipulación activa del ambiente. El niño hereda capacidades específicas y únicas de la especie humana. Estas capacidades no son independientes, sino que tienen influencia específica con el medio y determinan las cuatro etapas sucesivas del desarrollo. En un sentido realista, los individuos en desarrollo se proyectan a sí mismos y al mundo que los rodea. No registran en forma exclusivamente pasiva las cosas que perciben como ocurre en una cámara fotográfica, sino que transforman y organizan activamente las impresiones sensoriales dentro de sus estructuras cognoscitivas. Para conocer los objetos, el sujeto debe actuar sobre ellos y luego transformarlos; tiene que desplazar, conectar, combinar, separar y juntar de nuevo. Desde las más elementales acciones sensoriomotoras (como empujar y jalar), hasta las operaciones intelectuales más sofisticadas, que son acciones interiorizadas ejecutadas mentalmente (como unir una cosa con otra, poner en orden, poner una cosa frente a la otra), el conocimiento constantemente está ligado a la acción o a las operaciones, es decir a las transformaciones.

Como el conocimiento objetivo no se obtiene solamente por el registro de una información externa, sino que tiene su origen en interacciones del sujeto con los objetos, éstas se dan mediante dos tipos de actividad: por una parte la coordinación de las acciones mismas entre sí y, por otra, la introducción de interrelaciones entre los objetos. Las dos actividades son dependientes entre sí, pues esas relaciones solamente pueden producirse mediante la acción. De aquí se concluye entonces que el conocimiento objetivo siempre está subordinado a ciertas estructuras de acción. Pero dichas estructuras son el producto de una construcción y no emanan de los objetos.

Piaget (1970) señala que el desarrollo de conceptos espaciales más sofisticados involucra incrementos sistemáticos y coordinados de acciones. Durante los primeros estadios de desarrollo, los niños son básicamente pasivos en sus exploraciones. Por ejemplo, los niños pueden percibir la forma de los objetos y sus acciones son resultado de una experiencia táctil; observar otras características de las formas geométricas involucra otras acciones y otro tipo de percepción. Cuando los niños regulan tales acciones estableciendo relaciones entre ellas, pueden construir una nueva representación de la forma. Esto ocurre cuando la acción mental llega a ser reversible y se puede coordinar con otra acción en un todo coherente.

Desde esta perspectiva, la abstracción de la forma no es una percepción abstracta propiamente física, sino que es el resultado de acciones motoras coordinadas del niño. Hacer un dibujo es una representación, no una percepción. Piaget encontró que un dibujo inexacto refleja lo inadecuado de las herramientas mentales de representación espacial. También señala que cuando el niño copia formas geométricas, representa las primeras características topológicas de éstas. Por ejemplo, en el estadio cero (debajo de los tres años) no hay propósito o meta que pueda ser distinguida; el niño simplemente garabatea. En el subestadio 1A (hasta los tres años once meses) un círculo es dibujado como una curva irregular cerrada y los cuadrados y triángulos no son distinguidos de los círculos. Aunque el niño no distingue entre figuras con lados rectos o curvos, hay una correcta interpretación de las propiedades topológicas.

En el estadio II (cuatro años) hay una progresiva diferenciación de las formas euclidianas. El criterio de este estadio es la reproducción exitosa de cuadrados y rectángulos. Las relaciones euclidianas como los ángulos y la inclinación se desarrollan lentamente. Los objetos perceptiblemente semejantes se clasifican como iguales. Sólo hasta el estadio III (7 a 11 años) lo anterior se supera, cuando las mismas cosas son agrupadas correctamente en dos o más clases diferentes.

En el estadio IV (11 años a la adolescencia) de las operaciones formales se señala que cuando el niño llega a la adolescencia, entra en la etapa más avanzada de las operaciones cognoscitivas. Ahora puede manejar algo más que las operaciones concretas y reales de la etapa anterior; puede pensar en forma lógica sobre cosas abstractas (cosas que sólo existen en la mente), puede crear teorías y sacar conclusiones lógicas sobre sus consecuencias, aun sin haber obtenido experiencia directa al respecto. Una vez dominada la descentralización y la reversibilidad, y pudiendo ahora pensar en abstracto, el niño puede resolver problemas abstractos y, en general, pensar como un hombre de ciencia.

Resumiendo, Piaget hizo una descripción del desarrollo del ser humano en cuatro etapas, las cuales presentan cambios cualitativos en el pensamiento de los niños y el ordenamiento de estos cambios depende enormemente de los factores de maduración. Los factores del medio pueden acelerar o retardar la aparición de las etapas sucesivas.

Teoría de la ciencia cognitiva: Anderson y Greeno

Otra perspectiva que ha sido aplicada al aprendizaje de la geometría es la aportada por las ciencias cognitivas. Bajo tal perspectiva, se intenta integrar la investigación y el trabajo teórico de psicólogos, filósofos, lingüistas y especialistas en inteligencia artificial.

Uno de los modelos de la ciencia cognitiva es el *modelo de Anderson* (1983), que postula dos tipos de conocimiento: el declarativo y el procesal. El conocimiento declarativo es “el saber qué”; por ejemplo, los postulados y teoremas son establecidos en esquemas de conocimiento acerca de sus funciones, formas y precondiciones. El conocimiento procesal es “el saber cómo” y se concreta en la forma de sistemas de producción. De acuerdo con este modelo, el conocimiento inicialmente viene en forma declarativa y tiene que ser interpretado por procedimientos generales. El aprendizaje en esta teoría involucra las siguientes categorías: (a) la adquisición del conocimiento declarativo, (b) la aplicación del conocimiento declarativo a nuevas situaciones por medio de búsqueda y analogías, (c) la compilación de producciones de dominio específico, y (d) la intensificación del conocimiento declarativo y procesal. Desde esta perspectiva, una clave importante para el éxito en la resolución de problemas geométricos es el desarrollo de reglas de datos y el manejo de ellas. Estas reglas responden a la configuración de la información y a resultados en posteriores desarrollos del problema.

El *Modelo de Greeno* (1980) sobre resolución de problemas geométricos es similar al modelo cognitivo de Anderson. Se basa en estudiar las estrategias que usan estudiantes de sexto a noveno grados en la resolución de problemas geométricos. Para esto fue diseñado un simulador de computadora que resolviera los problemas de la misma forma que los estudiantes. La simulación se basó en la producción de sistemas considerando tres formas de desempeño que reflejan los tres tipos de dominio de la geometría que requerían los estudiantes para resolver los problemas dados. Primero, se les plantearon proposiciones con la finalidad de que los estudiantes formularan inferencias, que constituyen el principal paso en la resolución de determinados problemas geométricos. Después de esto, los conceptos percibidos fueron usados para reconocer patrones involucrados en los antecedentes de muchas proposiciones. Por último, se usaron los principios estratégicos detectados en el trabajo de los estudiantes para plantear un conjunto de metas y planeaciones. Los estudiantes debían adquirir estos conocimientos a través de la inducción de secuencias de pasos observados en ejemplos de resolución de problemas. Los principios estratégicos inducidos se presentaron como procedimientos tácitos, involucrando procesos que los estudiantes pueden desarrollar pero no pueden describir o analizar.

Además de lo anterior, se incluyó en el diseño del simulador el concepto de *redes de distribución paralela de procesos*. Una red consiste en unidades de procesamiento que representan objetos conceptuales tales como características, palabras, objetos y conexiones con cargas activas entre esas unidades. Esto forma el patrón de interconexiones entre las unidades que constituyen el sistema de procesamiento de estructuras de conocimiento. Durante el nivel de precognición se forman las unidades de redes neurálgicas que reconocen características visuales que ocurren comúnmente y puedan ser reconocidas. Las formas son reconocidas cuando patrones de ligas entre las características llegan a establecerse y a posibilitar que el niño responda a cualquier clase de estímulo visual. El estudiante progresa al nivel visual cuando un número suficiente de características llegan a reconocerse y sus detectores se interconectan en patrones que corresponden a formas comunes. En este nivel, las redes de detectores de unidades sirven como reconocedoras de formas con patrones de activación que representan esquemas iniciales de figuras. Las propiedades de las figuras no son reconocidas explícitamente, las características visuales que involucran esas propiedades simplemente activan el prototipo reconocido. De esta manera, el estudiante llega a ser capaz de captar las características visuales y entonces reconocer las propiedades de las formas.

Niveles del pensamiento geométrico: Van Hiele

Van Hiele (Fuys, Geddes y Tischler, 1988) señala que los estudiantes progresan a través de varios niveles del pensamiento en geometría y pasan por éstos en forma secuenciada. Los alumnos que no tienen el nivel que se requiere tienden a memorizar y a no darle sentido a los conceptos.

El modelo de Van Hiele es un proceso evolutivo que involucra análisis de las fuentes de información (reacciones de los sujetos). Este modelo se divide en los niveles de pensamiento que a continuación se enlistan:

Los descriptores del nivel cero juegan un rol diferente de los descriptores de los demás niveles. El nivel cero es análogo a los cimientos de una construcción y representa el tipo de pensamiento que inicialmente poseen la mayoría de los estudiantes. Por supuesto, también se considera que algunos estudiantes no son capaces de hacer todos los tipos de acciones listadas abajo, posiblemente por falta de experiencia en el área de estudio o por aprendizajes erróneos o incompletos. En este nivel el estudiante identifica y opera con formas (por ejemplo, cuadrados y triángulos) y otras configuraciones geométricas (por ejemplo, líneas y ángulos) de acuerdo con su apariencia.

El nivel 1 es visual y los estudiantes analizan figuras en términos de sus componentes y relaciones entre éstos, establecen propiedades de una clase de figuras empíricamente y usan propiedades para resolver problemas.

El nivel 2 es descriptivo/analítico, aquí los estudiantes formulan y usan definiciones, dan argumentos informales sobre propiedades que descubren, siguen y dan argumentos deductivos; reconocen y pueden caracterizar formas por sus propiedades y la apariencia pasa a ser secundaria; las propiedades son establecidas experimentalmente por observación, medición, dibujo y modelación. Los estudiantes tienden a nombrar todas las propiedades que saben en lugar de sólo las suficientes y no ven relaciones entre clases de formas.

El nivel 3 es abstracto/correlativo, por lo que el estudiante establece teoremas e interrelaciones entre redes de teoremas dentro de un sistema de postulados; puede formular definiciones abstractas, distinguir las condiciones necesarias y suficientes de una clase de formas, entiende y algunas veces provee argumentos lógicos en el dominio geométrico. El estudiante puede clasificar formas jerárquicamente y dar argumentos informales para justificarlas; puede descubrir propiedades de clases de figuras por deducción informal.

El nivel 4 es descriptivo/analítico, los estudiantes establecen teoremas rigurosamente en diferentes sistemas de postulados, así como analizan y comparan esos sistemas; pueden probar teoremas formalmente dentro de un sistema axiomático y reconocen la diferencia entre términos indefinidos, definiciones, axiomas y teoremas. Los estudiantes pueden razonar empleando lógica formal para interpretar enunciados geométricos.

Cada uno de los niveles del pensamiento geométrico antes mencionados se divide en descriptores, los cuales señalan los rasgos más específicos que van logrando los estudiantes hasta llegar al nivel 4.

Descriptores del Nivel 0

- **Nivel 0.1:** El estudiante identifica formas por su apariencia como un todo.
    - **Nivel 0.1A:** En un dibujo simple, diagrama o conjunto de recortes.
    - **Nivel 0.1B:** En diferentes posiciones.
    - **Nivel 0.1C:** En configuraciones más complejas.
- **Nivel 0.2:** El estudiante construye, dibuja o copia formas.
- **Nivel 0.3:** El estudiante nombra o etiqueta formas u otras configuraciones geométricas, usa nombres formales o no formales y etiqueta apropiadamente.
- **Nivel 0.4:** El estudiante compara y agrupa formas con base en la apariencia de éstas como un todo.
- **Nivel 0.5:** El estudiante describe verbalmente formas por la apariencia de éstas como un todo.
- **Nivel 0.6:** El estudiante resuelve problemas rutinarios operando con las formas en lugar de usar propiedades de aplicación general.
- **Nivel 0.7:** El estudiante identifica partes de una figura, pero:
    - **Nivel 0.7A**: No analiza una figura en términos de sus componentes.
    - **Nivel 0.7B:** No piensa en las propiedades como caracterizaciones de una clase de figuras.
    - **Nivel 0.7C:** No hace generalizaciones acerca de formas y uso del lenguaje relacionado.

Descriptores del Nivel 1. Visual

- **Nivel 1.1:** El estudiante identifica y prueba relaciones entre componentes de figuras (por ejemplo, congruencia de lados opuestos de paralelogramos, congruencia de ángulos en un patrón).
- **Nivel 1.2:** El estudiante recuerda y usa apropiadamente el vocabulario para referirse a componentes y relaciones (por ejemplo, lados opuestos, congruencia de ángulos correspondientes, diagonal que biseca a otra).
- **Nivel 1.3:** El estudiante
    - **Nivel 1.3A:** Compara dos formas de acuerdo con la relación entre sus componentes.
    - **Nivel 1.3B:** Agrupa figuras de diferentes modos de acuerdo con ciertas propiedades, incluyendo un tipo para todas las clases.
- **Nivel 1.4:** El estudiante:
    - **Nivel 1.4A:** Interpreta y usa descripciones verbales de una figura en términos de sus propiedades y las usa para dibujar o construir la figura.
    - **Nivel 1.4B:** Interpreta de forma verbal o simbólica las reglas y las aplica.
- **Nivel 1.5:** El estudiante descubre propiedades de figuras específicas empíricamente y generaliza propiedades para esa clase de figuras.
- **Nivel 1.6.** El estudiante:
    - **Nivel 1.6A:** Describe una clase de figuras (por ejemplo, paralelogramos) en términos de sus propiedades.
    - **Nivel 1.6B:** Describe la forma de una figura dando algunas de sus propiedades.
- **Nivel 1.7:** El estudiante identifica qué propiedades usar para caracterizar una clase de figuras, tanto para aplicarlas a otra clase de figuras como para comparar clases de figuras de acuerdo con sus propiedades.

- **Nivel 1.8:** El estudiante descubre propiedades de una clase de figuras no conocida.
- **Nivel 1.9:** El estudiante resuelve problemas geométricos usando propiedades conocidas de figuras o por acercamientos.
- **Nivel 1.10:** El estudiante formula y usa generalizaciones acerca de propiedades de figuras (guiados por el maestro, material educativo o espontáneamente) y usa el lenguaje relacionado (por ejemplo, todos, algunos, ninguno), pero:
  - **Nivel 1.10A:** No explica cómo están interrelacionadas ciertas propiedades de una figura.
  - **Nivel 1.10B:** No formula o usa definiciones formales.
  - **Nivel 1.10C:** No explica la relación entre subclases a pesar de revisar ejemplos específicos o dar una lista de propiedades.
  - **Nivel 1.10D:** No ve la necesidad de comprobación o explicación lógica de generalizaciones descubiertas empíricamente y no usa lenguaje relacionado correctamente (ejemplo, si – entonces, porque).

Descriptores del Nivel 2. Descriptivo/analítico

- **Nivel 2.1:** El estudiante:
  - **Nivel 2.1A:** Identifica diferentes conjuntos de propiedades que caracterizan una clase de figuras y prueba que esas son suficientes.
  - **Nivel 2.1B:** Identifica un conjunto mínimo de propiedades que puede caracterizar una figura.
  - **Nivel 2.1C:** Formula y usa una definición de una clase de figuras.
- **Nivel 2.2:** El estudiante da argumentos informales (usando diagramas, cortando formas que han sido dobladas u otros materiales):
  - **Nivel 2.2A:** Que lo conducen a establecer una conclusión, la cual justifica usando relaciones lógicas.

  - **Nivel 2.2B:** Ordenando clases de figuras.
  - **Nivel 2.2C:** Ordenando dos propiedades.
  - **Nivel 2.2D:** Descubriendo nuevas propiedades por deducción.
  - **Nivel 2.2E:** Interrelacionando varias propiedades en un diagrama de árbol.
- **Nivel 2.3.** El estudiante da argumentos deductivos informales:
  - **Nivel 2.3A:** Que siguen la línea de la argumentación deductiva y pueden sustituir partes del argumento.
  - **Nivel 2.3B:** Que proporcionan un resumen o variación de un argumento deductivo.
- **Nivel 2.4:** El estudiante proporciona más de una explicación para probar algo y justifica esas explicaciones usando diagramas de árbol.
- **Nivel 2.5:** El estudiante reconoce informalmente diferencias entre un enunciado y su opuesto.
- **Nivel 2.6:** El estudiante identifica y usa estrategias o razona perspicazmente para resolver problemas.
- **Nivel 2.7:** El estudiante reconoce la función del argumento deductivo y aborda problemas de una manera productiva, pero:
  - **Nivel 2.7A:** No capta el sentido de la deducción en un sentido axiomático (por ejemplo, no ve la necesidad de definiciones y suposiciones básicas).
  - **Nivel 2.7B:** No distingue formalmente entre un enunciado y su opuesto.
  - **Nivel 2.7C:** Aún no establece interrelaciones entre las redes de teoremas.

Descriptores del Nivel 3. Abstracto/correlativo

- **Nivel 3.1:** El estudiante reconoce la necesidad de los términos no definidos, definiciones y suposiciones básicas (por ejemplo, postulados).

- **Nivel 3.2:** El estudiante reconoce las características de una definición formal (por ejemplo, la condición de necesario y suficiente) y la equivalencia de definiciones.
- **Nivel 3.3:** El estudiante prueba en un conjunto axiomático las relaciones explicadas informalmente en el nivel dos.
- **Nivel 3.4:** El estudiante prueba las relaciones entre un teorema y enunciados relacionados (por ejemplo, opuesto, inverso y contrapositivo).
- **Nivel 3.5:** El estudiante establece interrelaciones entre redes de teoremas.
- **Nivel 3.6:** El estudiante compara y contrasta diferentes pruebas de teoremas.
- **Nivel 3.7:** El estudiante examina efectos de cambiar una definición inicial o postula en una secuencia lógica.
- **Nivel 3.8:** El estudiante establece un principio general que unifica algunos teoremas diferentes.
- **Nivel 3.9:** El estudiante crea pruebas para un conjunto simple de axiomas, frecuentemente usando un modelo para mantener argumentos.
- **Nivel 3.10:** El estudiante proporciona argumentos deductivos formales pero no investiga la axiomática en sí ni compara sistemas axiomáticos.

Descriptores del Nivel 4. Descriptivo/analítico

- **Nivel 4.1:** El estudiante establece teoremas rigurosamente en diferentes sistemas axiomáticos (por ejemplo, la propuesta de Hilbert para los fundamentos de la geometría).
- **Nivel 4.2:** El estudiante compara sistemas axiomáticos (por ejemplo, las geometrías euclidianas y no euclidianas); espontáneamente explora cómo los cambios en los axiomas afectan el resultado de la geometría.
- **Nivel 4.3:** El estudiante establece la consistencia de un conjunto de axiomas, independencia de un axioma, y la equivalencia de diferentes conjuntos de axiomas; crea un sistema axiomático para la geometría.

- **Nivel 4.4:** El estudiante inventa métodos generalizados para resolver clases de problemas.
- **Nivel 4.5:** El estudiante busca el contexto más amplio en el cual un teorema o principio matemático aplicaría.
- **Nivel 4.6:** El estudiante hace un análisis a fondo del sujeto lógico para desarrollar nuevos descubrimientos y acercamientos hacia inferencias lógicas.

Van Hiele hizo observaciones acerca de la naturaleza general de dichos niveles de pensamiento y su relación con la enseñanza. P. M. Van Hiele puso énfasis en que en cada nivel aparece de forma extrínseca lo que fue intrínseco en el nivel que precede. En el nivel 0 el estudiante define las figuras por sus propiedades, aunque no se dé cuenta de ello. También establece que los niveles están caracterizados por diferencias en el objeto de pensamiento. Por ejemplo, en el nivel 0 el objeto de pensamiento son figuras geométricas; en el nivel 1 los estudiantes operan con objetos, englobados en clases de figuras (las cuales son producto de las actividades del nivel 0) y descubren propiedades para esas clases; en el nivel 2, esas propiedades son el objeto y el estudiante les da un orden lógico.

Cada nivel tiene su propio lenguaje simbólico y su propio sistema de relaciones que conectan estos símbolos. La estructura del lenguaje es un factor crítico en el movimiento a través de los niveles de Van Hiele, desde una estructura global (concreto, nivel 0), estructuras geométricas visuales (niveles 1-2) y estructuras abstractas (niveles 3-4). Dando énfasis a la importancia del lenguaje, Van Hiele nota que muchas dificultades en la enseñanza de la geometría son resultado de una barrera del lenguaje.

A manera de síntesis, las **principales características** de los niveles de Van Hiele son:

- Los niveles son secuenciados.

- Cada nivel tiene su propio lenguaje, conjunto de símbolos, y red de relaciones.
- Lo que está implícito en un nivel llega a ser explícito en el próximo.
- El material enseñado a los estudiantes anteriormente a su nivel es la base para el siguiente nivel.
- El progreso de un nivel al próximo es más dependiente de la experiencia de enseñanza que de la edad o madurez.
- Se va a través de varias fases procediendo de un nivel al próximo.

Durante la transición del nivel 1 al 2, el estudiante empieza descubriendo que algunas combinaciones de propiedades de una clase implican otras propiedades. A este respecto, Battista (1998) reporta que el 70% de los estudiantes de secundaria empiezan en el nivel 0 ó 1 de Van Hiele; este hecho puede explicar por qué los cursos de geometría en la escuela secundaria arrojan resultados poco satisfactorios.

Fases de cada nivel de aprendizaje

Fuys, Geddes y Tischler (1988) señalan que para Van Hiele el progreso de un nivel a otro depende más de la instrucción y de los tipos de experiencias de instrucción que pueden afectar el progreso, que de la edad o la maduración biológica. De acuerdo con esto, el maestro desempeña un papel especial en la facilitación de este progreso, específicamente proporcionando guías sobre las expectativas de sus estudiantes. Muchos logros de los estudiantes están directamente controlados por el maestro y el currículum. La teoría de Van Hiele propone que el acceso a niveles superiores no se da por la vía directa del profesor, sino por medio de una selección de actividades de enseñanza.

Van Hiele (citado por Fuys, Geddes y Tischler, 1988) propone que el progreso de un nivel al siguiente involucra cinco fases: información, orientación guiada, explicación, libre orientación e integración. Estas fases se describen esquemáticamente a continuación.

Fases	Rol del estudiante	Rol del maestro
Fase 1 Información	Se familiariza con los contenidos (examina ejemplos y contraejemplos).	Discute materiales clasificando el contenido, busca la disposición del niño, aprende cómo interpretar su lenguaje y proveer información. Lo atrae hacia la acción y percepción determinada.
Fase 2 Orientación Guiada	Se familiariza con los objetos de los que son abstraídas las ideas geométricas. Está activamente involucrado en la exploración de objetos (medición, doblado, etc.).	Dirige la actividad para guiar a exploraciones apropiadas (tareas cuidadosamente estructuradas y secuenciadas paso a paso, obteniendo respuestas específicas) en las cuales el estudiante manipula objetos. Debe seleccionar materiales y tareas en las que los conceptos y procedimientos sobresalgan.
Fase 3 Explicación	Toma conciencia de las relaciones y conceptos geométricos. Empieza a elaborar su conocimiento intuitivo y lo describe en su propio lenguaje, aprende algo del lenguaje tradicional matemático	Proporciona los objetos de estudio para un nivel específico de conocimientos y conduce la discusión en el lenguaje de los estudiantes. Introduce la terminología matemática relevante.
Fase 4 Libre Orientación	Resuelve problemas cuya solución requiere la síntesis y la utilización de conceptos y la relación previamente elaborada.	Selecciona materiales apropiados y problemas geométricos con múltiples maneras de resolución. Anima a que los alumnos reflejen y elaboren sus soluciones. Introduce términos, conceptos y procesos de solución tanto relevantes como necesarios.
Fase 5 Integración	Construye un resumen de todo lo que ha aprendido	Anima a reflejar y consolidar el conocimiento geométrico de sus estudiantes,

	acerca de los objetos de estudio, integrando su conocimiento a una red coherente que puede ser fácilmente descrita y aplicada.	incrementando el énfasis en el uso de las estructuras matemáticas como un marco de consolidación.

Resumen e implicaciones

En la teoría de Piaget la representación del espacio es un conocimiento que se da mediante la manipulación activa del ambiente. En el presente trabajo se intentó propiciar tal situación por medio del uso de Cabri II. En los modelos Anderson y Greeno el aprendizaje involucra la adquisición del conocimiento declarativo, la aplicación del conocimiento declarativo a nuevas situaciones por medio de búsqueda y analogías, la compilación de producciones de dominio específico y la intensificación del conocimiento declarativo y procesal. Desde esta perspectiva, una clave importante para el éxito en la resolución de problemas geométricos es el desarrollo de reglas para el manejo de datos. Esta teoría se contrapone con el presente trabajo pues en éste se propone iniciar con el descubrimiento del conocimiento con base en situaciones que lo recreen.

Por último Van Hiele propone que los estudiantes progresan a través de varios niveles del pensamiento en geometría y pasan por ellos en forma secuenciada. También agrega que el progreso de un nivel a otro depende más de la instrucción y de los tipos de experiencias de instrucción que pueden afectar el progreso, que de la edad o la maduración biológica. De acuerdo con esto, el maestro tiene un rol especial en la facilitación de este progreso, especialmente proporcionando guías sobre las expectativas de sus estudiantes. Lo anterior influyó en el presente trabajo, donde se propone un avance en el pensamiento geométrico en forma secuenciada con base en un cambio en el rol del profesor y su forma de instrucción. Asimismo, se utilizaron en este trabajo las cinco fases de instrucción propuestas por

Van Hiele: información, orientación guiada, explicación, libre orientación e integración. Dichas fases fueron la base para la planeación de las actividades experimentales. Por último, esta teoría es la base para el análisis de los datos que se obtuvieron en el trabajo de campo.

CAPÍTULO 4

METODOLOGÍA

En este capítulo se presenta el objeto de estudio del presente trabajo, las preguntas de investigación y los instrumentos utilizados: cuestionario inicial, actividades experimentales y entrevistas intermedia y final. En las seis actividades experimentales que se instrumentaron se menciona el tipo de ambiente de trabajo que se pretendió establecer para posibilitar el aprendizaje de los contenidos matemáticos involucrados en las actividades de enseñanza, la forma en que éstas fueron distribuidas en sesiones y las dificultades que se encontraron al trabajar en pequeños grupos. Sobre el cuestionario inicial se señala cómo se organizó a los alumnos en tres grupos de acuerdo con su nivel de pensamiento geométrico (según Van Hiele). Se anexan ambas entrevistas (intermedia y final), donde se pide a los alumnos que apliquen los conocimientos revisados en las actividades experimentales. El capítulo también incluye la forma en que se seleccionó a los estudios de caso y las características de los alumnos implicados en ellos.

Objeto de estudio

La disponibilidad de nuevas tecnologías como las calculadoras CAS (en este caso de la calculadoras TI-92 plus) y del software de geometría dinámica permite acceder a un ambiente de trabajo donde los procedimientos rutinarios se pueden realizar de forma directa (Thomas, 2004) y donde los trazos geométricos se puedan realizar y modificar varias veces aprovechando la característica más poderosa del software: el modo de “arrastre” (Lins, 2004). Por otro lado, las edades de los alumnos de secundaria oscilan entre los 11 y los 15 años, periodo en el que según Piaget, deberían ser capaces de realizar operaciones abstractas; sin embargo, estudios realizados sobre los niveles de pensamiento geométrico, según la teoría de Van Hiele, encontraron que los alumnos permanecen en los niveles 0 o 1 (Battista, 1998), por lo que deben establecerse acciones específicas que les permitan acceder a niveles superiores.

En lo anterior se sustenta el objeto de estudio del presente trabajo que queda definido como sigue:

> Investigar de qué manera influye en el aprendizaje de los alumnos de 11 a 12 años de edad la enseñanza de la geometría mediante actividades que fueron diseñadas para aprovechar los recursos que ofrece Cabri II.

Las actividades de enseñanza fueron organizadas de acuerdo con las fases propuestas por Van Hiele; asimismo, el logro de los alumnos fue analizado mediante los indicadores de los niveles de aprendizaje propuestos por ese autor. En necesario especificar que únicamente se tomaron en cuenta algunos descriptores del nivel 1, los cuales corresponden a la forma en que se plantearon las seis actividades

Preguntas de investigación

El presente trabajo pretende dar respuesta a las siguientes preguntas de investigación:

1. ¿Qué influencia ejercen las herramientas dinámicas de Cabri II en el establecimiento de un ambiente de aprendizaje para la clase de geometría en la escuela secundaria?

2. ¿Qué influencia ejercen las actividades diseñadas para este estudio en el establecimiento de un ambiente de aprendizaje para la clase de geometría basado en Cabri II?

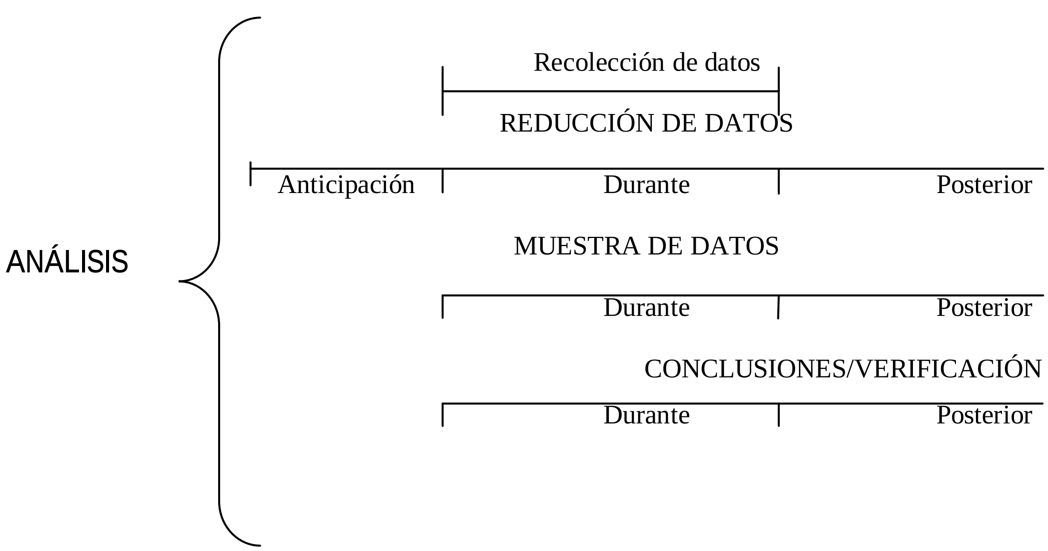
3. ¿Qué niveles de pensamiento geométrico establecidos por Van Hiele, desarrollan los estudiantes cuando trabajan en un ambiente de aprendizaje basado en Cabri II?

4. ¿Qué cambios se observan en las actitudes de los estudiantes hacia las matemáticas cuando trabajan dentro de un ambiente de aprendizaje basado en Cabri II?

5. ¿Cuáles de los problemas de aprendizaje de la geometría reportados en la literatura de investigación se superan cuando trabajan en el ambiente de Cabri II? ¿Cuáles se mantienen? ¿Qué otros surgen?

Método de análisis cualitativo

Esta investigación fue realizada dentro del salón de clases de matemáticas, el cual es el ambiente natural dispuesto para el aprendizaje de los contenidos de dicha asignatura. Los datos para este estudio fueron obtenidos esencialmente en las sesiones de trabajo de los alumnos, dando énfasis a la observación de los procesos cognitivos, lo que condujo a la adopción de un método de investigación de análisis cualitativo. El modelo propuesto por Miles y Huberman (1994) influenció el acercamiento metodológico en esta investigación. Este modelo es descrito en la siguiente figura.



El modelo de Miles y Huberman (1994) propone que el análisis consiste en varios niveles de actividad: reducción de datos, concentración de datos y definición de conclusión/verificación. El modelo asume que la reducción, creación y presentación de datos tiene que ser tomado de forma separada del análisis, en lugar de constituir parte de él. La reducción de datos se refiere al proceso de selección, enfoque, simplificación, abstracción y transformación de los datos obtenidos del trabajo de campo. Este proceso tiene lugar a lo largo de la investigación.

Miles y Huberman (1994) sugieren una fase anterior a la recolección de datos, que consiste en un estudio piloto para sujetar a una prueba empírica las preguntas de investigación, las tareas y los protocolos de entrevista y su consistencia con el referente teórico (el estudio piloto es discutido más adelante). La reducción de datos es un proceso que continúa después del trabajo de campo. Este proceso incluye la realización de resúmenes y la selección de extractos de las transcripciones de las entrevistas (el capítulo 5 es ejemplo de cómo este principio fue aplicado en la investigación). La reducción de datos fue en realidad "una forma de analizar, afinar, clasificar, enfocar, descartar y organizar los datos en tal forma que al final la conclusiones puedan ser obtenidas".

La recolección de los datos es la segunda componente de la actividad analítica. De acuerdo con Miles y Huberman (1994), esta fase es un ensamble organizado de la información que permite definir conclusiones y tomar acciones. En esta investigación la recolección de datos se realizó principalmente en las sesiones del salón de clases y mediante las entrevistas. Los episodios en el aula que se incluyen en este estudio se presentan en recuadros donde se reporta el desempeño de los alumnos con relación a los descriptores de los niveles del pensamiento geométrico de Van Hiele, así como extractos que ejemplifican dichos desempeños. Estos episodios son presentados en el capítulo 5, donde se discuten seis casos de estudio. El capítulo 6 presenta un análisis transversal basado en los desempeños de los alumnos con relación a dichos descriptores y con los avances en los contenidos geométricos trabajados.

El tercer nivel de análisis en el modelo de Miles y Huberman (1994) corresponde a la formulación de conclusiones y la validación de éstas. Este nivel consiste en asignar los significados de las cosas, observar las regularidades, patrones, explicaciones, posibles configuraciones, causales y proposiciones. Este nivel de análisis se presenta en los capítulos 5, 6 y 7. En los capítulos 5 y 6 cada conjunto de datos está seguido de una discusión que aporta algunas explicaciones sobre los logros de los alumnos. En el capítulo 7 se presenta establecidas las regularidades entre el trabajo de los alumnos, y algunas conjeturas son discutidas con base en los datos empíricos del trabajo de campo.

La reducción de datos y la formulación de conclusiones se entretejen antes, durante y después de la recolección de datos. Esta interrelación consiste en moverse hacia atrás y hacia adelante entre los diferentes tipos de datos: cada trabajo de los alumnos, trascripción de entrevistas y notas tomadas por el investigador después de cada sesión. En este sentido, el análisis cualitativo de datos es un proceso iterativo. Los resultados de la reducción de datos, de la muestra y la definición de conclusiones y verificación resultan en episodios analíticos que se siguen unos a otros.

Sujetos

Los *sujetos* con los que se desarrolló el estudio piloto fueron 35 alumnos de secundaria de los cuales 18 eran hombres y 17 mujeres; todos ellos inscritos en primer grado en la Escuela Secundaria General No. 327 Turno Matutino. Por otra parte, durante el estudio principal también se trabajó con 35 alumnos de los cuales 20 eran hombres y 15 eran mujeres; de igual forma todos inscritos en primer grado en la misma escuela. La edad de todos los alumnos fluctuaba entre los 11 y 12 años de edad. Los alumnos pertenecían al nivel socioeconómico bajo, dado que la escuela se encuentra dentro de una unidad habitacional con departamentos de interés social ubicada en la Unidad Villa de los Trabajadores del Gobierno del Distrito Federal, Delegación Tláhuac, al sur del Distrito Federal. Debo aclarar que los alumnos fueron provistos de todos los materiales necesarios para este trabajo de investigación.

Ambiente escolar

Para el trabajo se utilizaron 35 calculadoras TI-92+ y un View Screen (equipo que permite proyectar la imagen de la calculadora a la pared mediante un retroproyector), así como hojas de trabajo para cada alumno. En relación al aula se utilizaron tres hileras de mesas de trabajo binarias.

La enseñanza con nuevas tecnologías, en este caso con Cabri II, provoca en los estudiantes un cambio en sus actitudes hacia las matemáticas (pregunta de investigación). Según Wong Ngai-Ying (2003), el rápido desarrollo de la tecnología de la información (TI) representa un reto para el campo de las matemáticas y la educación matemática. A este respecto, Säljö (1999) sugiere que la generación del conocimiento consiste esencialmente en aprender a argumentar y que la tecnología nunca reemplazará la necesidad del aprendiz para participar en la conversación real con pares que comparten intereses. Es por eso que la tecnología no debería ser vista como reemplazo de la comunicación, sino como proveedora de fuentes para mantenerla.

La intensidad del argumento sobre el valor del “individuo” contra el trabajo grupal se incrementa cuando las nuevas tecnologías son parte del ambiente de aprendizaje. Underwood y Underwood (1999) obtuvieron evidencia empírica que muestra que los niños están más dispuestos a trabajar colaborativamente cuando trabajan con nuevas tecnologías que cuando trabajan con tareas clásicas del salón de clases, siempre que éstas permitan algún nivel de cooperación y colaboración.

Los mismos autores mencionan que hay diferencia entre el aprendizaje cooperativo y el colaborativo. Los términos “grupo de trabajo”, “aprendizaje colaborativo” o “aprendizaje cooperativo” tienen usos muy vagos. Se entiende como aprendizaje cooperativo al ambiente de aprendizaje en el cual de 2 a 6 personas (grupos pequeños) trabajan juntas para lograr un fin común. Las diferencias se enmarcan en el siguiente cuadro.

<table>
<tr><th>Grupos de trabajo</th><th>Responsabilidad de los elementos:</th><th>Interacción social</th><th>Dependencia</th><th>Facilitan:</th></tr>
<tr><td>Cooperativo</td><td>Toman la responsabilidad de subtareas</td><td>No necesariamente alta.</td><td rowspan="2">Tipo de tareas

Características del grupo (composición)</td><td rowspan="2">▪ Relaciones interpersonales
▪ Motivación
▪ Autoestima
▪ Aprendizaje académico
▪ Resolución de conflictos
▪ Prueba de hipótesis
▪ Andamiaje cognitivo
▪ Tutoría recíproca
▪ Ejecución abierta de los procesos cognitivos y metacognitivos</td></tr>
<tr><td>Colaborativo</td><td>Colaboran y comparten el proceso de toma de decisiones</td><td>Alta</td></tr>
</table>

Johnson y Johnson (1999) definen el trabajo cooperativo como una relación en un grupo de estudiantes que requiere una interdependencia positiva, una responsabilidad individual (cada uno tiene que contribuir y aprender), habilidades interpersonales (comunicación, certeza, liderazgo, toma de decisiones y resolución de conflictos), promoción de la interacción directa y el tratamiento (revisar cuán bien está funcionando el equipo y cómo mejorar). El aprendizaje cooperativo es importante para desarrollar las habilidades comunicativas y las habilidades de los alumnos para trabajar juntos en la clase de matemáticas. Cuando el aprendizaje cooperativo ocurre en el salón de clases, los estudiantes no sólo aprenden matemáticas sino que construyen sus propias relaciones personales que quizá no se pueden formar en las clases tradicionales. Cuando se planea implementar el aprendizaje cooperativo en el salón de clases, el maestro debe considerar la responsabilidad individual, las recompensas grupales, la preparación de los estudiantes y las dificultades comunes. Muchos investigadores establecen que para tener un aprendizaje cooperativo exitoso se requiere que los estudiantes tengan metas grupales y responsabilidad individual. El uso de metas grupales (particularmente metas sociales) en el aprendizaje cooperativo provee a los estudiantes una razón para trabajar juntos. El requerir una responsabilidad individual asegura que cada estudiante se beneficie de la experiencia para incrementar su entendimiento de las matemáticas. El éxito del grupo al lograr sus metas depende del éxito de cada estudiante.

Según Walmsley y Muñiz (2003), los investigadores muestran que los beneficios del aprendizaje cooperativo incluyen el incremento de logros académicos, mejores habilidades comunicativas y exitosas interacciones grupales, sociales y académicas. Cuando los estudiantes interactúan, tienen que explicar sus estrategias con sus propias palabras y a quienes los escuchan les facilita la comprensión de la materia. Cuando a los estudiantes se les requiere explicar, elaborar y defender sus posiciones, pueden ser forzados a pensar más profundamente. Uno de los grandes beneficios del aprendizaje cooperativo es que incrementa la habilidad de los estudiantes para comunicar ideas matemáticas. El aprendizaje cooperativo promueve un aprendizaje matemático de forma activa. Los maestros animan a sus estudiantes a explicar lo que entienden, lo cual los induce a evaluar, integrar y elaborar sus aprendizajes de nuevas formas.

Otro beneficio del aprendizaje cooperativo es que proporciona experiencia a los estudiantes en el trabajo con otros en el logro de una meta común, propiciando que incrementen su habilidad para usar las matemáticas en sus interacciones sociales. El aprendizaje cooperativo puede reforzar en los estudiantes el sentimiento de autoaceptación, mientras que la competitividad puede afectarla negativamente y las actitudes individualistas tienden a relacionarse con el autorechazo. Los estudiantes que trabajan colaborativamente a menudo gozan de esa experiencia y creen que a sus compañeros les gusta.

Para Underwood y Underwood (1999), los factores que influyen en el trabajo cooperativo y colaborativo son el género, el tamaño de grupo, la mezcla de habilidades, el dominio de la materia, el tipo de tareas y la organización. Cuando una pareja resuelve un problema se muestra más efectiva que cuando están solos, pero esto no parece ser cierto para todas las tareas y combinaciones de género.

Composición	Tipo de Trabajo
alumna / alumna	Cooperativo
alumna / alumno	Independiente, poca cooperación y comunicación
alumno / alumno	Independiente

Underwood y Underwood (1999) señalan que los resultados varían por diferentes circunstancias, por ejemplo:

- El trabajo en grupo aporta diferentes experiencias dependiendo del género y de la composición del grupo. También influye el tipo de tarea.
- Se requiere que los aprendices participen activamente compartiendo planes e ideas.
- Los varones, individualmente, se desempeñan con confianza usando las nuevas tecnologías, pero en equipos de niñas éstas actúan igual o mejor que los de niños. El equipo niña/niño logra avances más pobres.
- La naturaleza de la discusión influye en la actuación subsiguiente. Actúan mejor en una prueba de razonamiento individual las parejas que ofrecen sugerencias a un problema y consideran las de otros.

- El niño gana en la retroalimentación de sus estrategias de resolución de problemas si se siente seguro en tomar los riesgos inherentes al abrir sus pensamientos a sus compañeros de grupo.

La discusión en grupo puede ocurrir en muchos niveles, donde los participantes usen el lenguaje y la acción para establecer un conocimiento compartido, reconozcan divergencias en eso y rectifiquen malos entendidos que impidan el trabajo; pero no todos los grupos lo logran.

Por lo anterior, antes de iniciar el trabajo se invitó a los alumnos a trabajar en parejas, se les explicó la importancia de mantenerse en constante comunicación con su compañero, de tal forma que razonan y toman decisiones compartiendo sus ideas. También se pidió que no establecieran comunicación con el resto de sus compañeros, que toda duda o inquietud de una pareja debería ser dirigida al profesor. En un principio, los alumnos mostraron dificultades para iniciar el trabajo en forma colaborativa, debido principalmente a que, en primera, estaban acostumbrados a una forma de trabajo individual con escasas oportunidades de interactuar entre ellos y, en segunda, que los profesores usualmente valoran las capacidades individuales por encima del esfuerzo conjunto de dos o más alumnos.

Estudio de casos

El cuestionario inicial fue aplicado a un grupo de 35 alumnos que participaron en el estudio principal. Después de analizar sus respuestas (anexo III), se dividió al grupo en secciones según su desempeño alto (A), medio (B) y bajo (C).

De los 35 cuestionados se procedió a seleccionar a seis alumnos para estudio de caso, dos de cada sección, tomando en cuenta su desempeño mostrado en el cuestionario inicial, cuyas respuestas se encuentran concentradas en el anexo IV. En el recuadro siguiente aparecen los nombres de todos los alumnos, y con negrillas los alumnos seleccionados.

Sección A	Sección B	Sección C
Marco Antonio	Daniel	Víctor
Edgar	Jesús	Yocelyn
Miguel	Betsy	**Ricardo**
Jair	**Alejandra**	Tania
Rosa	Genevier	**Alfredo**
Alejandro	Daniel	Cinthya
Denesse	Bartolo	Magalli
Andrea	Julio	Mitzy
Noemí	Jassiel	Ivonne
	Deborah	Sandra
	Adrián	Eduardo
	Alan	Francisco
		América
		Francisco Javier

Los alumnos Marco Antonio (11 años) y Denesse (12 años) representan a la sección A. Las respuestas de los alumnos mostraron un nivel de pensamiento consistente con el **nivel 0** y un desempeño alto respecto al **nivel I** al basar sus respuestas identificando y generalizando clases de figuras por sus propiedades (ver anexo IV). Ambos alumnos han presentado un buen desempeño general en la escuela y han obtenido altas calificaciones en todas las asignaturas.

Las alumnas Alejandra (12 años) y Deborah (12 años) representan a la sección B. Las respuestas de las alumnas fueron consistentes con el **nivel 0** mostrando un aprendizaje geométrico básico y mostraron un desempeño medio con respecto a las preguntas relacionadas con el **nivel I** al basar sus respuestas identificando y seleccionado figuras por su forma y por sus propiedades. Ambas alumnas han presentado un buen desempeño general en la escuela y han obtenido buenas calificaciones en todas las asignaturas, aunque con altibajos en algunas evaluaciones.

Los alumnos Ricardo (11 años) y Alfredo (12 años) representan a la sección C. Las respuestas de los alumnos fueron consistentes con el **nivel 0** de Van Hiele, pero tuvieron un desempeño escaso en las preguntas relacionadas con el **nivel I** al basar sus respuestas en las formas y no en las propiedades de las figuras. Ambos alumnos han presentado un desempeño regular en la escuela y han obtenido calificaciones en sus asignaturas entre el rango de 6 a 8; aunque con altibajos ambos han acreditado todas las asignaturas.

Fuentes de datos

Cuestionario inicial

Mediante el cuestionario inicial (ANEXO I) se realizó un diagnóstico de los aprendizajes de los alumnos, proporcionando con esto un panorama general y particular del nivel de pensamiento geométrico de los alumnos que participaron en este estudio previo al inicio del trabajo de campo.

A. En lo general, se puede establecer un parámetro que permita iniciar el trabajo con bases más sólidas.

B. En particular, se pretende conocer el nivel de conocimiento de cada uno de los alumnos, facilitando con esto la *selección de los sujetos que se observarán bajo la técnica de estudio de casos.*

El cuestionario se planeó para realizarse en dos partes:

Primera sesión	40 min,	preguntas 1 a 14.
Segunda sesión	40 min,	preguntas 15 a 22.

La intención de la aplicación del cuestionario inicial fue la ubicación de los alumnos en un nivel de pensamiento y seleccionar de ellos a los alumnos a los que se daría seguimiento mediante la técnica de estudio de casos, para obtener evidencia empírica más sólida sobre sus aprendizajes.

Una vez resuelto el cuestionario inicial, el grupo de alumnos se dividió en tres secciones de acuerdo con los siguientes rasgos:

A. Las respuestas de los alumnos tuvieron un nivel de pensamiento consistente con el **nivel 0** y un desempeño alto con respecto al **nivel I** al basar sus respuestas identificando y generalizando clases de figuras por sus propiedades.

B. Las respuestas de los alumnos fueron consistentes con el **nivel 0** mostrando un aprendizaje geométrico básico y tuvieron un desempeño medio con respecto a las preguntas relacionadas con el **nivel I** al basar sus respuestas identificando y seleccionado figuras por su forma y por sus propiedades.

C. Las respuestas de los alumnos fueron consistentes con el **nivel 0** de Van Hiele, pero tuvieron un desempeño escaso en las preguntas relacionadas con el **nivel I** al basar sus respuestas en las formas y no en las propiedades de las figuras.

Actividades experimentales

Los contenidos de enseñanza que se incluyen en las actividades experimentales forman parte del programa oficial de estudios de educación secundaria en México, Plan de estudios de secundaria (SEP, 1993) para la enseñanza de las matemáticas y en especial en la geometría.

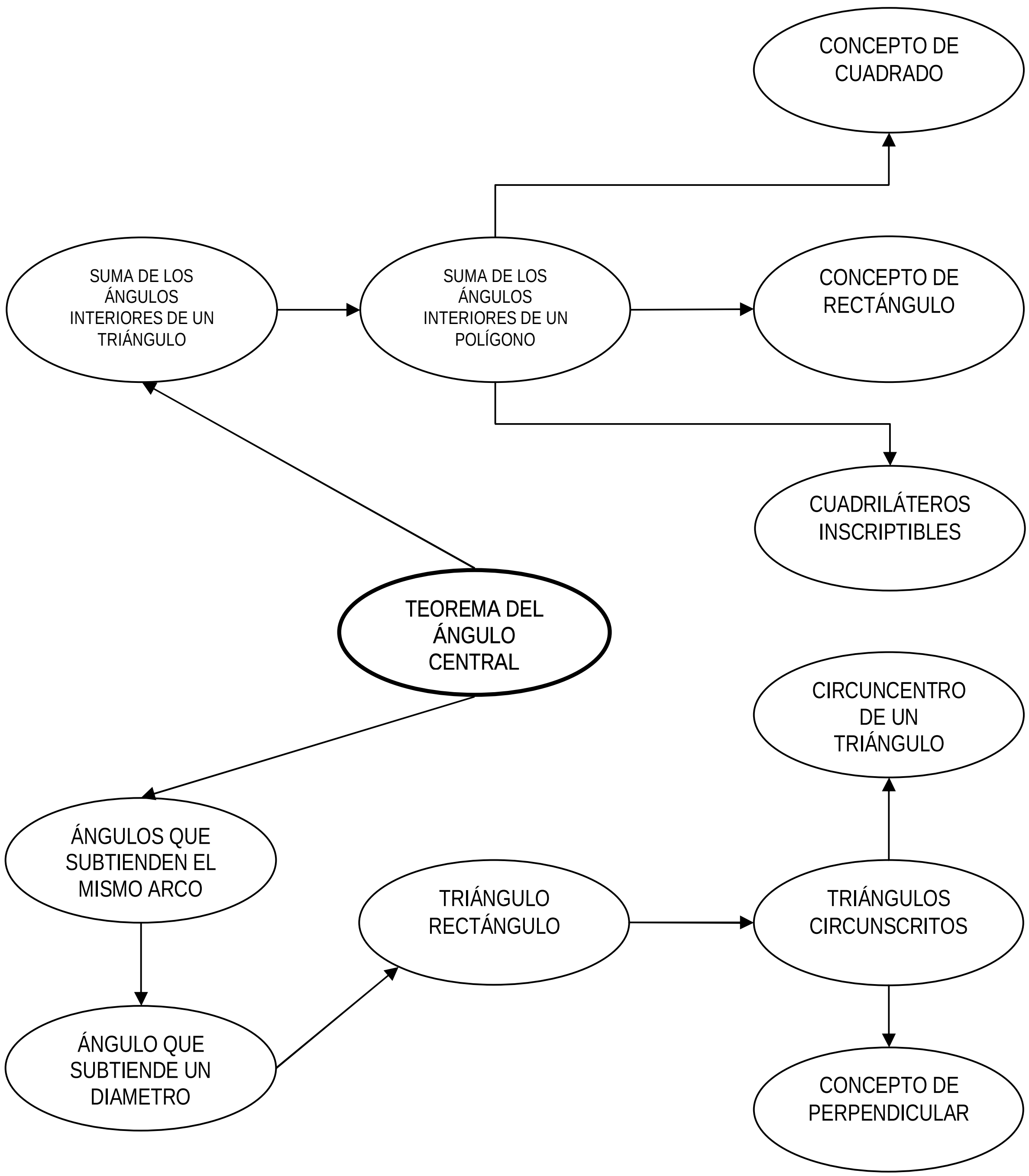
Para definir la secuencia y el alcance del contenido geométrico, que se incluyó en las actividades experimentales, se adoptó lo propuesto por Freudenthal (1973), quien recomienda que el currículum de matemáticas se desarrolle alrededor de un número pequeño de teoremas importantes, formando un programa pragmático de geometría restringido a un pequeño acervo de teoremas. En el presente trabajo se plantea una secuencia de enseñanza basada en la organización de actividades en torno al teorema del ángulo central, de ahí se orienta a los estudiantes mediante las actividades propuestas a la exploración de otros resultados importantes, como el ángulo que subtiende un diámetro y su relación con el concepto de perpendicularidad; la suma de los ángulos interiores de un triángulo sustentada en el conocimiento de la medida de un ángulo inscrito en una circunferencia; la suma de los ángulos interiores de un polígono con base en el conocimiento de la suma de los ángulos interiores de un triángulo; la existencia del circuncentro; las posibles posiciones del circuncentro según el tipo de triángulo y las condiciones que debe cumplir un cuadrilátero para ser inscriptible en una circunferencia.

Los contenidos en cada hoja de trabajo son los siguientes:

ACT.	CONTENIDOS
A	▪ Construcción de un triángulo cualquiera.
B	▪ Circuncentro en un triángulo rectángulo. ▪ Circuncentro de un triángulo cualquiera.
C	▪ Construcción de triángulos rectángulos circunscritos. ▪ Medida de los ángulos central e inscrito (su relación).
D	▪ Construcción de cualquier triángulo circunscrito (dados los ángulos). ▪ Suma de los ángulos interiores de un triángulo.
E	▪ Suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero circunscrito. ▪ Suma de los ángulos interiores de un polígono circunscrito.
F	▪ Circuncentro de cuadriláteros (casos). ▪ Construcción de cuadriláteros circunscritos (dados los ángulos).

El diagrama siguiente esquematiza la **e**structura matemática de las actividades experimentales de las seis actividades para relacionar los contenidos antes planteados.

ESTRUCTURA MATEMÁTICA DE LAS ACTIVIDADES EXPERIMENTALES



Como se puede observar, toda la secuencia de contenidos está basada en el "teorema del ángulo central" (en una circunferencia la medida del ángulo inscrito es el doble de la medida del ángulo central que subtiende el mismo arco), por lo que a partir de este teorema continúa con otros contenidos relacionados y apoyados en él. Como se puede observar en la estructura matemática anterior, los contenidos están divididos en dos partes que se desprenden de dicho teorema, hacia abajo están los contenidos que formaron parte de las actividades A, B y C; hacia arriba los tratados en las actividades D, E y F. En las tres primeras actividades se tratan principalmente construcciones de figuras, así como los elementos geométricos que se necesitan en ellas. En las tres últimas actividades se establecen relaciones entre las figuras y elementos geométricos tratados en las actividades previas.

El trabajo consistió en una secuencia de actividades que deberían realizar los estudiantes con apoyo de la versión de Cabri II instalada en la Calculadora TI-92. Las actividades se planearon con la intención de combinar el trabajo con la calculadora y la resolución de las preguntas planteadas. Una muestra de las actividades experimentales se encuentra en el anexo III

Dado que el presente trabajo de investigación tiene como referente la teoría de Van Hiele del aprendizaje geométrico, las actividades experimentales fueron diseñadas siguiendo las fases de cada nivel de aprendizaje propuestas en dicha teoría: *información, orientación guiada, explicación, libre orientación e integración*.

Información. Cada actividad inicia presentando la información básica sobre la situación que se aborda en un contexto que permite plantear un problema geométrico que esté relacionado con la vida cotidiana. Por ejemplo:

EL perro y el jardín

Un matemático famoso decidió irse de vacaciones y dejar a su perro cuidando la casa. El perro solo puede estar en el jardín, el cual ¡extrañamente es de forma de un triángulo rectángulo!. Como no desea dejarlo suelto, necesita encontrar un punto [X] dónde sujetar la correa de forma que el perro pueda llegar a las tres esquinas, pero a la vez usar la menor cantidad de correa.

Orientación guiada. Después de presentar la información, se procedió a presentar las instrucciones para el trazo de los elementos geométricos necesarios para iniciar la resolución del problema, en ocasiones acompañadas de preguntas que permitieran reforzar o complementar los antecedentes del alumno. Por ejemplo:

- Representa el patio (un triángulo cualquiera con un lado horizontal)
- Representa al lugar (X) donde sujetar al perro (dentro del patio).
- Mide los ángulos del triángulo.

Explicación. Cada actividad incluye secciones donde se proporcionan los objetos de estudio en un nivel específico de conocimientos y conduce a la discusión, tratando de usar el lenguaje de los estudiantes; del mismo modo, se introduce la terminología matemática necesaria para la mejor comprensión del contenido con el que se va a trabajar.

Libre orientación. En todas las actividades se promueve que el alumno realice libremente los trazos, animándolo a que bosqueje y elabore con mayor profundidad sus soluciones, introduciendo términos, conceptos y procesos de solución.

Integración. En la última parte de cada actividad se anima a los alumnos a reflejar y consolidar su conocimiento geométrico, incrementando el énfasis en el uso de los contenidos previamente aprendidos y promoviendo la reafirmación del contenido recientemente trabajado.

Una vez que se ha descrito la forma en que fue estructurada cada una de las actividades, se presenta los problemas matemáticos que se abordaron, los antecedentes que se considera que debían conocer los alumnos, la forma en que se fue guiando el trabajo para llegar al logro de los contenidos y cómo se concluyó y generalizó el contenido. La descripción de cada actividad se encuentra en el Anexo III.

Como se puede observar, la organización del trabajo en el aula se basa en el trabajo en parejas o pequeños grupos con la finalidad de promover el intercambio y negociación de ideas dentro de un ambiente de trabajo colaborativo donde se comparta y se estimule el proceso de toma de decisiones (Underwood y Underwood, 1999):

- Las relaciones interpersonales.
- La motivación.
- La autoestima.
- El aprendizaje académico.
- La resolución de conflictos.
- La prueba de hipótesis.
- El andamiaje cognitivo.
- La tutoría recíproca.
- La ejecución abierta de los procesos cognitivos y metacognitivos.

Este ambiente deberá permitir explorar la computadora (y en este caso el software) en la búsqueda de características que puedan ayudar a concretar o a potenciar que modelos de clase alternativos e identificar las nuevas posibilidades que estos ofrecen (Spiegel, 1997).

Recuperando muchas de las aportaciones de los autores referidos en el capítulo de revisión de la literatura, el ambiente que se plantea para el presente trabajo busca aprovechar las posibilidades que presentan las nuevas tecnologías, las características específicas de Cabri II y las ventajas que representa su uso en la clase de matemáticas.

Entre las características del ambiente antes mencionado se encuentran la exploración interactiva con objetos geométricos (Clements y Battista, 1991; Spiegel, 1997)**,** la presentación y recuperación rápida de la información (Spiegel, 1997), la agilidad en la realización de actividades rutinarias (Spiegel, 1997), el respeto de las propiedades geométricas (Spiegel, 1997) y la facilidad de diseño y rediseño de objetos geométricos (Spiegel, 1997),

La finalidad del ambiente es promover una clase en donde el trabajo esté enfocado en que el alumno tenga la oportunidad de formular y justificar conjeturas e inferencias en el contexto de la geometría plana (Battista, 1998; Spiegel, 1997); aprenda a razonar, comunicar, hacer conexiones conceptuales y resolver problemas en contextos espaciales y geométricos (Battista, 1998); manipule y refleje numerosos ejemplos, en lugar de intentar comprender definiciones verbales (Battista, 1998; Säljö, 1999); promueva desarrollos mentales dinámicos (representaciones mentales estructuradas del mundo, Battista 1998); evite imponer un conjunto de definiciones, degradando a la geometría a algo parecido a "reglas para prescripciones arbitrarias". (Freudenthal, 1970) y propicie el aprendizaje activo (Spiegel, 1997).

Del mismo modo, se toma en cuenta las experiencias, personalidad, intereses, conocimientos, intenciones y preferencias del maestro y los alumnos (Wragg, 1994), promoviendo que los alumnos utilicen su capacidad creadora en sus descubrimientos personales, en sus motivaciones intrínsecas (Hischhorn y Tompson, 1998; Martínez, 1989), realizando tareas en trabajo colaborativo (Spiegel, 1997); negociando tanto en el juego como en el trabajo formal de manera que permita combinar las ideas entre los elementos del grupo (Bruner, 1984); estudiando en un ambiente donde los estudiantes controlen la exploración (Hischhorn y Tompson, 1998); en general se promueva una interacción entre el estudiante y lo que aprende (Säljö, 1999).

El objetivo del ambiente es que el alumno aprenda a ritmo individual. (Spiegel, 1997); les permita avanzar del nivel 1 al 2, y hacia un parcial tratamiento del nivel 3 según los niveles de Van Hiele (Battista, 1998); los ayude a moverse de lo empírico al pensamiento lógico (Clements, 1991); los estimule y motive (Martínez, 1989; Szendrei, 1996; Spiegel, 1997); es decir vean a las matemáticas como un campo de estudio excitante, útil y creativo (NCTM, 2000), al alimentar una actitud positiva y la curiosidad hacia las matemáticas y el pensamiento matemático (Hischhorn y Tompson, 1998) mediante la integración del currículo con la tecnología, en este caso Cabri II (Hischhorn y Tompson, 1998) y el uso de las capacidades únicas del software para incrementar el aprendizaje (Salomon y Gardner, 1986, mencionado en Bright y Prokosch, 1995).

Finalmente, se explicó el significado de las dos viñetas en las hojas de trabajo que indicaban si el trabajo debería hacerse en la misma hoja de trabajo o en la calculadora.

Calculadora	Hoja de trabajo

Se les indicó que debería escribirse con pluma y en caso de error no utilizar goma o corrector, procediendo únicamente a tachar el texto cuando fuera necesario. Lo anterior permitiría al investigador observar los errores de los alumnos y no sólo los aciertos.

Entrevistas intermedia y final

Se aplicaron dos entrevistas, una a la mitad del estudio principal acerca de las actividades A, B y C, y otra al final sobre las actividades D, E, F. Cada una de las entrevistas fue diseñada para identificar los posibles avances en los descriptores correspondientes a los diferentes niveles de pensamiento geométrico según Van Hiele y los contenidos geométricos planteados desde un inicio. Dichas entrevistas fueron aplicadas a seis alumnos, dos cuyo desempeño en el cuestionario inicial fue bajo, dos con desempeño medio y por último a dos con desempeño alto. Los protocolos de la entrevista intermedia y final se pueden ver en el anexo II

Fases de la investigación

El trabajo de campo se llevó a cabo en dos fases, el estudio piloto y el estudio principal. En el estudio piloto se probaron las fuentes de datos (actividades experimentales, el cuestionario inicial, las entrevistas) así como la manera de trabajar con apoyo con la calculadora y el software Cabri II. En el estudio principal se aplicaron las fuentes de datos una vez corregidas.

Estudio piloto

Se realizó un estudio piloto donde se aplicaron las actividades planeadas y se analizó el desempeño de los estudiantes y el potencial del ambiente basado en el software Cabri II. El propósito central de este estudio fue poner a prueba la consistencia entre las preguntas de investigación, el método de investigación y el referente teórico, con los datos que los instrumentos que se habían diseñado permitieron recabar, en particular, verificar empíricamente si los datos que se obtienen con esos instrumentos permiten bosquejar respuestas a las preguntas de investigación que orientan esta tesis.

El cuestionario inicial fue diseñado para identificar los aprendizajes que poseían los alumnos respecto a los contenidos matemáticos de las actividades experimentales, así como algunas habilidades necesarias para dicho trabajo. Su aplicación durante el estudio piloto permitió revisarlo para obtener la versión definitiva que se utilizó en el estudio principal (anexo I).

El pilotaje de las actividades experimentales permitió establecer parámetros reales respecto a *los tiempos, el grado de dificultad, el trabajo colaborativo, las ventajas y dificultades de trabajar con nuevas tecnologías, la administración de los recursos materiales y el potencial de los alumnos,* entre otros factores. La aplicación de las actividades durante el estudio pilotó permitió revisar los parámetros anteriores y obtener las versiones definitivas que se utilizaron en el estudio principal (anexo IV).

Una vez realizado el estudio piloto, se pudo observar que el inicio del trabajo fue lento; sin embargo, con el transcurso de las sesiones, se agilizaron los tiempos acercándose a los tiempos planeados.

Entre las razones por las que el inicio fue lento se encuentran:

- Tiempo que requiere un dominio aceptable de la calculadora TI-92 y del programa Cabri II.
- Trabajo en equipo (esquema que los alumnos no trabajan con frecuencia).
- Preguntas de tipo abierto donde el alumno debe explicar sus respuestas o describir los sucesos.

Para el estudio principal se contempló que el dominio de la calculadora fuera mayor, aunque se esperaba que el trabajo inicial fuera lento mientras los alumnos se adentraban en el uso de laacalculadora y el software.

Los alumnos no habían tenido contacto con este tipo de tecnología, por lo que fue necesario establecer un programa básico de introducción al uso de la calculadora

TI-92 plus y en especial a Cabri II. El programa estuvo enfocado al aprendizaje de las funciones necesarias para el trabajo con las hojas de trabajo.

Durante las dos primeras sesiones se introdujo al alumno al manejo de la calculadora y del software. En la primera sesión se trabajó con aspectos básicos sobre el uso de la calculadora, como fueron el encendido y apagado, el uso del navegador y la ruta de acceso al software Cabri II. Respecto al trabajo dentro del software se practicó el arrastre de elementos, la edición numérica, la transferencia de medidas, el borrado de una acción, el regreso a la acción anterior y cómo guardar un archivo. También se enseñó la forma de trazar elementos geométricos básicos para el desarrollo de las actividades, como el trazado de puntos, segmentos, rectas y círculos.

En la segunda sección se trabajaron aspectos básicos del software, como es el abrir o recuperar un archivo y el borrado de toda la pantalla, el etiquetado de los distintos elementos geométricos, la escritura de comentarios y el ocultamiento de algún elemento. También, se enseñó a los alumnos a marcar un punto sobre un objeto o en una intersección; el trazado del punto medio, una perpendicular y un triángulo; y a medir segmentos y ángulos, culminado con el uso de la calculadora para practicar todo lo anterior mediante el trazado de una figura libre (se sugirió el trazado de una bicicleta).

Se pretendía que la duración de cada una de las 15 sesiones fuera de 50 minutos; sin embargo, la práctica mostró que esto no era posible por el tiempo que los alumnos invertían en desplazarse al aula de medios, pues venían de una clase normal tomada en otra aula, quedando la sesión de 40 minutos.

La tabla que sigue señala el número de sesiones empleadas para cada una de las actividades realizadas.

Actividad	HOJA DE TRABAJO	SESIÓN
Presentación del profesor y aplicación del cuestionario inicial	Cuestionario inicial	# 1 y 2
Introducción a la calculadora	1a parte	# 3
Introducción a la calculadora	2a parte	# 4
La radiodifusora	A1	# 5
La radiodifusora	A2	# 6
La radiodifusora	A3	# 7
El perro y el jardín	B1 Y B2	# 8
El perro y el jardín	B2 Y B3	# 9
Los perros	C1	# 10
Los perros	C2 Y C3	# 11
Entrevista intermedia (solo estudios de caso)		# 12 y 13
El perro y la fábrica	D1 Y D2	# 14
El perro y la fábrica	D2 Y D3	# 15
El perro vigía	E1 Y E2	# 16
El perro vigía	E3 Y E4	# 17
El perro robot	F1 Y F2	# 18
El perro robot	F3 Y F4	# 19
El perro robot	F5	# 20
Entrevista final (sólo estudios de caso)		# 21 y 22

Esta experiencia permitió que para el estudio principal se practicaran con una mejor orientación todas las funciones antes mencionadas, lo que permitiría que el alumno desarrollara las hojas de trabajo en menos tiempo y las intervenciones del profesor fueran esencialmente para aclarar dudas sobre el trabajo y no sobre el uso de la calculadora o del software.

Por otro lado, el trabajo con nuevas tecnologías representó un cambio en el esquema de la clase e incentivó a los alumnos. Sin embargo, la motivación de los alumnos fue mantenida por la forma de relación con el profesor, el tipo de actividades realizadas, el trabajo colaborativo, entre otros elementos. Durante las sesiones, pudo observarse que los alumnos se encontraban motivados por el uso de esta tecnología.

La experiencia adquirida durante el estudio piloto confirmó la pertinencia de iniciar el trabajo con los alumnos con una explicación breve sobre la forma de trabajar, en constante comunicación con el compañero de trabajo, de tal forma que razonen, reflexionen y se comuniquen entre ellos.

Las observaciones realizadas durante el estudio piloto indican que el uso de las calculadoras exige inversión de tiempo y práctica. El trabajar con la misma calculadora permite al alumno revisar lo realizado anteriormente y retroalimentar sus nuevos trabajos y reflexiones. Por otro lado, el guardar los diferentes archivos en la misma calculadora permite al investigador hacer el seguimiento de lo realizado por cada alumno.

Con la prueba piloto se pudo observar el desempeño de los alumnos al trabajar en este tipo de ambientes. Entre las observaciones se encuentran las siguientes.

Los alumnos mostraron:

- Dificultades para trabajar en forma colaborativa.
- Dificultades para trabajar “sólo” con el apoyo del profesor.
- Deficiencias en la comprensión de algunos términos y elementos del lenguaje matemático utilizados en las hojas de trabajo.
- Facilidad para cuestionar al profesor cuando algo no se entiende.
- Adaptabilidad al trabajo con nuevas tecnologías.
- Motivación por el trabajo bajo un esquema distinto.

Las siguientes observaciones se aplican de manera general a la realización de todas las hojas de trabajo:

- Necesidad de aclarar verbalmente el significado de los diferentes iconos.
- Llenado de los datos generales solicitados en las hojas de trabajo.
- Refuerzo constante (sobre todo al inicio) del trabajo en forma cooperativa.
- Necesidad de resaltar con negrillas las palabras claves.
- Pertinencia de introducir gradualmente el uso del lenguaje matemático.
- Necesidad de que los estudiantes escriban sus respuestas con pluma para poder revisar los posibles errores y no sólo la respuesta final.
- Necesidad de que los estudiantes escriban sus respuestas claras, suficientemente inteligibles, para cualquiera de sus compañeros.
- Pertinencia de plantear a los alumnos nuevas preguntas, de forma que sean ellos quienes construyan las respuestas a preguntas previas.
- Necesidad de realizar un monitoreo constante del trabajo de cada alumno y del grupo en general, para registrar sus logros y dificultades.
- Se detectó la importancia de iniciar el trabajo en forma conjunta.
- Se detectó la importancia de concluir el trabajo de cada sesión resumiendo los avances y logros alcanzados.
- Se constató la importancia de ser paciente y estimular que los alumnos reflexionen sus respuestas antes de emitirlas.
- Necesidad de mantenerse alerta para no dar respuestas o conclusiones antes de que los alumnos lleguen a ellas.

Los logros de la mayoría de los alumnos dependían en un inicio de la validación del profesor. Algunos alumnos no requerían de la validación del profesor, sin importar si sus respuestas y trabajos fueran correctos o no. En el transcurso de las sesiones, el instrumento de validación cambió de ser único (profesor) a ser múltiple (profesor, compañero de trabajo o sus mismos conocimientos -ya con bases sólidas y correctas-). Al final del estudio piloto el instrumento de validación principal era su propio conocimiento y la discusión con sus compañeros. Los alumnos contaban con el dominio suficiente de los contenidos y de la calculadora para validar por sí mismos sus respuestas, aseveraciones y conclusiones.

Respecto a los logros, durante el estudio piloto todos los alumnos mostraron avances básicos en el manejo del lenguaje matemático y conocimiento de las figuras geométricas y sus elementos. Del mismo modo, los alumnos aprendieron aceptablemente los nuevos contenidos planteados en las hojas de trabajo.

Durante el estudio piloto los alumnos mostraron interés y actitudes positivas hacia el trabajo que tenían que realizar y hacia la clase de matemáticas. Un indicador de esto fue que llegaban a tiempo a clase y no le daban importancia al timbre que indicaba el fin de la sesión. Asimismo, los alumnos tendieron a plantear preguntas y a no quedarse con dudas.

En las sesiones 1–4 los alumnos mostraron descontrol respecto al ambiente de trabajo, el trabajo colaborativo con la pareja respectiva y la negociación de las ideas con el compañero antes de preguntar al profesor. De igual forma, los alumnos mostraron confusiones con la lectura de las hojas de trabajo, sus respuestas eran erróneas o incompletas, y no discutían su trabajo con su compañero; pareciera que sus respuestas eran sin meditación y en ocasiones descontextualizadas. Al final del estudio piloto, los alumnos mostraron clara mejoría en el trabajo colaborativo, negociando, discutiendo y enseñándose entre ellos. En el transcurso de las sesiones 5 –10, los alumnos requirieron menos tiempo con las hojas de trabajo y disminuyó el número de dificultades que en éstas encontraban.

Estudio principal

Al igual que en la prueba piloto, al iniciar el trabajo se hizo una breve explicación sobre la forma de trabajar en pareja en constante comunicación, el significado de las dos viñetas en las hojas de trabajo y el uso de la calculadora.

Las sesiones tuvieron una duración de 40 minutos cada una. La tabla que sigue señala el número de sesiones empleadas para cada una de las actividades realizadas.

ACTIVIDAD	TIEMPOS
Cuestionario inicial	2 sesiones
Actividad A	4 sesiones
Actividad B	3 sesiones
Actividad C	2 sesiones
Entrevista intermedia	2 sesiones (por pareja)
Actividad D	2 sesiones
Actividad E	2 sesiones
Actividad F	2 sesiones
Entrevista final	2 sesiones (por pareja)

El cuestionario aplicado en esta etapa corresponde al cuestionario aplicado durante el estudio piloto después de ser revisado; con él se buscó determinar el nivel de pensamiento geométrico de los alumnos según Van Hiele. Los alumnos mostraron diferencias sobre el dominio y avance en los descriptores, las cuales se pueden observar en el análisis del cuestionario que se encuentra en el anexo III.

Otras fuentes de datos fueron las actividades de enseñanza que los alumnos reportaban en el formato de hojas de trabajo, las cuales corresponden a las utilizadas en el estudio piloto. Dichas actividades fueron corregidas de acuerdo con las observaciones realizadas durante el estudio piloto.

Asimismo, se tomaron notas al término de cada sesión en el aula con relación a las actitudes y dudas de los alumnos, el tipo de trabajo realizado por las parejas de alumnos seleccionados, las dificultades en el uso de las calculadoras y el tipo de respuestas anotadas en las hojas de trabajo.
Por último, se aplicaron entrevistas intermedia y final a los alumnos seleccionados con el objetivo de verificar el aprendizaje de los contenidos matemáticos y el nivel del pensamiento geométrico.

Se seleccionó a seis alumnos para estudio de caso, dos de cada sección (A, B y C), tomando en cuenta su desempeño mostrado en el cuestionario inicial cuyas respuestas se encuentran concentradas en el anexo III.

Respecto a los antecedentes, el estudio principal confirma lo que se observó en el estudio piloto; en las sesiones 1–4 todos los alumnos mostraron desconocimiento del lenguaje y nomenclatura matemática básica; en particular sobre conceptos como “intersección de dos rectas o segmentos de recta” y en el uso de letras para identificar elementos geométricos. Sin embargo, términos como “segmento” y “circunferencia” eran conocidos.

De igual forma que en estudio piloto, en el estudio principal la brecha entre los “adelantados” y los “rezagados” durante las sesiones 1–4 se mantuvo respecto al tiempo y al trabajo. Los alumnos “adelantados” tendían a lograr el objetivo con más facilidad. No siempre los alumnos que lograron dominar el uso de la calculadora más rápidamente eran los más avanzados en relación con sus calificaciones en sus asignaturas. Sin embargo, en el transcurso de las sesiones 5–10, la diferencia entre los tiempos de terminación de los alumnos “avanzados” y “rezagados” se hizo más pequeña. Parece ser que esto se debió a la asimilación del método de trabajo, la adquisición del lenguaje y nomenclatura matemática básica, el dominio de la calculadora y el logro de bases matemáticas relacionadas con el contenido que se tenía que trabajar.

Al igual que en el estudio piloto, los logros de la mayoría de los alumnos dependían en un inicio de la validación del profesor. En el transcurso de las sesiones, el instrumento de validación cambió de ser única (profesor) a ser múltiple (profesor, compañero de trabajo o sus mismos conocimientos. Al final del estudio principal, el instrumento de validación más fuerte era su propio conocimiento y la discusión con sus compañeros. El alumno contaba con los contenidos y el dominio de la calculadora necesarios para validar sus respuestas, aseveraciones y conclusiones. En el transcurso de las sesiones 5 –10 del estudio principal, todos los alumnos tendieron a acortar el tiempo empleado con las hojas de trabajo a la vez que disminuyó el número de dificultades que en éstas encontraban.

Durante el estudio principal los alumnos mostraron interés al trabajar con este ambiente las clases de matemáticas. Además los alumnos tendieron a cuestionar para no quedarse con dudas, mostraron logros básicos en el manejo del lenguaje matemático y conocimiento de las figuras geométricas y sus elementos. Del mismo modo, los alumnos aprendieron aceptablemente los nuevos contenidos planteados en las hojas de trabajo.

El estudio principal confirma lo que se observó en el estudio piloto; en las sesiones 1–4 todos los alumnos mostraron descontrol respecto al ambiente de trabajo, la negociación de las ideas con el compañero antes de preguntar al profesor y el trabajo colaborativo. De igual forma, los alumnos mostraron descontrol con la lectura de las hojas de trabajo, sus respuestas eran erróneas, incompletas, no discutían su trabajo con su compañero; parecieran que sus respuestas eran sin meditación y en ocasiones descontextualizadas. Al final del estudio ellos mostraron clara mejoría en el trabajo colaborativo, negociando, discutiendo y enseñándose entre ellos.

Con relación a los estudio de caso, los alumnos seleccionados mostraron claro interés por las actividades y disposición a expresar sus dudas. Al final del estudio, el dominio en el uso de la calculadora fue similar.

La fase de investigación permitió constatar que Cabri II responde a las diversas necesidades y exigencias de este estudio, puesto que:

- Respeta las propiedades de las figuras.
- Puede utilizarse para promover un abordaje de contenidos mediante la construcción y exploración interactiva de objetos geométricos, y propicia que los alumnos formulen conjeturas y se pregunten si éstas tienen validez general.
- Permite la presentación correcta y exacta de las figuras geométricas.
- Permite la presentación y recuperación rápida de la información.
- Permite respetar la edad cronológica y mental de los alumnos.
- Cuenta con ayuda documentada.
- Puede combinar textos, gráficos, etc.
- Permite revisar conceptos desde varios puntos de vista,
- Promueve el aprendizaje activo.
- Estimula la colaboración en la realización de tareas y posibilita el aprendizaje al ritmo individual de los alumnos.
- Favorece la motivación, comprometiendo a los estudiantes y evitando la realización de actividades rutinarias y sin sentido.
- Introduce a los alumnos en programas de alto nivel tecnológico.

La principal dificultad dado que este tipo de trabajo no es común para los alumnos, consistió en que al momento de comunicar, compartir, negociar y discutir ideas fue necesario insistir en este tipo de trabajo; explicando la necesidad de compartir la toma de decisiones, apoyarse uno al otro, resolver los conflictos en un ambiente de armonía y constante discusión, y llegar a un aprendizaje académico. Es decir, debe haber una interacción social alta.

CAPÍTULO 5
RESULTADOS

Este capítulo presenta los resultados del estudio principal en forma detallada mostrando las respuestas dadas a cada actividad en secciones escaneadas. Dicho reporte se basa en el análisis del desempeño de los alumnos en las tres primeras actividades en el marco de los descriptores de los niveles de aprendizaje geométrico según Van Hiele. Posteriormente, se realiza un análisis más detallado del desempeño de cada pareja de alumnos. Lo mismo se hace con relación a las tres últimas actividades. También, como parte del informe del estudio principal, se analizaron las respuestas y el trabajo realizado por cada uno de los alumnos seleccionados para el estudio de casos en las entrevistas intermedia y final, estableciendo un comparativo de sus logros en ambas entrevistas.

Observaciones generales sobre el trabajo del grupo

En general, fue lento el trabajo de los alumnos durante el estudio principal; en gran medida por la introducción al uso del software de geometría y por el estilo de trabajo basado en la combinación de acciones en la calculadora y la resolución de las hojas de trabajo.

Al principio el apoyo del profesor consistió en encaminar al grupo hacia el estilo de trabajo planteado en el marco metodológico y agilizar el uso del software. Con el transcurso de las sesiones, las intervenciones relacionadas con lo anterior fueron cada vez menos frecuentes.

En relación con las intervenciones para aclarar algunas dudas, tales como los conceptos de ángulo central y ángulo inscrito, la suma de ángulos interiores de un triángulo, el triángulo inscrito en una semicircunferencia, mediatriz y circuncentro, se procuró esperar a que los alumnos acudieran primero a su pareja antes de intervenir, con la intención de que esta interacción promoviera la discusión y el apoyo entre ellos.

Uno de los propósitos de las actividades fue introducir los contenidos y relaciones desconocidas por medio del descubrimiento y “recreación” con la finalidad de que esto permitiera a los alumnos relacionar estos nuevos conocimientos con los antecedentes que tenían y los utilizaran como parte de su conocimiento matemático en las actividades siguientes. Al principio, fue difícil que relacionaran los contenidos revisados en actividades anteriores al trabajar en una nueva actividad, por lo que fue necesario insistir en su uso como base para los nuevos aprendizajes.

El desempeño de todo el grupo (35 alumnos) fue mejorando con el transcurso de las sesiones, tanto la familiarización con la calculadora como con el trabajo basado en generar respuestas fundamentadas a las preguntas planteadas y el establecimiento de conclusiones. Al final del estudio, la mayoría de los alumnos trabajaban casi al mismo ritmo, comunicándose y discutiendo entre ellos; el uso de la calculadora fue más ágil y las conclusiones mejor elaboradas.

Con relación a la motivación y actitudes mostradas por los alumnos, éstos mostraron gusto por el trabajo bajo esta dinámica, lo cual fue evidente por su disposición para acudir puntualmente y con entusiasmo a las sesiones, al organizarse de manera que voluntariamente repartían las calculadoras y las hojas de trabajo, al participar de manera activa para aclarar alguna confusión, al avanzar en el trabajo y pedir nuevas hojas de trabajo en cuanto terminaban la anterior, al presionar al compañero cuando éste por alguna razón disminuía su desempeño y al discutir las ideas en ocasiones de manera muy “entusiasta” levantando la voz o siendo muy expresivos. Lo anterior es muestra de la motivación de los alumnos y de sus actitudes positivas; sin embargo, es necesario aclarar que esto no puede generalizarse a todos y cada uno de los momentos en las sesiones de trabajo, hubo ocasiones en que algunos alumnos no mostraron actitudes tan positivas.

Los seis alumnos seleccionados mostraron un dominio similar en relación con los rasgos que caracterizan al nivel 0 del pensamiento geométricos según Van Hiele, donde identificaron formas en su conjunto, identificaron ángulos en diferentes figuras, copiaron formas, identificaron elementos geométricos, agruparon figuras por su apariencia más que por sus propiedades, identificaron figuras, encontraron áreas, identificaron lados iguales, encontraron el perímetro y realizaron generalizaciones y cuantificaciones.

En relación con las características que identifican al nivel 1 del pensamiento geométrico, los alumnos mostraron un desempeño diferencial, lo que permitió establecer un parámetro que identificara a cada pareja. En este nivel de pensamiento los alumnos deberían encontrar medidas de ángulos, comparar figuras por apariencia o por propiedades, relacionar figuras según descripción de propiedades, seleccionar según propiedades, descubrir y generalizar propiedades, descubrir clases de figuras, aplicar propiedades al diferenciar figuras y generalizar por forma o propiedad. Los resultados que establecen las diferencias y que permitieron seleccionar a los alumnos se encuentran en el anexo III.

Los alumnos Marco Antonio y Denesse (**pareja A**) mostraron un nivel de pensamiento consistente con el **nivel 0** y un desempeño alto con respecto al **nivel I** al basar sus respuestas identificando y generalizando clases de figuras por sus propiedades (ver anexo III).

Las alumnas Alejandra y Deborah (**pareja B**) fueron consistentes con el **nivel 0** mostrando un aprendizaje geométrico básico y mostraron un desempeño medio con respecto a las preguntas relacionadas con el **nivel I** al basar sus respuestas identificando y seleccionado figuras por su forma y por sus propiedades.

Los alumnos Ricardo y Alfredo (**pareja C**) fueron consistentes con el **nivel 0** de Van Hiele, pero tuvieron un desempeño escaso en las preguntas relacionadas con el **nivel I** al basar sus respuestas en las formas y no en las propiedades de las figuras.

En general el desempeño de los sujetos de estudio de casos fue constante. Marco Antonio y Denesse trabajaron más rápido que el resto de los sujetos de estudio. El trabajo de Alejandra y Deborah fue lento y con apoyo constante entre las dos. El trabajo de Ricardo y Alfredo fue lento, requerían apoyo ocasional y por momentos entablaron una clara competencia por realizar las acciones en la calculadora.

Observaciones específicas al aplicar las actividades A, B y C

Es necesario tomar en cuenta que el trabajo consistió en una secuencia de actividades que deberían realizar los estudiantes en el formato de hojas de trabajo con apoyo de la versión de Cabri II instalada en la Calculadora TI-92 Plus. También se incluyeron preguntas relacionadas con el trabajo que tenían que realizar y encaminadas hacia uno o varios contenidos previamente especificados. Las actividades se planearon con la intención de combinar el trabajo de la calculadora y la solución a las preguntas planteadas.

La actividad A, denominada LAS RADIODIFUSORAS**,** pretendió la construcción de un triángulo dadas tres medidas cualesquiera, asumiendo que los alumnos teníanidea de conceptos tales como segmento de recta, punto de intersección y concepto de circunferencia. La actividad fue dividida en tres hojas de trabajo, de forma tal que los alumnos fueran alcanzando el contenido por medio de pequeños avances.

En la actividad B, EL PERRO Y EL JARDÍN, se pretendió que a partir de haber aprendido en la actividad A la construcción de un triángulo, determinaran un procedimiento para encontrar la posición del circuncentro en un triángulo rectángulo y en general del circuncentro de un triángulo cualquiera dadas tres medidas cualesquiera, para los lados del triángulo, asumiendo que los alumnos habían adquirido los contenidos de la actividad previa y conceptos tales como línea horizontal y ángulo recto. La actividad también fue dividida en tres hojas de trabajo, de forma tal que los alumnos fueran alcanzando el contenido por medio de pequeños avances.

La actividad C se tituló LOS PERROS**.** En ella se pretendió la construcción de triángulos rectángulos circunscritos y deducir la relación en las medidas de los ángulos central e inscrito asumiendo que los alumnos habían adquirido los contenidos de la actividad previa y conceptos tales como semicircunferencia y cuerda. La actividad también fue dividida en tres hojas de trabajo, de forma tal que los alumnos fueran alcanzando el contenido por medio de pequeños avances.

La descripción completa de las actividades A, B y C, así como un ejemplo en blanco de cada actividad se puede consultar en el anexo IV.

Una vez aplicadas las tres actividades se realizó el análisis del trabajo desarrollado por los seis alumnos seleccionados, vinculando sus respuestas y acciones con los niveles del pensamiento geométrico según Van Hiele. El desempeño de cada uno de los sujetos fue distinto, en general se observa que la pareja A tuvo más respuestas correctas que las otras dos parejas. De manera más específica se pudo observar lo siguiente:

- Los alumnos del grupo A tuvieron mejor desempeño al establecer más relaciones geométricas que las otras dos parejas (nivel 1.1).
- La mayoría de los alumnos utilizó en forma apropiada el vocabulario que se introdujo por medio de las actividades (nivel 1.2).
- En relación al descubrimiento de propiedades (nivel 1.5), casi todos los alumnos tuvieron dificultades para establecer que en todo triángulo la suma de dos lados es mayor que el tercero. Pero la mayoría tuvo éxito al

generalizar la igualdad de todos los ángulos inscritos subtendidos por el mismo ángulo central.

- Al resolver problemas geométricos usando propiedades (nivel 1.9), todos los alumnos confiaron en las aproximaciones que obtenían por medio del "arrastre" en la calculadora para comprobar la relación entre las medidas de un ángulo inscrito y su respectivo ángulo central. Por el contrario, las parejas del grupo B y C tuvieron dificultades para descubrir por medio de "arrastres" cuándo un lado de un triángulo es tan pequeño que es imposible construir con esos segmentos un triángulo (la suma de las medidas de dos lados no pueden ser iguales al tercero).

Es necesario aclarar que las actividades se planearon en relación sólo con algunos descriptores de los niveles de pensamiento, así como con algunos subdescriptores descritos en el referente teórico (por ejemplo se trabajó con los descriptores 10C y 10D).

Los resultados del trabajo de campo se reportan tomando como referencia los descriptores de Van Hiele, a partir de las respuestas que dieron los alumnos a cada una de las actividades que se emplearon en la realización del trabajo de campo. Para este efecto se analizaron cada una de las actividades y se extrajeron aquellas preguntas y respuestas que corresponden a cada uno de los descriptores de Van Hiele.

En primera instancia se presenta una valoración general del desempeño de cada estudiante en una tabla como la que se muestra más adelante; en esa tabla se indica con flechas el grado de certeza que lograron los estudiantes en sus respuestas. Una flecha que apunta hacia arriba (↑) indica que el estudiante tuvo más aciertos que desaciertos y una flecha que apunta hacia abajo (↓) indica que tuvo más desaciertos que aciertos. Cuando aparece una flecha con dos puntas (↕) quiere decir que las respuestas fueron parciales, pero no llegaron al objetivo previsto.

Descriptor del Nivel de Van Hiele	Parejas A		Parejas B		Parejas C	
Actividades	Marco A.	Denesse	Alejandra	Deborah	Ricardo	Alfredo

En las secciones que siguen se presentan las respuestas de los estudiantes siguiendo la estructura descrita en los párrafos anteriores.

Descriptor 1.1

Descriptor 1.1. del Nivel 1 de Van Hiele	Parejas A		Parejas B		Parejas C	
Identifica y prueba relaciones Actividades	Marco A.	Denesse	Alejandra	Deborah	Ricardo	Alfredo
A. Hoja 1: Relaciona las medidas del radio y diámetro.	↑	↑	↓	↓	↑	↓
A. Hoja 3:.Identifica relación entre las medidas de un triángulo.	↑	↓	↓	↓	↓	↓
B. Hoja 1:.Relación entre las distancias de los vértices a un punto.	↓	↑	↓	↓	↑	↓
B. Hoja 2:.Distancia del centro a cualquier punto de la circunferencia.	↑	↑				
C. Hoja 1: La medida de cualquier radio en una circunferencia.	↑	↑	↑	↑	↑	↑
C. Hoja 1: Triángulo inscrito en una semicircunferencia	↑	↑	↑	↑	↑	↑
C. Hoja 2: Medida del ángulo inscrito y el ángulo central correspondiente.	↑	↑	↑	↑	↓	↓

Análisis puntual del trabajo de los estudiantes respecto al descriptor 1.1

Los alumnos debían identificar y justificar con los recursos a su alcance las relaciones planteadas en las actividades. En la actividad A, hoja 1, los alumnos deberían establecer la relación entre el radio y el diámetro de una circunferencia. El desempeño de las parejas fue diferente, pero los datos recabados muestran que ninguno estableció dicha relación.

La pareja A no utilizó los términos radio y diámetro de forma explícita, pero estableció la relación entre sus medidas.

Marco	Actividad A1

¿Cuál es la distancia entre el punto A y el B? 3.01

¿Existe alguna relación con respecto a sus medidas entre el segmento AB y la suma de los segmentos AX y BX? Que AB es igual que la suma de AX y BX

A pesar de haber realizado el arrastre del punto B hasta la distancia máxima, ninguna de las dos alumnas de la pareja B identificó la relación entre las medidas del radio y el diámetro.

Deborah	Actividad A1

¿Cuál es la distancia entre el punto A y el B? 1.5

¿Existe alguna relación con respecto a sus medidas entre el segmento AB y la suma de los segmentos AX y BX? que estan en la misma atura

En la pareja C, los alumnos encontraron la distancia solicitada pero no pudieron establecer la relación entre los segmentos.

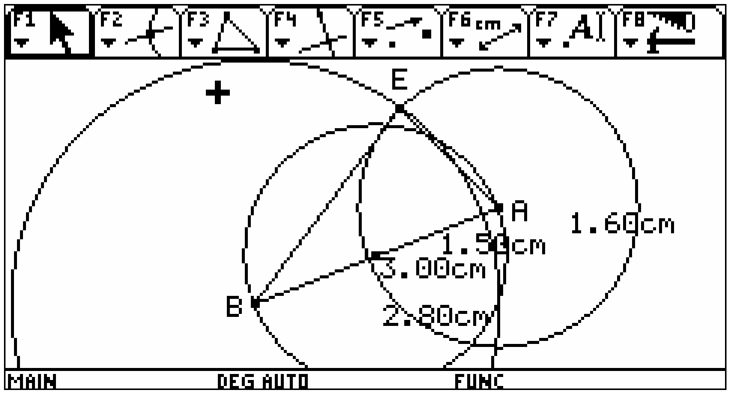
Alfredo	Actividad A1

- [ ] ¿Cuál es la distancia entre el punto A y el B? 3.00
- [ ] ¿Existe alguna relación con respecto a sus medidas entre el segmento AB y la suma de los segmentos AX y BX? NO

En la actividad A, hoja 3, se pedía identificar la relación entre las medidas de los lados de un triángulo. En este caso, se analizaron las respuestas de las parejas y se observó que tuvieron grandes dificultades para describir una regla general. De acuerdo a la figura y sus respuestas, únicamente Marco, que formó parte de la pareja A, identificó la relación entre las medidas de los lados de un triángulo. Sin embargo, no lo estableció como regla general y sólo mencionó de manera específica en qué caso el triángulo no puede ser trazado.

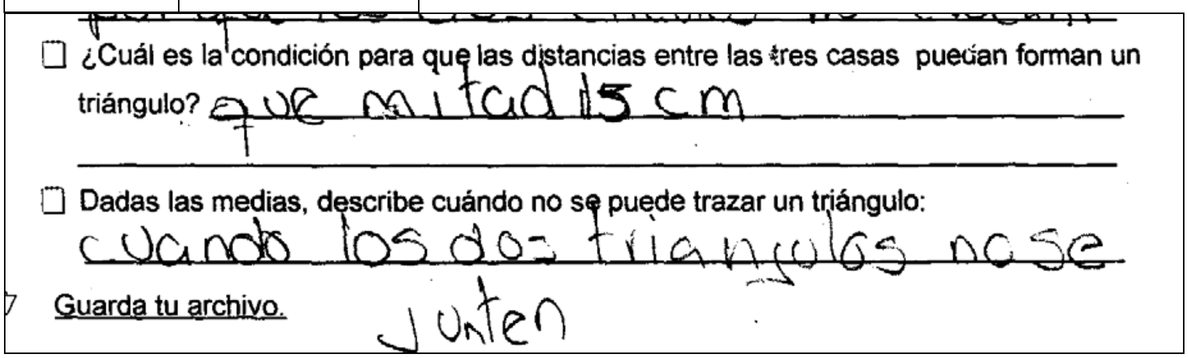
Marco	Actividad A3

- [ ] Explica por que en algunos casos NO se pudo formar el triángulo:
  Porque si se suman no resultan más de 30
- [ ] ¿Cuál es la condición para que las distancias entre las tres casas puedan forman un triángulo? Que A y B sumados dan más de 30
- [ ] Dadas las medias, describe cuándo no se puede trazar un triángulo:
  Cuando dan menos de 30



La pareja B no identificó la relación entre las medidas de tres segmentos para que con ellos se pueda construir un triángulo; además, se confundieron al señalar como triángulos a las circunferencias que se desplazaban.

Alejandra	Actividad A3



¿Cuál es la condición para que las distancias entre las tres casas puedan forman un triángulo? que mitad 15 cm

Dadas las medias, describe cuándo no se puede trazar un triángulo: cuando los dos triangulos no se junten

Guarda tu archivo.

En la actividad B, hoja 1, se pretendía propiciar que establecieran la relación entre las distancias de los vértices de un triángulo con un punto específico. Nuevamente fue difícil para los alumnos identificar la relación solicitada. Únicamente dos alumnos mencionaron la relación entre las distancias de los vértices a un punto previamente definido.

Denesse	B1

Mide las distancias de los segmentos AX, BX y CX. Mueve las distancias a un lado de la pantalla y anota en cada medida el segmento al que corresponden.

- ☐ ¿Cuáles son las distancias?

AX = 1.90cm	BX = 1.80 cm	CX = 0.95cm

- ☐ Tomando en cuenta que la medida de la correa debe ser suficiente para que el perro llegue del lugar donde esta sujetado a cualesquiera de los tres vértices del patio, ¿cuál es la medida que debe tener la correa del perro? 1.90 cm

Alejandra	B1

Mide las distancias de los segmentos AX, BX y CX. Mueve las distancias a un lado de la pantalla y anota en cada medida el segmento al que corresponden.

- ☐ ¿Cuáles son las distancias?

AX = 2.58cm	BX = 2.40 cm	CX = 1.76cm

- ☐ Tomando en cuenta que la medida de la correa debe ser suficiente para que el perro llegue del lugar donde esta sujetado a cualesquiera de los tres vértices del patio, ¿cuál es la medida que debe tener la correa del perro? ______

Alfredo	Actividad B1

¿Cuáles son las distancias?

AX = 1.40 cm	BX = 1.40 cm	CX = 0.83 Cm

Tomando en cuenta que la medida de la correa debe ser suficiente para que el perro llegue del lugar donde esta sujetado a cualesquiera de los tres vértices del patio, ¿cuál es la medida que debe tener la correa del perro? 3.2 Cm

Ricardo	Actividad B1

- Mide las distancias de los segmentos **AX, BX y CX. Mueve las** distancias a un lado de la pantalla y anota en cada medida el segmento al que corresponden.
  - ¿Cuáles son las distancias?

AX = 1.00 cm	BX = ~~1.50~~ 1.54 m	CX = ,74 m

  - Tomando en cuenta que la medida de la correa debe ser suficiente para que el perro llegue del lugar donde esta sujetado a cualesquiera de los tres vértices del patio, ¿cuál es la medida que debe tener la correa del perro? 1.54 m

Con relación a la identificación de que la longitud de cualquier radio de una circunferencia es la misma (actividad C, hoja 1), todos los alumnos establecieron dicha relación; sin embargo, la pareja C confundió el término distancia con "altura", lo cual puede ser producto de un estilo propio de hablar, pero su idea era señalar la distancia.

Marco	Actividad C1

- Coloca a Mini (M) y Bongo (B) en cada **punto de las intersecciones** de la circunferencia y la recta.
- Oculta la recta.
- Mide la distancia XB. Etiqueta la distancia y colócala en uno de los extremos.
  - ¿Cuál es la medida de la correa de Bongo? 1.70
  - Sin medir las correas de Pinky (XP) y Mini (XM), ¿Cuánto miden sus correas? la misma
  - ¿Por qué? Por que es la misma distancia

Deborah	Actividad C1

- Coloca a Mini (M) y Bongo (B) en cada **punto de las intersecciones** de la circunferencia y la recta.
- Oculta la recta.
- Mide la distancia XB. Etiqueta la distancia y colócala en uno de los extremos.
  - ☐ ¿Cuál es la medida de la correa de Bongo? 1.20 cm.
  - ☐ Sin medir las correas de Pinky (XP) y Mini (XM), ¿Cuánto miden sus correas? XP. 1.20 XM 1.20
  - ☐ ¿Por qué? es la misma distancia solo cambia de lugar

Ricardo	Actividad C1

Coloca a Mini (M) y Bongo (B) en cada **punto de las intersecciones** de la circunferencia y la recta.

Oculta la recta.

Mide la distancia XB. Etiqueta la distancia y colócala en uno de los extremos.

- ☐ ¿Cuál es la medida de la correa de Bongo? 0,90 cm (m.)
- ☐ Sin medir las correas de Pinky (XP) y Mini (XM), ¿Cuánto miden sus correas? 0,90
- ☐ ¿Por qué? por que estan a la misma altura puede que esta circunferencia

En la actividad C, hoja 1, todos los alumnos descubrieron, empleando arrastres continuos del vértice del ángulo recto del triángulo, que cualquier triángulo inscrito en una semicircunferencia es rectángulo.

Deborah	C1

☐ **Entonces, cuándo un triángulo está inscrito en una semicircunferencia (como en este caso), ¿qué clase de triángulo se forma?** Rectangulo

Guarda tu archivo

Denesse	Actividad C1

☐ Entonces, cuándo un triángulo está inscrito en una semicircunferencia (como en este caso), ¿qué clase de triángulo se forma? un triángulorectángulo

En la actividad C, hoja 2, se pide establecer la relación entre la medida del ángulo inscrito y el ángulo central correspondiente; las tres parejas tuvieron éxito al determinar que el ángulo inscrito mide la mitad que su correspondiente ángulo central. Sin embargo, se puede observar que la redacción fue diferente, la pareja B estableció la relación pero no definió cuál ángulo es la mitad del otro y la pareja C confundió cuál ángulo era el doble del otro.

Marco	C2

☐ Observa los ángulos MPB y MXB. ¿Dónde se encuentran ubicados los puntos que comparten ambos ángulos? En los puntos M y B

☐ ¿Cuál es la relación entre las medidas de los ángulos MPB y MXB?
En que MPB es mitad de MXB

Alejandra	C2

☐ Observa los ángulos MPB y MXB. ¿Dónde se encuentran ubicados los puntos que comparten ambos ángulos? en la circufcrencia

☐ ¿Cuál es la relación entre las medidas de los ángulos MPB y MXB?
uno es la mitad de otro

Alfredo	C2

☐ Observa los ángulos MPB y MXB. ¿Dónde se encuentran ubicados los puntos que comparten ambos ángulos? en M y B

☐ ¿Cuál es la relación entre las medidas de los ángulos MPB y MXB?
que el ~~a~~ angulo ~~MXB~~ bmp es el doble de MXP

Descriptor 1.2

Descriptor 1.2. del Nivel 1 de Van Hiele:	Parejas A		Parejas B		Parejas C	
Uso apropiado del vocabulario Actividades	Marco A.	Denesse	Alejandra	Deborah	Ricardo	Alfredo
A. Hoja 1: Unidades de medida longitudinal	↑	↓	↑	↑	↑	↑
B. Hoja 2: Concepto de circunferencia	↑	↑				
C. Hoja 1:.Concepto de triángulo rectángulo	↑	↑	↑	↑	↑	↑

Análisis puntual del trabajo de los estudiantes respecto al descriptor 1.2

Al analizar el uso apropiado de las unidades de medida según el descriptor 1.2 del nivel 1, en la actividad A, hoja 1, las tres parejas entendieron que debían representar en centímetros los kilómetros del problema planteado.

Marco	A1

Mide la distancia de **X** a la circunferencia.

☐ ¿Cómo representarías en tu pantalla los 15km? Con escala de 15cm

Alejandra	A1

Mide la distancia de **X** a la circunferencia.

☐ ¿Cómo representarías en tu pantalla los 15km? 1.50 cm

Ricardo	Actividad A1

Mide la distancia de **X** a la circunferencia.

☐ ¿Cómo representarías en tu pantalla los 15km? con 1.50 cm

Respecto al concepto de triángulo rectángulo en la actividad C, hoja 1, las tres parejas determinaron que todo triángulo rectángulo tiene un ángulo recto. Sin embargo, la pareja C explicó que tenía un ángulo recto pero no lo escribió.

Denesse	Actividad C1

☐ ¿El triángulo MPB es un triángulo rectángulo? si.

☐ ¿Por qué? tiene un ángulo recto.

Alejandra	Actividad C1

¿El triángulo MPB es un triángulo rectángulo? Si

¿Por qué? tiene un angulo de 90°

Alfredo	Actividad C1

¿El triángulo MPB es un triángulo rectángulo? "Si" 90

¿Por qué?

Descriptor 1.3

Descriptor 1.3B. del Nivel 1 de Van Hiele:	Parejas A		B		C	
Agrupa figuras de diferentes modos de acuerdo a ciertas propiedades, incluyendo un tipo para todas las clases. Actividades	Marco	Denesse	Alejandra	Deborah	Ricardo	Alfredo
C. Hoja 1: Subclase de Triángulos rectángulos por estar inscritos en una semicircunferencia.	↑	↑	↑	↑	↑	↑

Análisis puntual del trabajo de los estudiantes respecto al descriptor 1.3.

En la actividad C hoja 1, todos las parejas agruparon a los triángulos con un ángulo recto en la subclase de triángulos rectángulos inscritos en una semicircunferencia, mostrando el acceso al descriptor 1.3 del nivel 1 de Van Hiele.

Marco	Actividad C1

☐ Entonces, cuándo un triángulo está inscrito en una semicircunferencia (como en este caso), ¿qué clase de triángulo se forma? Triángulo rectángulo

Deborah	Actividad C1

☐ Entonces, cuándo un triángulo está inscrito en una semicircunferencia (como en este caso), ¿qué clase de triángulo se forma? Rectangulo

Alfredo	Actividad C1

☐ Entonces, cuándo un triángulo está inscrito en una semicircunferencia (como en este caso), ¿qué clase de triángulo se forma? rectangulo

Descriptor 1.5

Descriptor 1.5. del Nivel 1 de Van Hiele:	Pareja A		Pareja B		Pareja C	
Descubre propiedades de figuras específicas empíricamente y generaliza propiedades para esa clase de figuras. Actividades	Marco	Denesse	Alejandra	Deborah	Ricardo	Alfredo
A. Hoja 3: La suma de dos lados de un triángulo es mayor que el tercer lado.	↕	↕	↕	↕	↕	↕
C. Hoja 3: La igualdad de todos los ángulos inscritos cuyo ángulo central es el mismo.	↑	↑	↑	↑	↓	↓

Análisis puntual del trabajo de los estudiantes respecto al descriptor 1.5

En la actividad A, hoja 3, dados tres segmentos, se pidió a los alumnos descubrir empíricamente cuándo era posible construir un triángulo con ellos. De todos los alumnos, únicamente Marco identificó la condición para construir un triángulo con los elementos dados. Las parejas B y C describieron la propiedad en términos gráficos, refiriéndose a la ubicación de las circunferencias y su relación entre ellas y no a las medidas dadas. En general, las tres parejas se limitaron a la condición específica en este problema y no la generalizaron a cualquier terna de segmentos.

Marco	Actividad A3

Explica por que en algunos casos NO se pudo formar el triángulo: Por que si se suman no resultan más de 30

¿Cuál es la condición para que las distancias entre las tres casas puedan forman un triángulo? Que A y B sumados dan más de 30

Deborah	Actividad A3

Explica por que en algunos casos NO se pudo formar el triángulo: por que los dos circulos no chocabas

¿Cuál es la condición para que las distancias entre las tres casas puedan forman un triángulo? que midan 15 cm

Alfredo	Actividad A3

Explica por que en algunos casos NO se pudo formar el triángulo: Por que la Sircunferencia no se Unía con la otra

¿Cuál es la condición para que las distancias entre las tres casas puedan forman un triángulo? las Circunferencias se unan

En la actividad C, hoja 3, se pretendió propiciar que los alumnos descubrieran la propiedad de igualdad de todos los ángulos inscritos que subtienden el mismo ángulo central (descriptor 1.5. del nivel de 1). Las parejas A y C confundieron la relación planteada con la relación simple entre un ángulo inscrito y su respectivo ángulo central. La pareja A, después de releer, pudo establecer la relación de igualdad planteada en el problema. La pareja B fue la única que reconoció la relación y completó la actividad de forma correcta.

Marco	Actividad C3

☐ Si observas los resultados anteriores, la medida de un **ángulo inscrito** en una circunferencia es igual a la **mitad** de su respectivo **ángulo central**. ¿Cómo son las medidas de todos los ángulos inscritos cuyo ángulo central es el mismo?

El doble De la misma medida

Deborah	Actividad C3

☐ Si observas los resultados anteriores, la medida de un **ángulo inscrito** en una circunferencia es igual a la **mitad** de su respectivo **ángulo central**. ¿Cómo son las medidas de todos los ángulos inscritos cuyo ángulo central es el mismo?

igual

Ricardo	Actividad C3

☐ Si observas los resultados anteriores, la medida de un **ángulo inscrito** en una circunferencia es igual a la **mitad** de su respectivo **ángulo central**. ¿Cómo son las medidas de todos los ángulos inscritos cuyo ángulo central es el mismo?

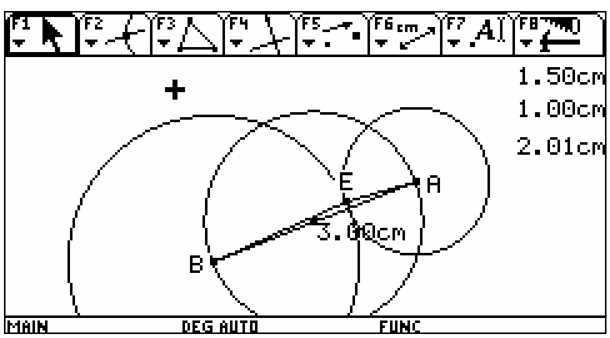
igual es el doble del angulo inscrito

Descriptor 1.9

Descriptor 1.9. del Nivel 1 de Van Hiele:	Parejas A		Parejas B		Parejas C	
Resuelve problemas geométricos usando propiedades conocidas de figuras o por acercamiento. Actividades	Marco	Denesse	Alejandra	Deborah	Ricardo	Alfredo
A. Hoja 2: Disminución de la medida de un lado de un triángulo hasta que desaparece.	↑	↑	↓	↓	↓	↓
B. Hoja 3: Ubicación del circuncentro en un triángulo obtusángulo.	↓	↓				
C. Hoja 2: Medida de un ángulo inscrito y su ángulo central correspondiente después de varios arrastres.	↑	↑	↑	↑	↑	↑

Análisis puntual del trabajo de los estudiantes respecto al descriptor 1.9.

En la actividad A, hoja 2, se planteó la resolución de problemas geométricos usando propiedades conocidas o acercamientos mediante “arrastres”, para determinar hasta dónde es posible disminuir las medidas de dos lados de un triángulo conservando dicha figura (ver gráfico siguiente).



La pareja A resolvió correctamente el problema planteado estableciendo los parámetros para los que el triángulo se mantiene o desaparece. Las parejas B y C tuvieron problemas al buscar por medio de “arrastres” con la calculadora la disminución de la medida de un lado del triángulo hasta que éste “desaparece”. Para la pareja B era necesario tener mayor práctica con la calculadora y con la tecla que permite desplazarse por la pantalla (navegador) para realizar los arrastres. La pareja C no realizó los arrastres solicitados y planteó que el triángulo permanecería bajo cualquier movimiento. A esta pareja se le invitó a continuar los arrastres para probar su aseveración, pero al tener un triángulo como el de la figura anterior, se detuvieron.

Denesse	Actividad A2

En tu modelo, arrastra poco a poco la circunferencia que representa la distancia de tu casa a la casa de tu novia(o) para que su radio disminuya hasta 19km.

- ☐ ¿Se conservó el triángulo durante todo el movimiento de la circunferencia? no
- ☐ ¿En que momento desaparece la casa de la novia? 1.92
- ☐ ¿Cuál es la distancia mínima para que exista la casa de la novia? 1.89

Alejandra	Actividad A2

En tu modelo, arrastra poco a poco la circunferencia que representa la distancia de tu casa a la casa de tu novia(o) para que su radio disminuya hasta 19km.

- ☐ ¿Se conservó el triángulo durante todo el movimiento de la circunferencia? Si
- ☐ ¿En que momento desaparece la casa de la novia? 2.13
- ☐ ¿Cuál es la distancia mínima para que exista la casa de la novia? 2.46

Alfredo	Actividad A2	

En tu modelo, arrastra poco a poco la circunferencia que representa la distancia de tu casa a la casa de tu novia(o) para que su radio disminuya hasta 19km.

- ☐ ¿Se conservó el triángulo durante todo el movimiento de la circunferencia? Si
- ☐ ¿En que momento desaparece la casa de la novia? en ninguno
- ☐ ¿Cuál es la distancia mínima para que exista la casa de la novia? 10 Km

En la actividad C, hoja 2, se pretendió que las parejas resolvieran problemas geométricos usando propiedades conocidas de figuras o por acercamiento; en este caso, encontrar la constante en la medida de todo ángulo inscrito que comparte un mismo ángulo central después de varios arrastres. Como se puede ver en las secciones que se muestran a continuación, todas las parejas constataron que la medida se mantiene aun cuando se desplaza el vértice del ángulo inscrito para ejemplificar diferentes casos, a pesar de que cada pareja trazó los ángulos en la ubicación que deseó.

Denesse	Actividad C2

- Mueve varias veces la posición de Pinky.
  - ☐ Completa el cuadro.

Ángulo en Movimiento (Posición de Pinky)	Triángulo BP_1M	Triángulo BP_2M	Triángulo BP_3M	Triángulo BP_4M	Triángulo BP_5M
Medida del ángulo inscrito en movimiento	82.71°	82.71°	82.71°	82.71°	82.71°
Medida del ángulo central MXB	165.42°	165.42°	165.42°	165.42°	165.42°
¿Se mantuvo la relación entre las medidas de los ángulos?	sí	sí	sí	sí	si

☐ ¿Qué pasó con la medida del ángulo cuyo vértice está ocupado por Pinky al mover la posición de su vértice? se mantuvo igual.

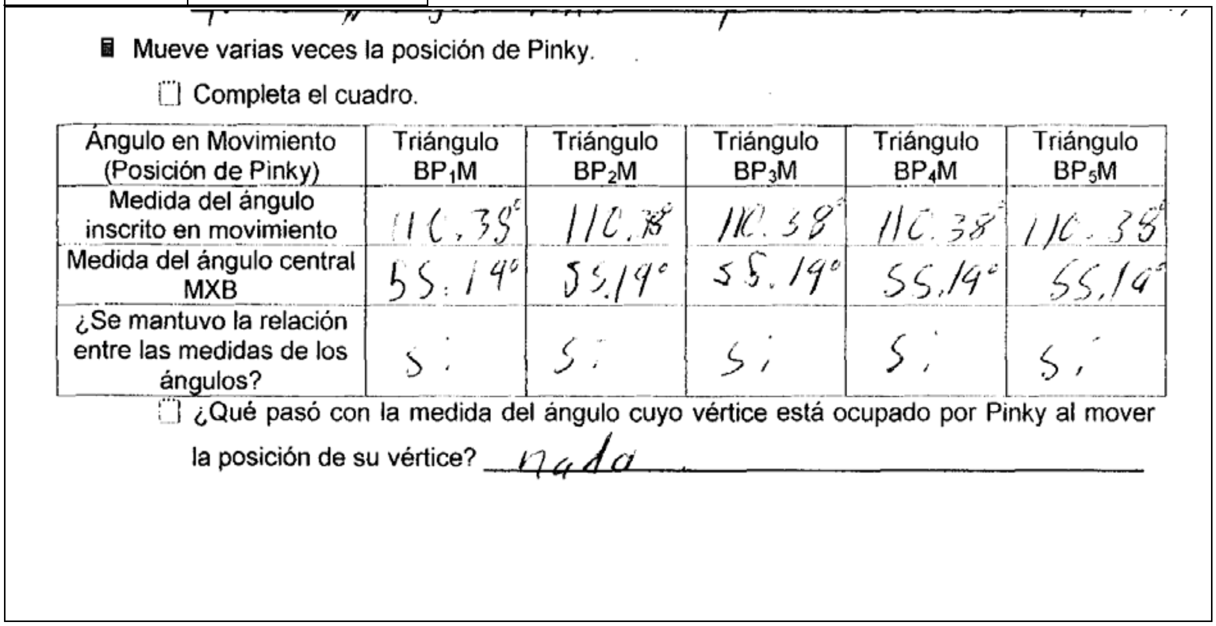
Deborah	Actividad C2

- Mueve varias veces la posición de Pinky.
  - ☐ Completa el cuadro.

Ángulo en Movimiento (Posición de Pinky)	Triángulo BP_1M	Triángulo BP_2M	Triángulo BP_3M	Triángulo BP_4M	Triángulo BP_5M
Medida del ángulo inscrito en movimiento	78.02	78.02°	78.02°	78.02°	78.02°
Medida del ángulo central MXB	156.03°	156.03°	156.03	156.03°	156.03°
¿Se mantuvo la relación entre las medidas de los ángulos?	Sí	sí	sí	sí	sí

☐ ¿Qué pasó con la medida del ángulo cuyo vértice está ocupado por Pinky al mover la posición de su vértice? se mantuvo igual

Ricardo	Actividad C2



Mueve varias veces la posición de Pinky.

Completa el cuadro.

Ángulo en Movimiento (Posición de Pinky)	Triángulo BP_1M	Triángulo BP_2M	Triángulo BP_3M	Triángulo BP_4M	Triángulo BP_5M
Medida del ángulo inscrito en movimiento	110.38°	110.38	110.38°	110.38°	110.38°
Medida del ángulo central MXB	55.19°	55.19°	55.19°	55.19°	55.19°
¿Se mantuvo la relación entre las medidas de los ángulos?	Si	Si	Si	Si	Si

¿Qué pasó con la medida del ángulo cuyo vértice está ocupado por Pinky al mover la posición de su vértice? nada

Resumen del análisis de las actividades A, B y C

En relación al descriptor 1.1 del nivel 1 de Van Hiele, los alumnos no identificaron la relación entre las medidas de dos de los dados de un triángulo con respecto al tercero. Se observó que los alumnos no encontraron las medidas idóneas para que cualquier lado de un triángulo dado fuera igual o menor que la suma de las medidas de los otros dos. Los datos que recabamos sugieren que esta dificultad se debió a problemas con el dominio de la función que permitía desplazar (arrastrar) algún elemento geométrico en la calculadora y en segundo lugar porque detuvieron dichos movimientos antes de que el triángulo se “transformara” en una recta; o los movimientos que realizaron no fueron los necesarios para que lograran la “transformación” buscada.

Sobre el uso apropiado del vocabulario específico para matemáticas, según el subnivel 1.2 del nivel 1 de Van Hiele, todos los alumnos utilizaron adecuadamente la escala al cambiar de kilómetros a centímetros. De igual forma, determinaron la propiedad elemental que determina si un triángulo es rectángulo o no.

Cuando se pidió a las parejas agrupar la clase de triángulos inscritos en una semicircunferencia (descriptor 1.3. del nivel 1 de Van Hiele), las tres parejas determinaron que los triángulos con esa característica son rectángulos.

En cuanto al nivel 1.5 del nivel 1 de Van Hiele, se pretendió que los alumnos descubrieran propiedades específicas. Se observó que los alumnos intentaron determinar cuándo, dadas las medidas de tres segmentos, se podía construir un triángulo y cuándo no, pero se limitaron a los casos específicos del problema planteado, sin establecer esto como una regla general. También se planteó otro problema en la actividad C para que determinaran la igualdad de los ángulos inscritos que comparten un mismo ángulo central, situación que presentó la oportunidad de comparar un ángulo central con varios de los ángulos inscritos correspondientes en forma directa por medio de los constantes “arrastres”. En este problema, la capacidad de la calculadora de realizar nuevas construcciones de forma inmediata mediante “arrastres” les permitió resolver el problema en poco tiempo.

A los alumnos se les pidió resolver problemas geométricos usando propiedades conocidas de figuras o por acercamiento, de acuerdo al descriptor 1.9. del nivel 1 de Van Hiele. En la actividad A, hoja 2, se pidió a las parejas de alumnos determinar en qué momento desaparece un triángulo al ir disminuyendo poco a poco la medida de uno de sus lados, actividad que se les dificultó por no dominar el manejo de la calculadora. En la actividad C, hoja 2, las parejas encontraron la relación entre la medida de un ángulo inscrito y su respectivo ángulo central después de utilizar la herramienta de la calculadora para desplazar puntos y mantener las condiciones del resto de los trazos, aun cuando cambia de posición algunos de los vértices o extremos de los ángulos.

Respecto a la relación entre las distancias de los vértices a un punto (circuncentro), los alumnos no lograron encontrar la ubicación del circuncentro, aparentemente por no tener el suficiente dominio de la función “arrastre” de la calculadora. En nuevos intentos, con apoyo del profesor, dicha posición fue encontrada, no sin antes ver si los alumnos tenían idea de que lo que estaban buscando era identificar un punto que equidistara de los tres vértices del triángulo. Se observó que la dificultad en esta parte de la actividad radicaba principalmente en el obstáculo operativo con la herramienta, lo que obstruyó parcialmente el proceso cognitivo de los alumnos.

Con relación al uso apropiado del vocabulario, los alumnos lo emplearon correctamente para referirse a unidades de longitud y a los conceptos de circunferencia y triángulo rectángulo; esto se debe a que esos términos y conceptos les son familiares porque los han utilizado desde la escuela primaria, además de que durante el trabajo de campo se puso énfasis en que los emplearan correctamente.

Los datos recabados muestran que los alumnos lograron incrementar su vocabulario, lograron establecer relaciones entre los conocimientos que tenían y los propuestos: las medidas del radio y diámetro, la relación entre las medidas de los lados de un triángulo, la relación entre las distancias de los vértices a un punto determinado, la distancia del centro a cualquier punto de la circunferencia, la medida de cualquier radio en una circunferencia, así como la medida del ángulo inscrito y del ángulo central correspondiente.

Marco fue el alumno que mostró mejor desempeño en las actividades que corresponden a los descriptores del nivel 1 de Van Hiele. Necesitó apoyo mínimo para resolver las hojas de trabajo e incluso ayudó a su compañera. Su trabajo muestra que contaba con los antecedentes que le permitieron acceder a las relaciones y generalizaciones planeadas en las actividades. El resto de los alumnos mostraron un trabajo menos consistente, identificando algunas relaciones y resolviendo algunos problemas planteados en dichas actividades.

Observaciones específicas al aplicar las actividades D, E y F

La actividad D, denominada EL PERRO Y LA FÁBRICA, requiere la construcción de un triángulo circunscrito dados sus ángulos y el conocimiento de la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo. Esto parte del supuesto de que los alumnos habían adquirido algunas nociones a este respecto en la actividad previa. La actividad fue dividida en dos hojas de trabajo, con la finalidad de que los alumnos fueran progresando en sus aprendizajes mediante avances graduales.

La actividad E, EL PERRO VIGÍA, tiene como propósito propiciar que los alumnos encuentren la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero circunscrito y la suma de los ángulos interiores de un polígono circunscrito, asumiendo que habían abordado contenidos relacionados con esto en la actividad previa. La actividad fue dividida en tres hojas de trabajo, de forma tal que los alumnos fueran abordando el contenido por medio de pequeños avances.

Por último, en la actividad F, denominada EL PERRO ROBOT, se pide a los alumnos que encuentren el centro de la circunferencia en que está inscrito un cuadrilátero (en los casos que se puede realizar dicho trazo) y la construcción de alguno casos donde de cuadriláteros circunscritos (dados sus ángulos); se asume que los alumnos habían adquirido conocimientos relacionados con esos conceptos en la actividad previa (actividad D). La actividad fue dividida en cuatro hojas de trabajo.

Una vez aplicadas las tres últimas actividades (D, E y F) se realizó el análisis de las respuestas y acciones de los estudiantes en el marco de los niveles del pensamiento geométrico según Van Hiele. Es necesario aclarar que se tomaron sólo aquellas que están relacionadas con algunos descriptores del nivel 1 de Van Hiele. En estas actividades se retoman los descriptores trabajados en las tres primeras actividades, de tal forma que se puede establecer un contraste con los resultados de las tres últimas actividades.

La descripción completa de las actividades D, E y F, así como un ejemplo en blanco de cada actividad se puede consultar en el anexo IV.

Descriptor 1.1.

Descriptor 1.1 del Nivel 1 de Van Hiele	Parejas A		Parejas B		Parejas C	
Identifica y prueba relaciones Actividades	Marco A.	Denesse	Alejandra	Deborah	Ricardo	Alfredo
E. Hoja 1:.Suma de los ángulos internos de un cuadrilátero	↑	↑	↑	↑		
E. Hoja 3. Suma de los áng. internos de un pentágono y hexágono	↑	↑	↑	↑		
F. Hoja 2:.Suma de los ángulos opuestos y adyacentes en un rectángulo	↑	↑			↑	↑

Análisis puntual del trabajo de los estudiantes respecto al descriptor 1.1

En este descriptor (1.1) del nivel 1 los alumnos debían identificar y explicar con los elementos a su alcance las relaciones planteadas en las actividades.

En la actividad E, hoja 1, se buscó que “descubrieran” que la suma de los ángulos de un cuadrilátero es constante por medio de la comparación con dos triángulos que comparten un lado. Las parejas A y B observaron que la suma debe ser 360° porque un cuadrilátero está formado por dos triángulos cuya suma de sus ángulos interiores es 180°.

Marco	E1

- Al unir los dos triángulos se forma un cuadrilátero, ¿cuántos ángulos internos tiene un cuadrilátero? 4
- El dueño del terreno asegura que la suma de los ángulos internos de la figura es de 360º, ¿la aseveración del dueño es correcta o incorrecta? incorrecta
- Explica como llegaste a tu conclusión: Por que la suma de los ángulos de ~~este~~ los triángulos es 360º

Alejandra	E1

- Al unir los dos triángulos se forma un cuadrilátero, ¿cuántos ángulos internos tiene un cuadrilátero? cuatro
- El dueño del terreno asegura que la suma de los ángulos internos de la figura es de 360º, ¿la aseveración del dueño es correcta o incorrecta? correcta
- Explica como llegaste a tu conclusión: por que 180° y 180° da 360°

En la actividad E, hoja 3 se pretendió, a partir del procedimiento para determinar la suma de los ángulos internos de un cuadrilátero (E1), encontrar la suma de los ángulos internos de un pentágono y hexágono. La pareja A encontró por triangulación la suma de los ángulos internos de un pentágono y hexágono, sin embargo se pudo observar que únicamente se basó en la suma de los ángulos internos de un triángulo. La pareja B también encontró la suma de los ángulos internos de diferentes polígonos por triangulación pero partió de la suma de los ángulos internos de un cuadrilátero y fue sumando 180° en el caso del pentágono y 180° más si se trata de un hexágono. La pareja C no realizó la hoja 3 de la actividad E.

Marco	E3

- ☐ Si la suma de los ángulos internos de un triángulo es de 180º, ¿cuál será la suma de los ángulos internos del terreno compuesto por los triángulos ABC, ACD, ADE? 540
- ☐ ¿Por qué? Por que 180 por 3 es 540
- ☐ Si el terreno tuviera seis lados y se descompusiera en triángulos como los especificados arriba, ¿en cuántos triángulos se puede descomponer? 4

Entre los puntos A y E, agrega el punto F a tu diseño y comprueba la respuesta anterior.

- ☐ ¿Cuál sería la suma de los ángulos internos del terreno de seis lados? 720

Deborah	E3

- ☐ Si la suma de los ángulos internos de un triángulo es de 180º, ¿cuál será la suma de los ángulos internos del terreno compuesto por los triángulos ABC, ACD, ADE? 540
- ☐ ¿Por qué? es 360° más 180°
- ☐ Si el terreno tuviera seis lados y se descompusiera en triángulos como los especificados arriba, ¿en cuántos triángulos se puede descomponer? con 4

Entre los puntos A y E, agrega el punto F a tu diseño y comprueba la respuesta anterior.

- ☐ ¿Cuál sería la suma de los ángulos internos del terreno de seis lados? 720

En la actividad F, hoja 2, se pretendió que los alumnos encontraran la constante en la suma de los ángulos opuestos y en la suma de los ángulos adyacentes en un rectángulo. El siguiente extracto muestra que las parejas debieron previamente en la hoja 1 construir el rectángulo y comprobar que cada uno de los ángulos medía 90° por abarcar la mitad de un circunferencia.

- Traza los segmentos DC y DA.
  - ☐ ¿Cuánto mide el ángulo ADC? 90°
  - ☐ ¿Por qué? Porque es la mitad del ángulo central
  - ☐ ¿El ángulo ADC cumple con la condición necesaria para que el perro – robot pueda pasar por el punto D y girar? Sí

Una vez realizadas las acciones propuestas en la actividad, las parejas A y C identificaron la constante en la suma de dos ángulos opuestos o adyacentes en un rectángulo, a pesar que cada quien construyó el rectángulo ubicando sobre la circunferencia inicial los puntos A y B, pero con posiciones distintas.

Marco	F2

¿Cuál es el resultado de la suma de 2 **ángulos adyacentes**? 180°

¿Y cuál es el resultado de la suma de los 2 **ángulos opuestos**? 180°

Cuando un cuadrilátero tiene **4 ángulos de 90°** se llama **rectángulo**, ¿el cuadrilátero ABCD es un rectángulo? sí

Ricardo	F2

☐ ¿Cuál es el resultado de la suma de 2 **ángulos adyacentes?** 180°

☐ ¿Y cuál es el resultado de la suma de los 2 **ángulos opuestos?** 180°

Descriptor 1.2

Parejas

Descriptor 1.2 del Nivel 1 de Van Hiele: A B C

Uso apropiado del vocabulario Actividades	Marco A.	Denesse	Alejandra	Deborah	Ricardo	Alfredo
F. Hoja 2: Concepto de rectángulo	↑	↑			↑	↑
F. Hoja 2: Concepto de cuadrado	↑	↑			↑	↑

Análisis puntual del trabajo de los estudiantes respecto al descriptor 1.2

En el descriptor 1.2 del nivel 1 se debe verificar si las parejas conocen el vocabulario apropiado y básico. Al respecto, en la actividad F, hoja 2, se verificó si las parejas conocían el concepto de rectángulo y el de cuadrado. Como se puede apreciar más adelante, las parejas A y C conocían que cuando un cuadrilátero tiene cuatro lados rectos se llama rectángulo.

Marco	F2

¿Cuál es el resultado de la suma de 2 **ángulos adyacentes**? 180°

¿Y cuál es el resultado de la suma de los 2 **ángulos opuestos**? 180°

Cuando un cuadrilátero tiene **4 ángulos de 90º** se llama **rectángulo**, ¿el cuadrilátero ABCD es un rectángulo? sí

Ricardo	F2

¿Cuál es el resultado de la suma de 2 **ángulos adyacentes**? 180°

¿Y cuál es el resultado de la suma de los 2 **ángulos opuestos**? 180°

Cuando un cuadrilátero tiene **4 ángulos de 90º** se llama **rectángulo**, ¿el cuadrilátero ABCD es un rectángulo? sí

De igual forma, las dos parejas determinaron que cuando un rectángulo tenía cuatro lados iguales, la figura era un cuadrado; pero debe señalarse que ambas parejas tuvieron sus dudas en aceptar que la figura inicial continuaba siendo rectángulo cuando se modificaban las medidas de sus lados de tal forma que las cuatro eran de la misma medida. Muestra de ello es que al preguntar si la nueva figura era rectángulo a pesar de tener sus cuatro lados iguales, la pareja A dijo que no y la pareja C no contestó. Aunque en la última pregunta responden que un rectángulo cuyos cuatro lados son iguales es un cuadrado, los alumnos continuaron dudando que una misma figura pudiera ser rectángulo y a la vez cuadrado.

Marco	F2

Un nuevo virus ha afectado al perro – robot. Ahora solo puede recorrer **distancias iguales**. Mueve los puntos de vigilancia para que se cumpla con la nueva condición.

- ¿El nuevo **cuadrilátero** ABCD sigue siendo rectángulo? no
- ¿Los 4 ángulos siguen midiendo 90º? sí
- ¿Qué nombre recibe un **rectángulo cuyos 4 lados son iguales**? cuadrado

Ricardo	F2

Un nuevo virus ha afectado al perro – robot. Ahora solo puede recorrer **distancias iguales**. Mueve los puntos de vigilancia para que se cumpla con la nueva condición.

- ¿El nuevo **cuadrilátero** ABCD sigue siendo rectángulo? ____________
- ¿Los 4 ángulos siguen midiendo 90º? Si
- ¿Qué nombre recibe un **rectángulo cuyos 4 lados son iguales**? [illegible]

Descriptor 1.5

Descriptor 1.5 del Nivel 1 de Van Hiele:	Parejas A		Parejas B		Parejas C	
Descubre propiedades de figuras específicas empíricamente y generaliza propiedades para esa clase de figuras. Actividades	Marco	Denesse	Alejandra	Deborah	Ricardo	Alfredo
D. Hoja 1: La suma de los ángulos internos de todo triángulo es 180°.	↑	↑	↑	↑	↕	↕
F. Hoja 4: Propiedades para que un cuadrilátero pueda inscribirse en una circunferencia.	↑	↑			↑	↑

Análisis puntual del trabajo de los estudiantes respecto al descriptor 1.5

En el descriptor 1.5 del nivel 1 se pretende identificar propiedades de figuras de forma empírica. En la actividad D, hoja 1 se pretendía descubrir que la suma de los ángulos internos de todo triángulo es 180°. Las tres parejas descubrieron dicha propiedad, como se puede observar en los extractos de abajo, producto del acercamiento inicial en los recuadros y verificado al mover cada uno de los vértices y comprobar que la suma se mantiene en 180°.

Marco	D1

Suma las medidas de los tres **ángulos centrales.**

Suma las medidas de los tres **ángulos inscritos**.

Completa el cuadro

							Suma de las 3 medidas
Ángulo	AXB	+	BXC	+	CXA		
Central	82.10	+	140.30	+	137.60	=	360
Ángulo	ACB	+	BAC	+	CBA		
Inscrito	41.05	+	70.15	+	68.80	=	180

¿Cuál es la suma de los ángulos internos de la fábrica? 180

Mueve uno a uno, los vértices de la fábrica.

¿La suma de los ángulos internos de la fábrica cambió? no

¿Cuánto suman los ángulos internos de un triángulo cualquiera? 180

¿Cambiará la suma de los ángulos internos de la fábrica al aumentar o disminuir el tamaño de la circunferencia que circunscribe a la fábrica? no

Alejandra	D1

Suma las medidas de los tres **ángulos centrales.**

Suma las medidas de los tres **ángulos inscritos**.

Completa el cuadro

							Suma de las 3 medidas
Ángulo	AXB	+	BXC	+	CXA		
Central	122.42°	+	127.23°	+	110.34°	=	360°
Ángulo	ACB	+	BAC	+	CBA		
Inscrito	61.21°	+	63.62°	+	55.17°	=	179.90 180°

¿Cuál es la suma de los ángulos internos de la fábrica? 180°

Mueve uno a uno, los vértices de la fábrica.

¿La suma de los ángulos internos de la fábrica cambió? 180°

¿Cuánto suman los ángulos internos de un triángulo cualquiera? 180°

Alfredo	D1

- Suma las medidas de los tres **ángulos centrales.**
- Suma las medidas de los tres **ángulos inscritos**.

☐ Completa el cuadro

360.00

								Suma de las 3 medidas
Ángulo	AXB	+	BXC	+	CXA			
Central	149.04	+	92.66	+	118.30	=	360.00
Ángulo	ACB	+	BAC	+	CBA			
Inscrito	74.52	+	40.33	+	57.[illegible]	=	180.00

☐ ¿Cuál es la suma de los ángulos internos de la fábrica? ____________________

En la actividad F, hoja 4, las parejas debieron agrupar de forma correcta a la subclase de cuadriláteros susceptibles de inscribirse en una circunferencia. Las parejas A y C concluyen que para que un cuadrilátero se pueda inscribir en una circunferencia sus ángulos opuestos deben sumar 180°, condición que únicamente cumplen el rectángulo y el cuadrado.

Marco	F4

☐ Solo en algunos casos un cuadrilátero se puede inscribir en una circunferencia ¿Cuál será la condición que deben cumplir sus ángulos opuestos? Qe sumen 180°

☐ Cuándo el cuadrilátero es un rectángulo o cuadrado, ¿la condición anterior se cumple? sí

☐ Explica lo que harías para saber si un cuadrilátero se puede inscribir en una circunferencia: Que sus ángulos opuestos den 180°

Alfredo	F4

Solo en algunos casos un cuadrilátero se puede inscribir en una circunferencia ¿Cuál será la condición que deben cumplir sus ángulos opuestos? Que Sumen 180

Cuándo el cuadrilátero es un rectángulo o cuadrado, ¿la condición anterior se cumple? Si

Explica lo que harías para saber si un cuadrilátero se puede inscribir en una circunferencia: Que los angulos opuestos midan 180

Descriptor 1.9

Descriptor 1.9 del Nivel 1 de Van Hiele:	Parejas A		Parejas B		Parejas C	
Resuelve problemas geométricos usando propiedades conocidas de figuras o por acercamiento Actividades	Marco A.	Denesse	Alejandra	Deborah	Ricardo	Alfredo
D. Hoja 2: Posible construcción de un triángulo dadas las medidas de sus ángulos	↑	↑	↑	↑	↑	↑

Análisis puntual del trabajo de los estudiantes respecto al descriptor 1.9

En el descriptor 1.9 del nivel 1 los alumnos deben resolver problemas geométricos usando propiedades conocidas de figuras o por acercamiento. En la actividad D, hoja 2, los alumnos debieron determinar la posible construcción de un triángulo dadas las medidas de tres ángulos. Las tres parejas sumaron las medidas de los tres ángulos y estuvieron de acuerdo en que se podía construir el triángulo pues el total era 180°, lo cual coincidía con la propiedad de los triángulos, en este caso estudiadas en la hoja de trabajo anterior.

Marco	D2

☐ Se quiere construir las paredes de la fabrica de forma triangular donde los ángulos formados por las paredes sean de 80º, 60º y 40º. ¿La suma de sus ángulos internos del triángulo es de 180º? Sí

☐ ¿Se puede construir la fábrica con dichos ángulos? Sí

Deborah	D2

☐ Se quiere construir las paredes de la fabrica de forma triangular donde los ángulos formados por las paredes sean de 80º, 60º y 40º. ¿La suma de sus ángulos internos del triángulo es de 180º? Sí

☐ ¿Se puede construir la fábrica con dichos ángulos? Sí

Ricardo	D2

Se quiere construir las paredes de la fabrica de forma triangular donde los ángulos formados por las paredes sean de 80º, 60º y 40º. ¿La suma de sus ángulos internos del triángulo es de 180º? Sí

¿Se puede construir la fábrica con dichos ángulos? Sí

Descriptor 1.10

Descriptor 1.10D del Nivel 1 de Van Hiele:	Parejas A		Parejas B		Parejas C	
Formula y usa generalizaciones acerca de propiedades de figuras y usa el lenguaje relacionado, pero no ve la necesidad de comprobación o explicación lógica de generalizaciones descubiertas empíricamente y no usa lenguaje relacionado correctamente Actividades	Marco A.	Denesse	Alejandra	Deborah	Ricardo	Alfredo
E. Hoja 3: Suma de los ángulos internos de cualquier polígono	↑	↑	↓	↑		

Análisis puntual del trabajo de los estudiantes respecto al descriptor 1.10

En el descriptor 1.10 del nivel 1 los alumnos debían formular y usar generalizaciones acerca de propiedades de figuras y usar el lenguaje relacionado, pero en ocasiones no ven la necesidad de comprobación o explicación lógica de generalizaciones descubiertas empíricamente y no usan lenguaje relacionado correctamente. En la actividad E, hoja de trabajo 3, las parejas A y B siguieron la secuencia de la actividad al triangular un cuadrado y repetir el procedimiento con un pentágono, un hexágono, un octágono y un nonágono. Después de llenar los recuadros y analizar los datos, las parejas determinaron que cada polígono se podía triangular en una cantidad igual al número de lados menos dos. Por último se les pidió mencionar un procedimiento para encontrar la suma de los ángulos internos de un polígono, para lo cual la pareja A se basó en el número de vértices y la pareja B, en el número de lados, llegando a un resultado que puede extenderse a cualquier polígono.

Denesse	E3

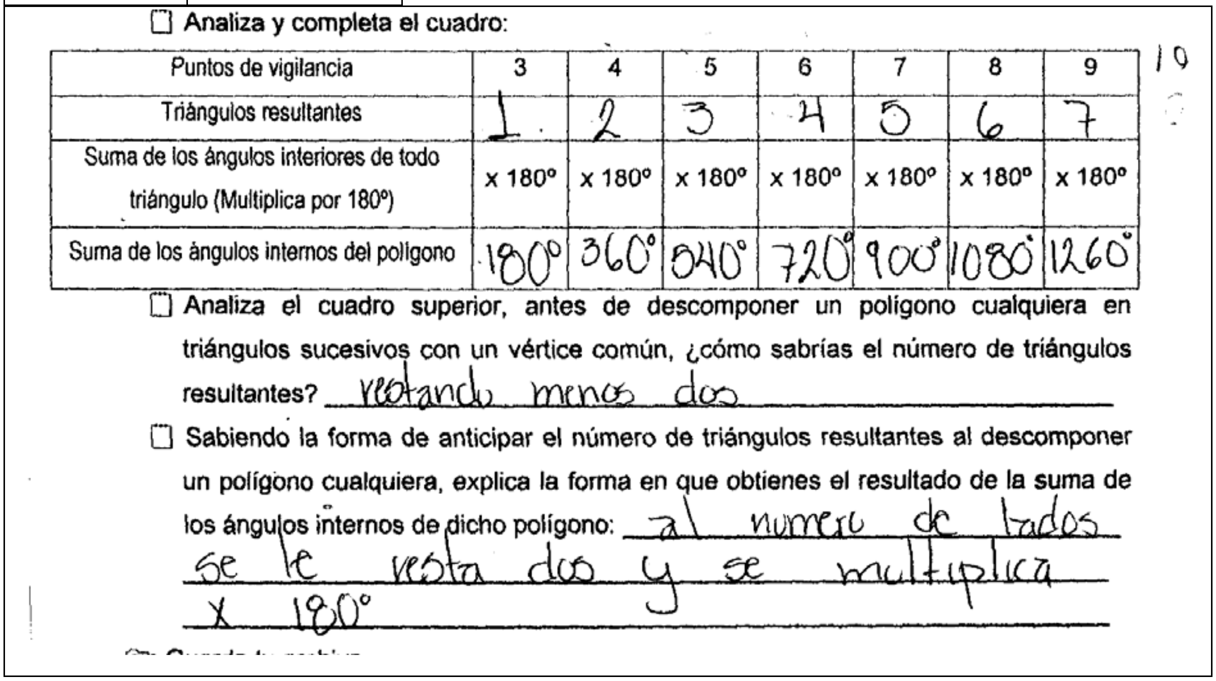
Analiza y completa el cuadro:

Puntos de vigilancia	3	4	5	6	7	8	9
Triángulos resultantes	1	2	3	4	5	6	7
Suma de los ángulos interiores de todo triángulo (Multiplica por 180º)	x 180º	x 180º	x 180º	x 180º	x 180º	x 180º	x 180º
Suma de los ángulos internos del polígono	180º	360º	540º	720º	900	1080	1260º

Analiza el cuadro superior, antes de descomponer un polígono cualquiera en triángulos sucesivos con un vértice común, ¿cómo sabrías el número de triángulos resultantes? dependiendo de los vértices va ser el número de triángulos resultantes quitandole 2 a el # de vértices

Sabiendo la forma de anticipar el número de triángulos resultantes al descomponer un polígono cualquiera, explica la forma en que obtienes el resultado de la suma de los ángulos internos de dicho polígono: quitandole dos al # de vertices y después multiplicandola x 180º

Deborah	E3



Analiza y completa el cuadro:

Puntos de vigilancia	3	4	5	6	7	8	9	10
Triángulos resultantes	1	2	3	4	5	6	7	
Suma de los ángulos interiores de todo triángulo (Multiplica por 180º)	x 180º	x 180º	x 180º	x 180º	x 180º	x 180º	x 180º	
Suma de los ángulos internos del polígono	180º	360º	540º	720º	900º	1080º	1260º	

Analiza el cuadro superior, antes de descomponer un polígono cualquiera en triángulos sucesivos con un vértice común, ¿cómo sabrías el número de triángulos resultantes? restando menos dos

Sabiendo la forma de anticipar el número de triángulos resultantes al descomponer un polígono cualquiera, explica la forma en que obtienes el resultado de la suma de los ángulos internos de dicho polígono: al numero de lados se le resta dos y se multiplica x 180º

Resumen del análisis de las actividades D, E y F

En relación al descriptor 1.1 del nivel 1 de Van Hiele, los alumnos se apoyaron en la suma de los ángulos internos de un triángulo (actividad D) para establecer un procedimiento que les permitía anticipar la suma de los ángulos internos de un polígono de más de tres lados (cuadrilátero, pentágono, etc.). Los datos que recabamos sugieren que la principal dificultad que se les presentó a los alumnos fue acudir al contenido antes trabajado y relacionarlo con los nuevos por medio de la triangulación de las figuras presentadas.

Sobre el uso apropiado del vocabulario específico para matemáticas, según el nivel 1.2 del nivel 1 de Van Hiele, todos los alumnos utilizaron adecuadamente el concepto de rectángulo y el de cuadrado, lo que muestra que los alumnos los conocían con anterioridad y al presentarles preguntas que definían sus características establecieron la relación sin dificultad alguna.

En el nivel 1.5 del nivel 1 de Van Hiele se pretendió que los alumnos descubrieran propiedades específicas; a este respecto se observó que los alumnos determinaron con éxito que la suma de los ángulos internos de todo triángulo es 180°. En este problema la capacidad de la calculadora de realizar nuevas construcciones de forma inmediata mediante “arrastres” les permitió resolver el problema en poco tiempo. De igual forma, cuando los alumnos revisaron los casos en que un cuadrilátero podía inscribirse en una circunferencia (actividad F), la capacidad de “arrastre” de la calculadora facilitó en gran medida el descubrimiento de las condiciones que debían cumplirse.

A los alumnos se les pidió resolver problemas geométricos usando propiedades conocidas de figuras o por acercamiento, de acuerdo al descriptor 1.9 del nivel 1 de Van Hiele. En la actividad D, hoja 2, se pidió a las parejas determinar cuándo era posible construir un triángulo dadas las medidas de sus ángulos, actividad que no se les dificultó, pues ya conocían que dichos ángulos deben sumar 180° (actividad D), por lo que los alumnos no tuvieron la necesidad de realizar la construcción para comprobar.

Para el descriptor 1.10D, se pidió a los alumnos formular un procedimiento que determinara la suma de los ángulos internos de un polígono sin necesidad de realizar los cálculos. Los alumnos encontraron dicha regla pero fue necesario inicialmente establecer de forma empíricamente el procedimiento mediante la triangulación de varios polígonos para facilitar la visualización y establecer una regla que explique de forma lógica el procedimiento anterior. En este caso, los alumnos no lograron utilizar el lenguaje matemático de forma correcta.

Nuevamente Marco fue el alumno que mostró mejor desempeño en las actividades que corresponden a los descriptores del nivel 1 del pensamiento geométrico de Van Hiele. Él necesitó apoyo mínimo para resolver las hojas de trabajo e incluso ayudó a su compañera. Su trabajo muestra que contaba con los antecedentes que le permitieron acceder a las relaciones y generalizaciones planeadas en las actividades. El resto de los alumnos mostró un trabajo menos consistente, identificando algunas relaciones y resolviendo algunos problemas planteados en dichas actividades.

Entrevistas

Se procedió a realizar dos tipos de entrevistas semiestructuradas a cada una de las parejas de alumnos que se observaron como estudio de casos. El propósito de las entrevistas fue observar con mayor profundidad y detalle cómo aplica el alumno los contenidos aprendidos durante las actividades y verificar qué niveles de pensamiento geométrico, según Van Hiele, desarrollaron. Como se puede ver en las preguntas planteadas en las dos entrevistas, se presentaron problemas donde se requería identificar relaciones, aplicar propiedades geométricas descubiertas en las actividades, resolver problemas usando dichos descubrimientos y retomar generalizaciones ya vistas.

Entrevista intermedia

La entrevista intermedia se realizó después de que fueron aplicadas las tres primeras actividades (A, B y C) y antes de aplicar las actividades D, E y F. Se consideró que éste era el momento de realizar un alto en el trabajo y obtener más datos sobre los contenidos aprendidos por los alumnos.

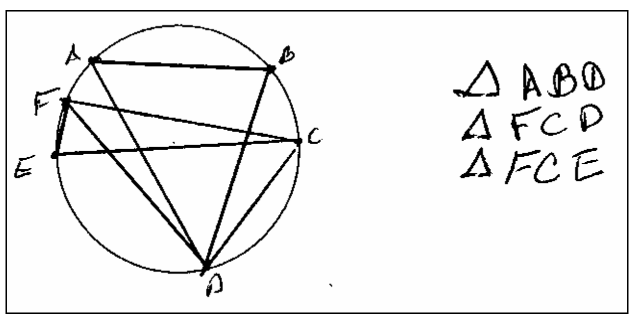
Las entrevistas se realizaron en parejas, procurando aclarar algunas dudas con la intención de evitar que dejaran preguntas sin contestar, pero evitando al máximo resolverles los problemas o indicarles la forma de resolverlos.

En cada pregunta de la entrevista intermedia se les presenta un problema con base en los contenidos de geometría planteados en las tres primeras actividades (A, B y C) y a los descriptores de los niveles de pensamiento geométrico (según Van

Hiele) asociados a las mismas. El protocolo de la entrevista se encuentra en el anexo II.
En la aplicación de la primera entrevista los alumnos necesitaron que se les explicara que la forma de resolver los problemas consistía en aplicar lo aprendido al resolver las actividades A, B y C. En un inicio se les hicieron preguntas con la intención de inducirlos a que recordaran el trabajo realizado en las actividades; una vez que comprendieron el procedimiento su trabajo fue fluido y con pocas preguntas al entrevistador.

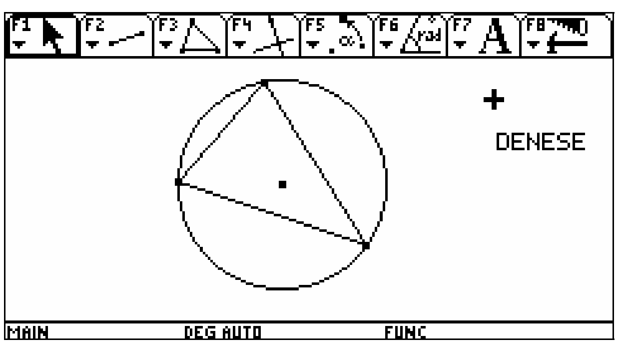
La mayoría de las respuestas de los alumnos fueron correctas o parcialmente correctas. En las siguientes secciones se detallará el trabajo de los alumnos y el nivel de pensamiento geométrico según Van Hiele.

a) Todos los alumnos supieron trazar tres triángulos inscritos en una circunferencia, por lo que puede afirmarse que mínimamente conocen el vocabulario básico: triángulo y circunferencia (nivel 1.2).

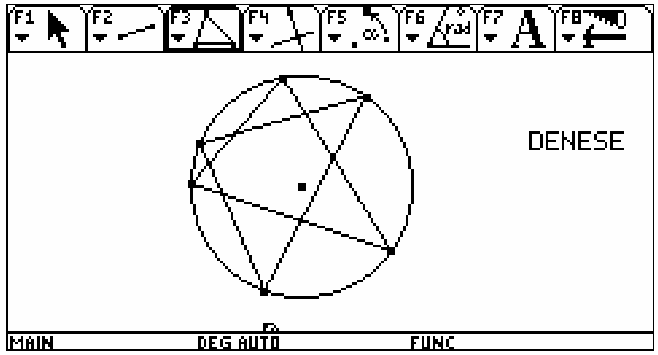


b) Marco, Deborah y Alejandra identificaron al circuncentro como punto único para todos los triángulos (nivel 1.10), ya que todos los vértices están sobre la circunferencia (medida de los radios). Estos alumnos lograron comparar tres figuras de acuerdo con la relación que existe entre ellos por su construcción al estar inscritos en la misma circunferencia. Denesse relacionó las medidas de los lados y no la de los radios, ya que no creyó que el circuncentro sea único, por lo que no estableció la relación correcta entre los triángulos y sus componentes, en este caso, la ubicación de los vértices y no las medidas de sus lados. Alfredo y Ricardo olvidaron el concepto de circuncentro, por lo que no contestaron la pregunta hasta que se les recordó dicho concepto; después de esto, sólo Alfredo concluyó que el circuncentro era único para los tres triángulos.

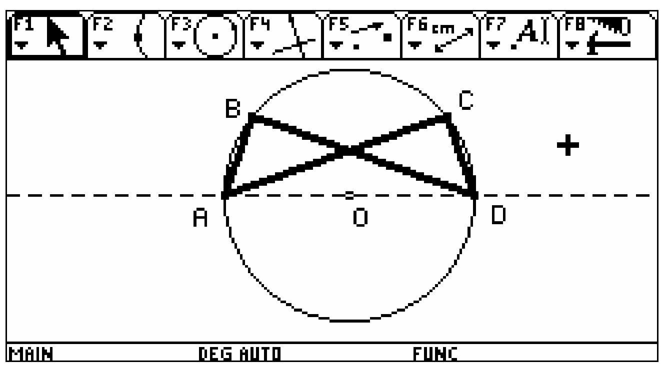
c) En la pregunta dos invierten el proceso (nivel 1.1), pues se pide que a partir de un punto P se trace un triángulo cuyo circuncentro sea dicho punto (actividad realizada en la calculadora). Todos los alumnos construyeron el triángulo (las medidas de cuyos lados no se necesitan saber). Lo anterior muestra que pudieron resolver el problema geométrico al usar propiedades conocidas empíricamente, entre otras: que todos los puntos de una circunferencia equidistan de su centro y que los vértices de un triángulo equidistan de su circuncentro. Tanto a Alfredo como Denesse se les recordó el concepto de circuncentro y su relación con todos los radios de la circunferencia, después de ello ambos construyeron el triángulo.



d) Al responder de forma afirmativa en la pregunta 3, todos los alumnos pudieron formular una generalización sobre la cantidad de triángulos que se pueden inscribir en una misma circunferencia (nivel 1.10). Al pedir explicar su respuesta todos hicieron referencia a la primera pregunta; Denesse comprobó su respuesta trazando un nuevo triángulo en la calculadora.

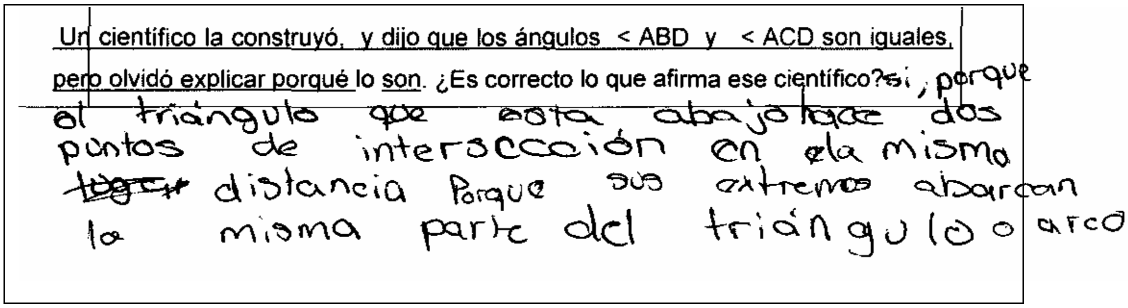


e) En la pregunta 4 se pedía observar la figura donde el punto (O) era centro de la circunferencia y a partir de ella verificar si el científico que la construyó tenía razón al señalar que los ángulos ABD y ACD eran iguales y explicar por qué (nivel 1.5).

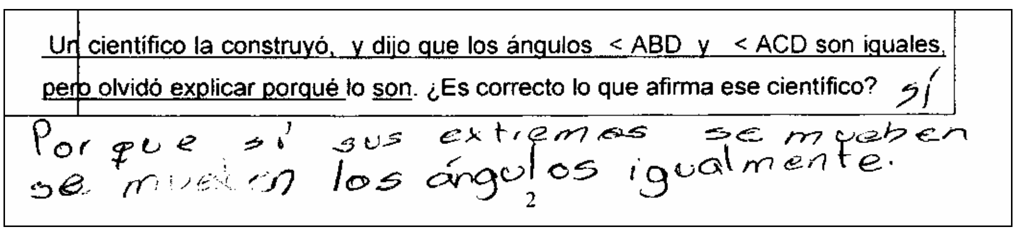


Se buscó que los alumnos observaran que todos los ángulos inscritos que abarcan el mismo arco son iguales. Únicamente Alfredo y Ricardo no pudieron establecer la igualdad de dichos ángulos hasta que se les recordó la actividad donde se estableció esta relación.

Se puede agregar que las explicaciones de Denesse, Deborah y Alejandra indican que identificaron que abarcaban el mismo arco (conocimiento adquirido al resolver las actividades)

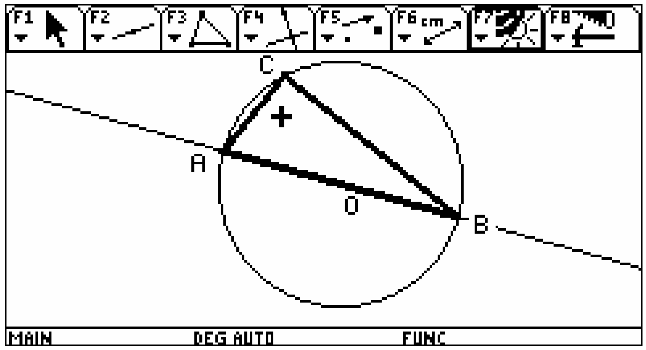

Un científico la construyó, y dijo que los ángulos < ABD y < ACD son iguales, pero olvidó explicar porqué lo son. ¿Es correcto lo que afirma ese científico? si, porque el triángulo que esta abajo hace dos puntos de intersección en ~~e~~ la misma ~~tocar~~ distancia Porque sus extremos abarcan la misma parte del triángulo o arco

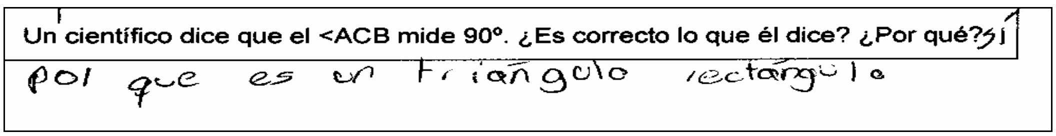
Por otro lado, Marco señaló que al moverse los extremos de los ángulos, forzosamente las medidas de los dos ángulos continuarían siendo iguales al abarcar el mismo arco aun cuando se realicen “arrastres” con la calculadora (conocimiento adquirido al resolver las actividades).


Un científico la construyó, y dijo que los ángulos < ABD y < ACD son iguales, pero olvidó explicar porqué lo son. ¿Es correcto lo que afirma ese científico? sí
Porque si sus extremos se mueben se mueven los ángulos igualmente.

f) En la pregunta 5 los alumnos debieron generalizar la conclusión anterior, pues los triángulos se modificaron para que en lugar de estar inscritos en una semicircunferencia, abarcaran casi toda la circunferencia (nivel 1.5). Todos los alumnos concluyeron de inmediato lo mismo que en la pregunta anterior. Con Denesse se tuvo que aclarar que la relación era con los ángulos inscritos ABC y ADC, y no con los ángulos centrales.

g) En la pregunta 6, los todos los alumnos argumentaron que el ángulo mide 90° porque era parte de un triángulo rectángulo (nivel 1.3), pero únicamente Denesse y Marco se dieron cuenta que cuando el ángulo de un triángulo abarca un diámetro, dicho triángulo es rectángulo.




Un científico dice que el <ACB mide 90°. ¿Es correcto lo que él dice? ¿Por qué? Si

pol que es un triángulo rectángulo

Resumen del análisis a la entrevista intermedia

Del análisis del trabajo de los alumnos durante la aplicación de la entrevista se puede inferir lo siguiente:

a) Todos los alumnos hicieron un uso apropiado de los conceptos de triángulo rectángulo y circunferencia planeados en las actividades, lo que nos permite constatar el logro del nivel 1.1 del pensamiento geométrico (según Van Hiele).

b) A excepción de Denesse, quien se confundió entre la medida del radio y los lados del triángulo, los alumnos formularon y generalizaron acerca del circuncentro de diferentes tipos de triángulos logrando el nivel 1.10 del pensamiento geométrico.

c) Todos los alumnos establecieron la relación de la distancia del centro a cualquier punto de la circunferencia y la relación entre las medidas de los radios en una misma circunferencia (nivel 1.1), aunque a dos alumnos fue necesario recordarles el concepto de circuncentro y su relación con todos los radios de la circunferencia.

d) Todos los alumnos pudieron formular una generalización sobre la cantidad de triángulos que se pueden inscribir en una misma circunferencia (nivel 1.10), pero al momento de decir por qué, no explicaron y sólo se limitaron a hacer referencia a la primera pregunta, excepto Denesse, quien comprobó su respuesta trazando un nuevo triángulo en la calculadora.

e) Los alumnos comprobaron haber descubierto la propiedad de los ángulos inscritos cuyo ángulo central es el mismo (nivel 1.5), sin embargo, Alfredo y Ricardo ya se habían olvidado esa propiedad. En esta pregunta se observó que Marco anticipó la generalización de esta propiedad aun cuando los vértices cambiaran de posición en la circunferencia.

f) Al momento de extrapolar la propiedad anterior (nivel 1.5), todos los alumnos concluyeron de inmediato recordando la pregunta anterior.

g) Al agrupar triángulos rectángulos por estar inscritos en una semicircunferencia (nivel 1.3), todos los alumnos argumentaron que era rectángulo porque tenía un ángulo de 90°, sólo Denesse y Marco explicaron que cuando el ángulo de un triángulo abarca un diámetro, dicho triángulo es rectángulo.

Entrevista Final

La segunda entrevista se aplicó al final de todas las actividades y nos permitió verificar los aprendizajes de los alumnos, así como revisar el desempeño de los alumnos con respecto a los descriptores de los niveles de pensamiento geométrico (según Van Hiele).

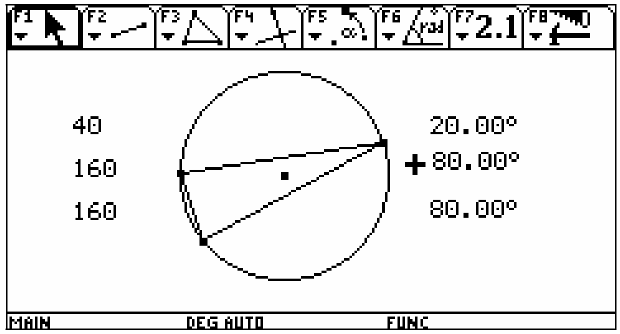
Igual que en la primera entrevista, la segunda se realizó a cada pareja, procurando aclarar algunas dudas con la intención de evitar que dejaran preguntas sin contestar, pero evitando al máximo resolverles los problemas o indicarles la forma de resolverlos.

En el protocolo de la segunda entrevista cada pregunta presenta un problema a resolverse con base en los contenidos de geometría planteados en las tres últimas actividades y a los descriptores de los niveles de pensamiento geométrico (según Van Hiele) trabajados en las mismas. El protocolo de esta entrevista se encuentra en el anexo II.

Durante la entrevista los alumnos no necesitaron que se les indujera a que recordaran las conclusiones obtenidas en las actividades D, E y C. Su trabajo fue fluido y con algunas preguntas hacia el aplicador pues sabían que se trataba de aplicar lo aprendido con anterioridad.

Las respuestas de dichos alumnos fueron correctas o parcialmente correctas. En esta sección se discutirán algunas respuestas que fueron diferentes al resto.

a) En la pregunta 1, para comprobar la propiedad de la construcción del triángulo del primer inciso basado en la suma de los ángulos inscritos de todo triángulo es 180° (nivel 1.5), los alumnos tuvieron que consultar el programa que permitía trazar un triángulo a partir de las medidas de sus ángulos (trabajo realizado en la actividad D). Para los otros dos casos la respuesta fue inmediata, sin necesidad de comprobar con Cabri.



b) Para la pregunta 2, el proceso era semejante al anterior; se requería revisar la relación del ángulo central con el ángulo inscrito, aunque en esta ocasión se complementa con la suma de esos ángulos (nivel 1.5). Todos los alumnos la resolvieron sin dificultad o preguntas.

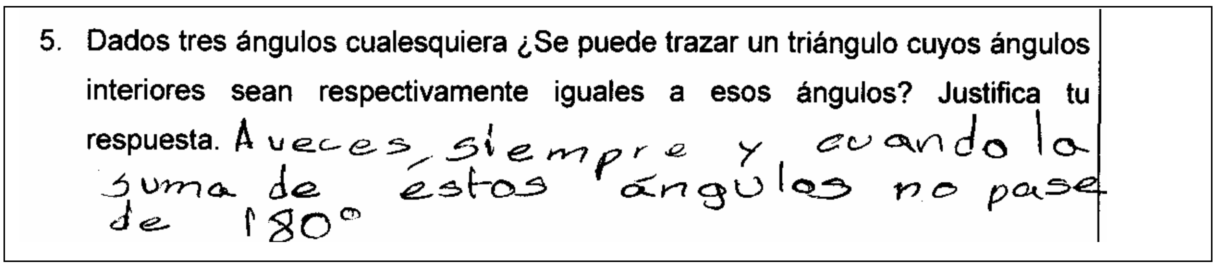
Inciso a

< central	40°	160°	160°	Suma = 360
< inscrito	20°	80°	80°	Suma = 180

c) En la pregunta 3, los alumnos no tuvieron dificultad alguna para determinar con cuál tercia se podía construir un triángulo con base en la suma de sus ángulos interiores (nivel 1.9).

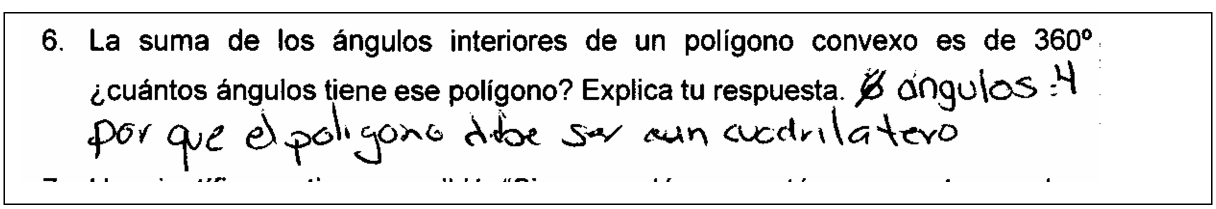
d) Al contestar la pregunta 4, Marco determinó que la medida de los dos ángulos iguales en el triángulo isósceles era 40° pero no supo explicar por qué. Denesse señaló incorrectamente que el ángulo era 80°. Se pidió la explicación a ambos alumnos pero no pudieron justificar sus respuestas (nivel 1.9). En el caso de Deborah y Alejandra, no aportaron respuesta alguna argumentando que no sabían cómo encontrarla. Ricardo y Alfredo contestaron que 40° pues la suma de los tres ángulos debería ser 180°.

e) Para la pregunta 5 se debería determinar si dadas tres medidas de ángulos se podía trazar un triángulo (nivel 1.9). Todos los alumnos señalaron que sólo cuando la suma es 180° se puede trazar un triángulo. Marco también contestó que sí, pero olvidó que la suma de dichos ángulos siempre será la misma, pues estableció 180° como la máxima.



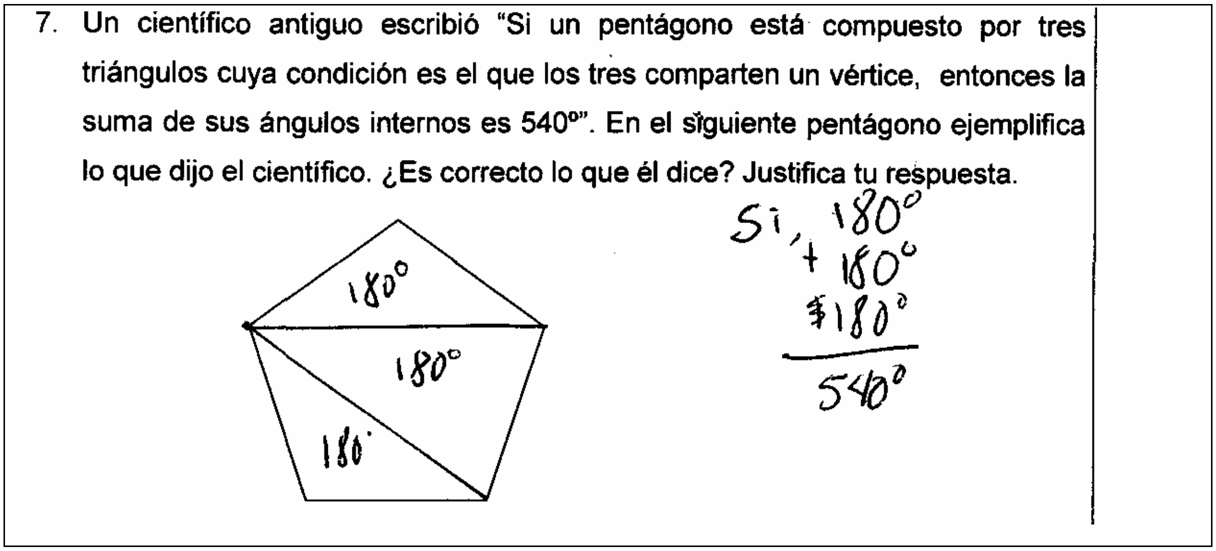
5. **Dados tres ángulos cualesquiera ¿Se puede trazar un triángulo cuyos ángulos interiores sean respectivamente iguales a esos ángulos? Justifica tu respuesta.** A veces, siempre y cuando la suma de éstos ángulos no pase de 180°

f) En la pregunta 6 era necesario identificar el número de ángulos de un polígono cuya suma es 360° (nivel 1.9). Marco, Deborah y Alejandra recordaron que la suma de los ángulos internos de los cuadriláteros es de 360° y a la vez que tienen cuatro ángulos. Por otro lado, Denesse, Ricardo y Alfredo juntaron dos triángulos para obtener 360° y encontrar el número de lados.

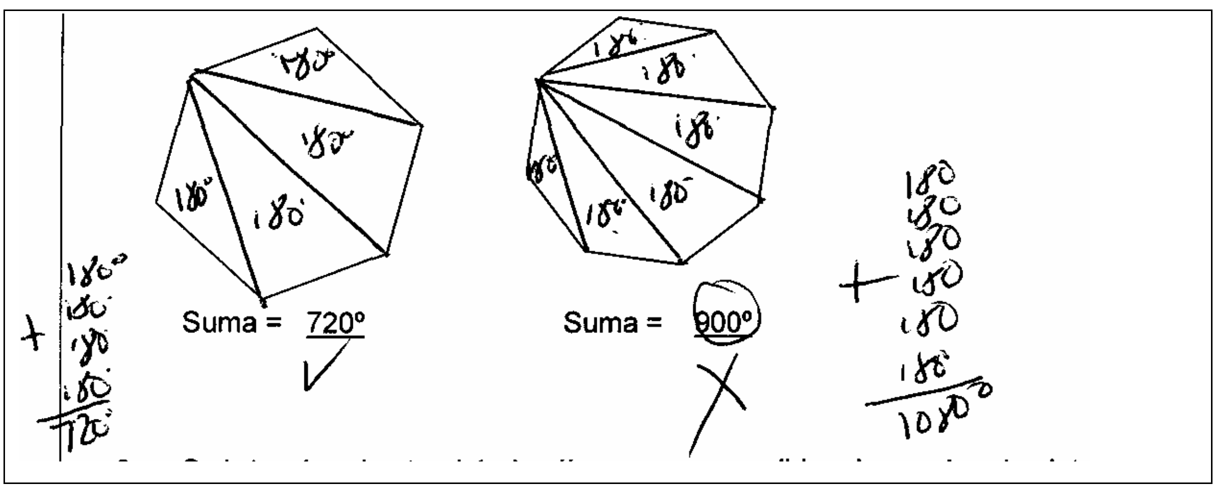


6. **La suma de los ángulos interiores de un polígono convexo es de 360° ¿cuántos ángulos tiene ese polígono? Explica tu respuesta.** ~~8~~ ángulos 4 por que el polígono dbe ser aun cuadrilatero

g) Para contestar la pregunta 7 había que justificar que la suma de los ángulos internos de un pentágono es 540° a partir de su triangulación (nivel 1.10). Los alumnos justificaron la aseveración del científico de la misma forma que en la respuesta anterior.

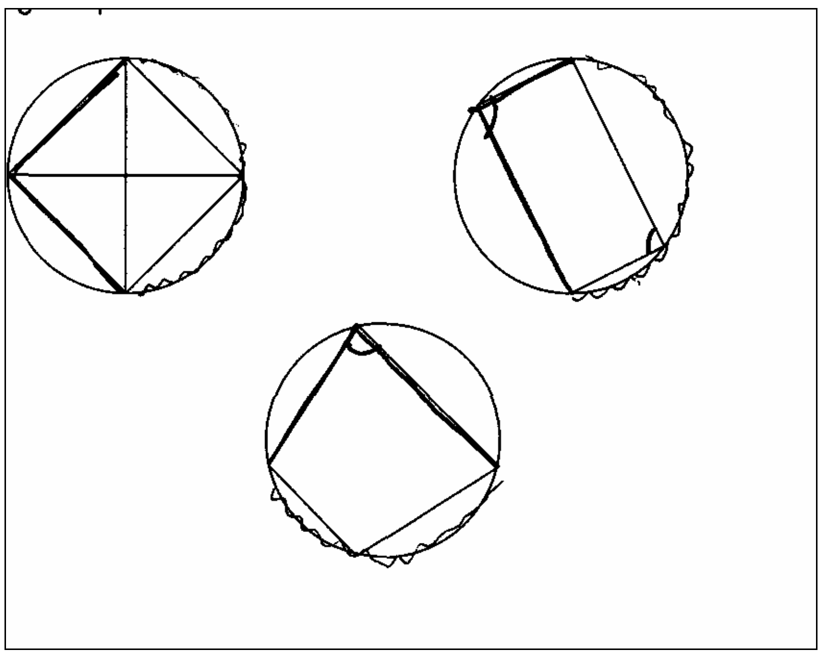

7. Un científico antiguo escribió "Si un pentágono está compuesto por tres triángulos cuya condición es el que los tres comparten un vértice, entonces la suma de sus ángulos internos es 540º". En el siguiente pentágono ejemplifica lo que dijo el científico. ¿Es correcto lo que él dice? Justifica tu respuesta.

h) Para la pregunta 8 se debía utilizar el procedimiento anterior y verificar las sumas de los ángulos internos de los polígonos (nivel 1.1). Todos encontraron que el primer caso era correcto y el segundo incorrecto.



i) En la pregunta 9 había que encontrar el número de ángulos de un polígono cuya suma de sus ángulos internos fue dada (nivel 1.1). Para el caso del polígono de 360°, Marco lo resolvió de inmediato en forma correcta, argumentó que era un cuadrilátero, sin embargo tuvo dificultades para encontrar las respuestas de los incisos *b* y *c* hasta que descubrió que las respuestas estaban implícitas en la pregunta anterior. La respuesta de Denesse y Deborah fue más elaborada, buscaron múltiplos de 180° que coincidieran con los tres casos y fueron uniendo los triángulos hasta encontrar las respuestas correctas. Alejandra, Ricardo y Alfredo únicamente contestaron el primer inciso.

j) La pregunta 10 pedía justificar por qué los ángulos opuestos de los cuadriláteros sumaban 180° (Nivel 1.1). Todos los alumnos coincidieron que juntos completaban la circunferencia, por lo que al ser ángulos inscritos los 360° se convertían en 180°,



k) En la pregunta 11 se pide trazar cuadriláteros inscritos que cumplen determinadas características (nivel 1.3).

En el primer caso se construyó un polígono cuyos ángulos miden 90°. Todos los alumnos construyeron el cuadrilátero trazando dos diámetros perpendiculares.

Para en el segundo caso los seis alumnos descubrieron que no es posible construir un cuadrilátero donde un par de ángulos opuestos miden 70°; sin embargo, Marco no intentó la construcción: explicó que los ángulos opuestos de un cuadrilátero inscrito deben sumar 180°. Los demás alumnos realizaron varios arrastres de los vértices para encontrar lo solicitado, después de varios intentos se dieron cuenta de que no era posible tal construcción.

En el tercer caso, los alumnos repitieron la construcción del primer caso trazando dos diámetros perpendiculares para obtener un cuadrado.

Para el cuarto caso, la respuesta fue parecida al segundo caso, donde Marco adelantó la imposibilidad de trazar un cuadrilátero con tal característica y los demás necesitaron intentar su construcción.

En el quinto caso, los alumnos hicieron el arrastre necesario en la calculadora, obteniendo un ángulo de 120°.

Resumen del análisis a la entrevista final

Del análisis del trabajo de los alumnos durante la aplicación de la entrevista se puede inferir lo siguiente:

a) Los alumnos aplicaron la propiedad de la suma de los ángulos internos de un triángulo a casos particulares y la generalizaron (nivel 1.5), sin necesidad de comprobar con Cabri.

b) Al resolver problemas geométricos usando propiedades conocidas sobre la construcción de un triángulo dadas las medidas de sus ángulos (nivel 1.9), todos los alumnos determinaron con certeza cuándo se podía realizar la construcción basada en su propiedad de la suma de sus ángulos interiores.

c) Al resolver problemas geométricos usando la propiedad de la suma de los ángulos internos de un triángulo (nivel 1.9), los alumnos tuvieron dificultades pues no tomaron en cuenta la propiedad de los triángulos isósceles de tener dos ángulos iguales.

d) En el problema geométrico que requería usar propiedades conocimiento de la suma de los ángulos internos de un polígono para determinar el número de ángulos de un polígono cuya suma es 360° (nivel 1.10), se observó que todos los alumnos respondieron en forma correcta. Sin embargo, al extrapolar a otro tipo de problemas donde los polígonos tenían más de cuatro lados, fueron evidentes las dificultades para generalizar dicha propiedad.

e) Al trabajar con cuadriláteros inscritos en una circunferencia, todos los alumnos descubrieron que los ángulos opuestos completaban la circunferencia, lo cual les permitió deducir que las medidas de los ángulos opuestos de un cuadrilátero inscrito deben sumar 180°.

f) Al resolver problemas donde se requería trazar cuadriláteros inscritos que cumplieran con ciertas propiedades (nivel 1.3), los alumnos no presentaron problema alguno para trazar un cuadrado y un rectángulo y determinar cuándo no era posible trazarlo porque sus ángulos opuestos no sumaban 180°; a excepción de Marco, todos tuvieron que revisar su respuesta por medio de la calculadora.

CAPÍTULO 6
ANÁLISIS DE RESULTADOS

Después de haber obtenido los datos de la aplicación del cuestionario inicial, las seis actividades planeadas para la calculadora con apoyo de Cabri y las entrevistas intermedia y final, se presenta el análisis de los resultados a la luz de otras investigaciones y a la luz del referente teórico planteado en este trabajo de investigación.

En relación con los logros obtenidos se puede inferir que los alumnos determinaron con éxito que la suma de los ángulos interiores de todo triángulo es 180° y la relación entre el ángulo inscrito y su respectivo ángulo central haciendo uso nuevamente de las herramientas propias del software.

De igual forma, los alumnos lograron descubrir la propiedad específica que determina cuándo se podía construir un triángulo y cuando no, pero al parecer faltó establecer preguntas más específicas que permitieran a los alumnos determinar con mayor certeza si lograron establecer una generalización o únicamente se limitaron a los ejemplos de la actividad. En este problema, la capacidad de la calculadora de realizar “arrastres” facilitó bastante los trazos de triángulos con medidas diferentes.

En cuanto a que si los alumnos determinaron la regla para anticipar la suma de los ángulos interiores de un polígono, se puede concluir que sí la determinaron teniendo como principal dificultad el recordar los contenidos previamente revisados, especialmente la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

Todos los alumnos establecieron la relación de la distancia del centro a cualquier punto de la circunferencia y la relación entre las medidas de los radios en una misma circunferencia, aunque fue necesario que en la actividad apareciera primero el concepto de circuncentro, pues se trabajó con triángulos inscritos en circunferencias. También encontraron la condición que debe cumplir un cuadrilátero para que pueda inscribirse en una circunferencia. Aquí la única dificultad radicó en que primero se diseñó una circunferencia, se trazó un cuadrilátero inscrito y a partir de él se realizaron los "arrastres" necesarios que cumplieran con las condiciones que determinaban a los distintos tipos de cuadriláteros, movimientos que se facilitaron al usar Cabri.

Los alumnos no identificaron plenamente la relación entre las medidas de dos de los lados de un triángulo con respecto al tercero debido a la falta de dominio de la función de "arrastre" de la calculadora, porque detuvieron dichos movimientos antes de que el triángulo se "transformara" en una recta o al cambio en la metodología de enseñanza de trabajo individual con papel y lápiz al trabajo colaborativo con apoyo de la calculadora TI-92 y el software Cabri. Aunque debe aclararse que la mayoría se formó una idea clara de la relación que se buscaba en esta actividad.

Cuando se pidió a las parejas agrupar a los triángulos inscritos en una semicircunferencia, los alumnos tuvieron dificultades para establecer una cantidad de ejemplos que les permitieran deducir una regla (todo triángulo inscrito en una semicircunferencia es triángulo rectángulo), hasta que el profesor tuvo que intervenir. En este caso, la dificultad no radicó en los "arrastres" que permitían presentar figuras distintas, sino en el número mínimo de ejemplos que los alumnos necesitaron para deducir la regla; algunos de ellos lo dedujeron con dos o tres ejemplos mientras que el resto realizaron más movimientos.

Todos los alumnos demostraron que conocían con anterioridad los conceptos de triángulo rectángulo, circunferencia, rectángulo, cuadrado y ángulo, así como el uso de las unidades de medida de longitud. Por otro lado, los alumnos aplicaron conceptos matemáticos recién planteados en las actividades, como el circuncentro y la mediatriz. Los datos recabados permiten afirmar que los alumnos lograron incrementar su vocabulario, establecer relaciones entre los conocimientos que tenían y los nuevos, así como relaciones nuevas entre elementos geométricos tratados en las seis actividades.

Es necesario recordar que los contenidos mencionados fueron seleccionados previamente (como se describió en el marco metodológico), por ser antecedentes para establecer la relación entre el ángulo inscrito y su respectivo ángulo central o por la facilidad para acceder a ellos apoyándose en dicha relación.

Debe observarse que las herramientas dinámicas del software Cabri permitieron a los alumnos acceder a contenidos de forma rápida, presentar muchos ejemplos de un mismo problema en poco tiempo o revisar contraejemplos que no cumplían las condiciones planteadas.

Del mismo modo, el diseño de las actividades con base en el redescubrimiento de los contenidos les permitió acceder de forma más natural hasta concluir en reglas previamente revisadas, establecer nuevas relaciones o resolver los problemas planteados.

Por lo anterior, las tres parejas establecieron relaciones, generalizaron y se apoyaron en los contenidos que adquirían para llegar a nuevas relaciones que les permitieron ubicarse en el nivel 1 del pensamiento geométrico según Van Hiele.

Resultados a la luz de otras investigaciones

El presente análisis se realizó con base en la revisión de la literatura acerca del uso de nuevas tecnologías y las investigaciones sobre el aprendizaje y enseñanza, reportada en el capítulo 2.

Incorporación de las nuevas tecnologías

Sobre la incorporación de las nuevas tecnologías al ambiente educativo, los resultados del presente trabajo concuerdan con los estándares de la NCTM (2000) respecto a que en el salón de clases de matemáticas debe haber disponibilidad de nuevas tecnologías como un componente esencial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Del mismo modo, en el presente estudio se encontró que no se debe dejar de tomar en cuenta que su uso sea compatible con las metas de instrucción; en este caso las metas planteadas en el Plan de Estudios de Secundaria en México (SEP, 1993), que pretende ampliar y consolidar los conocimientos y habilidades matemáticas de los estudiantes, construyendo activamente un nuevo conocimiento desde la experiencia y el conocimiento anterior.

De igual forma, se coincide con Hirschhorn y Thompson (1998), que señalan que no siempre es fácil encontrar un uso efectivo de la tecnología y que el aumento de las computadoras en nuestras escuelas no nos traslada automáticamente hacia la mejora educativa, pues la instrumentación del trabajo de campo de este estudio exige entre otras cosas cambios en la pedagogía del maestro. También se coincide con Spiegel (1997) y con Noss y Hoyles (1996), en relación a que la tecnología no es mala ni buena, sino que es el uso el que determina las consecuencias sobre replantear las matemáticas y la instrucción matemática; que se requiere cambiar la noción de la *matemática escolar*, hasta proponer nuevas formas de *interacción* entre el aprendiz y lo que se aprende (Säljö, 1999).

Como se pudo observar en el reporte de la aplicación de las actividades, los resultados del presente trabajo coinciden con Clements y Battista (1991), en el sentido de que la capacidad gráfica de la calculadora TI-92 facilita la construcción de representaciones geométricas de forma interactiva y permite construir un ambiente más preciso que el papel y el lápiz o los manipulativos, así como la posibilidad de realizar cuantas repeticiones sean necesarias de forma rápida.

Durante el desarrollo de las actividades planeadas se comprobó que al usar Cabri no se puede asegurar que los estudiantes sean capaces de construir conceptos totalmente desarrollados, pero el programa puede ser utilizado por los estudiantes para que sus tareas a realizar tengan un significado funcional.

Una característica del trabajo realizado es el planetamiento de un escenario alternativo que requirió de un corrimiento del eje de las evaluaciones y controles vigentes lo que se reflejó en los condicionantes de tiempo para avances y logros (Spiegel, 1997).

Las tecnologías en la educación matemática: geometría dinámica

Es urgente identificar los puntos cruciales alrededor de los cuales se organiza el uso de las nuevas tecnologías para entender cómo y por qué influyen en la educación matemática (Mariotti, 2002). En el presente trabajo se consideró lo propuesto por Balacheff y Kaput (1996), quienes identificaron que la unión de la geometría y el campo experimental mediante el trazo de figuras geométricas y ambientes adecuados había sido abordado por la geometría dinámica de Cabri (creado por Laborde en 1985), reduciendo la complejidad que representa el paso de lo concreto a lo abstracto. Para Hirschhorn y Thompson (1998) algunas piezas de software de geometría dinámica han cambiado radicalmente las posibilidades para la exploración geométrica, permitiendo presentar a los estudiantes un tratamiento de las matemáticas como ciencia “experimental”. Hershkowitz et al. (2002), señalan que las herramientas de geometría dinámica permiten al estudiante “arrastrar” los elementos de una figura permitiendo la producción de un conjunto infinito de diseños a partir de la misma figura, lo cual se pudo constatar en el presente trabajo de investigación al posibilitar la realización de múltiples trazos de forma “casi” instantánea mediante “arrastres”, comprobando o contrastando los planteamientos propuestos en las actividades, lo que convirtió el trabajo de los sujetos de estudio en una actividad experimental.

En este estudio se adoptó la postura de Balacheff y Kaput (1996) en lo referente a considerar la transposición computacional de los objetos matemáticos. Esto obligó a realizar una selección cuidadosa de las situaciones ofrecidas a los estudiantes y una cuidadosa exploración; de hecho, muchos de los problemas clásicos donde se requerían múltiples trazos o exactitud en el trazado de rectas llegan a ser obsoletos por la eficiencia del ambiente que ofrece Cabri. Al diseñar las actividades se buscó maximizar las oportunidades y minimizar los riesgos de la confusión creada por la trasgresión de las definiciones aceptadas (Goldenberg y Cuoco, 1998, citado en Hershkowitz *et al.* 2002).

Lins (2004), señala como resultado de su investigación que cada maestro debe adaptar el software a las necesidades y metodología de su clase y también resalta la importancia del adecuado planteamiento de problemas en el diseño de actividades de geometría. A este respecto, en el presente estudio se incluyó un buen número de actividades donde se induce al estudiante a proponer generalizaciones y descubrimientos mediante preguntas como "¿Qué tal si…?" (En el sentido de De Villiers, 1997 y 1998,, citado por Lins, 2004), sin embargo corresponde a cada profesor dentro del aula adaptar el software a sus propias necesidades.

El caso de la calculadora

Thomas (2004) reporta que la instrumentación de la calculadora CAS (sistema algebraico computarizado) no es un proceso fácil y breve, sino que su desarrollo toma tiempo. Su investigación muestra que los estudiantes iniciaban con aprender el uso de los botones y menús para acceder a los procedimientos de la calculadora, revisando a menudo el instructivo. El mismo autor propone varias categorías para el uso del sistema algebraico computarizado instalado en la calculadora, de las cuales en este estudio se utilizaron la revisión de procesos realizados a "mano libre" con lápiz y papel, realización de procedimientos para facilitar el trabajo o porque el procedimiento es difícil de realizar a mano y aplicación de un procedimiento dentro de un proceso más complejo, para reducir el peso cognitivo e investigar una idea conceptual.

Con este trabajo se pretendió, al igual que Balacheff y Kaput (1996), que los estudiantes practiquen hábitos del razonamiento matemático, como profundidad matemática y argumentación para que sirva de base al pensamiento lógico, para preparar a los estudiantes en el uso sensato y efectivo de las herramientas computacionales y las tecnologías, así como para alimentar una actitud positiva, la curiosidad hacia la matemática y el pensamiento matemático (base del aprendizaje a lo largo de la vida) y preparar a los estudiantes en la comprensión del conocimiento matemático, no “predigerido” por los maestros y libros, sino como un producto de nuestro propio pensamiento y exploración.

Enseñanza con nuevas tecnologías

La intensidad del debate acerca del valor del trabajo individual sobre el grupal se incrementa cuando las nuevas tecnologías son parte del ambiente de aprendizaje. Los datos recabados en este trabajo coinciden con lo reportado por Underwood y Underwood (1999), quienes encontraron que los niños están más dispuestos a trabajar colaborativamente cuando lo hacen con nuevas tecnologías que cuando desarrollan tareas clásicas del salón de clases, siempre que dichas nuevas tecnologías permitan algún nivel de colaboración fomentando las relaciones interpersonales, la motivación, la autoestima, el aprendizaje académico, la resolución de conflictos, la prueba de hipótesis, el andamiaje cognitivo, la tutoría recíproca y la ejecución abierta de los procesos cognitivos y metacognitivos.

Para Underwood y Underwood (1999), uno de los factores que influyen en el trabajo colaborativo es el género. En este aspecto, los resultados del presente estudio confirman que la combinación alumno–alumno presentó un tipo de trabajo independiente y al combinar alumna–alumna se dio un trabajo colaborativo. Sin embargo, en nuestro estudio encontramos que en parejas alumno–alumna el trabajo fue colaborativo, escaso en un principio y constante al final de las actividades.

Las tecnologías y el papel del docente

Dado que los Estándares de la NCTM (2000) y Martínez *et al.* (1989) señalan que las decisiones para incorporar nuevas tecnologías también exigen que los maestros estén preparados y apoyen su uso para lograr las metas de instrucción, en este trabajo de investigación se pretendió establecer un papel del profesor más amplio acorde con las nuevas exigencias de la sociedad, diseñando actividades de enseñanza en que los alumnos puedan explorar distintos acercamientos a los problemas con el apoyo de las nuevas tecnologías.

Durante el diseño de las actividades de trabajo se consideraron las recomendaciones de Clements y Battista (1998), sobre la responsabilidad del maestro al seleccionar tareas de instrucción y guiar el trabajo de los estudiantes para que su pensamiento se vuelva más sofisticado, establecer un ambiente social que fomente un espíritu de cuestionamiento y trabajo colaborativo en grupos pequeños que fomente el diálogo productivo entre los estudiantes.

Los datos del presente estudio confirmaron que las recomendaciones antes mencionadas produjeron resultados favorables que se reflejaron en las actitudes y aprendizajes de los estudiantes. Asimismo, nuestros datos confirman que en la aplicación de las actividades se produjo una *pérdida parcial del control* (en el sentido de Borba, 1995), tanto de la información como de la atención de los alumnos. Los datos recabados sugieren fuertemente que debe capacitarse al docente para que reflexione sobre la clase que actualmente imparte y que la compare con la que quisiera tener, sobre la presentación de las nuevas tecnologías en el marco de sus características y posibilidades en el proceso enseñanza–aprendizaje y con respecto al uso actual de las nuevas tecnologías en la escuela (Spiegel, 1997).

Enseñanza y aprendizaje de la geometría

El diseño de las actividades de enseñanza que se emplearon en el trabajo de campo de este estudio se consideraron las recomendaciones que hace Battista

(1998) como resultado de su investigación, quien sugiere que la enseñanza se enfoque a que los estudiantes aprendan matemáticas mediante la resolución de problemas e ideas compartidas y de la formulación de preguntas.

En el caso del presente trabajo se dio especial atención a que las preguntas al alumno fueran el punto de partida en cada una de las actividades y a partir de ellas se derivara otras condujeran al logro de propósito previamente planeado; lo que coincide con Manouchehri y Lapp (2003), quienes señalan que uno de los más notables aspectos de la enseñanza es que la intervención del maestro consista en preguntar. Algunas preguntas en las hojas de trabajo están dirigidas a recordar la información, mientras que otras introducen la resolución de problemas o desarrollan conceptos.

Resultados a la luz del referente teórico

En esta sección se abordan los resultados del presente trabajo a la luz la postura teórica sobre el desarrollo del pensamiento geométrico propuesto por Van Hiele.

Van Hiele (Fuys, Geddes y Tischler, 1988) propone que los estudiantes progresan a través de varios niveles del pensamiento en geometría y pasan por ellos en forma secuenciada. Este modelo es un proceso evolutivo que involucra análisis y reanálisis de las fuentes de información (reacciones de los sujetos). La presente investigación pretendió trabajar bajo esta teoría, iniciando con el nivel cero, que es análogo a los cimientos de una construcción y representa el tipo de pensamiento que se presume inicialmente poseen la mayoría de los estudiantes.

En el presente trabajo se verificó si los estudiantes identificaban y operaban con formas (por ejemplo, cuadrados y triángulos) y otras configuraciones geométricas (por ejemplo, líneas y ángulos) de acuerdo con su apariencia. Como se pudo verificar en el análisis del cuestionario inicial y las actividades aplicadas, el nivel del pensamiento geométrico de los estudiantes coincidió con lo previsto por Van Hiele con relación a los conocimientos que deberían poseer para estar en el nivel cero.

.

Dado que el objetivo era identificar el nivel del pensamiento geométrico de los estudiantes durante y después de aplicadas las actividades planeadas, se verificó el estado de dichos estudiantes al enfrentarse al nivel 1. Como se menciona en las conclusiones, los avances de los alumnos fueron notorios, pero diferenciados.

De acuerdo con Battista (1998), 70% de los alumnos empiezan la educación secundaria en el nivel 1 o menos, con lo cual este estudio coincide según lo reportado en el análisis del cuestionario inicial. Esto ofrece una explicación plausible de por qué los cursos de geometría en la escuela secundaria arrojan resultados poco satisfactorios y también por qué permitieran tomarlo en cuenta en el presente trabajo con la finalidad de obtener datos empíricos que permitan formular propuestas orientadas a facilitar que los alumnos accedieran a niveles superiores del pensamiento geométrico.

También los datos del presente estudio concuerdan con Van Hiele (Fuys, Geddes y Tischler, 1988), que sugiere que el progreso de un nivel a otro depende más de la instrucción, y de los tipos de experiencias de instrucción que pueden afectar el progreso, que de la edad o la maduración biológica. De acuerdo con esto, en el presente trabajo el maestro debió jugar un papel especial en la facilitación de este progreso, especialmente proporcionando guías sobre las expectativas de sus estudiantes. Muchos logros de los estudiantes estuvieron directamente controlados por el maestro y el currículum. Van Hiele sugiere que el acceso a niveles superiores no se da por la vía directa del profesor, sino por medio de una selección adecuada de actividades de enseñanza, acción que se pretendió cumplir en este estudio. El modelo de Anderson (1983) coincide al señalar que el aprendizaje involucra la adquisición y aplicación del conocimiento a nuevas situaciones por medio de búsqueda y analogías.

Van Hiele propuso que el progreso de un nivel al siguiente involucraba cinco fases: información, orientación guiada, explicación, libre orientación e integración. Estas fases se consideraron para diseñar las actividades que se aplicaron en el trabajo de campo.

Según Piaget (1970), la representación del espacio es un conocimiento que se construye a través de la manipulación activa del ambiente, por lo que este trabajo privilegió la "manipulación" por medio del uso de la calculadora y del software.

CAPITULO 7
CONCLUSIONES

En este capítulo se presentan las conclusiones obtenidas del análisis de los datos recabados del presente trabajo, las cuales pretenden dar respuesta a las preguntas de investigación. También se plantean líneas de investigación que quedan abiertas para futuras investigaciones.

En relación con la pregunta sobre la influencia que ejercieron las herramientas dinámicas de Cabri II en el establecimiento de un ambiente de aprendizaje para la clase de geometría, se concluye que la facilidad de “arrastrar” los elementos de una figura posibilitó que los alumnos se dieran cuenta de que tenían la posibilidad de producir tantos diseños como quisieran a partir de la misma figura, conservando todos los atributos genéricos de ésta. Este método de variación de presentaciones a partir de un elemento geométrico permitió resolver toda una clase de problemas a partir de una representación única.

Cabri permitió a los alumnos abordar de manera natural los contenidos geométricos involucrados en las actividades, la construcción y exploración interactiva de objetos geométricos y la formulación de conjeturas sencillas. También permitió la presentación y recuperación rápida de la información, así como la revisión de conceptos desde varios puntos de vista.

La geometría dinámica permitió a los estudiantes construir y reconstruir definiciones de categorías de conceptos geométricos, al poder transgredir los límites físicos de movilidad de las figuras trazadas en papel y lápiz, maximizando las oportunidades para analizarlas desde distintas formas de razonamiento.

Es necesario agregar que el software utilizado en el ambiente del salón de clases no es el software educativo “puro” como lo pensó su creador, sino una “versión” del software que parte del enfoque que se pensó para cumplir sus propósitos, ponderando la herramienta arriba mencionada, así como las diferentes funciones que lo conforman y sobre todo tomando en cuenta las características de los alumnos.

Asimismo, los datos recabados en este estudio permiten concluir que el uso de la calculadora TI-92 plus y el software Cabri II indujeron *la pérdida parcial del control*, tanto de la información como de la atención de los alumnos. Se pierde el control de la información, pues deja de estar centrada únicamente en los conocimientos del profesor vertidos a los alumnos mediante una clase expositiva y demostrativa, pues al trabajar en parejas se promueve la discusión apoyada en los antecedentes de los alumnos, así como en sus ideas y deducciones. De igual forma, al trabajar en parejas los alumnos centran su atención en su compañero, causando algunas dificultades para el profesor al intentar llamar la atención para aclarar una duda o pregunta hecha por alguna pareja y que considera puede generalizarse o para dar instrucciones de trabajo. Pero a cambio, tal “pérdida de control” propició que el alumno asumiera un papel más participativo al poseer un dominio mayor de las nuevas tecnologías e intentar resolver y dar sentido a los problemas que se le planteaban.

La segunda pregunta de investigación se refiere a la influencia que ejercieron las actividades diseñadas para este estudio en el establecimiento de un ambiente de aprendizaje para la clase de geometría basado en Cabri II. Se pretendió enriquecer las actividades con preguntas como “¿Qué tal si…?” que permitieron hacer generalizaciones y nuevos descubrimientos.

La presentación de las actividades de este tipo permitió a los estudiantes experimentar la necesidad de producir argumentos para explicar los hallazgos que obtuvieron y observar la necesidad de plantear sus conclusiones correctamente. También propiciaron que el alumno asumiera un papel más participativo al intentar resolver y dar sentido a los problemas que se les plantearon. El desempeño del estudiante se vio influenciado por la discusión con sus compañeros, lo que los indujo a ampliar su lenguaje para abordar nuevos conceptos y nuevas formar de interactuar con sus compañeros.

Como la organización del trabajo en el aula se basó en el trabajo en parejas, se fortaleció el intercambio y negociación de ideas dentro de un ambiente de trabajo colaborativo, compartiendo la toma de decisiones; esto fomentó las relaciones interpersonales, la resolución de conflictos y la tutoría recíproca.

Este ambiente de aprendizaje propició la exploración interactiva con objetos geométricos, la presentación y recuperación rápida de la información, la agilidad en la realización de actividades rutinarias, el valor matemático de preservar las propiedades geométricas y la facilidad de diseño y rediseño de objetos geométricos.

La organización en el aula que se empleó en este estudio promovió una clase en donde el trabajo estuvo enfocado en que el alumno aprendiera a hacer; aprendiera a razonar, comunicar, hacer conexiones conceptuales y resolver problemas en contextos espaciales y geométricos, manipulando y realizando numerosos ejemplos, lo cual hizo innecesario contar con un conjunto amplio de definiciones como punto de partida y dio como resultado un aprendizaje activo. Este ambiente permitió a los alumnos moverse de lo empírico al pensamiento lógico.

Asimismo, este ambiente permitió que los estudiantes se familiarizaran con los contenidos examinando diferentes ejemplos; al discutir con sus compañeros se fomentó la disposición a la negociación, y se incrementó su lenguaje e introdujo nueva terminología matemática. Al principio los alumnos mostraron dificultades para iniciar el trabajo en forma colaborativa, debido a la forma en que estaban acostumbrados a trabajo, pero con el transcurrir de las sesiones el trabajo se realizó acorde a lo planeado. Es necesario mencionar que los alumnos mostraron deficiencias iniciales en la comprensión de algunos términos y elementos del lenguaje matemático utilizados en las hojas de trabajo, lo cual se considera que es un producto del poco reforzamiento de ellos en la clase de matemáticas.

Los alumnos tuvieron facilidad para hacer preguntas y cuestionar al profesor; se adaptaron rápidamente al trabajo con las nuevas tecnologías y mostraron motivación por el trabajo bajo un esquema distinto del que tradicionalmente tienen en la escuela.

La tercera pregunta de investigación se refiere a los niveles de pensamiento geométrico, según Van Hiele; en particular, a los avances o retrocesos que los estudiantes muestran cuando trabajan en un ambiente de aprendizaje basado en Cabri.

Dado que el modelo del pensamiento geométrico de Van Hiele es un proceso evolutivo donde los descriptores de cada nivel juegan un papel diferente, los datos del presente trabajo de investigación confirman que el nivel cero es análogo a los cimientos de una construcción, que representa el tipo de pensamiento que inicialmente poseían la mayoría de los estudiantes.

Los datos recabados en esta investigación muestran que los alumnos fueron capaces de identificar y operar con formas (por ejemplo, cuadrados y triángulos) y otras configuraciones geométricas (por ejemplo, líneas y ángulos) de acuerdo con su apariencia; construyeron o trazaron formas geométricas, utilizaron nombres formales o no formales, compararon, agruparon, describieron verbalmente formas con base en su apariencia como un todo, resolvieron problemas rutinarios, operando con las formas en lugar de usar propiedades de aplicación general e identificaron partes de una figura.

Las actividades permitieron revisar el nivel 1 de pensamiento geométrico, donde los alumnos analizaron figuras en términos de sus componentes y relaciones entre ellas, establecieron empíricamente propiedades de una clase de figuras y usaron esas propiedades para resolver problemas.

Cada estudiante mostró su propio avance, sin embargo se pudieron identificar las tendencias de todos para alcanzar los diferentes descriptores del nivel 1. En relación con el descriptor 1.1, donde al aplicar el cuestionario inicial todos los alumnos tuvieron algunas deficiencias para identificar componentes de figuras (por ejemplo, congruencia de lados y ángulos opuestos en paralelogramos, congruencia de ángulos en un patrón), se pudo observar en las primeras actividades que los alumnos tuvieron dificultades para identificar las relaciones que se le presentaban, pero al final de las actividades los alumnos pudieron identificar todas las relaciones (como se reporta en el capítulo 5).

En relación con el descriptor 1.2, donde el estudiante debe recordar y usar apropiadamente el vocabulario para referirse a componentes y relaciones, todos los alumnos demostraron que podían hacer uso del vocabulario adecuado al reconocer los conceptos que conocían o integrar los nuevos conceptos presentados.

En el descriptor 1.3, donde el estudiante debe agrupar figuras de diferentes modos de acuerdo con ciertas propiedades, todos los alumnos fueron capaces de agruparlas con las condiciones preestablecidas o determinadas por ellos mismos.

Según el descriptor 1.5, el alumno debe descubrir empíricamente propiedades de figuras específicas y generalizar propiedades para esa clase de figuras. En el cuestionario inicial únicamente Denesse y Marco plantearon las generalizaciones solicitadas, pero al aplicar las actividades todos pudieron establecer las generalizaciones esperadas, a excepción de la generalización que se les pidió en la actividad A. Se considera que esto se debió principalmente a la falta de práctica en el uso de la calculadora, la poca experiencia en el trabajo colaborativo y la discusión entre alumnos, así como a la falta de práctica en el traslado del pensamiento abstracto a la comunicación escrita.

Cuando se pidió que el alumno resolviera problemas geométricos usando propiedades conocidas de figuras o por acercamientos (descriptor 1.9), los alumnos tuvieron dificultades al resolver el problema planteado en la primera actividad, probablemente por la falta de experiencia con la calculadora y el tipo de trabajo, sin embargo, todos solucionaron los problemas planteados en el resto de las actividades.

Al pedir a los alumnos que formularan y usaran generalizaciones acerca de algunas propiedades de figuras y usaran el lenguaje relacionado (descriptor 1.10), los alumnos se mantuvieron con el mismo desempeño que mostraron en el cuestionario inicial, donde encontraron algunas dificultades para establecer generalizaciones a partir del trabajo realizado en las actividades.

En general, se concluye que los alumnos mostraron cierto avance en el nivel 1, todos los alumnos se mantuvieron en su desempeño mostrado en el cuestionario inicial además de que lograron resolver los problemas presentados en las actividades mostrando sus logros en los diferentes descriptores identificados con el nivel 1.

A este respecto, el presente trabajo confirma en buena medida lo reportado por Battista (1998), quien señala que 70% de los estudiantes de secundaria empiezan en el nivel 1 o menos, en el análisis del cuestionario inicial todos los alumnos se ubicaron en el nivel 0 y únicamente 30% de ellos mostró ciertos rasgos distintivos del nivel 1.

Probablemente, los alumnos podrían lograr adquirir el nivel 1 del pensamiento geométrico e incluso adentrarse en los demás niveles si se continuara este trabajo con las características y los recursos planteados en esta investigación.

La cuarta pregunta de investigación se refiere a los cambios que se observaron en las actitudes de los estudiantes hacia las matemáticas cuando trabajan en un ambiente de aprendizaje basado en Cabri II. A este respecto se puede concluir que los alumnos mostraron cambios en sus actitudes desde un inicio.

En las sesiones preliminares los alumnos mostraron un claro interés por el uso de un artefacto nuevo para ellos, el cual permitía realizar muchas de las tareas que ellos tenían que hacer en papel y lápiz. Se pudo observar que los alumnos acudían con prontitud a las sesiones, concentrando su atención en el conocimiento de las funciones básicas del software, y empezaron a aventurarse por sí mismos en el uso de nuevas funciones con base en la exploración empírica y el ensayo y error.

Cuando se inició el trabajo, se presentaron diferentes actitudes en los alumnos; algunos mostraban clara confusión al intentar resolver las actividades sin la ayuda del profesor; otros se interesaban por buscar por sí mismos las respuestas a los problemas planteados y pocos alumnos buscaban el trabajo coordinado con sus compañeros para resolverlas. El trabajo en la primera actividad fue lento y confuso, obligando al profesor a explicar la forma de trabajar, el uso y aplicación correcta de las distintas funciones y la forma de discutir las posibles soluciones en pareja.

Con el avance del trabajo la mayoría de los alumnos empezaron a discutir con sus compañeros las posibles forma de solución, el trabajo en la calculadora empezó a ser más coordinado, con mayor frecuencia se explicaban entre ellos y las peticiones de apoyo al profesor disminuyeron.

Al aplicar las últimas actividades los alumnos discutían sus respuestas constantemente, el trabajo con la calculadora era más coordinado y presentaron un avance casi uniforme como producto de las explicaciones entre sí. Las solicitudes de apoyo al profesor disminuyeron, por lo que fue necesario reforzar las revisiones directamente en sus lugares para verificar si su avance era correcto.

En la última pregunta de investigación se plantea si los problemas reportados en la literatura de investigación sobre geometría se superan o se mantienen cuando trabajan en el ambiente de Cabri II, así como cuáles problemas surgen.

Sobre la incorporación de las nuevas tecnologías al ambiente educacional, el presente trabajo coincide con los estándares de la NCTM (2000) al encontrar que en el salón de clases de matemáticas debe haber disponibilidad de nuevas tecnologías que las señalen como un componente esencial en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, sin dejar de lado la compatibilidad con las metas de instrucción planteadas en los programas oficiales.

La capacidad gráfica de la calculadora TI-92 facilita la construcción de representaciones geométricas de forma interactiva que permiten construir un ambiente más preciso que el papel y el lápiz o los manipulativos (Clements y Battista, 1991). Al usar Cabri no se puede asegurar que los estudiantes serán capaces de construir conceptos totalmente desarrollados, pero el programa puede ser utilizado para darle un significado funcional respecto a sus tareas.

La unión de la geometría y el campo experimental mediante el trazado de figuras geométricas y ambientes adecuados había sido abordado por la geometría dinámica de Cabri (Laborde, 1985), reduciendo la complejidad que representa el paso de lo concreto a lo abstracto en la geometría, permitiendo presentar a los estudiantes un tratamiento de las matemáticas como ciencia “experimental”.

Este trabajo coincide con Underwood y Underwood (1999), que muestran que los niños están más dispuestos a trabajar colaborativamente cuando trabajan con nuevas tecnologías que cuando trabajan con tareas clásicas del salón de clases, siempre y cuando éstas permitan algún nivel de cooperación y colaboración fomentando las relaciones interpersonales, la motivación, la autoestima, el aprendizaje, la resolución de conflictos, la prueba de hipótesis, el andamiaje cognitivo, la tutoría recíproca y la ejecución abierta de los procesos cognitivos y metacognitivos.

Para Underwood y Underwood (1999), uno de los factores que influyen en el trabajo colaborativo es el género; en contraste con lo que reportan estos autores, este estudio presenta que al combinar alumno–alumna el tipo de trabajo fue colaborativo, escaso en un principio y constante al final de las actividades. Sin embargo sería necesario que el análisis se continúe en otro momento, pues en las parejas de alumnos intervinieron dos factores, uno es el género y otro es el rendimiento inicial de cada una de ellos.

Respecto al papel del maestro en un ambiente basado en Cabri, se confirma que el rol que desempeña el profesor debe ser más amplio, usando tareas en que los alumnos puedan jugar con las nuevas tecnologías (Martínez, 1989). Como se ha mencionado antes, en la aplicación de las actividades se produjo la pérdida parcial del control, (en el sentido de Borba, 1995), tanto de la información como de la atención de los alumnos, por lo que debe capacitarse al docente para que reflexione sobre la clase que actualmente dicta y su comparación con la que quisiera tener.

Finalmente se debe tomar en cuenta que con el uso de CABRI surgen problemas nuevos. Primeramente se necesita plantear problemas cuya dificultad no se base en la repetición de trazos, pues el software los agiliza. Algunos de los problemas están relacionados con la "duda razonable" de los estudiante a las teorías o afirmaciones que no hayan sido probadas en el software, tomándolo como la única fuente que conocimiento "comprobable". También se corre el riesgo de que los alumnos avancen en su conocimiento geométrico con apoyo del software y al llegar a los niveles superiores de Van Hiele le resten importancia a la demostración formal. Al trabajar con el software cada alumno avanza a paso distinto, por lo que se necesita establecer controles que los guíen y enfoquen a un conocimiento matemático preestablecido.

Otros problemas surgen con el papel del profesor, quien “pierde” la exclusividad del conocimiento geométrico. Del mismo modo el profesor debe ayudar a los alumnos a aprender a diferenciar las dificultades del problema planteado de las imprecisiones de la calculadora (hardware) y de Cabri (software), así como a plantearse un cambio en la evaluación de lo cuantitativo a lo cualitativo.

Comentarios finales

El método de análisis cualitativo de Miles y Huberman (1994) plantea un forma de investigación basada en el trabajo en diferentes niveles de actividad; las cuales se siguieron en el presente trabajo de investigación, obteniendo como producto final un análisis transversal basado en el desempeño de los alumnos con relación al nivel 1 del pensamiento geométrico de Van Hiele. El análisis cualitativo de datos permitió un proceso iterativo, que resultan en episodios analíticos que se siguen unos a otros, desde el trabajo de los alumnos durante la aplicación de las actividades con contenidos geométricos hasta la aplicación de las entrevistas y la revisión de las notas tomadas por el investigador después de cada sesión, finalizando con la definición de conclusiones.

Este estudio se propuso analizar la influencia que ejercen las diferentes herramientas dinámicas de Cabri II en el establecimiento de un ambiente de aprendizaje para la clase de geometría. Entre las facilidades que ofrece este software destaca la que permiten al alumno construir una figura con ciertas propiedades y modificarla una y otra vez por medio del “arrastre” directo de alguno de sus elementos (vértices, ángulos, lados), manteniendo las propiedades determinadas en su definición y propiciando la realización de observaciones a partir de diferentes casos rápidamente y con precisión.

También se analizó la influencia que ejercen las actividades diseñadas para este estudio en el establecimiento de un ambiente de aprendizaje para la clase de geometría basado en Cabri II. Las actividades permitieron a los alumnos cuestionarse a sí mismos sobre las posibles soluciones a los problemas planteados, permitiendo la discusión y negociación entre ellos, así como la disminución de la dependencia de la conducción directa del profesor. Parecería que el profesor pierde el control de los alumnos y de los contenidos a ser trabajados; sin embargo las actividades proveen parte del control que aparentemente perdió el profesor.

Las actitudes mostradas por los alumnos fueron de disposición al trabajo colaborativo y mayor interés por la resolución de los problemas planteados en las actividades. El cambio en las actitudes de los alumnos fue notorio desde el inicio del presente trabajo.

Para el diseño de las actividades se buscó establecer las condiciones necesarias que permitieran al alumno adentrarse en los diferentes contenidos geométricos por medio de la “recreación” de los contenidos de geometría escolares, entendiéndola como un “redescubrimiento”.

De igual forma se pretendió estudiar el nivel de pensamiento geométrico (según la Teoría de Van Hiele), que pueden desarrollar los estudiantes cuando trabajan en un ambiente de aprendizaje como el planteado, tomando en cuenta el nivel de pensamiento de los alumnos al inicio. El presente trabajo coincide con lo reportado en la teoría de los niveles de pensamiento geométrico de Van Hiele en relación con que de los alumnos con los que se trabajó se situó en el nivel uno de pensamiento, por lo que quedaría para futuros trabajos cuyo seguimiento fuese de mayor duración la posibilidad de acceder al nivel 2 de dicha teoría.

Es necesario hacer énfasis en que los datos recabados indican que para observar un mayor avance en el conocimiento geométrico de los alumnos se requiere de más tiempo que el destinado en la presente investigación, continuando con el apoyo de más actividades semejantes a las presentadas durante el trabajo de campo.

De igual modo, debido al tiempo utilizado para la investigación, se puede concluir que los resultados más notables se presentaron en lo concerniente al manejo y organización de la clase con el apoyo de nuevas tecnologías, al papel que debe desempeñar el profesor en este nuevo ambiente, a las cualidades del software CABRI y a las actividades preparadas para este estudio en términos de las actitudes de los estudiantes y de su motivación para estudiar geometría.

Se debe reportar que en el presente trabajo de investigación se evaluó una propuesta didáctica para el uso de la geometría dinámica basada en Cabri, utilizando como referente teórico el planteamiento hecho por Van Hiele sobre los niveles del pensamiento geométrico. Esta propuesta didáctica tomó el teorema del ángulo central como punto de partida para generar una secuencia didáctica para la enseñanza de la geometría con apoyo de la planeación de actividades que condujeran al logro de diferentes contenidos a partir de dicho teorema.

Finalmente, el presente trabajo propuso el abordaje de contenidos geométricos con el apoyo de nuevas tecnologías, como una forma de aprovechar los recursos que ofrece la geometría dinámica, formulando secuencias didácticas diferentes de la que se emplearía en un ambiente basado en el lápiz y el papel o la regla y el compás convencionales; secuencias que permitieron explotar las herramientas del software y que los alumnos trabajaran por medio del descubrimiento de los contenidos matemáticos propuestos. El uso de dicha tecnología y el trabajo del maestro y los estudiantes bajo un esquema basado en los niveles del pensamiento geométrico señalados por Van Hiele representa una alternativa posible de usar en las aulas de las escuelas secundaria en México.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Anderson, John. R. (1983). *The Architecture of Cognition*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press

Balacheff, Nicolas & Kaput, James J. (1996). Computer-bases Learning Environments. *International Handbook of Mathematics Education*, Netherlands: A.J. Bishop et al Eds. Kluwer Academic Publishers. 469 - 501

Ball, Lynda & Kaye, Stacey. (2004). A New Practice in Learning Mathematics: Differences in Students´ Written Records with CAS. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Bergen University College. 2, 87 - 94.

Battista, Michael T. (1998). *Shape Makers: Developing Geometric Reasoning with The Geometer's Sketchpad*. Berkeley, CA: Key Curriculum Press. 180 págs.

Borba, Marcelo. (1995). *Teaching Mathematics*: *Computers in the Classroom*, Clearing House. Fuente: Base de Datos EBSCO. 3 págs.

Branca, Nicholas A.; Breedlove, Becky A. & King, Byron. (1992). Calculators in the Middle Grades: Access to Rich Mathematics. *Calculators in Mathematics Education, 1992*. USA: NCTM. 9-13

Bright, George W. & Prokosch, Neil E. (1995). Middle School Mathematics Learning to Teach with Calculators and Computers. *School Science and Mathematics*, Fuente: Base de Datos EBSCO. 10 págs.

Bruner, Jerome. (1984). Juego, Pensamiento Y Lenguaje. *Acción, Pensamiento y Lenguaje.* Compilación de José Luis Linaza. Madrid: Alianza Editorial. 211 – 232

Clements, Douglas H. & Battista, Michael. (1991). Computer Enviroments for Learning Geometry. *Proceedings of the Fifteenth Annual Conference of the International Group for the Psychology.*

De Villers, Michael. (1999). The Van Hiele Theory – Defining and Proving within a Sketchpad Context. In: Rethinking Proof with the Geometer's Sketchpad. Key Curriculum Press. 11 – 20

Dreyfus, T & Hadas, Nurit. (1996). Proof as Anwers to the Question Why. *International Reviews on Mathematical Education*. G. Kaiser (Ed). 28, 1–5.

Freudenthal, Hans. (1970). Geometry Between the Devil and the Deep Sea. *Educational Studies in Mathematics*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers. 3, 413 – 135

Freudenthal, Hans. (1973). The Case of Geometry. *Mathematics as an Educational Task*. Netherlands: D. Reidel Publishing Company. 401 – 511

Fuys, D.; Geddes, D. & Tischler, R. (1988). The Van Hiele Model of Thinking in Geometry Among Adolescents. *Monograph No 3 of the Journal for Research in Mathematics Education*. Volumen 3. USA: NCTM. 195 págs.

Goldenberg, E. P.; Couco, A. A. and Mark, J. (1998). A Rol for Geometry in General Education. In: *Designing Learning Environments for developing understanding of Geometry and Space*. Lehrer and Chazan (Eds.). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates

Greeno, James G. (1980). Some examples of cognitive task analysis with instructional implications. In: *Aptitude, learning and instruction*. R. Snow, P. Federico y S. Montague (Eds.). Hillsdale, N.J.: LEA. 2, 1-21.

Hershkowitz, Rina; Dreyfus, T,; Ben-Zvi, D.; Freidlander, A.; Hadas, N,; Resnick, T.; Tabach, M. & Schwarz, B. (2002). Mathematics Curriculum Development for Computerized Environments: A Designer – Researcher – Teacher – Learner Activity. *Handbook of International Research in Mathematics Education*. London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. 657 - 693

Hirschhorn, Daniel B. & Thompson, Denisse R. (1996). Technology and Reasoning in Algebra and Geometry. *The Mathematics Teacher*. USA: NCTM. 89, 138 - 142

Johnson, D. W. & Johnson, Roger T. (1999). *El Aprendizaje Cooperativo en el Aula / Cooperative Learning in the Classroom*. Paidos Argentina. 146 págs.

Lins, Abigail F. (2004). Cabri – Géomètre: Two Ways of Seeing it and using it. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Bergen University College. 1, 323.

Mariotti, María A. (2002). The Influence of Technologycal Advances on Students' Mathematics Learnings *Handbook of International Research in Mathematics Education.* London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. 695 – 733

Martínez, Angel & Rivaya, Francisco. (1989). *Una Metodología Activa Lúdica para la Enseñanza de la Geometría.* Madrid: Edit. Síntesis. 144 págs.

Manouchehri, Azita & Douglas Lapp. (2003). Unveiling Students Understanding: the Role of Questioning in Instruction. *Mathematics Teacher*, USA: NCTM. 96, 562 - 566

Miles, Matthew. B. & Huberman, Michael. (1994). *Qualitative Data Analysis: an Expanded Sourcebook*. Newbury Park, CA: Sage. 336 págs.

NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* (fuente http://nctm.org).

Noss, Richard & Hoyles, Celia. (1996). *Windows of Mathematical Meaning*. Mathematics Education Library. Netherlands: Kluwer Academic Publishers. 296 págs.

Piaget, Jean. (1970). Teoria Cognitiva (fuente http://www.monografias.com/trabajos16/teorias-piaget/teorias-piaget.shtml)

Secretaria de Educación Pública. (1993). Plan de Estudios de Secundaria. México: Autor. 190 págs.

Secretaria de Educación Pública. (1993). Libro para el Maestro de Matemáticas en Secundaria. México: Autor. 407 págs.

Säljö, Roger. (1999). Learning as the Use of Tools. A Sociocultural Perspective on the Human-Technology Link. *Learning with Computers*. Routlenge: Karen Littelton and Paul Light (Ed). 145 – 161

Spiegel, Alejandro. (1997), *La Escuela y la Computadora*. Argentina: Novedades Educativas. 108 págs.

Suydam, Marylin N. (1979). *The Use of Calculators in Pre-college Education: a State-of the-Art Review.* Columbus, OH.: Calculator Information Center

Szendrei, Juliana. (1996). Concrete Material in the Classroom. *International Handbook of Mathematics Education.* Netherlands: A.J.Bishop A.J. et al Eds. Kluwer Academic Publishers. 411 – 434.

Thomas, Michael O. J. (2004). Integrating CAS Calculators into Mathematics Learning: Partnership Issues. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Educat*ion. Bergen University College. 4, 297 – 304.

Thorpe, John. (1989). A. Algebra: What Should We Teach and How Should We Teach It? Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra. USA: Carolyn Kieran & Sigrid Wagner Eds, Lawrence Erlbaum Associates. 11 – 23

Underwood, Jean & Geofrrey Underwood, (1999). Task Effects on Co-operative and Collaborative Learning with Computers. *Learning with Computers, Analyzing Productive Interaction*, London and New York: Routledge. 11 – 23

Walmsley, Angela & Joe Muñiz. (2003). Cooperative Learning and its Effects in a High School Geometry Classroom. *Mathematics Teacher*, USA: NCTM. 96, 112 – 116.

Wirszup, Izaak. (1976). Breakthroughs in the Psychology Learning and Teaching Geometry. *Space and Geometry: Papers from a Reseach Workshop.* J. L. Martin and D. A. Bradbard (Eds). Columbus, OH: ERIC Center for Science, Mathematics and Environmental Education. 75-97

Wong, Ngai-Ying. (2003). The Influence of Technology on the Mathematics Curriculum. *Second International Handbook of Mathematics Education*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers. 271 - 321

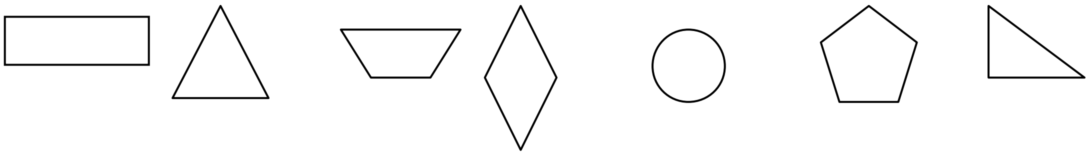
Wragg, E.C. (1994). *The Use of Quantitative Methods. An Introduction to Classroom Observation*. London: Routlege.1 – 17

Yerushalmy, M., & Chazan, D. (1987). Effective problem posing in an inquiry environment: A case study using the Geometric Supposer. In: *Proceedings of the Eleventh International Conference Psychology of Mathematics Education*. Montreal, Canada: J. Bergeron, N. Herscovics, & Kieran, C. (Eds.). 2, 53-60.

ANEXOS

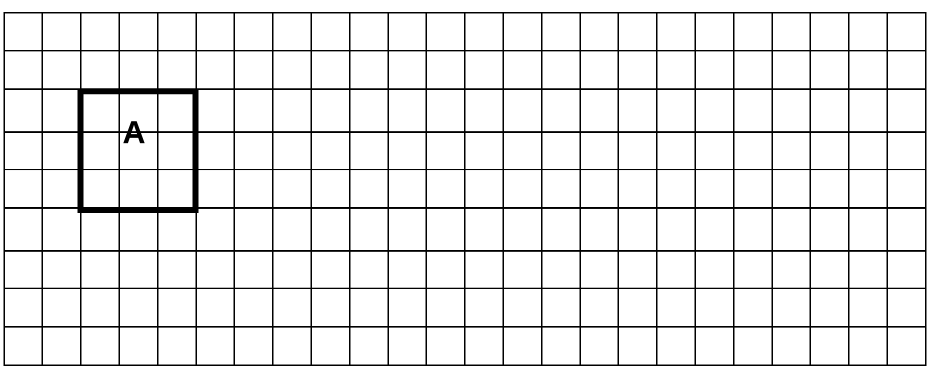
Alumno:	Fecha:

1. De los siguientes dibujos marca con una cruz los triángulos:

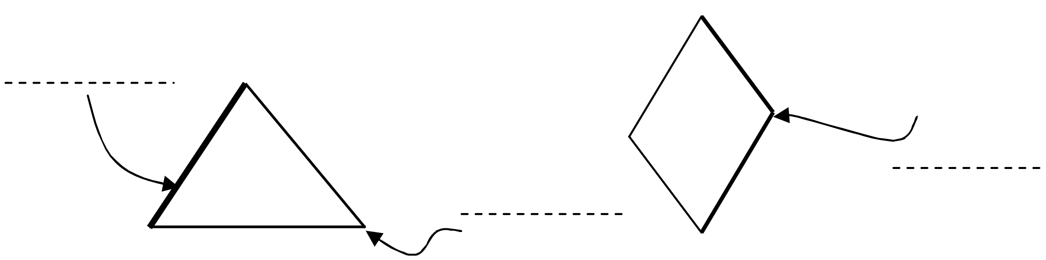


2. Encierra en círculos cada uno de los ángulos de las siguientes figuras:

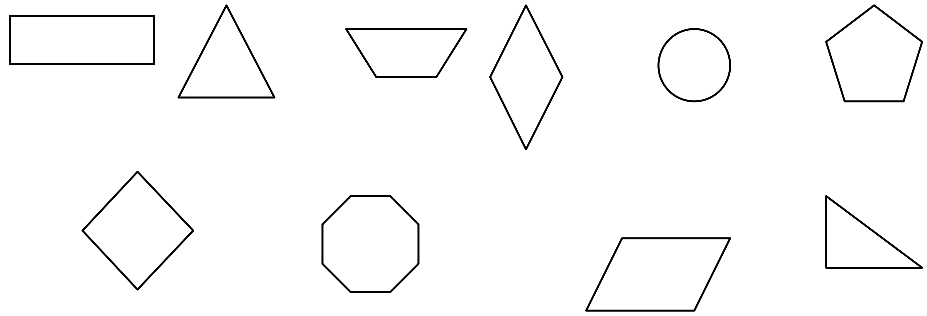
3. En la siguiente cuadrícula, traza los elementos geométricos que se te piden (observa el ejemplo):
   A. Cuadrado (ejemplo)
   B. Ángulo
   C. Triángulo
   D. Línea
   E. Rectángulo



4. Escribe el nombre de los elementos geométricos que señalan las flechas.



5. Observa las figuras y agrúpalas según sus semejanzas.

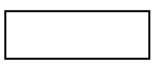
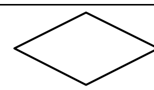
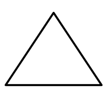
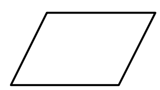
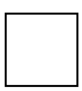
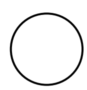
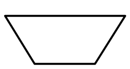
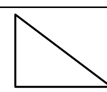
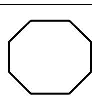
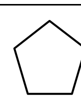


6. Indica que características tomaste en cuenta para agrupar las figuras anteriores:

____

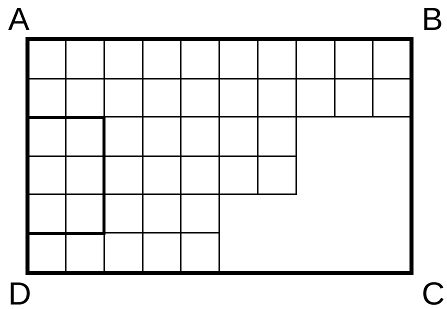
____

7. Escribe el nombre de cada una de las siguientes figuras:

Figura	Nombre	Figura	Nombre
			
			
			
			
			

8. En la cuadrícula cada cuadrito representa un centímetro cuadrado, ¿cuál es el área total del rectángulo ABCD?

Área: ________



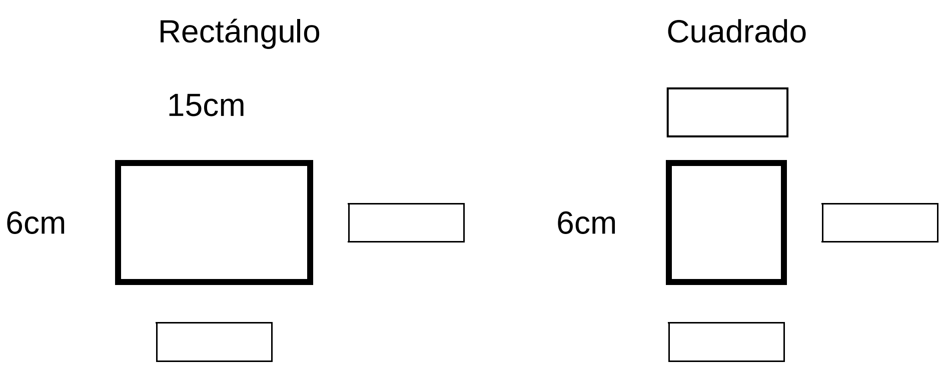
9. Explica cómo encontraste el área total de la figura anterior.

____

____

____

10. Encuentra las medidas faltantes de las siguientes figuras y anótalas en los recuadros.



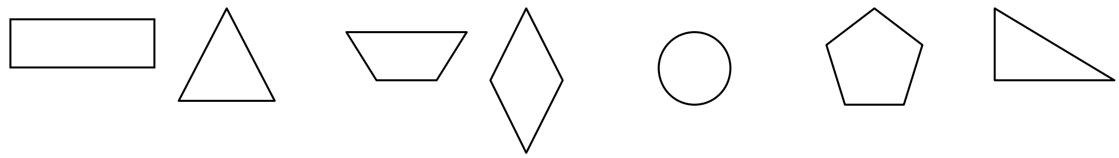
11. ¿Cuál es el perímetro del rectángulo? ______________

12. Explica como obtuviste el perímetro del rectángulo:

____

____

13. Con base en las figuras de abajo, completa cada enunciado con las palabras: *todas, algunas, ninguna, una*.



A. ________________ figuras tienen cuatro ángulos.

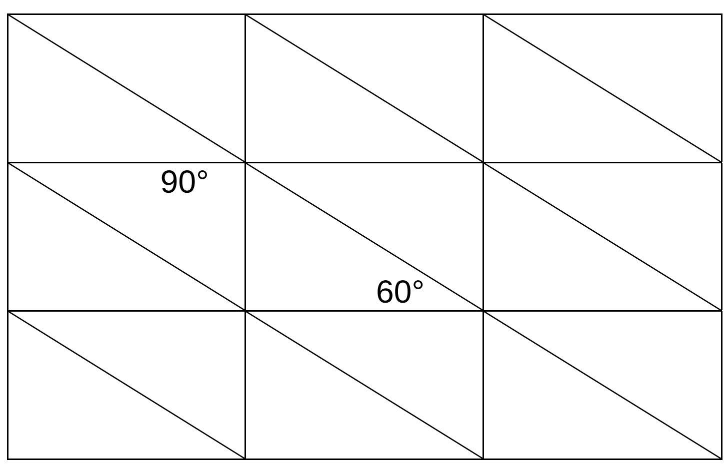
B. ________________ figura no tiene ejes de simetría.

C. ________________ las figuras tienen vértices.

D. ________________ figura tiene ocho lados.

E. ________________ figura tiene dos lados.

14. Encuentra las medidas de los ángulos que se te piden.



15. Señala dos semejanzas y dos diferencias en las siguientes figuras.

Cuadrado

Rectángulo

Semejanzas	Diferencias

16. Con base a las condiciones señaladas, anota en el paréntesis la letra de la descripción que corresponde a cada figura.

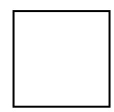
A. Tiene cuatro lados iguales, pero no es un cuadrado.

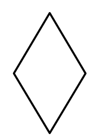
B. Tiene cuatro ángulos rectos y cuatro lados, pero no es un cuadrado.

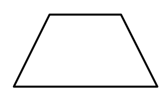
C. Tiene cuatro ángulos rectos y cuatro lados iguales.

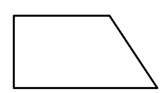
D. Tiene dos pares de lados iguales, pero no es rectángulo

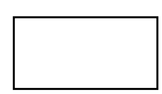
E. Tiene cuatro lados y sólo un par de lados opuestos iguales.

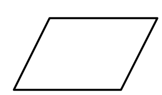
( ) 

( ) 

( ) 

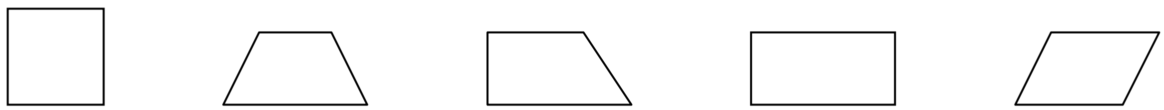
( ) 

( ) 

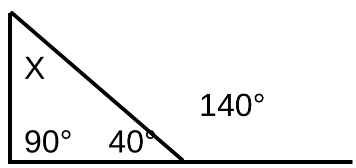
( ) 

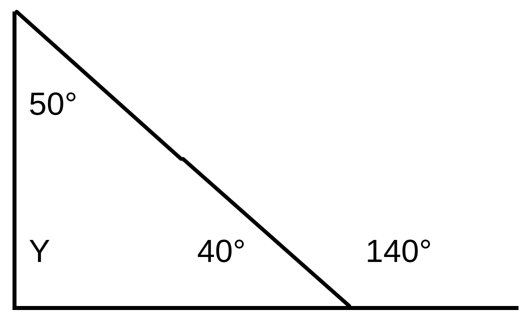
17. Marca con una cruz todas las figuras donde

"El área es igual a la medida de la base por la medida de la altura"



18. Encuentra las medidas de los ángulos desconocidos y explica cómo las obtuviste.





X = _______

¿Por qué? ______________________
____
____

Y = _______

¿Por qué? ______________________
____
____

19. Menciona todas las características que compartan las figuras que se muestran a continuación

____

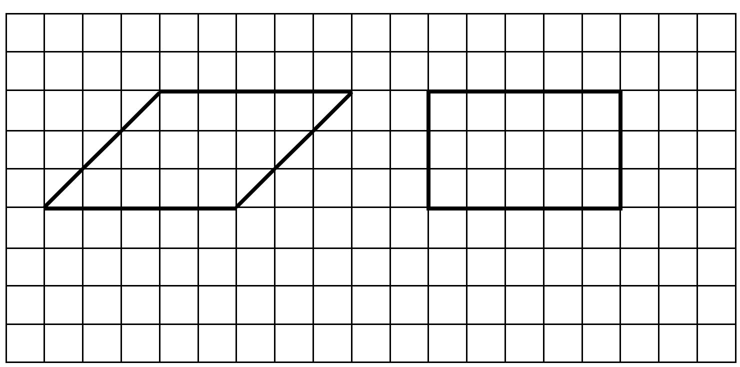
____

____

Una figura tiene una característica que la distingue de las demás, ¿cuál es? ____________________________

¿Por qué? ____

20. Las siguientes figuras tienen áreas iguales, encuentra una razón por la cual sea cierto lo anterior.



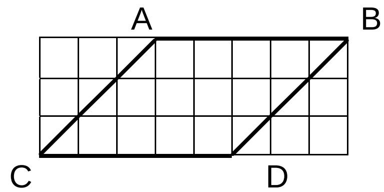
____

____

____

21. Observa el paralelogramo y explica por que los ángulos opuestos miden lo mismo.

ángulo A = 135°
ángulo B = 45°
ángulo C = 45°
ángulo D = 135°

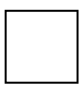
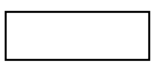
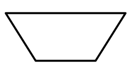
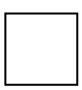


Ángulo A = Ángulo D

Ángulo C = Ángulo B

____
____
____

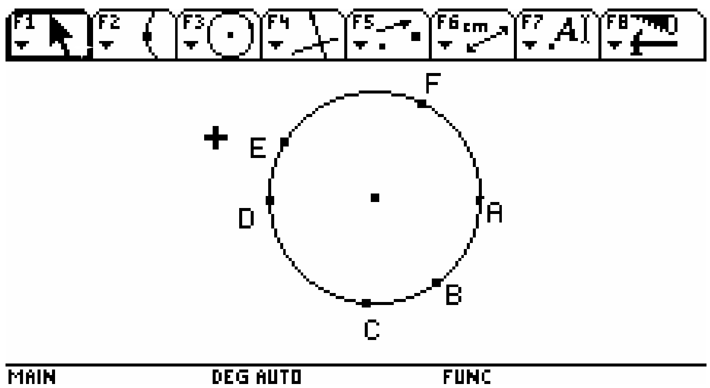
22. Observa la siguiente relación de figuras y señala si es correcta y por que.

Figura	Nombre	SI / NO	Por que
	Trapecio		
	Rectángulo		
	Trapecio		
	Rectángulo		

PROTOCOLOS DE ENTREVISTA

ENTREVISTA INTERMEDIA

1. En la siguiente figura se han marcado seis puntos sobre la circunferencia (A, B, C, D, E. F).

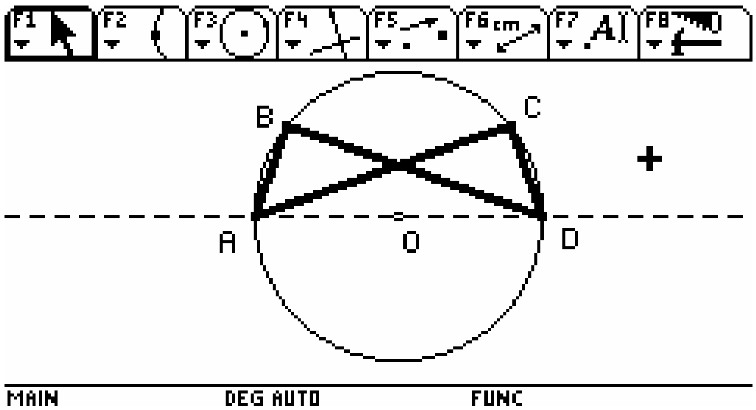


   Traza tres triángulos cuyos vértices sean cualquiera de los puntos antes mencionados. ¿El circuncentro será el mismo en todos los triángulos? ¿Por qué?

2. Dado un punto (P), construye un triángulo cualesquiera cuyo circuncentro sea dicho punto.

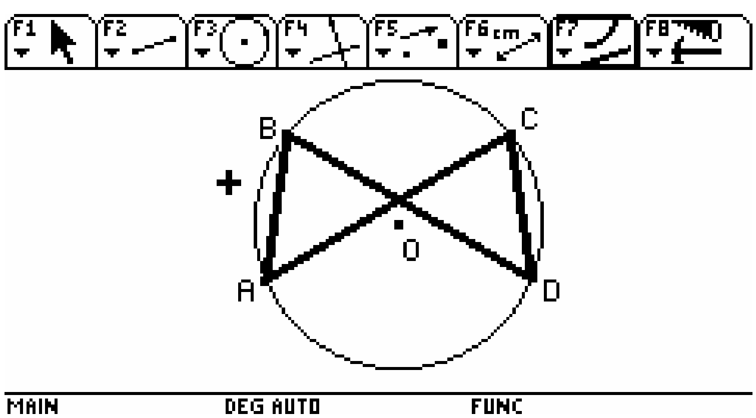
3. ¿El triángulo que construiste es el único que tiene como circuncentro al punto (P)? ¿Por qué?

4. Observa la siguiente figura donde el punto (O) es centro de la circunferencia.



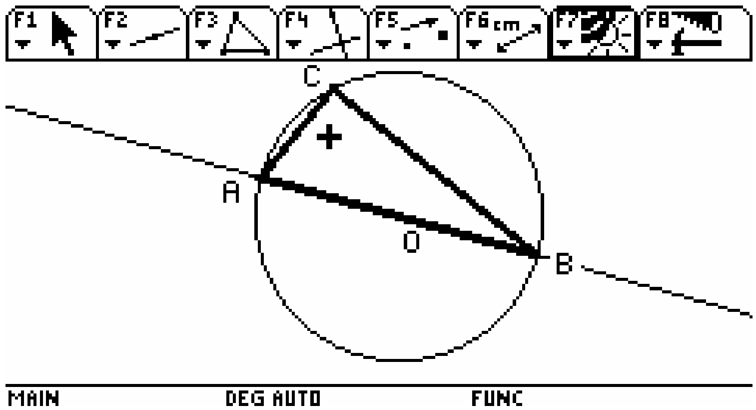
Un científico la construyó y dijo que los ángulos ABD y ACD son iguales, pero olvidó explicar porqué lo son. ¿Es correcto lo que afirma ese científico?

5. La figura anterior fue modificada sin avisarle al científico, ahora quedó de la siguiente forma.



¿Los ángulos ABD y ACD son iguales? ¡Ayuda al científico explicar por qué dichos ángulos son iguales!

6. En la siguiente figura el segmento AB es un diámetro de la semicircunferencia y el triángulo ACB es rectángulo.



Un científico dice que el <ACB mide 90º. ¿Es correcto lo que él dice? ¿Por qué?

ENTREVISTA FINAL

1. En tu calculadora tienes un "programa" para construir triángulos inscritos dadas las medidas de los ángulos centrales. ¿Puedes construir triángulos con los siguientes ángulos centrales?

   a) 40º, 160º, 160º
   b) 140º, 60º, 160º
   c) 120º, 120º, 120º

2. Por la forma en que se realizó el "programa" se necesitaron los ángulos **centrales** y los ángulos **inscritos**; sin embargo los ángulos **inscritos** corresponden a los ángulos **internos** del triángulo. Completa la siguiente tabla..

a)

< central	40º	160º	160º	Suma =
< inscrito				Suma =

b)

< central	140º	60º	160º	Suma =
< inscrito				Suma =

c)

< central	120º	120º	120º	Suma =
< inscrito				Suma =

3. ¿Se puede construir un triángulo cuyos ángulos internos sean los siguientes? Justifica tus respuestas.
   a) 40º, 60º, 80º
   b) 100º, 50º, 50º
   c) 30º, 60º, 40º

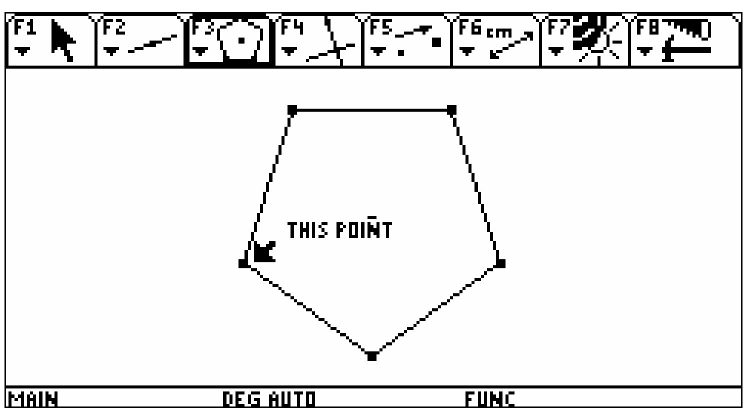
4. Un triángulo isósceles (dos ángulos iguales) tiene un ángulo

interior que mide 40º, el otro mide 80º y el tercero es igual a uno de ellos. Determina la medida del tercer ángulo y explica tu respuesta.

5. Dados tres ángulos cualesquiera, ¿se puede trazar un triángulo cuyos ángulos interiores sean respectivamente iguales a esos ángulos? Justifica tu respuesta.

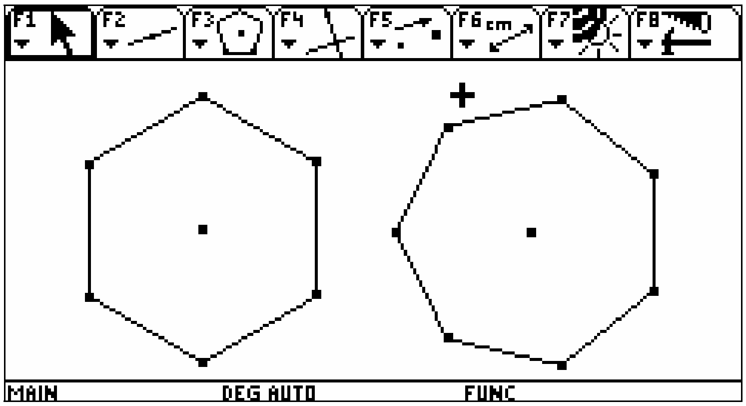
6. La suma de los ángulos interiores de un polígono convexo es 360º. ¿Cuántos ángulos tiene ese polígono? Explica tu respuesta.

7. Un científico antiguo afirmó que "si un pentágono está compuesto por tres triángulos cuya condición es el que los tres comparten un vértice, entonces la suma de los ángulos internos de un pentágono es 540º". En el siguiente pentágono ejemplifica lo que dijo el científico. ¿Es correcto lo que él dice? Justifica tu respuesta.



8. En las siguientes figuras prueba el procedimiento que sugirió el

científico y verifica si la suma de sus ángulos internos que se da es correcta.

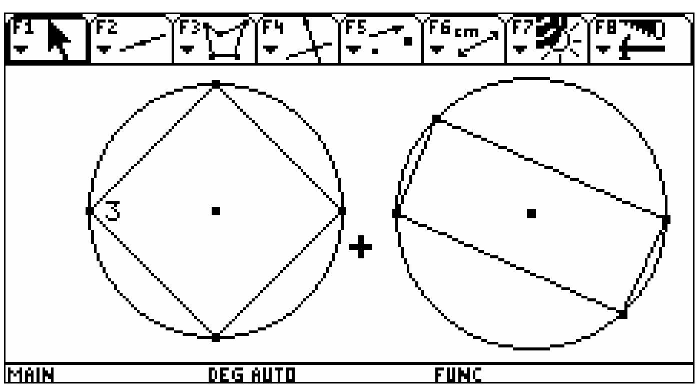


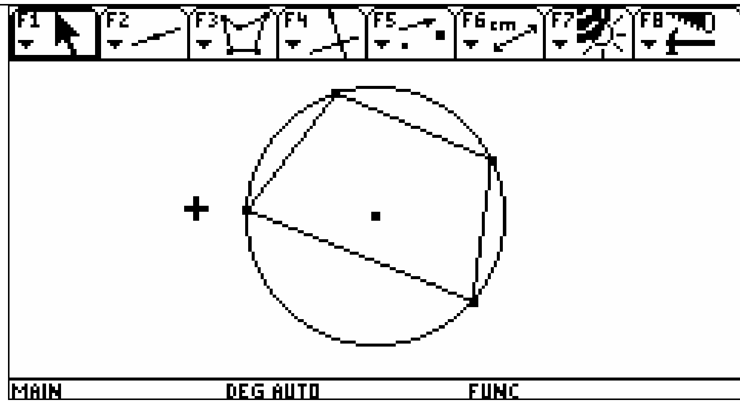
Suma = <u>720º</u> Suma = <u>900º</u>

9. ¿Cuántos ángulos tendrá el polígono cuyas medidas de sus ángulos interiores suman lo que se indica en cada inciso?

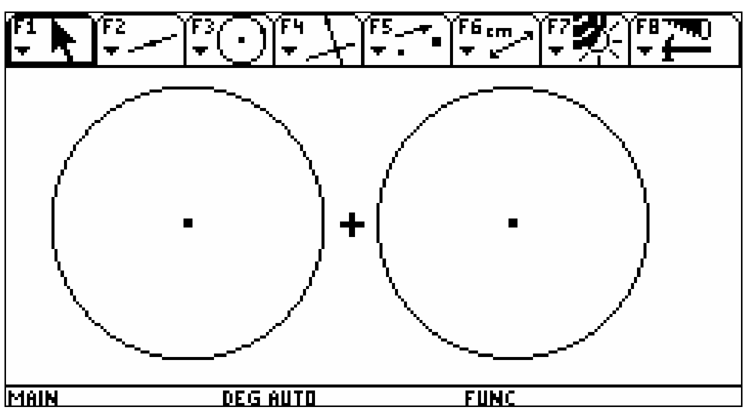
   a) 360º b) 720º c) 900º

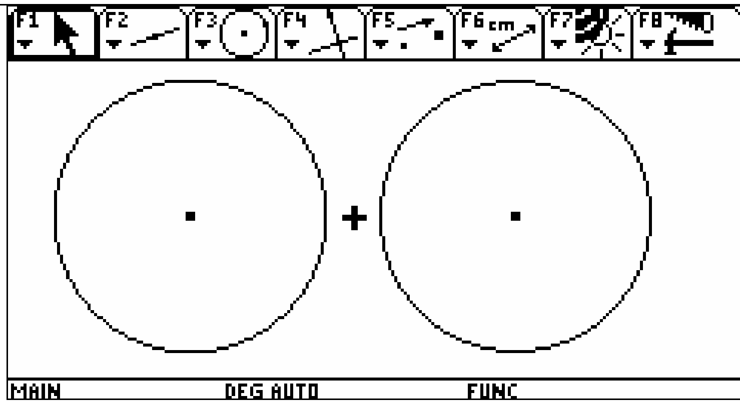
10. Otro científico descubrió que en los siguientes diagramas los ángulos opuestos en cada cuadrilátero suman 180º. ¿Es correcto lo que afirma el científico? ¿Por qué?

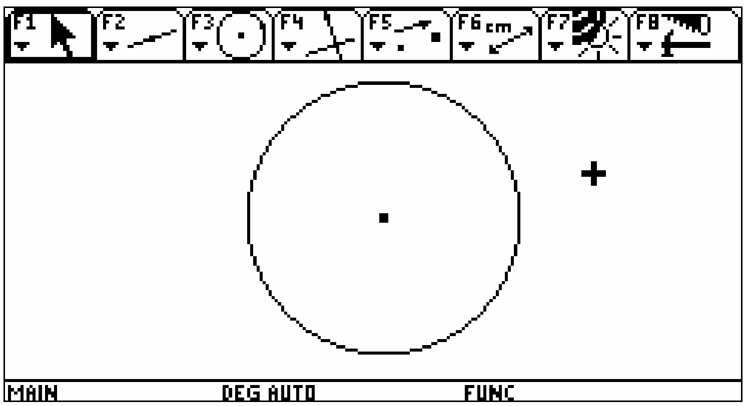




11. En las siguientes circunferencias traza lo que se te pide:
    d) Un cuadrilátero cuyos ángulos midan 90º (con regla y compás)
    e) Un cuadrilátero donde dos ángulos opuestos midan 70º (con Cabri)
    f) Un cuadrilátero cuyos ángulos midan 90º y sus cuatro lados sean iguales (con regla y compás)
    g) Un cuadrilátero donde dos ángulos opuestos midan 100º (con Cabri)
    h) Un cuadrilátero donde uno de sus ángulos mida 120º (con el procedimiento que elijas)







Explica en cada caso por qué se pudo construir la figura o por qué no.

CONCENTRADO DE RESPUESTAS DEL CUESTIONARIO INICIAL

SECCIÓN	PREGUNTA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
	NIVEL	NO - 1A	NO - 1C	NO - 2	NO - 3	NO - 4	NO - 4	NO - 5	NO - 6	NO - 6	NO -7A	NO - 7A	NO - 7A	NO - 7C	
	RASGOS / ALUMNO	Ident. Formas en su conjunto	Ident. Angulos en dif. Figuras	Copia formas	Ident. Elem. Geométricos	Agrupa fig.	Apariencia / propiedades	Ident. Figuras	Encuentra el área	Opera con la fig / propied	Identifica lados iguales	Encuentra el perímetro	Opera con la fig / propied	Generaliza y cuantifica	PUNTAJE PARCIAL
A	MARCO A.	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	25
A	EDGAR D.	2	2	2	1	2	1	2	2	2	2	2	2	2	24
A	MIGUEL	2	2	2	1	2	1	2 romboide	2	2	2	1	2	1	22
A	JAIR C	2	2	2	1	2	1	2	2	2	2	2	2	1	23
A	ROSA	2	2	2	1	2	1	2	2	2	2	2	2	2	24
A	ALEJANDRO	2	2	2	1	2	1	2 romboide	2	2	2	2	2	1	23
A	DENESE	2	2	2	2	2	2	2	2	1	2	2	2	1	24
A	NOEMI JIM.	2	2	2	1	2	1	2	2	2	2	2	2	2	24
A	ANDREA	2	2	2	1	2	1	2	2	2	2	2	2	2	24
B	DANIEL J.	1	2	2	1	2	2	2 romboide	2	2	2	2	2	1	23
B	JESUS	2	2	2	1	2	2	2 romboide	2	2	2	2	2	2	25
B	BETSY	2 rombo	2	2	1	2	2	2	2	2	2	1	2	1	23
B	ALEJANDRA	2	2	2	1	2	1	2	2	1	2	2	2	1	22
B	GENEVIER	2	2	2	1	2	1	1 varios	2	2	2	2	2	1	22
B	DANIEL A.	2	2	2	1	2	1	2	2	1	2	2	2	1	22
B	BARTOLO	2 rombo	2	2	1	2	1	2	2	2	2	2	2	1	23
B	JULIO	2	2	2	1	2	1	2 romboide	2	2	2	2	2	2	24
B	JASSIEL	2	2	2	1	2	1	2	2	2	2	2	2	1	23
B	DEBORAH	2	2	2	1	2	1	2	2	1	2	2	2	1	22
B	ADRIAN A.	2	2	2	1	2	1	2 pentágono	1	2	2	1	2	1	21
B	ALAN M.	2	2	2	1	2	1	2 trapecio	1	1	2	2	2	1	21
C	VICTOR A	2	2	2	1	2	1	2	2	1	2	2	2	2	23
C	YOCELYN	2 rombo	2	2	1	2	1	1 varios	2	2	2	2	2	1	22
C	RICARDO	2	2	2	1	2	1	2	2	1	2	2	2	1	22
C	TANIA E.	2	2	2	2	0	0	2	2	1	2	2	2	1	20
C	ALFREDO T.	2	2	2	1	2	1	2 octágono	1	1	2	2	2	1	21
C	CINTHYA M.	2	2	2	0	2	1	2	0	0	2	2	2	1	18
C	MAGALLI	2	2	2	0	2	1	2	0	0	2	2	2	2	19
C	MITZY	2	2	2	0	2	2	2	1	1	2	2	2	1	21
C	IVONNE	2	2	2	0	2	1	2	2	1	2	2	2	1	21

	SANDRA	2	2	2	1	2	1	2 trapecio	1	1	2	2	2	1	21
	EDUARDO	2 rombo	2	2	1	2	0	2	2	2	2	1	2	1	21
	FRANCISCO	2	2	2	0	0	0	1	0	1	0	1	2	1	12
	AMERICA	2	2	2	0	0	0	1	0	1	0	2	2	1	13
	FCO. JAVIER	2	2	2	0	0	0	1	0	1	0	1	2	1	12
		69	70	70	31	61	36	65	55	51	64	64	70	44	

	PREGUNTA	14	15	16	17	18	19	20	21	22		
	NIVEL	NI - 1	NI - 3	NI - 4A	NI - 3B	NI - 5	NI - 6	NI - 7	NI - 10A			
SECCION	RASGOS ALUMNO	Encuentra med. de áng.	Compara fig. aparien/prop	Relac. según descrip. prop	Selecciona según prop.	Descubre y gener. Prop.	Descubre clases de fig.	Aplica prop. al dif. fig	Generaliza y explica	Gener. por forma/prop.	PUNTAJE PARCIAL	PUNTAJE TOTAL
A	MARCO A.	1	2	2	2	2 congruencia	2 trapecio	2	1	2 rectángulo	16	41
	EDGAR D.	1	2	2	2	2 congruencia	2 trapecio	2	1	2 rectángulo	16	40
	MIGUEL	1	2	2	2	2 congruencia	2 trapecio	2	1	2 rectángulo	16	38
	JAIR C	1	2	2	2	1	2 trapecio	2	1	2 rectángulo	15	38
	ROSA	1	2	1	2	1	2 trapecio	2	1	2 rectángulo	14	38
	ALEJANDRO	1	2	1	2	1	2 trapecio	2	1	2 rectángulo	14	37
	DENESE	1	2	1	1	2 S/justif.	2 trapecio	1	1	2 rectángulo	13	37
	NOEMI JIM.	1	2	1	1	2 congruencia	2 trapecio	1	1	2	13	37
	ANDREA	1	2	1	1	1	2 trapecio	1	2	2 rectángulo	13	37
B	DANIEL J.	1	1	2	1	1	2 cuadrado	2	1	2 rectángulo	13	36
	JESUS	1	2	1	0	1	2 cuadrado	1	1	2 rectángulo	11	36
	BETSY	1	2	1	1	1	2 trapecio	1	2	2 rectángulo	13	36
	ALEJANDRA	1	1	1	1	1	2 trapecio	2	2	2 rectángulo	13	35
	GENEVIER	1	1	2	1	1	2 cuadrado	2	1	2 rectángulo	13	35
	DANIEL A.	1	1	2	1	1	2 cuadrado	2	1	2 rectángulo	13	35
	BARTOLO	1	1	1	2	1	2 romboide	2	1	1 trap. Rec.	12	35

	JULIO	1	1	1	0	1		2		1	1	2	rectángulo	10	34
	JASSIEL	1	1	2	1	1		1	romboide	1	1	2	rectángulo	11	34
	DEBORAH	1	2	1	1	1		2		1	1	2	rectángulo	12	34
	ADRIAN A.	1	2	1	1	1		2	trapecio	2	1	2	rectángulo	13	34
	ALAN M.	1	2	2	1	1		1		2	1	2	rectángulo	13	34
C	VICTOR A	2	1	2	0	2	congruencia	2	trapecio	1	0	0		10	33
	YOCELYN	1	2	1	1	1		1	trapecio	2	1	1	trap. Rec.	11	33
	RICARDO	1	1	2	1	2		1		1	1	0		10	32
	TANIA E.	1	2	1	1	1		1	trapecio	1	1	2	rectángulo	11	31
	ALFREDO T.	1	1	1	0	1		2	cuadrado	1	1	2	rectángulo	10	31
	CINTHYA M.	1	2	1	0	1		2		1	1	2	rectángulo	11	29
	MAGALLI	1	2	2	1	0		0	trapecio	1	0	0		7	26
	MITZY	1	1	1	1	0		0	trapecio	1	0	0		5	26
	IVONNE	1	1	1	0	0		0	trapecio	1	0	0		4	25
	SANDRA	1	1	1	0	0		0	trapecio	1	0	0		4	25
	EDUARDO	1	1	1	0	0		0	trapecio	1	0	0		4	25
	FRANCISCO	0	1	1	1	2		2	trapecio	2	1	2	rectángulo	12	24
	AMERICA	0	1	1	0	0		2	trapecio	1	1	2	rectángulo	8	21
	FCO. JAVIER	0	2	2	1	1		0		0	1	2	rectángulo	9	21
		33	54	48	33	37		53		49	32	54			

claves:
2=correcto 1=incorrecto 0= no contesto

casos seleccionados

DESCRIPCIÓN DE LAS ACTIVIDADES EXPERIMENTALES

A continuación de describirán las seis actividades y la forma en que fueron planeadas. Después se trascriben muestras en blanco de las mismas.

Actividad A "Las Radiodifusoras"

En esta actividad se pretendía la construcción de un triángulo dadas tres medidas cualesquiera asumiendo que los alumnos tenían idea de conceptos tales como segmento de recta, punto de intersección y concepto de circunferencia.

La actividad fue dividida en tres hojas de trabajo, de forma tal que los alumnos fueran alcanzando el contenido por medio de pequeños avances.

En la primera hoja de trabajo se da la *información* por medio del planteamiento del problema donde era necesario establecer del campo de influencia de una radiodifusora.

> *Tu estación favorita [posición X] tiene una influencia es un área circular con radio de 15km.*
> *La casa de tus padres se encuentra en el límite máximo de recepción de*

Se inició la *orientación dirigida* del trabajo por medio del establecimiento del área donde se escucha la estación (círculo) y sus límites para poder escucharla (circunferencia). Después se trazaron puntos sobre la circunferencia para poder situar a dos de ellos a una distancia diametralmente opuesta y predecir la distancia entre dichos puntos.

> Tu casa también se encuentra en el límite de recepción de tu estación de favorita y a la vez a la distancia máxima de la casa de tus padres. ¿Cuál sería la distancia entre ambas casas? 1.~~69~~ cm 2.98 cm

Con esta parte se *explica* la relación en una circunferencia entre la medida del diámetro y la suma de las medidas de dos radios.

> ¿Existe alguna relación con respecto a sus medidas entre el segmento AB y la suma de los segmentos AX y BX? si que esta en la

En la segunda hoja de trabajo se inició la *libre orientación* con la localización de un punto E (la casa de la novia) que se encuentre a cierta distancia del punto B (mi casa) cumpliendo con las condiciones de distancia en ambas casas y a la vez se encontrara en el límite de distancia donde se escucha la estación de radio.

> Marca con **punto en intersección** las posibles posiciones de la casa de tu novia(o). Recuerda que debe estar a 15km de la casa de tus padres y 25km de tu casa.

La hoja de trabajo concluye con la construcción de un triángulo y la prueba de la permanencia del triángulo cuando las dimensiones se modifican.

> Une la posición (E) con tu casa (B) y la de tus padres(A).
>
> ¿Al unir las posiciones A, B y E se formó un triángulo? __

> En tu modelo, arrastra poco a poco la circunferencia que representa la distancia de tu casa a la casa de tu novia(o) para que su radio disminuya hasta 19km.

En la última hoja de trabajo se *integra* los contenidos y se establecen inferencias en relación a dadas tres medidas de segmentos y la posibilidad de poder construir con ellas un triángulo.

- [ ] Explica por que en algunos casos NO se pudo formar el triángulo: por que los dos circulos no chocan.
- [ ] ¿Cuál es la condición para que las distancias entre las tres casas puedan forman un triángulo? que mitad 15 cm
- [ ] Dadas las medias, describe cuándo no se puede trazar un triángulo: cuando los dos triangulos no se

Actividad B "El Perro Y El Jardín"

En esta actividad se pretendía la construcción del circuncentro en un triángulo rectángulo y en general del circuncentro de un triángulo cualquiera, asumiendo que los alumnos habían adquirido los contenidos de la actividad previa y conceptos tales como línea horizontal y ángulo recto. La actividad también fue dividida en tres hojas de trabajo, de forma tal que los alumnos fueran alcanzando el contenido por medio de pequeños avances.

En la primera hoja de trabajo se da la *información* por medio del planteamiento del problema donde era necesario establecer el punto donde sujetar las correas de tres perros de tal forma que equidisten de los vértices del patio

EL perro y el jardín

Un matemático famoso decidió irse de vacaciones y dejar a su perro cuidando la casa. El perro solo puede estar en el jardín, el cual ¡extrañamente es de forma de un triángulo rectángulo!. Como no desea dejarlo suelto, necesita encontrar un punto [X] dónde sujetar la correa de forma que el perro pueda llegar a las tres esquinas, pero a la vez usar la menor cantidad de correa.

Se inició la *orientación dirigida* del trabajo por medio del trazado de la figura geométrica que represente al problema planteado.

- Representa el patio (un triángulo cualquiera con un lado horizontal)
- Representa al lugar (X) donde sujetar al perro (dentro del patio).
- Mide los ángulos del triángulo.
- Un triángulo rectángulo debe tener un ángulo de 90°. Arrastra uno de los extremos del lado horizontal para que un ángulo mida 90.00°.

Con esta parte se solicita la *explicación* para obtener la medida de la correa (la distancia mayor) y se pide inferir si es posible encontrar una mejor posición.

- Mide las distancias de los segmentos AX, BX y CX. Mueve las distancias a un lado de la pantalla y anota en cada medida el segmento al que corresponden.
  - ¿Cuáles son las distancias?

AX = 2.58cm	BX = 2.40 cm	CX = 1.76cm

  - Tomando en cuenta que la medida de la correa debe ser suficiente para que el perro llegue del lugar donde esta sujetado a cualesquiera de los tres vértices del patio, ¿cuál es la medida que debe tener la correa del perro? ______________________
  - ¿Podría mover el punto X y obtener una posición donde la correa que se necesita sea de menor longitud y continúe siendo suficiente para llegar a cualesquiera de los vértices del patio? Si

Al final de la primera hoja se inició la *libre orientación* por medio de la localización de la posición ideal donde las correas de los perros sean iguales (punto equidistante de los vértices del triángulo).

- **Busca la mejor posición donde las distancias del punto X a los vértices sean iguales.**
  - **Completa el cuadro.**

	AX	BX	CX	Medida de la correa
Longitud de la correa	1. 68cm	1.71cm	1.68cm	

En la segunda hoja de trabajo se reinicia la explicación al plantear una forma más “exacta” para encontrar el punto en cuestión.

- Otra forma de inscribir el triángulo rectángulo en la circunferencia, traza su mediatriz (recta perpendicular que pasa por el punto medio de un segmento).
  - ☐ ¿Se cruzaron las 3 rectas? Si
- El punto donde se cruzan las tres mediatrices se llama "circuncentro". Etiquétalo con **O**.
  - ☐ Sí el perro es sujetado en **O** ¿usará la misma cantidad de correa para llegar a las tres esquinas del patio? Si ¿Por qué? porque el punto esta en la misma posición

Como parte de la *libre orientación*, en la tercer hoja de trabajo se experimentó con la modificación de las medidas de los lados de triángulo para probar con triángulos acutángulos y obtusángulos.

patio sea de forma de un triángulo acutángulo? en el centro

⇨ Modifica tu diseño y prueba la existencia de dicho punto si el patio cambia su forma a un triángulo acutángulo.

- ☐ ¿Se cumplió la posición del punto que anticipaste? ______
- ☐ Si el patio es de forma de un triángulo obtusángulo, ¿dónde estaría el punto en el cual se sujetará al perro? ______

⇨ Modifica tu diseño y prueba la existencia de dicho punto si el patio fuera de forma de un triángulo obtusángulo.

- ☐ ¿En la vida real se podría sujetar al perro en dicha posición? ______
- ☐ Cuando el triángulo es rectángulo, el circuncentro se encuentra en el punto medio del lado más largo. ¿Esto se cumple cuando el triángulo no tiene ángulo de 90º? ___

Al final se integran los conocimientos concluyendo con la equidistancia y el concepto de circuncentro de un triángulo.

- ☐ Cuando el triángulo es rectángulo, el circuncentro se encuentra en el punto medio del lado más largo. ¿Esto se cumple cuando el triángulo no tiene ángulo de 90º? ___
- ☐ ¿Qué recta ayudó a encontrar la posición donde sujetar al perro? ______
- ☐ La circunferencia trazada desde el circuncentro con radio en uno de los vértices ¿siempre pasa por los tres vértices del patio? ______
- ☐ En un triángulo inscrito en una circunferencia, ¿la distancia del circuncentro a cada uno de los vértices es la misma (es decir, el circuncentro equidista de los vértices)?

______

Guarda tu archivo

Actividad C "Los Perros"

En esta actividad se pretendía la construcción de triángulos rectángulos circunscritos y deducir la relación en las medidas de los ángulos central e inscrito asumiendo que los alumnos habían adquirido los contenidos de la actividad previa y conceptos tales como semicircunferencia y cuerda. La actividad también fue dividida en tres hojas de trabajo, de forma tal que los alumnos fueran alcanzando el contenido por medio de pequeños avances.

En la primera hoja de trabajo se da la *información* por medio del planteamiento del problema donde era necesario establecer el punto donde colocar el recipiente de tres perros de tal forma que equidisten de los vértices del patio.

LOS PERROS

¡Recuerdas al matemático! Resulta que su esposa decidió comprar dos perros más para cuidar la casa. Ella quiere que se sujete a cada uno de los tres perros llamados Bongo (B), Mini (M) y Pinky (P) en los vértices del patio (el cual es de forma de un triángulo rectángulo). Ella le aclaró al científico que la correa de cada perro debe ser de la misma medida y lo suficientemente larga para que llegue al lugar donde colocará el único recipiente para la comida (X).

Se inició la *orientación dirigida* del trabajo por medio del trazado de la figura geométrica que represente al problema planteado, en este caso de una circunferencia, una recta que pase por el centro y tres puntos sobre la circunferencia.

- Traza una circunferencia.
- Etiqueta el centro (X) el cual representa al recipiente de la comida.
- Posiciona a Pinky (P) con **punto sobre la circunferencia**. Etiqueta su posición.
- Traza una recta que pase por el centro de la circunferencia. La recta divide a la circunferencia en dos **semicircunferencias**.
- Coloca á Mini (M) y Bongo (B) en cada **punto de las intersecciones** de la circunferencia y la recta.

Con esta parte se guía la *explicación* para obtener la medida de la correa de uno de los perros y de ahí deducir la de los otros dos. También se pide inferir si es posible encontrar una mejor posición.

- Mide la distancia XB. Etiqueta la distancia y colócala en uno de los extremos.
  - ☐ ¿Cuál es la medida de la correa de Bongo? 1.48
  - ☐ Sin medir las correas de Pinky (XP) y Mini (XM), ¿Cuánto miden sus correas? 1.48
  - ☐ ¿Por qué? porque es la misma distancia.

Al final de la primera hoja se inició la *libre orientación* por medio del movimiento de la posición de uno de los perros hasta concluir con la conservación del triángulo rectángulo.

☐ Completa el cuadro.

Ángulo en Movimiento (Posición de Pinky)	Triángulo BP_1M	Triángulo BP_2M	Triángulo BP_3M	Triángulo BP_4M	Triángulo BP_5M
Medida del ángulo en movimiento	90°	90°	90°	90°	90°
Tipo de triángulo según la medida del ángulo en movimiento	rectángulo	rectángulo	rectángulo	rectángulo	rectángulo

En la segunda hoja se retoma la explicación para establecer los conceptos de ángulo inscrito y central.

- El ángulo cuyo vértice esta ocupado por Pinky es un **ángulo inscrito** formado por dos **cuerdas**. Mide el ángulo MPB formado por los segmentos MP y PB.
  - ☐ ¿Cuánto mide el ángulo? 82.71°
- El ángulo formado por las posiciones de Mini y Bongo con vértice en X es un **ángulo central** por estar formado por **dos radios**. Mide la abertura formada por los segmentos MX y XB
  - ☐ ¿Cuánto mide la abertura del ángulo MXB? 165.42°

Con lo anterior se retomó la *libre orientación* por medio del movimiento de la posición de uno de los perros hasta concluir con la conservación de la relación entre el ángulo central y los diferentes ángulos inscritos derivados de él.

☐ Completa el cuadro.

Ángulo en Movimiento (Posición de Pinky)	Triángulo BP_1M	Triángulo BP_2M	Triángulo BP_3M	Triángulo BP_4M	Triángulo BP_5M
Medida del ángulo inscrito en movimiento	82.71°	82.71°	82.71°	82.71°	82.71°
Medida del ángulo central MXB	165.42°	165.42°	165.42°	165.42°	165.42°
¿Se mantuvo la relación entre las medidas de los ángulos?	sí	sí	sí	sí	si

☐ ¿Qué pasó con la medida del ángulo cuyo vértice está ocupado por Pinky al mover la posición de su vértice? se mantuvo igual.

En la tercer hoja se concluye con la *integración* del contenido donde se establece la igualdad de las medidas de todos los ángulos inscritos que comparten un mismo ángulo central.

☐ Si observas los resultados anteriores, la medida de un **ángulo inscrito** en una circunferencia es igual a la **mitad** de su respectivo **ángulo central**. ¿Cómo son las medidas de todos los ángulos inscritos cuyo ángulo central es el mismo? ~~es al a~~ de la misma medida.

Actividad D “El Perro Y La Fábrica”

En esta actividad se pretendía encontrar la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo y la construcción de un triángulo circunscrito dados los ángulos; asumiendo que los alumnos habían adquirido los contenidos de la actividad previa. La actividad también fue dividida en dos hojas de trabajo, de forma tal que los alumnos fueran alcanzando el contenido por medio de pequeños avances.

En la primera hoja de trabajo se da la *información* por medio del planteamiento del problema donde era necesario establecer el recorrido del perro vigilante a todo el perímetro de la fábrica.

EL PERRO Y LA FABRICA

En una fábrica construida en un terreno triangular (ABC) hay una puerta ubicada en cada uno de sus vértices. Un perro cuida el terreno. Cuando hay un ruido el perro recorre todo el perímetro del terreno en búsqueda de algo anormal.

Se inició la *orientación dirigida* del trabajo por medio del trazado de la figura geométrica que represente al problema planteado, en este caso de una circunferencia y un triángulo inscrito, así como los ángulos centrales.

- Traza una circunferencia y un triángulo inscrito que represente al patio.
- Etiqueta las 3 puertas del terreno y el centro del patio(X).
- Traza los ángulos centrales cuyos lados comprendan los arcos AB, BC Y CA.
- Mide el ángulo central AXB. Mueve la medida a un extremo de la pantalla y etiquétala.

Con esta parte se guía la *explicación* para obtener la suma de los ángulos internos de un triángulo.

- Mide los ángulos centrales cuyos lados comprendan los arcos BC y CA. Mueve las medidas a un extremo de la pantalla y etiquétala.
- Mide los 3 ángulos inscritos del patio. Mueve las medidas a un extremo de la pantalla y etiquétala.
- Suma las medidas de los tres **ángulos centrales.**
- Suma las medidas de los tres **ángulos inscritos**.

☐ Completa el cuadro

							Suma de las 3 medidas
Ángulo	AXB	+	BXC	+	CXA		
Central	82.10	+	140 . 30	+	137.60	=	360
Ángulo	ACB	+	BAC	+	CBA		
Inscrito	41.5	+	70.15	+	68.30	=	180

☐ ¿Cuál es la suma de los ángulos internos de la fábrica? ~~64.7~~ 180 .

Con lo anterior se retomó la *libre orientación* por medio del movimiento de la posición de uno de los vértices hasta concluir con la conservación de la suma de de los ángulos inscritos en un triángulo es de 180° en cualquier caso.

- Mueve uno a uno, los vértices de la fábrica.

☐ ¿La suma de los ángulos internos de la fábrica cambió? no

En la segunda hoja se concluye con la *integración* del contenido donde se establece la constante en la suma de las medidas de los ángulos inscritos de todo triángulo.

- [ ] Se quiere construir las paredes de la fabrica de forma triangular donde los ángulos formados por las paredes sean de 80º, 60º y 40º. ¿La suma de sus ángulos internos del triángulo es de 180º? si, porque cualquier angulo interno suma da 180°
- [ ] ¿Se puede construir la fábrica con dichos ángulos? si

Por último se prueba la constante establecida y se predice si con cualquier trío de medidas se pude construir un triángulo.

- [ ] ¿Se pudo construir la fábrica con los ángulos dados? Si
- [ ] ¿Se podrá construir una fábrica de forma triangular cuyos ángulos internos sean 40º, 50º y 60º? no
- [ ] ¿Por qué? porque la suma no da 180°
- [ ] Sí los ángulos centrales miden 40º, 50º y 60º, ¿cuánto miden los ángulos inscritos correspondientes? 20°, 25° y 30°

Actividad E "El Perro Vigía"

En esta actividad se pretendía la suma de los ángulos internos de un cuadrilátero circunscrito y la suma de los ángulos internos de un polígono circunscrito, asumiendo que los alumnos habían adquirido los contenidos de la actividad previa. La actividad también fue dividida en tres hojas de trabajo, de forma tal que los alumnos fueran alcanzando el contenido por medio de pequeños avances.

En la primera hoja de trabajo se da la *información* por medio del planteamiento del problema donde era necesario establecer el recorrido del perro vigilante a tres de cuatro puntos de vigilancia estableciendo recorridos triangulares.

el PERRO vigía

En un terreno circular existen 4 puntos de vigilancia ubicados en sus linderos. Un perro debe hacer recorridos que consisten en salir del punto A, visitar 2 puntos de vigilancia y regresar al punto de partida. Los recorridos son: ABC, ACD.

Se inició la *orientación dirigida* del trabajo por medio del trazado de la figura geométrica que represente al problema planteado, en este caso de una circunferencia, cuatro puntos sobre ella y la unión con segmentos de tres de ellos y un triángulo inscrito, así como los ángulos centrales

- **Traza la circunferencia que represente al terreno.**
- **Marca los puntos de vigilancia como "puntos sobre la circunferencia". Etiquétalos en orden alfabético en sentido de las manecillas del reloj.**
- **Traza los segmentos que representen el recorrido ABC.**

Con esta parte se guía la *explicación* para obtener la suma de los ángulos internos de dos triángulos colaterales con la intención de inferir la suma de los ángulos internos de un cuadrilátero.

- ☐ **Con el recorrido ABC, ¿qué figura se formó?** un triángulo
- ☐ **¿Cuánto suman los ángulos internos de esa figura?** 180°
- **Mide los ángulos internos de la figura ABC. Coloca las medidas a un lado de la pantalla.**
- **Suma los ángulos internos de ABC.**
- **Traza los segmentos faltantes que representen el recorrido ACD.**
- ☐ **¿Cuánto suman los ángulos internos del triángulo ACD?** 180°
- **Mide los ángulos internos de la figura ACD. Coloca las medidas a un lado de la pantalla.**
- **Suma los ángulos interiores del triángulo ACD.**
- **Cambia el segmento AC a línea punteada.**
- ☐ **Al unir los dos triángulos se forma un cuadrilátero, ¿cuántos ángulos internos tiene un cuadrilátero?** 4
- ☐ **El dueño del terreno asegura que la suma de los ángulos internos de la figura es de 360º, ¿la aseveración del dueño es correcta o incorrecta?** ~~in~~correcta
- ☐ **Explica como llegaste a tu conclusión:** porque el cuadrilátero esta formado por dos triángulos.

Se inició la fase de *libre orientación* por medio del arrastre de los vértices del cuadrilátero y la inferencia de la constante en la suma de los ángulos internos de un cuadrilátero.

- Arrastra el punto B hasta formar un cuadrilátero distinto al inicial.
  - ☐ El dueño asegura que a pesar de haber modificado la forma del terreno de cuatro lados, la suma de sus ángulos internos sigue siendo de 360º. ¿Es correcto o incorrecto lo que asegura el dueño? correcto
  - ☐ ¿Por qué? porque siguen siendo 2 triángulos
- Arrastra el punto C y forma un nuevo cuadrilátero.
  - ☐ ¿En esta nueva forma del cuadrilátero, el dueño puede asegurar que la suma de sus ángulos internos es de 360º? correcto
  - ☐ ¿Por qué? porque siguen siendo 2 triángulos

En la segunda hoja se concluye con la *integración* del contenido donde se comprueba la constante en la suma de las medidas de los ángulos inscritos de todo cuadrilátero con el arrastre de los vértices para que cumpliera con las condiciones establecidas.

- Mueve los puntos necesarios para cumplir con las condiciones especificadas en el cuadro anterior.
  - ☐ Completa el cuadro.

	CONDICIÓN					
☐ ABCD	2 lados consecutivos iguales	2 lados no consecutivos iguales	2 pares de lados no consecutivos iguales	2 pares de lados consecutivos iguales	3 lados iguales	4 lados iguales
No. de Triángulos resultantes	2	2	2	2	2	2
Suma de los ángulos interiores del cuadrilátero	~~30~~ 360°	360°	360°	360°	360°	360°

  - ☐ ¿Podrías asegurar que la suma de los ángulos internos de un cuadrilátero cualquiera es de 360º? sí
  - ☐ Explica por que: porque son dos triángulos y sus ángulos siempre miden 180°.

En la tercer hoja de trabajo se amplia la *integración* del contenido a la suma de los ángulos internos de polígono de más de cuatro lados y se bosqueja una regla para predecir la suma sin necesidad de triangular.

☐ **Analiza y completa el cuadro:**

Puntos de vigilancia	3	4	5	6	7	8	9
Triángulos resultantes	1	2	3	4	5	6	7
Suma de los ángulos interiores de todo triángulo (Multiplica por 180º)	x 180º	x 180º	x 180º	x 180º	x 180º	x 180º	x 180º
Suma de los ángulos internos del polígono	180°	360°	540°	720°	900	1080	1260°

☐ Analiza el cuadro superior, antes de descomponer un polígono cualquiera en triángulos sucesivos con un vértice común, ¿cómo sabrías el número de triángulos resultantes? dependiendo de los vértices va ser el número de triangulos resultantes quitandole 2 a el # de vértices

☐ Sabiendo la forma de anticipar el número de triángulos resultantes al descomponer un polígono cualquiera, explica la forma en que obtienes el resultado de la suma de los ángulos internos de dicho polígono: quitandole dos al # de vertices y después multiplicandolo x 180°

Actividad F "El Perro Robot"

En esta actividad se pretendía encontrar el circuncentro de los cuadriláteros (en los casos que se podía) y la construcción de cuadriláteros circunscritos (dados los ángulos), asumiendo que los alumnos habían adquirido los contenidos de la actividad previa. La actividad también fue dividida en cuatro hojas de trabajo, de forma tal que los alumnos fueran alcanzando el contenido por medio de pequeños avances.

En la primera hoja de trabajo se da la *información* por medio del planteamiento del problema donde era necesario establecer el recorrido del perro vigilante a cuatro puntos de vigilancia estableciendo recorridos donde los ángulos sean de 90°.

el PERRO ROBOT

Siglo XXII, los robots sustituyen a los humanos en el mercado de trabajo. En una isla artificial de forma circular hay 4 puntos de vigilancia ubicados en los límites de la misma. Por dichos puntos un perro – robot debe hacer recorridos pasando por los cuatro puntos en el sentido de "las manecillas del reloj", sin embargo al perro – robot se le trasmitió un virus vía internet, por lo que solo puede girar en 90º.

–

Se inició la *orientación dirigida* del trabajo por medio del trazado de la figura geométrica que represente al problema planteado, en este caso de una circunferencia y el diámetro que la divide.

- Traza la isla y un punto de vigilancia **sobre sus límites**.
- Etiqueta dicho punto de vigilancia (A) y el centro de la circunferencia (X).
- Traza una **recta** que pase por los puntos A y X. "A" es un **punto de intersección** de la recta y la circunferencia.
- Etiqueta al otro **punto de intersección** (C) de la recta y la circunferencia.
  - Cuando un segmento toca dos puntos de la circunferencia y pasa por el centro se llama **cuerda mayor** o **diámetro**, ¿el segmento AC es un diámetro? Si

Con esta parte se guía la *explicación* para obtener la medida de los ángulos inscritos con base en la medida de su respectivo ángulo central.

- Une los segmentos AB y BC.
  - ¿Cuánto mide el ángulo ABC? 90°
  - ¿Por qué? Por que es la mitad del ángulo central
  - ¿El ángulo ABC cumple con la condición necesaria para que el perro – robot pueda pasar por el punto B y girar? sí
- Traza una **recta** que pase por los puntos B y X. "B" es punto de intersección de la nueva recta y la circunferencia.
- Etiqueta al otro **punto de intersección** (D) de la recta y la circunferencia.
- Traza los segmentos DC y DA.
  - ¿Cuánto mide el ángulo ADC? 90°
  - ¿Por qué? Porque es la mitad del ángulo central
  - ¿El ángulo ADC cumple con la condición necesaria para que el perro – robot pueda pasar por el punto D y girar? sí

En la segunda hoja de trabajo se establece la suma de los ángulos adyacentes y opuestos en el cuadrilátero.

- ¿Cuál es el resultado de la suma de 2 **ángulos adyacentes**? 180°
- ¿Y cuál es el resultado de la suma de los 2 **ángulos opuestos**? 180°
- Cuando un cuadrilátero tiene **4 ángulos de 90º** se llama **rectángulo**, ¿el cuadrilátero ABCD es un rectángulo? sí

Se inició la fase de *libre orientación* por medio del arrastre de los vértices del cuadrilátero para que se cumpla la condición de igualdad en las distancias entre dos vértices consecutivos.

- Un nuevo virus ha afectado al perro – robot. Ahora solo puede recorrer **distancias iguales**. Mueve los puntos de vigilancia para que se cumpla con la nueva condición.
  - ¿El nuevo **cuadrilátero** ABCD sigue siendo rectángulo? no
  - ¿Los 4 ángulos siguen midiendo 90º? sí
  - ¿Qué nombre recibe un **rectángulo cuyos 4 lados son iguales**? cuadrado
  - Si en todo rectángulo los ángulos adyacentes miden 180º ¿esto se cumple con el cuadrado? sí
  - ¿La suma de los ángulos opuestos es de 180º? ~~no~~ sí

La hoja de trabajo termina con la *integración* de lo trabajado al concluir con las condicionantes que debe cumplir un cuadrilátero inscrito en una circunferencia.

- Describe las tres características de los cuadriláteros inscritos en una circunferencia, según...
  - a) Las medidas de sus lados: iguales los cuatro opuestos
  - b) La suma de sus ángulos adyacentes: 180°
  - c) La suma de sus ángulos opuestos: 180°

En la tercer hoja de trabajo se retoma la *orientación dirigida* pero esta vez primero se traza el cuadrilátero que debe ser inscrito en una circunferencia.

- En una zona de la ciudad se desea un campo de fuerza circular que proteja el recorrido de un perro – robot por 4 de puntos de vigilancia. Traza 4 puntos de vigilancia.
- Traza el recorrido que debe hacer el perro – robot.
- Etiqueta (A, B, C, D) los vértices del cuadrilátero formado por el recorrido del perro siguiendo el sentido de las "manecillas del reloj".
- Mide los 4 ángulos internos del cuadrilátero. Muévelos a un lado de la pantalla.

Con esta parte se guía la *explicación* para comprobar la utilidad de la mediatriz para encontrar el circuncentro.

- Un científico menciona que si fuera un triángulo se podría encontrar el punto que **equidiste** de los vértices trazando la **mediatriz** a cada lado. Prueba su es posible encontrar un punto único donde se crucen las mediatrices del cuadrilátero.
  - ¿El punto donde se cruzan las mediatrices es único? no
- Prueba si se puede establecer el campo de fuerza usando a cada uno de los puntos donde se cruzan las mediatrices como centro del campo de fuerza.
  - ¿Se pudo establecer dicho campo de fuerza con la condición establecida de pasar por los cuatro puntos de vigilancia? sí
  - Consulta los resultados de tus compañeros. ¿Alguno logró encontrar un punto único que sea de centro del campo de fuerza? sí

Se continúa con la *libre orientación* al realizar los arrastres necesarios para comprobar la existencia de un punto único donde se cruzan la mediatrices.

- Arrastra los puntos de vigilancia y busca si puedes lograr que solo exista un punto único (cruce de mediatrices) que sirva como centro del campo de fuerza.
  - ☐ ¿Encontraste un punto único? sí
  - ☐ Nuevamente revisa los resultados de tus compañeros, ¿alguno de ellos encontró un punto único? sí
- Si no has encontrado un punto único, ¡inténtalo nuevamente!
  - ☐ ¿El campo de fuerza pasa por los cuatro puntos de vigilancia? ~~[illegible]~~ sí

Se concluye la actividad con la *integración* de la condicionante que permite a un cuadrilátero estar inscrito en una circunferencia.

- ☐ Solo en algunos casos un cuadrilátero se puede inscribir en una circunferencia ¿Cuál será la condición que deben cumplir sus ángulos opuestos? Qe sumen 180°
- ☐ Cuándo el cuadrilátero es un rectángulo o cuadrado, ¿la condición anterior se cumple? sí
- ☐ Explica lo que harías para saber si un cuadrilátero se puede inscribir en una circunferencia: Que sus ángulos opuestos den 180°

A continuación de transcriben las seis actividades experimentales divididas en hojas de trabajo.

HOJA DE TRABAJO # A1	FECHA: / / /	
NOMBRE:	GRUPO:	N.L.:
Nombre del compañero de equipo:		

RADIODIFUSORAS

Tu estación favorita [posición X] tiene una influencia es un área circular con radio de 15km. La casa de tus padres se encuentra en el límite máximo de recepción de

- Traza una circunferencia con centro en la estación (X)
- Mide la distancia de **X** a la circunferencia.
  - ¿Cómo representarías en tu pantalla los 15km? ___________________
- Agranda o reduce la circunferencia hasta que represente 15km.
  - ¿Cuántas posiciones podría tener la casa de tus padres (A)? ___________________
- Traza 4 puntos que representen diferentes posiciones que puede tener la casa de tus padres [etiquétalas con A, B, C, D].
- Tomando a la posición A como la casa de tus padres, une con segmentos ésta posición con cada una de las posiciones B, C, D y encuentra las distancias.
  - ¿Cuáles son las distancias? Recuerda que representan distancia en kilómetros.

    AB = ____________ AC = ____________ AD = ____________
  - ¿Qué posición esta más alejada? ______________________________
- Borra las posiciones C y D.
- Traza los segmentos AX y BX.
  - Tu casa también se encuentra en el límite de recepción de tu estación de favorita y a la vez a la distancia máxima de la casa de tus padres. ¿Cuál sería la distancia entre ambas casas? ______________________

- Moviendo el punto B, encuentra la posición que debe tener tu casa.
  - ¿Cuál es la distancia entre el punto A y el B? ____________________
  - ¿Existe alguna relación con respecto a sus medidas entre el segmento AB y la suma de los segmentos AX y BX? ________________________

    ____

    ____

Guarda tu archivo.

HOJA DE TRABAJO # A2	FECHA: / / /	
NOMBRE:	GRUPO:	N.L.:
Nombre del compañero de equipo:		

Recupera el archivo anterior.

- Tu novia(o) vive a 10km de la casa de tus padres. Traza una circunferencia con centro en A.
- Ajusta el radio de la circunferencia para que represente 10km.
  - ¿Cuántas posiciones podría tener la casa de tu novia(o)? __________
  - ¿Por qué? ____
- De tu casa a la casa de tu novia(o) hay 25km. Traza una circunferencia con centro en B y ajusta su radio para que represente 25km.
- Marca con **punto en intersección** las posibles posiciones de la casa de tu novia(o). Recuerda que debe estar a 15km de la casa de tus padres y 25km de tu casa.
  - ¿Cuántas posiciones puede tener la casa de tu novia(o)? ___________
- Etiqueta con “E” una de las posiciones de la casa de tu novia(o).
- Une la posición (E) con tu casa (B) y la de tus padres(A).
  - ¿Al unir las posiciones A, B y E se formó un triángulo? _____________
- En tu modelo, arrastra poco a poco la circunferencia que representa la distancia de tu casa a la casa de tu novia(o) para que su radio disminuya hasta 19km.
  - ¿Se conservó el triángulo durante todo el movimiento de la circunferencia? ___________
  - ¿En que momento desaparece la casa de la novia? _______________
  - ¿Cuál es la distancia mínima para que exista la casa de la novia? _______________________

- ¿Qué le pasa al triángulo cuando la casa de tu novia(o) tiene una única posición?

  ____

- Reajusta la distancia de tu casa a la casa de tu novia a 25km.
- En tu modelo, arrastra poco a poco la circunferencia que representa la distancia de la casa de tus padres a la casa de tu novia(o) para que su radio disminuya hasta 4km.
  - ¿En que momento desaparece la casa de la novia? ________________
  - Explica por que y cuando debe desaparecer el triángulo: ____________

    ____

- Reajusta la distancia de la casa de tu novia a la casa de tus padres a 10km
- Guarda tu archivo.

HOJA DE TRABAJO # A3	FECHA: / / /	
NOMBRE:	GRUPO:	N.L.:
Nombre del compañero de equipo:		

Recupera el archivo anterior.

- Observa el cuadro de abajo y anticipa en que casos se podría formar un triángulo.

No. De caso	Distancia entre tu casa y la de tus padres. (BA)	Distancia entre tu casa y la de tu novia (BE)	Distancia entre la casa de tus padres con la casa de tu novia (AE)	¿Se podría formar el triángulo?	¿Se formó el triángulo?
I	30km	15km	15km		
II	30km	15km	28km		
III	30km	8km	28km		
IV	30km	8km	16km		
V	30km	16km	16km		
VI	30km	30km	30km		

- Reajusta las distancias en tu modelo según el cuadro de arriba y revisa tus respuestas anteriores. Recuerda que la distancia entre tu casa (B) y la de tus padres (A) se mantiene constante
- ¿En cuáles casos se formó un triángulo?

  ____

- ¿En cuáles casos NO se formó un triángulo?

  ____

- Explica por que en algunos casos NO se pudo formar el triángulo:

  ____

- ¿Cuál es la condición para que dadas las distancias entre las tres casas se pueda forman un triángulo? _________________________

  ____

Dadas las medias describe de forma detallada, cuándo no se puede trazar un triángulo:

____

Guarda tu archivo.

ANOTACIONES

- Con tu compañero de equipo describe lo que aprendiste con esta actividad, con respecto a:
  - Como se traza un triángulo (pasos a seguir)
  - La figura geométrica auxiliar en el trazado
  - Dadas tres dimensiones cualesquiera, cuando se puede trazar un triángulo.
  - Otros hallazgos.
- Traza en tu hoja de trabajo un modelo donde aparezcan las tres casas y la figura formada por la unión de ellas. Distancias:

De tu casa a la de tu novia	25km
De la casa de tu novia a la de tus padres	10km
De tu casa a la de tus padres	30km

ACTIVIDAD OPCIONAL

- En tu calculadora, traza una figura geométrica con las siguientes medidas: AB = 10, AC=15, BC=20
- Aleja o acerca uno de los puntos a otro.
- Describe lo que sucede con la figura con dichas modificaciones.

HOJA DE TRABAJO # B1	FECHA: / / /	
NOMBRE:	GRUPO:	N.L.:
Nombre del compañero de equipo:		

EL PERRO Y EL JARDÍN

Un matemático famoso decidió irse de vacaciones y dejar a su perro cuidando la casa. El perro sólo puede estar en el jardín, el cual ¡extrañamente es de forma de un triángulo rectángulo! Como no desea dejarlo suelto, necesita encontrar un punto [X] dónde sujetar la correa de forma que el perro pueda llegar a las tres esquinas, pero a la vez usar la menor cantidad de correa.

- Representa el patio (un triángulo con un lado horizontal)
- Representa al lugar (X) donde sujetar al perro (dentro del patio).
- Mide los ángulos del triángulo.
- Un triángulo rectángulo debe tener un ángulo de 90º. Arrastra uno de los extremos del lado horizontal para que un ángulo mida 90.00º.
- Etiqueta los vértices del triángulo con las letras A, B y C (éste en el ángulo de 90º).
- Une el punto X con cada uno de los vértices.
- Mide las distancias de los segmentos AX, BX y CX. Mueve las distancias a un lado de la pantalla y anota en cada medida el segmento al que corresponden.
    - ¿Cuáles son las distancias?

AX =	BX =	CX =

    - Tomando en cuenta que la medida de la correa debe ser suficiente para que el perro llegue del lugar donde esta sujetado a cualesquiera de los tres vértices del patio, ¿cuál es la medida que debe tener la correa del perro? ______________________

¿Podría mover el punto X para obtener una posición donde la correa que se necesita sea de menor longitud y continúe siendo suficiente para llegar a cualquiera de los vértices del patio? _______________

Mueve varias veces el punto X.

Anota en cada caso las distancias de cada una de las posiciones.

	AX	BX	CX	Medida de la correa
Posición X_1				
Posición X_2				
Posición X_3				

¿En cuál de las tres posiciones de X la correa es de menor longitud? _______________

Busca la mejor posición donde las distancias del punto X a los vértices sean iguales.

Completa el cuadro.

	AX	BX	CX	Medida de la correa
Longitud de la correa				

Guarda tu archivo.

HOJA DE TRABAJO # B2	FECHA: / / /	
NOMBRE:	GRUPO:	N.L.:
Nombre del compañero de equipo:		

Recupera el archivo anterior.

- Ya que encontraste la menor medida de la correa con la que el perro llega a los tres vértices del patio, ¿dónde se encuentra ubicado el punto X? ___________________
- Supongamos que no existen las paredes y el perro está sujeto pero quiere escapar, por lo que camina con la correa totalmente estirada. Con el desplazamiento del perro, ¿qué figura geométrica se formaría? _________________________________

⇨ Sobre tu diseño traza la figura que propusiste como respuesta.

- ¿La figura toca los tres vértices del triángulo? ____________________

- Mueve uno de los vértices del triángulo rectángulo.
  - ¿La circunferencia sigue tocando los tres vértices? ________________
- Regresa el punto a la posición que tenía antes de mover el vértice.
  - ¿El punto X se encuentra exactamente a la misma distancia de los vértices A y B (es decir, el punto X es punto medio del segmento AB o se encuentra cerca de dicha posición? __________________________
- Oculta el punto X y los segmentos AX, BX, CX.
- Otra forma de inscribir el triángulo rectángulo en la circunferencia es mediante el trazado de su mediatriz (recta perpendicular que pasa por el punto medio de un segmento).
  - ¿Se cruzaron las 3 rectas? ___________________________________
- El punto donde se cruzan las tres mediatrices se llama “circuncentro”. Etiquétalo con **O**.

- Sí el perro es sujetado en **O** ¿usará la misma cantidad de correa para llegar a las tres esquinas del patio? ____________ ¿Por qué? ______________________________

- Traza una circunferencia con centro en **O** y que pase por uno de los vértices del triángulo rectángulo.
- Mide la distancia del punto **O** a cada uno de los vértices
  - Anota las distancias.

    AO = __________ BO = __________ CO= ___________

- Guarda tu archivo.

HOJA DE TRABAJO # B3	FECHA: / / /	
NOMBRE:	GRUPO:	N.L.:
Nombre del compañero de equipo:		

Recupera el archivo anterior.

- ¿Cuál será la ubicación del punto donde se sujeta la correa del perro cuando el patio sea de forma de un triángulo acutángulo? ______________________________

⇨ Modifica tu diseño y prueba la existencia de dicho punto si el patio cambia su forma a un triángulo acutángulo.

- ¿Se cumplió la posición del punto que anticipaste? ________________
- Si el patio es de forma de un triángulo obtusángulo, ¿dónde estaría el punto en el cual se sujetará al perro? ___________________________

⇨ Modifica tu diseño y prueba la existencia de dicho punto sí el patio fuera de forma de un triángulo obtusángulo.

- ¿En la vida real se podría sujetar al perro en dicha posición? __________________
- Cuando el triángulo es rectángulo, el circuncentro se encuentra en el punto medio del lado más largo. ¿Esto se cumple cuando el triángulo no tiene ángulo de 90º? _____________
- ¿Qué recta ayudó a encontrar la posición donde sujetar al perro? _______________
- La circunferencia trazada desde el circuncentro con radio en uno de los vértices ¿siempre pasa por los tres vértices del patio? _____________
- En un triángulo inscrito en una circunferencia, ¿la distancia del circuncentro a cada uno de los vértices es la misma (es decir, el circuncentro equidista de los vértices)? _________________________

Guarda tu archivo.

ANOTACIONES

- Con tu compañero de equipo describe lo que aprendieron con esta actividad sobre:
  - El punto notable que encontraste y la forma de encontrarlo.
  - La figura geométrica y la recta que te auxiliaron en la búsqueda.
  - Las posiciones del punto según el tipo de triángulo
  - Otros hallazgos.
- Traza en tu hoja de trabajo el patio del matemático en las 3 formas trabajadas (triángulos acutángulo, rectángulo y obtusángulo) y muestra los puntos (O) donde sujetar la correa del perro, así como el área que podría vigilar si no hubiera paredes.

ACTIVIDAD OPCIONAL

- Piensa cómo encontrar la posición donde sujetar al perro sí el patio fuera de forma circular.

HOJA DE TRABAJO # C1	FECHA: / / /	
NOMBRE:	GRUPO:	N.L.:
Nombre del compañero de equipo:		

LOS PERROS

¿Recuerdas al matemático? Resulta que su esposa decidió comprar dos perros más para cuidar la casa. Ella quiere que se sujete a cada uno de los tres perros llamados Bongo (B), Mini (M) y Pinky (P) en los vértices del patio (el cual es de forma de un triángulo rectángulo). Ella le aclaró al científico que la correa de cada perro debe ser de la misma medida y lo suficientemente larga para que llegue al lugar donde colocará el único recipiente para la comida (X).

- Traza una circunferencia.
- Etiqueta el centro (X) el cual representa al recipiente de la comida.
- Posiciona a Pinky (P) con **punto sobre la circunferencia**. Etiqueta su posición.
- Traza una recta que pase por el centro de la circunferencia. La recta divide a la circunferencia en dos **semicircunferencias**.
- Coloca a Mini (M) y Bongo (B) en cada **punto de las intersecciones** de la circunferencia y la recta.
- Oculta la recta.
- Mide la distancia XB. Etiqueta la distancia y colócala en uno de los extremos.
  - ¿Cuál es la medida de la correa de Bongo? ______________________
  - Sin medir las correas de Pinky (XP) y Mini (XM), ¿Cuánto miden sus correas? ____
  - ¿Por qué? ____
- Une con segmentos las posiciones PM y PB.
- Mide el ángulo BPM. Etiqueta la medida del ángulo y muévela a uno de los extremos.

- Para terminar de construir el patio traza el segmento MB.
  - ¿El triángulo MPB es un triángulo rectángulo? ____________________
  - ¿Por qué? ____
- Reaparece la recta que dividió a la circunferencia en dos semicircunferencias.
- El patio está inscrito en una semicircunferencia. Mueve varias veces la posición de Pinky (P_1, P_2, P_3,...).

  - Completa el cuadro.

Ángulo en Movimiento (Posición de Pinky)	Triángulo BP_1M	Triángulo BP_2M	Triángulo BP_3M	Triángulo BP_4M	Triángulo BP_5M
Medida del ángulo en movimiento					
Tipo de triángulo según la medida del ángulo en movimiento					

  - ¿El patio se mantuvo inscrito en una semicircunferencia? ____________
  - ¿Qué pasó con la medida del ángulo BOM al mover la posición de su vértice? ____
  - ¿Por qué? ____
  - Cuándo realizaste los movimientos, ¿los tres perros mantuvieron la misma distancia hacia el recipiente de la comida? __________________
  - Entonces, cuando un triángulo está inscrito en una semicircunferencia (como en este caso), ¿qué clase de triángulo se forma? _____________

Guarda tu archivo.

HOJA DE TRABAJO # C2	FECHA: / / /	
NOMBRE:	GRUPO:	N.L.:
Nombre del compañero de equipo:		

<u>Recupera el archivo anterior</u>

- El patio ha sido modificado, ahora se encuentra inscrito en toda la circunferencia. Borra la recta.
- Posiciona a Mini y Pinky como puntos sobre la circunferencia.
- Une los segmentos MB, BP y PM.
- Mide las distancias MX y muévelo a un lado de la pantalla.
  - ¿Las distancias de los perros al recipiente de comida continúan siendo iguales? ______________
  - ¿Por qué? ____
- El ángulo cuyo vértice esta ocupado por Pinky es un **ángulo inscrito** formado por dos **cuerdas**. Mide el ángulo MPB formado por los segmentos MP y PB.
  - ¿Cuánto mide el ángulo? ___________________________________
- El ángulo formado por las posiciones de Mini y Bongo con vértice en X es un **ángulo central** por estar formado por **dos radios**. Mide el ángulo formado por los segmentos MX y XB
  - ¿Cuánto mide el ángulo MXB? ______________________________
  - Observa los ángulos MPB y MXB. ¿Dónde se encuentran ubicados los puntos que comparten ambos ángulos? _________________________
  - ¿Cuál es la relación entre las medidas de los ángulos MPB y MXB? ____
- Mueve varias veces la posición de Pinky.
  - Completa el cuadro donde los puntos P_1, P^2, P^3 P_4 y P_5 representan al punto P en movimiento.

Ángulo en Movimiento (Posición de Pinky)	Triángulo BP_1M	Triángulo BP_2M	Triángulo BP_3M	Triángulo BP_4M	Triángulo BP_5M
Medida del ángulo inscrito en movimiento					
Medida del ángulo central MXB					
¿Se mantuvo la relación entre las medidas de los ángulos?					

¿Qué pasó con la medida del ángulo cuyo vértice está ocupado por Pinky al mover la posición de su vértice? ________________________

Guarda tu archivo.

HOJA DE TRABAJO # C3	FECHA: / / /	
NOMBRE:	GRUPO:	N.L.:
Nombre del compañero de equipo:		

🗁 Recupera el archivo anterior

- Une las posiciones de Bongo y Mini.
- Mueve varias veces la posición de Bongo o Mini.
  - Completa el cuadro dependiendo del movimiento señalado (B_1, B_2, B_3, M_1, M_2)

	Moviendo a Bongo			Moviendo a Mini	
Ángulo en Movimiento	Ángulo B_1PM	Ángulo B_2PM	Ángulo B_3PM	Ángulo BPM_1	Ángulo BPM_2
Medida del ángulo inscrito con vértice en Pinky (MPB)					
Medida del ángulo central MXB					
¿Se mantuvo la relación entre las medidas de los dos ángulos?					

- Si observas los resultados anteriores, la medida de un **ángulo inscrito** en una circunferencia es igual a la **mitad** de su respectivo **ángulo central**. ¿Cómo son las medidas de todos los ángulos inscritos cuyo ángulo central es el mismo? ___________________________________
- Sin realizar movimientos en tu diseño, completa el cuadro.

Medida del ángulo inscrito		100º	120º	
Medida del ángulo central	50º			340º

Comprueba tus resultados anteriores.

Guarda tu archivo.

ANOTACIONES

- Con tu compañero de equipo describe lo que aprendieron con esta actividad sobre:
  - Como construir un triángulo rectángulo inscrito en una circunferencia.
  - Tipo de ángulos dentro de una circunferencia: Central e Inscrito.
  - Relación entre las medidas de tales ángulos.
  - Otros hallazgos.
- Traza en tu hoja de trabajo el patio del matemático y las tres posiciones de los perros cuando el triángulo es rectángulo, acutángulo, y obtusángulo.

ACTIVIDAD OPCIONAL

- En una circunferencia trazada en el piso se desea trazar una figura de cuatros lados cuyos ángulos internos sean de 90º. Utiliza uno de los dos archivos que acabas de guardar para resolver el problema.

HOJA DE TRABAJO # D1	FECHA: / / /	
NOMBRE:	GRUPO:	N.L.:
Nombre del compañero de equipo:		

EL PERRO Y LA FÁBRICA

En una fábrica construida en un terreno triangular (ABC) hay una puerta ubicada en cada uno de sus vértices. Un perro cuida el terreno. Cuando hay un ruido el perro recorre todo el perímetro del terreno en búsqueda de algo anormal.

- Traza una circunferencia y un triángulo inscrito que represente al patio.
- Etiqueta las 3 puertas del terreno y el centro del patio(X).
- Traza los ángulos centrales cuyos lados comprendan los arcos AB, BC Y CA.
- Mide el ángulo central AXB. Mueve la medida a un extremo de la pantalla y etiquétala.
  - ¿Cuántos grados hay en el **ángulo inscrito** formado por los recorridos del perro AC y CB? ________________________________
  - ¿Por qué? ____
- Mide los ángulos centrales cuyos lados comprendan los arcos BC y CA. Mueve las medidas a un extremo de la pantalla y etiquétala.
- Mide los 3 ángulos inscritos del patio. Mueve las medidas a un extremo de la pantalla y etiquétala.
- Suma las medidas de los tres **ángulos centrales.**
- Suma las medidas de los tres **ángulos inscritos**.
  - Completa el cuadro

							Suma de las 3 medidas
Ángulo Central	AXB	+	BXC	+	CXA		
		+		+		=	
Ángulo	ACB	+	BAC	+	CBA		

Inscrito		+		+		=	

- ¿Cuál es la suma de los ángulos internos de la fábrica? _____________

Mueve uno a uno, los vértices de la fábrica.

- ¿La suma de los ángulos internos de la fábrica cambió? _____________
- ¿Cuánto suman los ángulos internos de un triángulo cualquiera? _____

¿Cambiará la suma de los ángulos internos de la fábrica al aumentar o disminuir el tamaño de la circunferencia que circunscribe a la fábrica? ____

- Cuando el perro hace su recorrido por las tres puertas de la fábrica, ¿los ángulos que va formado sumarán 180º? ______________________

Guarda tu archivo.

HOJA DE TRABAJO # D2	FECHA: / / /	
NOMBRE:	GRUPO:	N.L.:
Nombre del compañero de equipo:		

- Se quiere construir las paredes de la fábrica de forma triangular donde los ángulos formados por las paredes sean de 80º, 60º y 40º. ¿La suma de sus ángulos internos del triángulo es de 180º? ____________
- ¿Se puede construir la fábrica con dichos ángulos? _______________
- ¿Cuáles serían las medidas de los ángulos centrales correspondientes si los ángulos 80º, 60º y 40º fueran ángulos inscritos?

Medida del ángulo inscrito	80º	60º	40º
Medida del ángulo central			

- En una esquina edita las medidas de los ángulos centrales.
- Traza una circunferencia.
- Marca un punto (A) **sobre la circunferencia**.
- Rota el punto A los grados equivalentes a uno de los ángulos centrales. Toma como **punto de rotación** el centro de la circunferencia.
- Etiqueta el nuevo punto como B.
- Ahora rota el punto B los grados equivalentes a otro de los ángulos centrales. Etiqueta el nuevo punto como C.
- Une el centro X con los puntos A, B y C.
- Ahora rota el punto C usando el ángulo central faltante.
  - ¿La última rotación coincidió con el punto A? ____________________
- Une los puntos A, B, C.
  - ¿Se pudo construir la fábrica con los ángulos dados? _____________
  - ¿Se podrá construir una fábrica de forma triangular cuyos ángulos internos sean 40º, 50º y 60º? _________________________________
  - ¿Por qué? ____

- Si los ángulos centrales miden 40º, 50º y 60º, ¿cuánto miden los ángulos inscritos correspondientes? ______________________________

- Reedita las medidas de los ángulos en tu modelo para que coincidan con las medidas solicitadas.
  - ¿Se construyó el triángulo con las medidas de los ángulos dados? ___
  - Guarda tu archivo.

ANOTACIONES

- Con tu compañero de equipo describe lo que aprendieron con esta actividad sobre:
  - Cómo construir un triángulo cualquiera inscrito en una circunferencia dadas las medidas de los ángulos.
  - Suma de los ángulos interiores de un triángulo.
  - Otros hallazgos.
- Traza en tu hoja de trabajo la fábrica y el recorrido del perro. Los ángulos del triángulo deben ser de: 60º, 20º y 100º.

ACTIVIDAD OPCIONAL

- En un terreno circular se desea pavimentar una sección triangular inscrita en dicha área. Dicha sección a pavimentar debe tener 2 ángulos iguales de 70º. Utiliza el procedimiento que aprendiste para resolver el problema.

HOJA DE TRABAJO # E1	FECHA: / / /	
NOMBRE:	GRUPO:	N.L.:
Nombre del compañero de equipo:		

EL PERRO VIGÍA

En un terreno circular existen 4 puntos de vigilancia ubicados en sus linderos. Un perro debe hacer recorridos que consisten en salir del punto A, visitar 2 puntos de vigilancia y regresar al punto de partida. Los recorridos son: ABC, ACD.

- Traza la circunferencia que represente al terreno.
- Marca los puntos de vigilancia como “puntos sobre la circunferencia”. Etiquétalos en orden alfabético en sentido de las manecillas del reloj.
- Traza los segmentos que representen el recorrido ABC.
  - Con el recorrido ABC, ¿qué figura se formó? ______________________
  - ¿Cuánto suman los ángulos internos de esa figura? _______________
- Mide los ángulos internos de la figura ABC. Coloca las medidas a un lado de la pantalla.
- Suma los ángulos internos de ABC.
- Traza los segmentos faltantes que representen el recorrido ACD.
  - ¿Cuánto suman los ángulos internos del triángulo ACD? ____________
- Mide los ángulos internos de la figura ACD. Coloca las medidas a un lado de la pantalla.
- Suma los ángulos interiores del triángulo ACD.
- Cambia el segmento AC a línea punteada.
  - Al unir los dos triángulos se forma un cuadrilátero, ¿cuántos ángulos internos tiene un cuadrilátero? __________________________________
  - El dueño del terreno asegura que la suma de los ángulos internos de la figura es de 360º, ¿la aseveración del dueño es correcta o incorrecta? ______________________
  - Explica cómo llegaste a tu conclusión: ____________________________

____

____

🖩 A los ángulos del triángulo ABC súmale los ángulos del triángulo ACD para comprobar tu respuesta anterior.

🗁 Guarda tu archivo.

HOJA DE TRABAJO # E2	FECHA: / / /	
NOMBRE:	GRUPO:	N.L.:
Nombre del compañero de equipo:		

Recupera el archivo anterior.

- Arrastra el punto B hasta formar un cuadrilátero distinto al inicial.
  - El dueño asegura que a pesar de haber modificado la forma del terreno de cuatro lados, la suma de sus ángulos internos sigue siendo de 360º. ¿Es correcto o incorrecto lo que asegura el dueño? _______________
  - ¿Por qué? ____
- Arrastra el punto C y forma un nuevo cuadrilátero.
  - ¿En esta nueva forma del cuadrilátero, el dueño puede asegurar que la suma de sus ángulos internos es de 360º? ______________________
  - ¿Por qué? ____
- Mide los lados del cuadrilátero ABCD
- Mueve los puntos necesarios para cumplir con las condiciones especificadas en el cuadro anterior.
  - Completa el cuadro.

	CONDICIÓN					
ABCD	2 lados consecutivos iguales	2 lados no consecutivos iguales	2 pares de lados no consecutivos iguales	2 pares de lados consecutivos iguales	3 lados iguales	4 lados iguales
Suma de los ángulos interiores del cuadrilátero						

  - ¿Podrías asegurar que la suma de los ángulos internos de un cuadrilátero cualquiera es de 360º? _____________________________

Explica por qué: ____

____

____

Guarda tu archivo.

HOJA DE TRABAJO # E3	FECHA: / / /	
NOMBRE:	GRUPO:	N.L.:
Nombre del compañero de equipo:		

Recupera el archivo anterior

- A tu diseño anterior agrega un punto más de vigilancia (E) entre A y D.
- Agrega los segmentos necesarios para que se tengan los recorridos: ABC, ACD y ADE.
    - Observa que los triángulos tienen como característica común el compartir un vértice y no sobreponerse. ¿Cuántos triángulos se forman con los dos recorridos del perro? ______________________________
    - Si la suma de los ángulos internos de un triángulo es de 180º, ¿cuál será la suma de los ángulos internos del terreno compuesto por los triángulos ABC, ACD, ADE? ___
    - ¿Por qué? ____
    - Si el terreno tuviera seis lados y se descompusiera en triángulos como los especificados arriba, ¿en cuántos triángulos se puede descomponer? ___________
- Entre los puntos A y E, agrega el punto F a tu diseño y comprueba la respuesta anterior.
    - ¿Cuál sería la suma de los ángulos internos del terreno de seis lados? ___________

☐ Analiza y completa el cuadro:

Puntos de vigilancia	3	4	5	6	7	8	9
Triángulos resultantes							
Suma de los ángulos interiores de todo triángulo (Multiplica por 180º)	x 180º	x 180º	x 180º	x 180º	x 180º	x 180º	x 180º
Suma de los ángulos internos del polígono							

☐ Analiza el cuadro superior, antes de descomponer un polígono cualquiera en triángulos sucesivos con un vértice común, ¿cómo sabrías el número de triángulos resultantes? ______________________

____

☐ Sabiendo la forma de anticipar el número de triángulos resultantes al descomponer un polígono cualquiera, explica la forma en que obtienes el resultado de la suma de los ángulos internos de dicho polígono: ____

____

____

🗁 <u>Guarda tu archivo.</u>

<u>ANOTACIONES</u>

- Con tu compañero de equipo describe lo que aprendieron con esta actividad sobre:
  - Suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero.
  - Suma de los ángulos interiores de un polígono cualquiera.
  - Otros hallazgos.
- Diseña en tu hoja de trabajo tres diferentes fábricas que tengan 4, 5 y 6 puntos de vigilancia respectivamente. Traza los recorridos (visita a dos

puntos de vigilancia sucesivos y regresa al punto de partida) del perro y obtén la suma de los ángulos internos en cada caso.

ACTIVIDAD OPCIONAL

- Se desea que el perro tenga cinco puntos de vigilancia cercanos entre sí y otro más donde tenga su casa. Encuentra la suma de los ángulos internos del polígono resultante.
- Ahora se desea que todos los ángulos internos sean iguales. Encuentra la medida de cualquiera de dichos ángulos.

HOJA DE TRABAJO # F1	FECHA: / / /	
NOMBRE:	GRUPO:	N.L.:
Nombre del compañero de equipo:		

EL PERRO ROBOT

Siglo XXII, los robots sustituyen a los humanos en el mercado de trabajo. En una isla artificial de forma circular hay 4 puntos de vigilancia ubicados en los límites de la misma. Por dichos puntos un perro – robot debe hacer recorridos pasando por los cuatro puntos en el sentido de "las manecillas del reloj", sin embargo al perro – robot se le trasmitió un virus vía internet, por lo que solo puede girar en 90º.

- Traza la isla y un punto de vigilancia **sobre sus límites**.
- Etiqueta dicho punto de vigilancia (A) y el centro de la circunferencia (X).
- Traza una **recta** que pase por los puntos A y X. "A" es un **punto de intersección** de la recta y la circunferencia.
- Etiqueta al otro **punto de intersección** (C) de la recta y la circunferencia.
    - Cuando un segmento toca dos puntos de la circunferencia y pasa por el centro se llama **cuerda mayor** o **diámetro**, ¿el segmento AC es un diámetro? _____________
- En algún punto de los límites de la isla coloca el punto de vigilancia (B).
- Une los segmentos AB y BC.
    - ¿Cuánto mide el ángulo ABC? ___________________________________
    - ¿Por qué? ____
    - ¿El ángulo ABC cumple con la condición necesaria para que el perro – robot pueda pasar por el punto B y girar? ________________________
- Traza una **recta** que pase por los puntos B y X. "B" es punto de intersección de la nueva recta y la circunferencia.
- Etiqueta al otro **punto de intersección** (D) de la recta y la circunferencia.
- Traza los segmentos DC y DA.
    - ¿Cuánto mide el ángulo ADC? _________________________________

- ¿Por qué? ____
- ¿El ángulo ADC cumple con la condición necesaria para que el perro – robot pueda pasar por el punto D y girar? ________________________
- ¿Cuánto mide el ángulo BAD? _________________________________
- ¿Por qué? ____
- ¿Cuánto mide el ángulo BCD? _________________________________
- ¿Por qué? ____
- ¿El perro – robot puede girar en cada una de los ángulos? __________

Guarda tu archivo

HOJA DE TRABAJO # F2	FECHA: / / /	
NOMBRE:	GRUPO:	N.L.:
Nombre del compañero de equipo:		

🗁 Recupera el archivo anterior.

- ¿Cuál es el resultado de la suma de 2 **ángulos adyacentes**? _______
- ¿Y cuál es el resultado de la suma de los 2 **ángulos opuestos**? _____
- Cuando un cuadrilátero tiene **4 ángulos de 90º** se llama **rectángulo**, ¿el cuadrilátero ABCD es un rectángulo? ________________________

Mide los lados del cuadrilátero ABCD. Etiqueta las medidas y colócalas en una esquina.

- ¿Existen lados que midan lo mismo? ____________________________
- ¿Cuáles? ____
- ¿Los lados que miden lo mismo son **consecutivos** o **no consecutivos**? _________

Un nuevo virus ha afectado al perro – robot. Ahora solo puede recorrer **distancias iguales**. Mueve los puntos de vigilancia para que se cumpla con la nueva condición.

- ¿El nuevo **cuadrilátero** ABCD sigue siendo rectángulo? ___________
- ¿Los 4 ángulos siguen midiendo 90º? ___________________________
- ¿Qué nombre recibe un **rectángulo cuyos 4 lados son iguales**? ____
- Si en todo rectángulo los ángulos adyacentes miden 180º ¿esto se cumple con el cuadrado? _____________________________________
- ¿La suma de los ángulos opuestos es de 180º? __________________
- Describe las tres características de los cuadriláteros inscritos en una circunferencia, según...
  a) Las medidas de sus lados: __________________________
  b) La suma de sus ángulos adyacentes: _________________
  c) La suma de sus ángulos opuestos: ___________________

🗁 Guarda tu archivo.

HOJA DE TRABAJO # F3	FECHA: / / /	
NOMBRE:	GRUPO:	N.L.:
Nombre del compañero de equipo:		

- En una zona de la ciudad se desea un campo de fuerza circular que proteja el recorrido de un perro – robot por 4 de puntos de vigilancia. Traza 4 puntos de vigilancia.
- Traza el recorrido que debe hacer el perro – robot.
- Etiqueta (A, B, C, D) los vértices del cuadrilátero formado por el recorrido del perro siguiendo el sentido de las “manecillas del reloj”.
- Mide los 4 ángulos internos del cuadrilátero. Muévelos a un lado de la pantalla.
- Un científico menciona que si fuera un triángulo se podría encontrar el punto que **equidiste** de los vértices trazando la **mediatriz** a cada lado. Prueba si es posible encontrar un punto único donde se crucen las mediatrices del cuadrilátero.
    - ¿El punto donde se cruzan las mediatrices es único? _______________
- Prueba si se puede establecer el campo de fuerza usando a cada uno de los puntos donde se cruzan las mediatrices como centro del campo de fuerza.
    - ¿Se pudo establecer dicho campo de fuerza con la condición establecida de pasar por los cuatro puntos de vigilancia? ____________
    - Consulta los resultados de tus compañeros. ¿Alguno logró encontrar un punto único que sea de centro del campo de fuerza? _____________
- Arrastra los puntos de vigilancia y busca si puedes lograr que solo exista un punto único (cruce de mediatrices) que sirva como centro del campo de fuerza.

- ¿Encontraste un punto único? ________________________________
- Nuevamente revisa los resultados de tus compañeros, ¿alguno de ellos encontró un punto único? ____________________________________

Si no has encontrado un punto único, ¡inténtalo nuevamente!

- ¿El campo de fuerza pasa por los cuatro puntos de vigilancia? ______

Guarda tu archivo.

HOJA DE TRABAJO # F4	FECHA: / / /	
NOMBRE:	GRUPO:	N.L.:
Nombre del compañero de equipo:		

🗁 Recupera el archivo anterior.

🖩 Mide cada lado del anterior cuadrilátero. Etiquétalo y muévelo a un lado de la pantalla.

🖩 Suma las medidas de los ángulos adyacentes (ABC + BCD; CDA + DAB). Etiqueta el resultado y muévelo a un lado de la pantalla.

🖩 Suma las medidas de los ángulos opuestos (ABC + CDA; BCD + DAB). Etiqueta el resultado y muévelo a un lado de la pantalla.

- Se mencionaron 3 características que tenían los rectángulos cuando estaban inscritos en una circunferencia. Marca la característica que cumple este cuadrilátero.

Sobre las medidas de sus lados		Sobre la suma de sus ángulos adyacentes		Sobre la suma de sus ángulos opuestos	

🖩 Mueve nuevamente los 4 puntos de vigilancia hasta una nueva posición donde la suma de los ángulos opuestos sea nuevamente de 180º

- ¿El recorrido del perro sigue estando protegido por el campo de fuerza? _________
- Solo en algunos casos un cuadrilátero se puede inscribir en una circunferencia ¿Cuál será la condición que deben cumplir sus ángulos opuestos? ______________
- Cuándo el cuadrilátero es un rectángulo o cuadrado, ¿la condición anterior se cumple? ____
- Explica lo que harías para saber si un cuadrilátero se puede inscribir en una circunferencia: ____
  ____

🗁 Guarda tu archivo.

ANOTACIONES

- Con tu compañero de equipo describe lo que aprendieron con esta actividad sobre:
    - Construcción de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia (casos y condición)
    - Características de algunos cuadriláteros (rectángulo y cuadrado)
    - Otros hallazgos.
- Diseña en tu hoja de trabajo una isla que tenga 4 puntos de vigilancia. Dichos puntos de vigilancia al unirlos deben formar un cuadrado.
- En tu hoja de trabajo traza 4 puntos de vigilancia. Determina sí el cuadrilátero formado por la unión de dichos puntos puede ser circunscrito por una circunferencia.

ACTIVIDAD OPCIONAL

- Un cuadrilátero esta inscrito en una circunferencia. Sin necesidad de medir los ángulos, explica por que dos ángulos opuestos siempre suman 180º.