UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

SECRETARÍA ACADÉMICA

COORDINACIÓN DE POSGRADO

DOCTORADO EN EDUCACIÓN

*Estudiantes en desventaja resolviendo tareas de generalización de patrones con la mediación de plantillas visuales y manipulativos virtuales*

Tesis que para obtener el grado de
Doctora en Educación
Presenta

Guadalupe Rodríguez Ruiz

Tutora:
Dra. Verónica Hoyos Aguilar

México, D. F. Agosto 2015

# ÍNDICE

# INTRODUCCIÓN

En esta tesis se aborda el razonamiento algebraico que desarrollan estudiantes en desventaja de escuelas secundarias públicas en el Distrito Federal, cuando se les presentan problemas matemáticos relacionados con la generalización de patrones de figuras. Se destaca de modo preponderante que durante la resolución de tales problemas se utilizó plantillas visuales y medios ambientes virtuales de aprendizaje. Tales ambientes dotan de un potencial extraordinario a los estudiantes desaventajados en matemáticas a través de la manipulación material de los objetos en juego, para que experimenten lo que significa comprender un problema y avancen hacia la generalización de la situación y la formulación simbólica de la misma.

El objetivo de esta tesis es utilizar tecnologías digitales para que estudiantes desaventajados puedan acceder a nociones matemáticas poderosas como la de generalización algebraica a través de la identificación de plantillas visuales, para que experimenten procesos matemáticos complejos, como los de abducción e inducción.

Uno de los principios pedagógicos de interés en esta investigación es el de usar materiales educativos para favorecer el aprendizaje y generar ambientes de aprendizaje, entendiéndolos como espacios en donde es posible desarrollar comunicación e interacciones que posibiliten el aprendizaje. En particular en los ambientes de aprendizaje de nuestro interés media la actuación del docente para construirlos y emplearlos como tales.

En el primer capítulo se revisan los antecedentes de investigación. Se hacen señalamientos en aspectos que tienen que ver con el pensamiento matemático y su desarrollo en medios ambientes virtuales de aprendizaje, en donde el papel de la tecnología es el de potenciar la capacidad del estudiante que se inicia en el estudio del álgebra. También se revisan trabajos que buscan promover el razonamiento inductivo ya que este es fundamental para conducir a los estudiantes a la generalización, siendo esta última un catalizador hacia la abstracción matemática, y se ha encontrado que la mejor forma de desarrollarla es a través de la exploración de patrones. En síntesis, la generalización y el razonamiento inductivo se funden en una misma categoría que ocupa un lugar privilegiado en el estudio del álgebra. En esta sección se plantean las hipótesis de investigación.

Más adelante se da pauta a las concepciones de lo que significa el razonamiento algebraico y la generalización, conceptos que reunimos para desarrollar tal razonamiento en estudiantes que exploran la generalización a través de patrones. Son tres los fundamentos teóricos en los cuales se apoya la presente investigación: el *Ciclo de la Generalización* propuesto por Mason (1985); las *Plantillas Visuales* en la generalización de patrones de figuras (Rivera, 2010); y el constructo *Trayectoria Hipotética del Aprendizaje* desarrollado por Simon (1995), dicho constructo es la parte medular de lo que él establece como el *Ciclo de Enseñanza de las Matemáticas* que se fortalece con las continuas modificaciones al plan anticipado o hipotético de enseñanza, que resulta de la toma de decisiones de profesor. Tal constructo es el eje vertebral que direcciona las exploraciones que se llevaron a cabo en la investigación que aquí se reporta.

En el segundo capítulo se describe de manera detallada el trabajo de campo que se realizó en escuelas secundarias técnicas del Distrito Federal. Éste se desarrolla en cuatro fases, las dos primeras se conciben como exploraciones piloto y las dos últimas como formales, cada una con un objetivo y características distintas. En este capítulo se presentan de manera breve avances preliminares de las primeras dos fases y las respectivas modificaciones que sufrieron las hojas de trabajo para ser instrumentadas en las fases tres y cuatro del trabajo de campo. Vale la pena hacer notar que el análisis de los datos recolectados en las fases tres y cuatro son los que proporcionan el sustento empírico (y teórico) de la presente tesis.

En el tercer capítulo se expone el análisis de los datos obtenidos en las fases tres y cuatro del trabajo de campo. En particular se hace una descripción detallada de la resolución de los estudiantes a los problemas sobre generalización de patrones, instrumentada en ambientes de aprendizaje diferenciados: Lápiz y papel y/o Virtual. El análisis se conduce bajo el fundamento teórico de las plantillas visuales, categorizadas como aditivas, multiplicativas y pragmáticas. También se hace una identificación del ciclo de la generalización por el cual atraviesan los estudiantes desaventajados al resolver problemas del tipo mencionado.

En el cuarto capítulo se dan a conocer de manera detallada las conclusiones del presente trabajo de investigación. Por ejemplo, en el trabajo de campo que se llevó a cabo en esta tesis se pudo constatar que en ambiente de lápiz y papel los estudiantes aventajados generaron conocimiento significativo representado por procedimientos o estrategias de resolución en problemas matemáticos relacionados con la generalización de patrones de figuras. Estas estrategias sirvieron para el diseño de guías pedagógicas que condujeron a estudiantes en desventaja hacia la comprensión y resolución de los problemas antes mencionados. En este contexto y utilizando mediadores (plantillas visuales y manipulativos virtuales) los estudiantes en desventaja llegan a expresar la generalización del patrón no sólo con un lenguaje natural sino simbólico, aun con sus limitados conocimientos algebraicos.

Finalmente, al término del texto se encuentran una serie de anexos que recopilan los documentos y/o instrumentos que dan cuenta del trabajo de campo realizado en esta investigación.

# CAPÍTULO I

# ANTECEDENTES Y MARCO TEÓRICO

## 1.1 ANTECEDENTES

En el trabajo que aquí se presenta interesa hacer énfasis en la utilización de la tecnología en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en la educación básica. De acuerdo con Guerrero et al. (2004), "cuando la tecnología está bien usada en [la enseñanza y el aprendizaje de] las matemáticas del 6to. al 8avo. grados[1], se pueden tener entonces efectos positivos sobre los logros de los estudiantes y su comprensión conceptual. Este potencial se materializa dependiendo de la habilidad del maestro en integrar la tecnología en el currículo matemático de acuerdo a principios pedagógicos sólidos".

### 1.1.1. La generalización en el aprendizaje del álgebra

¿Cómo se introduce el álgebra en la escuela secundaria? Habrá una variedad de respuestas. Las ecuaciones suelen ser consideradas como prioritarias o base para introducir el trabajo algebraico y entonces la labor de los estudiantes es traducir un problema verbal a una expresión matemática a la cual hay que despejar la incógnita con el procedimiento aprendido en clase. Lo que se considera entonces, bajo esta mirada, es que para entrar al campo del álgebra se requiere aprender las técnicas para despejar la incógnita en una ecuación lineal con una variable, sin embargo para ejecutar éstas se necesita realizar distintas transformaciones que lleven a expresar la ecuación a la forma $ax+b=c$ y dichas transformaciones requieren ser vislumbradas por los estudiantes pero su comprensión en esta etapa introductoria del álgebra resulta carente de elementos para llegar a su conocimiento pleno. Para muchos estudiantes, las ecuaciones son "cosas que se despejan" y saber hacerlo incurre en un compendio de dificultades para ellos. Sin embargo, las ecuaciones son objetos matemáticos complejos que requieren otro

[1] Del 6° al 8° grados su equivalente es el último grado de educación primaria y los dos primeros de nivel secundaria en México.

tratamiento en el aula e introducirlas de esta manera provoca la pérdida de su naturaleza convirtiéndolas en objetos matemáticos descontextualizados, es decir, sin sentido. Otras alternativas para entrar en el terreno algebraico son: por un lado, explorar el concepto de *función* y por otro, hacerlo a través de la *generalización* ésta última es la vía que se explora en este trabajo de investigación. De manera simple se puede decir que generalizar es encontrar características que unifican, reconocer tipos de objetos y de problemas.

Cuando se descontextualiza la labor para resolver un problema y se discuten las matemáticas puestas en juego se entra a un proceso de generalización lo que permite utilizar o adaptar lo que se hizo en la resolución de ese problema para otros del mismo tipo. Esta actividad es cotidiana en el aula, el profesor plantea un problema para poder trabajar aspectos generales ya sea a través de él o a partir de éste.

La investigación que aquí se reporta no tiene interés en la discusión a profundidad acerca de cómo se introduce el álgebra en la secundaria, pero se toca el tema debido a que la investigación se centró en la generalización de patrones. Una ventaja de introducir el álgebra a través de actividades relacionadas con la generalización es que se abre la posibilidad de llegar al concepto de ecuación con un mayor dominio técnico, lo ideal sería introducir el álgebra desde dos terrenos: el funcional (variable) o la generalización (fórmula o número general), lo cual le brindaría elementos al estudiante para apropiarse del sentido de ese concepto matemático.

Como se dijo, la investigación se limitó a la exploración en el campo de la generalización en concreto a problemas matemáticos que se refieren a patrones o secuencias de figuras dado que son el preámbulo necesario para el estudio del álgebra. La parte medular de este tipo de problemas es encontrar una fórmula(s) para el enésimo término de un patrón o secuencia de figuras cuya composición guarda una regularidad definida de manera explícita y es justo la producción de la fórmula el punto de apoyo para arribar a cuestiones constitutivas del lenguaje algebraico.

La generalización tiene un papel destacado dentro del álgebra como lo enuncian las diferentes concepciones, dimensiones y enfoques. En adelante se mostrarán algunas de esas concepciones. Autores como Mason (1996) y Mason et al., (2005), consideran la generalización como una ruta hacia el álgebra, incluso como la esencia del álgebra. Esta es la razón de su importancia la cual ha sido reconocida en investigaciones primarias como lo señaló Davidov (1972/1990): "desarrollar las generalizaciones de los estudiantes se ve como uno de los principales propósitos de la instrucción escolar" (p. 10).

Por otro lado, Krutetskii (1976) catalogó a la generalización como una de las habilidades cognitivas más substanciales que puede desarrollar un estudiante. En relación a esto, Sriraman (2004) establece que debido al pensamiento de orden superior implicado en la generalización como la abstracción, el pensamiento holístico, la visualización, la flexibilidad de razonamiento, la habilidad de generalizar es algo que caracteriza a los estudiantes competentes. Por esta razón Mason la llama el latido de las matemáticas, desde esta perspectiva, Vogel (2005) menciona que el análisis de patrones matemáticos y la descripción de sus regularidades y propiedades, es uno de los objetivos de esta ciencia. Con respecto a lo dicho antes, Kaput (1999) define a la generalización como:

> *Extender deliberadamente el rango de razonamiento o comunicación más allá del caso o casos considerados, identificando explícitamente y exponiendo similitud entre casos, o aumentando el razonamiento o comunicación a un nivel donde el foco no son los casos o situación en sí mismos, sino los patrones, procedimientos, estructuras, y las relaciones a lo largo y entre ellos* (p. 136.).

Otros autores como Amit y Neria (2008) la definen como un proceso sofisticado y poderoso, el cual involucra reflexión y una hábil reconstrucción de los propios esquemas existentes y como el proceso de aplicar un argumento dado en un contexto más amplio.

En relación a las actividades o etapas en el proceso de generalización distintos autores establecen este proceso bajo su perspectiva. Por ejemplo, Lobato, Ellis, & Muñoz, (2003) indican que la etapa inicial en la generalización exige "enfocarse" o "prestar atención" a una posible propiedad invariante o relación. Mason et al. (2005) resaltan que para llegar a la generalización se necesitan actos de “prestar cuidadosa atención” a detalles, especialmente a aquellos aspectos que cambian y/o a los que se mantienen iguales. Esto se puede resumir en la frase de Mason: “ver lo general a través de lo particular y ver lo particular en lo general” (p. 310). Es decir, el estudiante debe enfocar su atención a exploran patrones, dedicarse a detectar similitudes y diferencias, clasificar, etiquetar, buscar algoritmos, conjeturar, argumentar, establecer relaciones numéricas entre componentes o bien, a generalizar los datos y relaciones matemáticas lo que sin duda lo llevará a desarrollar habilidades que son fundamentales para el aprendizaje del álgebra.

En este mismo tenor, Mason al analizar el proceso de generalización en las matemáticas escolares, identifica conductas que conforman el ciclo de generalización: percibir la generalidad, expresar la generalidad, elaborar una regla general, verbal o numérica para generar una secuencia, expresar simbólicamente la generalidad, y manipular la generalidad. Desde la perspectiva de Kaput (1999), la generalización requiere emprender al menos tres actividades: 1) identificar similitudes a lo largo de casos, 2) extender el razonamiento propio más allá de donde se originó, y 3) proveer resultados más amplios de casos particulares.

Por otro lado, Cañadas y Castro (2004) habiendo analizado el razonamiento inductivo en alumnos de secundaria, definen un sistema de categorías que responde a las acciones seguidas por los alumnos para llegar a la generalización: 1) la comprensión del enunciado del problema, 2) trabajar con casos particulares, 3) formular conjeturas, 4) validar las conjeturas y 5) justificar la conjetura general. Sin embargo, reconocido que el pensamiento inductivo se dirige a la generalización resulta que éste no es considerado del todo en los programas de estudio de matemáticas.

### 1.1.2. La generalización de patrones

Se entiende por patrón matemático como “algo” que se repite con regularidad tanto en el plano aritmético como geométrico (Castro, 1995 y Stacey, 1989). Algunos autores como Zazkis y Liljedahl (2002) plantean que los patrones matemáticos son el alma y corazón de las matemáticas y que a diferencia de la resolución de ecuaciones o la manipulación de números enteros, no siempre están como un tópico o actividad curricular.

El reconocimiento de patrones es esencial en el desarrollo de la habilidad para generalizar, ya que a partir de una regularidad observada, se busca un patrón que sea válido para más casos. Steen (1990) y Schoenfeld (1992) se refieren a las matemáticas como la ciencia de los patrones. Schoenfeld explica esta afirmación:

> *Las matemáticas son una actividad inherentemente social, en la que una comunidad de practicantes entrenados (científicos matemáticos) se ocupan de la ciencia de los patrones –intentos sistemáticos basados en la observación, estudio, y experimentación, para determinar la naturaleza de los principios de las regularidades en los sistemas definidos axiomáticamente o teóricamente (matemática pura) o modelos de sistemas abstraídos de objetos del mundo real (matemática aplicada). Las herramientas de las matemáticas son la abstracción, la representación simbólica y la manipulación simbólica* (p. 335).

La descripción y representación de patrones geométricos y numéricos aparecen asociadas a la generalización y al lenguaje algebraico y verbal como formas de expresar las generalizaciones (Cañadas, 2007).

La aportación de Radford (2008) para el cual el punto crucial en una justificación de generalización es explicar la forma en la que se percibe lo que es igual y lo que es diferente. Argumenta que las generalizaciones de patrones algebraicos no están caracterizadas por el uso de notaciones sino por la forma general en la que se tratan. Sugiere que la generalización de patrones algebraicos supone tres momentos, primero la captación de una similitud, segundo la generalización de esta similitud a todos los términos de la secuencia que se está considerando y último, la formación de una regla o esquema que permite determinar cualquier término de la secuencia directamente (es este caso el autor se está refiriendo a la generalización que se realiza a partir de una secuencia).

### 1.1.3. Patrones geométricos

Los patrones de crecimiento pictórico también llamados patrones geométricos son una secuencia de figuras en la cual los objetos en la figura cambian de un término al siguiente, usualmente en una forma predecible. Un patrón de crecimiento pictórico típicamente involucra dos variables: algún aspecto cuantificable de este patrón pictórico de objetos (la variable dependiente) es coordinado con un índice o sistema de conteo (la variable independiente) que provee una identificación de la posición de la figura en el patrón.

Los patrones de crecimiento geométrico son un rico contexto para explorar la generalización, un mayor componente de pensamiento algebraico (Kaput 1999). Los maestros analizan, describen y extienden patrones de crecimiento pictórico con el objetivo final de *generalizar* interrelaciones en esos patrones. Los maestros pueden usar muchas herramientas diferentes para formar generalizaciones, incluyendo las construcciones físicas de un patrón, símbolos algebraicos y un análisis explícito de cambio.

### 1.1.4. Aritmética generalizada y álgebra

La generalización de la aritmética es considerada una componente fundamental del álgebra escolar que es utilizada tradicionalmente para la introducción del álgebra en el nivel educativo básico. Centrándose en esta componente, Mason (1996) concluye que la diferencia entre aritmética y álgebra es que "la aritmética procede directamente de lo conocido a lo desconocido utilizando cálculos conocidos; el álgebra procede indirectamente de lo desconocido vía lo conocido a ecuaciones y desigualdades que pueden ser resueltas utilizando técnicas establecidas".

Es decir, la aritmética se enfoca en la manipulación de números fijos, en la generalización de situaciones relativas a números concretos, los símbolos son utilizados como etiquetas de medidas o abreviaciones de un objeto. Por el contrario, el foco en el álgebra está en la generalización de las relaciones entre números, la reducción a la uniformidad, la manipulación de variables, los símbolos son variables o incógnitas y las expresiones simbólicas son consideradas como productos y procesos.

Debido a esta diferencia de enfoques se produce una separación del álgebra y la aritmética en el aprendizaje de las matemáticas escolares lo cual enfatiza y alarga las dificultades de los alumnos en cuestiones algebraicas. De aquí que varios autores propongan diferentes formas de trabajo para integrar ambos campos de estudio y así facilitar la transición entre la aritmética y el álgebra.

Según Hewitt (1998) la aritmética se centra en la obtención del resultado, siendo el álgebra lo que permite encontrar una forma sistematizada de obtener tal resultado. La visión del álgebra como una aritmética generalizada, es seguida por otros autores, como Kieran (2006, 2007), además de los mencionados, que apuestan por la generalización como una vía de introducción al álgebra en la escuela. Drijvers y Hendrikus (2003) argumentan que el álgebra tiene sus raíces en la aritmética y depende fuertemente de su fundamentación aritmética y a su vez la aritmética tiene muchas oportunidades para simbolizar, generalizar y razonar algebraicamente. A este respecto Mason (1996) declara que cuando la estructura de la aritmética es expresada, produce álgebra como una aritmética generalizada.

También Schliemann et al. (2003) enfocan el álgebra como una aritmética generalizada de números y cantidades. Este enfoque resalta el cambio de pensar sobre relaciones entre números particulares y medidas a pensar sobre relaciones entre conjuntos de números y medidas; y de calcular respuestas numéricas a describir y representar relaciones entre variables. Para dicho cambio se requiere que los estudiantes emprendan actividades especialmente diseñadas, para que puedan empezar a notar, articular, y representar los patrones numéricos que observan entre variables. Bajo esta concepción del álgebra, Usiskin (1999) afirma que las instrucciones clave para el estudiante en esta concepción son “traducir” y “generalizar”, y afirma que éstas son habilidades importantes no sólo para el álgebra sino también para la aritmética.

De esta forma, para entender la generalización de relaciones y procesos se requiere que éstos sean anteriormente asimilados en la aritmética, ya que es necesario que los alumnos internalicen generalidades que se encuentran implícitas dentro de ésta y que son determinantes para el aprendizaje del álgebra. Kieran (1989) afirma que la experiencia previa de los alumnos con la estructura de las matemáticas, y especialmente con la estructura de expresiones aritméticas, debe tener un efecto importante en la capacidad de los alumnos en dar sentido al álgebra. De manera que, lo ideal es que los docentes promuevan el pensamiento algebraico a partir de situaciones aritméticas con el objetivo de facilitar el aprendizaje del álgebra. Es decir, proveer de actividades aritméticas que inciten a la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas, en las cuales los alumnos exploren, modelen, hagan predicciones, discutan, argumenten, comprueben ideas a la vez que practiquen habilidades de cálculo (Blanton y Kaput, 2004, 2005).

### 1.1.5. Instrumentos psicológicos en el aprendizaje de las matemáticas

Los procesos psicológicos de las matemáticas, abstracción, generalización e inferencia, por ejemplo, pueden verse afectados por el entorno sociocultural predominante y también por las herramientas usadas en dicho entorno, siendo éste un mediador en la acción cognoscitiva. En una situación o escenario con determinadas características, se van a producir significados particulares del objeto matemático en cuestión, es decir, la expresión o representación de significados matemáticos que se desprendan del escenario estarán en directa correspondencia con éste, entablaran un mismo lenguaje por decirlo de alguna manera. Moreno y Waldegg (2004) afirman que:

> *Ahí [en el escenario] el alumno puede expresar la generalidad matemática en dependencia del medio, aunque sus expresiones apunten más allá, hacia las descripciones abstractas de las estructuras matemáticas. [Esto es] Se hace posible [que el estudiante] explore ideas dentro de ámbitos particulares, concretos y manipulables, pero que tienen la semilla de lo general, lo abstracto y lo virtual (p. 97).*

Como acabamos de leer el escenario es el soporte instrumental, es decir, es el intermediario para realizar la conexión entre los conocimientos informales y el conocimiento matemático. Actualmente, las teorías de la cognición reconocen el principio de mediación instrumental que puede expresarse de la siguiente manera: todo acto cognoscitivo está mediado por un instrumento que puede ser material o simbólico. Desde un punto de vista sociocultural, funciones como la atención, la memoria o la resolución de problemas experimentan una transformación radical cuando intervienen en actividades mediadas por instrumentos psicológicos (ver Kozulin, 2000). El instrumento brinda una perspectiva diferente de la realidad y permite acceder a otros niveles de conocimiento imposibles de adquirir sin éste. En otras palabras, toda actividad cognoscitiva lleva consigo una actividad representacional. No hay manera de que una sea fructífera sin la otra, ambas son constitutivas.

Las herramientas como la computadora son sistemas de representación ejecutables que pueden realizar funciones “cognoscitivas” en forma virtual, que facilitan exponencialmente el trabajo de las personas, por las características del software en el que se trabaje. Sin embargo, la persona tendrá que saber interpretar lo que aparece en su pantalla y esto no es de ninguna manera fácil ya que le demanda al individuo una acción cognoscitiva de otro nivel lo que crea nuevos significados. Por tanto, la complejidad entre la herramienta computacional y el pensamiento del individuo hace que ambas herramientas formen una dualidad promotora del desarrollo en potencia. Cabe decir que la herramienta no remplaza la capacidad de razonamiento de la mente sino que la amplifica. De manera que el uso de la herramienta tecnológica en este sentido se convierte en un elemento netamente pedagógico (Moreno y Waldegg, 2004).

Si al estudiante se le pudiera proveer de distintos sistemas de representación y en ellos se estudiara un mismo fenómeno u objeto matemático, el estudiante tendría más oportunidades de comprender el fenómeno y además en forma integral. Es decir, lo que quizá en un sistema de representación no se pudiera apreciar directamente en otro sistema tal vez se pueda mostrar claramente. Abordar otros sistemas de representación además del o los que el profesor proporciona, accediendo a la utilización de medios ambientes computacionales, marcaría un cambio en términos cognoscitivos en la formación matemática del alumno y sin lugar a dudas, también en otras asignaturas. Del acercamiento con jóvenes de secundaria se aprecia que ellos realizan constantemente abstracciones de la realidad. La introducción de la tecnología en la escuela se hace con el propósito de desarrollar en los estudiantes un pensamiento matemático más sólido, mediado por la tecnología. En el caso de las computadoras, su valor reside en que ofrece distintos medios de expresión matemática y además formas nuevas en las que se puede manipular el objeto matemático bajo estudio.

El concepto de instrumento psicológico es fundamental en la teoría psicológica de Vigotsky, quién argumenta que “los instrumentos psicológicos son los recursos simbólicos – signos, símbolos, textos, fórmulas, medios gráficos-simbólicos – que ayudan al individuo a dominar sus propias funciones psicológicas <naturales> (percepción, memoria, atención, etcétera) Los instrumentos psicológicos actúan como un puente entre los actos individuales de cognición y los requisitos simbólicos socioculturales de estos actos” (Kozulin, p.15). Un ejemplo de instrumento psicológico básico es el lenguaje.

Para Vigotsky existen tres principales mediadores en la cognición humana: los instrumentos materiales, los instrumentos psicológicos y los mediadores humanos. De estos, los instrumentos psicológicos simbólicos son preponderantes. Según Kozulin (2000) debido a que:

> *Ocupan una posición estratégica ¨entre¨ los estímulos del mundo y los procesos psicológicos internos del individuo. Por tanto, los instrumentos psicológicos transforman la interacción no mediada del ser humano con el mundo en una interacción mediada. [De tal manera que las] funciones psicológicas “naturales” como la percepción, a memoria y la atención se transforman bajo la influencia de los instrumentos psicológicos y generan nuevas formas culturales de las funciones psicológicas. La calidad de estas transformaciones depende de la calidad de los instrumentos simbólicos disponibles en una cultura dada y de las condiciones en las que los individuos se apropian de estos instrumentos (p. 18).*

El mismo autor afirma que el razonamiento hipotético, los experimentos teóricos, el empleo de modelos, la resolución generalizada de problemas y otras actividades académicas no se pueden lograr sin una forma de representación simbólica basada en el empleo de instrumentos psicológicos. Pero adquirir estos instrumentos requiere de un paradigma de aprendizaje diferente del de adquisición de contenidos. Es decir, éste paradigma debe tener una intencionalidad por parte del enseñante-mediador, si no, no habrá apropiación de los instrumentos psicológicos o éstos se adquirirán como un contenido, y para apropiarse de éstos, la mediación de significados es un momento esencial porque sólo obtendrán sus significado a partir de los convencionalismos culturales que los engendraron. Así también, los instrumentos deben ser generalizados para que sean capaces de organizar los procesos cognitivos y de aprendizaje del individuo en contextos y tareas diferentes. A este respecto Kozulin (2000) sostiene que:

> *El concepto de instrumento psicológico ofrece una nueva perspectiva para el estudio comparativo del desarrollo cognitivo, el aprendizaje en las aulas, las diferencias intelectuales en la cognición y las posibles maneras de hacer que la educación se ajuste más a las necesidades que plantea enseñar a pensar y a resolver problemas de manera creativa (p. 15).*

### 1.1.6. La tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

Una enseñanza significativa va más allá del simple uso de conceptos y técnicas de cálculo para resolver problemas, propone incentivar en el alumno la intuición, es decir, que permita al estudiante descubrir propiedades y características de los objetos de estudio a partir del análisis de diversas situaciones. Sin embargo, en muchos de los casos, conseguir esto bajo un modelo de enseñanza tradicional (sin el uso de nuevas herramientas tecnológicas) se tienen que realizar muchos cálculos para llegar a generalizar a partir de observaciones o casos particulares y poseer una capacidad de razonamiento para contrastar la certeza de las intuiciones. Tales actividades tienen una desventaja en el hecho de que requieren tiempo suficiente para que el estudiante madure los conceptos involucrados y asimile las características o propiedades de los objetos matemáticos.

El tiempo es un factor que los profesores valoran cuando se trata de planificar sus clases para llevar a buen término el programa de matemáticas. Una posible alternativa sería el uso de herramientas tecnológicas, el cual es sugerido en los distintos proyectos o programas de educación básica de la Secretaria de Educación Pública (SEP, 2011a) para recrear ambientes de *simulación* que faciliten la experimentación y el estudio de diferentes situaciones en menos tiempo.

Ciertas herramientas tecnológicas permiten experimentar reiteradamente distintas situaciones, probar hipótesis, variar las ya establecidas, cambiar valores, modificar condiciones, etcétera. Con estas acciones se puede conseguir, por ejemplo comprender a más profundidad un concepto, teorema o algoritmo, explotando el potencial de cada uno. En primera instancia, una ventaja de su uso es que se reduciría en cierta medida el tiempo para realizar las acciones mencionadas, que sí se hicieran con lápiz y papel. Al dejar de ser un obstáculo la realización de operaciones rutinarias cabe la posibilidad de enfocar la atención del estudiante a la reflexión y el análisis de los resultados.

En segundo lugar, la visualización (Rivera, 2010) a través de un medio virtual como apoyo gráfico sería otro aliciente en la comprensión de muchos conceptos, propiedades, nociones matemáticas, por decir algo. Esta comprensión le permite al alumno establecer conexiones entre ramas de las matemáticas y verlas como un todo conectado.

Por otro lado, la incorporación y uso potenciado de las herramientas tecnológicas va más allá del campo académico, se extiende hacia lo profesional, el hogar, lugares de esparcimiento, etcétera, de modo que lo extraño sería ignorar la realidad de estas nuevas herramientas. El uso de la tecnología en la escuela, se aclara, no es percibir a la computadora como objeto central para conseguir aprender sino el pensamiento matemático que se puede obtener del uso de ésta ya que lo importante de esta herramienta y de otras, es precisamente la capacidad que tienen de proporcionarnos medios alternativos de expresión y diversas formas en las que se pueda manipular el objeto de estudio posibilitando nuevas formas de argumentación, que no por ser diferentes serán menos válidas.

En otras palabras, la pertinencia pedagógica del uso de la tecnología radica en que nos permite centrar la idea de que lo realmente ventajoso en la acción educativa virtual, más allá del simple uso de software y/o conectividad a la red, consiste en estimar las múltiples perspectivas formativas que abre la interacción con herramientas tecnológicas educativas apropiadas (Olive y Makar, 2009).

Las revisiones de trabajos antecedentes que se hacen en esta sección están dirigidas por las respuestas que dan los autores a la pregunta de cómo las emplean de manera creativa y eficaz en el ámbito educativo. Se verá que las diferentes respuestas que se obtienen obedecen a la perspectiva de aprendizaje que se tenga, es decir, lo que se piense del aprendizaje determinará la manera de reconocerlo y ejecutar acciones al respecto, señalará a qué prestar atención, qué problemas identificar y por lo tanto qué soluciones dar con nuevas herramientas tecnológicas.

Una de las revisiones más importantes en esta sección de antecedentes es la que se refiere a la teoría sociocultural de Lev Vigotsky que considera al aprendizaje como una experiencia esencialmente social (en términos muy generales). Se enfoca en el papel de la *mediación instrumental* en el desarrollo de la cognición y es justamente esta función lo que le confiere valía en los procesos educativos en ambientes virtuales en los que el aprendizaje no se desentiende de concebirse como una extensión en y a partir de la interacción social. Resta decir que la enseñanza puede lograr mejores resultados en el aprendizaje en función del uso que se haga de los medios intelectuales, técnicos, económicos, culturales, físicos, etcétera, que estén a disposición y esto dependerá en último momento del profesor y los alumnos.

En síntesis, la tecnología está transformando los escenarios educativos y promoviendo la aparición de otros nuevos. Por esto, se puede afirmar que ésta puede modificar las prácticas educativas, siempre y cuando su uso sea el más pertinente (Olive, 2010).

### 1.1.7. Ideas matemáticas significativas y tecnología

La investigación realizada por Rojano (2002) sobre el aprendizaje de las matemáticas en la escuela secundaria abarca cuatro diferentes perspectivas. La primera está relacionada con los procesos cognitivos que tienen lugar en conceptualizaciones importantes; la segunda perspectiva tiene que ver con el concepto de la escuela secundaria, es decir, con el papel que desempeña este nivel escolar en la preparación de sus estudiantes, por un lado para ingresar al nivel educativo subsecuente y por otro, como el nivel que concluye la educación básica; la tercera perspectiva se encamina hacia la influencia que ejerce la incorporación de nuevas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas y la organización del aula; y la última aborda la reformulación de qué enseñar, cómo enseñar y por qué enseñar en tiempos actuales.

Sin embargo, el énfasis de tal investigación estuvo puesto en la influencia de nuevas herramientas de aprendizaje en la educación matemática y en los procesos cognitivos generados que puedan conducir al conocimiento de factores clave que favorezcan u obstaculicen el acceso a estudiantes a ideas matemáticas poderosas.

La autora aclara que las ideas significativas en matemáticas no son necesariamente nociones matemáticas avanzadas sino que son nociones clave que proveen un acceso real a ideas matemáticas poderosas. Una idea matemáticamente significativa es relativa, es decir, depende de su poder para llevar el pensamiento matemático del estudiante a un nivel más abstracto, formal y complejo.

Centrando la atención en la generalización de patrones, la autora hace mención de la transición de pensamiento de los estudiantes en tareas matemáticas, es decir, ir de lo específico a lo general (procesos de generalización). En la escuela secundaria los estudiantes son capaces de acceder a representaciones simbólicas que les permiten alcanzar el nivel de manipulación de la generalidad, dicho nivel es el último del ciclo de la generalización propuesto por Mason (1995). Sin embargo, existe una tendencia por abreviar los dos primeros niveles lo que evita producir una expresión algebraicamente apropiada para el problema en cuestión. Hace notar que los estudiantes tienen dificultad para traducir el problema planteado en lenguaje común a una expresión simbólica o algebraica, además de las dificultades para la resolución de dicha expresión.

El trabajo que realiza la autora con estudiantes[2] muestra como el uso del soporte tecnológico (Excel) actúa como un facilitador (o intermediario). Es decir, los ayudó a expresar de una manera general la existencia de relaciones entre los datos y las cantidades desconocidas con la posibilidad de cambiar el valor de éstas últimas para representar distintos casos del mismo problema. Además los ayudó a representar y probar relaciones matemáticas sin tener que manejar un lenguaje simbólico como tal. Aun así, ellos pudieron observar éstas relaciones representadas simbólicamente en las fórmulas de la hoja de cálculo. En otras palabras, las fórmulas de Excel constituyeron un lenguaje intermediario entre lenguaje natural y algebraico (Rojano, 1996 b). Asume que las relaciones algebraicas están vinculadas a un dominio numérico y en este sentido la hoja de cálculo provee un contexto para generalizar desde lo aritmético y sistematizar estrategias de los estudiantes.

Los resultados del proyecto de investigación sugieren que la hoja de cálculo puede jugar un papel importante cuando se consideran los métodos intuitivos de los estudiantes como base para enseñarles métodos "más algebraicos" para la resolución de problemas. Sin embargo, la cuestión no respondida es saber cómo ayudar a los estudiantes a transitar de sus propias estrategias a métodos algebraicos formales.

Por último, señala a la hoja de cálculo como un ambiente computacional, entre otros como *SimCalc Math Worlds*, *Cabri-Geométre, Logo*, etc. que permiten el acceso a distintos sistemas de representación haciendo posible un acercamiento con el fenómeno o modelo matemático en cuestión. Afirma que el uso de ciertos ambientes computacionales interactivos puede transformar

[2] El estudio fue parte del Proyecto Anglo-Mexicano. Fue conducido por dos equipos de trabajo, uno en Inglaterra y otro en México. El proyecto se denominó: Modelación Matemática con Hojas de cálculo. Se abordaron campos de ciencia y educación matemática. El proyecto se avocó, por un lado, acerca de las prácticas matemáticas escolares de alumnos de 16 a 18 años y por otro lado, la influencia cultural de dichas prácticas en ambos países.

profundamente la forma en la cual las matemáticas son entendidas y aprendidas en la escuela secundaria. Es decir, conectar las matemáticas con el mundo real usando diferentes sistemas de representación. Está claro que la incorporación de las TIC´s en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas podrían facilitar o posibilitar el acceso a ideas matemáticas significativas.

### 1.1.8. Equidad y uso de tecnología educativa en matemáticas

En México, el acceso al conocimiento no es reconocido como un problema público trascendental aunque es obvia la exclusión de aquellos que permanecen al margen de los procesos educativos en cualquier nivel escolar. Nuestra realidad requiere una reorientación paulatina de las prácticas escolares y sus concepciones epistemológicas y cognitivas para encaminar al estudiante a ideas matemáticas significativas a través de la adquisición de habilidades fundamentales como por ejemplo, la exploración, la experimentación, la modelación, el manejo de información y la habilidad para sistematización, por decir algo. Bajo un enfoque de enseñanza tradicional esto no sería posible (Moreno & Block, 2002).

El trabajo que aquí se presenta explora el uso de los manipulativos virtuales como medio de experimentación de acciones de abducción e inducción, o de razonamiento visual (Giaquinto, 2007; Rivera, 2008-2013). La utilización de los manipulativos virtuales se destaca como un medio para que estudiantes en desventaja accedan a ideas matemáticas significativas (Chiappini & Cozzani, 2014; Dunham & Hennessy, 2008; Rojano, 2002). Estos estudiantes se pueden caracterizar por encontrarse normalmente en situaciones de desventaja en la escuela, ya sea por falta de desarrollo de habilidades, o por carencia de recursos adecuados para la resolución de tareas o problemas matemáticos en la escuela. Se busca promover el desarrollo de razonamiento algebraico en los estudiantes desaventajados específicamente desencadenando acciones de abducción e inducción (base en los procesos de generalización algebraica) durante la resolución de tareas de generalización de patrones de figuras.

En este sentido es que la utilización de la tecnología en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en la educación básica se puede enmarcar en una línea de investigación del uso de la tecnología para la nivelación del campo de acción de los escolares (Dunham & Hennessy, 2008). En particular, este tipo de utilización fortalece los argumentos que hasta ahora se han dado en torno del uso de la tecnología para que grupos en desventaja estén en igualdad de condiciones al término de determinada instrucción escolar (Ídem, p.388; Chiappini, 2013-2014). El potencial de las herramientas tecnológicas se materializa dependiendo de la habilidad del maestro en integrar la tecnología en el currículo matemático de acuerdo a principios pedagógicos sólidos.

### 1.1.9. Manipulativos Virtuales como alternativa de nivelación del aprendizaje

En los últimos años se han desarrollado lo que se conoce como *manipulativos virtuales,* programas diseñados específicamente para favorecer el aprendizaje de las matemáticas escolares. Estas y otras herramientas fueron sugeridas para una enseñanza significativa en temas matemáticos y resolución de problemas desde hace más de una década (ver NCTM, 2000). Por ser muy reciente el desarrollo y uso de estas herramientas hay poca literatura que reporte evidencia de resultados en cuanto a su uso en ambientes educativos. Esta investigación de campo es un esfuerzo por dar cuenta de las bondades de tales herramientas que tienen por objetivo desarrollar y/o ampliar habilidades y conocimientos matemáticos.

Para aprender y comprender las matemáticas en todos los niveles, el estudiante necesita involucrarse. Como se dice, las matemáticas no son un deporte para espectadores, muchas de las estrategias de enseñanza omiten involucrarlos activamente. Por lo tanto, se requiere crear estrategias de enseñanza atractivas para ellos, dado que la nueva tecnología está absorbiendo su atención, es prioridad actuar con tesón para atender la inquietud y hacer de la tecnología una aliada para esta labor. Una alternativa conveniente es utilizar manipulativos virtuales, los cuales resaltan como una excelente estrategia de enseñanza.
Sus principales características son:

- Tienden a ser más que la réplica exacta de los manipulativos “concretos” o “físicos”
- En general, incluyen opciones adicionales propias de un ambiente digital (copiar y colorear piezas, seleccionar y mover múltiples objetos).
- La mayoría ofrece simulaciones de conceptos y operaciones que no pueden ser fácilmente representadas por los manipulativos tradicionales
- Algunos combinan representaciones icónicas y simbólicas de conceptos y operaciones en un mismo ambiente.
- Son flexibles, independientes y dinámicos; pueden ser controlados enteramente por el maestro/a y los estudiantes, además, ser usados en diferentes lecciones, niveles y edades.
- Algunos ofrecen registrar las acciones o resultados para proveer de retroalimentación al estudiante.
- Están disponibles sin límite, en cualquier lugar, las 24 horas del día vía Internet. Profesores, padres y niños pueden acceder a ellos gratis.

  (Ver Matus, C. y Miranda, H. ,2010).

Es importante resaltar que los jóvenes tienen la oportunidad de generar su propio conocimiento debido a la facilidad de manipulación de los objetos en la computadora porque les brinda un aprendizaje que recurre a la experiencia y la intuición. Por ejemplo, hay conceptos que expresados verbalmente son difíciles de transmitir y podrían ser asimilados con rapidez a través de la manipulación de las imágenes.

Si vamos más allá, en cuanto a la resolución de problemas por parte del alumno la dificultad inicia en la comprensión del problema que puede estar ligada a la comprensión del sentido del texto, dificultades en destacar lo principal de lo accesorio, pérdida del sentido del problema durante la ejecución de operaciones intermedias, dificultades de orientación espacial durante las operaciones aritméticas, como por ejemplo, alinear mal los números en operaciones de sumas o divisiones, defectos de planificación y elección del orden de las operaciones intermedias, falta de confrontación de los resultados con los datos del problema, etcétera. Para contrarrestar estos limitantes se tiene como ventaja el uso de recursos multimedia como los manipulativos virtuales, con ellos el tiempo invertido en las actividades se minimiza si se compara la ejecución a lápiz y papel en donde se consume más tiempo en lugar de ocuparse propiamente del problema planteado. Si tomamos como ejemplo el trabajo con fracciones, si el estudiante ha de trazar el dibujo de lo que haya de tomarse como unidad a fraccionar, perderá más tiempo en dibujar y colorear, que en representarse mentalmente la fracción de que se trate. Para la enseñanza de las nociones matemáticas la manipulación es importante porque a partir de la propia experiencia es el estudiante el que acaba descubriendo el concepto.

### 1.1.10. Qué es un Manipulativo Virtual

Se denomina *manipulativos* por que los "objetos pueden ser tocados y movidos por los estudiantes para introducir o reforzar una idea o concepto matemático" (Hartshorn & Boren, 1990, p.1) y *virtuales* por la naturaleza de su creación y son ejecutados en una computadora que simula su existencia. En palabras más técnicas o cotidianas son pequeños programas hechos en lenguaje Java instalados en páginas HTLM o páginas Web. Es decir, son objetos visuales que ayudan a ilustrar las relaciones matemáticas y sus aplicaciones. Estos manipulativos permiten a los estudiantes examinar visualmente, explorar y desarrollar conceptos. Moyer, Bolyard y Spikell (2002) definen un manipulativo virtual como "una presentación visual de un objeto dinámico e interactivo, basado en la Web, que representa oportunidades para la construcción del aprendizaje matemático" (p.373).

Un manipulable para matemáticas puede entrar en dos categorías: la primera, los *Físicos*, que se definen como cualquier material u objeto físico del mundo real que los estudiantes pueden "palpar" para ver y experimentar conceptos matemáticos. La otra categoría, son los *Virtuales*, que se definen como representaciones digitales de la realidad posibilitadas por las computadoras, y que el estudiante puede también manipular con el mismo objetivo de los primeros.

*Qué le ofrece un manipulativo virtual matemático al estudiante:*

- La facilidad de manipulación de los objetos en la computadora le brinda un aprendizaje basado en la experiencia y la intuición.
- Lo ayuda a construir, fortalecer y conectar varias representaciones de ideas matemáticas al tiempo que aumentan la variedad de problemas sobre los que pueden pensar y resolver.
- Le presenta objetos para reflexionar y hablar. Le suministran un lenguaje adicional para comunicar ideas matemáticas sobre sus percepciones visuales, táctiles y espaciales.
- Interviene en el transito del nivel concreto al abstracto e incrementa su capacidad para adquirir habilidades y conceptos al ofrecer una representación física, tangible, móvil, armable y dado que es armable, le permite visualizar conceptos matemáticos de manera concreta.

*Beneficios Matemáticos que le aporta:*

- Hacer conscientes ideas y procesos matemáticos.
- Permitirle razonar mientras manipula en la computadora gráficas o figuras dinámicas y las expresiones matemáticas relacionadas con éstas.
- Explorar, gracias a la flexibilidad de los manipulativos, las figuras geométricas de maneras que no son posibles con figuras físicas (cambios en forma o tamaño, cambios generales o particulares, etcétera).
- Facilitar la exploración rápida de los cambios en las expresiones matemáticas con el simple movimiento del ratón, en contraposición de lo que sucede cuando se utiliza lápiz y papel.
- Visualizar los efectos que tiene en una expresión matemática, modificar otra. Por ejemplo, cambiar el valor de un parámetro de una ecuación y ver cómo la gráfica resultante cambia de forma.
- Acelerar la exposición a un gran número de problemas y ofrecer retroalimentación inmediata.

- Relacionar con facilidad símbolos matemáticos, ya sea con datos del mundo real o con simulaciones de fenómenos corrientes, lo que le da mayor significado a las matemáticas.
- Obtener retroalimentación inmediata cuando él genera expresiones matemáticas que no satisfacen la solución del problema en cuestión.
- Realizar procesos de composición y descomposición de formas (realizar unidades compuestas, descomponer un hexágono en otras formas cómo triángulos, etcétera).
- Conectar el aprendizaje geométrico/espacial al aprendizaje numérico, relacionando dinámicamente ideas y procesos numéricos con las ideas de los estudiantes sobre formas y espacio.
- Permitir que se detenga la aplicación en cualquier momento del proceso si se requiere tiempo para pensar sobre éste. Además, puede repetirse si se desea ver nuevamente parte de esta o ensayar otras respuestas.

Entre los manipulativos virtuales disponibles en la red y con prestigio por el tipo de herramientas y recursos para el aprendizaje de las matemáticas escolares se encuentran los siguientes: El proyecto "Interactive Project" de la fundación Shodor, *http://www.shodor.org/interactivate/*. El proyecto "Eduteka de Colombia", *http://www.eduteka.org/MI/master/interactivate/*. También el NCTM, tiene a su cargo el proyecto "Illuminations-Marcopolo" *http://illuminations.nctm.org/ActivitySearch.aspx*. Uno más es el proyecto "WisWeb", *http://www.fi.uu.nl/wisweb* del Freudenthal Institute en Holanda. Pionero en este tipo de iniciativas en particular para la enseñanza de álgebra en secundaria. Por último, otras iniciativas personales como "Arcytech" de Jacobo Bulaevski en *http://arcytech.org/java/*, "Manipula Math with Java" de Ies Inc. en *http://www.ies.co.jp/math/java/index.html* y "Dr. Super" de George Manson University *http://www.galaxy.gmu.edu/~drsuper/*. Pero el más destacado en la red es el de la Universidad del estado de Utah en los Estados Unidos Americanos. Allí existe la Biblioteca Nacional de Manipulativos Virtuales una gran colección de manipulativos, juegos y actividades organizada por temas y niveles educativos.

### 1.1.11. Manipulativo virtual: Biblioteca Nacional de Manipuladores Virtuales

La Universidad de Utah puso en marcha en el año 1999 un proyecto de recursos multimedia que contribuyen a la enseñanza de las matemáticas escolares, financiado por la "National Science Foundation", el proyecto recopila una extensa colección de manipulativos virtuales, más de 100 programas de software interactivo, en español, francés e inglés. Son herramientas y editores matemáticos en Java que enriquecieran la enseñanza matemática interactiva. El uso de Java como lenguaje de programación permite que las herramientas sean accesibles a través de la Web y en diversas plataformas. El proyecto se denominó: Biblioteca Nacional de Manipuladores Virtuales (National Library of Virtualy Manipulatives que se abrevia con las siglas: NLVM). Es uno de los manipulativos virtuales más solicitado en la red. La dirección electrónica para acceder a éste es: http://nlvm.usu.edu/es/nav/vlibrary.html, la imagen muestra su página de inicio.

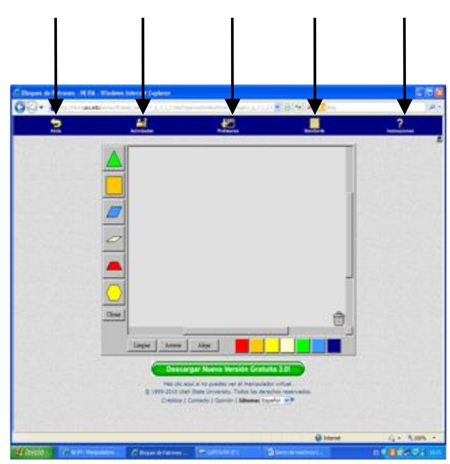

Enseguida se dan a conocer las características más relevantes del manipulativo:

1. Las áreas de las matemáticas que se pueden abordar son: Números y operaciones; álgebra; geometría; medidas; y análisis de datos y probabilidad. Se presentan en una columna. Estas áreas son compatibles con los ejes temáticos que se estudian en el programa de matemáticas de secundaria en México.

2. En fila (horizontal) se muestran los grados o niveles educativos para los cuales están dirigidos los manipulativos. Desde preescolar hasta principios de medio superior. El de nuestro interés recae en el nivel 6-8 que corresponde al de la educación secundaria en México. De manera que para elegir los manipulativos virtuales al cual se quiera accesar hay que hacer clic en donde se une el área con el nivel que se desee. Por ejemplo, para accesar a los que se usaron en esta investigación, había que hacer clic en la conjunción del área de álgebra y el nivel 6-8.


3. Después de elegir un grado y área se despliega en la pantalla una lista de manipulativos que corresponden al nivel y área seleccionados, se presentan con un icono cada uno, su denominación y se menciona brevemente que se puede hacer con cada uno de estos. Si se hace clic en el icono o denominación, inmediatamente abre el manipulativo y está listo para usarse.


4. Una vez abierto cualquier manipulativo en la parte superior hay un menú de cinco opciones: *Atrás, Actividades, Profesores, Estándares e Instrucciones*. La primera, es para retroceder una ventana anterior; la de Actividades, despliega una columna a la derecha de la pantalla en donde se puede elegir una de varias actividades predeterminadas que se describen de manera precisa; la de Profesores, proporciona sugerencias



didácticas para ellos en relación al contenido matemático que se aborda; la de Estándares, vincula de manera directa el contenido del manipulativo con los estándares matemáticos establecidos por el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de los Estados Unidos (NCTM por sus siglas en inglés); y la de Instrucciones, también despliega una columna en la que detalla qué y cómo usar las herramientas con las que cuenta el manipulativo para que el usuario pueda efectuar las actividades en este sin dificultades.

Esta biblioteca de manipulativos puede ser utilizada libremente por profesores que desean enriquecer sus clases de matemáticas. Los materiales también sirven para entrenar futuros profesores. La biblioteca es extendida y refinada constantemente para la enseñanza de las matemáticas.

Los requisitos del sistema para ver los manipuladores virtuales, es utilizar un navegador Web que tenga Java activado. Los manipulativos virtuales (applets en Java) funcionan en los siguientes navegadores Web:

Windows Vista - Internet Explorer 7.0
Windows XP - Firefox 1.0, 1.5 y 2.0
Windows XP - Internet Explorer 6.0 y 7.0
Windows 2000 - Internet Explorer 5.5
Windows 2000 - Netscape 4.08, 4.75 y 6.1

- Mac OS X - Camino 0.8
- Mac OS X - Firefox 1.0 y 1.5
- Mac OS X - Netscape 7.1
- Mac OS X - Safari 1.2.3

### 1.1.12. El contexto escolar en el que se lleva a cabo el presente estudio

En el panorama actual de las matemáticas en secundaria, en México, se da a conocer lo que pretende la propuesta de la Reforma Integral de la Educación Básica (RIEB) y el Sistema Educativo Nacional (SEN) en la formación de individuos que deberán integrarse a una sociedad para llevar una vida digna y productiva a futuro como adultos responsables. Se hace una semblanza del plan y programa de estudio de matemáticas vigentes, se enfatiza en aspectos que son relevantes para esta investigación como los principios pedagógicos; los campos de formación para la educación básica, incluido en éstos el de pensamiento matemático que es de nuestro interés y el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en el aprendizaje de las matemáticas en secundaria. La semblanza aterriza en los propósitos del programa de matemáticas que tienen que ver con la generalización de patrones y su relación con las competencias matemáticas que se pretenden desarrollar en los estudiantes.

*Estudio de las matemáticas en la escuela secundaria en México*

Actualmente la RIEB termina con un ciclo de reformas curriculares en cada uno de los tres niveles que ahora integran la Educación Básica, que inició en 2004 con la Reforma de Educación Preescolar, continuó en 2006 con la de Educación Secundaria y en 2009 con la de Educación Primaria. La propuesta de la RIEB está "orientada al desarrollo de competencias y centrada en el aprendizaje de los estudiantes" (SEP, 2011 a) e intenta reestructurar la escuela pública y su función en el SEN, para ello éste deberá:

> *…fortalecer su capacidad para egresar estudiantes que posean competencias para resolver problemas; tomar decisiones; encontrar alternativas; desarrollar productivamente su creatividad; relacionarse de forma proactiva con sus pares y la sociedad… El dominio generalizado de las tecnologías de la información y la comunicación, y en general de las plataformas digitales, como herramientas del pensamiento, la creatividad y la comunicación;…la producción y circulación del conocimiento; el trabajo colaborativo en redes virtuales… para alcanzar una vida digna y productiva. (p. 9-10).*

Entre los principios pedagógicos que sustentan al plan de estudios se encuentra el que enfatiza el desarrollo de competencias, el logro de los Estándares Curriculares y los aprendizajes esperados. Se definen en el plan de estudios (2011) los siguientes conceptos: como *competencia* "la capacidad de responder a diferentes situaciones, e implica un saber hacer (habilidades) con saber (conocimiento), así como la valoración de las consecuencias de ese hacer (valores y actitudes)". Los *estándares curriculares* "son descriptores del logro y definen aquello que los alumnos demostrarán al concluir un periodo escolar;

sintetizan los *aprendizajes esperados*... [Éstos] son indicadores de logro que, en términos de la temporalidad establecida en los programas de estudio, definen lo que se espera de cada alumno en términos de saber, saber hacer y saber ser; además, le dan concreción al trabajo docente al hacer constatable lo que los estudiantes logran, y constituyen un referente para la planificación y la evaluación del aula" (p. 29).

Otro de los principios pedagógicos de interés para esta investigación es el uso de materiales educativos para favorecer el aprendizaje y el de generar ambientes de aprendizaje, éste último entendido en el plan de estudios (2011) como "el espacio donde se desarrolla la comunicación y las interacciones que posibilitan el aprendizaje. Con esta perspectiva se asume que en los ambientes de aprendizaje media la actuación del docente para construirlos y emplearlos como tales" (p. 28).

La creación de ambientes de aprendizaje involucra acciones pedagógicas en las que los sujetos sean creadores, participen de manera compartida, solidaria, reflexiva, comprensiva y democrática. El rol del alumno se visualiza como responsable de sus propios procesos de aprendizaje, la posición del docente es también diferente, quien deja ser la única fuente de información y se convierte en un activo participante de la comunidad de aprendizaje.

La modificación del ambiente en el aula exige una nueva visión, exige un cambio de mentalidad en todos los involucrados en la enseñanza. En cuanto al uso de materiales educativos en el plan de estudios se propone emplear, entre otros, materiales audiovisuales, multimedia e Internet, los cuales "articulan códigos visuales, verbales y sonoros, y generan un entorno variado y rico en experiencia, a partir del cual los estudiantes crean su propio aprendizaje" (p. 30). La investigación que aquí se reporta tuvo como plataforma tecnológica para las actividades matemáticas llevadas a cabo un manipulativo virtual que satisface los intereses del plan de estudios y del programa de matemáticas.

Los campos de formación para la Educación Básica organizan, regulan y articulan los espacios curriculares. Estos campos son:

-Lenguaje y comunicación

-Pensamiento matemático

-Exploración y comprensión del mundo natural y social

-Desarrollo personal y para la convivencia

La investigación que se llevó a cabo en esta tesis se ubica en el campo del pensamiento matemático con respecto al cual en el plan de estudios (2011) se lee lo siguiente:

> *El campo Pensamiento matemático articula y organiza el tránsito de la aritmética y la geometría y de la interpretación de información y procesos de medición, al lenguaje algebraico; del razonamiento intuitivo al deductivo, y de la búsqueda de información a los recursos que se utilizan para presentarla…La actividad intelectual fundamental se apoya más en el razonamiento que en la memorización. El énfasis de este campo se plantea con base en la solución de problemas, en la formulación de argumentos para explicar sus resultados y en el diseño de estrategias y sus procesos para la toma de decisiones. En síntesis, se trata de pasar de la aplicación mecánica de un algoritmo a la representación algebraica (p.52)*.

En secundaria, este campo atiende el tránsito del razonamiento intuitivo al deductivo, y de la búsqueda de información al análisis de los recursos que se utilizan para presentarla. Se busca que los alumnos sean responsables en la construcción de nuevos conocimientos a partir de saberes previos, lo que implica:

- Formular y validar conjeturas
- Plantearse nuevas preguntas
- Comunicar, analizar e interpretar procedimientos de resolución.
- Buscar argumentos para validar procedimientos y resultados
- Encontrar diferentes formas de resolver los problemas
- Manejar técnicas de maneras diferentes

En cuanto al desarrollo de habilidades digitales, el plan de estudios señala la existencia de estándares para el desarrollo de éstas, los cuales son descriptores del saber y saber hacer de los alumnos cuando usan las Tecnologías de la

Información y la Comunicación. De los estándares se desprenden indicadores de desempeño para los docentes en el uso de las TIC, que a continuación se enuncian: utilizar herramientas y recursos digitales para apoyar la comprensión de conocimientos y conceptos; aplicar conceptos adquiridos en la generación de nuevas ideas, productos y procesos, utilizando las TIC; utilizar modelos y simulaciones para explorar algunos temas; así también generar productos originales con el uso éstas, en los que se incentive el pensamiento crítico, la creatividad o la solución de problemas basados en situaciones de la vida real.

Ahora bien, en el Plan Nacional de Desarrollo 2013-2018 (PND) una de las cuatro metas es denominada *México con Educación de Calidad* de ésta se desprenden cinco objetivos interrelacionados, el primero de éstos es desarrollar el potencial humano de los mexicanos con educación de calidad y una de sus estrategias es promover la incorporación de las nuevas tecnologías de la información y comunicación en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Ésta estrategia empata con dos de los seis objetivos del Programa Sectorial de Educación 2013-2018 (PSE), que son “Asegurar la calidad de los aprendizajes en la educación básica y la formación integral de todos los grupos de la población” y el otro, “Impulsar la educación científica y tecnológica como elemento indispensable para la transformación de México en una sociedad del conocimiento”.

Sin embargo, las expectativas de las TIC en la educación actual, lamentablemente, se alejan de la realidad. Esto se debe a que los efectos benéficos en la educación por parte de las tecnologías distan de estar tan generalizados como se cree, debido a las limitaciones o inexistencia total de posibilidades de acceso y uso en la educación formal y escolar de estas herramientas. Y para mantener las expectativas en las TIC es ineludible considerarlas como herramientas para pensar, sentir y actuar solos y con otros, es decir, como instrumentos psicológicos en el sentido vigotskyano de la expresión, puesto que de esta manera se logrará que la información sea representada, procesada, transmitida y compartida.

En adelante, saber que de los propósitos del estudio de las matemáticas se espera que los alumnos “modelen y resuelvan problemas que impliquen el uso de ecuaciones hasta de segundo grado, de funciones lineales o de **expresiones generales que definen patrones”** (p. 14). La investigación llevada a cabo giró en torno a la resolución de problemas relacionados con la generalización de patrones, atendiendo al propósito antes mencionado.

Así también, el programa de estudio (2011) da a conocer los Estándares Curriculares de Matemáticas los cuales “tienen la visión de una población que sabe utilizar los conocimientos matemáticos que comprenden el conjunto de aprendizajes que se espera adquieran los alumnos en los cuatro períodos escolares para conducirlos a altos niveles de alfabetización matemática” (p.15). Estos se organizan en:

- Sentido numérico y pensamiento algebraico
- Forma, espacio y medida
- Manejo de la información
- Actitud hacia el estudio de las matemáticas

El eje de *sentido numérico y pensamiento algebraico* se subdivide en cuatro temas (el de nuestro interés está resaltado):

- Números y sistemas de numeración
- Problemas aditivos
- Problemas multiplicativos
- **Patrones y ecuaciones**

El estándar curricular específico para el tema de patrones es que el alumno “resuelve problemas que implica expresar y utilizar la regla general lineal o cuadrática de una sucesión” (p.16). Sin retirarnos de lo que persigue este estándar, las actividades que realizaron los estudiantes en nuestra investigación se condujeron por ese camino. Es preciso mencionar que el enfoque didáctico del programa de matemáticas se centra, con respecto a la metodología didáctica, en utilizar secuencias de situaciones problemáticas que generen interés en los alumnos y los lleven a reflexionar, a encontrar diferentes formas de resolver los problemas y a formular argumentos que validen los resultados. El trabajo en el campo de la didáctica de la matemática da cuenta de lo determinante que desempeña el *medio*, el programa de matemáticas (2011) lo define como:

> *La situación o las situaciones problemáticas que hacen pertinente el uso de las herramientas matemáticas que se pretenden estudiar, así como los procesos que siguen los alumnos para construir conocimientos y superar las dificultades que surgen en el proceso de aprendizaje... para resolver la situación, el alumno debe usar sus conocimientos previos, mismos que le permiten entrar en la situación, pero el desafío consiste en reestructurar algo que ya sabe, sea para modificarlo, ampliarlo, rechazarlo o para volver a aplicarlo en una nueva situación (p. 19-20).*

Cuando se plantea un problema y se deja en manos del estudiante, sin explicación previa de cómo se resuelve, usualmente surgen procedimientos y resultados diferentes, que son producto de cómo piensan los alumnos y de lo que saben hacer. Ante esto, el verdadero desafío para los docentes consiste en ayudar a los alumnos a analizar y socializar lo que produjeron. En resumen, el enfoque didáctico pretende lograr que los alumnos construyan conocimientos y habilidades con sentido y significado.

Por otro lado, el programa de estudio señala cuatro competencias matemáticas que se irán desarrollando en el transcurso de los cuatro períodos de la educación básica[3]: 1) resolver problemas de manera autónoma, 2) comunicar información matemática, 3) validar procedimientos y resultados y 4) manejar técnicas eficientemente. Éstas mantienen una relación estrecha con el trabajo de investigación porque las principales actividades fueron problemas sobre generalización de patrones que si bien conllevan al desarrollo de tales competencias. Por ejemplo, con respecto a la primera competencia, los problemas de patrones que se les plantearon a los estudiantes tenían varias soluciones o podían ser expresadas de manera equivalente lo que los llevó a encontrar más de un procedimiento de resolución. Ellos tenían la opción de elegir a su consideración el procedimiento más práctico o eficaz que hayan encontrado. Además bajo un ambiente digital se favorece la comprobación de la validez de los distintos

[3] Periodos de la educación básica: Primero: 1º a 3º de preescolar; segundo: 1º a 3º de primaria; tercero: 4º a 6º de primaria; y cuarto: 1º a 3º de secundaria.

procedimientos a vista de todos los estudiantes. En una situación más avanzada del tópico de patrones se puede cambiar uno o más valores de las variables o el contexto del problema, para llegar a generalizar procedimientos de resolución.

En relación a la segunda competencia sobre comunicar la información matemática, los problemas de patrones abren toda posibilidad de que los alumnos expresen de distintas maneras, representen cualitativa o cuantitativamente e interpreten la información matemática y logren establecer relaciones de la situación en cuestión. Esto implica fomentar en el estudiante la exposición con claridad las ideas matemáticas encontradas en lenguaje natural o simbólico, deducir información derivada de las representaciones, inferir propiedades, características o tendencias de la situación o fenómeno representado.

El vínculo de los problemas de generalización de patrones con la tercera competencia acerca de validar procedimientos y resultados se establece cuando los alumnos hallan, para un mismo problema, varios procedimientos que expresan y representan de forma distinta aunque equivalente la solución del problema y después las comunican pero este ejercicio de comunicar sus ideas les demanda explicar y justificar sus procedimientos, mediante argumentos a su nivel que se dirijan hacia el razonamiento deductivo y más adelante hacia la demostración formal.

La última de las cuatro competencias que se pretende desarrollar en el estudiante se refiere al manejo eficiente de técnicas para la resolución de problemas matemáticos. Al abordar una temática a través de problemas relacionados a ésta, con ciertas variantes como es el caso de este estudio, al inicio el estudiante no tendrá una técnica de cómo resolverlos pero al progresar en el estudio del tema se va a ir desarrollando una técnica que se fortalezca, entre otras cosas, con la observación y la búsqueda de datos clave para determinar el procedimiento y la selección de operaciones necesarias para la solución del problema, de manera que para nuevos problemas será capaz de discernir entre los procedimientos y cálculos óptimos, es decir, tendrá una técnica para llegar a la solución.

Como se ha constatado el tópico de generalización de patrones puede satisfacer el desarrollo de las cuatro competencias matemáticas en el estudiante a lo largo de la educación secundaria.

La propuesta de la actual reforma se orienta al desarrollo de competencias para resolver problemas, tomar decisiones, encontrar alternativas, desarrollar productivamente la creatividad, etcétera. En concreto, se centra en el aprendizaje de los estudiantes, y pretende, entre otras cosas, que los estudiantes adquieran un dominio de las tecnologías de la información y la comunicación como herramientas del pensamiento para producir y circular el conocimiento generado.

En este contexto, y situados en el entorno de la educación básica pública, son de resaltar tres planos de vulnerabilidad escolares. En un primer plano aparecen las cuestiones curriculares. Entre las competencias que se pretenden desarrollar en el estudiante se menciona que los estudiantes deben brindar "…argumentos a su alcance que se orienten hacia el razonamiento deductivo y la demostración formal (p. 23)." Señalamientos como éstos, nos indican que se fortalece más el pensamiento matemático de carácter deductivo, pero para alcanzar los objetivos que pretende el Plan y programa de matemáticas, y además lograr desarrollar las competencias matemáticas enunciadas, se hace necesario y esencial desarrollar también el razonamiento inductivo. Si el programa busca que:

> *…los alumnos sean capaces de resolver un problema utilizando más de un procedimiento, reconociendo cuál o cuáles son más eficaces; o bien, que puedan probar la eficacia de un procedimiento al cambiar uno o más valores de las variables o el contexto del problema, para generalizar procedimientos de resolución (p. 23).*

Y el plan de estudios (2011) señala:

> *…La actividad intelectual fundamental se apoya más en el razonamiento que en la memorización. El énfasis de este campo [pensamiento matemático] se plantea con base en la solución de problemas, en la formulación de argumentos para explicar sus resultados y en el diseño de estrategias y sus procesos para la toma de decisiones. En síntesis, se trata de pasar de la aplicación mecánica de un algoritmo a la representación algebraica (p.52).*

Entonces, para desarrollar el pensamiento inductivo hay que saber que éste tiende hacia la generalización la cual representa la columna vertebral del álgebra y la mejor manera de desarrollarla es a través de la exploración de patrones.

En un segundo plano están las cuestiones de equidad. Esto es, por la naturaleza (y por otras razones) del área de conocimiento en la cual particularizamos, las matemáticas y en específico el estudio del álgebra, es indudable el hecho de que en una clase de matemáticas común de la mayoría de las escuelas en nuestro país, los alumnos suelan ser ignorados porque no consiguen comprender las matemáticas que se les enseñan debido a que sólo son transmitidas como algoritmos que hay que memorizarse y por lo tanto éstas carecen de sentido para ellos.

El descuido que se ejerce a la mayoría de los estudiantes debe ser atendido, su estado vulnerable es razón suficiente para ejecutar acciones emergentes que conduzcan a una clase inclusiva, donde los estudiantes sean partícipes en la reconstrucción del conocimiento matemático ahí generado a través de la experiencia individual y social genuinamente compartida, tales situaciones relevantes son justamente las que el profesor debe captar y desentrañar convirtiéndolas en estrategias para ayudar a los estudiantes en desventaja, es decir, usar las habilidades de razonamiento innato de los otros para compartir y clarificar comprensiones de conceptos matemáticos. Esto se revisara a mayor detalle cuando reflexionemos sobre el Ciclo de Enseñanza de las Matemáticas en el marco teórico.

En un tercer plano es necesario considerar la irrupción de la tecnología digital. Esto es, la tecnología digital se extiende con rapidez por casi todas las áreas de conocimiento y las actividades del ser humano, de modo que el terreno educativo no es descartado, por el contrario es campo fértil para su incorporación. La tecnología en la enseñanza debe actuar como un medio, no como un fin, la cual fortalezca y transforme los procesos de enseñanza y aprendizaje. Ésta debe amplificar las posibilidades de la mente, en donde se pueda explorar un mismo fenómeno desde distintas perspectivas dando lugar a otras formas de expresarlo, éste es realmente su valor.

### 1.1.13. Hipótesis de investigación

En la enseñanza de las matemáticas la función de la tecnología digital es potenciar la capacidad de razonamiento del estudiante, de ninguna manera remplazar al profesor sino como un complemento a su práctica de manera que se pueda llagar a cumplir los objetivos de la educación. Partiendo de lo revisado en el capítulo se desprenden las siguientes hipótesis de trabajo:

1. Una forma para desarrollar el razonamiento algebraico en estudiantes de primero de secundaria desaventajados es el uso de manipulativos virtuales como medio de experimentación de acciones de abducción e inducción o de razonamiento visual al resolver tareas matemáticas que tienen que ver con la generalización de patrones.

2. La atención del profesor podrá centrarse en las diferentes posibilidades de los estudiantes, si se avanza hacia una reconstrucción pedagógica de las matemáticas que incorpore la mediación de la tecnología digital para la resolución de problemas matemáticos. Dicha mediación fortalecerán los argumentos que hasta ahora se han dado en torno del uso de la tecnología para que estudiantes en desventaja estén en igualdad de condiciones al término de determinada instrucción escolar.

## 1.2. MARCO TEÓRICO

Con respecto al marco teórico, este se dividió en cuatro apartados, cada uno se concentró en tópicos trascendentales que le dan el fundamento teórico a la presente investigación, en particular, al trabajo de campo realizado con estudiantes de primer grado de secundaria cuando resuelven problemas relacionados con la generalización de patrones.

Los temas que se trataron fueron: a) acerca del razonamiento algebraico y cómo es que se conceptualiza; b) de cómo se desarrolla éste cuando se explora la generalización de patrones de figuras en estudiantes de secundaria; c) el Ciclo de la Generalización y su exploración a través de actividades que involucran la resolución de problemas sobre patrones de figuras que desencadenan tipos de generalización que producen los estudiantes a través de plantillas visuales y d) la última sección está dedicada a la noción del constructo Trayectoria Hipotética del Aprendizaje, la cual vinculamos con las tecnologías digitales.

### 1.2.1. ¿Qué es el razonamiento algebraico?

Definir el álgebra y el razonamiento algebraico como un objeto de pensamiento en la educación básica crea un ambiente de tensión. La limitada visión del álgebra que ha dominado en la escuela por muchas décadas, la coloca como aquella con la que se manipula simbólicamente. Es decir, se le considera como “aritmética generalizada”, lo que conlleva a una enseñanza centrada en su aspecto simbólico (la manipulación de expresiones simbólicas, la solución de expresiones algebraicas, y la indagación de funciones presentadas simbólicamente). Una vez que estas manipulaciones fueron dominadas, el uso de objetos algebraicos y conceptos en la vida real, ficticios o contextos matemáticos, se les considera como aplicaciones de conceptos aprendidos. Se requiere de una visión más amplia que envuelva a las matemáticas escolares con la misma profundidad y poder con la que la han hecho una disciplina teórico-práctica, usarla para integrar las otras ramas de las matemáticas en todos los grados y temas.

En contraste con este acercamiento de las manipulaciones primero y luego la aplicación de instrucciones, se reconoce otro el cual tiene que ver con el aprendizaje de las matemáticas basado en el contexto. Es decir, en situaciones de la vida real o situaciones que involucran problemas matemáticos, constituirán el punto de partida y el principal proceso para comprender conceptos y la ejecución de operaciones.

Algunas situaciones matemáticas pueden tener que ver con las vidas de los estudiantes y experiencias, en o fuera de la escuela que no es necesariamente la tarea de aula o tareas asignadas. Tales situaciones genuinamente relevantes y matemáticamente ricas deben ser apropiadas y exploradas en clases de matemáticas ya que éstas pueden constituir buenos ejemplos de provechoso contenido. De acuerdo a Gravemeijer y Doorman (1999) un problema matemático puro puede también ser un problema en contexto. En cualquier caso, una tarea contextual debe ser experiencialmente real para el estudiante y debe servir como una base sobre el cual el concepto matemático puede ser construido.

Un acercamiento basado en el contexto tiene ventajas más generales e inmediatas. Primero, facilita procesos de aprendizaje para proveer significado concreto o real a un concepto abstracto o algoritmo distinto (Heid et al. 1995); segundo, provee puntos de referencia con el que los estudiantes pueden revisar en una etapa más avanzada de aprendizaje, cuando funciona es llevada a cabo en un nivel más abstracto; tercero, la motivación de los estudiantes aumenta y la voluntad llega a ser compromiso en la actividad de aprender; y último, enfatiza el potencial de usar modelos algebraicos y habilidades en otros campos.

El valor de un acercamiento basado en el contexto es descrito por Mason (1985) y otros investigadores: “A fin de tener claro, seguro y dominio automático de cualquier habilidad, es necesario practicar pero el deseo de practicar surge naturalmente de contextos estimulantes” (p. 36). Este puede facilitar el aprendizaje de cuatro grandes ideas algebraicas: 1) el rol de variables y expresiones como representativas de fenómenos significativos de cambios, 2) la diferencia entre cantidades constantes y cambiantes, 3) la falta de cierre de expresiones algebraicas y 4) la equivalencia de expresiones algebraicas.

Desde una perspectiva más general, en un acercamiento basado en el contexto, las expresiones producidas por los estudiantes durante una actividad pueden presentar diferentes maneras de modelar el mismo fenómeno. Como resultado, dichas expresiones equivalentes pueden ser vistas por los estudiantes como diferentes descriptores del mismo fenómeno. Este acercamiento permite a los maestros introducir el concepto de equivalencia en etapas tempranas en el aprendizaje del álgebra cuando las habilidades de manipulación de los estudiantes son muy limitadas.

En general, aprender algebra en un nivel simbólico casi exclusivamente abstracto pude causar muchas dificultades cognitivas y afectivas (Sutherland y Rojano 1993; Tall 2004). Es conveniente que se provea de significados contextuales hacia objetos algebraicos, conceptos, y operaciones en etapas iniciales además de acompañar a todo el proceso de aprendizaje, como opuesto a presentar estos significados únicamente en etapas más avanzadas, como posibles aplicaciones. Desarrollar el curriculum del álgebra basado en el contexto muestra que este acercamiento provee un importante puente entre aritmética y álgebra y entre objetos abstractos y concretos, permite a los estudiantes aprender conceptos algebraicos en una forma más comprensible.

Para ir dando forma a la respuesta al título de este apartado, se comienza por un intento para decir qué es el álgebra, entendiéndola como un cuerpo conformado en sí mismo de conocimientos que no es estático, como un artefacto cultural pero también como una actividad humana. Definir a las matemáticas en general y el álgebra en particular, nos lleva a ver a las matemáticas como un constructo cultural, es decir, algo que adquirimos por herencia cultural. Este artefacto cultural, en particular el álgebra, está incluido en todos los sistemas educativos, pero abordado de distintas maneras.

Por otro lado, también se puede ver a las matemáticas como un conjunto de actividades que la gente hace. Por ejemplo, producir representaciones para expresar generalizaciones implica transformar esas representaciones. De modo que quienes ven al álgebra como razonamiento se inclinan en considerar la forma de hacer, de pensar y hablar de los estudiantes a cerca de las matemáticas como fundamental. Es decir, el álgebra surge de la actividad humana y por tanto su existencia depende de las personas, no sólo históricamente sino también en el presente.

Cuando se pregunta a maestros de educación básica, cómo describen el pensamiento algebraico. Ellos asocian pensamiento algebraico con álgebra, viendo ésta como una materia que requiere resolver ecuaciones, usar variables y aprender o memorizar reglas para manipular expresiones. Esta es una imagen muy común que se tiene del álgebra. Como Smith (2003) observó, el término *álgebra* es típicamente asociado con el estudio de un sistema de símbolos, mientras que el *pensamiento algebraico* es un término más extenso usado "para indicar los tipos de generalización que preceden o acompañan el uso del algebra" (p. 138).

El estudio del álgebra desde el enfoque de los Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares (National Council of Teachers of Mathematics, NCTM, 2000), recae en el pensamiento algebraico y "enfatiza interrelaciones entre cantidades, incluyendo funciones, formas de representar interrelaciones matemáticamente y el análisis de cambio" (p. 37). Pensar el álgebra en los grados elementales, es esencial para enfocar en aspectos del pensamiento algebraico, saber cómo generalizar (Kaput 1999) y analizar el cambio (Smith 2003) está en el corazón del pensamiento algebraico.

Desde la escuela elemental los maestros a menudo creen que no tienen tiempo para explorar el pensamiento algebraico en sus salones. Los maestros requieren una comprensión personal de lo que significa pensar algebraicamente antes de que ellos puedan promover comprensiones algebraicas en sus salones.

El razonamiento algebraico comprende procesos de simbolización y aquí lo que interesa es comprender el fenómeno que ocurre cuando el razonamiento algebraico está siendo desarrollado en el contexto de la educación secundaria. Según Brodie (2010): Razonar es desarrollar líneas de pensamiento o argumentos en donde

a) los diferentes pasos o movimientos en la línea del razonamiento están conectados uno con el otro,

b) existen razones por las que un movimiento sigue al otro, y

c) un número de movimientos llega a juntarse para resolver un problema.

Además, la autora establece que el razonamiento matemático es razonar sobre y con los objetos de las matemáticas.

Según Kaput (2008), el corazón del razonamiento algebraico está comprendido de procesos de simbolización complejos que sirven directamente a la generalización y al razonamiento con generalizaciones, de manera que el razonamiento matemático permite al estudiante formar conexiones entre el conocimiento nuevo y el existente.

### 1.2.2. ¿Qué significa el desarrollo del razonamiento algebraico de los estudiantes en el caso de la generalización de patrones?

Está reconocido que aprender a razonar algebraicamente es un componente esencial en la educación básica. Pero qué significa verdaderamente razonar algebraicamente. Blanton y Kaput (2005) lo describen como "un proceso en el cual los estudiantes generalizan ideas matemáticas desde un conjunto casos particulares, establecen estas generalizaciones a través del discurso de argumentación y las expresan en formas apropiadas y cada vez más formales" (p.413).

Se retoma el término generalización de patrones en este trabajo, definido por Radford (2008) como "la capacidad de apoderarse de algo común notorio en algo particular (en una secuencia); extender o generalizar esto común para términos subsecuentes; y ser capaz de usar esto común para proveer una expresión directa de cualquier término de la secuencia" (p. 115). Es decir, que trabajar con patrones es explorar y expresar regularidades. Se tiene la idea de que la generalización y el razonamiento inductivo se funden en una misma categoría.

De una revisión del trabajo de Radford (2010) sobre generalización con estudiantes de segundo de secundaria se deduce lo siguiente:

- El pensamiento algebraico es una forma particular de reflexionar matemáticamente.

- Él investigó el uso de los signos en los estudiantes y los procesos de producción de significados en el álgebra.
- Su investigación tuvo dos metas:
  i) Que los estudiantes aprendieran los conceptos algebraicos estipulados en el curriculum
  ii) Ahondar en la comprensión de la emergencia y desarrollo del pensamiento algebraico.

Define tres capas de generalidad algebraica: Factual, Contextual y Simbólica.

### 1.2.3. Exploración de la generalización a través de patrones

Mason (1985) propone como una vía poderosa para acceder al pensamiento algebraico el tema de la generalización, además argumenta que para incursionar en el álgebra deben considerarse contenidos aritméticos y geométricos que permitan constituir el pensamiento algebraico. El autor establece un proceso de generalización que consiste en pasar de lo específico a lo general en relación a las matemáticas escolares, el cual denomina *Ciclo de Generalización* y se desarrolla en cuatro etapas:

1) Percepción de la generalidad
2) Expresión de la generalidad
3) Expresión simbólica de la generalidad
4) Manipulación de la generalidad

Cuando se estimula la habilidad de expresar generalizaciones, los estudiantes aprenden a ver lo general en lo particular y viceversa. Para el autor, la generalización es fundamental para acceder al álgebra de una manera significativa y construir su conocimiento. Es decir, la generalización en álgebra es una plataforma para avanzar hacia la abstracción matemática y la mejor forma de desarrollarla es a través de la exploración de patrones o en otras palabras la búsqueda de regularidades. Para desarrollar el lenguaje algebraico, es primordial que el estudiante tenga ideas matemáticas que comunicar; así que el detectar un patrón o una regularidad le da la oportunidad de intentar expresarlo y comunicarlo. Enseguida se describen cada una de estas etapas:

*1) Percepción de la generalidad*

La idea recomendable para iniciar a los estudiantes al conocimiento del álgebra es que se haga a través de **identificar un patrón** en una sucesión de figuras o números para después comunicar y registrar las características comunes que percibieron o las relaciones que pudieran establecerse inicialmente con ejemplos particulares. De aquí muy probablemente emergerán preguntas matemáticas como por ejemplo: ¿habrá alguna fórmula que pueda definir este patrón? Para aproximarse a ella los alumnos tendrán que valerse de recursos matemáticos próximos para generar los números o la conformación de figuras bajo el orden preestablecido.

*2) Expresión de la generalidad*

Esta segunda etapa se traduce en dilucidar cuál es el patrón en juego o una regla general, de manera verbal o numérica, para generar una secuencia. En principio es indispensable manifestar las conjeturas o hipótesis que se tienen acerca de la conformación del patrón y registrarlas, el siguiente paso es reflexionar sobre éste en forma individual y luego en colectivo. Es decir, mediante un trabajo colaborativo en la clase de matemáticas en donde los estudiantes expresen sus ideas en equipo y puedan comunicar sus resultados, se cuestionen e intercambien sus percepciones con el objetivo de llegar a un acuerdo acerca de lo que define al patrón. Se requiere que los alumnos aprendan a formular argumentos para averiguar si los procedimientos o resultados, propios y de otros, son correctos o incorrectos. El papel del profesor sin duda será el de mediador en la actividad de los alumnos, haciéndoles preguntas que propicien la reflexión sobre sus propias ideas y que éstas los lleven a algo concreto.

*3) Expresión simbólica de la generalidad*

Una vez que se acordó lo que define al patrón, las regularidades y las relaciones entre sus componentes, se debe traducir de inicio a un lenguaje natural que evolucione hacia una regla o fórmula general. Tal transición no es un ejercicio cognitivo simple pero puede ser apoyado por dibujos, esquemas o palabras, para posteriormente describir las variables clave de un problema para lograr expresarlo de forma simbólica.

4) *Manipulación de la generalidad*

Hallada la expresión simbólica que define al patrón se debe verificar su validez. Es imprescindible probar que la regla o fórmula es correcta y se debe hacer de diferentes formas, por ejemplo, aplicándola en otros casos, dando una respuesta a través de otros medios, contando, dibujando, haciendo cálculos o confirmando su consistencia. Se requiere una noción de lo general, esto implica recrear la idea (abstraer) de cómo un caso particular puede mostrar lo general. Para mostrar lo general es necesario reestructurar el caso particular y señalar características generales. Esto ocurre a través de una observación minuciosa que logra detectar características específicas en cada caso para luego destacar que, aunque cambien, lo hacen de forma constante y esto es justo lo que lo hace un patrón.

### 1.2.4. Plantillas visuales en la generalización de patrones

Este apartado está dedicado a la investigación realizada por Ferdinand D. Rivera[4] que tiene que ver con la existencia de plantillas visuales en la actividad de generalización de patrones. Muchos estudios actuales relacionados con patrones se desenvuelven en un marco teórico constructivista, los cuales hicieron aportaciones a su investigación para saber cómo estudiantes de educación básica llegan a generalizaciones algebraicas a través de patrones de figuras o números.

Él coloca a la visualización y al razonamiento multiplicativo, en el nivel secundaria, como trascendental para la obtención de las generalizaciones algebraicas y al igual que él nos preguntábamos cómo le hacen los estudiantes de secundaria para realizar la generalización de patrones que lleva a una estructura algebraicamente útil para un patrón dado en base a pocas etapas iníciales. Dado que ellos tienen poca experiencia o recursos algebraicos para llegar a tal estructura, deben hacer un esfuerzo para coordinar sus habilidades inferenciales

[4] F.D. Rivera. Department of Mathematics, San Jose State University, 1 Washington Square, San Jose, CA 95192, USA.

simbólicas y perceptuales para luego construir y justificar dicha estructura algebraicamente útil que se puede representar con una fórmula general.

En principio aclara porque no usa los términos “patrón geométrico” y “patrón pictórico” como también se les ha llamado. Si se emplea el término “patrón geométrico” se puede confundir con las secuencias geométricas, como es el caso de las funciones exponenciales en la matemática discreta y tampoco usa el término “patrón pictórico” su argumento es que los patrones de figuras no son simples imágenes de objetos sino que son características exhibidas que se asocian con representaciones diagramáticas. Entonces prefiere llamar a los patrones matemáticos: patrones figurales. Ahora, en estos patrones él se refiere a construcciones “ambiguas” como aquellas en donde se transmite “la posibilidad de percepciones alternativas” la noción del término la retoma de Neisser (1976).

En particular para trabajar con patrones figurales la percepción visual resulta ser de gran relevancia, esta acción de llegar a ver se caracteriza en dos tipos: la percepción sensorial y la percepción cognoscitiva (Dretske, 1990). La primera, es cuando vemos un objeto tal cual, en cambio la percepción cognoscitiva lleva a reconocer un hecho o una propiedad del objeto, en ella intervienen procesos conceptuales y otros de carácter también cognoscitivo que permiten relacionar hechos, elementos o propiedades del objeto.

Desde la perspectiva de Rivera, la generalización de patrones lleva implícita la coordinación de dos acciones interdependientes: la *acción abductiva-inductiva sobre los objetos* y la *acción simbólica.* La primera tiene que ver con distintas formas de contar y estructurar objetos discretos o elementos de un patrón de una manera algebraicamente útil y la segunda acción implica trasladar a la primera a una forma de generalización algebraica. Para la mejor comprensión de estas ideas, el autor realiza el siguiente diagrama.

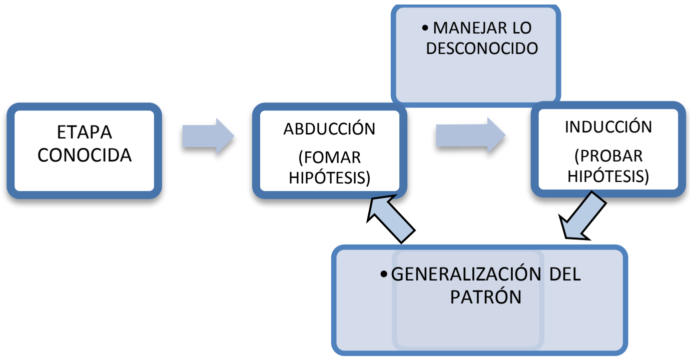



**Imagen 1.** Acción abductiva-inductiva en la generalización de patrones

El esquema muestra el proceso de generalización que siguen los estudiantes cuando se les presenta un patrón incompleto, sólo con etapas iníciales, las cuales son el punto de partida para explorar una regla que pueda explicar éstas y las consecutivas. Es decir, los estudiantes formulan hipótesis en base a las etapas conocidas del patrón para poder construir nuevas, pero no muy lejanas a las que se tienen, se intenta con las etapas que siguen a las dadas, ésta es la etapa abductiva. Luego se prueban repetidamente las hipótesis en diferentes casos o etapas de manera que se pueda confirmar la funcionalidad de la regla que se cree define el patrón, aquí se habla entonces de la etapa inductiva. Si la regla es confirmada en los casos de prueba, una generalización emerge de modo que los estudiantes podrán usarla para etapas distantes sin necesidad de construir todas las anteriores. Pero puede ocurrir que se genere otra abducción, o más, al no tener éxito la regla o también que la regla dificulte el trabajo para etapas posteriores.

El término de platilla visual, que usa Rivera lo apropió de Giaquinto (2007) quien lo usó en el contexto de objetos matemáticos, a su vez Giaquinto desarrolló este concepto de Resnik (1997) quien define a una plantilla visual como un “dispositivo concreto para representar el cómo se forman las cosas, se estructuran o diseñan” (p. 227). Nuestra experiencia concreta nos debe de algún modo proporcionar modelos básicos para construir o contextualizar los elementos abstractos a través de descubrir características de un nuevo objeto o de su comparación con otros ya existentes. En las plantillas visuales la función del “ojo” es predominantemente esencial para descubrir e inferir. Las inferencias lógicas y la deducción verbal no actúan solas sino que son acompañadas de la capacidad visual de observar y ver. Desde la perspectiva de Arcavi (2003) con respecto a la visualización matemática, se refiere a las plantillas visuales como un tipo de estrategia visual que permite *ver* lo que *no se ve* de un mundo abstracto que está sujeto a relaciones y estructuras conceptuales que no se manifiestan claramente.

Rivera establece tres tipos de plantillas visuales: *aditivas, multiplicativas y pragmáticas*. Para comprender a cada una es necesaria la distinción entre los esquemas aditivo y multiplicativo en términos del nivel de abstracción y de las relaciones que involucran. Desde una perspectiva Piagetiana, la operación de multiplicar demanda un pensamiento de orden superior. Por ejemplo, la adición es inseparable de la construcción de un número y se logra a través de una suma repetida de la unidad, la multiplicación es una operación más compleja que se construye fuera de la adición a un nivel de abstracción mayor. Es decir, un esquema aditivo requiere únicamente un nivel de abstracción y una relación de inclusión mientras que el esquema multiplicativo demanda más niveles de abstracción y no una única relación de inclusión, ambas se establecen simultáneamente: una asignación de muchos a uno y al menos dos niveles de relaciones. Clark y Kamii (1996) proponen el siguiente esquema que compara ambos esquemas de pensamiento, observe:

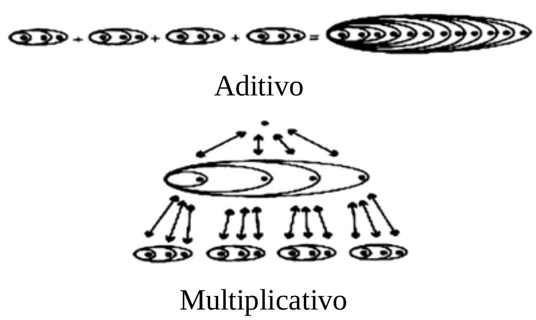



**Imagen 2**. Comparación del pensamiento aditivo y multiplicativo

Rivera destaca dos aspectos importantes en la construcción de esquemas aditivos y multiplicativos que se relacionan con la noción de una unidad y la construcción de inferencias perceptuales y simbólicas. El primero de éstos tiene que ver con el conteo; Rivera comparte la visión de Sophian (2007) quien considera que contar implica la elección de una unidad y enfatiza que la identificación de ésta es más importante que el tamaño. Ejemplifica esta idea así: “algunos zapatos pueden ser zapatos de bebé, otros de adultos, pero nosotros tratamos cada uno de ellos como un zapato (o la mitad de un par de zapatos)” (p. 66). Aterrizado esto al esquema aditivo, que requiere de una abstracción de un único nivel, se utiliza una unidad que puede ser, o no, independiente de las cantidades involucradas en la suma o resta. Un ejemplo en una situación de comparación: “Sara es tres centímetros más alta que su hermana Laura”, la unidad centímetros se refiere a la altura que nos indica una medida lineal pero pudo haber sido dada en otras unidades lineales como pulgadas.

Ahora en un esquema multiplicativo, que requiere de abstracciones multinivel, se utiliza una unidad que es fabricada desde una de las cantidades implicadas en la multiplicación o división. Siguiendo el ejemplo de comparación anterior, bajo este esquema sería: “Sara es el doble de alta que su hermana Laura”, la unidad es la altura de Laura que después se utiliza para comparar la altura de Sara. En definitiva los dos esquemas condicionan el uso de una unidad común.

Por otro lado, el segundo aspecto se relaciona con las distintas formas de ver a una unidad en la construcción de inferencias perceptuales y simbólicas. La ley de la Buena Gestalt (Metzger, 2006), a grandes rasgos, se refiere al orden en que el individuo percibe, descifra y organiza una figura, una pintura o una imagen. Esto quiere decir que hay una predisposición a organizar sobre algo que naturalmente pertenece o se ajusta, incluso lo que es bastante simple y reconocible, así entonces nos permite asociar una forma geométrica o especificar una fórmula algebraica. Rivera emplea esta ley para distinguir cuándo un patrón es alto o bajo de bondad en Gestalt. Es decir, un patrón de figuras será alto en Gestalt cuando tiende o tiene una estructura interpretada que manifiesta una forma equilibrada, ordenada y armoniosa del patrón. En cambio, uno de baja bondad se muestra desorganizado, con una estructura compleja que dificulta desentrañar las partes o se conforma de partes que no tienen, por decirlo de alguna manera, divisiones naturales. Todo esto conlleva a un proceso arduo hacia la construcción de una fórmula algebraica.

Los problemas que se utilizaron en esta investigación para ser resueltos por los estudiantes cumplieron con las propiedades de una buena Gestalt. Todos los patrones de figuras presentados tienen un orden y cada figura de la secuencia se muestra con una estructura equilibrada lo que les permite descomponer o seccionarlas en partes desde su propia visualización, discernimiento y organización de la figura completa. Esto es, todas las primeras figuras que conforman el patrón se presentan enteras o completas, el estudiante de forma imaginaria las separa en partes, convenientemente, de modo que cada una de éstas se le puede interpretar de manera numérica o asociar a una forma geométrica y en el mejor de los casos a una expresión algebraica.

En resumen, cualquiera que sea el caso de bondad de Gestalt, el punto clave en la construcción de una generalización algebraica es la elección de una unidad común que toma forma aditiva o multiplicativa y que está directamente relacionada con la estructura general que se interpretó del patrón.

Adelante se presenta una tabla elaborada por Rivera que muestra siete tipos de generalizaciones algebraicas, resultado de su investigación. Para la compresión de la tabla se definen los conceptos usados, tal como aparecen en su texto (Rivera, 2010) y se agregan imágenes.

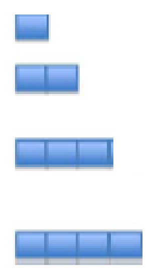
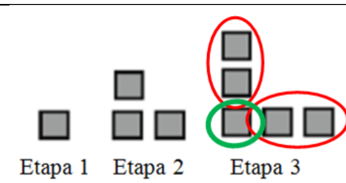
La dimensión *Constructiva* se refiere al hecho de una relativa estructura interpretada para algún patrón que considera que las partes no se superponen y que cuando se suman, juntas forman la figura percibida que se aplica a través de las etapas de patrón. Esta dimensión puede ubicarse en el esquema aditivo o multiplicativo.

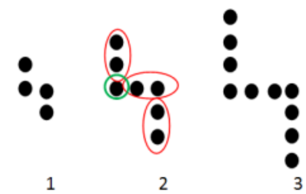
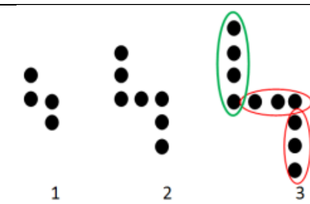
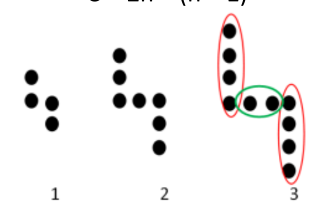
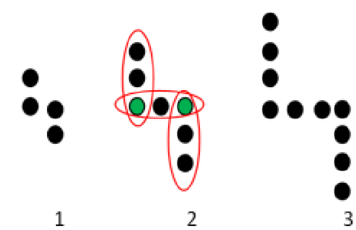
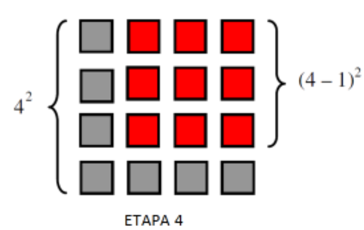
El concepto *estándar* y *no estándar* se refiere a los términos algebraicos en una expresión. Si los términos están en forma simplificada se ubican en la categoría estándar y si los términos todavía se pueden simplificar más se ubica en la no estándar.

En las *generalizaciones deconstructivas* se ven las etapas de figuras conocidas en un patrón como un conjunto de piezas superpuestas que pueden descomponerse muy convenientemente.

En el tipo de *generalizaciones constructivas o deconstructivas impulsadas por auxiliares* se aprecia cada etapa de figuras conocidas en un patrón en el contexto de una configuración mayor que tiene una estructura bien conocida y/o fácil. Introducir un conjunto auxiliar de objetos estratégicamente les permite ver mejor la configuración mayor a fin de obtener una generalización apropiada del patrón más rápido y fácilmente.

Y las *generalizaciones basadas en la transformación* en un principio involucran acciones de mover, reorganizar y transformar partes en una etapa de la figura de un patrón dentro de alguna figura reconocible con una estructura más familiar.

| **Tipos de generalizaciones** | **Características figurales (inferencia perceptual)** | **Fórmula algebraica (inferencia simbólica)** | **Ejemplos** |
|---|---|---|---|
| **Estándar constructiva aditiva** | Ver los patrones de figuras que consisten en partes que no se superponen. | Los términos de la fórmula están forma simplificada<br><br>Este es el caso más simple que se aplica a todos los patrones de figuras lineales del tipo y = x + b (es decir, la constante adición de un objeto de una etapa a otra). |  |
| **No estándar constructiva aditiva** | Ver los patrones de figuras que consisten en partes que no se superponen. | Los términos en la fórmula están expandidos, en una forma no simplificada. | <br>x = n-1 + n-1 +1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Estándar constructiva multiplicativa** | Ver los patrones de figuras que consisten en partes que no se superponen. | Los términos en la fórmula están en forma simplificada. | <br>C = 3n +1 |
| **No estándar constructiva multiplicativa** | Ver los patrones de figuras que consisten en partes que no se superponen. | Los términos en la fórmula están expandidos, en forma no simplificada. | <br>C = 2n + (n + 1)<br><br>C = 2(n + 1) + (n - 1) |
| **Deconstructiva** | Ver los patrones de figuras que consisten en partes que se superponen. Por lo tanto, contar consiste en tomar en cuenta múltiples cuentas que pueden ser determinadas cuando las partes están apropiadamente descompuestas. | Los términos en la fórmula podrían estar en forma estándar o no estándar.<br><br>Los términos pueden transmitir el uso de cualquiera de los esquemas aditivo o multiplicativo. | <br>C = 3(p + 1) -2 |
| **Constructiva impulsada por auxiliar o deconstructiva** | Ver los patrones de figuras como partes de una configuración mayor que tiene una bien conocida y / o una estructura más simple.<br><br>La introducción de un conjunto auxiliar permite a los alumnos ver la configuración más grande y más fácilmente. | Los términos en la fórmula podrían estar en forma estándar o no estándar.<br><br>Los términos pueden transmitir el uso de cualquiera de los esquemas aditivo o multiplicativo. | <br>$n = x^2 - (x-1)^2$ |

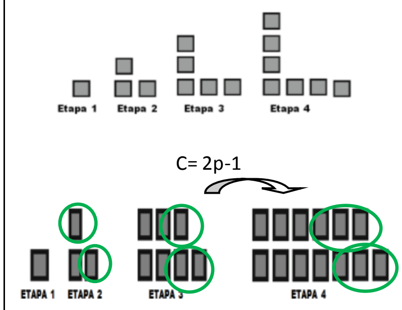
| | | | |
|---|---|---|---|
| **Constructiva basada en la transformación o deconstructiva** | Al ver los patrones de figuras de una manera diferente para inicialmente mover, reorganizar y transformar una etapa figural en alguna figura reconocible que tiene una estructura que es familiar para el alumno. | Los términos en la fórmula podrían estar en forma estándar o no estándar.<br><br>Los términos pueden transmitir el uso de cualquiera de los esquemas aditivo o multiplicativo. | <br>s = n (n- 1) + 1 (Pragmática incorrecta) |

**Imagen 3.** Tabla de los tipos de generalizaciones algebraicas

Por último hace falta mencionar al esquema pragmático, el cual se produce en situaciones problemáticas cuando un estudiante combina esquemas aditivos y multiplicativos.

### 1.2.5. Trayectoria Hipotética del Aprendizaje (THA)

Esta sección aborda el trabajo realizado por Martin A. Simon que se concretó en 1995 en su artículo titulado “Reconstruir la pedagogía de las matemáticas desde una perspectiva constructivista” en el introduce la noción de *Trayectoria Hipotética del Aprendizaje* como parte de su modelo del *Ciclo de Enseñanza de las Matemáticas*. Lo esencial en este modelo es la tensión creativa entre los objetivos del profesor con mira al aprendizaje de los estudiantes y su responsabilidad para ser susceptible al pensamiento matemático de ellos. Se desprende de una postura en la que el constructivismo provee un marco teórico para razonar el aprendizaje de las matemáticas en el aula y que además puede contribuir en importantes maneras al esfuerzo por reformar la enseñanza de las matemáticas escolares. Sin embargo, éste no dice cómo enseñar matemáticas, es decir, no estipula un modelo para ello.

El constructivismo deriva de una posición filosófica en la que nosotros como seres humanos no tenemos acceso a una realidad objetiva, es decir, una realidad independiente de nuestra manera de conocerla. Más bien construimos el conocimiento de nuestro mundo desde nuestras percepciones y experiencias, las cuales éstas son mediadas a través de nuestro conocimiento previo. El aprendizaje es un proceso el cual adaptamos a nuestro mundo experiencial. Desde una perspectiva constructivista, no hay manera de saber si un concepto coincide con una realidad objetiva. La preocupación es si éste funciona, es decir, si encaja con nuestro mundo experiencial. En otras palabras, el constructivismo es sólo verdadero cuando se muestra útil al permitirnos tomar sentido de nuestra experiencia (Simon, 1995).

El entender el aprendizaje como un proceso de construcción individual y social da a los profesores un marco teórico conceptual con el cual comprender el aprendizaje de sus estudiantes. La investigación del autor se centró en conocer de qué modo el constructivismo puede contribuir al desarrollo de un marco teórico útil para la reconstrucción de la pedagogía de las matemáticas que pueda sostener las construcciones de ideas poderosas de los estudiantes. En síntesis, el constructivismo como una teoría epistemológica no define una manera particular de enseñar sino que describe el desarrollo del conocimiento, en términos generales, con o sin un maestro presente.

El análisis de los datos de su experimento de enseñanza le permitió desarrollar un modelo que esquematiza las interrelaciones cíclicas de aspectos como el conocimiento, el pensamiento, la toma de decisiones y la actividad del maestro. Este modelo lo denominó *Ciclo de Enseñanza de las Matemáticas*.

Plantear la meta y diseñar una lección requiere de considerar dos aspectos: el conocimiento matemático del profesor y sus hipótesis sobre el conocimiento de los estudiantes. El autor utiliza el término hipótesis porque el profesor no tiene acceso directo al conocimiento de los estudiantes sólo hace inferencias de lo que cree que saben desde su interpretación a través del comportamiento del estudiante. Es decir, lo que percibe el profesor del pensamiento matemático del estudiante está influenciado por su conocimiento de las matemáticas y éste le sirve para interpretar el lenguaje y las acciones de ellos para luego tomar decisiones sobre el posible conocimiento matemático que deben aprender. La meta de aprendizaje que se proponga el profesor marcará el rumbo para desarrollar una *Trayectoria Hipotética del Aprendizaje* (THA), este término lo instaura para englobar

> *"…la predicción del profesor como la ruta por la cual el aprendizaje podría proceder. Esta es hipotética porque la trayectoria real del aprendizaje no es conocida de antemano. Esta caracteriza una tendencia esperada…la trayectoria hipotética del aprendizaje provee al maestro con un razonamiento para elegir un diseño instruccional particular" (p. 135).*

Una trayectoria hipotética de aprendizaje se compone de tres elementos: **los objetivos para el aprendizaje** de los estudiantes, **las actividades de aprendizaje** que se usaran para promover el aprendizaje y **el proceso de aprendizaje hipotético** de los estudiantes.

Los objetivos propuestos por el profesor para el aprendizaje de los estudiantes determina la dirección para los otros componentes, la selección de las tareas de aprendizaje y las hipótesis acerca del proceso de aprendizaje de los estudiantes son interdependientes. Las tareas se seleccionan con base en las hipótesis acerca del proceso de aprendizaje; las hipótesis sobre el proceso de aprendizaje se basan en las tareas propuestas.

La noción de THA pone de manifiesto el pensamiento del profesor cuando diseña actividades de enseñanza y aprendizaje bajo una perspectiva constructivista. La selección y el diseño de las actividades se convierten en un proceso reflexivo y cíclico. Es decir, para una tarea dada, se determinan las capacidades que dicha tarea puede poner en juego y a partir de ese análisis y de los objetivos de aprendizaje que el profesor se haya impuesto, él puede modificar la tarea y analizarla de nuevo. Son justamente las continuas modificaciones a la Trayectoria Hipotética del Aprendizaje las que hacen de ésta una pieza clave del Ciclo de Enseñanza de las Matemáticas.

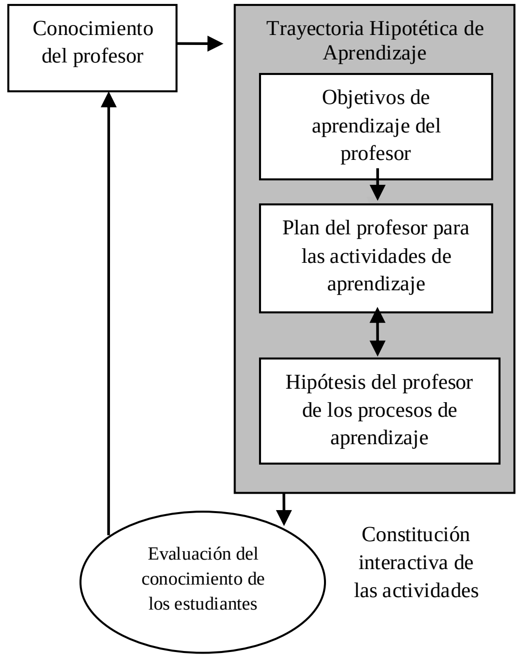



**Imagen 4.** Ciclo de Enseñanza de las Matemáticas

Además del conocimiento de matemáticas del profesor y sus hipótesis sobre las comprensiones del estudiante, varias áreas o dominios del conocimiento del maestro entran en juego, incluyendo sus teorías sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; conocimiento del aprendizaje con respecto al contenido matemático particular (derivado de la literatura de la investigación y/o de la propia experiencia con los estudiantes); y el conocimiento de representaciones matemáticas, materiales y actividades. El Ciclo de Enseñanza de las Matemáticas refleja la relación de estas áreas o dominios del conocimiento para el diseño de las actividades de enseñanza.

La generación de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje, previa a la lección de la clase, es el proceso por el cual (de acuerdo a este modelo) el maestro desarrolla un plan para la actividad en el aula. Sin embargo, cuando el profesor interactúa y observa a los estudiantes, el maestro y los estudiantes constituyen colectivamente una experiencia. Esta experiencia por la naturaleza de su constitución social es diferente de una anticipada por el profesor. En esa interacción hay una modificación en las ideas y el conocimiento del maestro, aquí es cuando él toma sentido de qué es lo que está sucediendo y qué ha pasado en el aula, entonces está listo para tomar decisiones. La evaluación del pensamiento del estudiante (el cual sigue continuamente el modelo de instrucción presentado) puede provocar adaptaciones al conocimiento del profesor que, a su vez, lo conduce a una nueva o modificada Trayectoria Hipotética del Aprendizaje.

El siguiente esquema muestra el Ciclo de Enseñanza de las Matemáticas en forma amplia, el cual describe las relaciones entre varios dominios de conocimiento del profesor, la Trayectoria Hipotética del Aprendizaje y las interacciones con los estudiantes.

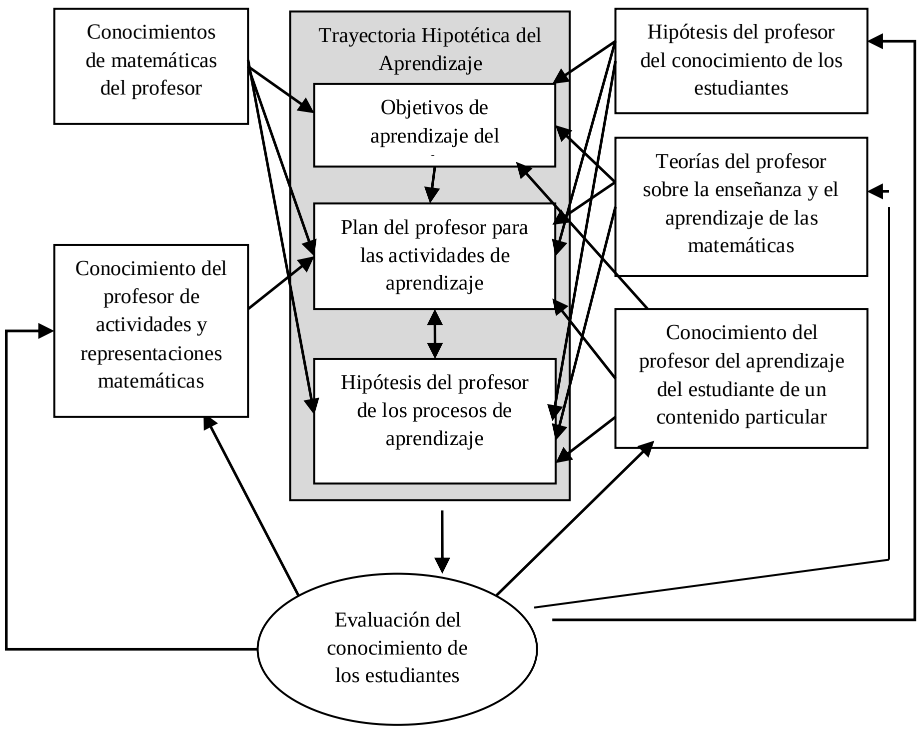



**Imagen 5**. Esquema del Ciclo de Enseñanza de las Matemáticas ampliado

El conocimiento matemático del maestro en interacción con sus hipótesis sobre el conocimiento matemático del estudiante contribuye a la identificación de un objetivo de aprendizaje. Estos dominios del conocimiento, el objetivo de aprendizaje; el conocimiento del profesor de actividades y representaciones matemáticas; su conocimiento del aprendizaje de los estudiantes sobre un contenido particular, así como sus concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas contribuyen al desarrollo de actividades de aprendizaje y a un proceso hipotético de aprendizaje.

Las modificaciones de la THA no son algo que solamente ocurre durante la planeación entre clases. El maestro está continuamente ajustando la trayectoria de aprendizaje que él ha hipotetizado para expresar mejor su ampliado conocimiento. Algunas veces las actividades están en orden, satisfacen los objetivos pero en otras ocasiones casi todas tienen que desecharse y buscar una más apropiada. Sin tener en cuenta la magnitud de modificación, los cambios pueden hacerse a cualquiera o todos los tres componentes de la THA.

El constructo de THA se fundamenta en los siguientes supuestos Simon y Tzur (2004):

1. La construcción de una Trayectoria Hipotética del Aprendizaje se basa en la comprensión del conocimiento actual de los estudiantes que recibirán la instrucción.
2. Una Trayectoria Hipotética del Aprendizaje es el vehículo para planificar el aprendizaje de conceptos matemáticos concretos.
3. Las tareas matemáticas proporcionan las herramientas para promover el aprendizaje de conceptos matemáticos concretos y por lo tanto son un elemento clave del proceso de instrucción.
4. Dada la naturaleza hipotética, inherente e incierta de este proceso, el profesor se verá obligado a modificar sistemáticamente cada aspecto de la Trayectoria Hipotética del Aprendizaje.

Gravemeijer, Bowers y Stephan (2003) hacen las siguientes distinciones entre una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje y una planeación de una clase tradicional. Cuatro consideraciones específicas del proceso que distingue a la primera del proceso tradicional de planificar una lección:

1. La naturaleza socialmente situada de la trayectoria de aprendizaje.
2. La visión de planear como un ciclo reiterativo más que una metodología de un solo tiro.
3. El enfocar sobre las construcciones de los estudiantes más que en el contenido matemático y

4. La posibilidad de ofrecerle al maestro una teoría fundamentada que describe cómo un cierto conjunto de actividades instruccionales podrían ejecutarse fuera de un escenario social dado.

El constructo trayectoria de aprendizaje enfatiza el aprendizaje sobre la enseñanza, la descripción de Simon es claramente intencionada al caracterizar un aspecto esencial del pensamiento pedagógico. Es decir, determina el objetivo, crea tareas conectadas al pensamiento y aprendizaje de los estudiantes en un dominio matemático específico designadas a engendrar esos procesos mentales o acciones hipotéticas para mover a los alumnos a través de una progresión de desarrollo de niveles de pensamiento, creadas con la intensión de apoyar la realización de objetivos específicos para los estudiantes, en este dominio matemático.

#### 1.2.5.1. Trayectorias Hipotéticas del Aprendizaje asociadas a tecnologías digitales

El desarrollo de trayectorias hipotéticas del aprendizaje contempla tres aspectos a considerar, que son los siguientes:

I. El proceso de construir la THA involucra transiciones entre diferentes niveles cognitivos y epistemológicos. También puede involucrar transiciones ente ambientes tecnológicos y no tecnológicos.
II. Al desarrollar o formular una THA el énfasis debería ser puesto sobre la promoción de actividades en las cuales los estudiantes tienen la oportunidad de expresar, presentar, usar, probar, refinar, revisar o ajustar sus propias formas de pensar (Lesh y Yoon, 2004).
III. Las tecnologías digitales si se usan apropiadamente, permiten a los fenómenos matemáticos ser presentados y explorados en formas que proveen oportunidades para iniciar y mejorar el pensamiento matemático y dar sentido a lo que está sucediendo. Esto puede dar al alumno el potencial para mirar a través de lo particular lo general (Mason, 2005).

A manera de nota final, aquí se hace un resumen del contenido de la sección del marco teórico. La documentación teórica a la cual nos acercamos es el resultado de amplias investigaciones en torno a la generalización en el álgebra. El contexto, la temporalidad y los individuos participantes, etcétera, en el que fueron llevadas a cabo no fue totalmente la misma a la que aquí se reporta. Aun así en el contexto actual en México, los hallazgos son similares en cuanto a la resolución de los problemas matemáticos planteados, aunque no se intentó replicar sus experiencias sino más bien que sus aportaciones nos guiaran, primero, en el diseño del procedimiento a seguir, en la selección de actividades y su evaluación, de modo que todo fuera apropiado para conseguir nuestros objetivos, para este fin nos apoyamos en el constructo de *Trayectoria Hipotética del Aprendizaje* elaborada por Martin A. Simon (1995) que surgió como una propuesta de alto nivel para reconstruir la pedagogía de las matemáticas desde una perspectiva constructivista.

Para reconocer el desenvolvimiento de carácter cognitivo por la cual atraviesan los estudiantes cuando resuelven problemas relacionados a la generalización, como una vía poderosa para poder acceder al pensamiento algebraico, nos hicimos acompañar de la contribución de J. Mason (1985) que establece el *Ciclo de la Generalización.* Y por último nos acercamos de manera más específica a la generalización de patrones de figuras usando el concepto de *Plantillas Visuales* para categorizar el tipo de generalizaciones a las cuales llegan los estudiantes. Tal noción se retoma del trabajo de Ferdinand Rivera (2010).

### 1.2.6. Planteamiento del tema de investigación

Es importante que los estudiantes trabajen en el aula con ideas significativas que les permitan llegar a ser conscientes de la potencia de la generalización, por ejemplo trabajando con cantidades desconocidas y verificando conjeturas, porque esto promueve procesos de transición de la aritmética al álgebra, y permite a los estudiantes acceder a niveles de pensamiento que sobrepasan lo especifico, numérico, y el pensamiento perceptivo (Rojano, 2002).

Por otro lado, las tecnologías digitales (tales como lo sistemas computacionales del algebra, programas de geometría dinámica, micromundos y calculadoras graficadoras) les proporcionan a los estudiantes la oportunidad de trascender limitaciones de enfoques convencionales y los involucran en la reflexión, y les permiten a los profesores implementar una instrucción más centrada en el estudiante (Heid, Blume, Hollebrands & Piez, 2002; Pea, 1987). Si la tecnología educativa puede ejercer una influencia tan fuerte en la enseñanza y el aprendizaje entonces todos los estudiantes de matemáticas podrían acceder de manera equitativa a estos beneficios resolviendo entonces cuestiones de justicia y equidad en la escuela (Dunham & Hennessy, 2008).

Específicamente, la utilización de los manipulativos virtuales se destaca como un medio para que estudiantes en desventaja accedan a ideas matemáticas significativas (Chiappini & Cozzani, 2014; Dunham & Hennessy, 2008; Rojano, 2002). En este sentido es que la utilización de la tecnología en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en la educación básica se puede enmarcar en una línea de investigación del uso de la tecnología para la nivelación del campo de acción de los escolares (Dunham & Hennessy, 2008). En particular, este tipo de utilización fortalece los argumentos que hasta ahora se han dado en torno del uso de la tecnología para que grupos en desventaja estén en igualdad de condiciones al término de determinada instrucción escolar (Ídem, p.388; Chiappini, 2013-2014).

El objetivo de esta tesis es utilizar tecnologías digitales (manipulativos virtuales) para que estudiantes desaventajados puedan acceder a nociones matemáticas poderosas como la de generalización algebraica a través de la identificación de plantillas visuales, para que experimenten procesos matemáticos complejos, como los de abducción e inducción.

Por lo tanto, las preguntas que guiaron el trabajo de investigación que aquí se presenta son las siguientes:

¿Cuáles son las características de las tecnologías digitales que hacen posible que los estudiantes desaventajados accedan a nociones matemáticas poderosas como la de generalización algebraica?

¿Qué tipo de herramientas y actividades permiten que los estudiantes desaventajados experimenten procesos matemáticos complejos de abducción e inducción?

¿Cuáles son las estrategias emergentes de los estudiantes desaventajados durante la resolución de tareas de generalización de patrones[5] usando tecnologías digitales?

¿Cuáles modelos pedagógicos asociados a la enseñanza –aprendizaje de las matemáticas permiten centrar la instrucción en las diferentes posibilidades de los estudiantes y avanzar hacia la nivelación del campo de acción de los escolares?

[5] Situaciones de generalización de patrones usuales en la introducción al álgebra

# CAPÍTULO II

## METODOLOGÍA

Se presenta al lector la descripción y caracterización de la metodología que se siguió para llevar a buen término la investigación que aquí se reporta en torno al tema de la generalización de patrones. En esta investigación participan estudiantes del nivel secundaria para llevar a cabo la resolución de problemas matemáticos relacionados con dicho tema, en la instrumentación de la actividad de los alumnos se recalca la mediación de la tecnología digital en particular el uso de un manipulativo virtual que se destaca por su plataforma matemática que además es de acceso libre en la internet. El manipulativo fue apropiado para dar soporte a los estudiantes en desventaja académica en la resolución de los problemas planteados.

El capítulo se distribuye en cinco apartados: el primero tiene que ver con el diseño de la investigación, en el cual se describe en general el proceso por el cual se transitó para realizar la investigación. El segundo, presenta una puntual revisión del tratamiento del tema de generalización de patrones en el curriculum escolar de secundaria, dado que mientras se desarrollaba el trabajo de campo, en 2011, hubo una reforma al plan y programas de estudio de la educación básica en México. El trabajo de campo consistió en una indagación previa y cuatro fases de exploración.

La primera y segunda fases conforman el primer ciclo del trabajo de campo que se denominó: exploración piloto. La tercera y cuarta fases pertenecen al segundo ciclo que se denominó: exploración formal.

El tercer apartado caracteriza la primera fase del trabajo de campo, en el que se resalta el objetivo de su implementación. También se presentan los problemas planteados a los alumnos y las imágenes que dan evidencia de la resolución de éstos. El apartado concluye con una síntesis de lo ocurrido en la primera fase del trabajo de campo.

El cuarto apartado se refiere al desarrollo de la segunda fase del trabajo de campo. Al igual que la anterior se describe y caracteriza su conformación haciendo énfasis en las diferencias entre una fase y otra. La divergencia más notable entre éstas son los medios ambientes de aprendizaje en los cuales son instrumentadas las actividades de generalización de patrones y el tipo de alumnos que participan en cada uno de éstos. Se incluye una sección que da a conocer las modificaciones que se hicieron a las hojas de trabajo de la primera fase (lápiz y papel) para ser implementadas apropiadamente en el otro ambiente (digital) para ser resueltas por los estudiantes. Así también se muestran las hojas de trabajo modificadas, tal cual les fueron presentadas a los alumnos. Al final se hace una síntesis sobre los resultados que arrojó esta segunda fase del trabajo de campo.

El último apartado tiene que ver con la tercera y cuarta fases del trabajo de campo en las que interviene la exploración formal en ambos ambientes de aprendizaje (lápiz y papel; y manipulativos virtuales) para efectos de replicabilidad de los datos y consolidación de los resultados. Se pone de manifiesto la dimensión en que se realizó el trabajo de campo. Es decir, el incremento en cuanto a la temporalidad, al número de alumnos, a la diversidad de contextos escolares por su ubicación geográfica. El lector hallará la descripción de los ambientes de aprendizaje en los que se instrumentaron los seis problemas de patrones. Así también la caracterización de los alumnos en cuanto a su rendimiento académico en matemáticas y en relación a la edad, género y asistencia a las sesiones de trabajo. El capítulo concluye con la descripción de los procedimientos de los estudiantes en la 3ª fase, que se convirtieron en guías pedagógicas para los estudiantes que resolvieron los problemas en el manipulativo virtual (4ª fase).

## 2.1. Diseño de la investigación

El enfoque o marco interpretativo que se adoptó para realizar la investigación cualitativa[6] fue el constructivista. Lo que llevó a desarrollar un diseño de

[6] "La investigación cualitativa…, a grosso modo, busca la subjetividad, y explicar y comprender las interacciones y los significados subjetivos individuales o grupales. Para explicar o comprender, los humanos necesitamos marcos referenciales en los cuales realicemos estas acciones." Álvarez-Gayou (2007). Los marcos de referencia para Ivonne Szasz y Susana Lerner (1994) son: "[…] acercamientos que se fundamentan en diversas corrientes teóricas de la sociología, la psicología, la antropología, la lingüística, etcétera, que muestran la realidad subjetiva y la realidad social, íntimamente relacionadas, donde se inscriben las conductas y acciones humanas.

investigación[7] para obtener la información necesaria, analizar la certeza de las hipótesis, aportar evidencia con respecto a los lineamientos de la investigación y alcanzar los objetivos. El plan o diseño fue el siguiente:

- Revisar el programa de estudio de matemáticas en secundaria en México para detectar en qué grados y bloques es tratado el tema de estudio de esta tesis, el cual es el de secuencias o patrones (ver SEP, 2006 a) y a qué profundidad es que se sugiere que se aborde el tema en la clase.
- Indagar con los profesores de matemáticas sobre la importancia que tiene para ellos el tema de generalización de patrones.
- Buscar y seleccionar problemas sobre la temática antes mencionada en textos de investigaciones anteriores, para llevarlas a cabo en un contexto mexicano. Hacer una indagación previa y así jerarquizar los problemas de secuencias de patrones, esto permitirá seleccionar los más pertinentes para ser resueltos por estudiantes de secundaria en el Distrito Federal.
- Realizar una primera fase como parte del trabajo de campo, que consistirá en una exploración piloto en donde se presentaran los problemas seleccionados sobre patrones para su resolución, utilizando como únicos recursos lápiz y papel, la resolución de estos problemas la realizarán estudiantes de primero y segundo de secundaria, de rendimiento académico regular en matemáticas.
- Considerar los resultados del análisis de las hojas de trabajo resueltas por los estudiantes que participaron en la primera fase de ambos grados, para decidir

---

A su vez, estos acercamientos parten de producciones teóricas distintas, como el constructivismo social, la etnolingüística, la etnografía , la fenomenología, la búsqueda de interpretaciones y significados, así como el uso de diversas técnicas de recolección y análisis de la información, como la observación participante, las entrevistas individuales o grupales, el análisis de textos y testimonios, la historia de vida, o bien la combinación de éstas con herramientas derivadas de la estadística”

[7] [Se debe tener]… una manera práctica y concreta de responder a las preguntas de investigación, y cubrir sus objetivos o intereses. Esto implica seleccionar o desarrollar uno o más *diseños de investigación* y aplicarlo (s) al contexto particular de su estudio. El término “diseño” se refiere al plan o estrategia concebida para obtener la información que se desea. El diseño señala al investigador lo que debe hacer para alcanzar sus objetivos de estudio y para contestar las interrogantes de conocimiento que sea planteado… en el caso del enfoque cualitativo, se puede o no preconcebir un diseño de investigación, aunque es recomendable hacerlo… En las investigaciones cualitativas se traza un plan de acción en el campo para recolectar información, y se concibe una estrategia de acercamiento al fenómeno, evento, comunidad o situación a estudiar.
En ocasiones, el investigador cualitativo elige o desarrolla uno o más diseños para implantar previamente a la recolección de los datos otras veces, realiza una primera inmersión en el campo y, después, analiza qué diseño de investigación le conviene para recolectar la información requerida.” Sampieri (2003).

qué problemas de patrones y qué grado elegir para una segunda fase del trabajo de campo, la cual se caracterizará por una nueva exploración piloto en la que se llevará a cabo la resolución de problemas de patrones en dos ambientes distintos[8]: en el ambiente de lápiz y papel, y en un ambiente digital de aprendizaje. Los alumnos participantes en cada ambiente tendrán características específicas en cuanto a su rendimiento académico en matemáticas. Es decir, los alumnos cuya resolución se efectuará en el ambiente de lápiz y papel, serán los estudiantes de alto rendimiento académico en matemáticas, y los que participarían en el ambiente digital de aprendizaje serán estudiantes de bajo rendimiento académico en la materia.

- Generar rutas de aprendizaje, las cuales guiarán a los estudiantes menos avanzados en la comprensión de los problemas de patrones en un ambiente digital de aprendizaje, en donde este último será un soporte para conseguir la resolución de tales problemas. La base de las rutas de aprendizaje serán las estrategias o procedimientos generados por los estudiantes avanzados durante su resolución de los problemas de patrones en el ambiente de lápiz y papel.
- Revisar y analizar las hojas de trabajo producidas por los estudiantes avanzados (ambiente lápiz y papel). Lo que permitirá hacer modificaciones al planteamiento de los problemas para después adaptarlos a su resolución en el ambiente digital de aprendizaje, el cual por las características del tema matemático de esta tesis resultó ser un manipulativo virtual (http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html). En esencia los problemas a resolver serán los mismos desde el punto de vista matemático.
- Implementar una segunda fase del trabajo de campo, con estudiantes del grado que se haya elegido. Esta fase se ejecutará en dos ambientes: el primero, tiene que ver con la resolución de los problemas en el ambiente de lápiz y papel; en el segundo la resolución será con el uso de las herramientas del manipulativo

[8] El plan de estudios 20011 denomina ambiente de aprendizaje "al espacio donde se desarrolla la comunicación y las interacciones que posibilitan el aprendizaje. Con esta perspectiva se asume que en los ambientes de aprendizaje media la actuación del docente para construirlos y emplearlos como tales. En su construcción destacan los siguientes aspectos:
• La claridad respecto del aprendizaje que se espera logre el estudiante.
• El reconocimiento de los elementos del contexto: la historia del lugar, las prácticas y costumbres, las tradiciones, el carácter rural, semirural o urbano del lugar, el clima, la flora y la fauna.
• La relevancia de los materiales educativos impresos, audiovisuales y digitales.
• Las interacciones entre los estudiantes y el maestro" (p. 28).

virtual. Se intentará que en esta segunda fase todos los estudiantes de alto rendimiento de un grupo completo del grado elegido, participen en el primer ambiente de aprendizaje. Luego, todos los estudiantes restantes del grupo (los que no son de alto rendimiento) son los que llevarían a cabo la resolución de los problemas en el manipulativo virtual. Se intenta que el conocimiento significativo que genera la resolución de los estudiantes avanzados del grupo (transformado en uno o varios procedimientos de resolución de los problemas de patrones), es el que guiará el establecimiento de rutas de aprendizaje para el resto de la clase, hacia la comprensión y resolución de los problemas en el tema elegido. En otras palabras, se pretende avanzar hacia conformar clases incluyentes en donde el aprendizaje se dé entre a pares, con lo cual se pretende de inicio avanzar en la comprensión del tema por parte de todos los alumnos, y en el mejor de los casos, que todos lleguen a resolver problemas de este tipo.

- Llevar a cabo una exploración formal en distintas secundarias en el Distrito Federal, sobre la base de la implementación de la primera y segunda fases, según la cual se implementarán los dos ambientes mencionados en los párrafos anteriores para la resolución de los problemas de generalización de patrones. Esta exploración formal estará supeditada en relación al número de secundarias y de estudiantes que participan; también a la autorización de las escuelas específicas participantes, así como al tiempo de duración del mismo, a través de la Dirección General de Escuelas Secundarias Técnicas (DGEST) en el Distrito Federal (ver esquema del trabajo de campo al final de esta sección del capítulo).
- Revisar y analizar meticulosamente los datos obtenidos en las exploraciones formales (3ª y 4ª fases), en relación con las hojas de trabajo resueltas por todos los estudiantes, así como de las video-grabaciones de entrevistas sobre los procedimientos de resolución de los problemas en torno del tema elegido, en los dos ambientes de resolución descritos.
- Dar cuenta de la pertinencia de seguir los procedimientos de resolución de los estudiantes avanzados como rutas de aprendizaje para los estudiantes de bajo rendimiento en matemáticas (como apoyo para la comprensión o resolución de tales problemas).

- Decir de qué manera la tecnología digital (específicamente el manipulativo virtual usado en la investigación), es mediadora y apoya o complementa el aprendizaje del tema.

En síntesis, con esta metodología que se fundamenta en la noción de *Trayectoria Hipotética del Aprendizaje*, la cual se describirá a mayor detalle en el capítulo de marco teórico. Con ésta se pretende avanzar en conocer los logros de los estudiantes de secundaria en torno del desarrollo del razonamiento algebraico, cuando estudian la generalización de patrones con la mediación de la tecnología digital.

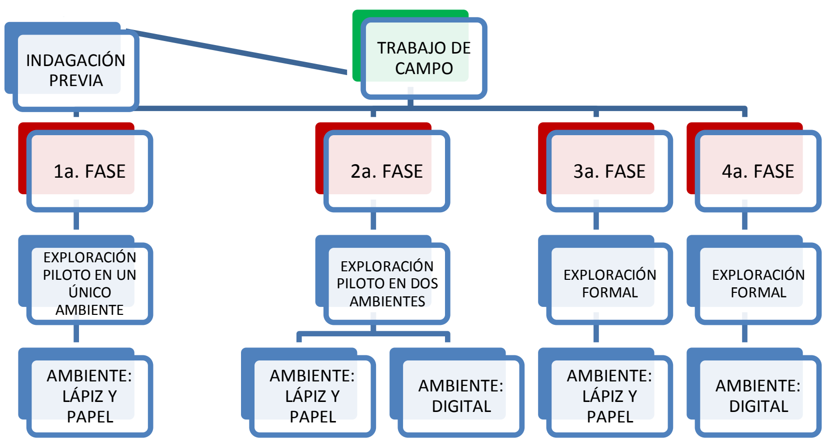


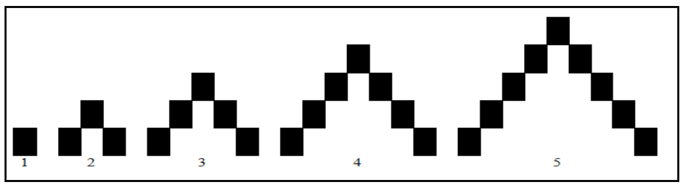

**Imagen 1.** Esquema del Trabajo de Campo

## 2.2. Tratamiento del tema de generalización de patrones en el curriculum escolar del nivel secundaria

El programa de estudio de matemáticas 2006 en secundaria era el que estaba vigente en 2010[9], año en que iniciaba esta investigación, contemplaba el estudio de secuencias o patrones en el primer grado, en el bloque 1; en el segundo grado, en el bloque 3 y en el tercer grado en el bloque 4. Al ser estudiado este tema en el

[9] Actualmente se cuenta con un nuevo programa de estudios, el cual entro en vigencia a partir de 2011 para la educación secundaria, con la Reforma Integral de la Educación Básica (RIEB), la cual tuvo el propósito de unificar lo iniciado en 2006 (a ésta última se le hicieron modificaciones en 2011).

primer grado, se esperaba que los estudiantes representaran sucesiones numéricas o con figuras a partir de una regla dada y viceversa. Textualmente, en el programa de matemáticas se podía leer que el alumno tenía que “construir sucesiones de números a partir de una regla dada. Determinar expresiones generales que definen las reglas de sucesiones numéricas y figurativas” (p. 28). Se sugería en las orientaciones didácticas usar sucesiones numéricas y figurativas sencillas para encontrar la expresión general que define un elemento cualquiera de la sucesión. Se daba como ejemplo la siguiente sucesión de figuras:




También se sugería plantear preguntas como las siguientes, con respecto al patrón que aparece en la imagen anterior: ¿cuántos mosaicos tendrá la figura que ocupe el lugar 10?, ¿cuántos mosaicos tendrá la figura que va en el lugar 20? Y ¿cuántos mosaicos tendrá la figura que va en el lugar 50? En el programa se anticipaba que los estudiantes podrían responder la primera pregunta haciendo dibujos de las figuras pero para contestar las otras dos preguntas restantes, ellos “observarán que deben encontrar una regla, que en principio puedan enunciar verbalmente y luego de manera simbólica, hasta llegar a la expresión algebraica usual.” (p. 28). En este apartado del programa se termina expresando que “el estudio que aquí se plantea respecto a los números naturales deberá continuarse en segundo grado al estudiar los números con signo.”

En el programa de matemáticas de segundo grado, bloque 3, se podía leer que el estudiante tenía que “construir sucesiones de números con signo a partir de una regla dada. Obtener la regla que genera una sucesión de números con signo.” (p. 29). Una diferencia de lo que se sugiere en cuanto al tratamiento del tema en este grado, con respecto al primero, reside en que los números involucrados en las secuencias ahora son números con signo. Es decir, en el tópico ahora están incluidos los números negativos.

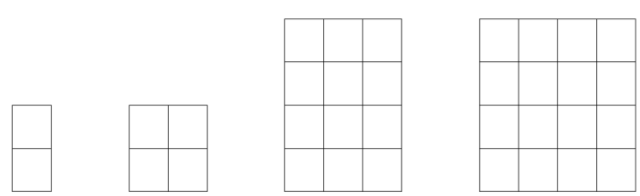
En cuanto a las orientaciones didácticas que debía tomar en cuenta el profesor para que los estudiantes desarrollaran la habilidad de crear una regla general para las sucesiones, en el programa de estudio se sugería: “es importante alentar a los alumnos a buscar regularidades, a formularlas y a producir argumentos para validarlas. No se trata de que el maestro enseñe las fórmulas o reglas para que los alumnos las apliquen, sino de que ellos tengan la oportunidad de ensayar, corregir y validar sus propuestas” (p.85). En el programa se presentaban dos ejemplos de lo que podría plantear el profesor a los estudiantes, los cuales enseguida se muestran.

> Ejemplo 1: La regla de una sucesión de números con signo es $n$-3. ¿Cuáles son los primeros diez números con signo de la sucesión? (Debe recordarse que en los problemas de sucesiones, $n$ representa la posición de un número cualquiera en la sucesión).
>
> Ejemplo 2: Obtener la regla que genera la sucesión -2.5, -1.5, -0.5, +0.5, +1.5

En tercer grado, bloque 4, para darle continuidad al tema de patrones y fórmulas en el programa de estudios de matemáticas, se requería que el estudiante determinara una expresión general cuadrática para definir el enésimo término en sucesiones numéricas y figurativas utilizando el método de diferencias[10].

El programa de estudios le proponía al profesor tres ejemplos de sucesiones, que eran las siguientes:

> Ejemplo 1:



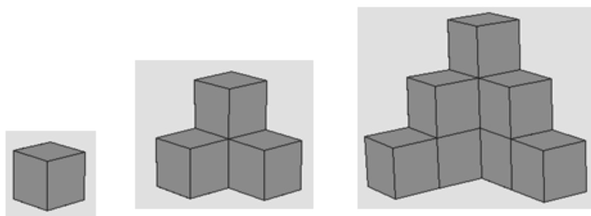
Para esta secuencia se le sugería al profesor hacer las siguientes preguntas que pueden ayudar a determinar el número de cuadros que forman cualquier figura del patrón.

> ¿Cómo va creciendo la medida de la base de estas figuras rectangulares? ¿Cuánto medirán las bases de las figuras que siguen en la sucesión? ¿Cómo va creciendo la

[10] La descripción del método de diferencias puede consultarse en el Fichero de actividades didácticas de matemáticas para secundaria en la edición de 2000.

altura? ¿Cuánto medirán las alturas de las figuras que siguen en la sucesión? ¿Qué relación hay entre la medida de la base y de la altura en cada figura? ¿Qué relación hay entre la medida de la base de cada figura y la posición que ocupa en la secuencia? ¿Cuánto medirá la base de la figura que se halla en la posición *n* de la sucesión? ¿Cuánto medirá la altura de la figura que se halla en la posición *n* de la sucesión? ¿Cuántos cuadritos formarán la figura que se halla en la posición *n* (p.131).

Ejemplo 2: ¿Cuál es la expresión algebraica que determina el número de cubos que forman la figura que ocupa la enésima posición de la siguiente sucesión?



1 2 3

Ejemplo 3: ¿Cuál es la expresión algebraica que permite conocer el total de caras que es posible ver en cualquier figura que esté en la sucesión anterior?

En el programa se le sugería al profesor guiar al estudiante en dos cosas: al descubrimiento del patrón, es decir, descubrir las regularidades y encaminarlo en el proceso de simbolización algebraica de la regla general que determinaba al patrón. En otras palabras, traducir su procedimiento verbal o natural a un lenguaje simbólico general que le permitiera encontrar cualquier término del patrón.

Si se compara el estudio del tema en el tercer grado con los grados anteriores se encuentra que su tratamiento es más complejo. En concreto, el nivel de complejidad aumenta de un grado a otro de manera que las expresiones a las que tiene que llegar el estudiante para determinar cualquier elemento del patrón son de segundo grado.

Ahora bien en el programa de estudios de matemáticas 2011[11], el cual está vigente, no se dan sugerencias puntuales para el tratamiento del tema. En el programa 2006, el tema era tratado en cada grado en un sólo bloque e iba aumentando gradualmente el nivel de complejidad. En el programa actual, el

[11] Como antes ya se comentó (ver pie de página No. 1) con motivo de la RIEB, se hicieron modificaciones al plan y programas de estudio de educación secundaria en 2011. La investigación para esta tesis transcurría en ese entonces en la instrumentación de pruebas piloto que se llevaban a cabo durante ese año.

primer grado se enfoca en revisar el tema en dos bloques. En el bloque I se lee la siguiente especificación del tema:

> Construcción de sucesiones de números o de figuras a partir de una regla dada en lenguaje común. Formulación en lenguaje común de expresiones generales que definen las reglas de sucesiones con progresión aritmética o geométrica, de números y de figuras (p. 31).

Y en el bloque V el programa dice lo siguiente: “Obtención de la regla general (en lenguaje algebraico) de una sucesión con progresión aritmética” (p, 35). En este bloque también se menciona que los estudiantes deben llegar a una regla general y expresarla en lenguaje algebraico. En el segundo grado del bloque 4, en el programa se puede leer lo que se espera que haga el estudiante cuando resuelva problemas de sucesiones o patrones:

> Construcción de sucesiones de números enteros a partir de las reglas algebraicas que las definen. Obtención de la regla general (en lenguaje algebraico) de una sucesión con progresión aritmética de números enteros (p. 42).

En este grado, las reglas generales que definen la sucesión siguen siendo lineales, pero están expresadas algebraicamente. También se menciona que las sucesiones que se construyan sean de números enteros, lo que involucra números positivos y negativos. Esto último, con respecto a la utilización de número negativos tiene similitud con el planteamiento del programa anterior (2006) de segundo grado.

En el tercer grado, el tema de patrones se revisa en un único bloque y puntualmente se le solicita al estudiante la “obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión” (p. 50). En otras palabras, las sucesiones que se le presentan al estudiante ya no son lineales sino de segundo grado y debe encontrar una expresión general cuadrática en lenguaje algebraico.

De lo mencionado anteriormente se puede llevar a cabo una primera reflexión con respecto al tema de investigación, observe la tabla que muestra una comparación de lo que enuncian el programa de matemáticas anterior y el vigente:

| Programa de estudio 2006 | **Programa de estudio 2011** | **Observaciones** |
|---|---|---|
| **PRIMER GRADO**:<br>**Bloque 1**. Construir sucesiones de números a partir de una regla dada. Determinar expresiones generales que definen las reglas de sucesiones numéricas y figurativas.<br>Sugerencias: Debe continuarse el tema en segundo grado con números con signo.<br>La regla general a la que se llegue debe ser enunciada en un principio de forma verbal y luego simbólica hasta llegar a la expresión algebraica usual. | **PRIMER GRADO:**<br>**Bloque I.** Construir sucesiones de números o de figuras a partir de una regla dada en lenguaje común con progresión aritmética o geométrica[12] de números y figuras.<br>**Bloque V**. Obtener la regla general (en lenguaje algebraico) de una sucesión con progresión aritmética. | En esencia ambos programas solicitan la construcción de sucesiones numéricas a partir de una regla dada. Y por otro lado, hallar la expresión general que define una sucesión la cual debe ser enunciada, en principio, con un lenguaje natural para después hacerlo de manera algebraica.<br>Las sucesiones son de números naturales. |
| **SEGUNDO GRADO:**<br>**Bloque 3**. Construir sucesiones de números con signo a partir de una regla dada.<br>Obtener la regla que genera una sucesión de números con signo.<br>Sugerencias: alentar al estudiante a buscar regularidades, a formularlas y a producir argumentos para validarlas. | **SEGUNDO GRADO:**<br>**Bloque IV.** Construir sucesiones de números enteros a partir de una regla algebraica que las definen (obtener la regla general en lenguaje algebraico de una sucesión con progresión aritmética de números enteros). | El contenido a estudiar en ambos programas es el mismo, en el sentido de construir sucesiones de números enteros (positivos y negativos) a partir de una regla dada y viceversa. Una diferencia es que en el programa 2006 no se puntualiza que la regla general deba ser expresada en lenguaje algebraico como lo hace el programa 2011. Sin embargo, puede caber la posibilidad de hacerse debido que en el primer grado se hacia la sugerencia de llegar a expresar la regla general de manera algebraica. |
| **TERCER GRADO:**<br>**Bloque 4**. Determinar una expresión general cuadrática para definir el enésimo término en sucesiones numéricas y figurativas. Utilizando el método de diferencias.<br>Se sugiere guiar al estudiante al descubrimiento del patrón y guiarlo en el proceso de simbolización algebraica de la regla general. | **TERCER GRADO:**<br>**Bloque IV**. Obtener de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión. | El contenido que se aborda es el mismo en ambos programas. Lo que quiere decir que la complejidad en el tratamiento del tema aumenta debido a que las sucesiones ya no son lineales como en los dos grados anteriores sino que ahora las sucesiones son de segundo grado y deben ser expresadas algebraicamente. |

**Imagen 2**. Tabla comparativa de los programas de estudio 2006 y 2011

[12] Una sucesión con progresión aritmética es una sucesión donde la diferencia de dos términos consecutivos es un número constante.
Una sucesión con progresión geométrica es una sucesión donde cada término se calcula multiplicando el anterior por una cantidad constante, llamada razón.

En general, la revisión del contenido en ambos programas no muestra diferencia significativa que pudiera afectar el plan de investigación y menos de manera directa la elección del tema de la generalización de patrones.

Es conveniente mencionar que todas las actividades relacionadas con la obtención de datos se llevaron a cabo a lo largo de cinco etapas de trabajo de campo, las cuales hemos denominado indagación previa; primera fase y segunda fase (ambas son exploraciones piloto); tercera y cuarta fase, que son exploraciones formales. Las características de cada una de estas fases se describen enseguida.

### 2.2.1 Indagación previa

Se desconocía si al momento de implementar la primera fase los estudiantes ya habían revisado con su profesor de matemáticas el tema de patrones, y sí éste había sido estudiado a qué profundidad el profesor lo había enseñado. También se preguntó a profesores de matemáticas (no sólo a los profesores de los alumnos participantes, sino a otros en distintas circunstancias y lugares) la importancia que tenía el tema de patrones para ser enseñada, es decir, el tiempo que le dedicaban, la profundidad con la que lo abordaban y su utilidad. De este bosquejo se concluyó que no era un tema valorado por ellos, más bien era tratado superficialmente, se recurría a secuencias numéricas más que a geométricas o de figuras y pocas veces se llegaba a una regla general. Ellos daban preferencia a temas que consideraban “elementales” como por ejemplo, las ecuaciones.

El hecho de preguntar a los profesores sobre la importancia de la generalización de patrones no fue para tener un tema o problema para investigar, sino para reforzar la idea de la indiferencia que se tiene del tema de patrones. Claramente la temática de generalización de patrones no es nada irrelevante para los investigadores en educación matemática, sino todo lo contrario pues su valor radica esencialmente porque es considerado el corazón del álgebra (Kaput, 2008). Entonces, para obtener información sobre qué tanto sabían los estudiantes sobre el tema de patrones se buscaron textos o artículos de educación matemática recientes, relacionados con la generalización de patrones que incluyeran problemas sobre el tema. A este respecto, se hallaron suficientes. La mayoría de los textos son de autores extranjeros, de los cuales se seleccionaron aquellos problemas que se consideraron idóneos para ser resueltos por los estudiantes mexicanos de nivel secundaria, como lo sugiere el programa de estudios de matemáticas vigente. Se decidió que los problemas de patrones elegidos fueran presentados tal y como estaban en los textos originales a estudiantes de primero y segundo grado de secundaria.

En este sentido, se pensó en que los problemas de patrones se aplicarían en ambos grados para conocer el nivel de dificultad que representaba su resolución. Es decir, saber qué tanto conocimiento y capacidad tenían para solucionarlos con los recursos cognitivos y materiales con los que contaban los estudiantes de ambos grados. Conocer los resultados nos daría la pauta para determinar a qué grado de la secundaria sería conveniente volver a implementarlos.

### 2.3. Primera Fase

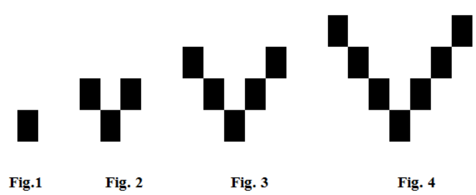
Para llevar a cabo la primera fase del trabajo de campo y conocer la pertinencia de tales problemas sobre la generalización de patrones con estudiantes de primero y segundo grados, se solicitó al director de una escuela secundaria técnica del Distrito Federal la autorización de trabajar con algunos estudiantes de los grados mencionados. Se sostuvo una conversación con el director del plantel explicando las actividades a realizar con los estudiantes, el objetivo de tal intervención, el tiempo requerido y las características de los estudiantes participantes.

La secundaria técnica No. 72, ubicada en la delegación Magdalena Contreras, aceptó que sus estudiantes participaran en la prueba piloto. La prueba piloto inició en junio de 2010 y duró todo el mes. Participaron once estudiantes de primer grado y nueve de segundo grado. Las características que debían tener los estudiantes fueron las siguientes:

- Tener un rendimiento académico regular en matemáticas, es decir, con una calificación de entre 7 y 9
- Con interés de participar en la prueba de manera voluntaria
- Comprometerse a estar al corriente con actividades y tareas de la materia a la cual dejaría de asistir para participar en la prueba.

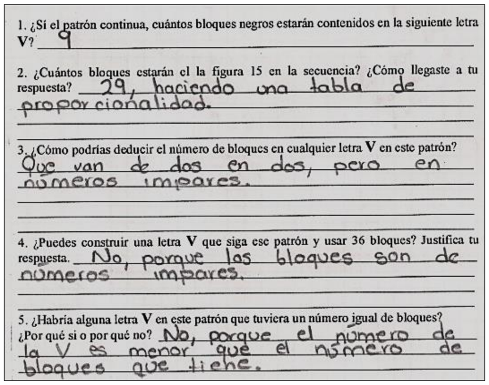
Las características mencionadas debían ser consideradas por el profesor de matemáticas para la elección de los estudiantes. Una vez elegidos los estudiantes, da inicio una sesión introductoria en la que se les explica en qué consistirá el trabajo con ellos. En las sesiones subsecuentes se les presentaron cinco problemas relacionados con patrones y se presentaron en el orden y de acuerdo con las denominaciones siguientes: *La Letra V*, *Las Torres de Palillos*, *El Diseño de la Viga*, *El Diamante de Puntos* y *Las Estampas en el Cubo.* Enseguida se muestran las imágenes y las preguntas que los estudiantes resolvieron en relación con las mismas.

***El problema de la Letra* "V"**




¿Sí el patrón continua, cuántos bloques negros estarán contenidos en la siguiente *Letra V*? ¿Cuántos bloques estarán en la figura 15 en la secuencia? ¿Cómo llegaste a tu respuesta? ¿Cómo podrías deducir el número de bloques en cualquier *Letra V* en este patrón? ¿Puedes construir una *Letra V* que siga ese patrón y usar 36 bloques? Justifica tu respuesta. ¿Habría alguna *Letra V* en este patrón que tuviera un número igual de bloques? ¿Por qué si o por qué no?

Se muestran algunas imágenes asociadas al problema de la *Letra V* y las respuestas de los estudiantes en las hojas de trabajo:



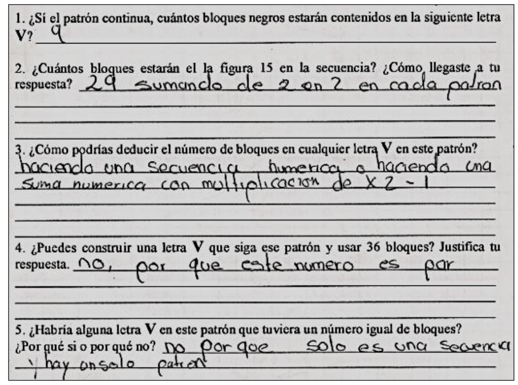
1. ¿Sí el patrón continua, cuántos bloques negros estarán contenidos en la siguiente letra V? 9

2. ¿Cuántos bloques estarán el la figura 15 en la secuencia? ¿Cómo llegaste a tu respuesta? 29, haciendo una tabla de proporcionalidad.

3. ¿Cómo podrías deducir el número de bloques en cualquier letra **V** en este patrón? Que van de dos en dos, pero en números impares.

4. ¿Puedes construir una letra **V** que siga ese patrón y usar 36 bloques? Justifica tu respuesta. No, porque los bloques son de números impares.

5. ¿Habría alguna letra **V** en este patrón que tuviera un número igual de bloques? ¿Por qué si o por qué no? No, porque el número de la V es menor que el número de bloques que tiene.



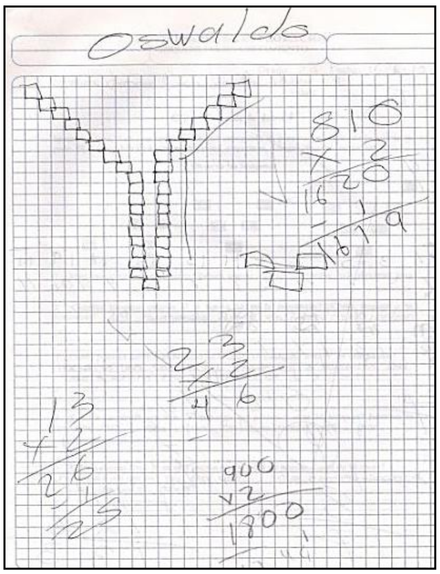
1. ¿Sí el patrón continua, cuántos bloques negros estarán contenidos en la siguiente letra V? 9

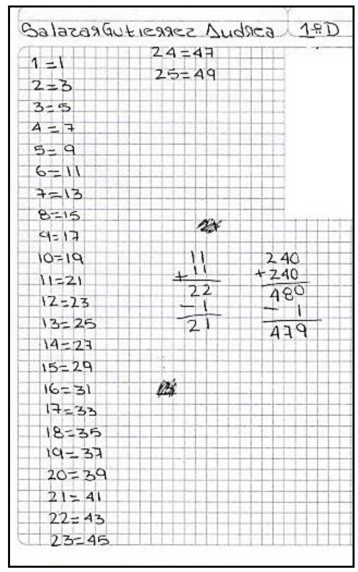
2. ¿Cuántos bloques estarán el la figura 15 en la secuencia? ¿Cómo llegaste a tu respuesta? 29 sumando de 2 en 2 en cada patron

3. ¿Cómo podrías deducir el número de bloques en cualquier letra **V** en este patrón? haciendo una secuencia numerica o haciendo una suma numerica con multiplicacion de X 2 - 1

4. ¿Puedes construir una letra **V** que siga ese patrón y usar 36 bloques? Justifica tu respuesta. no, por que este numero es par

5. ¿Habría alguna letra **V** en este patrón que tuviera un número igual de bloques? ¿Por qué si o por qué no? no por qoe solo es una seqencia y hay unsolo patron

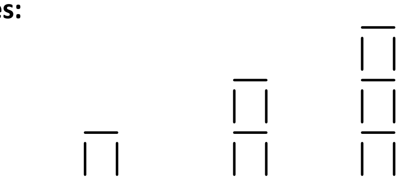


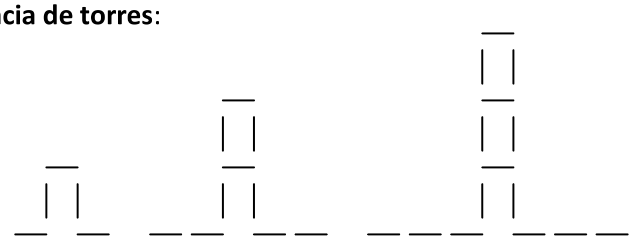

### *El problema de Las Torres de Palillos*

Las figuras representan dos secuencias de crecimiento de torres de palillos

**Primera secuencia de torres:**

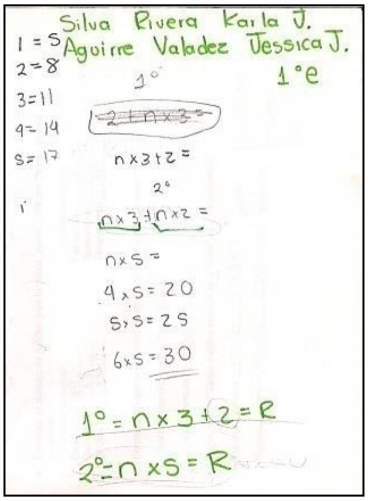


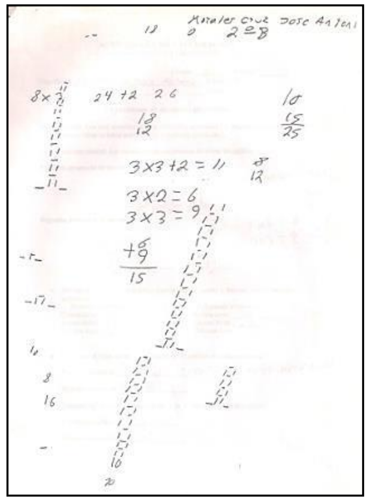

**Segunda secuencia de torres**:

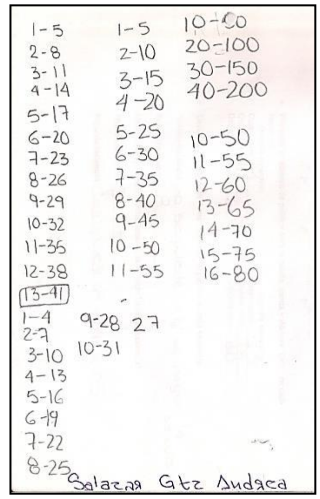


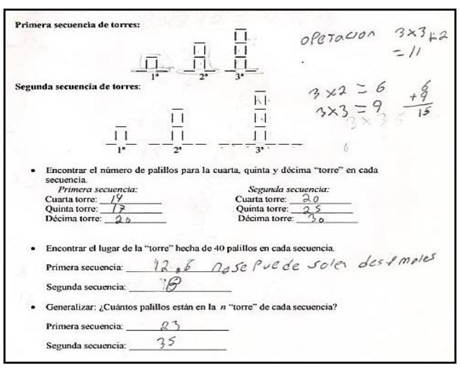
Encontrar el número de palillos para la cuarta, quinta y décima “torre” en cada secuencia.
Encontrar el lugar de la “torre” hecha de 40 palillos en cada secuencia.
Generalizar: ¿Cuántos palillos están en la ***n*** “torre” de cada secuencia?

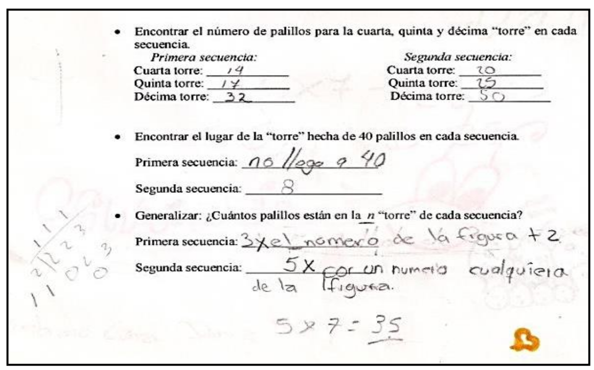
Las imágenes respectivas (al igual que en el problema anterior) se muestran a continuación:



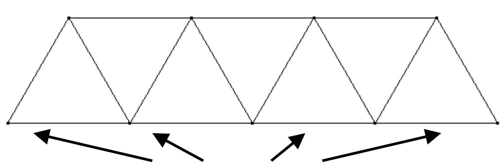



### *El problema del Diseño de la Viga*

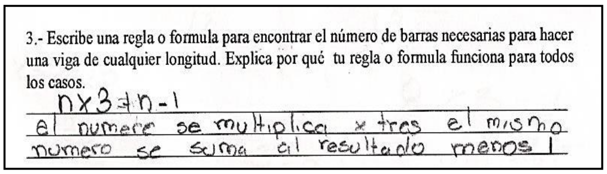
Las vigas son diseñadas como un soporte para puentes. Las vigas son construidas usando barras. La longitud de la viga es determinada por el número de barras necesarias para construir la base de la viga. Abajo esta una viga de longitud 4.

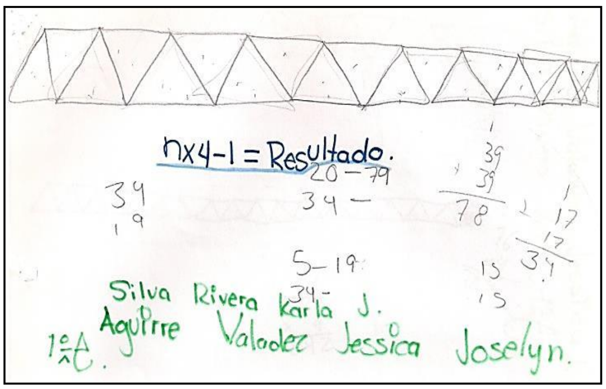


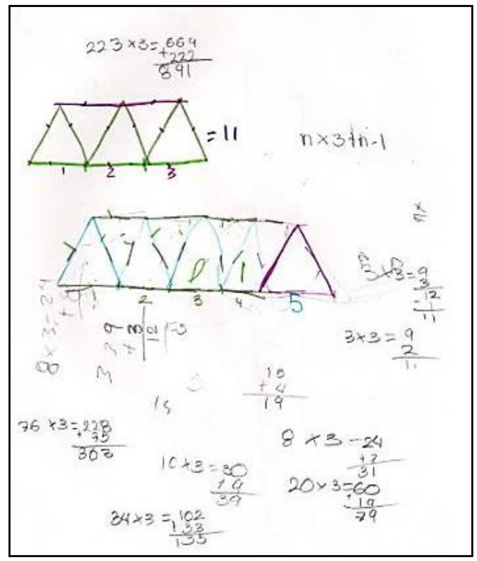
Base de la Viga de 4 barras

¿Cuántas barras son necesarias para hacer una viga de longitud 5? ¿De longitud 8? ¿De longitud 10? ¿De longitud 20? ¿De longitud 34? ¿De longitud 76?
¿Cuántas barras son necesarias para una viga de longitud 223?
Escribe una regla o fórmula para encontrar el número de barras necesarias para hacer una viga de cualquier longitud. Explica por qué tú regla o fórmula funciona para todos los casos. Sí usaste letras di qué significa cada una.

Éstas son algunas imágenes de lo que realizaron los estudiantes en las hojas de trabajo:

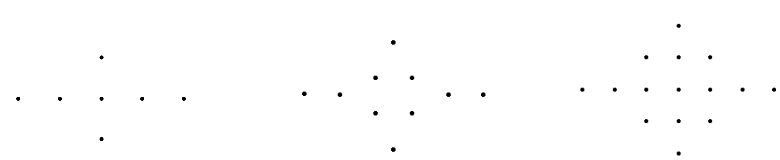


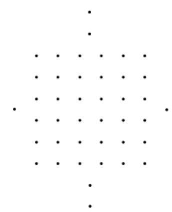

*El problema del Diamante de Puntos*

Lo de abajo es una secuencia de diamantes hechos de puntos



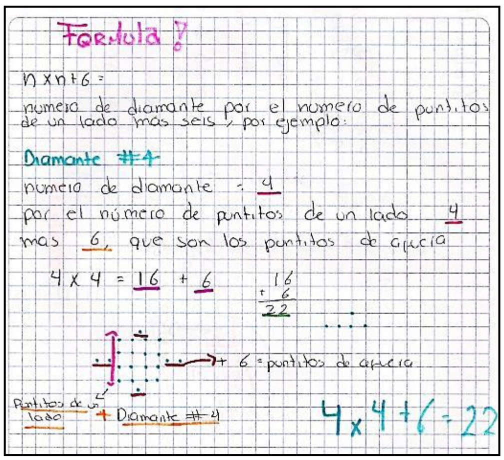
Diamante #1 Diamante #2 Diamante #3

Dibujar el cuarto diamante en la secuencia
¿El siguiente diamante encaja en la secuencia dada? Sí es si, ¿cómo podrías decirlo y qué número de diamante sería este? Y si es no, ¿por qué no?



Explica cómo tú dibujarías el décimo diamante.
¿Cuántos puntos tendría?
¿Cuántos puntos tendría el diamante 25? Explica cómo es que lo sabes
Describe con palabras una regla que te permita determinar el número de puntos necesarios para hacer cualquier diamante en la secuencia. Sí usaste letras di qué significa cada una.

Ejemplos de las ejecuciones de los estudiantes se muestran a continuación:



Formula ?

$n \times n + 6 =$

numero de diamante por el numero de puntitos de un lado mas seis, por ejemplo:

Diamante #4

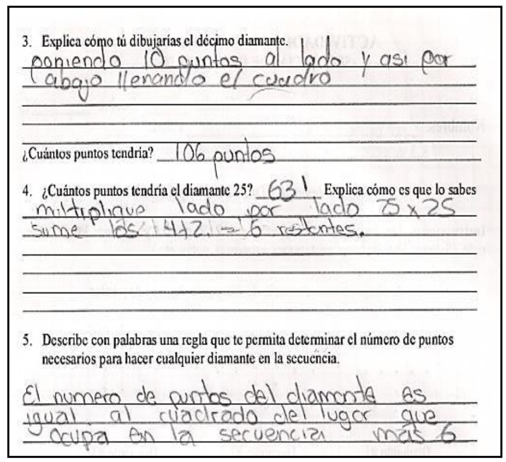
numero de diamante = 4
por el número de puntitos de un lado 4
mas 6, que son los puntitos de apucia

$4 \times 4 = 16 + 6$ $\quad 16 + 6 = 22$

+ 6 = puntitos de apucia

Puntitos de un lado + Diamante # 4

$4 \times 4 + 6 = 22$



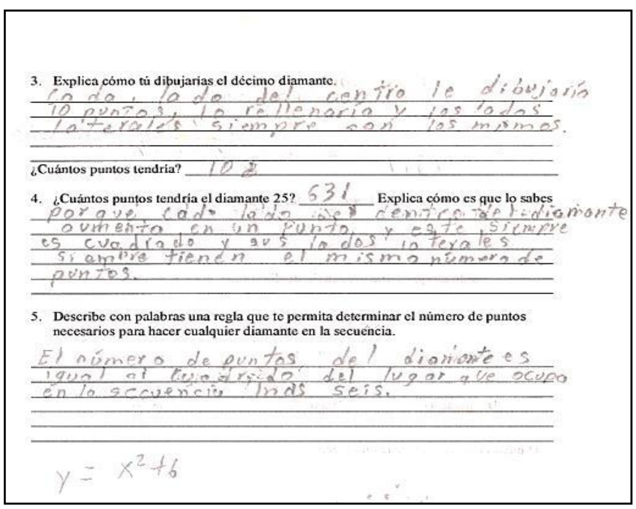
3. Explica cómo tú dibujarías el décimo diamante. poniendo 10 puntos al lado y así por abajo llenando el cuadro

¿Cuántos puntos tendría? 106 puntos

4. ¿Cuántos puntos tendría el diamante 25? 631 Explica cómo es que lo sabes mitiplique lado por lado 25 x 25 sume los 442 → 6 restantes.

5. Describe con palabras una regla que te permita determinar el número de puntos necesarios para hacer cualquier diamante en la secuencia.

El numero de puntos del diamante es igual al cuadrado del lugar que ocupa en la secuencia más 6



3. Explica cómo tú dibujarías el décimo diamante. Cada lado del centro le dibujaría 10 puntos, lo rellenaría y los lados laterales siempre son los mismos.

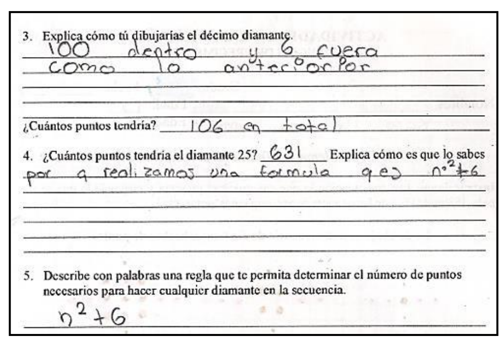
¿Cuántos puntos tendría? 10 2

4. ¿Cuántos puntos tendría el diamante 25? 631 Explica cómo es que lo sabes porque cada lado del dentro del diamante aumenta en un punto, y este siempre es cuadrado y sus lados laterales siempre tienen el mismo número de puntos.

5. Describe con palabras una regla que te permita determinar el número de puntos necesarios para hacer cualquier diamante en la secuencia.

El número de puntos del diamante es igual al cuadrado del lugar que ocupa en la secuencia más seis.

$y = x^2 + 6$



3. Explica cómo tú dibujarías el décimo diamante. 100 dentro y 6 fuera como lo antec°orPor

¿Cuántos puntos tendría? 106 en total

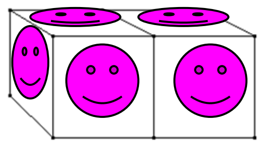
4. ¿Cuántos puntos tendría el diamante 25? 631 Explica cómo es que lo sabes por q realizamos una formula q es $n^2 + 6$

5. Describe con palabras una regla que te permita determinar el número de puntos necesarios para hacer cualquier diamante en la secuencia.

$n^2 + 6$

### *El problema de Las Estampas en el Cubo*

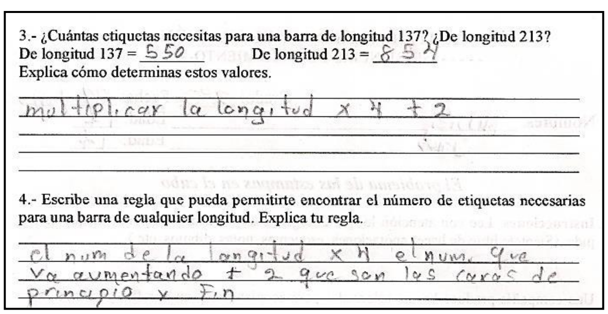
Una compañía produce barras coloreadas acoplando cubos en una fila y usando una máquina para colocar estampas “sonrientes” sobre las barras. La máquina coloca exactamente una estampa sobre cada cara expuesta de cada cubo. Todas las caras expuestas de cada cubo tienen que tener una estampa, esta barra es de longitud 2, entonces, habrá de necesitar 10 estampas.



Barra de longitud 2 (dos cubos)

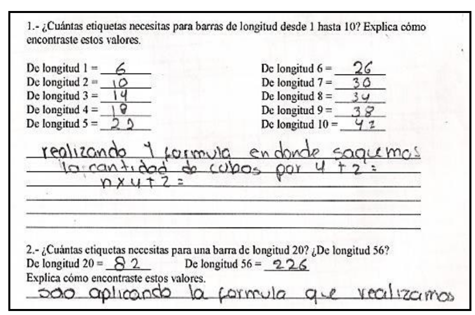
¿Cuántas etiquetas necesitas para barras de longitud desde 1 hasta 10? Explica cómo encontraste estos valores.
¿Cuántas etiquetas necesitas para una barra de longitud 20? Y ¿De longitud 56? Explica cómo llegaste a esos resultados.
¿Cuántas etiquetas necesitas para una barra de longitud 137? Y ¿De longitud 213? Explica cómo encuentras estos valores.
Escribe una regla que pueda permitirte encontrar el número de etiquetas necesarias para una barra de cualquier longitud. Explica tú regla.

Se muestran algunas imágenes asociadas al problema de *Las Estampas en el Cubo* y las respuestas de los estudiantes en las hojas de trabajo:



3.- ¿Cuántas etiquetas necesitas para una barra de longitud 137? ¿De longitud 213?
De longitud 137 = 550 De longitud 213 = 854
Explica cómo determinas estos valores.
multiplicar la longitud x 4 + 2

4.- Escribe una regla que pueda permitirte encontrar el número de etiquetas necesarias para una barra de cualquier longitud. Explica tu regla.
el num de la longitud x 4 el num. que va aumentando + 2 que son las caras de principio y fin

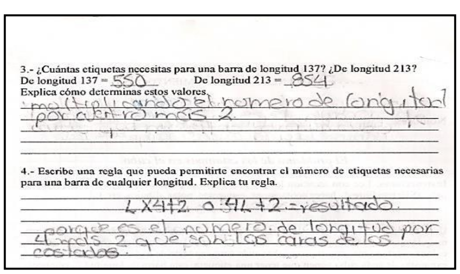


1.- ¿Cuántas etiquetas necesitas para barras de longitud desde 1 hasta 10? Explica cómo encontraste estos valores.

De longitud 1 = 6
De longitud 2 = 10
De longitud 3 = 14
De longitud 4 = 18
De longitud 5 = 22
De longitud 6 = 26
De longitud 7 = 30
De longitud 8 = 34
De longitud 9 = 38
De longitud 10 = 42

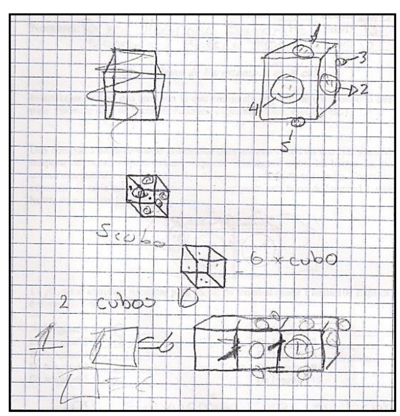
realizando 1 formula endonde sacamos la cantidad de cubos por 4 + 2 = n x 4 + 2 =

2.- ¿Cuántas etiquetas necesitas para una barra de longitud 20? ¿De longitud 56?
De longitud 20 = 82 De longitud 56 = 226
Explica cómo encontraste estos valores.
soo aplicando la formula que realizamos

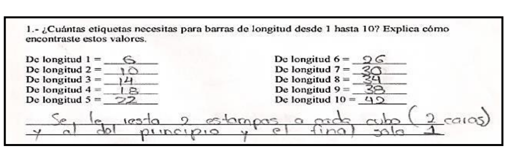


3.- ¿Cuántas etiquetas necesitas para una barra de longitud 137? ¿De longitud 213?
De longitud 137 = 550 De longitud 213 = 854
Explica cómo determinas estos valores.
multiplicando el numero de longitud por cuatro más 2

4.- Escribe una regla que pueda permitirte encontrar el número de etiquetas necesarias para una barra de cualquier longitud. Explica tu regla.
L X 4 + 2 o 4L + 2 = resultado
porque es el numero de longitud por 4 más 2 que son las caras de los costados.







1.- ¿Cuántas etiquetas necesitas para barras de longitud desde 1 hasta 10? Explica cómo encontraste estos valores.

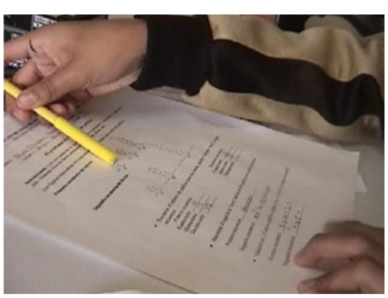
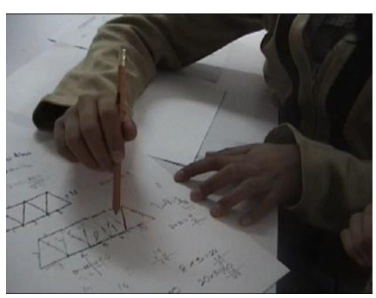
De longitud 1 = 6
De longitud 2 = 10
De longitud 3 = 14
De longitud 4 = 18
De longitud 5 = 22
De longitud 6 = 26
De longitud 7 = 30
De longitud 8 = 34
De longitud 9 = 38
De longitud 10 = 42

Se le resta 2 estampas a cada cubo (2 caras) y al del principio y el final solo 1

Las imágenes de las hojas de trabajo que evidencian la resolución de los problemas de patrones por los estudiantes, fueron soportadas en un ambiente de lápiz y papel. Las sesiones fueron de una hora diaria para no distraer a los estudiantes en el aprovechamiento académico de sus otras asignaturas. Se consideraba el avance en la resolución de los problemas por parte de los estudiantes, por esta razón se llevó un mes en realizar los cinco problemas. Se atendió por separado a los estudiantes dado que eran de distinto grado escolar. Es decir, una sesión con los alumnos de primer grado y otra sesión con los de segundo.

Las sesiones de trabajo se realizaron en la biblioteca escolar que contaba con el espacio y el mobiliario adecuado. Se les proporcionó a los estudiantes materiales como: hojas de trabajo en las cuales contestaron las preguntas y resolvieron el problema en cuestión; lápices, reglas, calculadoras, etcétera. También en las sesiones con los estudiantes se les entrevistó para saber, de propia voz, cómo habían resuelto los problemas de patrones, es decir, cuáles fueron sus procedimientos, estrategias o dificultades en la resolución de los problemas planteados. Las entrevistas fueron video-grabadas como un soporte documental para después ser revisadas y analizadas.



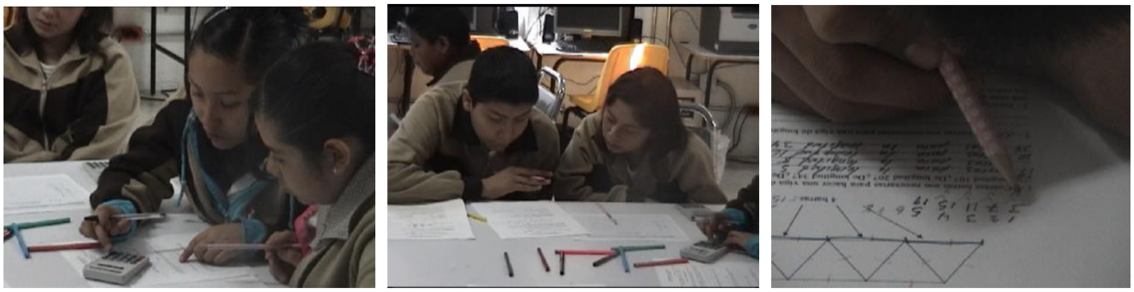



**Imagen 2**. Estudiantes trabajando en las actividades de la primera fase

### 2.3.1 Síntesis de la primera fase

El objetivo de la primera fase fue conocer la pertinencia de los problemas sobre la generalización de patrones con estudiantes de primero y segundo grados. Los datos recabados de la resolución de las hojas de trabajo de los cinco problemas presentados a los estudiantes de ambos grados nos dejan ver lo que a continuación se describe: En lo que respecta al problema de la ***Letra V***, casi todos los estudiantes de primer grado lo resuelven a través de realizar listados que surgen del conteo simple. Los estudiantes de segundo grado, también hacen listados pero se percatan que no es posible usarlos para encontrar una posición de *Letra V*, mayor en el patrón. Sólo tres estudiantes de este grado hallan un procedimiento general para saber la cantidad de bloques de cualquier *Letra V*, del patrón el cual lo expresan con un lenguaje natural.

En relación al problema de ***Las Torres de Palillos****,* casi todos los estudiantes de ambos grados lo resuelven a través de un procedimiento general; con menos dificultad, los de segundo grado, quienes inician la resolución con listados de conteo simple que evolucionan hasta lograr expresar la generalidad del patrón de cada una de las secuencias de torres en forma semialgebraica. Es decir, escriben sus expresiones o la regla general sin respetar las reglas de escritura algebraica. Por ejemplo, utilizan la letra "*x*" para indicar una multiplicación. Observe: "*nx3+2=R*". Aunque sus expresiones sean de manera natural o semialgebraicas reflejan la generalización del patrón que es lo preponderante para esta investigación.

En cuanto al problema del ***Diseño de la Viga***, los estudiantes de primer grado lo resuelven con menos dificultades que los de segundo. Los de primero encuentran dos procedimientos distintos que están en directa correspondencia con la manera de visualizar el patrón y llegan a expresar la generalización del patrón de forma semi algebraica como se mencionó en el problema anterior. Los estudiantes de segundo que no logran llegar a la generalización del patrón tienen algo en común con los estudiantes de primer grado que sí lo logran, y es que entre sus intentos por encontrar procedimientos ellos relacionan la longitud de la viga, ya que considerar este dato es primordial y refleja un buen indicio hacia la generalización del patrón.

Por otro lado, el problema del ***Diamante de Puntos*** se dificultó más para los estudiantes de primer grado aunque hubo quienes si lo resolvieron de forma satisfactoria. Ellos intentaban buscar una regularidad en la secuencia numérica que resultaba del conteo de puntos totales de cada diamante del patrón sin observar la estructura que formaba al diamante. Es decir, no visualizaron la parte o puntos cambiantes y los constantes. Algo que facilitó la resolución del problema para ambos grados fue marcar con colores los puntos cambiantes y los constantes en cada diamante.

En otras palabras, señalaron las regularidades del patrón lo cual resulta significativo para llegar a la generalización. Cabe decir que la expresión algebraica que generaliza al patrón incluye un término cuadrático lo que pudiera haber sido una razón suficiente para causar dificultades en la resolución del problema para algunos estudiantes de primer grado, que aún desconocían el concepto.

Por último, el problema de ***Las Estampas en el Cubo*** fue resuelto por casi todos los estudiantes de primer grado y así también para los estudiantes de segundo. En ambos grados tuvieron la misma visualización del patrón la cual los dirigió a un mismo procedimiento. La visualización de los estudiantes fue concebir a la barra de cubos acoplados como un entero de cuatro lados al que sólo se le tenía que agregar dos estampas en las caras de los extremos de dicha barra. Todos los estudiantes relacionaron acertadamente la longitud de la barra para expresar la generalidad, los estudiantes de primero recurren a más estrategias o intentos de resolución que los estudiantes de segundo, estos últimos son más prácticos y utilizan un lenguaje más simbólico aunque su escritura no sea estrictamente algebraica.

En general, los problemas seleccionados en la primera fase sobre generalización de patrones pueden ser planteados a estudiantes de primer grado. Se recuerda que no se pretende que lleguen a expresar simbólicamente la generalización sino en el mejor de los casos que sea expresada en lenguaje natural.

### 2.4. Segunda fase

Con respecto a los resultados de la fase anterior se decidió implementar una segunda fase en la misma escuela secundaria donde se realizó la primera, que consistió en resolver tres problemas de patrones que se seleccionaron a partir de la primera fase que fueron: *La Letra V*, *Las Estampas en el Cubo* y *El Diseño de la Viga* (ver especificaciones en apartado 2.3). La razón por la cual se eligieron sólo tres problemas fue que éstos se podían adaptar al ambiente digital de aprendizaje que nos propusimos usar en esta investigación. Es conveniente aclarar las características de los estudiantes para esta segunda fase:

- Los estudiantes no fueron los mismos que participaron en la exploración de la primera fase. Estos estudiantes son distintos y sólo de primer grado.
- Fueron dos grupos completos del grado elegido (45 estudiantes por grupo).
- Cada grupo fue dividido para la resolución de los problemas en dos tipos de poblaciones: estudiantes avanzados de un grupo (15 aprox.) y el resto de estudiantes del grupo (30). Cada población se relaciona con el ambiente de aprendizaje respectivamente de esta segunda fase.

La diferencia entre la primera fase y ésta segunda fase es la división del trabajo para la resolución de los problemas. Las características para la exploración en esta fase tienen que ver con el ambiente de aprendizaje en el que se lleva a cabo la resolución de los problemas y el tipo de estudiantes que las resuelven en el ambiente dado. Es decir, sólo los estudiantes avanzados en matemáticas de cada uno de los dos grupos resolvieran los tres problemas de patrones antes mencionados en un ambiente de lápiz y papel. Los tres problemas no fueron modificados para este ambiente, se presentaron de la misma forma en que se les dio a los estudiantes de la primera fase. En cambio para ser implementadas en el ambiente de aprendizaje digital se requirió de forzosas modificaciones debido a las características que demandaba tal ambiente. Cabe adelantar que las modificaciones que se hacen al planteamiento de los problemas de patrones durante el transcurso de la investigación serán descritas con más detalle en el apartado 2.4.2 de este capítulo. Por otro lado, las entrevistas a los estudiantes fueron video-grabadas como soporte documental. El trabajo con los estudiantes se realizó en la biblioteca escolar al igual que en la primera fase.

El conocimiento generado por los estudiantes avanzados durante la resolución de las hojas de trabajo y la información que arrojaran las entrevistas, es lo que permitiría conocer procedimientos o estrategias de solución a los tres problemas de patrones planteados. Dicho de otro modo, los procedimientos y estrategias de los alumnos avanzados se convirtieron en rutas de aprendizaje para guiar a los estudiantes de bajo rendimiento académico en matemáticas. Nuestra hipótesis es que procediendo de esta manera, los estudiantes de bajo rendimiento escolar se aproximarían a obtener mejores resultados en la resolución de problemas de este tipo. Los datos (o resoluciones de los estudiantes avanzados) obtenidos en el ambiente de lápiz y papel sirven como referente para el replanteamiento de los mismos tres problemas de patrones (en sentido matemático) ahora puestos en otro ambiente de aprendizaje de carácter virtual.

La exploración en el ambiente digital de esta segunda fase se realizó en el aula digital de la escuela, la cual cuenta con 25 computadoras con acceso rápido a internet, una pantalla y un proyector. El ambiente digital de aprendizaje al que nos hemos estado refiriendo es un manipulativo virtual desarrollado por la Universidad del Estado de Utah, localizada en los Estados Unidos de América. Se accede a él a través de la dirección electrónica: http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html. Dicho manipulativo actúa como un mediador matemático para la comprensión, construcción y la resolución de objetos matemáticos.

Enseguida se muestran los tres problemas que se les presentaron a los estudiantes para que los resolvieran con ayuda del manipulativo virtual. De entrada se puede pensar que los problemas son exactamente los mismos. Pero esto no es así pues se corrige la redacción en el planteamiento de los problemas y se introducen múltiples guías pedagógicas para resolverlos, las que se derivaron de la resolución de los estudiantes avanzados.

***El problema de la Letra V***

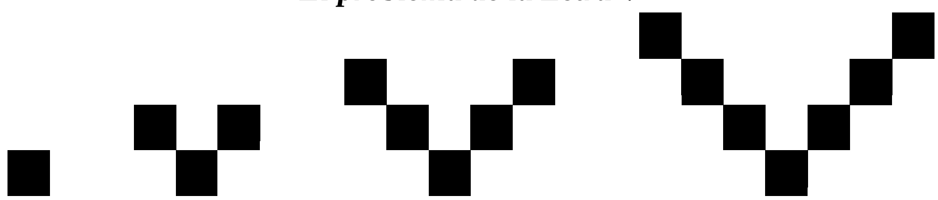
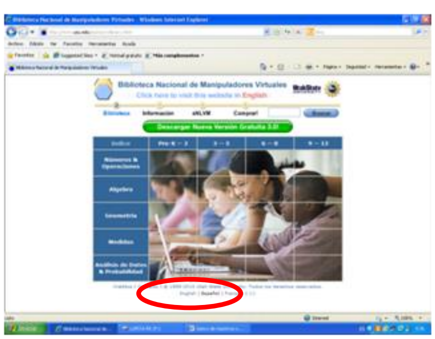


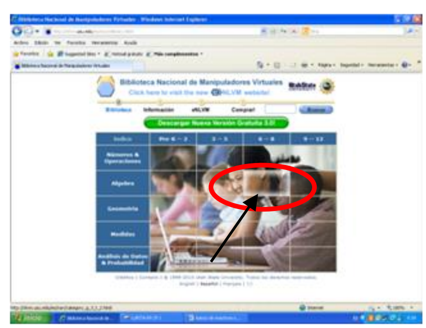
Fig.1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4

*Apóyate del manipulador virtual para responder las preguntas 1 a 8 que aparecen abajo.*

Antes de empezar a resolver el problema sería conveniente aprender a manejar el manipulador virtual. Enseguida se te dan las instrucciones (de la (***a***) a la (***f***)) que te permitirán usarlo.

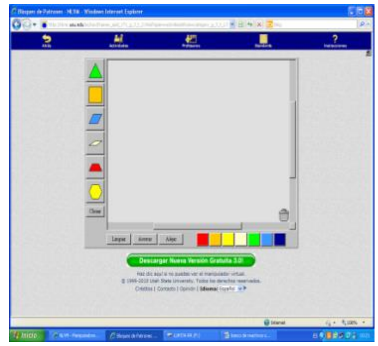
**a)** Introduce la siguiente página de internet en la barra de dirección electrónica:
http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html y te aparecerá en la pantalla la imagen de la izquierda.



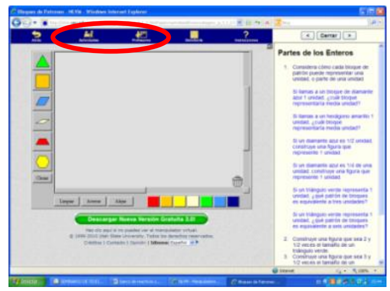


**b)** Haz clic para elegir el idioma ***Español*** y luego haz clic en la fila de Algebra y en la columna de grado 6-8.

**c)** Enseguida aparecerán todos los manipulativos de esta sección. Haz clic en el que dice "***Bloques de Patrones***" y aparecerá la imagen de la derecha.

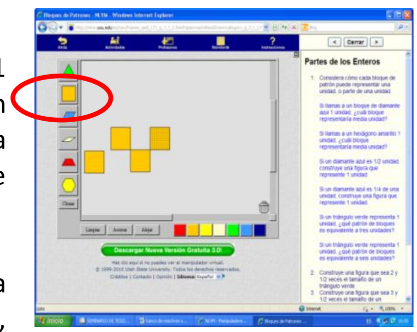


**d)** Luego haz clic en el icono de "**Actividades**" aparecerá una columna a la derecha donde debes elegir la actividad llamada "Partes de los Enteros" la cual utilizaremos para resolver el Problema de la letra "**V**".



*Construcción de la letra "**V**" con el manipulador virtual:*

**e)** Haz clic en el icono del cuadrado para obtener la figura 1 de nuestro patrón. Nuevamente haz clic las veces sean necesarias para obtener los bloques que formaran la figura 2 del patrón. Para desplazar los bloques, haz clic sobre ellos, sin soltar, para desplazarlos a la posición que desees.



**f)** Debes hacer clic en el icono de "**Instrucciones**" para saber cómo puedes utilizar las herramientas que te ofrece, por ejemplo: Añadir un bloque al área de trabajo, Rotar un bloque, Cambiar el color de un bloque, Remover un bloque, Agrupar bloque, Clonar un bloque, Limpiar el área de trabajo y Acercar y Alejar .

*¡Ahora sí, estás listo para responder lo que se te solicita!*

1. Vuelve a observar con atención las figuras del patrón de la letra "V". ¿Qué es lo que notas en el? ¿Qué puedes decir acerca de el?
2. Continúa respondiendo la siguiente tabla

| Nº de figura | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Nº de bloques | 1 | 3 | | | | |

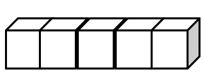
3. ¿Sí el patrón continua, cuántos bloques negros estarán contenidos en la siguiente *Letra V*?
4. ¿Aumenta o disminuye el número de bloques de una figura y la siguiente? ¿Por qué?
5. ¿Cuántos bloques estarán en la figura 15 en la secuencia? ¿Cómo llegaste a tu respuesta? Explica
6. ¿Cómo podrías saber el número de bloques en cualquier *Letra V* en este patrón? Explica
7. ¿Puedes construir una *Letra V* que siga ese patrón y que tenga sólo 36 bloques? Justifica tu respuesta
8. ¿Habría alguna *Letra V* en el patrón que tuviera un número igual de bloques? ¿Por qué si o por qué no?

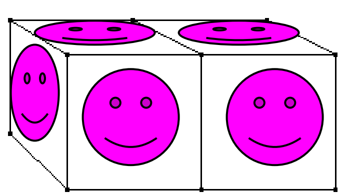
Un ejemplo de guía pedagógica para este problema se concibió a partir de la inclusión de una tabla de dos entradas, una que indica el número de figura y la otra, la cantidad de bloques que la conforman. La concepción de la tabla se basó en la resolución de los estudiantes avanzados, quienes inician la resolución con un listado de conteo simple donde se aumenta en dos la cantidad de bloques para cada *Letra V*, subsecuente. También fue relevante observar la forma en que los estudiantes de bajo rendimiento realizan sus listados, pues ellos pierden de vista la relación directa entre el número de la figura y la cantidad de bloques de ésta, así como también la característica numérica de la cantidad de bloques de cada *Letra V* del patrón (nos referimos aquí a la imparidad). En síntesis, en la elaboración de la tabla se concretan las observaciones de las ejecuciones de los estudiantes de alto y bajo rendimiento, de tal manera que los estudiantes de bajo rendimiento, al resolver lo que se les pide en la tabla, van a percibir las relaciones numéricas que subyacen en la elaboración de la misma, aumentando así las posibilidades de resolución hacia la generalización. Las especificaciones de todas las modificaciones realizadas en las hojas de trabajo del problema de la *Letra V*, para su implementación en la segunda fase son presentadas en la sección 3.4.2.

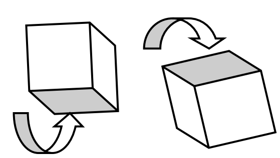
De hecho, estas modificaciones son las que dan lugar a las guías pedagógicas (ver sección 2.4.2). Nótese que en este concepto se incluirán las observaciones de lo que hicieron los estudiantes de alto y bajo rendimiento, así como las modificaciones en las hojas de trabajo.

***El problema de Las Estampas en el Cubo***

Una compañía produce barras acoplando cubos y usando una máquina estampadora para colocar estampas "sonrientes" sobre las barras. La máquina coloca exactamente una estampa sobre cada cara expuesta de cada cubo. Todas las caras expuestas de cada cubo tienen que tener una estampa, por ejemplo, en esta barra de longitud 2, se necesitarían 10 estampas ¿estás de acuerdo? ¿Por qué?





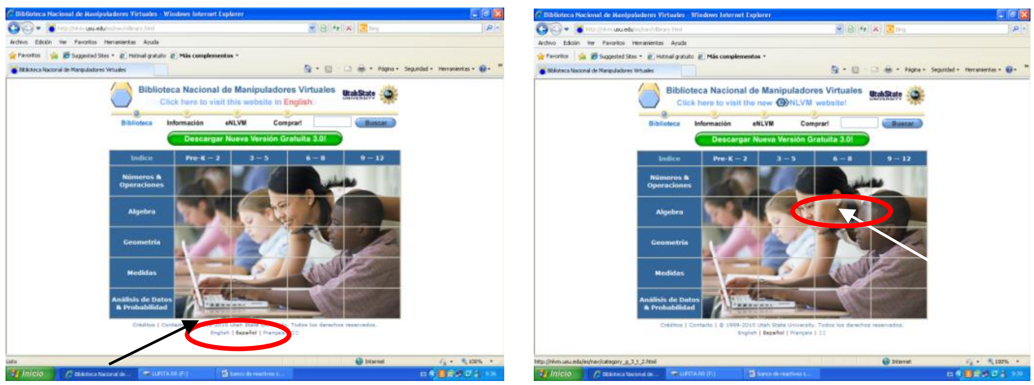


Barra de longitud 2 (dos cubos)

*Apóyate del manipulador virtual para responder las preguntas 1 a 8 que aparecen abajo.*

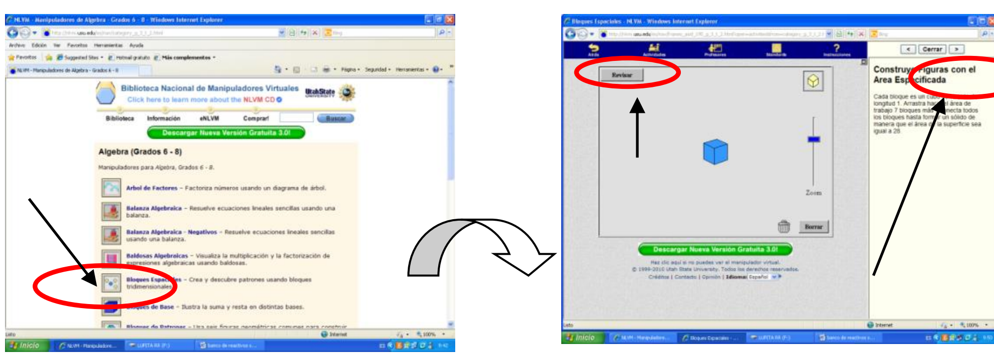
Antes de empezar a resolver el problema sería conveniente aprender a manejar el manipulador virtual. Enseguida se te dan las instrucciones (de la (***a***) a la (***i***)) que te permitirán usarlo.

***a)*** Introduce la siguiente página de internet en la barra de dirección electrónica: http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html y te aparecerá en la pantalla la imagen de la izquierda.



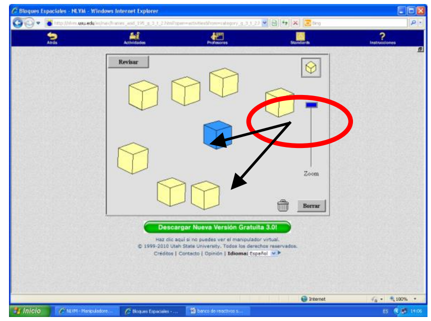
**b)** Haz clic para elegir el idioma ***Español*** y luego haz clic en la fila de Algebra y en la columna de grado 6-8.

**c)** Enseguida aparecerán todos los manipulativos de esta sección. Luego haz clic en el que dice "***Bloques Espaciales***" y aparecerá la imagen de la derecha.



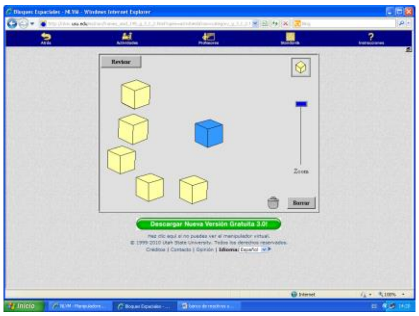
**d)** Luego haz clic en el icono de "**Actividades**" aparecerá una columna a la derecha donde podrás elegir la actividad, que en este caso, nos detendremos en la llamada "Construye figuras con el área especificada" la cual utilizaremos para ayudarnos a resolver el Problema de *Las Estampas en el Cubo*.

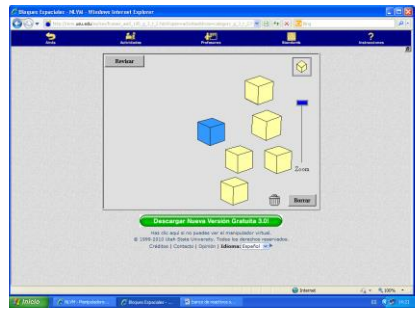
Usando este manipulador virtual podrás:



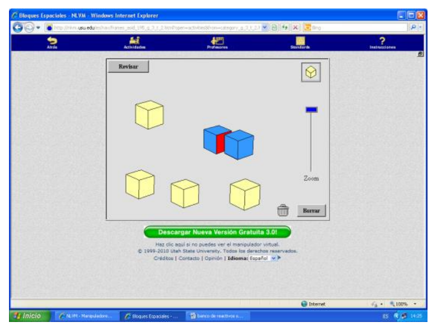
**e)** Añadir bloques
Añade bloques al área de trabajo haciendo clic y arrastrando los bloques desde el icono de bloques en la esquina superior derecha del área de trabajo.

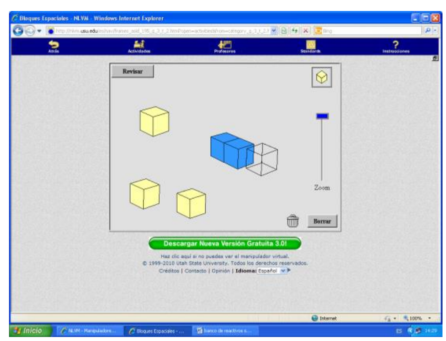
**f)** Mover bloques
Puedes mover los bloques haciendo clic y arrastrando los bloques a cualquier espacio en el área de trabajo donde no hay bloques.





**g)** Conectar bloques
Podrás conectar un bloque amarillo a uno azul arrastrando el bloque amarillo cerca del bloque azul hasta que veas uno de los lados del bloque azul cambiar a color rojo, luego suelta el bloque amarillo y éstos se pegarán al lado rojo en el bloque azul. Para despegar un bloque, haz clic sobre el bloque y arrástralo lejos del otro bloque.





**h)** Algunas veces es difícil ver dónde estás colocando un bloque. Presiona la tecla *Shift* [la tecla con la flecha↑] mientras arrastras el bloque para así poder ver a través de éste y a la vez ver mejor dónde colocas el bloque.

**i)** También puedes aumentar o disminuir el tamaño de los objetos desplazándote por la barra de Zoom, así también puedes quitar del área de trabajo los objetos que nos desees haciendo clic sobre ellos y desplazándolos hacia el contenedor de basura o borrar todos los elementos del área de trabajo haciendo clic en la tecla de Borrar. Todos estos elementos te facilitarán la visualización para resolver el problema de *Las Estampas en el Cubo*.

*¡Ahora sí, estás listo para responder lo que se te solicita!*

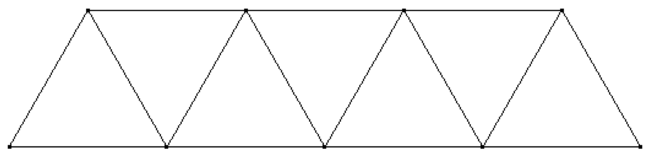
1. ¿Cuántas estampas necesitas para barras de longitud desde 1 hasta 6? Explica cómo encontraste estos valores
2. ¿Al juntar cubos para formar barras, cuentas las estampas donde se unen los cubos? ¿Por qué?
3. ¿Cuándo formas barras de una longitud de 2 o más cubos, cuántas estampas colocará la máquina sobre los cubos de los extremos, es decir sobre el primero y el último? ¿Por qué?
4. ¿Cuántas estampas coloca la máquina en los cubos intermedios de cualquier barra (los cubos intermedios son todos los cubos que están en una barra excepto el primero y el último)? ¿Por qué?
5. ¿La máquina coloca siempre el mismo número de estampas en los cubos intermedios? ¿Por qué?
6. ¿Cuántas estampas necesitas para una barra de longitud 20? y ¿De longitud 56? Explica cómo encontraste estos valores.
7. ¿Cuántas estampas necesitas para una barra de longitud 137?y ¿De longitud 213? Explica cómo determinas estos valores.
8. Escribe una regla o fórmula que te permita encontrar el número de estampas necesarias para una barra de cualquier longitud. Explica tu regla.

Un ejemplo de guías pedagógicas que se introducen en las hojas de trabajo en esta segunda fase se basa en el planteamiento de preguntas como las siguientes: Al juntar cubos para formar barras, ¿cuentas las estampas donde se unen los cubos? Cuando formas barras de una longitud de dos o más cubos, ¿cuántas estampas colocará la máquina sobre los cubos de los extremos, es decir sobre el primero y el último? Estas preguntas se fundamentan en la observación de los procedimientos que encontraron los estudiantes en la primera fase para el problema de las *Estampas en el Cubo.* Fue determinante que los estudiantes observaran que en las caras donde se unen los cubos cuando se acoplan para formar una barra de más de dos de éstos, la máquina ya no coloca dos estampas a cada cubo acoplado excepto los cubos de los extremos de la barra ya que a éstos sólo les deja de colocar una estampa.

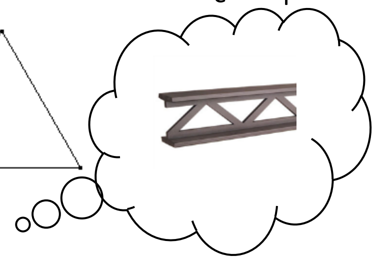
Recuérdese que la especificación de los cambios realizados en todos los problemas va a ser presentada en la sección 2.4.2 de este capítulo.

## *El problema del Diseño de la Viga*

Las vigas son diseñadas como un soporte para puentes. Las vigas son construidas usando barras. La longitud de la viga es determinada por el número de barras necesarias para construir la base de la viga. Abajo esta una viga de longitud 4, esta necesitaría 15 barras ¿estás de acuerdo? ¿Por qué?



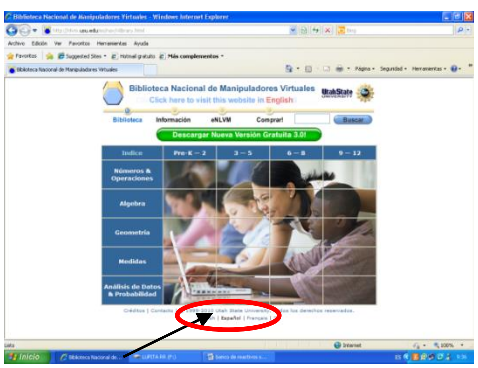
Base de la Viga de 4 barras

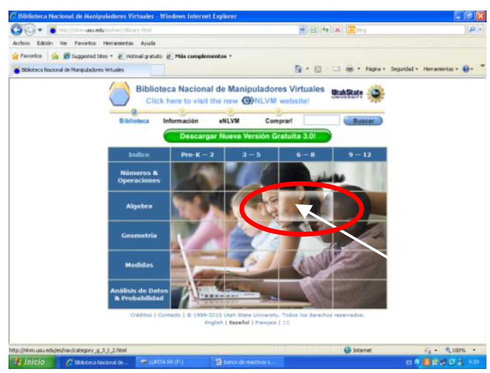


*Apóyate del manipulador virtual para responder las preguntas 1 a 9 que aparecen abajo.*

Antes de empezar a resolver el problema sería conveniente aprender a manejar el manipulador virtual. Enseguida se te dan las instrucciones (de la (***a***) a la (***f***)) que te permitirán usarlo.

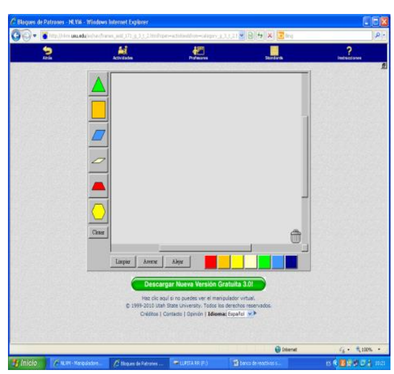
**a)** Introduce la siguiente página de internet en la barra de dirección electrónica: http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html y te aparecerá en la pantalla la imagen de la izquierda.



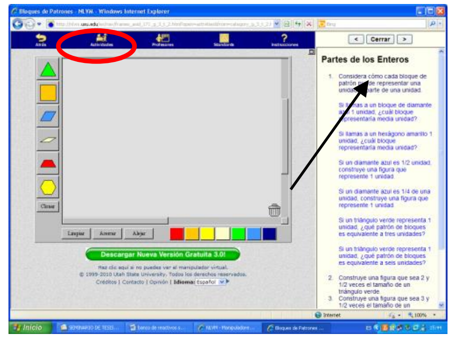


**b)** Haz clic para elegir el idioma ***Español*** y luego haz clic en la fila de Algebra y en la columna de grado 6-8.

**c)** Enseguida aparecerán todos los manipulativos de esta sección. Haz clic en el que dice "***Bloques de Patrones***" y aparecerá la imagen de la derecha.

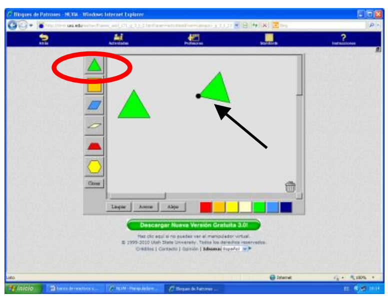


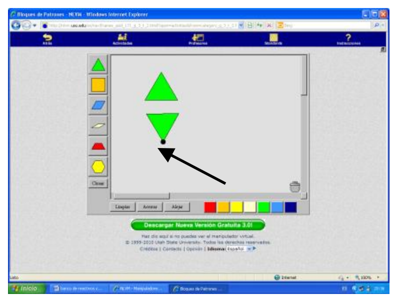
**d)** Luego haz clic en el icono de “**Actividades**” aparecerá una columna a la derecha donde podrás elegir la actividad que en este caso nos detendremos en la llamada “Partes de los Enteros” la cual utilizaremos para resolver el Problema del d*iseño de la viga*.



*Construcción de la Viga con el manipulador virtual:*

**e)** Haz dos veces clic en el icono de un triángulo para obtener los primeros dos bloques para formar la Viga del ejemplo. Para girar uno de los triángulos haz clic en un vértice (aparecerá un punto negro) y sin soltar gira en la dirección que desees hasta conseguir la posición exacta del bloque.





**f)** Debes hacer clic en el icono de “**Instrucciones**” para saber cómo puedes utilizar las herramientas que te ofrece, por ejemplo: <u>Añadir un bloque al área de trabajo</u>, <u>Rotar un bloque</u>, <u>Cambiar el color de un bloque</u>, <u>Remover un bloque</u>, <u>Agrupar bloque</u>, <u>Clonar un bloque</u>, <u>Limpiar el área de trabajo</u> y <u>Acercar y Alejar</u>

*¡Ahora sí, estás listo para responder lo que se te solicita!*

1. Para una Viga de longitud 1, ¿estás de acuerdo en que se necesitarían 3 barras? ¿por qué?
2. Para una Viga de longitud 2 ¿cuántas barras necesito? ¿Por qué?
3. ¿Cuántas barras hay en la base de la Viga de longitud 2? y ¿cuántas hay en la parte superior de la Viga?
4. Y para una Viga de longitud 3 ¿cuántas barras necesito? ¿Cuántas barras hay en la base de la Viga de longitud 3? y ¿cuántas hay en la parte superior de la Viga?
5. ¿Cuántas barras de diferencia hay para formar la Viga de longitud 1 y la de longitud 2? y ¿cuántas barras de diferencia hay para formar la Viga de longitud 2 y la de longitud 3?
6. ¿Cuántas barras son necesarias para hacer una viga de longitud 5, 8, 10, 20, 34 y 76?
7. ¿Cuántas barras son necesarias para una viga de longitud 223?
8. Y ¿Cuántas barras de diferencia hay para formar la Viga de longitud 412 y la de longitud 413? ¿Por qué?
9. Escribe una regla o fórmula para encontrar el número de barras necesarias para hacer una viga de cualquier longitud. Explica por qué tú regla o fórmula funciona para todos los casos.

Los ejemplos de guías pedagógicas que se forjan de los procedimientos realizados por los estudiantes avanzados en el ambiente de lápiz y papel en el problema del *Diseño de la Viga*, están basados en el planteamiento de preguntas como: ¿Y para una viga de longitud 3, cuántas barras necesito? ¿Cuántas barras hay en la base de la viga de longitud 3?, y ¿cuántas hay en la parte superior de la viga? Con estas preguntas se intenta que el estudiante reconozca dos cosas. La primera, la relación entre la longitud de la viga y la cantidad de barras de la base y, la segunda, la relación entre la cantidad de las barras de la base y la de las barras superiores. El reconocimiento de estas regularidades en el patrón es trascendental para desarrollar un procedimiento que conduzca a la generalidad. Es decir, es una característica común que tienen, por lo menos, los procedimientos que lograron encontrar los estudiantes avanzados en el ambiente de lápiz y papel.

Se recuerda nuevamente que las especificaciones de los cambios realizados en todos los problemas van a ser presentada en la sección 2.4.2 del documento.

Por otro lado, se debe mencionar que los problemas de patrones en esencia eran los mismos que se habían planteado a los estudiantes en el ambiente de lápiz y papel en esta segunda fase, matemáticamente hablando. Pero en el ambiente digital los estudiantes que los resolvieron fueron el resto de los alumnos del grupo al que pertenecían los estudiantes avanzados. Para ser más claros, de un grupo de primer grado se eligieron todos los alumnos con alto rendimiento en matemáticas para la resolución de los problemas, ahora replanteada la resolución con ayuda del manipulativo virtual. Lo mismo ocurriría con el otro grupo de primer grado.

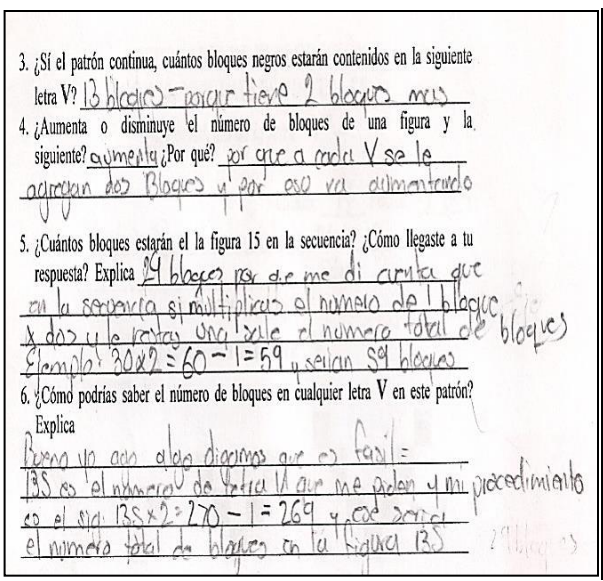
Cabe decir que el número de alumnos por grupo era de casi cincuenta estudiantes, de ellos aproximadamente siete u ocho de cada grupo fueron los clasificados como estudiantes avanzados, y fueron los que participaron en el ambiente de lápiz y papel. El resto de los estudiantes de cada grupo (43/50) participaron en el ambiente digital de aprendizaje. La duración de la implementación de la segunda fase fue de aproximadamente más de un mes. Inició en diciembre de 2010 y terminó a finales de enero de 2011. Existieron inconvenientes con respecto a la organización de las sesiones para el trabajo en el ambiente digital, debido a que el número de estudiantes excedía el número de computadoras disponibles, lo que obligó a separar a los estudiantes de un mismo grupo en dos partes. Esto facilitó una atención más directa al ser menos alumnos pero trajo consigo otros inconvenientes.

El objetivo primordial en la segunda fase fue utilizar los datos generados por la resolución de los estudiantes avanzados para generar rutas de aprendizaje por las que transitaría el resto de los estudiantes para resolver los problemas de patrones. Es decir, el conocimiento que generan los estudiantes avanzados se comparte a los pares menos aventajados, y si a ello se aúna el entorno virtual como un mediador que facilita la construcción y visualización del patrón, se provee al estudiante de bajo rendimiento con un amplio rango de posibilidades para la exploración del objeto matemático en cuestión.

Podrá llegar a la comprensión del tema e incorporar en su pensamiento elementos básicos que le servirán para abstraer regularidades en la resolución de cualquier problema en que haya que generalizar. Y podrá expresar la generalización simbólicamente, en el mejor de los casos, lo que no es el objetivo de la presente investigación. Sin embargo, es importante tenerlo presente.

Enseguida se muestran imágenes de lo que realizaron los estudiantes en la segunda fase.

En el problema de la *Letra V*

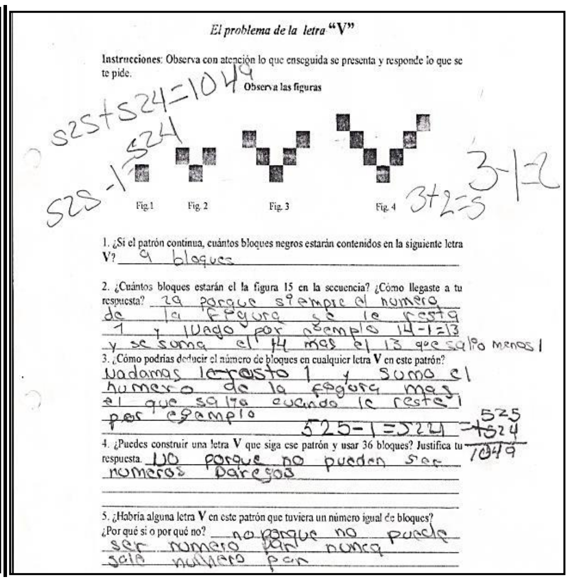


3. ¿Sí el patrón continua, cuántos bloques negros estarán contenidos en la siguiente letra V? 13 bloques porque tiene 2 bloques mas

4. ¿Aumenta o disminuye el número de bloques de una figura y la siguiente? aumenta ¿Por qué? por que a cada V se le agregan dos Bloques y por eso va aumentando

5. ¿Cuántos bloques estarán el la figura 15 en la secuencia? ¿Cómo llegaste a tu respuesta? Explica 29 bloques por que me di cuenta que en la secuencia si multiplicas el numero de l bloque x dos y le restas uno sale el numero total de bloques Ejemplo: 30x2=60-1=59 y serian 59 bloques

6. ¿Cómo podrías saber el número de bloques en cualquier letra V en este patrón? Explica Bueno yo con algo diriamos que es facil = 135 es el número de letra V que me piden y mi procedimiento es el sig. 135x2=270-1=269 y eso sería el numero total de bloques en la figura 135



*El problema de la letra* "V"

Instrucciones: Observa con atención lo que enseguida se presenta y responde lo que se te pide.

Observa las figuras

525+524=1049

524

525-1

3-1=2

3+2=5

Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4

1. ¿Sí el patrón continua, cuántos bloques negros estarán contenidos en la siguiente letra V? 9 bloques

2. ¿Cuántos bloques estarán el la figura 15 en la secuencia? ¿Cómo llegaste a tu respuesta? 29 porque siempre al numero de la figura se le resta 1 y luego por ejemplo 14-1=13 y se suma el 14 mas el 13 que salio menos 1

3. ¿Cómo podrías deducir el número de bloques en cualquier letra V en este patrón? Nadamas le resto 1 y sumo el numero de la figura mas el que salio cuando le reste 1 por ejemplo 525-1=524 525+524=1049

4. ¿Puedes construir una letra V que siga ese patrón y usar 36 bloques? Justifica tu respuesta. no porque no pueden ser numeros pares

5. ¿Habría alguna letra V en este patrón que tuviera un número igual de bloques? ¿Por qué si o por qué no? no porque no puede ser numero par nunca solo numero par

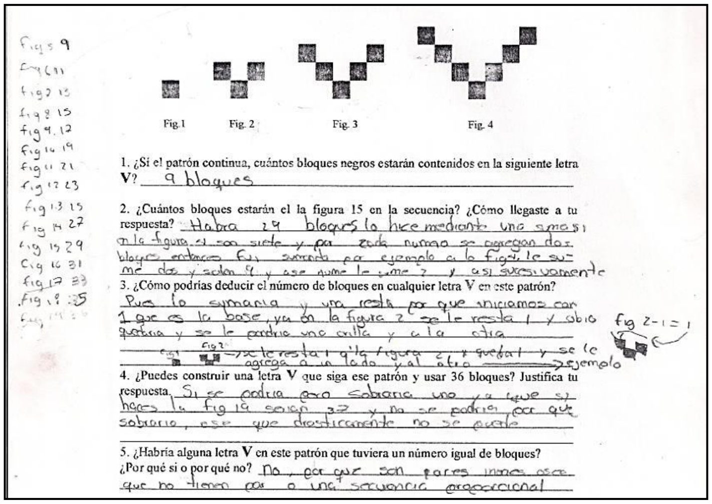


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4

1. ¿Si el patrón continua, cuántos bloques negros estarán contenidos en la siguiente letra V? 9 bloques

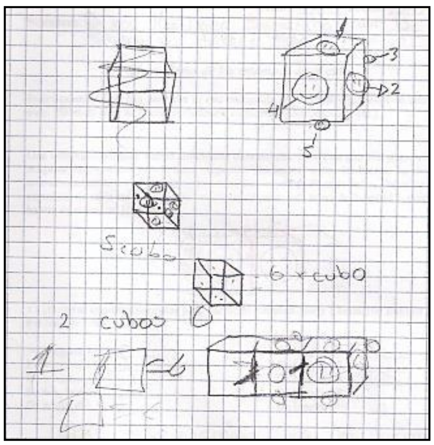
2. ¿Cuántos bloques estarán el la figura 15 en la secuencia? ¿Cómo llegaste a tu respuesta? Habra 29 bloques lo hice mediante una suma si en la figura si son siete y por cada numero se agregan dos bloques entonces fui sumando por ejemplo a la fig 4 le sume dos y salen 9 y ese numero le sume 2 y asi sucesivamente

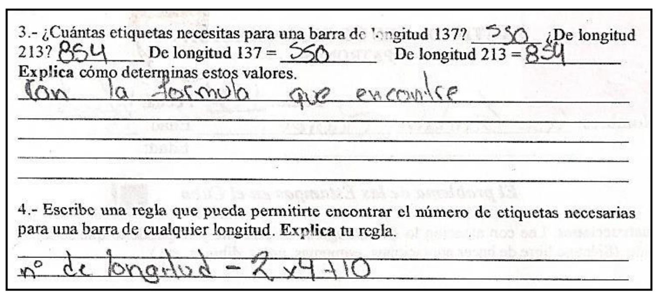
3. ¿Cómo podrías deducir el número de bloques en cualquier letra V en este patrón? Pues lo sumaria y una resta por que iniciamos con 1 que es la base, ya en la figura 2 se le resta 1 y obio quedaria y se le pondria una orilla y a la otra

4. ¿Puedes construir una letra V que siga ese patrón y usar 36 bloques? Justifica tu respuesta. Si se podria pero sobraria uno ya que si haces la fig 19 serian 37 y no se podria por que sobraria, ese que drasticamente no se puede

5. ¿Habría alguna letra V en este patrón que tuviera un número igual de bloques? ¿Por qué si o por qué no? no, por que son pares impares osea que no tienen par o una secuencia proporcional

Imágenes de respuestas al problema de *Las Estampas en el Cubo*:

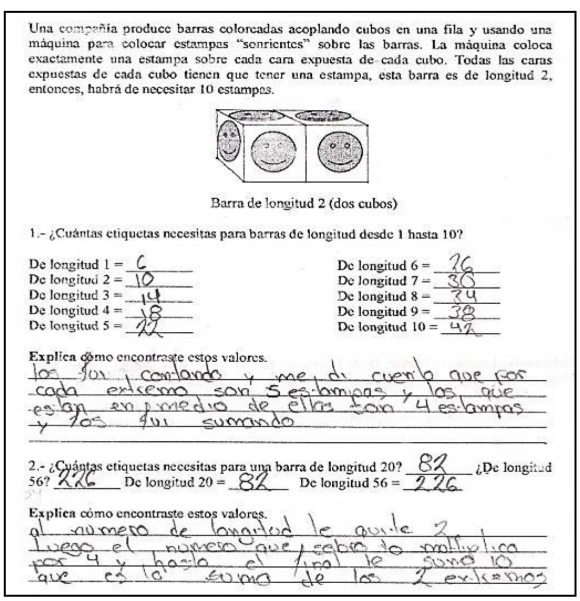




3.- ¿Cuántas etiquetas necesitas para una barra de longitud 137? 550 ¿De longitud 213? 854 De longitud 137 = 550 De longitud 213 = 854

Explica cómo determinas estos valores. Con la formula que encontre

4.- Escribe una regla que pueda permitirte encontrar el número de etiquetas necesarias para una barra de cualquier longitud. Explica tu regla.

nº de longitud − 2 x4 +10


Una compañía produce barras coloreadas acoplando cubos en una fila y usando una máquina para colocar estampas "sonrientes" sobre las barras. La máquina coloca exactamente una estampa sobre cada cara expuesta de cada cubo. Todas las caras expuestas de cada cubo tienen que tener una estampa, esta barra es de longitud 2, entonces, habrá de necesitar 10 estampas.

Barra de longitud 2 (dos cubos)

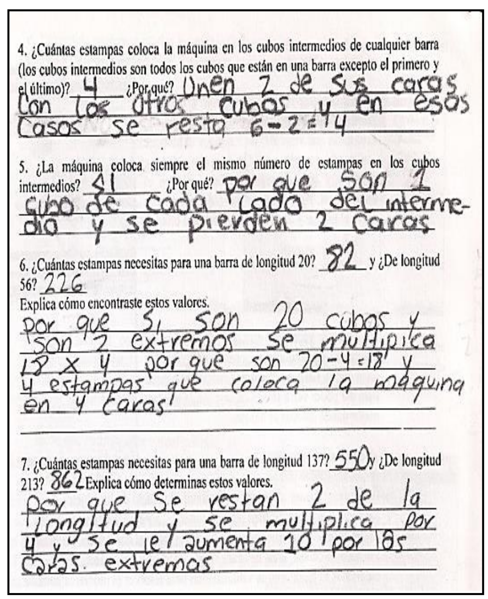
1.- ¿Cuántas etiquetas necesitas para barras de longitud desde 1 hasta 10?

| | |
|---|---|
| De longitud 1 = 6 | De longitud 6 = 26 |
| De longitud 2 = 10 | De longitud 7 = 30 |
| De longitud 3 = 14 | De longitud 8 = 34 |
| De longitud 4 = 18 | De longitud 9 = 38 |
| De longitud 5 = 22 | De longitud 10 = 42 |

Explica cómo encontraste estos valores. los fui contando y me di cuenta que por cada extremo son 5 estampas y los que estan en medio de ellos son 4 estampas y los fui sumando

2.- ¿Cuántas etiquetas necesitas para una barra de longitud 20? 82 ¿De longitud 56? 226 De longitud 20 = 82 De longitud 56 = 226

Explica cómo encontraste estos valores. al numero de longitud le quite 2 luego el numero que sabe lo multiplica por 4 y hasta el final le sume 10 que es lo suma de los 2 extremos

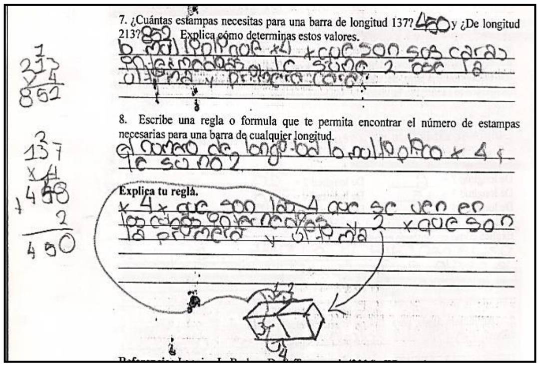

4. ¿Cuántas estampas coloca la máquina en los cubos intermedios de cualquier barra (los cubos intermedios son todos los cubos que están en una barra excepto el primero y el último)? 4 ¿Por qué? Unen 2 de sus caras con los otros cubos y en esos casos se resta 6 − 2 = 4

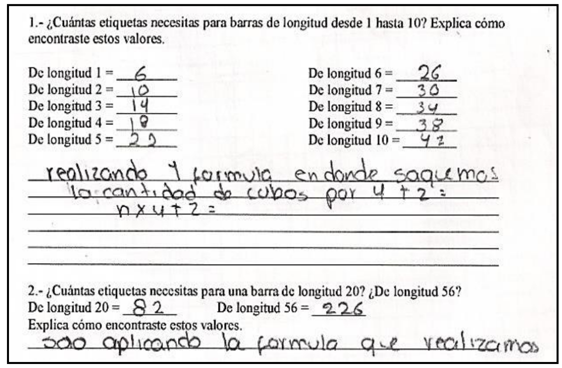
5. ¿La máquina coloca siempre el mismo número de estampas en los cubos intermedios? Si ¿Por qué? por que son 1 cubo de cada lado del intermedio y se pierden 2 caras

6. ¿Cuántas estampas necesitas para una barra de longitud 20? 82 y ¿De longitud 56? 226

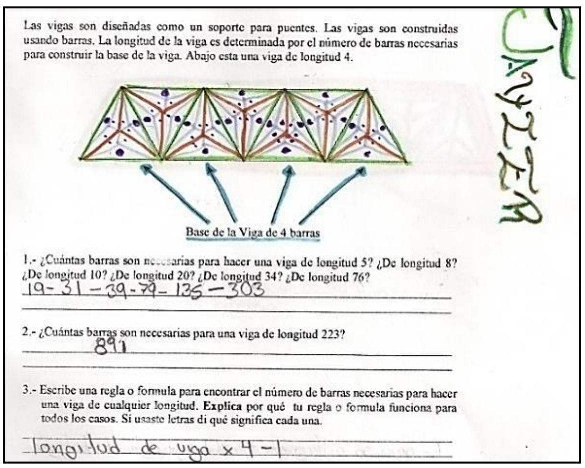
Explica cómo encontraste estos valores. por que si son 20 cubos y son 2 extremos se multiplica 18 x 4 por que son 20 − 4 = 18 y 4 estampas que coloca la máquina en 4 caras

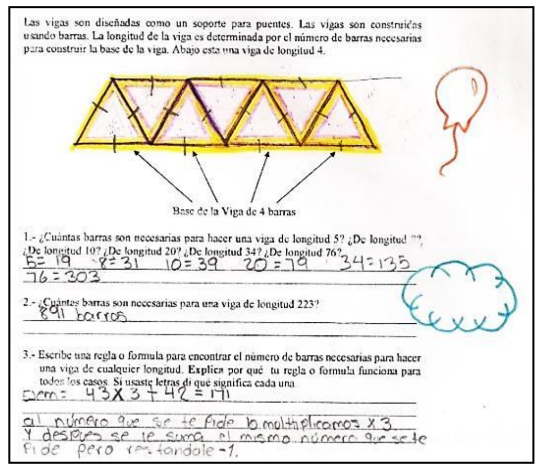
7. ¿Cuántas estampas necesitas para una barra de longitud 137? 550 y ¿De longitud 213? 862 Explica cómo determinas estos valores. por que se restan 2 de la longitud y se multiplica por 4 y se le aumenta 10 por las caras extremas






Imágenes de las respuestas de los estudiantes al problema del *Diseño de la Viga*:






## 2.4.1. Síntesis de la segunda fase

En la segunda fase, sólo se resolvieron tres problemas de patrones que fueron: *La Letra V*, *Las Estampas en el Cubo* y *El Diseño de la Viga.* De los cuales se hace una breve descripción que tiene que ver con los datos obtenidos de la resolución de las hojas de trabajo de los estudiantes en los dos ambientes de aprendizaje. Las descripciones se presentan en el mismo orden en que les fueron presentados los problemas a los estudiantes seleccionados a partir de la primera fase

El objetivo de la segunda fase fue apropiarse del conocimiento que generaron los estudiantes avanzados de cada uno de los grupos en la resolución de los problemas en el ambiente de lápiz y papel, esto constituye una guía en el establecimiento de rutas de aprendizaje para el resto del grupo, hacia la comprensión y resolución de los problemas del tema de generalización de patrones.

En cuanto al problema de **La *Letra V*,** los alumnos observan el aumento de dos bloques de una figura a otra en el patrón. Esto les hace pensar a algunos estudiantes que para encontrar la cantidad de bloques de cualquier letra V, solo hay que multiplicar en número de Letra V por 2. Hubo dos formas de resolver el problema generalizando el patrón. La primera, detectaron que el número de bloques que conforman cada lado de la letra V es un número igual al número de figura menos 1 lo cual implica que al sumar la cantidad de bloques de cada lado se tenga que agregar uno para obtener un resultado correcto. El segundo hallazgo resulta de observar que uno de los lados de la letra V tiene un número igual de bloques que el número de figura y el otro lado es un bloque menos. Esto los lleva a un procedimiento que consiste en multiplicar el número de figura por 2 y luego restarle 1. Así lo expresa un estudiante: "Multiplicas el número de secuencia [número de figura] por dos y disminuir un bloque".

Con respecto al problema de las **Estampas en el Cubo**, el procedimiento que más estudiantes desarrollan consiste en ver a la barra de cubos como un entero de cuatro lados y dos caras extra a los extremos que sólo tienen una estampa cada una. Por ello multiplican la longitud de la barra (que es igual al número de cubos acoplados) por 4, por los cuatro lados de la barra, y al resultado le suman 2 que son las dos estampas de las caras extra a los extremos.

El otro procedimiento que pocos encuentran consiste en retirar, los dos cubos que están en los extremos de la barra. Estos dos cubos tienen 5 estampas cada uno. Sí a la longitud original de la barra se le desprendieron dos cubos entonces la longitud de la barra menos 2 se multiplica por 4, por la razón que se describió en el procedimiento anterior, y al resultado se le suman 10 estampas que corresponden a los dos cubos de los extremos. Esto nos da la cantidad total de estampas para cualquier longitud de barra de cubos.

Y el último problema que resuelven es el **Diseño de la Viga**. Para la resolución de éste los alumnos hayan un único procedimiento que consiste en ver a la viga como una conformación de triángulos. Es decir, separan a la viga en dos conjuntos. El primer conjunto son las barras de la base unidas a las barras diagonales que juntas forman un triángulo y el otro conjunto son las barras superiores o las opuestas a las de la base. Este procedimiento requiere necesariamente, saber la longitud de la viga y para tener este dato basta con saber cuántas barras hay en la base de la viga. Una vez conocido esto, hay que multiplicar la longitud por tres, porque sobre cada barra de la base se forma un triángulo. Al hacer esta multiplicación obtenemos todas las barras para el primer conjunto. Luego los estudiantes hacen una observación a cerca de las barras superiores estás son siempre una menos que las barras de la base o dicho de otra manera, la longitud de la viga menos uno.

En general, se cumplió el objetivo de esta segunda fase del trabajo de campo.

### 2.4.2. Modificaciones al planteamiento de los problemas para ser instrumentados en la segunda fase y elaboración de guías pedagógicas

Los problemas matemáticos sobre la generalización de patrones que se presentaron a los estudiantes en la segunda fase fueron: *La letra V*, las *Estampas en el Cubo* y el *Diseño de la Viga*. Estos problemas son los que, por sus características, se pueden abordar con los manipulativos virtuales.

El problema de la ***Letra V***, que se presentó en la primera fase no sufrió modificaciones significativas en su planteamiento para su resolución en la segunda fase. En la primera fase, como ya se ha mencionado más arriba, se trabajó en un ambiente de lápiz y papel, y la resolución estuvo a cargo de los estudiantes de alto rendimiento de cada grupo de primer grado. En realidad las modificaciones fueron mínimas y de formato. Se introdujeron sobre todo para mayor precisión en la formulación de las demandas y consisten en lo siguiente: se hizo más breve el texto de instrucciones; en lugar de decir: “observe las imágenes” se cambió por “observa las figuras” debido a que se le dio un número de figura a cada *Letra V*, del patrón; las preguntas del problema fueron las mismas porque no hubo dificultades en la comprensión de éstas en la primera fase por tanto hasta ese momento no fue necesario redactar de forma distinta las preguntas para el ambiente de lápiz y papel de la segunda fase.

Sin embargo, recuérdese que la segunda fase está conformada por una ejecución en dos ambientes de aprendizaje distintos. Para el ambiente digital (ver sección 2.4), sí fue necesario hacer cambios, comenzando por las instrucciones pues se debía explicar cómo manejar el manipulativo virtual dado que era la primera vez que se presentaba para su uso por los estudiantes. Se elaboraron entonces nuevas instrucciones, las cuales fueron suficientes para dejar en manos del alumno el uso del manipulativo de manera que él pudiera explorar las herramientas de éste y utilizar aquellas que fueran convenientes para construir el patrón de la *Letra V*. Después de las instrucciones siguieron preguntas las cuales fueron aumentadas en número. Esto es, se conservaron las mismas que en el ambiente de lápiz y papel (ver sección 2.3) pero se agregaron tres más, las cuales enseguida se enuncian:

1. Vuelve a observar con atención las figuras del patrón de la *Letra V* ¿Qué es lo que notas en él? ¿qué se puede decir a cerca de él?
2. Continua respondiendo la siguiente tabla

| Nº de figura | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Nº de bloques | 1 | 3 | | | | |

3. ¿Aumenta o disminuye en número de bloques de una figura y la siguiente? ¿Por qué?

La primera pregunta que se agregó fue planteada por dos motivos: primero, para enfatizar la observación del patrón por parte de los alumnos; y segundo, para tener una primera impresión de qué es lo que ven los estudiantes cuando se les presenta un patrón de figuras. Los alumnos que resolvieron las hojas de trabajo en el ambiente digital (alumnos de bajo rendimiento) no habían estudiado el tema con su profesor en ese momento, al igual que los del ambiente de lápiz y papel (alto rendimiento). Por eso era relevante saber en qué ponen su atención cuando observan el patrón a través de las figuras que se les proporcionan, y por otro lado, saber sí observan lo mismo que los estudiantes avanzados que resolvieron usando lápiz y papel.

La segunda pregunta que se introdujo en las hojas de trabajo solicita completar una tabla de dos entradas, una de ellas indica el número de figura, y la otra, la cantidad de bloques que la conforman. Era relevante que los estudiantes de bajo rendimiento no perdieran de vista la relación directa entre el número de la figura y la cantidad de bloques de ésta. Así como también no deben de perder de vista la propiedad del número (imparidad) que representa a la cantidad de bloques de cada *Letra V* en el patrón. En estas características son en las que fijan su atención los estudiantes avanzados cuando inician la resolución del problema. Después, ellos continúan con un listado de conteo simple donde se aumenta en dos la cantidad de bloques para cada *Letra V* subsecuente.

Estas observaciones de las ejecuciones de los estudiantes avanzados hicieron factible el planteamiento de la tercera pregunta para el ambiente digital. Por último, en la redacción final del problema de la *Letra V* también se les pidió a los estudiantes que explicaran sus respuestas a cada una de las preguntas.

Con respecto al segundo problema, las ***Estampas en el Cubo*** en el ambiente de lápiz y papel sólo hubo leves modificaciones de formato sin alterar el problema, es similar al presentado en la primera fase. En el ambiente de lápiz y papel, a los estudiantes avanzados de un grupo les causó dificultad resolverlo pero no fue así para los del otro grupo, ellos encontraron dos procedimientos distintos que generalizan al patrón. El primero consiste en separar en dos partes de manera imaginaria la barra de cubos acoplados. Una parte son cada uno de los cubos a los extremos de la barra que tienen cinco etiquetas adheridas cada uno y la otra parte son los cubos que quedan en la barra, los intermedios, los cuales tienen adheridos sólo cuatro estampas cada uno. El otro procedimiento consiste en visualizar a la barra de cubos como un entero de cuatro caras, del cual sí se conoce la longitud de la barra se sabe cuántos cubos están acoplados, luego, la máquina estampadora sólo coloca cuatro estampas a todos los cubos acoplados excepto que a los cubos de los extremos de ese entero les adhiere una estampa extra. Es decir, a la cantidad de estampas colocadas a la barra o al entero se le agregan dos más. Las expresiones algebraicas que representan a cada procedimiento son distintas pero equivalentes. Si consideramos $n$ como la longitud de la viga, el primer procedimiento sería expresado como *4 (n-2) + 10* y para el segundo, la expresión sería *4n+2*. Más estudiantes resolvieron el problema a través del segundo procedimiento, a este respecto cabe mencionar que si se revisan ambos procedimientos resulta que el segundo requiere de una abstracción más elaborada porque simplifica la visualización del primer procedimiento. Realizar una abstracción así es matemáticamente más valioso. De aquí que las modificaciones al planteamiento del problema para ser implementado en el ambiente digital, fueron orientadas hacia la resolución del problema a través del primer procedimiento, y dependerá de la capacidad del estudiante si llega o no a una visualización del patrón que lo conduzca a resolver el problema a través del segundo procedimiento. Se dejó abierta esa posibilidad ya que no es la principal intención de la investigación, aunque si se llega a ella por supuesto será reconocida, pero la investigación se limita a que el estudiante logre la generalización del patrón y la exprese de manera natural considerando su nivel académico.

Las modificaciones para el ambiente digital fueron las siguientes: En la descripción del problema que se hace al inicio se añade: "por ejemplo, en esta barra de longitud 2, se necesitarían 10 estampas ¿estás de acuerdo? ¿Por qué?" También se agregan dos imágenes que tratan de hacer más evidente la conformación de la barra de cubos acoplados y las caras expuestas de los cubos. La pregunta tiene la intención de hacer reflexionar al alumno sobre la acción de la máquina estampadora, colocar estampas sobre cada cara expuesta de cada cubo, lo que quiere decir que no coloca estampas sobre las caras donde se unen los cubos, situación que suelen pasar por alto los estudiantes en el ambiente de lápiz y papel, ellos consideran las seis caras del cubo y sí se acoplan cubos sólo hay que multiplicar el número de cubos por seis para obtener la cantidad total de estampas de la barra. La pregunta de la que hablamos se complementa con otra que dice: ¿Al juntar cubos para formar barras, cuentas las estampas donde se unen los cubos? ¿Por qué? Con el fin de insistir en tomar en cuenta las caras no expuestas, hecho que determina llegar a la solución del problema.

También se solicitó decir la cantidad de estampas para barras de longitud 1 hasta la 6. Anteriormente la petición era hasta la barra de longitud 10, pero no era necesario. Hasta la barra de longitud 6 se podían percatar en cuánto aumenta el número de estampas al agregar un cubo más a la barra. Luego se incluyeron otras tres preguntas, que como se dijo antes tienen que ver con el primer procedimiento y están directamente relacionadas con tres características que definen el procedimiento. La primera característica es la cantidad de estampas que tienen los cubos de los extremos de una barra de longitud 2 en adelante, la otra característica es la cantidad de estampas de los cubos intermedios de cualquier barra y la tercera, es el número constante de estampas que tiene cada uno de los cubos intermedios. De comprenderse estas características se tiene un mayor rango de posibilidades de llegar a la resolución del problema de manera satisfactoria. Las tres preguntas fueron planteadas así: Cuando formas barras de longitud de 2 o más cubos, ¿cuántas estampas colocará la máquina sobre los cubos de los extremos, es decir, sobre el primero y el último? ¿Por qué?; ¿Cuántas estampas coloca la máquina en los cubos intermedios de cualquier barra (los cubos intermedios son todos los cubos que están en una barra excepto el primero y el último)? y, ¿La máquina coloca siempre el mismo número de estampas en los cubos intermedios? ¿Por qué?

En general, la resolución del problema en el ambiente digital fue más satisfactoria que en el otro ambiente debido a que hubo más estudiantes que llegaron o estuvieron cerca de resolverlo, así lo muestran sus hojas de trabajo, dado que algunos estudiantes no terminaron de responder todas las preguntas, las que si contestaron muestran altas posibilidades de lograr la generalización del patrón. Resta decir que en el ambiente digital de aprendizaje se logró llegar a los dos procedimientos que generaron los estudiantes avanzados que fueron enunciados en el párrafo anterior, pero es más significativo decir que de los alumnos que resolvieron el problema completamente lo hicieron a través del segundo procedimiento.

El tercer (y último) problema presentado en la segunda fase fue el ***Diseño de la Viga***, en relación al ambiente de lápiz y papel en donde surgieron dos procedimientos que tienen que ver con la manera de visualizar el patrón. Un primer procedimiento, fue ver a la viga en dos conjuntos de barras, el primero como una conformación de triángulos que tiene estrecha relación con la cantidad de barras de la base, y el otro conjunto lo hacen las barras superiores de la viga que también se vincula con la cantidad de barras de la base. Este procedimiento es el que casi todos los estudiantes avanzados encontraron y sólo dos estudiantes hallaron un segundo procedimiento que consiste en sumar la cantidad de barras inferiores y las superiores de cierta viga, la cantidad que resulte de la sumatoria se deberá multiplicar por dos y al resultado agregar uno para obtener el total de barras de la viga en cuestión.

Para ambos procedimientos se debe conocer de manera obligada la longitud de la viga. En cuanto al ambiente digital, se consideró el primer procedimiento ya que fue el más recurrente entre los alumnos avanzados. A la hora de hacer modificaciones al planteamiento del problema para su implementación en este ambiente digital se enfatizó en preguntas que pudieran destacar la relación entre la cantidad de barras de la base y las superiores. Aunque las modificaciones dan la apertura a otros procedimientos, la resolución de las hojas de trabajo en el ambiente digital muestran que el procedimiento con el que resuelven el problema es el de la conformación de triángulos (primer procedimiento descrito antes), aunque es encontrado por pocos estudiantes. Otros intentan un procedimiento el cual secciona a la viga en tres partes o tres conjuntos de barras, pero no llegar a expresarlo de manera clara y mucho menos generalizarlo. Aunque se observaron dificultades para expresar de alguna manera la cantidad de barras de cada sección, lo importante es que los estudiantes mostraron indicios de un nuevo procedimiento bajo este ambiente digital de aprendizaje.

Con esta reflexión ya podemos ir decantando que una manera de contribuirá para que los estudiantes en desventaja en la clase de matemáticas puedan resolver este tipo de problemas, es por medio del apoyo digital, mismo que confirman nuestro objetivo de esta investigación debido a que las diferentes poblaciones de estudiantes, quienes resuelven obtienen buenos resultados cuando existe la mediación de la tecnología.

**Guías pedagógicas para el problema de la Letra V**

Las guías de aprendizaje se concibieron a partir del análisis de las hojas de trabajo resueltas por los estudiantes de alto rendimiento, el cual se resume como sigue: la resolución del problema de la *Letra V*, en el ambiente de lápiz y papel inicia con listados de conteo simple para hallar la cantidad de bloques de *Letras V* consecutivas. Estos listados surgen de la observación directa del patrón, este dato se confirma con las entrevistas video grabadas, en donde los estudiantes dicen que al observar el patrón y contar la cantidad de bloques de cada figura y su consecutiva, se percatan de un aumento constante pero cuando se trata de un número mayor de *Letra V* en el patrón, los alumnos buscan procedimientos más prácticos como por ejemplo, resolver a través de una regla de tres. Los estudiantes que llegan a generalizar el patrón centran su atención en el número de figura de la *Letra V* (posición que ocupa en el patrón), este número resulta ser un punto de partida para cualquiera de los procedimientos que encontraron los estudiantes avanzados. La relación que se da entre el número de la figura y los bloques de los lados que construyen la *Letra V*, se convierte en la mejor estrategia para dirigirse a la generalización del patrón.

Con respecto a la resolución en el ambiente digital de aprendizaje los estudiantes también realizan listados de conteo simple, muy pocos recurren a operaciones aplicando una regla de tres, más bien, lo que hacen es tomar como punto de partida la cantidad de bloques que tiene una *Letra V*, para encontrar la de otra más lejana en el patrón. Por ejemplo, para encontrar la figura o *Letra V* número 15, los estudiantes recurren a la figura o *Letra V* número 5 que se construye con nueve bloques; entonces los estudiantes multiplican 9 por 3, y los 27 bloques que se obtienen serán los que conforman la *Letra V* número 15. Varios estudiantes llegan a generalizar el patrón expresando así su procedimiento: “multiplicas el número de secuencia [se refiere al número de la figura o *Letra V* en cuestión] por dos y disminuir un bloque”. Otro estudiante escribe: “multiplicando la cantidad [número de la figura] x 2 menos 1" y de ser expresadas estas frases algebraicamente no es más que *2n-1*, donde *n* es el número de figura o *Letra V* en el patrón. Es decir, expresaron la generalización del patrón en un lenguaje natural.

### 2.5. Trabajo de campo. Exploraciones formales, 3ª y 4ª fases

En el trabajo de campo interviene la exploración formal en ambos ambientes de aprendizaje (lápiz y papel; y manipulativos virtuales) para efectos de replicabilidad de los datos y consolidación de los resultados. En estas últimas fases del trabajo de campo las características de los estudiantes que participaron son las siguientes:

a) Son estudiantes de primero de secundaria distintos de todos los participantes en las etapas anteriores;
b) El número total de participantes en esta última etapa es de 47 estudiantes de cinco escuelas en la resolución con lápiz y papel; y otros 42 estudiantes más distintos de los 47 ya mencionados. Estos últimos son los que trabajaron en la resolución en ambientes virtuales.

Lo que hace la diferencia entre los grupos de 47 y 42 estudiantes es que los 47 son estudiantes avanzados o de alto rendimiento escolar en matemáticas, y los 42 son los de más bajo nivel de rendimiento escolar tanto en matemáticas como en las otras asignaturas (además de ser también los más indisciplinados).

A continuación se describen las características técnicas de esta última etapa formal del trabajo de campo y un esquema de su organización.

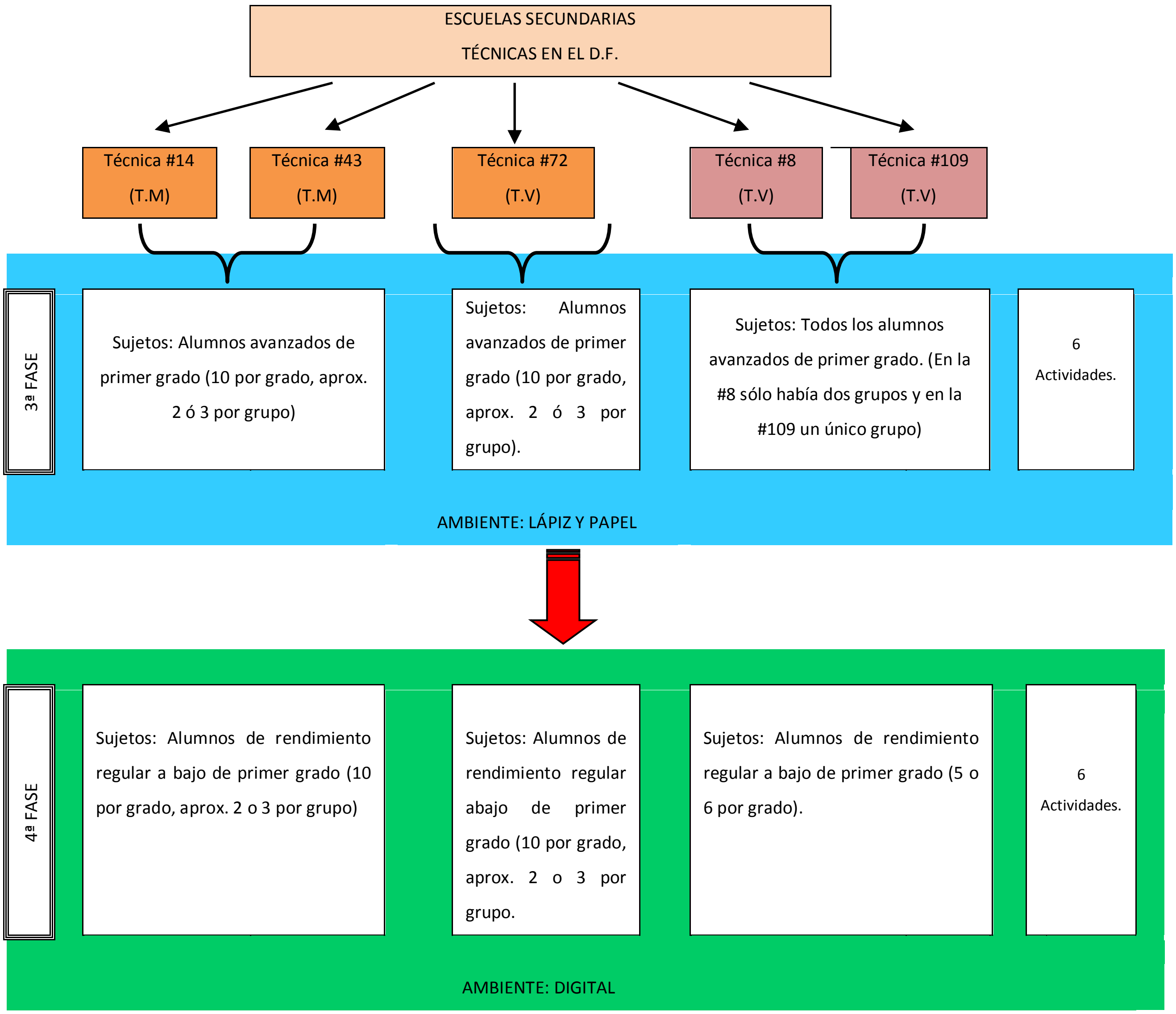


**Imagen. 3** Esquema de organización del trabajo de campo formal.

El trabajo de campo formal y definitivo se llevó a cabo después del análisis de los datos recabados en las exploraciones piloto que corresponden a la 1ª y 2ª fases y de afinar el planteamiento de las preguntas de los problemas de patrones en ambos ambientes de aprendizaje. Éste se realizó en cinco secundarias técnicas en el Distrito Federal (ver anexo D: oficios de presentación). En cada una de las escuelas se eligieron diez estudiantes de primer grado de nivel avanzado y diez estudiantes, también de primer grado, pero del más bajo rendimiento escolar. Estos dos subgrupos de estudiantes llevarían a cabo las actividades en ambientes de aprendizaje diferenciados. Hubo dos escuelas de turno vespertino en las que sólo se eligieron cinco estudiantes para formar los subgrupos de trabajo en la misma tónica antes mencionada.

En el trabajo de campo las exploraciones formales se dividen en dos ambientes igual que en la segunda fase. En la exploración formal en relación a la 3ª fase, se llevaron a cabo las actividades con los estudiantes avanzados, en ambiente de lápiz y papel. Con respecto a la 4ª fase, las actividades se llevaron a cabo en ambientes virtuales de aprendizaje con los estudiantes de bajo rendimiento en la materia. Las sesiones de trabajo fueron de dos horas-clase consecutivas (50 minutos cada una de ellas), una vez a la semana. Como arriba se mencionó, en la tercera fase participaron 47 estudiantes y en la cuarta 42.

Dado que se hace un énfasis en la utilización de manipulativos virtuales en el trabajo de campo que se instrumentó a lo largo de la investigación que sustenta el presente trabajo de tesis, es importante recalcar que el interés de la autora no es suplir con la tecnología el trabajo que realiza el profesor encargado del grupo, sino que ésta sirva como un recurso de inclusión para los estudiantes en desventaja en las clases de matemáticas, así como para el desarrollo de competencias de todos los estudiantes en la vida real.

### 2.5.1. Resumen de las características técnicas de los dos ambientes de aprendizaje: lápiz y papel y/o manipulativos virtuales

***Ambiente lápiz y Papel***

La exploración formal (3ª fase) consistió en plantear a los estudiantes seis problemas matemáticos relacionados con la generalización de patrones en un ambiente de lápiz y papel. El análisis de ésta exploración, en cuanto a estructura y contenido, sirvió para rediseñar el planteamiento de los problemas a instrumentar en la segunda exploración formal (4ª fase) en ambiente digital.

*Lugar donde se desarrolló la actividad:* en un salón de clase, en la biblioteca o en el salón de usos múltiples. A los estudiantes se les brindó todo el material necesario para dicho trabajo.

*Los sujetos que participan fueron*: diez estudiantes por escuela de alto rendimiento, de primer grado (con excepción de una escuela donde sólo hubo cinco estudiantes, por ser el único grupo de primer grado. Elegidos por el profesor de matemáticas y que tuvieran la voluntad de asistir y de llegar al término de todas las actividades.

*Actividad principal*: seis problemas matemáticos relacionados con la temática de generalización de patrones, fueron resueltos por los estudiantes de forma escrita y sin más ayuda que una calculadora.

*Actividad complementaria*: los alumnos destacados por sus procedimientos de resolución de las hojas de trabajo fueron entrevistados y video-grabados al final de cada una de las actividades, únicamente como soporte gráfico del registro de datos en el trabajo exploratorio. (Se tienen 94 clips de video).

*Duración*: Dos sesiones continuas que abarcan cien minutos y que se llevaron a cabo una vez a la semana. Se esperaba que cada problema se resolviera en las dos sesiones continuas, pero en realidad se avanzó al ritmo de trabajo de los estudiantes. Para ello se estableció un día y horario fijo para realizar las actividades de acuerdo con las facilidades proporcionadas en cada plantel. Esta fase inició el 10 de octubre de 2011 y terminó el 09 de diciembre del mismo año.

***Ambiente Manipulativos Virtuales (digital)***

La base para la segunda exploración formal (4ª fase) en el trabajo de campo fue la realización de un replanteamiento de los problemas matemáticos de la tercera fase con un diseño específico para los estudiantes menos aventajados del grupo, con el objetivo de avanzar en la inclusión de los estudiantes de bajo rendimiento en la comprensión y resolución de un problema matemático del tipo elegido.

*Lugar donde se desarrolló*: en las aulas digitales de cada una de las cinco secundarias. Éstas cuentan con servicio de internet y una pantalla de proyección. Se accedió a la dirección electrónica siguiente:
http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html, que es la página de la Biblioteca Nacional de Manipuladores Virtuales de la Universidad del Estado de Utah.

*Los sujetos que participan fueron*: diez estudiantes de bajo rendimiento en matemáticas por escuela de primer grado, (con excepción de una escuela, fueron cinco estudiantes, por ser un único grupo de primer grado). Elegidos por el profesor de matemáticas según las características que requería esta 4ª fase.

*Actividad principal*: Seis problemas matemáticos relacionados con la temática de generalización de patrones, fueron resueltos por los estudiantes de forma escrita y ayudados por un manipulativo virtual, el cual les permite recrear el problema brindando mayores posibilidades de ser resuelto significativamente.

*Actividad complementaria*: Entrevista y videograbación a los alumnos destacados en la resolución de los problemas de patrones como soporte gráfico del registro de datos en el trabajo exploratorio. Se recuerda que los estudiantes participantes en esta exploración formal (4ª fase) tienen bajas calificaciones en matemáticas por lo tanto, es relevante conocer la manera en que resuelven los problemas con los manipulativos virtuales, al tener el apoyo didáctico-pedagógico de las rutas de resolución de los estudiantes avanzados. (Se tienen 73 clips de video)

*Duración:* Sesiones contínuas que abarcan cien minutos y se llevaron a cabo una vez a la semana. Se esperaba que cada problema se resolviera en dos sesiones continuas. Pero se avanzó al ritmo de trabajo de los estudiantes. Se estableció un día y horario fijo para realizar las actividades de acuerdo con las facilidades proporcionadas en el plantel.

La cuarta fase inició el 16 de abril de 2012, y terminó la última semana de junio del mismo año.

A continuación se presenta un esquema que muestra cuáles fueron los problemas sobre generalización de patrones instrumentados en las cuatro fases del trabajo de campo.


**Imagen 4**. Esquema de problemas instrumentados en el trabajo de campo

### 2.5.2 Características de los estudiantes participantes en las exploraciones formales, 3ª y 4ª fases de manera estadística.

EDAD:

| Escuela/Edad | 11 años | | 12 años | | 13 años | | 14 años | | TOTAL | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 3ª fase | 4ª fase | 3ª fase | 4ª fase | 3ª fase | 4ª fase | 3ª fase | 4ª fase | 3ª fase | 4ª fase |
| Sec. Tec. #08 | 1 | 0 | 5 | 2 | 3 | 5 | 1 | 2 | 10 | 9 |
| Sec. Tec. #14 | 1 | 1 | 9 | 3 | 1 | 5 | 0 | 0 | 11 | 9 |
| Sec. Tec. #43 | 0 | 0 | 11 | 4 | 1 | 5 | 0 | 1 | 12* | 10 |
| Sec. Tec. #72 | 0 | 0 | 9 | 3 | 1 | 5 | 0 | 1 | 10 | 9 |
| Sec. Tec. #109 | 0 | 0 | 4 | 0 | 1 | 3 | 0 | 2 | 5 | 5 |
| TOTAL | 2 | 1 | 38 | 12 | 7 | 23 | 1 | 6 | 47 | 42 |

A partir de la tabla se puede observar que la mayoría de los estudiantes que participaron en este trabajo tienen una edad promedio entre los 12 y 13 años. Recuérdese que en estas últimas fases del trabajo de campo todos los participantes cursaban el primer grado de secundaria.

GÉNERO:

| GÉNERO | MASCULINO | | FEMENINO | | TOTAL | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 3ª fase | 4ª fase | 3ª fase | 4ª fase | 3ª fase | 4ª fase |
| Sec. Tec. #08 | 5 | 6 | 5 | 3 | 10 | 9 |
| Sec. Tec. #14 | 4 | 5 | 7 | 4 | 11 | 9 |
| Sec. Tec. #43 | 5 | 6 | 7 | 4 | 12* | 10 |
| Sec. Tec. #72 | 5 | 7 | 5 | 2 | 10 | 9 |
| Sec. Tec. #109 | 3 | 2 | 2 | 3 | 5 | 5 |
| TOTAL | 22 | 26 | 26 | 16 | 47 | 42 |

Nota: * restar un estudiante que se retiró

La tabla muestra que hubo una diferencia menor en cantidad de estudiantes participantes, en cuestión de género. No se buscaba que fuera equitativo el número de estudiantes por cada género más bien que tuvieran las características que demandaba la investigación (ver sección 2.5). Aun así resultó un equilibrio entre el género de los participantes.

ASISTENCIA DE ALUMNOS A LAS SESIONES DE TRABAJO:

| PROBLEMA MATEMÁTICO | Sec. Téc. #08 | | Sec. Tec. #14 | | Sec. Tec. #43 | | Sec. Tec. #72 | | Sec. Tec. #109 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 3ª fase | 4ª fase | 3ª fase | 4ª fase | 3ª fase | 4ª fase | 3ª fase | 4ª fase | 3ª fase | 4ª fase |
| *Letra V* | 10 | 9 | 11 | 8 | 12* | 10 | 9 | 9 | 5 | 5 |
| Diseño de la Viga | 10 | 9 | 11 | 7 | 9 | 10 | 8 | 9 | 5 | 5 |
| Estampas en el cubo | 7 | 5 | 10 | 8 | 6 | 10 | 8 | 9 | 5 | 4 |
| Azulejos I | 6 | 4 | 10 | 9 | 7 | 10 | 10 | 6 | 5 | 4 |
| Azulejos II | 6 | 6 | 10 | 9 | 7 | 10 | 8 | 9 | 5 | 4 |
| Crecimiento de pilas | 7 | 0 | 10 | 7 | 6 | 8 | 5 | 0 | 5 | 4 |
| TOTAL | 46 | 33 | 62 | 48 | 46 | 58 | 48 | 42 | 30 | 26 |

Al visualizar la tabla se percibe que disminuye la asistencia de alumnos en la cuarta fase, a excepción de una escuela (Tec. #43). Hay que saber que el número de estudiantes fue ligeramente menor en la cuarta fase. En ésta se redujo la asistencia de alumnos pero no fue significativa, el ambiente computacional era estimulante para ellos considerados estudiantes de bajo rendimiento en matemáticas. Como dato adicional, en la tercera fase se recopilaron 232 hojas de trabajo y en la cuarta fase 207, lo que hace un total de 439.

### 2.5.3. Modificaciones al planteamiento de los problemas para ser instrumentados en la 3ª y 4ª fases del trabajo de campo y elaboración de guías pedagógicas.

Lo que guía la redacción de esta sección es la respuesta a la siguiente pregunta: ¿Cómo los procedimientos o estrategias de los estudiantes en la exploración formal de la 3ª fase, de lápiz y papel, se convirtieron en guías pedagógicas para los estudiantes que resolvieron los problemas en el manipulativo virtual (4ª fase)?

Los problemas matemáticos sobre generalización de patrones en la tercera fase del trabajo de campo fueron presentadas en el siguiente orden: *La Letra V*, *El Diseño de la Viga*, *Las Estampas en el Cubo, Crecimiento de Azulejos I, Crecimiento de Azulejos II* y *Crecimiento de Pilas* (ver Anexo **A**.) Los problemas matemáticos que se consideraron para la cuarta fase del trabajo de campo fueron las siguientes: 1) *La Letra V*, 2) *El Diseño de la Viga*, 3) *Las Estampas en el Cubo*, 4) Crecimiento de *Azulejos I*, 5) Crecimiento de *Azulejos II* y 6) *Crecimiento de Pilas* (ver Anexo **B**). Los problemas que se analizaran adelante serán las que se ejecutaron con el manipulativo virtual.

**1) LA *LETRA V***

Cabe decir que los problemas planteados en el manipulativo virtual iniciaban con una introducción para conocer el manejo de sus herramientas de manera breve y suficiente para poder utilizarlas en la construcción de las figuras o pilas del patrón.

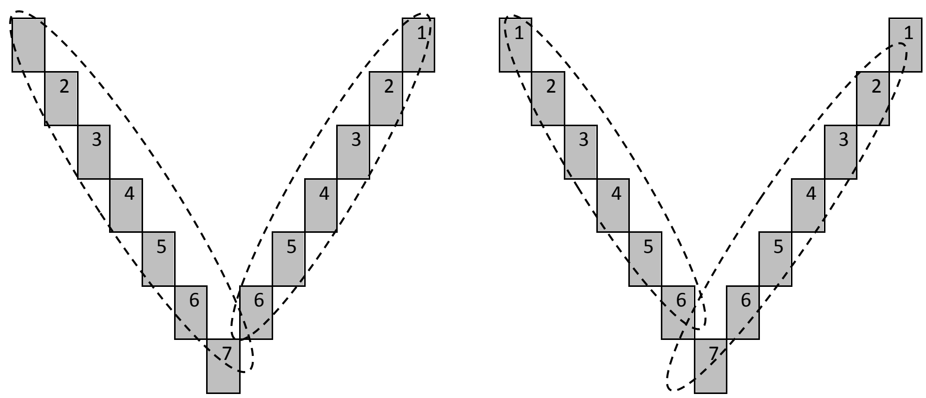
Las estrategias que encontraron los estudiantes avanzados fueron las siguientes:

i) Observar que el patrón aumentaba dos bloques en cada figura o *Letra V*.
ii) Observar que el número de bloques de cada figura o *Letra V* son números impares.
iii) Desarrollan tres procedimientos para hallar la cantidad de bloques de cualquier *Letra V* en el patrón.

A continuación realizaremos una breve explicación de los procedimientos que hallaron los estudiantes en la resolución del problema de la Letra V:

**a)** El primer procedimiento consiste en que al número de *Letra V* que se pide, se le suma el número anterior de *Letra V,* y el resultado de la suma dará la cantidad de bloques totales para la *Letra V* solicitada. Ejemplo: para la *Letra V* número 56, se le suma 55 (número anterior de *Letra V*), dando como resultado 111, los cuales serán los bloques necesarios para construir la *Letra V* número 56. Esto se puede comprobar con la expresión algebraica 2*n*-1. En donde *n* es el número de *Letra V*, entonces, 2(56)-1= 112-1 = 111.

**b)** El segundo procedimiento reside en visualizar la *Letra V* en dos secciones o lados. Es decir, uno de los lados tendrá una cantidad de bloques igual al número de *Letra V* solicitado y el otro lado tendrá la misma cantidad de bloques pero disminuido en uno. Ejemplo: para la *Letra V* número 7, tendrá siete bloques de lado izquierdo y seis bloques de lado derecho o si se quiere ver de otra manera, seis del lado izquierdo y siete del lado derecho. Observe las dos formas de interpretarlo:




Letra V o Fig. 7

**c)** El tercer procedimiento es una visualización en la que se divide a la *Letra V* en tres secciones: dos lados con una misma cantidad de bloques y un bloque base al centro. Los dos lados tienen una cantidad de bloques igual al número de la *Letra V* disminuido en uno. Ejemplo: Si la *Letra V* es la número 8, tendría en cada uno de sus lados siete bloques y un bloque único en medio de éstos. Observe:

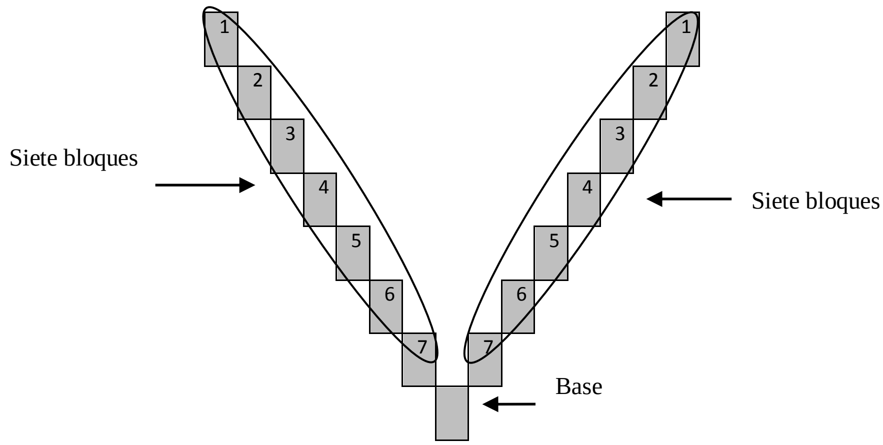


Fig. 8

Las preguntas de la tercera fase de resolución que permanecieron para la cuarta fase fueron:

- ¿Si el patrón continua, cuántos bloques negros estarán contenidos en la siguiente *Letra V*?
- ¿Cuántos bloques estarán en la figura 15 en la secuencia?
- ¿Cómo llegaste a tu respuesta? [se agregó: Explica]
- ¿Cómo podrías saber el número de bloques en cualquier *Letra V* en este patrón? [se agregó: Explica]
- ¿Puedes escribir una *Letra V* que siga este patrón y que tenga sólo 36 bloques? [se agregó: Justifica tu respuesta]

Es decir, se conservaron cuatro preguntas y se agregaron las siguientes:

- Vuelve a observar con atención las figuras del patrón de la Letra V ¿qué es lo que notas en él? ¿qué puedes decir acerca de él?
- Continua respondiendo la siguiente tabla

| No. figura | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| No. bloques | 1 | 3 | | | | |

- ¿Aumenta o disminuye el número de bloques de una figura y la siguiente? ¿por qué?
- ¿Habría alguna *Letra V* en este patrón que tuviera un número igual de bloques? ¿Por qué si o por qué no?

En la cuarta fase de resolución de los problemas ya no se incluyeron las preguntas en las que el estudiante tenía que elegir una expresión algebraica que correspondiera a su procedimiento hallado, así tampoco aquellas en las que se le pedía plantear un problema de patrones creado por ellos mismos. Debido a que era muy precipitado hacer estas dos solicitudes a estudiantes que recién ingresaban al primer grado de secundaria puesto que aún no se han introducido al estudio del álgebra.

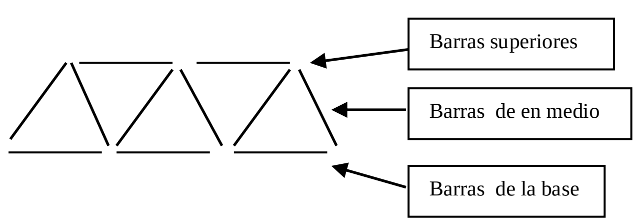
La pregunta que dice: “vuelve a observar con atención…” fue planteada para tener una primera impresión de lo que observan los estudiantes cuando se les presentan patrones de figuras. En las exploraciones piloto se detectó que muchos estudiantes desconocían la temática de la generalización de patrones. Es decir, era algo nuevo para ellos. Lo cual para nuestra investigación fue conveniente pues el razonamiento que desarrollan los estudiantes al resolver este tipo de problemas, es decir, llegar a la generalización, es en muchos casos es resultado del uso de recursos no algebraicos propios de su grado escolar y además expresarlo en forma natural, lo cual ambas cualidades permiten apreciar que realizan abstracciones hacia la generalidad sin tener nociones sólidas de álgebra.

Cuando se les pide a los estudiantes responder la tabla es con el propósito de provocar, por un lado, la observación del aumento de dos bloques de una figura y la siguiente en el patrón y por otro lado, el que pudieran observar que sí al número de figura o letra V en cuestión se le suma el número de figura anterior se obtiene la cantidad de bloques totales para la figura solicitada. Las preguntas número tres y cuatro en la hoja de trabajo de la cuarta fase, fueron planteadas para verificar que el estudiante había reconocido las regularidades del patrón. Una pregunta específica era decir cuántos bloques tendría la figura 15 y además decir cómo le habían hecho para hallar el resultado. En dicha pregunta el número de figura es mayor que el de las figuras mostradas al inicio de la hoja de trabajo, con el fin de saber si su respuesta fue hallada a través de un conteo simple o si ya se tenía un procedimiento más eficaz para números de figuras mayores. Si en esta pregunta no se detectaba como hallaban el resultado los estudiantes, entonces se reservó una más con carácter más directo para conocer su procedimiento usado. Las últimas dos preguntas en la hoja de trabajo fueron para verificar la solidez de la comprensión del problema. Es decir, las preguntas cuestionaban al estudiante a mayor profundidad. De tal manera que si el estudiante lleva una línea de pensamiento coherente al responder las preguntas anteriores, las últimas preguntas no provocarán mayor distracción o confusión por el contrario reforzaran su procedimiento. Sus respuestas nos asegurarían si se da una completa comprensión del problema por parte del estudiante o lo contrario.

### 2) *EL PROBLEMA DEL DISEÑO DE LA VIGA*

Los procedimientos que usaron los estudiantes avanzados para resolver los problemas fueron tres, que serán presentados adelante. El más utilizado fue el siguiente:

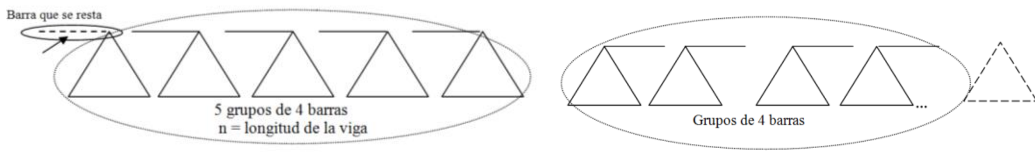
**a)** Los estudiantes separan la viga en tres secciones que son: las barras de la base (que determinan la longitud de la viga), las barras de en medio (las barras en diagonal) y las barras superiores. La cantidad de barras de la base se obtiene conociendo la longitud de la viga, la cantidad de barras de en medio se obtiene multiplicando la longitud de la viga por dos y la cantidad de barras superiores se obtiene restándole uno a la longitud de la viga. Estos datos fueron del conocimiento de los estudiantes al observar que la cantidad de barras superiores siempre serán una barra menos que las de la base. Así también, que las barras de en medio o en diagonal son dos, sostenidas por cada barra de la base. En resumen, la cantidad total de barras de cualquier viga del patrón se obtendrá sumando estas tres secciones. Pero cabe decir que este procedimiento es eficaz siempre y cuando se conozca la longitud de la viga. Observe la viga de longitud 3:




**b)** El segundo procedimiento más usado fue el de separar a la viga en conjuntos de cuatro barras. Los estudiantes observaron lo siguiente:

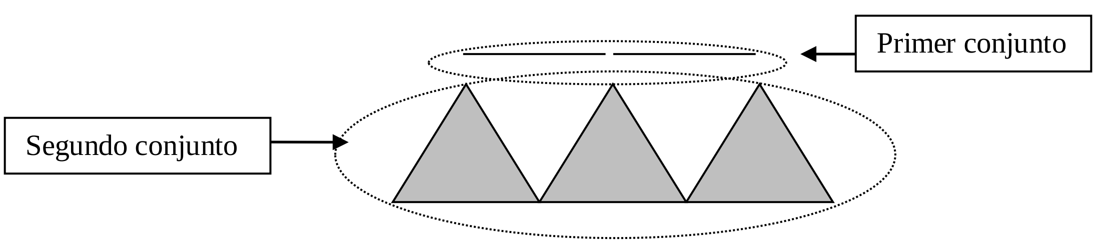
- La viga de longitud 1 se conforma de tres barras únicamente, pero al ser de longitud 2 en adelante va aumentando cuatro barras de una viga a otra.

- Hay dos formas de visualizar los conjuntos de cuatro barras y cada visualización proporciona una expresión algebraica distinta pero equivalente. Observe:




La visualización de la izquierda lleva a la expresión algebraica 4*n*-1. Debido a que se considera la viga como conjuntos de cuatro barras excepto la barra del primer conjunto, por esta razón se resta uno. La visualización de la derecha también considera conjuntos de cuatro barras excepto el último conjunto de la viga que sólo tiene tres barras, por esta razón la expresión algebraica es la siguiente: 4(*n*-1) + 3.

**c)** Este último procedimiento lo encontraron sólo dos estudiantes que resolvieron el problema del *Diseño de la Viga* en pareja. Ellos hallaron una forma de encontrar la cantidad de barras necesarias para cualquier longitud de viga observando a ésta en dos conjuntos como se muestra en la imagen de abajo. El primer conjunto son las barras superiores (las opuestas a las de la base) y el otro conjunto son las barras de la base que se unen a las barras diagonales formando un triángulo.




Si los estudiantes conocen la longitud de la viga, sólo se necesita multiplicarla por tres y al resultado se le suman las barras superiores, las cuales siempre serán igual al número de la longitud de la viga disminuido en uno. La razón de multiplicar la longitud de la viga por tres es porque en cada barra de la base se forma un triángulo sobre ella. Por ejemplo, si la longitud de la viga fuera de 16, entonces se multiplicaría 16 x 3 = 48 y 48 sería el número de barras del segundo conjunto y al 48 se le suman 15 barras, que son las del primer conjunto (que no es otra cosa que la longitud de la viga menos uno). De manera que sumando estos dos conjuntos se obtienen 63 barras que son las que se requieren para construir una viga de longitud 16.

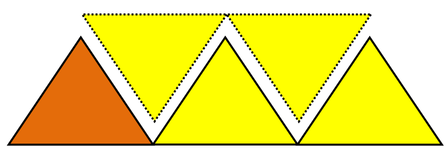
La única pregunta que se conservó de la hoja de trabajo de la tercera fase fue la que solicitaba a los estudiantes decir la cantidad de barras necesarias para las vigas de longitud 5, 8, 10, 20, 34 y 76. Todas las demás preguntas no se incluyeron para la cuarta fase pues se requería de modificaciones para su implementación en el ambiente digital, estas modificaciones se tradujeron en secuencias de preguntas como se hizo en la segunda fase que condujeran al estudiante hacia un procedimiento general de resolución que en este caso las guías de aprendizaje apuntaban hacia el primer procedimiento que se presentó anteriormente, dado que fue el más usado entre los estudiantes avanzados participantes pero también hay preguntas que los puedan conducir al segundo procedimiento.

Desde el inicio de la hoja de trabajo de la cuarta fase, en la descripción del problema se les hace una pregunta sobre el número de barras necesarias para la viga que se les presentó como ejemplo (viga de longitud 4). Las siguientes preguntas trataron de conducir al estudiante a observar las tres partes que conformaban la viga, según el primer procedimiento: las barras superiores, las barras diagonales y las barras de la base. Intentando con ellas que el estudiante observara que el número de la longitud de la viga era el mismo número de barras de la base y que las barras superiores son una menos que las de la base. Además se incluyeron dos preguntas para dar oportunidad o tener otra opción de visualización en relación al segundo procedimiento presentado aquí.

A diferencia de la hoja de trabajo de la tercera fase en la que se les pedía elegir una expresión algebraica que representara su procedimiento en esta cuarta fase se les solicitó que escribieran una regla o fórmula de su autoría para encontrar el número de barras necesarias para una viga de cualquier longitud y además la explicara. El objetivo de la pregunta realmente no es que el estudiante proporcione una expresión algebraica como tal, sino que de manera natural exprese un procedimiento que generalice la obtención del patrón. También se descartó la pregunta que involucra el término enésimo porque se descubrió en las exploraciones piloto (1ª y 2ª fases) que el término era desconocido o con una limitada noción de éste. Sin embargo, se utilizó en los tres últimos problemas considerando que para ese momento ya habría familiaridad con el concepto.

En la revisión de las hojas de trabajo de la cuarta fase se encontró que el procedimiento más utilizado por los estudiantes para hallar el número de barras para cualquier viga fue el tercer procedimiento, descrito antes, el cual realizaron sólo dos estudiantes en la tercera fase y tiene que ver con separar a la viga en dos conjuntos: uno de triángulos y el otro de barras superiores.

El utilizar o hallar dicho procedimiento no es casualidad pues las herramientas del manipulativo virtual dieron lugar a este hecho, pues los estudiantes construían las vigas no a través de barras que pudieran manipular individualmente e ir acomodando para formar cierta viga, sino que iban construyendo la viga acomodando triángulos en hilera y agregándole a ésta otros triángulos invertidos sobre la misma hilera. Observe:



Pero este procedimiento no fue el único que encontraron los estudiantes en la cuarta fase, también llegaron a la generalización a través del procedimiento que separa a la viga en tres conjuntos. El cual se presentó al inicio de este apartado como el primer procedimiento. Se recuerda que los datos obtenidos de la resolución del problema en la tercera fase sirvieron para realizar modificaciones al planteamiento del problema para ser implementado en el ambiente de aprendizaje digital (4ª fase). Las modificaciones estuvieron orientadas hacia el procedimiento que dividía a la viga en tres conjuntos debido a que fue el que más estudiantes desarrollaron. Se pensó que sería el que encontrarían los estudiantes en el ambiente digital, pero no fue así. El procedimiento (conformación de triángulos) que sólo dos estudiantes encontraron en la tercera fase, fue el que la mayoría de estudiantes encontraron para resolver el problema del Diseño de la Viga en el ambiente digital (4ª fase) a pesar de que el planteamiento de las preguntas no conducía directamente a este procedimiento. Este hecho fue determinado por las herramientas del manipulativo virtual, lo que confirma la idea con la cual se está de acuerdo, de que el *medio* determina en el estudiante un tipo de pensamiento o una manera de expresión que están en directa correspondencia con éste (Noss y Hoyles, 1996 y Moreno y Waldegg, 2004).

### 3) *LAS ESTAMPAS EN EL CUBO*

La descripción del problema de *Las Estampas en el Cubo*, presentada en la tercera fase se conservó sin modificaciones para las hojas de trabajo de la cuarta fase, así también las imágenes. Las instrucciones para usar las herramientas cambiaron debido a que se utilizó otra sección del manipulativo, éstas fueron suficientes para no tener dificultades en la construcción de las barras de cubos. De las preguntas planteadas en la tercera fase, sólo se conservó una pregunta para la cuarta fase, la cual solicitaba al estudiante decir cuántas estampas se necesitan para una barra de longitud 137 y 213. Lo que quiere decir que las hojas de trabajo para la cuarta fase fueron modificadas casi en su totalidad. Estos cambios están estrechamente relacionados con los procedimientos generados en la tercera fase.

Las estrategias o procedimientos que encontraron los estudiantes avanzados fueron dos. No hay una diferencia significativa entre cuál de ellos fue el más usado. De tal manera que el replanteamiento de las preguntas buscó que el estudiante detectara y observara regularidades como lo hicieron los estudiantes avanzados, algunas de las observaciones que ellos hicieron se presentan a continuación:

- Al aumentar un cubo a la barra, aumenta en cuatro el número de estampas.
- Donde se unen los cubos, la maquina no coloca estampas.
- Los cubos intermedios de una barra sólo se les colocan cuatro estampas y el primer y último cubo se les colocan cinco estampas. En otras palabras, a

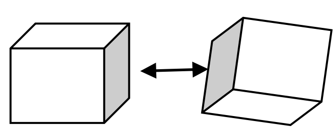
todos los cubos se les colocan cuatro estampas excepto al primero y al último cubo que tienen una estampa más cada uno.

Se consideran éstas y otras observaciones para después replantear las preguntas del problema las cuales sirvieron como guías de aprendizaje para los estudiantes menos avanzados, estos últimos podrían tener más posibilidades de llegar a cualquiera de los dos procedimientos que hallaron sus compañeros más avanzados para encontrar el total de estampas de cualquier longitud de barra.

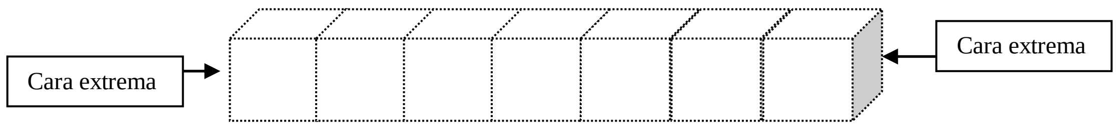
Enseguida se describen los dos procedimientos generados por los estudiantes avanzados.

**a)** El primer procedimiento de resolución consiste en desprender simbólicamente el primer y último cubo de la barra. Se sabe que estos dos cubos tienen cinco estampas cada uno. Los cubos restantes en la barra, llamados cubos intermedios, sólo les son colocados cuatro estampas a cada uno. Es decir, la barra de cubos intermedios tiene cuatro caras, entonces el número de estampas colocadas en una de las caras de dicha barra tendrá que cuadruplicarse o mejor dicho tendrá que multiplicarse por cuatro el número de estampas colocadas en un lado. Obtenido el resultado sólo faltará agregarle las 10 estampas de los cubos desprendidos para tener el total de estampas de toda la barra. La expresión que representa éste procedimiento es $4(n-2)+10$ que al simplificarse se obtiene: $4n + 2$.

**b)** En el segundo procedimiento los estudiantes observaron que al unirse lo cubos, la máquina ya no coloca dos estampas, y estas estampas son las de los costados de los cubos acoplados. Esto quiere decir, que los cubos intermedios sólo tienen cuatro estampas colocadas.



Por esta razón los estudiantes multiplican la longitud de la barra (la cual indica cuántos cubos están acoplados) por cuatro y al resultado le agregan dos estampas más para obtener el total de estampas de cierta barra de cubos. Es decir, los estudiantes visualizan la barra de cubos completa sin excluir al primer y último cubo, los cuales tienen una estampa más (cinco estampas cada uno). Dicho de otro modo, ven a la barra como un entero de cierta longitud con cuatro lados, a la que al final hay que sumarle las dos estampas de las caras extremas de la barra. La expresión para este procedimiento es: $4n+2$.




En resumen, se puede decir que este segundo procedimiento es una versión simplificada del anterior, en un sentido visual y matemático. El primero excluye simbólicamente dos cubos de la longitud de la barra, la cantidad de cubos restantes se multiplica por 4 y al final se agregan diez estampas de los cubos extremos y el segundo involucra ver la totalidad de la longitud de la barra multiplicada por cuatro y al final se le agregan dos estampas de las caras extremas. Por último, resta decir que el valor de estas visualizaciones radica en sus diferencias.

Las preguntas que se hacen en las hojas de trabajo, para ser implementadas en la cuarta fase, tienen su origen en estos dos procedimientos descritos. Con ellas se intenta provocar la observación de características que conllevan al primer procedimiento que se enunció aquí, pero se deja lugar a que el estudiante llegue a desarrollar el segundo, el cual es considerado una versión simplificada. En general, tales preguntas orientan al estudiante en dos cosas, primero a que logre observar las regularidades en el patrón que los estudiantes avanzados detectaron para llegar a un procedimiento y por otro lado intentan conducir al estudiante hacia cualquiera de los dos procedimientos mencionados arriba sin pretender ser sugerentes.

Las siguientes preguntas tenían esa intención:

-¿Al juntar cubos para formar barras, cuentas las estampas donde se unen los cubos? ¿Por qué?

-Cuándo formas barras de una longitud de más de 2 cubos, ¿cuántas estampas colocará la máquina sobre los cubos de los extremos. Es decir, sobre el primero y el último cubo? ¿Por qué?

-¿Cuántas estampas coloca la máquina en cada uno de los cubos intermedios de cualquier barra? (los cubos intermedios son todos los cubos que están en una barra excepto el primero y el último) ¿coloca siempre el mismo número de estampas de los cubos intermedios? ¿Por qué?

-¿Cuántas estampas necesitas para una barra de longitud 20? y ¿de longitud 56? Explica cómo encontraste estos valores.

### 4) LOS AZULEJOS I

Para contestar las hojas de trabajo en la cuarta fase, las instrucciones fueron breves y suficientes. Se cambió la sección que se estaba usando en el manipulativo. Las preguntas hechas en la tercera fase se modificaron para ser usadas en la cuarta, se cambió la redacción de éstas, en algunas se quitaron palabras y en otras se agregaron. A partir de este problema se incluyeron preguntas inversas. Es decir, al estudiante se le da como dato una cantidad de azulejos y el estudiante tiene que encontrar la pila más grande que se pueda construir con dicha cantidad siguiendo el patrón. Con la intención de indagar sí el estudiante puede aplicar su procedimiento en forma invertida o más bien saber qué recursos utilizó para dar respuesta a tal pregunta. También se incluyeron, en este problema y en los dos problemas siguientes, preguntas en relación al enésimo término del patrón dado. Por otro lado, se les pide elegir una expresión algebraica con la cual se pueda encontrar e número de azulejos para la pila ¨*n*¨ en el patrón.

En la cuarta fase (estudiantes desaventajados) fueron esenciales las preguntas acerca de lo que permanecía constante y lo que cambiaba en el patrón. El hecho de percibir éstas características les permitió a los estudiantes avanzados saber cómo estaban construidas las pilas y de qué manera iban creciendo. Pero también era importante que el estudiante pudiera describirlo con sus propias palabras. Escribirlo le permite tener más claridad en la mente, se ordenan las ideas acerca de cómo se va conformando una pila y la siguiente según el patrón dado. Algo que fue determinante en la visualización de las regularidades fue el uso de colores para destacar lo constante y lo cambiante en las pilas. Hecho que no se descartó por ningún motivo para ser usado en la cuarta fase. De éste modo se les solicitó a los estudiantes explicar cómo le harían para dibujar dos pilas (la 5 y la 18). La pila 5 era la pila que seguía a las pilas presentadas como imágenes del patrón en sus hojas de trabajo y la pila número 18 era una pila más alejada. El objetivo de plantear la petición fue una forma de verificar si el estudiante mantenía sólida la visualización de lo que permanecía constante y lo que cambiaba en las pilas y que éstas observaciones le permitieran hallar una manera eficaz de construir pilas según el patrón pero de forma general.

Las siguientes dos preguntas, están planteadas en un sentido invertido con el objetivo de poner a prueba el procedimiento que hayan encontrado para construir las pilas. Estas dos preguntas tienen un grado de dificultad mayor. Se recuerda que el problema es planteado a estudiantes de bajo rendimiento académico. Es de interés conocer cómo o qué recursos matemáticos utilizan para dar respuesta a las preguntas.

Los estudiantes avanzados obtienen respuestas correctas a las preguntas a través de aproximaciones al número de la pila. Ninguno realiza un procedimiento inverso. Lo que hacen es ejecutar un procedimiento probando con distintos números de pila, debido a que el número de pila es un elemento clave que se debe conocer para ejecutar su procedimiento.

Tres acciones que debe realizar el estudiante para posibilitar hallar un procedimiento

1) Observar loa azulejos que permanecen igual en las pilas y los que cambian.
2) Distinguir con un color éstas secciones de azulejos.
3) Encontrar la relación del número de pila con dichas secciones, en especial determinar el número de azulejos cambiantes.

Los estudiantes descomponen la pila en tres secciones: un conjunto de azulejos que forman un cuadrado al centro, la medida que tiene por lado o el número de azulejos que tiene por lado es igual al número de pila. La segunda sección la conforman un conjunto de azulejos apilados en una columna en la esquina superior derecha del cuadrado mencionado antes y ésta columna tiene un número de azulejos igual al número de la pila. Estas dos secciones son las que cambian en el patrón. La sección que es constante esta forma por dos azulejos adheridos a la esquina inferior izquierda de la pila.

El separar la pila en tres secciones, las cuales están relacionadas con el número de pila es un procedimiento efectivo pero que está condicionado por tener que saber el número de pila. En los anteriores problemas no se les pedía elegir una expresión algebraica que fuera acorde a su procedimiento pero desde este problema y los subsecuentes se hizo la petición porque en la resolución de problemas anteriores, en la tercera fase, los estudiantes llegaban a una expresión algebraica y los que no lo hacían tenían la opción de elegir una que les diera los mismos resultados que su procedimiento.

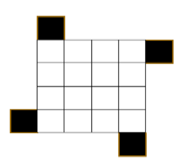
### 5) LOS AZULEJOS II

Las instrucciones para usar el manipulador fueron breves y suficientes como en los anteriores problemas. En este momento, el uso del manipulativo virtual ya está bajo dominio de los estudiantes. Por si mismos llegan a la sección que se utiliza para el problema en cuestión. En este problema se conservan en gran parte las preguntas de la tercera fase pero se hacen modificaciones en la redacción de éstas y el orden. Pero también se les pide decir cómo le hacen para llegar a su respuesta porque en las hojas de trabajo de la tercera fase las respuestas fueron breves y en ocasiones se desconocía cómo o qué habían hecho para llegar a ellas (se necesitó revisar las entrevistas). Así también evitar que sólo colocaran el resultado sin haber hecho, por si solos, un procedimiento.

La pregunta clave que indica a través de las respuestas de los estudiantes, cómo resolver el problema se modificó, pues la pregunta hecha en la tercera fase, para muchos estudiantes, fue entendida como sólo dibujar la pila que ellos desearan pero sin explicar un procedimiento general. Para no repetir la confusión, la pregunta en la cuarta fase fue más explícita en la solicitud de una explicación de cómo encontraron el número de azulejos de cualquier pila del patrón. Otro cambio en las hojas de trabajo fue quitar dos opciones de expresiones algebraicas de la tercera fase para ser remplazadas en las hojas de la cuarta fase por otras que son a las que recurren los estudiantes quienes omiten agregar uno al número de la pila. Es decir, la expresión $(n+1)^2 +4$ resuelve el patrón de azulejos II. Pero muchos azulejos olvidaron agregar uno al número de pila al escribir o elegir una fórmula o regla, entonces optan por $n^2 +4$ ó $n \times n +4$ las cuales son correctas.

Sin embargo, aunque elijan una expresión equivocada, lo realmente importante es el procedimiento ejecutado para generalizar el patrón. Esto les ocurrió a muchos estudiantes, su procedimiento era correcto y la expresión no correspondía a éste. Se recuerda que escribir o elegir una expresión algebraica que generalice el patrón no es una acción obligada para el estudiante y mucho menos en la cuarta fase del estudio en la que participan alumnos de bajo rendimiento académico.

Por último, la razón por la que las preguntas ¿qué número de pila tiene exactamente 148 azulejos cuadrados? Y la otra que dice: Tengo una caja con 165 azulejos cuadrados, ¿Qué número de pila sería la más grande que se podría hacer usando estos azulejos y siguiendo el patrón? Tienen la misma respuesta, que es la pila 11 y es por lo siguiente: Primero, están planteadas en un sentido inverso, se da como dato el número de azulejos y los estudiantes tienen que encontrar el número de pila más grande que se puede hacer. Segundo, una de las preguntas proporciona los azulejos exactos para cierto número de pila y en la otra pregunta, sobran azulejos. Antes se dijo que era común que los estudiantes olvidaran agregarle uno al número de pila, esto es porque ellos no realizan un procedimiento inverso para contestar las preguntas sino que acuden a aproximaciones. Es decir, prueban multiplicar un número por sí mismo para formar el cuadrado del centro de la pila, el cual los alumnos consideran como el número de pila, y luego agregan los cuatro azulejos de las esquinas, pero olvidan que el número de pila es un número menos que el número multiplicado por sí mismo. Por ejemplo, la pila #3 tiene un cuadrado al centro que tiene por medida de lado cuatro azulejos, lo que quiere decir que para saber la cantidad de azulejos de la pila #3 hay que multiplicar 4 x 4 (el número de pila más uno, multiplicado por sí mismo) para obtener los azulejos del centro más los cuatro azulejos constantes para obtener el total.



Pila # 3

Y aunque los estudiantes conocen el procedimiento descrito, cuando se les plantearon las preguntas sólo buscaban un número que multiplicado por sí mismo se aproximara a los azulejos dados, para luego agregar los cuatro azulejos constantes. Los estudiantes daban como respuesta un número de pila igual al número que habían considerado para multiplicarlo por sí mismo, sin considerar que el número de pila es un número menos que el número multiplicado por sí mismo para obtener el cuadrado del centro. Tercero, las hojas de trabajo de la segunda fase tuvieron como primera pregunta, en sentido inverso, la que se proporcionaba un número exacto de azulejos de manera que sirviera como referencia para responder la segunda pregunta que no tenía azulejos exactos.

### 6) EL CRECIMIENTO DE PILAS

Este es el último problema sobre patrones que se les presenta a los estudiantes. Tiene diferencias con los anteriores en aquellas se presenta el patrón desde la primera figura o pila, se menciona o se conocen los elementos del patrón desde el inicio y en esta ocasión se les presentó el patrón desde a pila 2 hasta la pila 4. Solicitándoles dibujar las pilas cero, uno, la quinta y la sexta, es decir, dos anteriores y dos posteriores a las presentadas como muestra del patrón, pero además tenían que decir de cuántos azulejos estaban compuestos.

Las preguntas hechas en la tercera fase del proyecto fueron modificadas ligeramente para la cuarta fase con el fin de mejorar la comprensión de los alumnos y tener más información para el análisis, de acuerdo a las observaciones captadas.

También se eliminaron dos preguntas de la tercera fase en particular la que les pedía elegir una expresión algebraica, la razón fue que los estudiantes avanzados generaron ocho procedimientos distintos o variantes de alguno para hallar los azulejos de cualquier pila del patrón. Por lo tanto, no todas las expresiones proporcionadas correspondían a su personal visualización del patrón sino que ellos ofrecían una regla o fórmula, en lenguaje natural, de su procedimiento. Lo cual es más valioso. El que los estudiantes hallaran distintos procedimientos es la razón por la que se les pide describir un procedimiento alternativo al suyo para resolver el patrón. Con respecto a esto último, al inicio de las hojas de trabajo, de la cuarta fase, se les presentaron las pilas 2, 3 y 4 como referencia al patrón en cuestión y después se les mostraron cinco imágenes que en donde aparecen nuevamente la pila 2, 3 y 4 pero estas distintas visualizaciones fueron construidas en el manipulativo virtual. Las imágenes corresponden a los cinco procedimientos más utilizados por los estudiantes en la tercera fase, se presentan en el orden del más al menos usado. La intención de mostrar estas imágenes es dar un referente a los estudiantes de la cuarta fase para hallar un primer procedimiento o uno alternativo. Se muestran enseguida tales imágenes.

*Imagen 1*

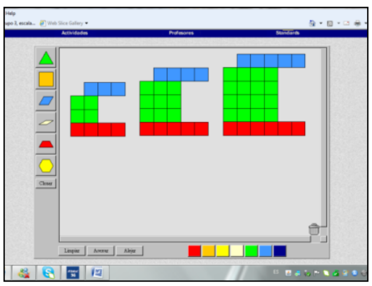


*Imagen 2*

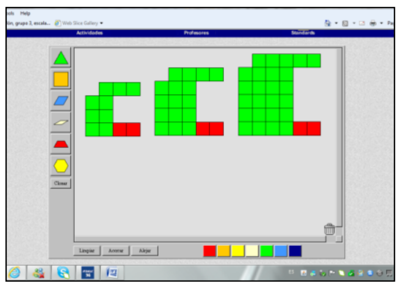


*Imagen 3*

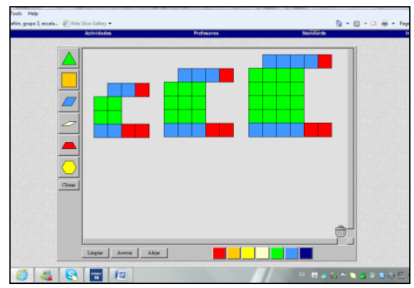


*Imagen 4*

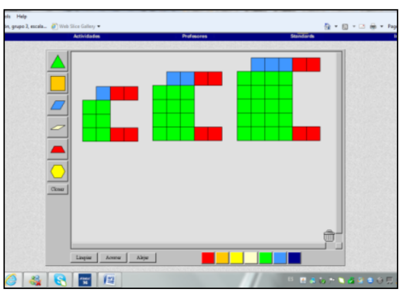
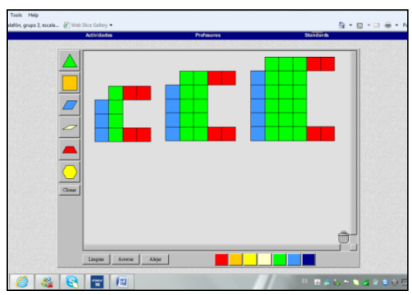


*Imagen 5*



# <u>CAPÍTULO III</u>

## ANÁLISIS DE LOS DATOS

En seguida se presenta el análisis de la resolución de los estudiantes a los problemas sobre generalización de patrones, los cuales ya se presentaron en el capítulo de metodología. Aquí, cada vez que se vayan a abordar cuestiones específicas a cada uno de ellos se le indicará al lector la página, en el capítulo de metodología, en que se encuentra el enunciado del problema en cuestión o puede recurrir directamente a los anexos al final del documento.

El análisis de la resolución de los estudiantes a cada uno de los problemas se presenta de manera detallada a lo largo de tres grandes secciones. La primera se refiere al análisis de los datos obtenidos en la primera fase del trabajo de campo, en donde la actividad de los estudiantes se llevó a cabo usando únicamente lápiz y papel. La segunda sección trata sobre el análisis de los datos obtenidos en la segunda fase, en la cual la actividad de los estudiantes se realizó en dos ambientes distintos, en lápiz y papel, y en manipulativo virtual.

Por último, la tercera sección trata sobre el análisis de los datos obtenidos en la tercera y cuarta fases del trabajo de campo. Se hace un énfasis específico en los resultados de este análisis porque es lo que fundamenta o soporta las hipótesis del trabajo de investigación que aquí se presenta.

### 3.1 ANÁLISIS DE LOS DATOS OBTENIDOS EN LA PRIMERA FASE. ACTIVIDAD DE LOS ESTUDIANTES USANDO ÚNICAMENTE LÁPIZ Y PAPEL

La primera fase del trabajo de campo consistió en una exploración piloto con estudiantes de primero y segundo grados de secundaria. El objetivo de esta fase fue determinar con qué grado escolar es apropiado llevar a cabo la investigación y cuáles de los problemas sobre generalización de patrones que se tenían serían los pertinentes para el grado que se vaya a elegir. Los problemas presentados a los estudiantes fueron:

1. El problema de la Letra V
2. El problema de Las Torres de Palillos
3. El problema del Diseño de la Viga
4. El problema del Diamante de Puntos
5. El problema de las Estampas en el Cubo

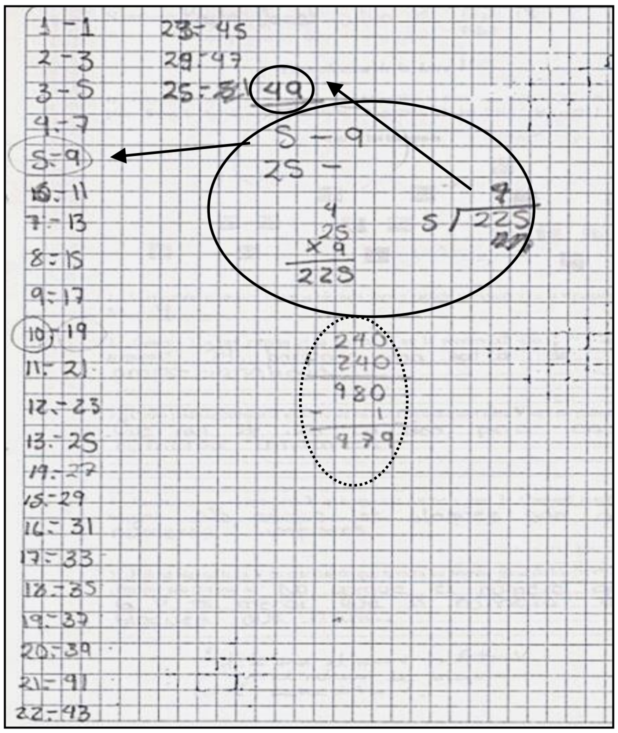
Los estudiantes participantes en esta primera fase fueron de rendimiento académico regular en matemáticas, es decir, con calificaciones de entre 7 y 9 en la asignatura. Dichos alumnos fueron elegidos por su profesor que les impartía la materia en ese momento. Fueron 19 alumnos en total, 11 de primer grado y 9 de segundo grado. El trabajo con los estudiantes tuvo una duración de un mes. Ellos estaban a punto de terminar su curso, en poco tiempo estarían en el siguiente grado, segundo y tercero respectivamente.

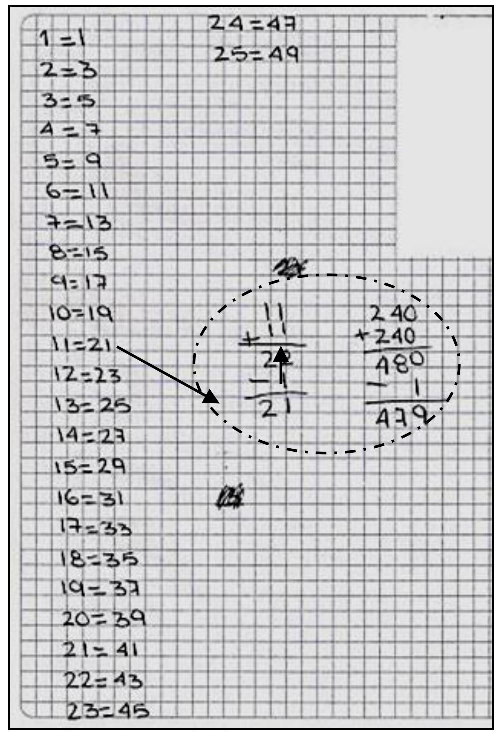
Los estudiantes resolvieron los problemas de patrones de figuras en un ambiente de aprendizaje en donde únicamente emplearon lápiz y papel. Para mayores detalles sobre la caracterización y los problemas que resolvieron los alumnos en esta fase, se puede consultar la sección 2.3 del capítulo de metodología.

Enseguida se describe el análisis de los datos resultado de la resolución cada uno de los problemas de generalización de patrones realizados en esta primera fase.

**El problema de la Letra V**

Todos los estudiantes de primer grado observan una regularidad en el patrón lo que los lleva a realizan listados de conteo simple que avanzan de dos en dos, que representa el incremento de bloques de la Letra V en el patrón. Los listados que hacen los desarrollan, en promedio, hasta la figura de Letra V número 25, la razón es porque se les preguntó si existía una Letra V que sólo tuviera 36 bloques. Entonces, para dar una respuesta por lo menos deben llegar en su conteo hasta la figura número 18 y 19. Estos listados representaron el primer paso para resolver el problema, entre los intentos de resolución también está el de emplear la regla de tres, pero pronto se percatan de que no los conduce a la solución. Enseguida mostramos un ejemplo de cómo evolucionan sus procedimientos. Observe el óvalo mayor en la imagen de la izquierda. El 5 representa el número de Letra V y el 9 el número de bloques que la conforman, este dato lo retoma de su listado. El estudiante desea saber cuántos bloques tendrá la Letra V número 25 aplicando la regla de tres. Entonces multiplica 25 por 9, obtiene 225 y este resultado lo divide entre 5, ni siquiera termina la división, adelanta que el resultado es 45 y éste no coincide con el que tienen en su listado. Esto le indica o comprueba que la regla de tres no es un procedimiento que le permita conocer el número de bloques de una Letra V.



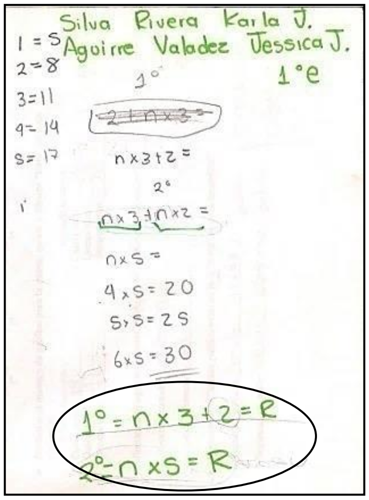


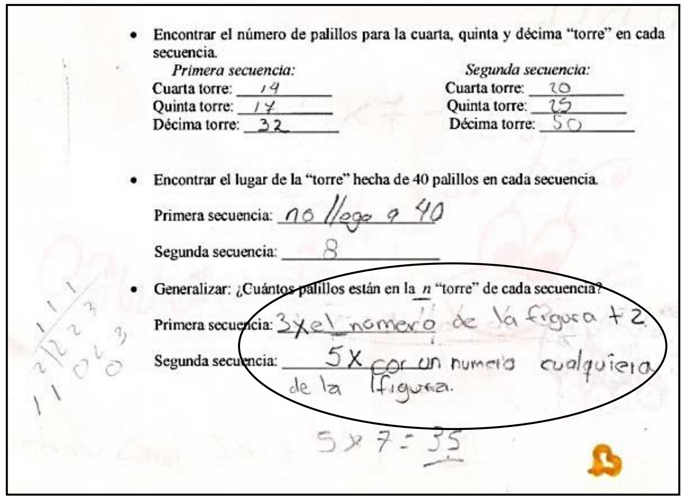

El óvalo punteado de la imagen de la izquierda muestra el procedimiento al que llega después, el cual resulta efectivo. Éste es un ejemplo de lo que hacen seis de los once estudiantes para saber el número de bloques de cualquier Letra V en el patrón. Ellos no redactan una respuesta a la pregunta de cómo podrías deducir el número de bloques de cualquier letra V del patrón, sino que sólo escriben operaciones de suma y resta para dar con la cantidad de bloques de cualquier Letra V. La imagen de la derecha muestra el nuevo procedimiento que consiste en involucrar al número de Letra V en las operaciones, es decir, para saber la cantidad de bloques de cualquier Letra V, suman dos veces el número de esa Letra V y le restan un bloque. Desde nuestro punto de vista esto ya es un procedimiento general, el cual permite hallar la cantidad de bloques de cualquier Letra V del patrón. En la imagen de la derecha, las operaciones dan a conocer la cantidad de bloques para la Letra V número 11 y 240, que son 21 bloques y 479 respectivamente.

Por otro lado, una tercera parte de los estudiantes de segundo grado resuelven con este último procedimiento el problema de la Letra V y otra tercera parte intenta hacerlo aplicando la regla de tres. El resto de los alumnos consideró que al incrementarse en dos la cantidad de bloques de una figura a otra en la secuencia se podía hallar el total de bloques de cualquier figura con solo multiplicar el número de Letra V por dos o simplemente realizar un conteo simple para dar respuesta a las preguntas. En conclusión, la resolución del problema de la Letra V fue mejor ejecutada por los estudiantes de primer grado aun cuando carecen de conocimientos algebraicos.

**El problema de las Torres de Palillos**

Todos los estudiantes de primer grado resolvieron el problema con un procedimiento general para ambas secuencias de torres. Llegan a establecer la generalidad de manera simbólica, aunque no con la estricta formalidad de la escritura algebraica (ver la primera de las siguientes imágenes). Es decir, utilizan la “x” para indicar el producto de un número y una letra. Por ejemplo: *3xn + 2*, ellos multiplican tres por “*n”* más dos. También usan en sus expresiones la “*n”,* como en la expresión de arriba, esto se debe a que en sus hojas de trabajo se les preguntó cuántos palillos están en la torre “*n*” de cada secuencia. De manera que retoman la letra para usarla en sus expresiones. Otros estudiantes sólo expresan su procedimiento en un lenguaje natural. Observe las imágenes:



- Encontrar el número de palillos para la cuarta, quinta y décima "torre" en cada secuencia.

| Primera secuencia: | | Segunda secuencia: | |
|---|---|---|---|
| Cuarta torre: | 14 | Cuarta torre: | 20 |
| Quinta torre: | 17 | Quinta torre: | 25 |
| Décima torre: | 32 | Décima torre: | 50 |

- Encontrar el lugar de la "torre" hecha de 40 palillos en cada secuencia.

Primera secuencia: no llego a 40

Segunda secuencia: 8

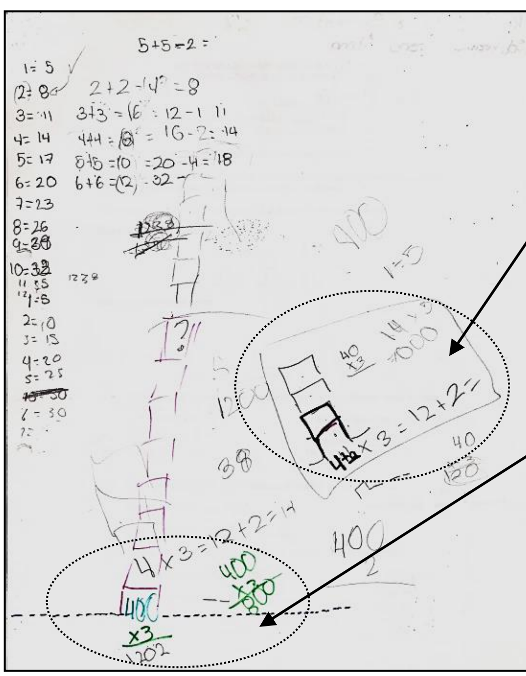
- Generalizar: ¿Cuántos palillos están en la $n$ "torre" de cada secuencia?

Primera secuencia: 3x el número de la figura + 2

Segunda secuencia: 5x por un número cualquiera de la figura.

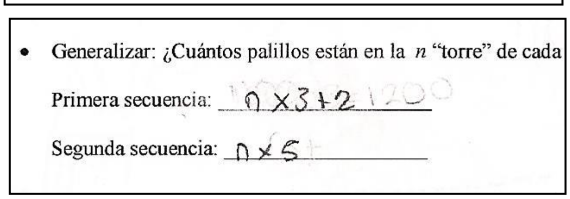
5 x 7 = 35

Entre sus primeros intentos para resolver el problema se encuentra el dibujar las torres que continúan a las presentadas en sus hojas de trabajo; hacen listas de conteo simple que involucran el número de torre y el número de palillos totales que ocupan, es a través de las entrevistas que nos percatamos que para dibujar las torres de cada secuencia ellos previamente observan regularidades. Es decir, detectan los palillos que permanecen constantes y los que cambian o aumentan. Cuando ellos ya encontraron la manera de construir las torres según el patrón, buscan interpretar o expresar numéricamente cada conjunto de palillos: los de la base y los de los pisos de la torre. Esto los lleva a establecer expresiones semialgebraicas. Observe las imágenes:




Las operaciones corresponden a la torre #4 de la primera secuencia. La multiplicación de 4 por 3 es para encontrar la cantidad de palillos de los pisos de la torre y luego le suman dos palillos que corresponden a los dos palillos constantes de la base de la torre.

La estudiante prueba con un número de torre mayor: la #400 para la segunda secuencia. Para encontrar los palillos de los pisos de la torre ella multiplica 400 por 3, para los palillos de la base multiplica 400 por 2 lo cual es correcto. Los procedimientos son coherentes con sus expresiones.

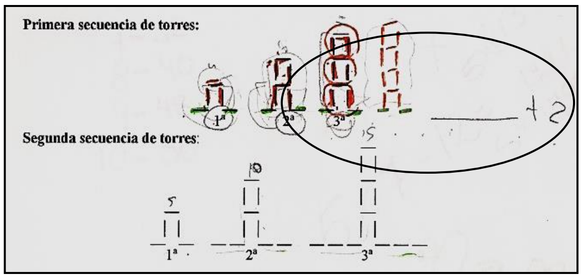


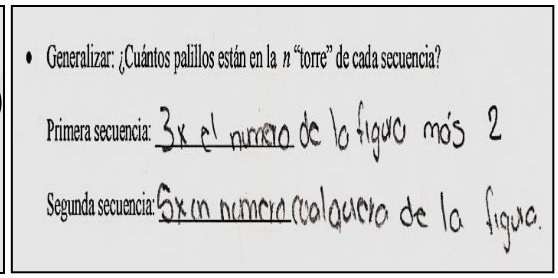
- Generalizar: ¿Cuántos palillos están en la $n$ "torre" de cada

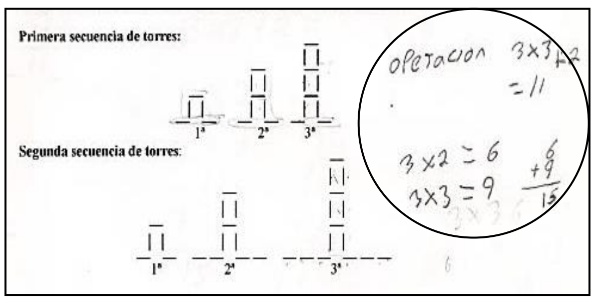
Primera secuencia: n x 3 + 2

Segunda secuencia: n x 5

Más de la mitad de los estudiantes de segundo grado también lo resuelven con el mismo procedimiento general que encuentran los jóvenes de primero para ambas secuencias. Parten de hacer listados de conteo sencillo y dibujos de torres cercanas para responder las primeras preguntas, otros utilizar la regla de tres para torres más lejanas pero desechan esta estrategia al comprobar que sus resultados no coinciden con la cantidad de palillos de las torres conocidas. Sus procedimientos parten de la detección de regularidades del patrón. Expresan la generalización en un lenguaje natural. Observe las imágenes de abajo.

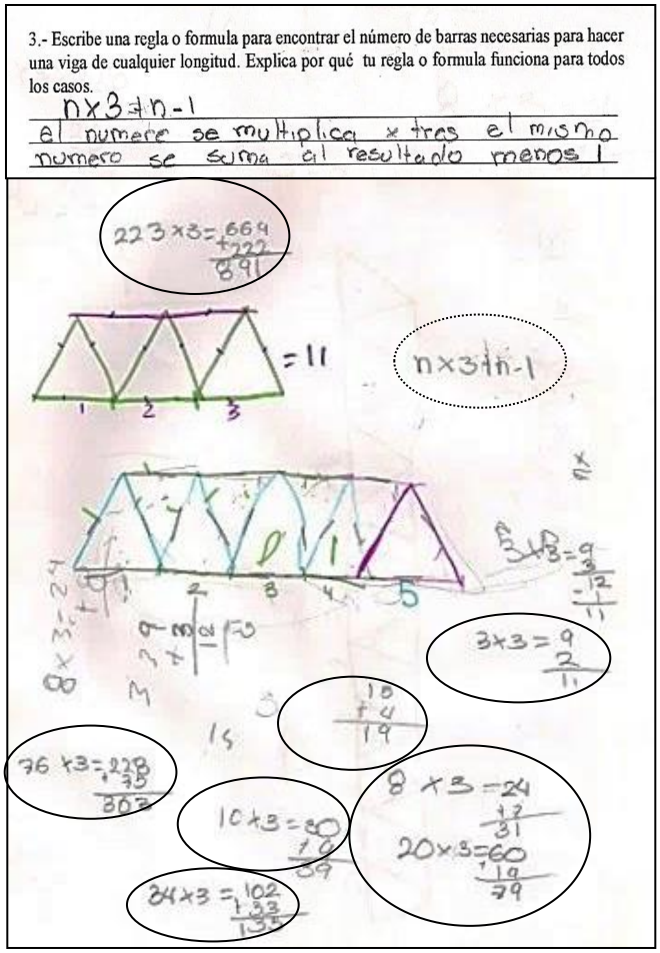


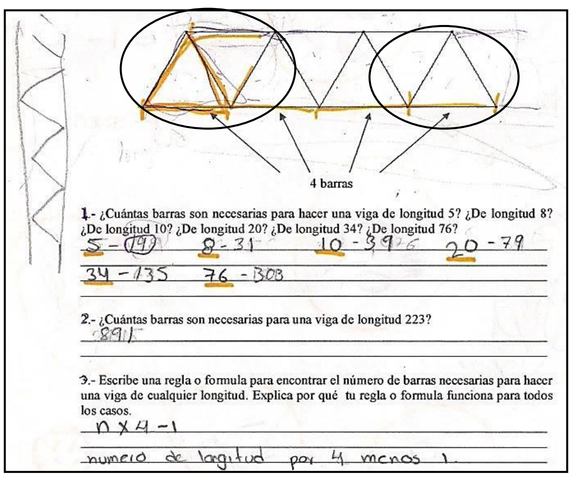

**El problema del Diseño de la Viga**

De los once alumnos de primer grado, sólo dos no llegan a un procedimiento que generalice al patrón. Del resto de los estudiantes, la mayoría encuentra un procedimiento que visualiza a la viga en conjuntos de cuatro barras pero hubo dos estudiantes que visualizan a ésta como una conformación de triángulos. Ambos procedimientos los llevan a generalizar, es decir, saber cuántas barras se necesitan para cualquier longitud que tenga una viga. Expresan sus procedimientos con fórmulas semialgebraicas. Realizan dibujos de distintas longitudes de viga, sólo los estudiantes que no encuentran un procedimiento general realizan listados que aumentan de tres en tres barras y la mayoría hace muchas operaciones, multiplican y suman, las cuales tiene que ver con sus procedimientos hallados. Observe las imágenes:



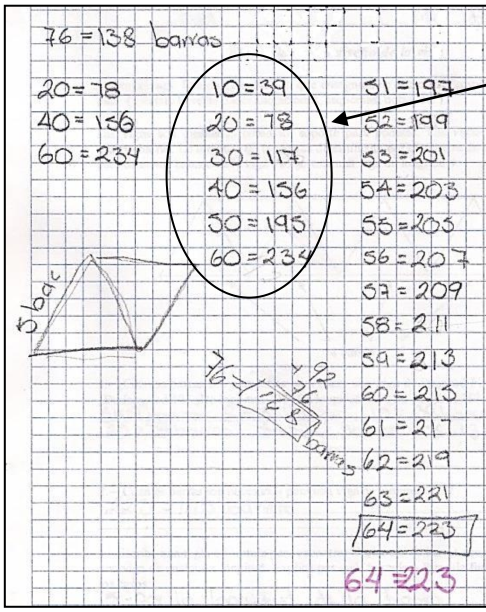

En estas imágenes "n" representa la longitud de la viga y se multiplica por 3 pues los estudiantes visualizan un triángulo por cada barra de la base de la viga. Luego suman la longitud de la viga disminuida en 1, esto se debe a que el número de barras superiores de la viga es una barra menos que su longitud.

Las operaciones que están en su hoja de trabajo corresponden a intentos de resolución y a distintas longitudes de viga, por ejemplo de longitud 223, 76, 10, 34, 8, 20,3 y 5.



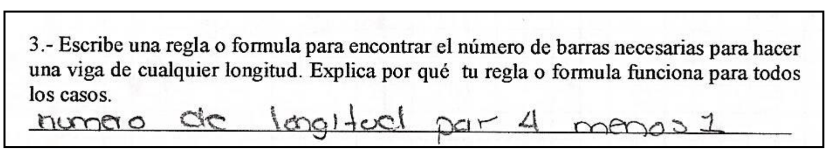

En esta imagen también "n" representa la longitud de la viga y se multiplica por 4 pues los estudiantes visualizan conjuntos de cuatro barras pero al final de cada viga se tiene que disminuir una barra porque solo se conforma un conjunto de tres barras.

No todos los estudiantes de segundo grado encuentran un procedimiento que generalice al patrón, utilizan una lista de conteo simple aumentando de cuatro en cuatro pero no les es útil para responder cuántas barras tendrá una viga de longitud mayor, como por ejemplo la de longitud 223 que se les solicita. Otros intentan aplicar una regla de tres pero no es funcional como tampoco lo es considerar como un referente la cantidad de barras de una viga conocida, duplicando o triplicando ésta para acercarse a la cantidad de barras de una viga de otra longitud. Observe la imagen:



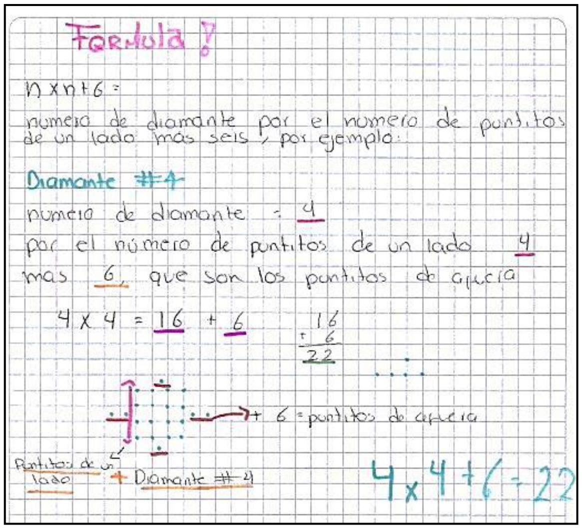

Consideran que una viga de longitud 10 requiere de 39 barras entonces, una viga de longitud 20 tendrá 78 y para una de longitud 30, suman las barras de la longitud 10 y 20 por esta razón su resultado es 117. Este procedimiento es inconsistente.

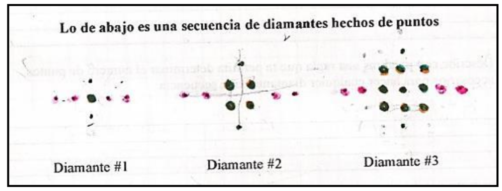
Los pocos que encuentran un procedimiento lo hacen a través de visualizar a la viga como conjuntos de cuatro barras como lo hicieron los estudiantes de primer grado. Observe la imagen:

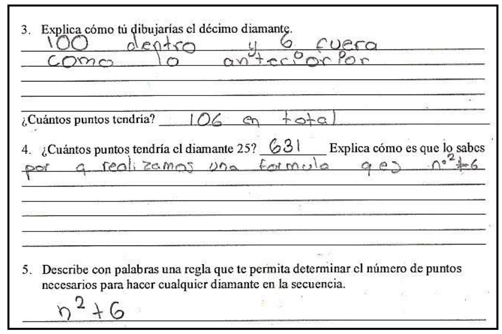

3.- Escribe una regla o formula para encontrar el número de barras necesarias para hacer una viga de cualquier longitud. Explica por qué tu regla o formula funciona para todos los casos.
numero de longitud par 4 menos 1

## El problema del Diamante de Puntos

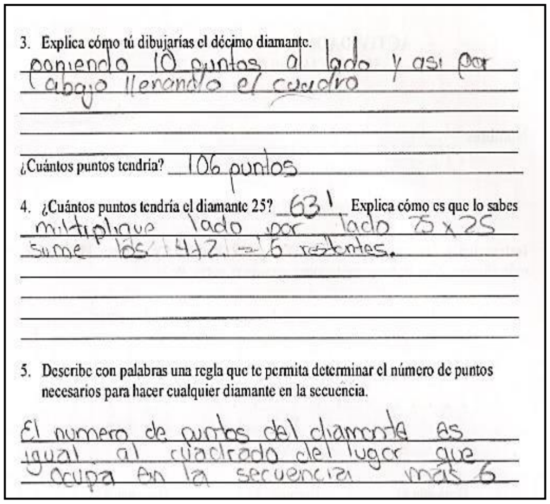
Casi todos los estudiantes de primer grado resuelven el problema, llegan a la generalización del patrón. Lo expresan en lenguaje natural, semialgebraico y dos de ellos en forma algebraica simplificada. Entre sus estrategias está la de distinguir con colores las regularidades del patrón. La observación minuciosa de los puntos de cada diamante les permitió avanzar hacia la detección de lo constante y lo cambiante lo que a su vez los condujo a encontrar una fórmula para hallar el número de puntos de cualquier diamante del patrón. Observe las imágenes:




Los estudiantes de segundo grado también encuentran el mismo procedimiento para generalizar el patrón como los de primero. Que consiste en relacionar el número de diamante o la posición que ocupa éste en la secuencia para luego multiplicarlo por sí mismo, dado que el conjunto de puntos visualmente representa un cuadrado al centro y el resultado de esta multiplicación es la cantidad de puntos que forman dicho cuadrado, luego a este resultado se le suman seis puntos que son los que permanecen constantes en cada diamante del patrón. Por estas razones ellos llegan a la fórmula: *nxn +6,* donde "n" es el número de diamante y también el número de puntos que tiene cada lado del cuadrado. Escriben sus fórmulas en lenguaje natural, excepto un alumno, y estas fórmulas se vuelven comprensibles por las operaciones numéricas que hacen en sus hojas de trabajo. Los alumnos que no logran desarrollar un procedimiento eficaz es porque intentan hacerlo a través de una regla de tres o tomando como referencia el número de puntos que conforman a diamantes conocidos o de los presentados en las hojas de trabajo. Observe las imágenes que muestran el procedimiento mencionado:

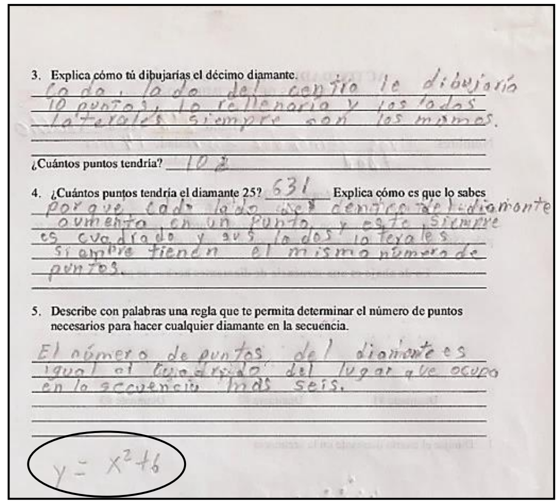


3. Explica cómo tú dibujarías el décimo diamante.
poniendo 10 puntos al lado y así por abajo llenando el cuadro

¿Cuántos puntos tendría? 106 puntos

4. ¿Cuántos puntos tendría el diamante 25? 631 Explica cómo es que lo sabes
multiplique lado por lado 25 x 25 sume los 412. = 6 restantes.

5. Describe con palabras una regla que te permita determinar el número de puntos necesarios para hacer cualquier diamante en la secuencia.
El numero de puntos del diamante es igual al cuadrado del lugar que ocupa en la secuencia más 6



3. Explica cómo tú dibujarías el décimo diamante.
Cada lado del centro le dibujaría 10 puntos, lo rellenaría y los lados laterales siempre son los mismos.

¿Cuántos puntos tendría? 10

4. ¿Cuántos puntos tendría el diamante 25? 631 Explica cómo es que lo sabes
porque cada lado del centro del diamante aumenta en un punto, y este siempre es cuadrado y sus lados laterales siempre tienen el mismo número de puntos.

5. Describe con palabras una regla que te permita determinar el número de puntos necesarios para hacer cualquier diamante en la secuencia.
El número de puntos del diamante es igual al cuadrado del lugar que ocupa en la secuencia más seis.

$y = x^2 + 6$

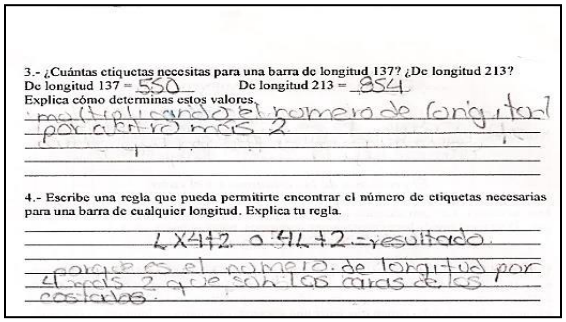
El problema del diamante de puntos fue mejor comprendido y desarrollado por los estudiantes de primer grado que los de segundo, pues fueron más estudiantes de primero que generalizaron el patrón dado que sus estrategias de resolución fueron más eficaces.

**El problema de las Estampas en el Cubo**

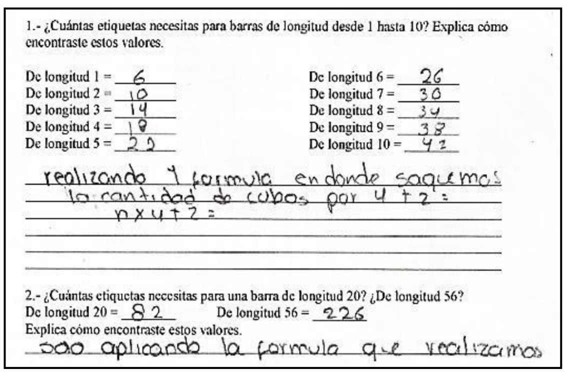
En un principio los estudiantes, de primero, usaron la estrategia de contar para determinar la cantidad de estampas para las primeras barras de cubos. Una par de estudiantes realizó dibujos de cubos en tres dimensiones para marcar las estampas en las caras, otros mencionan "*utilice unos cubos y les fui poniendo las estampas en las caras que están disponibles*". Otros realizaron listados de longitudes de barras consecutivas que mostraban la cantidad de estampas necesarias para cada longitud, al parecer notaron que incrementaba en cuatro de una longitud a otra.

La otra estrategia usada por los estudiantes fue la de repetición o recursión. En la primera pregunta del problema se le pide decir cuántas etiquetas o estampas necesita para barras de longitud desde 1 hasta 10, responden a éstas correctamente y la explicación que dan es: "*sumamos de 4 en 4 desde la primera longitud*".

Al final llegan a un procedimiento el cual manifiesta la generalización del patrón que consiste en multiplicar por cuatro la longitud de la barra de cubos, esto representa el número de estampas adheridas a las caras visibles de los cubos acoplados, excepto las caras de los cubos de los extremos de la barra, a los cuales se les adhiere a cada uno una estampa extra, por esta razón los estudiantes agregan el número 2 a fórmulas como las siguientes: *nx4+2 y Lx4+2,* se recuerda que ellos todavía utilizan la "x" para indicar la multiplicación o *4L+2*. Observe las imágenes:


3.- ¿Cuántas etiquetas necesitas para una barra de longitud 137? ¿De longitud 213?
De longitud 137 = 550 De longitud 213 = 854
Explica cómo determinas estos valores.
multiplicando el número de longitud por cuatro más 2

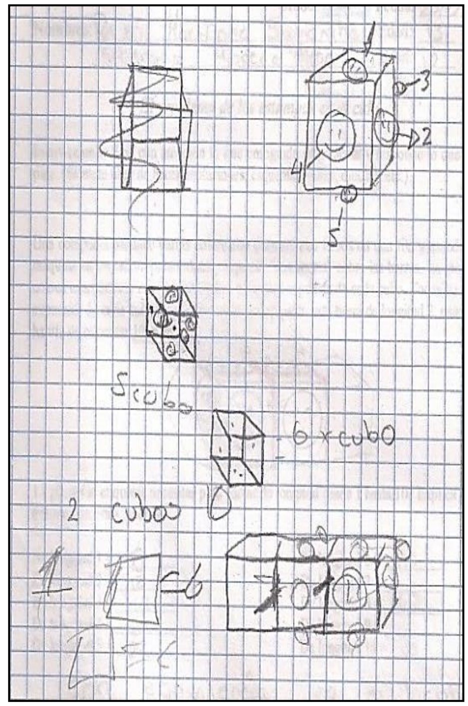
4.- Escribe una regla que pueda permitirte encontrar el número de etiquetas necesarias para una barra de cualquier longitud. Explica tu regla.
LX4+2 o 4L+2 = resultado
porque es el número de longitud por 4 más 2 que son las caras de los costados.


1.- ¿Cuántas etiquetas necesitas para barras de longitud desde 1 hasta 10? Explica cómo encontraste estos valores.

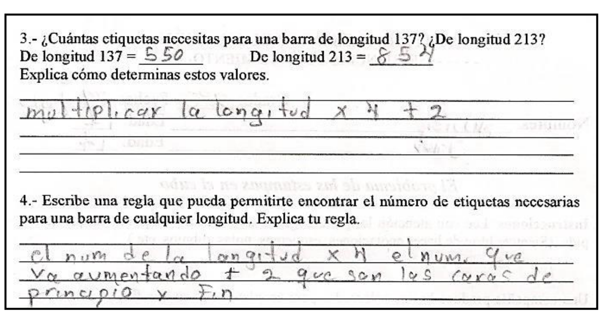
De longitud 1 = 6 De longitud 6 = 26
De longitud 2 = 10 De longitud 7 = 30
De longitud 3 = 14 De longitud 8 = 34
De longitud 4 = 18 De longitud 9 = 38
De longitud 5 = 22 De longitud 10 = 42

realizando 1 formula en donde saquemos la cantidad de cubos por 4 + 2: nx4+2 =

2.- ¿Cuántas etiquetas necesitas para una barra de longitud 20? ¿De longitud 56?
De longitud 20 = 82 De longitud 56 = 226
Explica cómo encontraste estos valores.
solo aplicando la formula que realizamos




Por otro lado, casi todos los estudiantes de segundo grado generalizan el patrón con el procedimiento que encontraron los de primero. Observan a la barra de cubos acoplados como un entero de cuatro lados, con un número de caras por lado igual a la longitud de la barra. Pero los cubos de los extremos tienen otra cara visible, por lo tanto se agregan dos estampas. Observe las imágenes:


3.- ¿Cuántas etiquetas necesitas para una barra de longitud 137? ¿De longitud 213?
De longitud 137 = 550 De longitud 213 = 854
Explica cómo determinas estos valores.
multiplicar la longitud x 4 + 2

4.- Escribe una regla que pueda permitirte encontrar el número de etiquetas necesarias para una barra de cualquier longitud. Explica tu regla.
el num de la longitud x 4 el num. que va aumentando + 2 que son las caras de principio y fin

1.- ¿Cuántas etiquetas necesitas para barras de longitud desde 1 hasta 10? Explica cómo encontraste estos valores.

| | |
|---|---|
| De longitud 1 = 6 | De longitud 6 = 26 |
| De longitud 2 = 10 | De longitud 7 = 30 |
| De longitud 3 = 14 | De longitud 8 = 34 |
| De longitud 4 = 18 | De longitud 9 = 38 |
| De longitud 5 = 22 | De longitud 10 = 42 |

Va de 4 en 4 y se le restan 2 caras del cubo y al cubo 4 y el ultimo cubo tiene una cara más cubierta y serian 5.

2.- ¿Cuántas etiquetas necesitas para una barra de longitud 20? ¿De longitud 56?

De longitud 20 = 84 De longitud 56 = 226

Explica cómo encontraste estos valores.

la longitud x 4 que es el num. que va aumentando en la secuencia + 2 que serian las caras que no se cubren del principio y final.

4.- Escribe una regla que pueda permitirte encontrar el número de etiquetas necesarias para una barra de cualquier longitud. Explica tu regla.

Multiplicar la longitud x 4 + 2.

En el problema del cubo, los jóvenes de ambos grados resuelven el problema a través de un procedimiento que generaliza al patrón y además lo expresan en la forma más simple de representarse, no en términos estrictamente algebraicos pero hacen abstracciones que los conducen a lo general desde lo particular. Se recuerda que no es nuestro objetivo que los estudiantes expresen la generalización de manera simbólica. Sin embargo, hay estudiantes que lo logran hacer aun con sus limitados conocimientos de álgebra.

Con respecto al objetivo de la primera fase del trabajo de campo y los resultados del análisis de ésta, consideramos más apropiado seguir el trabajo de campo sólo con estudiantes de primer grado debido a que sus recursos algebraicos son limitados, desarrollan estrategias de resolución creativas; en cambio, los estudiantes de segundo grado con un poco más de recursos algebraicos dejan fuera su intuición matemática.

## 3.2. ANÁLISIS DE LOS DATOS OBTENIDOS EN LA SEGUNDA FASE. ACTIVIDAD DE LOS ESTUDIANTES EN DOS AMBIENTES DISTINTOS: PAPEL y LÁPIZ Y MANIPULATIVO VIRTUAL

El análisis de la resolución de los problemas de generalización de patrones en la segunda fase se dividió en dos etapas. La primera se plantea en un ambiente de papel y lápiz en el cual sólo resuelven los estudiantes avanzados de dos grupos de primer grado y la segunda etapa, se plantea en un ambiente de manipulación virtual en donde el resto de los estudiantes de cada grupo resuelven, en esencia, los mismos los problemas.

Solo se plantearon los problemas: 1) *La Letra V*, 2) *Las Estampas en el Cubo* y 3) *El Diseño de la Viga.*

### ***1) El problema de la Letra*** **"V"**

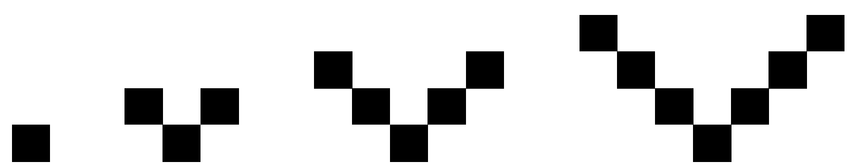


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4

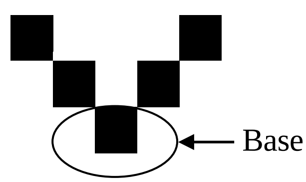
*La letra "V"*, al igual que los otros dos problemas, consiste en que el estudiante a través de contestar varias preguntas planteadas estratégicamente le permitieran llegar a responder cuestiones generales como por ejemplo: ¿Cómo puedes saber la cantidad de bloques para cualquier Letra V en el patrón? La pregunta cambia según de lo que trate el problema pero para contestarla se requiere de efectuar una abstracción hacia la generalización del patrón presentado. De realizarse ésta abstracción el estudiante podría expresar la generalización de un modo verbal (teorema en acto) o en el mejor de los casos y según su conocimiento matemático de forma simbólica.

***Ambiente de lápiz y papel*.** Recuérdese que en esta etapa participaron 15 alumnos por grupo (ver pág. 83 en metodología). Entre las cuestiones que interesa destacar están las siguientes. La mayoría de los estudiantes hacen listados de las cantidades de bloques que requiere cada Letra V del patrón, lo tratan de resolver a través de una regla de tres y al mismo tiempo lo confrontan con su listado, algunos alumnos se percatan que el número de bloques siempre resulta un número impar, otro estudiante al intentar dar una explicación proporciona un ejemplo utilizando una regla de tres, realiza bien el algoritmo pero no comprueba su resultado.

Dos estudiantes en este ambiente resuelven de la siguiente manera: utilizan dos sumandos para obtener los bloques de cualquier figura, el primero corresponde al número de la figura solicitado y el segundo sumando es el número de la figura menos uno; al realizar la adición obtenemos la cantidad de bloques de la figura solicitada. Por ejemplo, en la Fig. 38, el primer sumando sería 38 y el segundo sería 37, entonces, 38+37= 75 bloques, es el total de la Fig. 38.

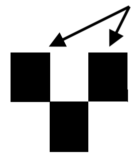
Un alumno resuelve así: Observa el número de la figura, a éste le resta 1 y el resultado lo suma a sí mismo; a lo que obtiene le suma 1 y esto último es la cantidad de bloques de la figura solicitada. Por ejemplo, para la Fig.15 sería 15-1=14, luego 14+14=28, 28+1=29 y estos son los bloques que tendrá la fig. 15.

Una alumna resuelve así: Le llama base al bloque del cual se desprenden los bloques laterales.




Ella sabe cuántos colocar en cada lateral, restándole uno al número de la figura solicitada. Ella no especifica lo que hace después. Sin embargo, en su respuesta a la pregunta 3, ella comienza diciendo: “*pues lo sumaría y una resta*…” lo que hace pensar que al saber la cantidad de bloques laterales, la sumará dos veces y le agregará el bloque de la base. Ella sabe que la cantidad de bloques de cada lateral es el mismo observe este dibujo hecho por ella para dar una explicación.

Fig. 2-1 =1



***Ambiente con manipulativo virtual***. Participaron 59 alumnos en total. De ellos los más destacados en la resolución del problema de la Letra V contestan lo siguiente:

Estudiantes de los dos grupos consideran la cantidad de bloques laterales igual al número de la figura menos uno y luego agregan un bloque para obtener el total de éstos en la figura.

Una estudiante dice: "*multiplicas el número de la secuencia* [se refiere al número de la figura] *por dos y disminuir un bloque*". Esto no es otra cosa que 2n-1: en donde *n* es el número de la figura.

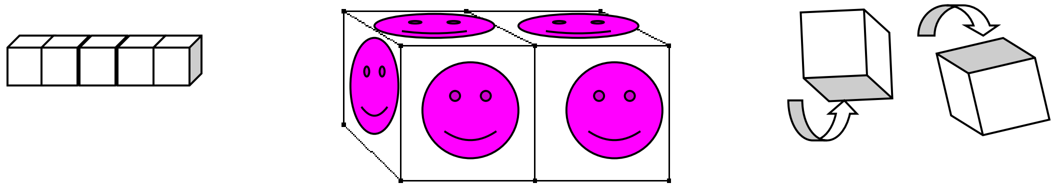
Algunos estudiantes notan que hay un aumento de bloques, dos en cada letra siguiente, esto les hace pensar que para encontrar los bloques totales de cualquier Letra V, solo hay que multiplicar por 2. (Esta resolución incorrecta es recurrente).

Otro estudiante resuelve y escribe lo siguiente: "*multiplicando la cantidad x 2 menos 1*". Cuando dice "*cantidad*" se refiere al número de la figura, esto se deduce al revisar su hoja de trabajo.

El mayor número de estudiantes realiza una lista que incluye dos datos: el número de figura o Letra V y los bloques que necesita la construcción de cada una. Éste último dato se los proporciona la herramienta de conteo del manipulativo virtual que emplearon para este problema. Utilizan la estrategia de multiplicar el número de figura por dos para encontrar resultados de cualquier número de figura y le restan uno. También usan la estrategia de tomar como punto de partida la cantidad de bloques de una figura para encontrar una más lejana. Ejemplo: "*sí la figura 5 tiene 9 bloques entonces, para encontrar la figura 15 multiplico 9x3= 27 y 27 serán los bloques de la figura 15*".

## *2) El problema de las Estampas en el Cubo*

Una compañía produce barras acoplando cubos y usando una máquina estampadora para colocar estampas “sonrientes” sobre las barras. La máquina coloca exactamente una estampa sobre cada cara expuesta de cada cubo. Todas las caras expuestas de cada cubo tienen que tener una estampa, por ejemplo, en esta barra de longitud 2, se necesitarían 10 estampas ¿estás de acuerdo? ________ ¿Por qué?______________________________



Barra de longitud 2 (dos cubos)

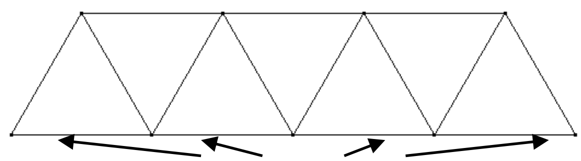
Una de las preguntas clave fue ¿Cómo le dirías a alguien cómo saber cuántas estampas se necesitarían para cualquier longitud de la barra?

***Ambiente de lápiz y papel*. S**iete de los quince participantes resuelven satisfactoriamente aportando dos estrategias, la primera de éstas tuvo mayor aplicación. Consiste en ver toda la barra de cubos acoplados (de cierta longitud) como una barra de cuatro lados en la que la medida de longitud es igual al número de estampas que tendrá cada lado. Por ésta razón los estudiantes multiplican el número de longitud por cuatro y al resultado se le agregan dos estampas que son las de los extremos de dicha barra. La otra estrategia es que a la barra de cubos acoplados (de cierta longitud) se visualiza en secciones. Es decir, los cubos intermedios (son todos los cubos acoplados excepto el primero y el último, que puede expresarse como: número de longitud menos dos) se multiplican por cuatro, por la misma razón que en la estrategia anterior, y al resultado de esta multiplicación se le agregan diez estampas, cinco del primer cubo y cinco del último.

***Ambiente con manipulativo virtual***. En este ambiente, 66/69 estudiantes resolvieron las hojas de trabajo. Aproximadamente la mitad de los estudiantes no logran responder completamente las preguntas, debido a falta de tiempo por inconvenientes escolares. De los alumnos que contestaron todo, la estrategia que utilizaron fue la de multiplicar la longitud de la barra por cuatro y sumarle dos al resultado. También surgió entre el resto de los estudiantes la otra estrategia que secciona los cubos intermedios y los extremos. Una parte de los estudiantes a quienes les falto responder sus hojas de trabajo, después de una revisión, estaban en posibilidades de terminar satisfactoriamente, ya que el razonamiento en el cual se apoyaban era correcto.

### *3) El problema del Diseño de la Viga*

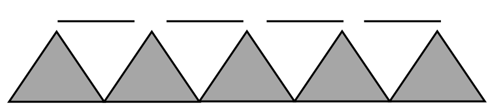
Las vigas son diseñadas como un soporte para puentes. Las vigas son construidas usando barras. La longitud de la viga es determinada por el número de barras necesarias para construir la base de la viga. Abajo esta una viga de longitud 4.



Base de la Viga (4 barras)

Su pregunta clave fue: ¿Cómo le explicarías a alguien cómo encontrar el número de barras necesarias para hacer una viga de cualquier longitud que se le solicite?

***Ambiente de lápiz y papel*.** El procedimiento más usado (11 estudiantes lo desarrollan) es el de visualizar a la viga en dos conjuntos, el primero es una conformación de triángulos y el otro conjunto son las barras superiores de la viga. Observe el ejemplo de una viga de longitud 5.

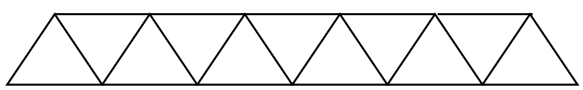


Las observaciones que hacen los estudiantes son: a) la cantidad de triángulos será igual al número de longitud de la viga, b) la cantidad total de barras que se necesitan para tal cantidad de triángulos se obtiene al multiplicar la longitud de la viga por tres, dado que cada triángulo está conformado por tres barras y c) las barras superiores son un número menor al número de longitud de la viga. Por ejemplo, una viga de longitud 70, tendrá 69 barras superiores.

En general, su procedimiento es multiplicar la longitud de la viga por tres y sumarle la longitud de la viga menos uno para obtener la cantidad total de barras necesarias para cualquier longitud de viga.

Otro procedimiento lo utilizan dos estudiantes, el cual consiste en lo siguiente: textualmente de las hojas de trabajo de los alumnos: "*Sumas los triángulos de abajo y de arriba, los multiplicas por 2 y luego le sumamos 1 viga que faltaba del final*"

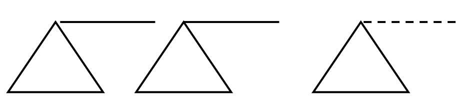
Uno de los estudiantes hace un dibujo de una viga de longitud 6 y las operaciones que le acompañan como sigue:



6+5= 11 x2= 22 + 1 = 23

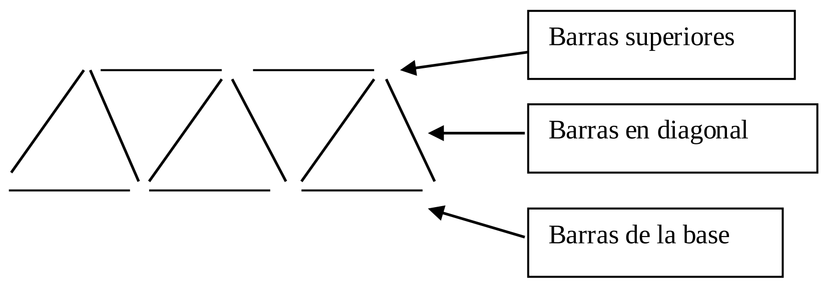
El procedimiento, en relación al algoritmo es correcto. Es decir, utilizando su ejemplo, que se refiere a una viga de longitud 6, los estudiantes suman seis triángulos más cinco triángulos superiores, obtienen 11, esta cantidad la multiplican por dos y obtienen 22 a éste total le suman una barra la cual aclaran que es "*la del final*". Algebraicamente hablando sería: *2(n+n-1) +1* que simplificada sería: *4n-1*. En donde *n* es la longitud de la viga.

La expresión *4n-1*, es utilizada por dos estudiantes y ésta hace referencia a una visualización de la viga de la siguiente manera:



Esta visualización agrupa a la viga en conjuntos de cuatro barras excepto el último conjunto que sólo tiene tres barras. Por esta razón en la expresión algebraica se resta una barra.

***Ambiente con manipulativo virtual***. En esta sesión participan 64/69 estudiantes. Por otro lado, lo que arroja la revisión de las hojas de trabajo bajo este ambiente de aprendizaje es que casi tres cuartas partes de los alumnos (44) llegan a dos procedimientos que generalizan al patrón. Hay una diferencia mínima, entre un procedimiento y otro, en cuanto al número de alumnos que los desarrollan. Uno de los procedimientos que encuentran es el de ver a la viga conformada en tres partes que son las barra de la base, las barras en diagonal y las barras superiores. Observe la imagen de una viga de longitud 3:




Para saber la cantidad de barras en la base, se tiene que saber la longitud de la viga. Luego para saber cuántas barras hay en diagonal, los estudiantes multiplican la longitud de la viga por dos, puesto que son dos barras las que se sostienen por cada barra de la base y para conocer la cantidad de barras superiores hay que restar uno a la longitud de la viga. Se suman estos tres valores para obtener el total de barras de cualquier viga. El desarrollo de este procedimiento depende de conocer la longitud de la viga.

El otro procedimiento encontrado fue el mismo que hallaron los estudiantes avanzados que se mencionó en el ambiente de lápiz y papel. El cual consiste en visualizar a la viga como una conformación de triángulos como un primer conjunto y otro conjunto que se conforma de las barras superiores de la viga. Se debe mencionar que el manipulativo no proporciona barras en forma individual sino que el estudiante tiene que construir la viga a través de triángulos predeterminados por el manipulativo. Esta puede ser a razón por la cual los estudiantes llegan a tal procedimiento. Es decir, el manipulativo influyó para desarrollar este procedimiento.

## 3.3. RESULTADOS DEL ANÁLISIS DE LOS DATOS OBTENIDOS DEL TRABAJO DE CAMPO FORMAL

Recapitulando un poco acerca del trabajo de campo realizado para la conformación de esta tesis. Se acordó que la primera y segunda fases conformarían el primer ciclo del trabajo de campo que se denominó exploración piloto. Luego la tercera y cuarta fases pertenecen al segundo ciclo que se nombró exploración formal, el cual es al que damos mayor énfasis. Observe la *Imagen 1* en el capítulo de metodología.

La exploración piloto, como su nombre lo dice nos sirvió de plataforma para la toma de decisiones en relación a las modificaciones, principalmente de carácter pedagógico, que se les hicieron a las actividades de aprendizaje que tienen que ver con la generalización de patrones las cuales fueron instrumentadas en la tercera fase. Esta tercera fase desenvuelta en un ambiente de aprendizaje donde estudiantes avanzados sólo usaron lápiz y papel para la resolución de los problemas planeados, también tuvo la función de plataforma para adecuar lo mejor posible las actividades de aprendizaje (en esencia las mismas) que serían abordadas por estudiantes de bajo desempeño en matemáticas pero en esta ocasión con la mediación de una herramienta de aprendizaje virtual (cuarta fase), ofrecida como soporte para conseguir la resolución de los problemas a través del desarrollo de un procedimiento que generalizara el patrón en cuestión.

El análisis de las actividades de aprendizaje en el ciclo de la exploración formal nos permite ensalzar el logro de uno de los objetivos de esta investigación y la confirmación de las hipótesis que tienen que ver, primero, con el acto de compartir el conocimiento generado (rutas de aprendizaje) para conformar clases incluyentes en donde el aprendizaje se dé entre a pares; y segundo, con respecto a la mediación de la tecnología digital que contribuye al fortalecimiento de procesos de enseñanza y aprendizaje.

### 3.3.1. ANÁLISIS DE LOS DATOS OBTENIDOS EN LA TERCERA FASE. ACTIVIDAD DE LOS ESTUDIANTES EN EL AMBIENTE DE LÁPIZ Y PAPEL

Las actividades matemáticas planteadas a los estudiantes fueron seis, todas en torno a la generalización de patrones partiendo de un nivel de complejidad sencillo hasta uno más complejo. Enseguida se enlistan, se muestra el problema y después se describen los resultados de la resolución de éstas por parte de los estudiantes participantes. Se recuerda que puede consultar las hojas de trabajo tal y como les fueron presentadas a los estudiantes en el Anexo A para una mayor comprensión del análisis que se hace aquí.

1. La Letra ¨V¨
2. El Diseño de la Viga
3. Las Estampas en el Cubo
4. Crecimiento de Azulejos I
5. Crecimiento de Azulejos II
6. El Crecimiento de Pilas

El objetivo principal de este análisis fue descubrir cómo estudiantes de primer grado de secundaria, avanzados académicamente, llegan a resolver problemas en los cuales se les presenta un patrón de figuras y resolver el problema planteado implica desarrollar un procedimiento eficaz que los conduzca a la generalización de dicho patrón.

Cabe decir, que todos los estudiantes que participaron en esta tercera fase, que consistió en resolver los problemas en un ambiente de lápiz y papel, son alumnos que tenían siete semanas de haber iniciado el primer grado de secundaria. Elegidos intencionalmente con esta característica por carecer de conocimientos algebraicos avanzados. Enseguida se presentan, esbozados, cada uno de los problemas presentados a los estudiantes y los resultados de su respectivo análisis.

***1) El problema de la Letra* "V"**

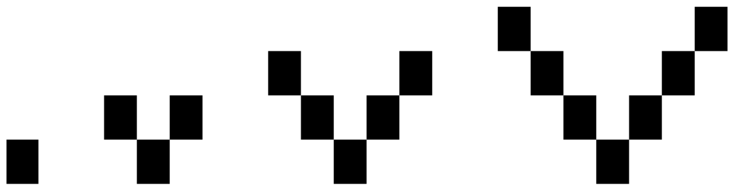
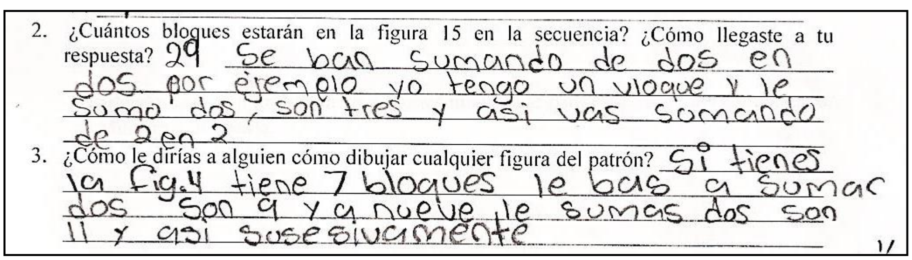


Fig.1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4

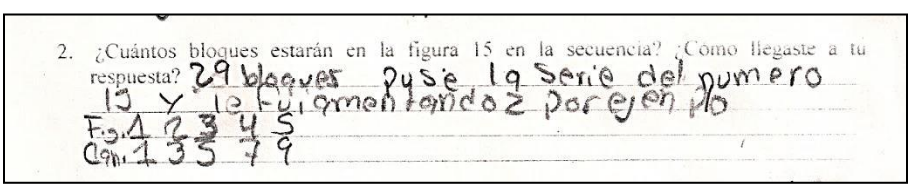
Este problema dio inicio a la tercera fase de la exploración sobre la generalización de patrones. Una primera solicitud que se les hace a los estudiantes en todos los problemas es observar detenidamente las figuras o imágenes que se les presentan en sus hojas de trabajo.

Al revisar cada una de las hojas de trabajo de los estudiantes quedó demostrado que muchos de los estudiantes lograron resolver el problema de diferentes maneras. Después de observar y contar los bloques que forman cada una de las figuras presentadas como Letras V, ellos se dan cuenta que aumenta dos bloques de una figura y la sucesiva. Observe algunas de sus respuestas:



2. ¿Cuántos bloques estarán en la figura 15 en la secuencia? ¿Cómo llegaste a tu respuesta? 29 Se ban sumando de dos en dos por ejemplo yo tengo un vloque y le sumo dos, son tres y así vas sumando de 2 en 2

3. ¿Cómo le dirías a alguien cómo dibujar cualquier figura del patrón? Si tienes la fig.4 tiene 7 bloques le bas a sumar dos son 9 y a nueve le sumas dos son 11 y así susesivamente

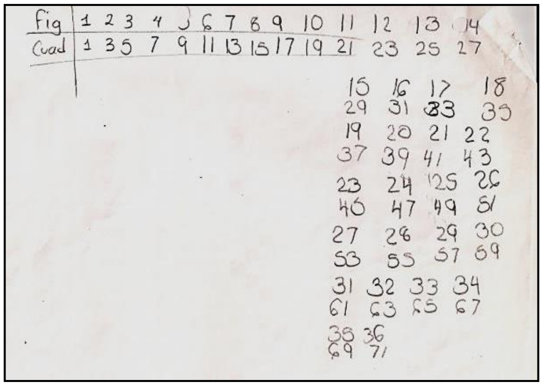


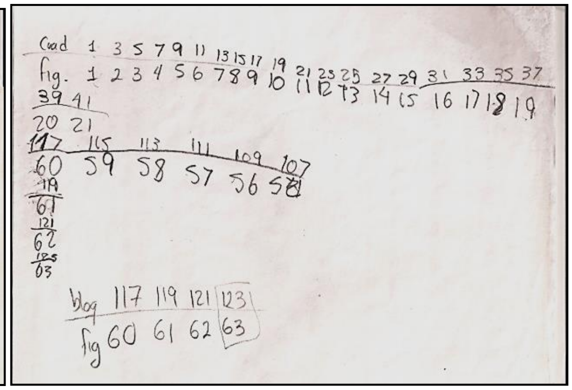
2. ¿Cuántos bloques estarán en la figura 15 en la secuencia? ¿Cómo llegaste a tu respuesta? 29 bloques puse la serie del numero 15 y le fui amentando 2 por ejemplo

F. 1 2 3 4 5

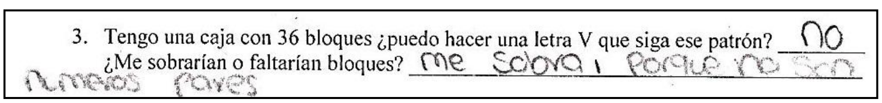
Can. 1 3 5 7 9

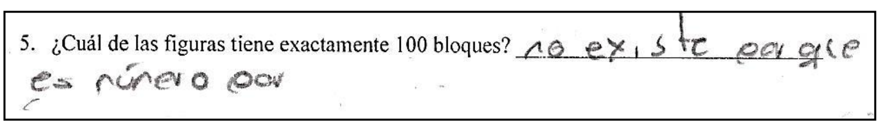
Su siguiente paso fue realizar conteos sencillos y listados que les permitieran saber la cantidad de bloques para Letras V más cercanas a las presentadas.

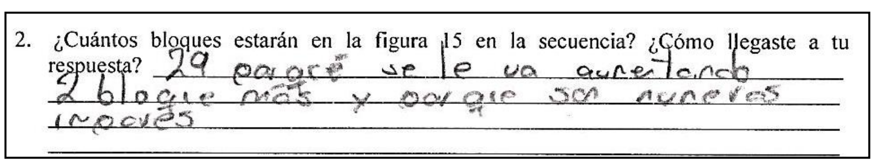


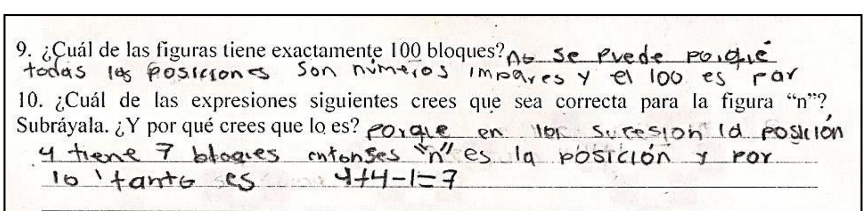


Algunos estudiantes detectan en sus listados, aunque no necesariamente por éstos, una característica del patrón que es valiosa en cierto modo, para validar la cantidad de bloques que tiene cierta Letra V. La característica es que la cantidad de bloques que forman una Letra V es siempre un número *impar.* Ellos formulan la hipótesis de que no puede haber Letras V que estén conformadas por una cantidad de bloques que sea un número par.


3. Tengo una caja con 36 bloques ¿puedo hacer una letra V que siga ese patrón? no
¿Me sobrarían o faltarían bloques? me sobra, porque no son numeros pares


5. ¿Cuál de las figuras tiene exactamente 100 bloques? no existe porque es número par


2. ¿Cuántos bloques estarán en la figura 15 en la secuencia? ¿Cómo llegaste a tu respuesta? 29 porqué se le va aumentando 2 bloque más y porque son numeros impares


9. ¿Cuál de las figuras tiene exactamente 100 bloques? no se puede porque todas las posiciones son números impares y el 100 es par
10. ¿Cuál de las expresiones siguientes crees que sea correcta para la figura "n"? Subráyala. ¿Y por qué crees que lo es? porque en la sucesion la posición 4 tiene 7 bloques entonses "n" es la posición y por lo tanto es 4+4-1=7

Pero los listados, que no es más que una estrategia de recursión, se vuelven obsoletos cuando se trata de encontrar la cantidad de bloques para un número mayor de figura de Letra V. Es decir, para llegar a generalizar el patrón. Y es a partir de ahí, donde la capacidad del estudiante es puesta a prueba para idear, con todos sus muchos o pocos recursos, una manera artesanal de cómo encontrar la cantidad de bloques necesarios para formar cualquier Letra V del patrón. En adelante se mostrarán las distintas maneras o caminos que siguieron los estudiantes para dar solución a este cuestionamiento.

En general, hubo dos procedimientos para resolver el problema de la Letra V que desarrollaron los alumnos participantes. Se presentará evidencia de cada uno de éstos. Se muestran imágenes del trabajo de los estudiantes de las distintas escuelas.

*El Primer procedimiento* para resolver el problema de la Letra V, se trata de separar a la Letra V en dos partes y éstas están estrechamente relacionadas con el número de figura o el número de Letra V, algunos estudiantes también lo llaman "la posición". Es decir, el lugar que ocupa en el patrón o secuencia. Observe como ellos la separan:

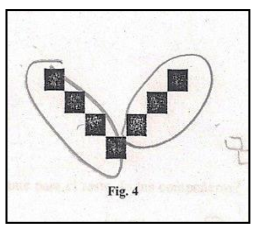
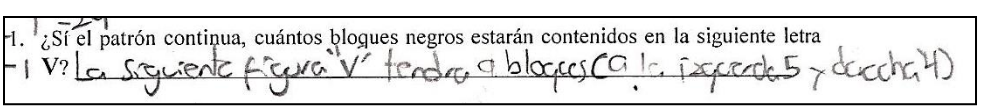


Fig. 4

Se tomará como referencia la imagen que se presenta para apoyar la explicación que a continuación se da. Ellos se dieron cuenta que al separar la Letra V en dos partes, el lado izquierdo de ella está formado por un número de bloques igual al número de figura, en este caso 4. El otro lado, el derecho, es un número menos que el número de la figura. Es decir, 3.  Así lo explica un estudiante para realizar la fig. 5:


1. ¿Sí el patrón continua, cuántos bloques negros estarán contenidos en la siguiente letra V? La siguiente figura "V" tendra 9 bloques (a la izquierda 5 y derecha 4)

Él dice que para la fig. 5, tendría 9 bloques. Se colocan a la izquierda 5 y a la derecha 4. Otros estudiantes lo explican en otros términos, de manera muy natural y apegada a su procedimiento. Observe:

8. ¿Cómo podrías saber el número de bloques para cualquier letra V en este patrón?
sumo la figura que pide con la misma cantidad menos uno.

6. ¿Cómo podrías saber el número de bloques para cualquier letra V en este patrón?
contando primero un lado con todo y base y despues el otro ~~de~~ restando un numero

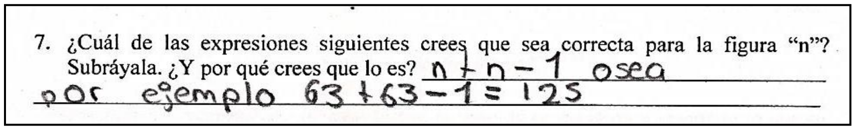
2. ¿Cuántos bloques estarán en la figura 15 en la secuencia? ¿Cómo llegaste a tu respuesta?
R=29 bloques, sumando la posición que busco más la posición anterior a la que quiero encontrar

Hay una pregunta en sus hojas de trabajo que les pide encontrar el número de bloques para la figura 21 y la 63. Ésta y otras preguntas les exigieron dejar procedimientos de conteo sencillos para optar por otros más prácticos que les permitiera determinar el número de bloques para una figura mucho mayor. En el caso de la fig. 21 y la 63, los estudiantes imaginaron la letra V con 21 bloques en el lado izquierdo y 20 bloques en el lado derecho. Al sumarlos resultan 41 bloques que son los que forman la fig.21 o la Letra V número 21. Esta estrategia resulta ser la más frecuente para los estudiantes con limitados conocimientos algebraicos. Las siguientes imágenes dejan claro que los estudiantes contestan la pregunta bajo la visualización de la Letra V descrita anteriormente.

4. ¿Cuántos bloques habría que tener para hacer la figura 21 o la figura 63?
21 y 20 bloques = 41 bloques / 63 y 62 = 125

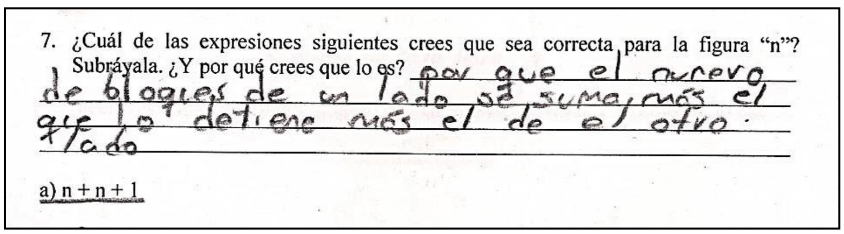
4. ¿Cuántos bloques habría que tener para hacer la figura 21 o la figura 63?
21 y 20 y la fig es: 41 son 63 y 62 y son 125 cuadritos

En los mejores casos llegan a expresar su hallazgo así:


7. ¿Cuál de las expresiones siguientes crees que sea correcta para la figura "n"? Subráyala. ¿Y por qué crees que lo es? n + n − 1 osea por ejemplo 63 + 63 − 1 = 125

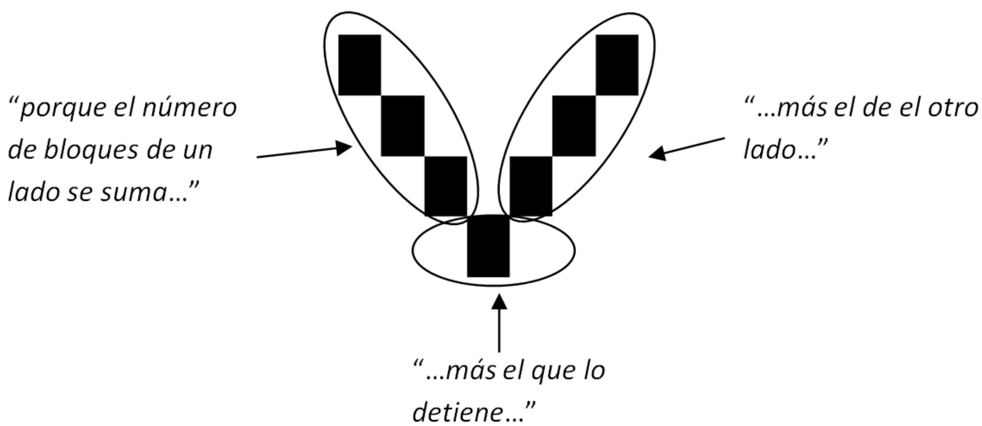
Cabe decir que no se esperaba que los estudiantes respondieran con una regla algebraica a la pregunta. Una respuesta como la presentada es aceptable y un paso importante hacia la generalización.

*El segundo procedimiento* que encuentran para resolver el problema de la Letra V es dividir la letra en tres partes. Las respuestas de un estudiante permitieron entender este procedimiento.


7. ¿Cuál de las expresiones siguientes crees que sea correcta para la figura "n"? Subráyala. ¿Y por qué crees que lo es? por que el numero de bloques de un lado se suma, más el que lo detiene más el de el otro. lado

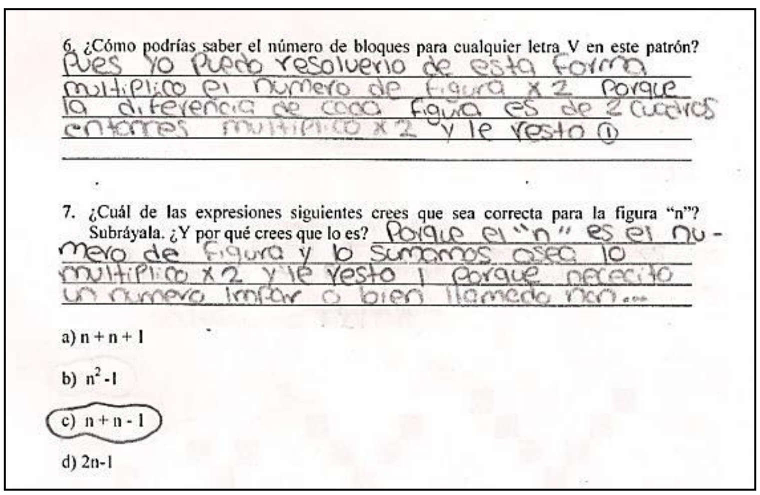
a) n + n + 1

Esto indica que el estudiante divide a la Letra V como sigue según su descripción:




El estudiante se percata que hay dos partes iguales y un único bloque que permanece en la parte inferior. Esto puede ser lo que le hizo elegir la expresión: ***n*+*n*+1** para hallar la cantidad de bloques de cualquier Letra V. Considerando a las "*n*" como las partes iguales y el 1 como el bloque inferior. Luego, sí se considera a la "*n*" como el número de la figura o Letra V, existiría un error pues, en este caso, la imagen presentada arriba corresponde a la fig. 4 y las partes iguales de la fig. 4 son de tres bloques. Esto quiere decir que el estudiante no las relacionó con el número de la figura, en otras palabras no considera a la "*n*" como el número de la figura. Por otro lado, hay que decir que la literal “*n*” o el término “enésimo” fueron incomprendidos por muchos estudiantes. Hay que recordar que son estudiantes que ingresan al nivel secundaria. Gran parte de ellos lograron acercarse a la noción de estos términos en el transcurso de las sesiones y otros no del todo. Sin embargo, el discernimiento del estudiante fue lo más importante porque no es prioridad que los estudiantes establezcan expresiones algebraicas avanzadas. Aun así, sí el estudiante hubiese tenido más conocimientos de álgebra es muy posible que al continuar su exploración hubiesen aumentado las posibilidades de llegar a una generalización.

La expresión de su representación de la Letra V pudo haber sido *2(n-1)+1* de manera que al simplificarse resultaría equivalente a *2n-1*. Que fue la expresión a la que llegaron estudiantes, al parecer muy avanzados, cuando iniciaban la resolución de las primeras preguntas en las hojas de trabajo. Observe algunas de sus respuestas:


6. ¿Cómo podrías saber el número de bloques para cualquier letra V en este patrón?
Pues yo puedo resolverlo de esta forma multiplico el número de figura x 2 porque la diferencia de cada figura es de 2 cuadros entonces multiplico x 2 y le resto 1

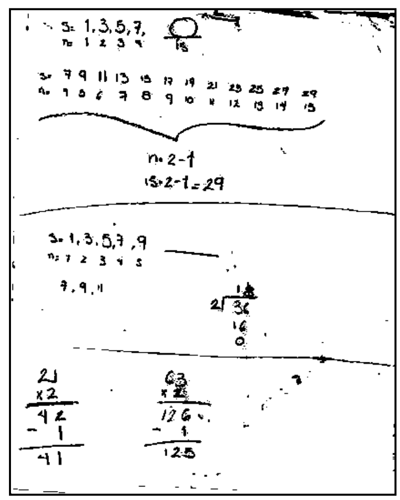
7. ¿Cuál de las expresiones siguientes crees que sea correcta para la figura “n”? Subráyala. ¿Y por qué crees que lo es? Porque el “n” es el numero de figura y lo sumamos osea lo multiplico x 2 y le resto 1 porque necesito un numero impar o bien llamado non...

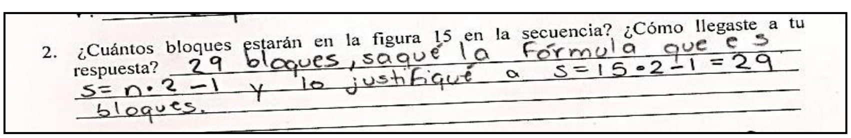
a) n + n + 1

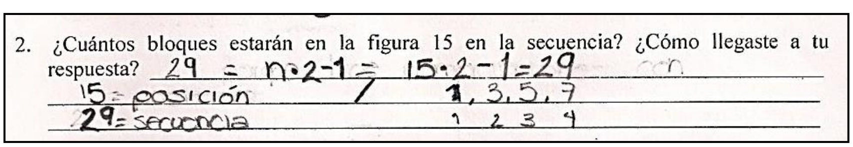
b) $n^2$ - 1

c) n + n - 1

d) 2n-1

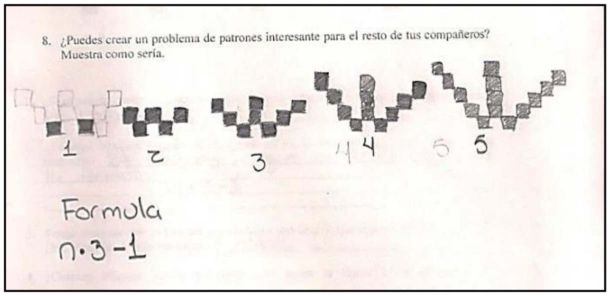




2. ¿Cuántos bloques estarán en la figura 15 en la secuencia? ¿Cómo llegaste a tu respuesta? 29 bloques, saqué la fórmula que es S = n · 2 - 1 y lo justifiqué a S = 15 · 2 - 1 = 29 bloques.


2. ¿Cuántos bloques estarán en la figura 15 en la secuencia? ¿Cómo llegaste a tu respuesta? 29 = n·2-1 = 15·2-1 = 29
15 = posición 1, 3, 5, 7
29 = secuencia 1 2 3 4

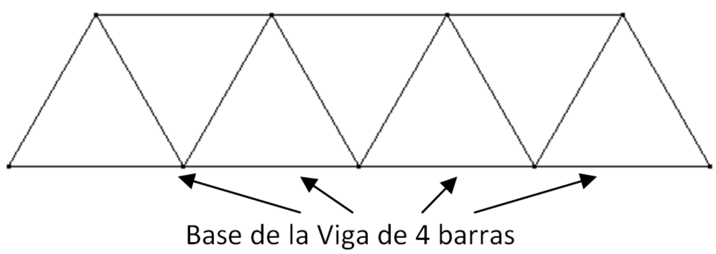
Los estudiantes que lograron llegar al nivel de expresar de manera general la expresión tienen una mayor comprensión de lo que significa el término “*n*” el cual emplean correctamente para representar cualquier número de figura o Letra V y la “*s*” que significa secuencia para ellos, que no es otra cosa más que la cantidad de bloques necesarios para una figura o Letra V dada.

Al final de las hojas de trabajo se les pide crear de forma autónoma un problema de patrones. De todos los estudiantes que atendieron la solicitud hubo un alumno que planteó uno muy parecido al que habían resuelto y además escribió la fórmula para obtenerlo. Observe:



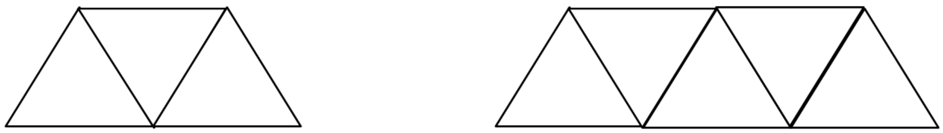

### *2) El problema del Diseño de la Viga*

Las vigas son diseñadas como un soporte para puentes. Las vigas son construidas usando barras. La longitud de la viga es determinada por el número de barras necesarias para construir la base de la viga. Abajo esta una viga de longitud 4.

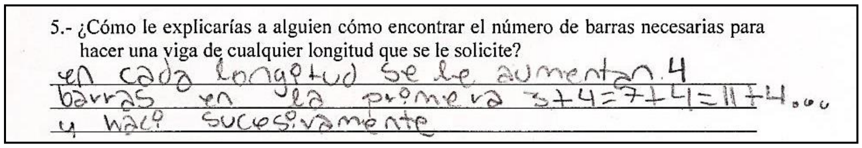



Para dar solución a la pegunta general de ¿cuántas barras son necesarias para hacer una viga de longitud “*n*”? Los estudiantes recurrieron a diferentes procedimientos que enseguida describiremos. Cada procedimiento y expresión algebraica a la que llegan los estudiantes está estrechamente relacionada con la visualización del problema.

En el *primer procedimiento* ellos detectan (en la imagen presentada en sus hojas de trabajo, la misma que se muestra arriba, y a través de las primeras preguntas) que una viga de longitud 1 está formada por sólo tres barras, pero sí su longitud es de 2 en adelante se van incrementando cuatro barras cada vez que se incrementa uno a su longitud. Observe los ejemplos:



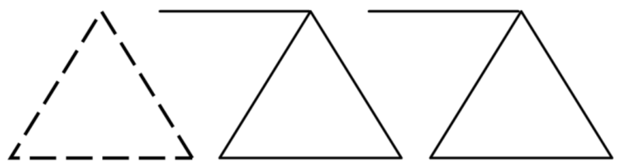
Viga de longitud 2 = 7 barras          Viga de longitud 3 = 11barras



5.- ¿Cómo le explicarías a alguien cómo encontrar el número de barras necesarias para hacer una viga de cualquier longitud que se le solicite?

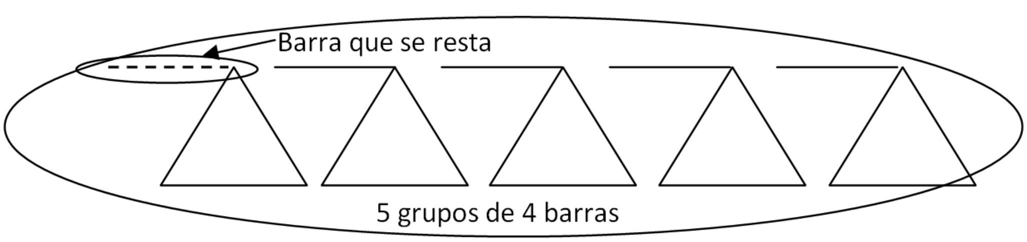
en cada longitud se le aumentan 4
barras en la primera 3+4=7+4=11+4...
y haci sucesivamente

Su idea principal es: la viga de longitud 1 se forma de 3 barras y las siguientes de 4 barras lo que los lleva a visualizar el problema así:

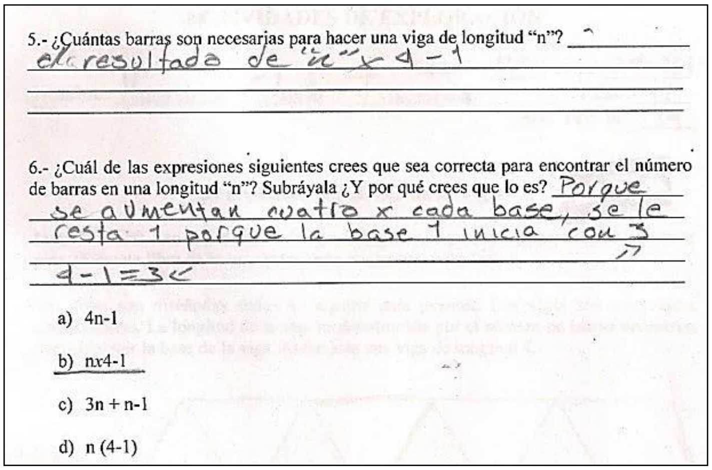


Viga de longitud 3

Tomemos por ejemplo la viga de longitud 5 para apoyar la explicación siguiente: ellos forman cinco grupos de 4 barras cada uno de derecha a izquierda. Son cinco grupos porque la longitud de la viga es de 5, lo que quiere decir que es importante tomar en cuenta el valor de la longitud puesto que éste les indicara cuántos grupos se pueden formar. Además que si se observa cuántas barras hay en la base de la viga se sabrá cuál es su longitud. Luego, ellos agregan una barra al inicio para que se cumpla esta condición lo que lleva a la expresión: *4n* (la *n* representa la longitud de la viga) que al sustituir el valor de *n* se obtienen las 20 barras. Pero bajo la idea principal no existe la barra inicial. Por lo tanto, a la expresión se le tiene que restar la barra que se agregó y entonces la expresión quedaría así: *4n-1*.



Observe las respuestas de los estudiantes:



5.- ¿Cuántas barras son necesarias para hacer una viga de longitud "n"? el resultado de "n" x 4 - 1

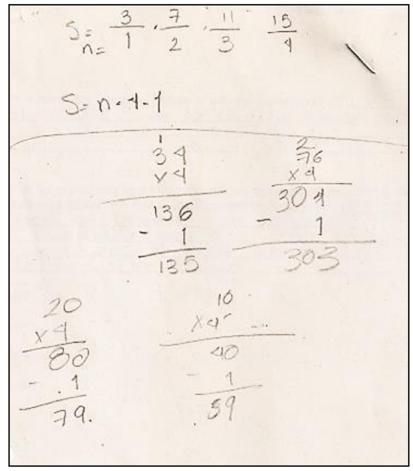
6.- ¿Cuál de las expresiones siguientes crees que sea correcta para encontrar el número de barras en una longitud "n"? Subráyala ¿Y por qué crees que lo es? Porque se aumentan cuatro x cada base, se le resta 1 porque la base 1 inicia con 3
4 - 1 = 3

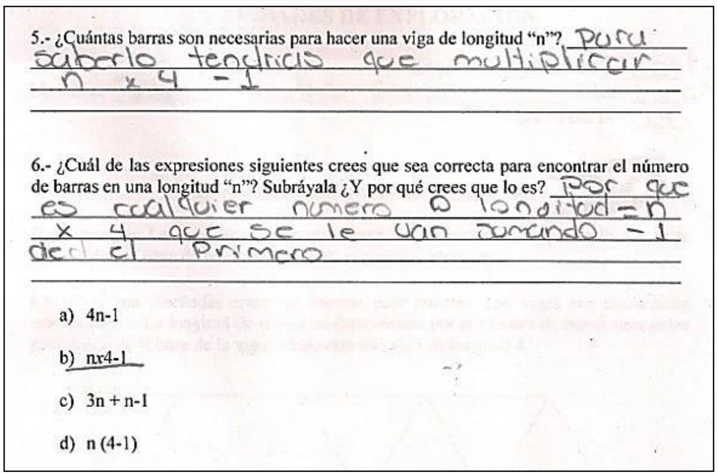
a) 4n-1

b) nx4-1

c) 3n + n-1

d) n (4-1)



5.- ¿Cuántas barras son necesarias para hacer una viga de longitud "n"? Para saberlo tendrías que multiplicar n x 4 - 1

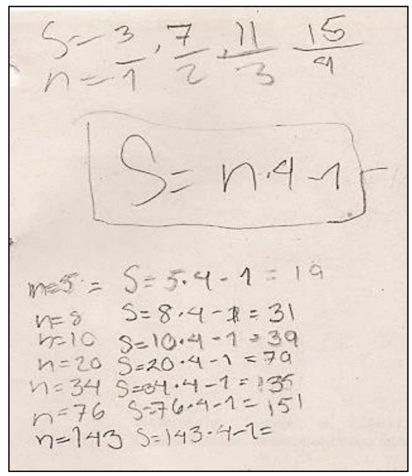
6.- ¿Cuál de las expresiones siguientes crees que sea correcta para encontrar el número de barras en una longitud "n"? Subráyala ¿Y por qué crees que lo es? Por que es cualquier número o longitud = n x 4 que se le van sumando - 1 desd el Primero

a) 4n-1

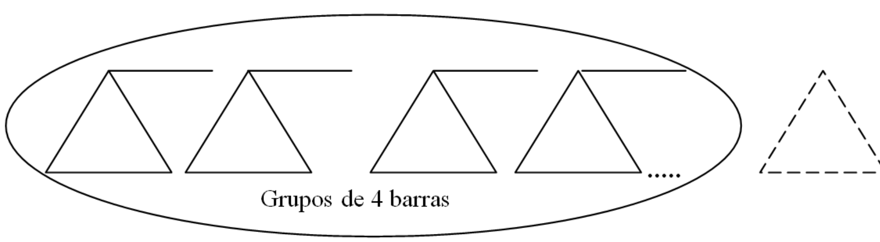
b) nx4-1

c) 3n + n-1

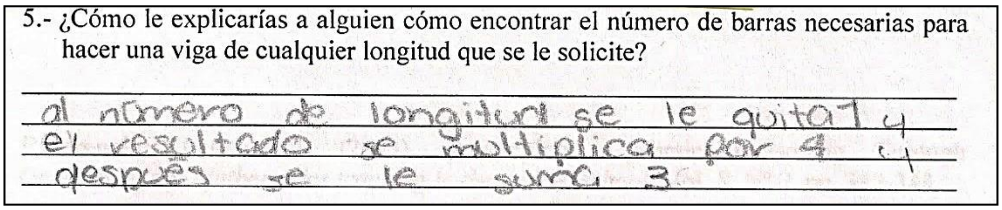
d) n (4-1)



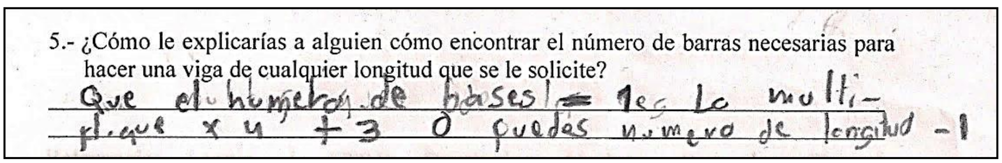

El *segundo procedimiento* es una variante del anterior que conduce a una expresión equivalente. Los estudiantes que resuelven a través de este procedimiento también forman grupos de 4 barras, excepto las últimas tres barras de la viga. Observe el ejemplo:



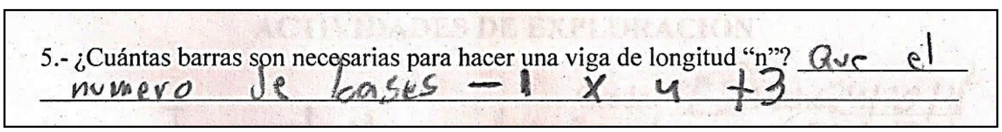

Para esta visualización mental que hacen los estudiantes también es importante considerar el valor de la longitud de la viga, que se puede saber con sólo contar las barras de la base de ésta. Luego, ellos forman grupos de 4 barras agrupándolos de izquierda a derecha, lo que provoca que al final quede un conjunto de tres barras que completan a la viga. Sin embargo, esto no es ningún inconveniente pues ellos expresan a los grupos de cuatro así: *4(n-1)*. La *n* representa la longitud de la viga. El conjunto de tres barras se agrega a la expresión quedando al final así: *4(n-1) +3*. Observe las respuestas de los estudiantes:


5.- ¿Cómo le explicarías a alguien cómo encontrar el número de barras necesarias para hacer una viga de cualquier longitud que se le solicite?

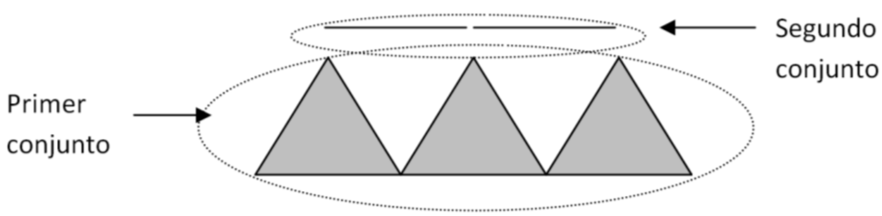
al nómero de longitud se le quita 1 y el resultado se multiplica por 4 y despúes se le suma 3


5.- ¿Cómo le explicarías a alguien cómo encontrar el número de barras necesarias para hacer una viga de cualquier longitud que se le solicite?

Que el número de bases = 1 es lo multi-plique x 4 +3 o puedes número de longitud -1

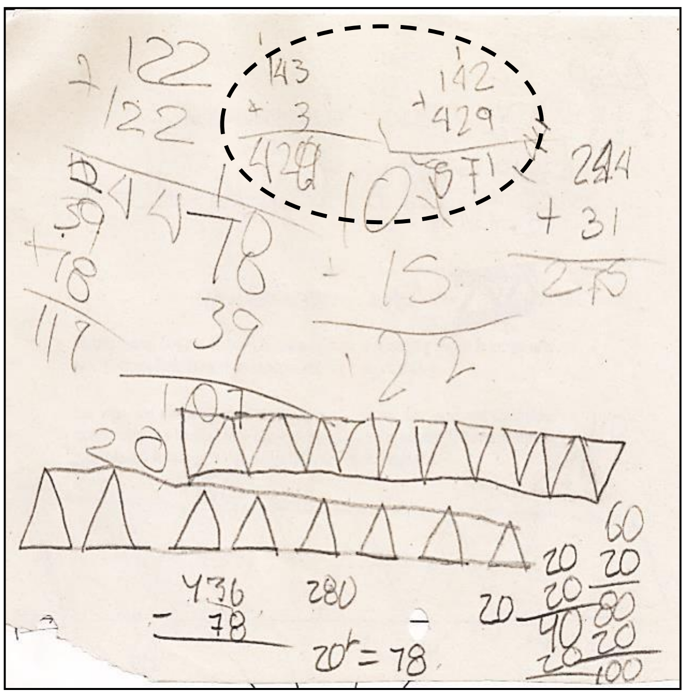

5.- ¿Cuántas barras son necesarias para hacer una viga de longitud "n"? Que el numero de bases - 1 x 4 +3

Un *tercer procedimiento* es separar en dos conjuntos a la viga. El primer conjunto son las barras de la base unidas a las barras diagonales que juntas forman un triángulo y el otro conjunto son las barras superiores o las opuestas a las de la base. Observe el ejemplo:

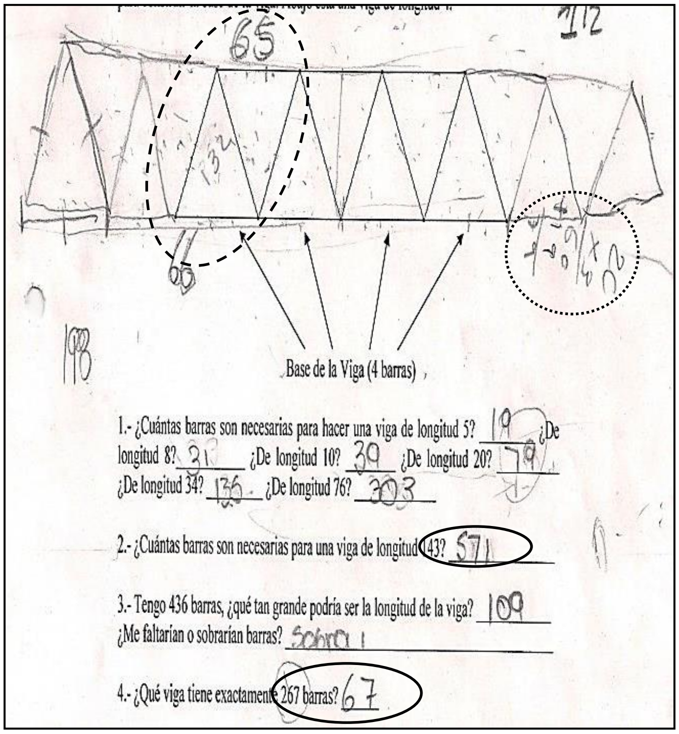



Este procedimiento requiere necesariamente, al igual que los anteriores, saber la longitud de la viga. Ya antes se dijo que para conocer la longitud de la viga basta con saber cuántas barras hay en la base de la viga. Una vez conocido esto, hay que multiplicar la longitud por tres. La razón de que se multiplique por tres es porque sobre cada barra de la base se forma un triángulo, que sobra decir que está hecho con tres barras. Al hacer esta multiplicación obtenemos todas las barras para el primer conjunto. Que se expresaría así: 3*n.* Luego los estudiantes hacen una observación a cerca de las barras superiores estás son siempre una menos que las barras de la base o dicho de otra manera, la longitud de la viga menos uno. Expresándose así: *n-1* y si juntamos las expresiones de ambos conjuntos para obtener el total de pilas necesarias para una viga de longitud *n* quedaría así: *3n* + *n-1* que al simplificarse obtenemos: *4n-1*.

Este procedimiento lo desarrollaron dos estudiantes, pero sólo uno escribió operaciones que muestran su procedimiento. Aunque más adelante lo cambiaron por el último que se presenta aquí. Enseguida se muestra lo que hizo el estudiante:



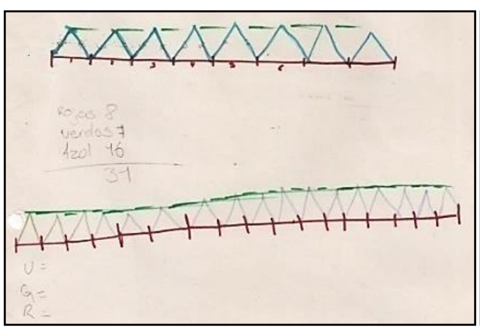
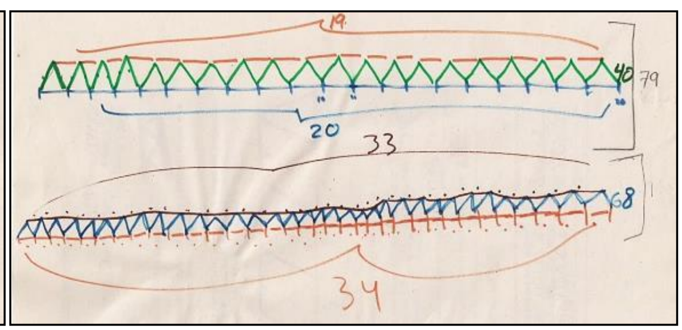

Lo que está señalado en punteado muestra las operaciones para obtener el número de barras para una viga de longitud 143. El estudiante multiplica 3 por 143 y obtiene 429, luego a esta cantidad le suma 142. Que es la longitud de la viga menos uno y obtiene 571 para responder la pregunta 3. En su hoja de trabajo.

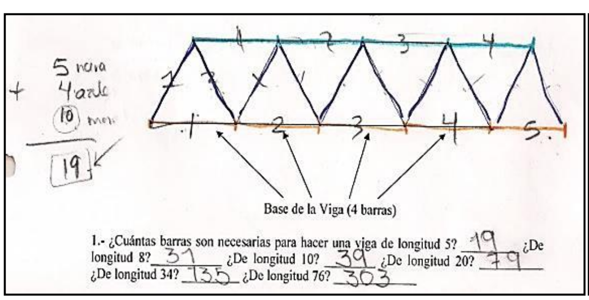


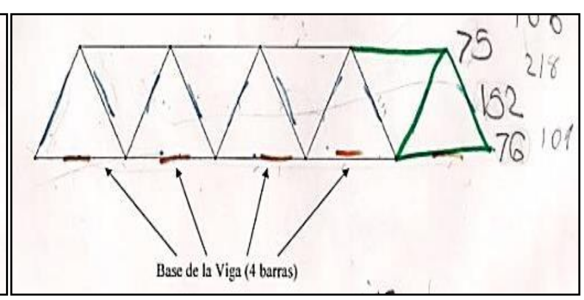

El círculo punteado más pequeño, muestra el mismo procedimiento pero éste es para resolver una viga de longitud 20. El estudiante multiplica 20 por 3 y el resultado lo suma a 19 y obtiene en total 79 para responder la pregunta 1.

En el óvalo punteado, mayor, las operaciones que hace el estudiante corresponden al cuarto procedimiento que se describe más adelante. Las cuales son un intento para responder la pregunta 4 de su hoja de trabajo. El número 65 corresponde a las barras superiores, el 132 corresponde a las barras diagonales y 66 a las barras inferiores o de la base.

El *cuarto y último procedimiento* consiste en separar a la viga en tres conjuntos. El primer conjunto está formado por las barras superiores, el segundo conjunto lo forman las barras en diagonal y el tercero se forma con las barras de la base. Observe el ejemplo de los conjuntos que hicieron los estudiantes:



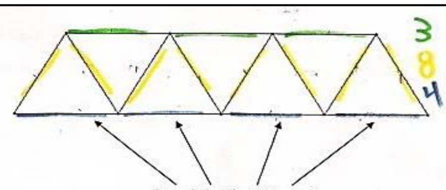


El primer conjunto se obtiene de restarle uno a la longitud de la viga. (La expresión que lo representa sería: *n-1*). Para el segundo conjunto hay que multiplicar la longitud de la viga por 2 (su expresión sería: *2n*), porque cada barra de la base sostiene dos barras diagonales y el número de barras de la base no es más que la longitud de la viga que en este caso es nuestro tercer conjunto representado por "*n*". Entonces si juntamos los tres conjuntos en una sola expresión resulta: *n-1 + 2n +n* que al simplificarla tenemos *4n-1*.

5.- ¿Cómo le explicarías a alguien cómo encontrar el número de barras necesarias para hacer una viga de cualquier longitud que se le solicite?
Por ejemplo si son 156 tienes que restarle 1 da 155 y multiplicar 156 x 2 = 312 + 156 + 155 = 623

5.- ¿Cómo le explicarías a alguien cómo encontrar el número de barras necesarias para hacer una viga de cualquier longitud que se le solicite?
que multiplique n x 2 + n + n-1.

Estos cuatro procedimientos tienen en común que se debe conocer la longitud de la viga para poder resolver el problema, de otro modo no se podría.



Base de la Viga (4 barras)

66
x 2
132
+ 66
65
263

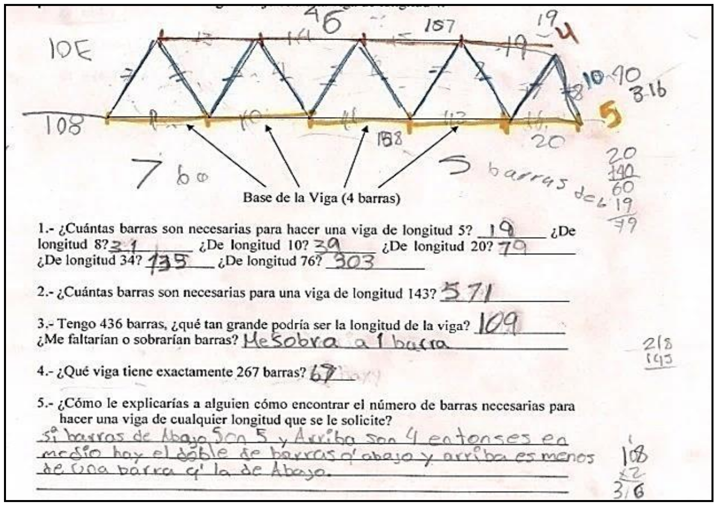
1.- ¿Cuántas barras son necesarias para hacer una viga de longitud 5? 19 ¿De longitud 8? 31 ¿De longitud 10? 39 ¿De longitud 20? 79 ¿De longitud 34? 135 ¿De longitud 76? 303

2.- ¿Cuántas barras son necesarias para una viga de longitud 143? 571

3.- Tengo 436 barras, ¿qué tan grande podría ser la longitud de la viga? 109
¿Me faltarían o sobrarían barras? sobran 1 y faltarian 3

4.- ¿Qué viga tiene exactamente 267 barras? 67

5.- ¿Cómo le explicarías a alguien cómo encontrar el número de barras necesarias para hacer una viga de cualquier longitud que se le solicite?
el numero de barras de su longitud se multiplica por 2 que son las barras de enmedio y las barras de longitud se resta uno y es el numero de arriba de barras y se se suma las barras de longitud de abajo.



Base de la Viga (4 barras)

1.- ¿Cuántas barras son necesarias para hacer una viga de longitud 5? 19 ¿De longitud 8? 31 ¿De longitud 10? 39 ¿De longitud 20? 79 ¿De longitud 34? 135 ¿De longitud 76? 303

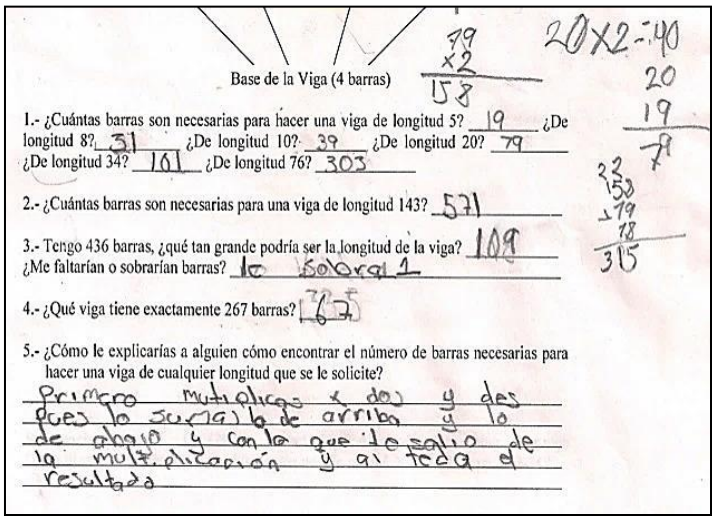
2.- ¿Cuántas barras son necesarias para una viga de longitud 143? 571

3.- Tengo 436 barras, ¿qué tan grande podría ser la longitud de la viga? 109 ¿Me faltarían o sobrarían barras? Me sobra a 1 barra

4.- ¿Qué viga tiene exactamente 267 barras? 67

5.- ¿Cómo le explicarías a alguien cómo encontrar el número de barras necesarias para hacer una viga de cualquier longitud que se le solicite?

si barras de Abajo son 5 y Arriba son 4 entonses en medio hay el doble de barras q' abajo y arriba es menos de una barra q' la de Abajo.



Base de la Viga (4 barras)

1.- ¿Cuántas barras son necesarias para hacer una viga de longitud 5? 19 ¿De longitud 8? 31 ¿De longitud 10? 39 ¿De longitud 20? 79 ¿De longitud 34? 161 ¿De longitud 76? 303

2.- ¿Cuántas barras son necesarias para una viga de longitud 143? 571

3.- Tengo 436 barras, ¿qué tan grande podría ser la longitud de la viga? 109 ¿Me faltarían o sobrarían barras? le sobra 1

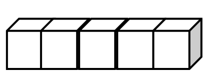
4.- ¿Qué viga tiene exactamente 267 barras? 67

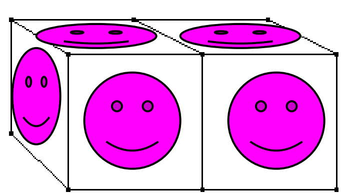
5.- ¿Cómo le explicarías a alguien cómo encontrar el número de barras necesarias para hacer una viga de cualquier longitud que se le solicite?

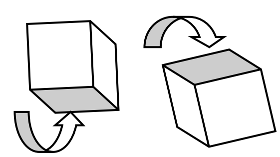
Primero mutiplicas x dos y des pues lo sumas lo de arriba y lo de abajo y con lo que te salio de la multiplicación y ai teda el resultado

### *3) El problema de las Estampas en el Cubo*

Una compañía produce barras acoplando cubos y usando una máquina estampadora para colocar estampas “sonrientes” sobre las barras. La máquina coloca exactamente una estampa sobre cada cara expuesta de cada cubo. Todas las caras expuestas de cada cubo tienen que tener una estampa, por ejemplo, en esta barra de longitud 2, se necesitarían 10 estampas ¿estás de acuerdo? _ ¿Por qué?_





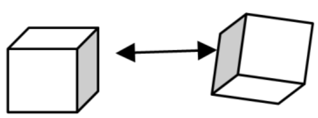


Barra de longitud 2 (dos cubos)

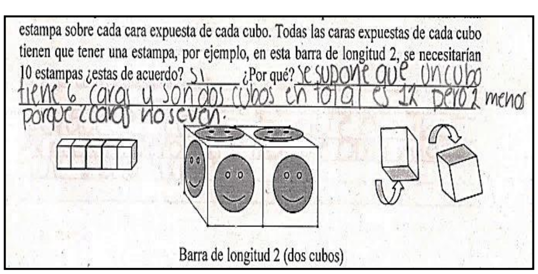
Al revisar las hojas de trabajo, se identificaron dos procedimientos distintos para resolver una cuestión general del problema de las estampas en el cubo que se resume en una pregunta ¿Cuántas estampas se necesitan para hacer una barra de longitud “n”?

Es preciso mencionar que pocos estudiantes inician su exploración del problema realizando listas de conteos simples, ahora ya intentan dirigirse a encontrar maneras más prácticas y generales para dar respuestas a las interrogantes de éste y los otros problemas sucesivos.

Desde el inicio del planteamiento del problema se cuestiona al estudiante acerca de sí para una barra de longitud 2 son necesarias 10 estampas. Considerando que el estudiante sabe que un cubo tiene seis caras, pero que al ser acoplado a otro quedan unidas dos caras, lo que descarta que la máquina coloque dos estampas en éstas. Se pretende que el estudiante piense en esto último y diga sí son 10 las estampas colocadas en las caras expuestas de esos dos cubos. Por esta razón aciertan en confirmar que sólo se requieren 10 estampas para una barra de longitud 2.

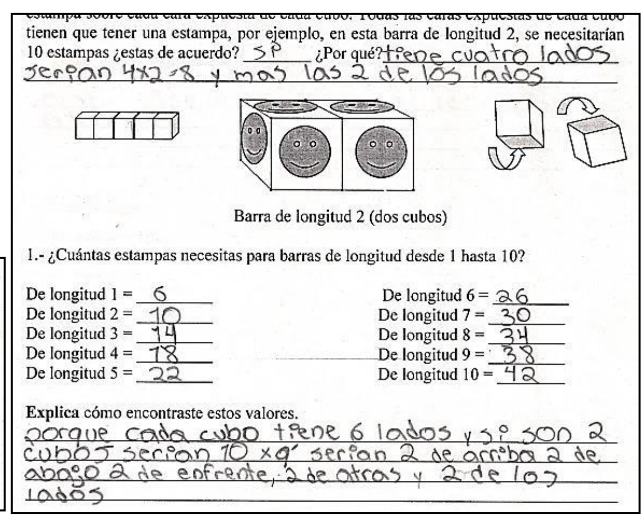


Observe las respuestas de algunos estudiantes las cuales nos muestran que esto se logró:



estampa sobre cada cara expuesta de cada cubo. Todas las caras expuestas de cada cubo tienen que tener una estampa, por ejemplo, en esta barra de longitud 2, se necesitarían 10 estampas ¿estas de acuerdo? si ¿Por qué? se supone que un cubo tiene 6 caras y son dos cubos en total es 12 pero 2 menos porque 2 caras no se ven.

Barra de longitud 2 (dos cubos)



tienen que tener una estampa, por ejemplo, en esta barra de longitud 2, se necesitarían 10 estampas ¿estas de acuerdo? si ¿Por qué? tiene cuatro lados serian 4x2=8 y mas las 2 de los lados

Barra de longitud 2 (dos cubos)

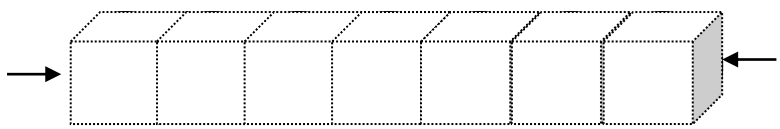
1.- ¿Cuántas estampas necesitas para barras de longitud desde 1 hasta 10?

| | |
|---|---|
| De longitud 1 = 6 | De longitud 6 = 26 |
| De longitud 2 = 10 | De longitud 7 = 30 |
| De longitud 3 = 14 | De longitud 8 = 34 |
| De longitud 4 = 18 | De longitud 9 = 38 |
| De longitud 5 = 22 | De longitud 10 = 42 |

**Explica** cómo encontraste estos valores.
porque cada cubo tiene 6 lados y si son 2 cubos serian 10 xq' serian 2 de arriba 2 de abajo 2 de enfrente, 2 de atras y 2 de los lados

Más adelante se les pide a los estudiantes encontrar el número de estampas para 1, 2, 3, hasta 10 cubos acoplados. A través de la observación en las respuestas, el estudiante se percata de una regularidad: el aumento de cuatro estampas al agregar un cubo más a la longitud de la barra y así sucesivamente. Esto abre el camino para dejar los conteos sencillos e iniciar un procedimiento más efectivo para longitudes mayores.

El *primer procedimiento* que desarrollan los estudiantes consiste en visualizar la barra de cubos acoplados como un entero de cuatro lados los cuales contienen la mayoría de las estampas y dos caras a los extremos con una estampa cada una. Observe los dibujos:



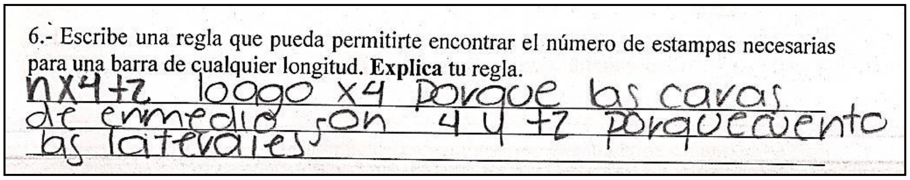
Por esta razón ellos multiplican la longitud de la barra (que es igual al número de cubos acoplados) por 4, por los cuatro lados de la barra, y después de multiplicar esto al resultado le suman 2 que son las dos estampas de las caras de los extremos. Ellos llevan este razonamiento a una expresión simbólica como esta: *4n+2* (“n” representa la longitud de la viga). Observe lo que dicen los estudiantes:

**Explica** cómo encontraste estos valores.
Se multiplica por 4 mas 2 que son las caras de lado izquierdo mas al lado derecho

5.- ¿Cómo le dirías a alguien cómo saber cuántas estampas se necesitarían para cualquier longitud de la barra? Se multiplicana la longitud (# de cubos) por las 4 caras de mi barra (completas) y luego las 2 del extrema

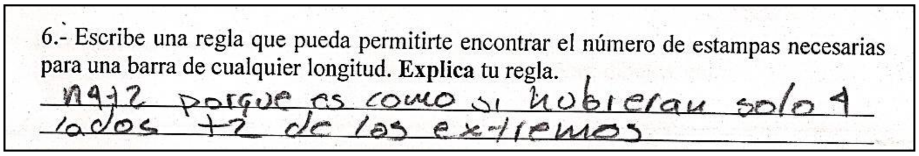
S= n·4+2

6.- Escribe una regla que pueda permitirte encontrar el número de estampas necesarias para una barra de cualquier longitud. **Explica** tu regla.
Utilizaría la fórmula S=n·4+2. Tendríamos que multiplicar la longitud (el número de cubos) por 4 y sumarle 2. Para saber si está bien hay que comprobrar con la primera y última posición que nos de n.



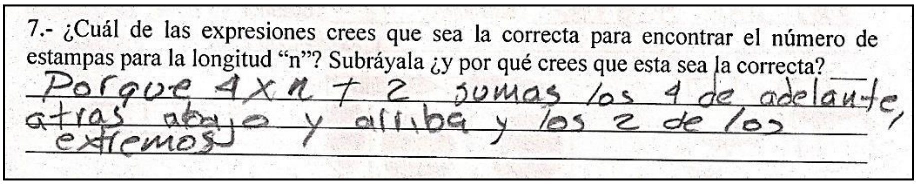
6.- Escribe una regla que pueda permitirte encontrar el número de estampas necesarias para una barra de cualquier longitud. **Explica** tu regla.

nx4+2 loogo x4 porque las caras de enmedio son 4 y +2 porque cuento las laterales



6.- Escribe una regla que pueda permitirte encontrar el número de estampas necesarias para una barra de cualquier longitud. **Explica** tu regla.

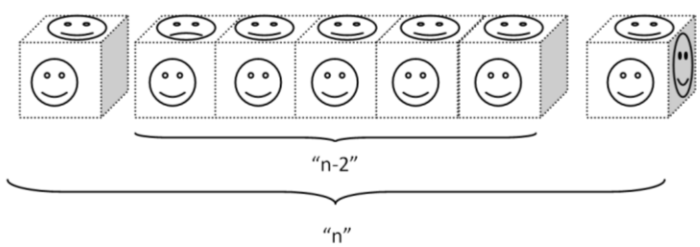
n4+2 porque es como si hubieran solo 4 lados +2 de los extremos



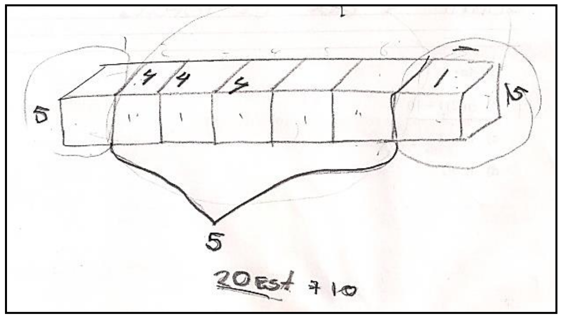
7.- ¿Cuál de las expresiones crees que sea la correcta para encontrar el número de estampas para la longitud "n"? Subráyala ¿y por qué crees que esta sea la correcta?

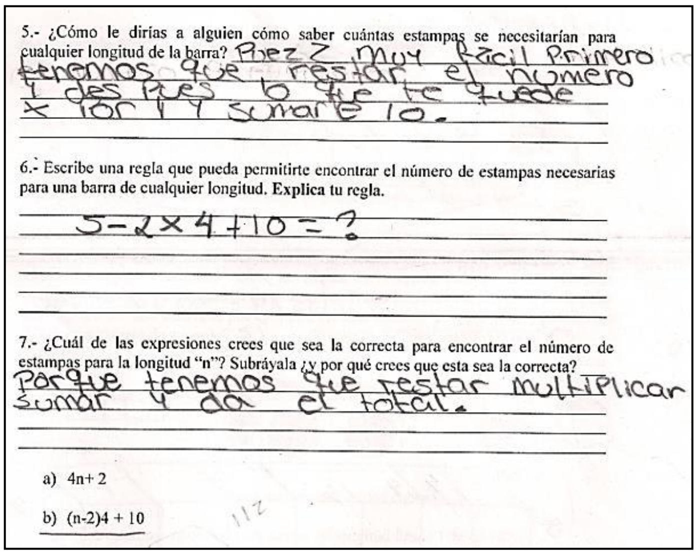
Porque 4xn + 2 sumas los 4 de adelante, atras abajo y arriba y los 2 de los extremos

El *segundo procedimiento* consiste en retirar, simbólicamente, los dos cubos que están en los extremos de la barra. Estos dos cubos tienen 5 estampas cada uno, pues sólo hay cinco caras expuestas para la máquina, la cara que se descarta es la que los une al resto de la barra. Sí la longitud original de la barra se representa con "*n*", entonces al quitar los dos cubos la longitud que queda se expresa como: *n-2*.




Ahora, se tiene que tener en mente dos cosas para avanzar al siguiente nivel. La primera, es reconocer que la barra que queda al desprenderse los dos cubos (*n-2*) tiene cuatro lados. La segunda, es que la longitud de la barra es igual al número de cubos acoplados; entonces, el número de estampas colocado en uno de los lados de dicha barra (*n-2*) tendrá que cuadruplicarse o en otras palabras se tendrá que multiplicar por cuatro para saber la cantidad de estampas contenidas en ella. Este razonamiento llevó a los estudiantes a expresarlo como: *4(n-2)* sin olvidar que hay que agregar las 10 estampas de los cubos de los extremos para llegar a la expresión *4(n-2) + 10*. La cual sí se simplifica resulta: *4n-2*. Observe lo que dijeron algunos estudiantes:





5.- ¿Cómo le dirías a alguien cómo saber cuántas estampas se necesitarían para cualquier longitud de la barra? Pues muy fácil primero tenemos que restar el número 1 despues lo que te quede x por 4 y sumarle 10.

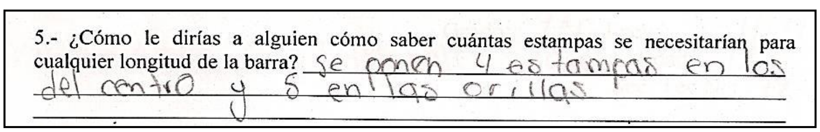
6.- Escribe una regla que pueda permitirte encontrar el número de estampas necesarias para una barra de cualquier longitud. Explica tu regla.

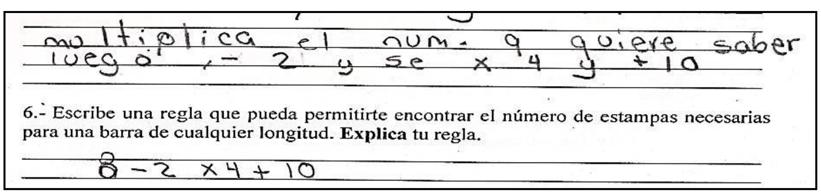
5-2x4+10=?

7.- ¿Cuál de las expresiones crees que sea la correcta para encontrar el número de estampas para la longitud "n"? Subráyala ¿y por qué crees que esta sea la correcta?
Porque tenemos que restar multiplicar sumar y da el total.

a) 4n+ 2

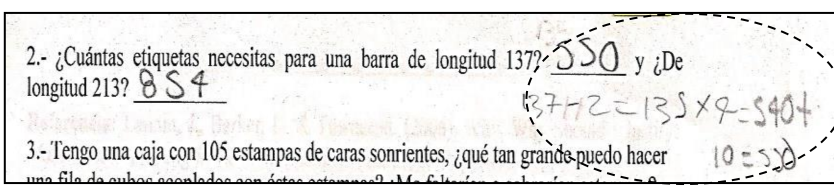
b) (n-2)4 + 10


5.- ¿Cómo le dirías a alguien cómo saber cuántas estampas se necesitarían para cualquier longitud de la barra? se ponen 4 estampas en los del centro y 5 en las orillas

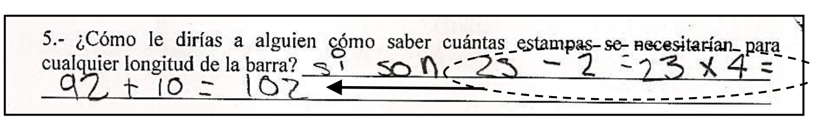

multiplica el num. q quiere saber luego ,- 2 y se x 4 y + 10

6.- Escribe una regla que pueda permitirte encontrar el número de estampas necesarias para una barra de cualquier longitud. Explica tu regla.

8 - 2 x 4 + 10

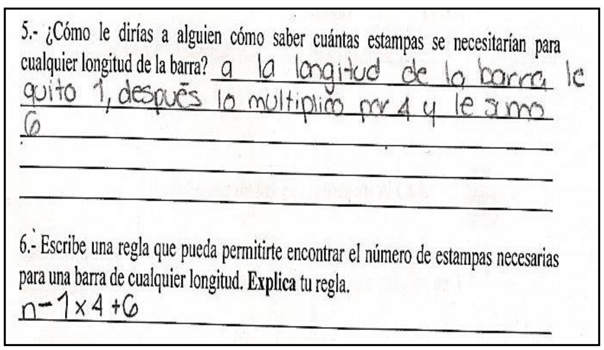

2.- ¿Cuántas etiquetas necesitas para una barra de longitud 137? 550 y ¿De longitud 213? 854
137-2=135x4=540+10=550

3.- Tengo una caja con 105 estampas de caras sonrientes, ¿qué tan grande puedo hacer


5.- ¿Cómo le dirías a alguien cómo saber cuántas estampas se necesitarían para cualquier longitud de la barra? si son 25 - 2 = 23 x 4 = 92 + 10 = 102

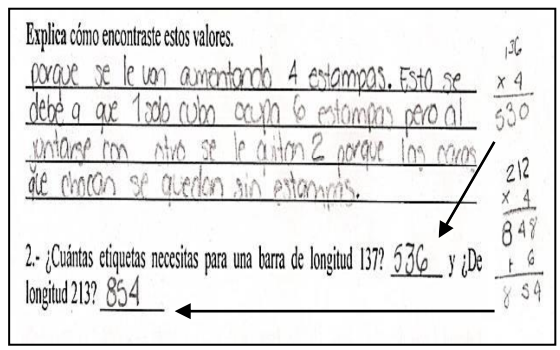
Los óvalos muestran ejemplos de cómo los estudiantes aplican su procedimiento. Restan 2 a la longitud de barra, el resultado lo multiplican por 4 y a lo que obtienen le suman 10.

Otro procedimiento, que podría ser una variante del anterior, lo desarrolla una estudiante bajo la siguiente visualización del problema: ella sabe que la longitud de la barra son una cierta cantidad de cubos acoplados, a esta longitud le resta un cubo, la cual podemos interpretar como: *n-1*. Luego ésta barra disminuida tiene cuatro lados u otra forma de decirlo es que a cada cubo acoplado sólo se le pegan 4 estampas. Esta es la razón por la cual ella multiplica por 4 la longitud de la barra disminuida en 1 que se expresaría así: *4(n-1)* y sin olvidar las estampas del cubo retirado al inicio la expresión se completaría para finalmente expresar la cantidad de estampas que necesita una barra de longitud "*n*" así: *4(n-1) + 6*, que al simplificarse se obtiene: *4n+2.* Observe:



5.- ¿Cómo le dirías a alguien cómo saber cuántas estampas se necesitarían para cualquier longitud de la barra? a la longitud de la barra le quito 1, después lo multiplico por 4 y le sumo 6

6.- Escribe una regla que pueda permitirte encontrar el número de estampas necesarias para una barra de cualquier longitud. **Explica** tu regla.
n-1×4+6



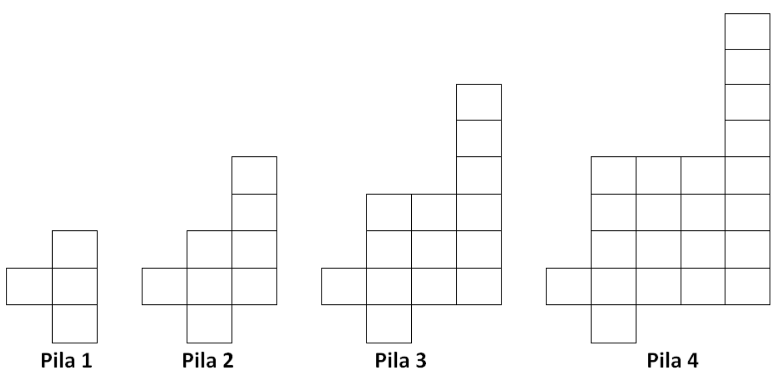
**Explica cómo encontraste estos valores.**
porque se le van aumentando 4 estampas. Esto se debe a que 1 solo cubo ocupa 6 estampas pero al juntarse con otro se le quitan 2 porque las caras que chocan se quedan sin estampas.

136
× 4
530

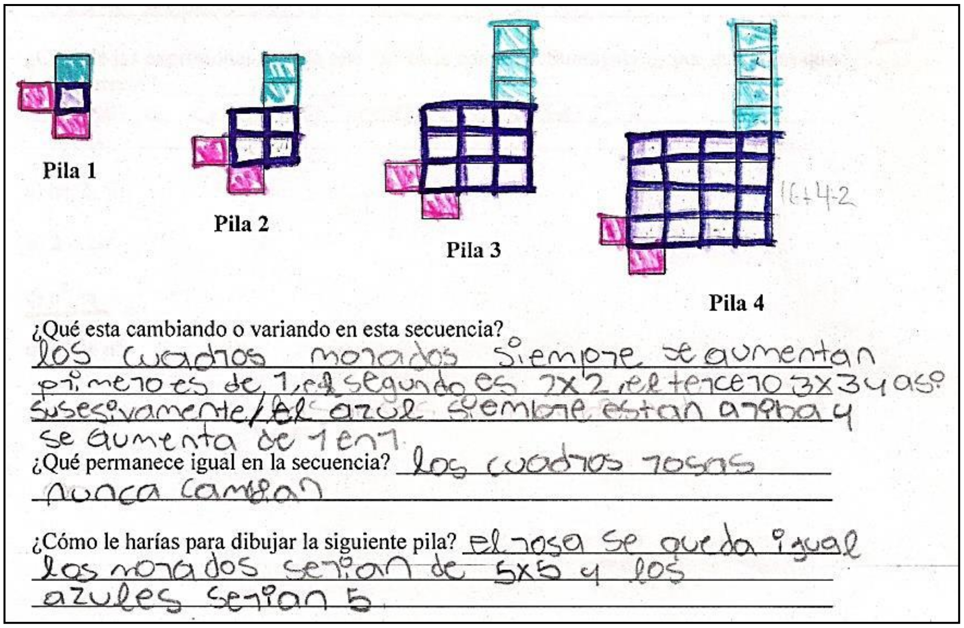
212
× 4
848
+ 6
854

2.- ¿Cuántas etiquetas necesitas para una barra de longitud 137? 536 y ¿De longitud 213? 854

### *4) El problema del Crecimiento de Azulejos* I

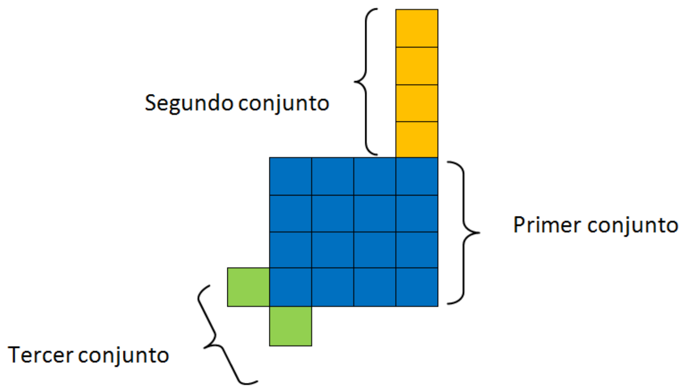



A partir de éste problema se les hacen preguntas acerca de las regularidades del patrón, lo que permanece constante y lo que cambia. Casi todos los estudiantes prestan mucha atención a cada etapa o pila consecutiva en el patrón para poder descubrir éstas regularidades. Observe la respuesta que da un estudiante cuando se le pregunta sobre lo que permanece igual  o que cambia en el patrón:

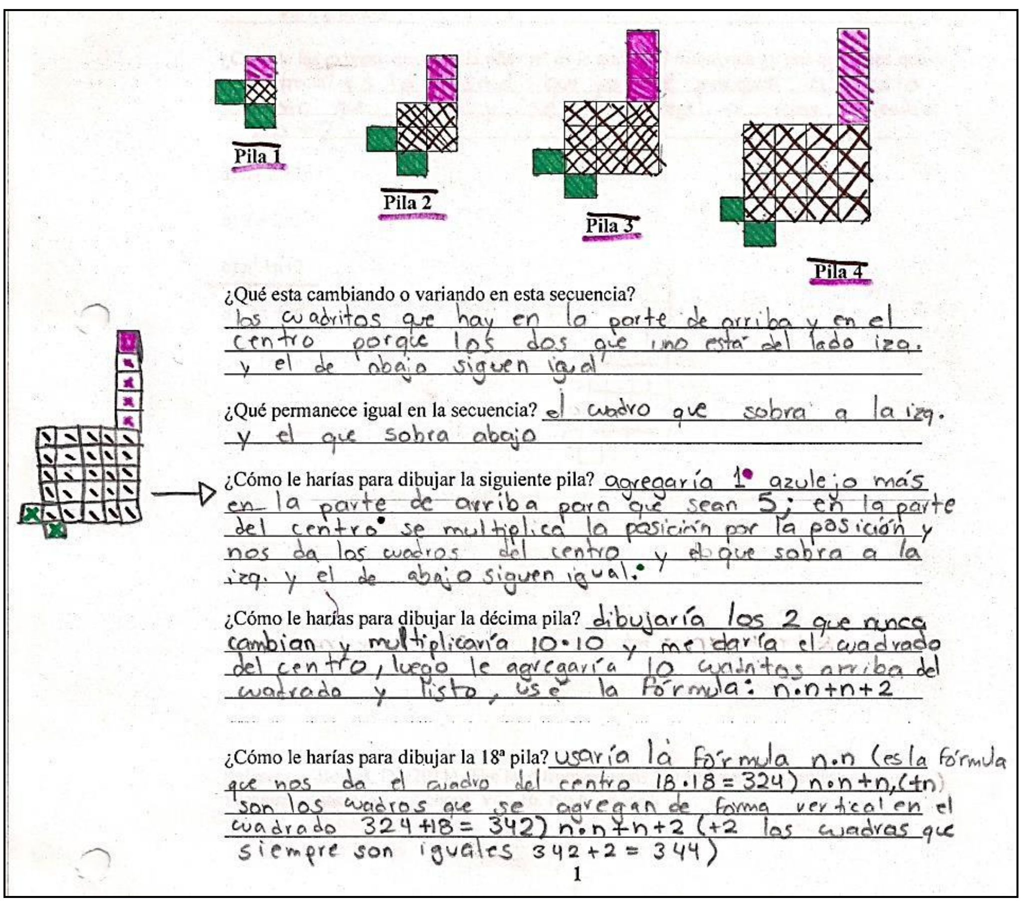



Muchos estudiantes definen con colores las partes de las pilas que ellos encuentran como constantes y cambiantes, esto les dio mayores posibilidades de estructurar una expresión que les permitiera encontrar la cantidad de azulejos cuadrados de cualquier pila o de la pila “*n*”.

Lo que ellos hacen es descomponer la pila en tres conjuntos. El primer conjunto consiste en distinguir un cuadrado cuyo lado tienen por medida en azulejos el mismo número de la pila en cuestión. Es decir, si la pila es la número 4 entonces se formará un cuadrado de 4x4 azulejos dando un total de 16 azulejos que estarán al centro de la pila (ver la pila 4 en la imagen de arriba). El segundo, es una columna instalada sobre el lado derecho superior del cuadrado la cual se forma con una cantidad de azulejos igual al número de pila que se trate. Volvamos al ejemplo de la pila 4, de ser así la columna tendría cuatro azulejos. Y el tercer conjunto, son los elementos que permanecen constantes, éstos son los dos azulejos en la esquina inferior izquierda. Uno en el lado de abajo del cuadrado y el otro en el lado izquierdo. Vea el siguiente gráfico:




En sus hojas de trabajo se les solicitaba describir cómo construir pilas. Por ejemplo, la pila 5, 10 y 18. Esta acción permitió tener claridad sobre las partes que la conforman, los estudiantes no tuvieron mayor dificultad para explicar cómo se construye cada pila solicitada según su visualización del patrón. Observe lo que escribieron los estudiantes:



Pila 1 Pila 2 Pila 3 Pila 4

¿Qué esta cambiando o variando en esta secuencia? los cuadritos que hay en la parte de arriba y en el centro porque los dos que uno está del lado izq. y el de abajo siguen igual

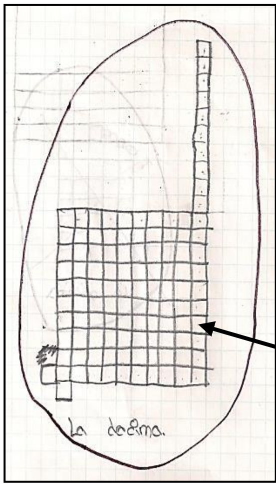
¿Qué permanece igual en la secuencia? el cuadro que sobra a la izq. y el que sobra abajo

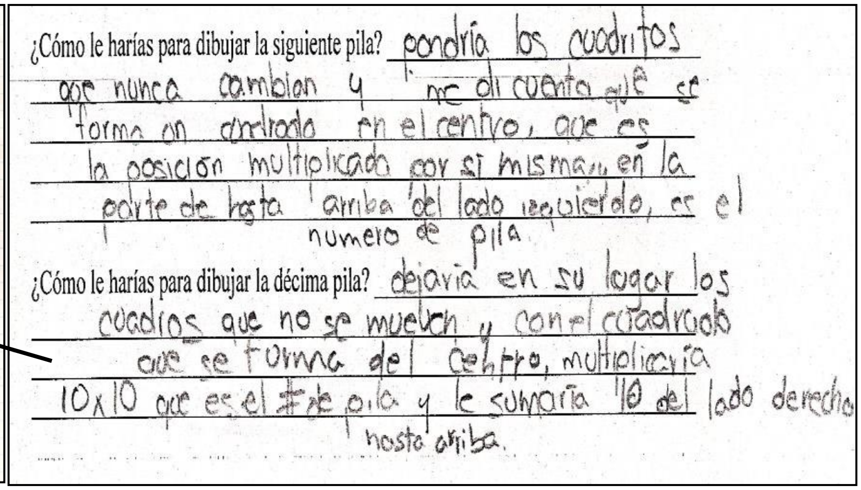
¿Cómo le harías para dibujar la siguiente pila? agregaría 1 azulejo más en la parte de arriba para que sean 5; en la parte del centro se multiplica la posición por la posición y nos da los cuadros del centro y el que sobra a la izq. y el de abajo siguen igual.

¿Cómo le harías para dibujar la décima pila? dibujaría los 2 que nunca cambian y multiplicaría 10•10 y me daría el cuadrado del centro, luego le agregaría 10 cuadritos arriba del cuadrado y listo, usé la fórmula: n•n+n+2

¿Cómo le harías para dibujar la 18ª pila? usaría la fórmula n•n (es la fórmula que nos da el cuadro del centro 18•18 = 324) n•n+n, (+n son los cuadros que se agregan de forma vertical en el cuadrado 324+18 = 342) n•n+n+2 (+2 los cuadros que siempre son iguales 342+2 = 344)

1

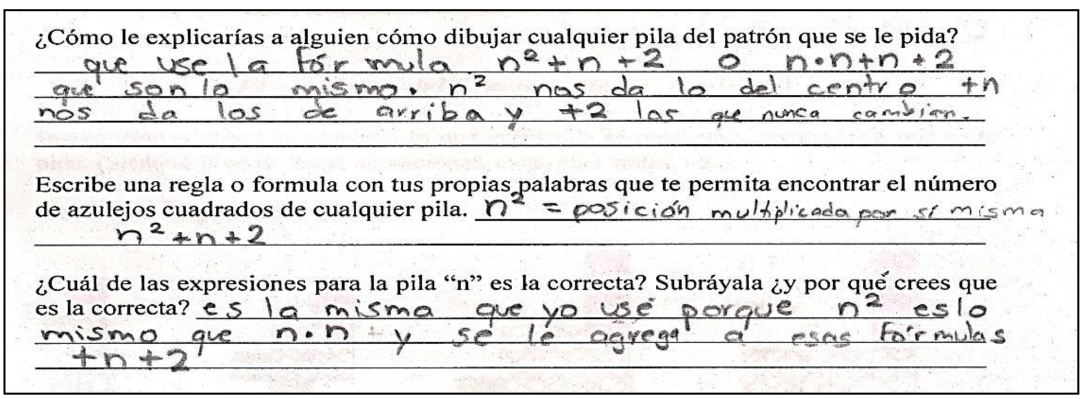


¿Cómo le harías para dibujar la siguiente pila? pondría los cuadritos que nunca cambian y me di cuenta que se forma un cuadrado en el centro, que es la posición multiplicada por sí misma, en la parte de hasta arriba del lado izquierdo, es el numero de pila

¿Cómo le harías para dibujar la décima pila? dejaría en su lugar los cuadros que no se mueven y con el cuadrado que se forma del centro, multiplicaría 10x10 que es el # de pila y le sumaría 10 del lado derecho hasta arriba.

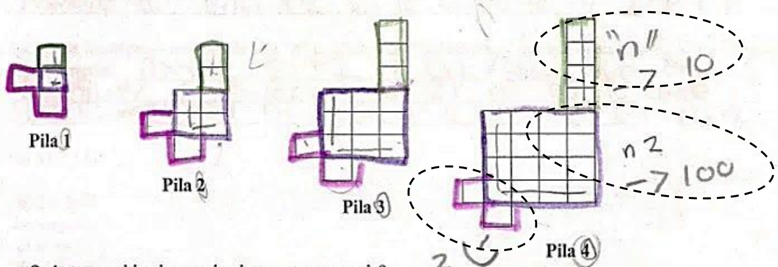
Este tipo de respuesta muestra que ellos tienen un procedimiento o estrategia sólida para construir cualquier pila. Este procedimiento se sostiene de relacionar los conjuntos de azulejos con el número de la pila (“n”) lo cual resulta provechoso. Casi al final de su hoja de trabajo, se les solicita decir con sus propias palabras una regla o fórmula que le permita encontrar el número de azulejos cuadrados de cualquier pila. Ellos escribieron como una regla o fórmula lo siguiente:



¿Cómo le explicarías a alguien cómo dibujar cualquier pila del patrón que se le pida? que use la fórmula $n^2+n+2$ o $n \cdot n+n+2$ que son lo mismo. $n^2$ nos da lo del centro $+n$ nos da los de arriba y $+2$ los que nunca cambian.

Escribe una regla o formula con tus propias palabras que te permita encontrar el número de azulejos cuadrados de cualquier pila. $n^2$ = posición multiplicada por sí misma $n^2+n+2$

¿Cuál de las expresiones para la pila “n” es la correcta? Subráyala ¿y por qué crees que es la correcta? es la misma que yo usé porque $n^2$ es lo mismo que $n \cdot n$ y se le agrega a esas fórmulas $+n+2$




¿Qué esta cambiando o variando en esta secuencia? que aumenta el marcado a n2 y n in el verde

¿Qué permanece igual en la secuencia? el +2 osea el rosita

¿Cómo le harías para dibujar la siguiente pila? Pues le aumentaria uno al verde y multiplico n2 osea el 5x5 + 5 = 30 cuadros en la siguiente pila

¿Cómo le harías para dibujar la décima pila? la barra verde tendria 10 el marcado tendria 100 y el + 2 es = osea tendria 112

¿Cómo le explicarías a alguien cómo dibujar cualquier pila del patrón que se le pida? se hace un cuadrado del número de pila por el número de pila, al lado superior derecho se le agrega la cantidad del # de pila que es y en la parte inferior izquierda en contraesquina se le agregan 2

Escribe una regla o formula con tus propias palabras que te permita encontrar el número de azulejos cuadrados de cualquier pila. $n \times n + n + 2 =$ x 14 14

¿Cuál de las expresiones para la pila "n" es la correcta? Subráyala ¿y por qué crees que es la correcta? porque realizando ese procedimiento es el que me da el resultado correcto

x 15 15

a) n+ 2 +2n

x 12 12

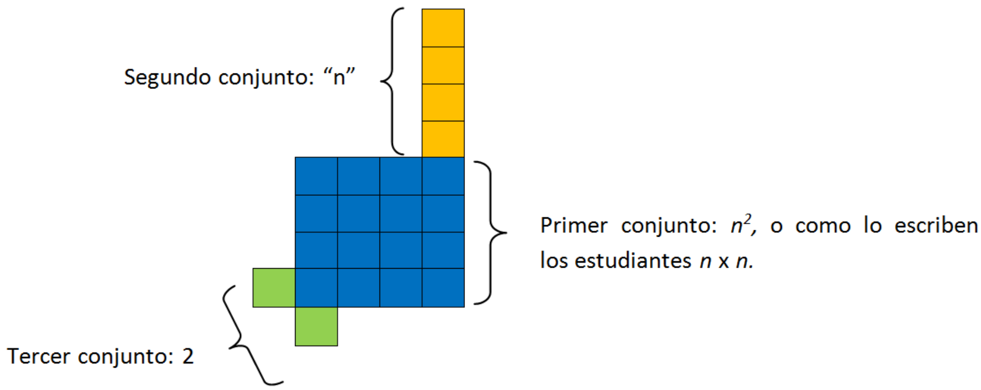
b) $2 + 2n^2$

c) $n^2 + n + 2$

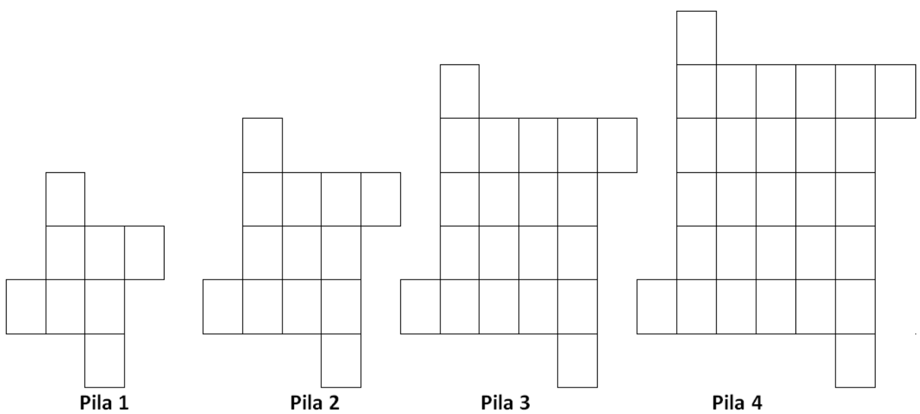
¿Cómo le explicarías a alguien cómo dibujar cualquier pila del patrón que se le pida? Con la formula $n^2+n+2$, y que los cuadros de enmedio siempre son al cuadrado y son el mismo numero que la pocicion los de arriba tambien son el número de la pocicion

Escribe una regla o formula con tus propias palabras que te permita encontrar el número de azulejos cuadrados de cualquier pila. es pocicion al cuadrado mas la pocicion mas 2 / $n^2+n+2$

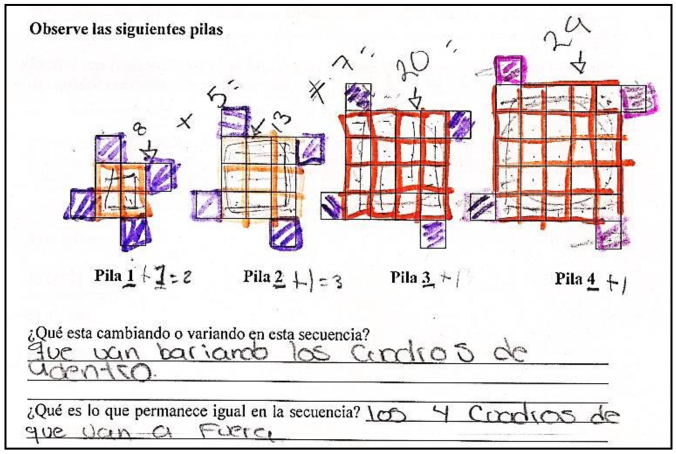
Las respuestas nos dan indicaciones de cómo obtener el número de azulejos para la pila "n". Si recurrimos a nuestro gráfico y sumamos cada conjunto quedaría expresado así: $n^2 + n + 2$.




### *5) El problema del Crecimiento de Azulejos* **II**




Al inicio de la hoja de trabajo se les pregunta sobre lo que cambia y lo que permanece igual en el patrón. Los resultados fueron satisfactorios pues casi todos los estudiantes identifican estos elementos, lo que les permite resolver los cuestionamientos subsecuentes. Enseguida se muestran respuestas de lo que ellos consideran cambiante y lo que permanece igual en la secuencia de pilas:



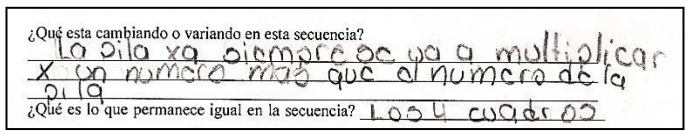
Observe las siguientes pilas

8 5 13 7 20 24

Pila 1 +1 = 2 Pila 2 +1 = 3 Pila 3 +1 Pila 4 +1

¿Qué esta cambiando o variando en esta secuencia? que van bariando los cuadros de adentro.

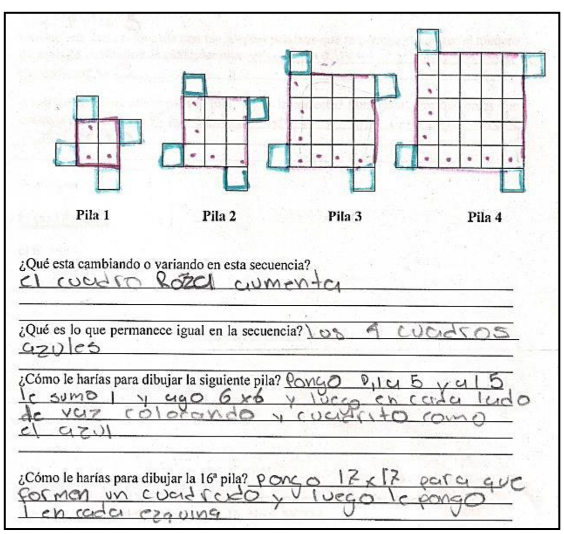
¿Qué es lo que permanece igual en la secuencia? los 4 cuadros de que van a fuera



¿Qué esta cambiando o variando en esta secuencia? La pila xq siempre se va a multiplicar x un numero más que el numero de la pila

¿Qué es lo que permanece igual en la secuencia? Los 4 cuadros

Esto nos indica que han encontrado un elemento cambiante constituido por un conjunto de azulejos que aumentan en cantidad y que se acoplan formando un cuadrado; l otro elemento que no cambia son cuatro azulejos al exterior ubicados en las esquinas del cuadrado. A manera de reforzar sus hallazgos y ponerlos en práctica, se les pide dibujar dos pilas, la que continúa en la secuencia (la pila 5) y la 16. Observe lo que ellos escriben:



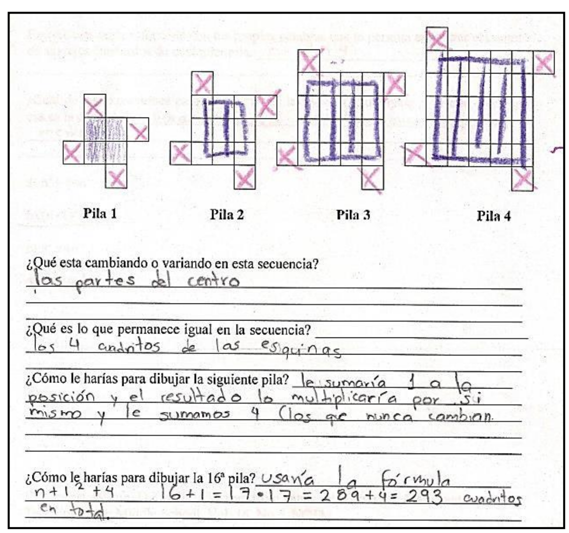
Pila 1 Pila 2 Pila 3 Pila 4

¿Qué esta cambiando o variando en esta secuencia? el cuadro rosa aumenta

¿Qué es lo que permanece igual en la secuencia? Los 4 cuadros azules

¿Cómo le harías para dibujar la siguiente pila? pongo pila 5 y a 5 le sumo 1 y ago 6x6 y luego en cada lado de vaz colorando y cuadrito como el azul

¿Cómo le harías para dibujar la 16ª pila? pongo 17x17 para que formen un cuadrado y luego le pongo 1 en cada ezquina



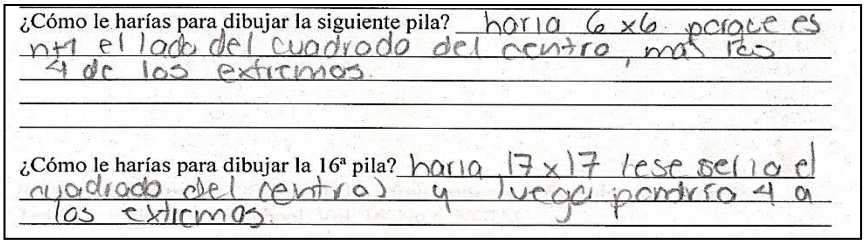
Pila 1 Pila 2 Pila 3 Pila 4

¿Qué esta cambiando o variando en esta secuencia? las partes del centro

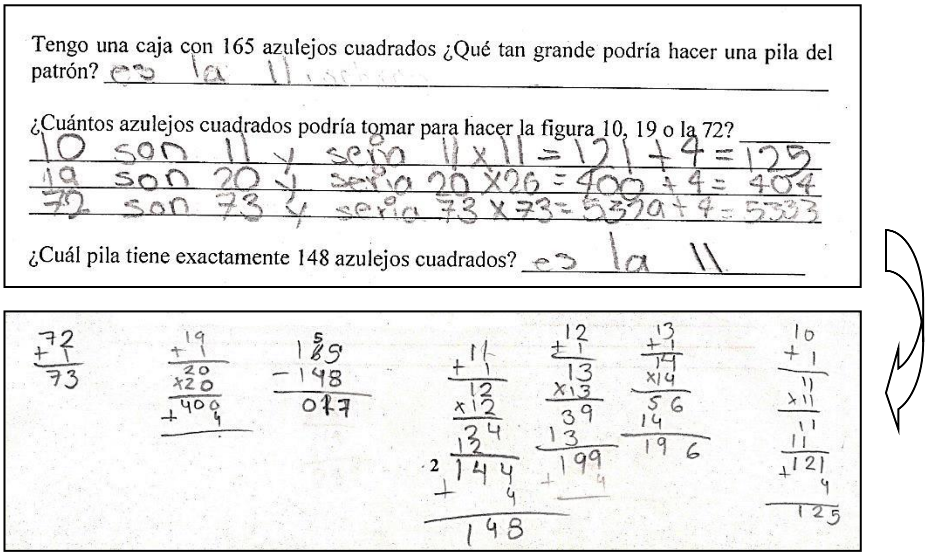
¿Qué es lo que permanece igual en la secuencia? los 4 cuadritos de las esquinas

¿Cómo le harías para dibujar la siguiente pila? le sumaría 1 a la posición y el resultado lo multiplicaría por sí mismo y le sumamos 4 (los que nunca cambian.

¿Cómo le harías para dibujar la 16ª pila? usaría la fórmula $n+1^2+4$ 16+1=17•17=289+4=293 cuadritos en total


¿Cómo le harías para dibujar la siguiente pila? haria 6 x 6 porque es n+1 el lado del cuadrado del centro, mas los 4 de los extremos.

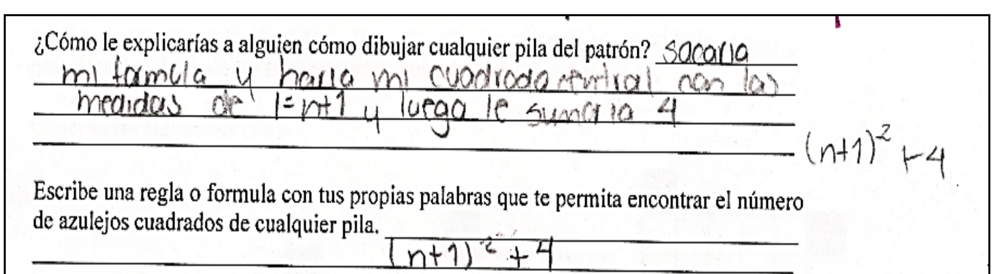
¿Cómo le harías para dibujar la 16ª pila? haria 17 x 17 (ese seria el cuadrado del centro) y luego pondria 4 a los extremos.


Tengo una caja con 165 azulejos cuadrados ¿Qué tan grande podría hacer una pila del patrón? es la 11

¿Cuántos azulejos cuadrados podría tomar para hacer la figura 10, 19 o la 72?
10 son 11 y seria 11 x 11 = 121 + 4 = 125
19 son 20 y seria 20 x 20 = 400 + 4 = 404
72 son 73 y seria 73 x 73 = 5329 + 4 = 5333

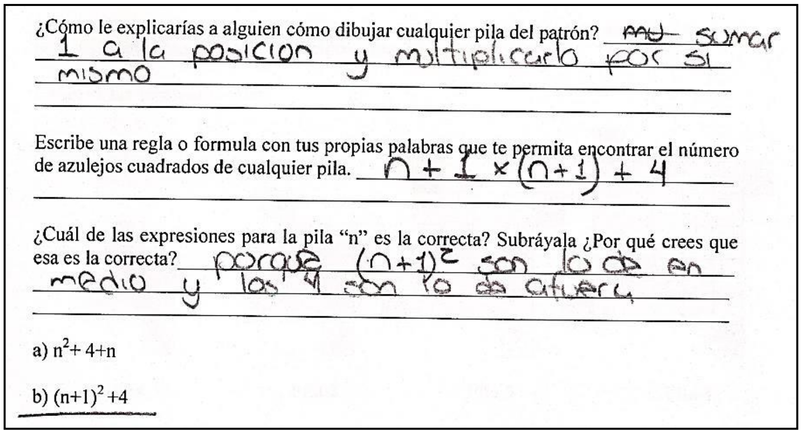
¿Cuál pila tiene exactamente 148 azulejos cuadrados? es la 11

Es evidente que ellos relacionan el número de pila con las dimensiones del cuadrado central. Es decir, si se quiere construir la pila 6 ellos agregan uno a éste valor. Entonces, se va a construir un cuadrado de dimensiones 7x7 azulejos y luego se le van a agregar los 4 azulejos en cada esquina (en la misma dirección que giran las manecillas del reloj). En otras palabras, el cuadrado del centro se forma al agregar uno al número de pila, por esta razón ellos llegan a una regla o fórmula como la que expresan en sus respuestas, observe:


¿Cómo le explicarías a alguien cómo dibujar cualquier pila del patrón? sacaria mi formula y haria mi cuadrado central con las medidas de l=n+1 y luego le sumaria 4

$(n+1)^2+4$

Escribe una regla o formula con tus propias palabras que te permita encontrar el número de azulejos cuadrados de cualquier pila. $(n+1)^2+4$

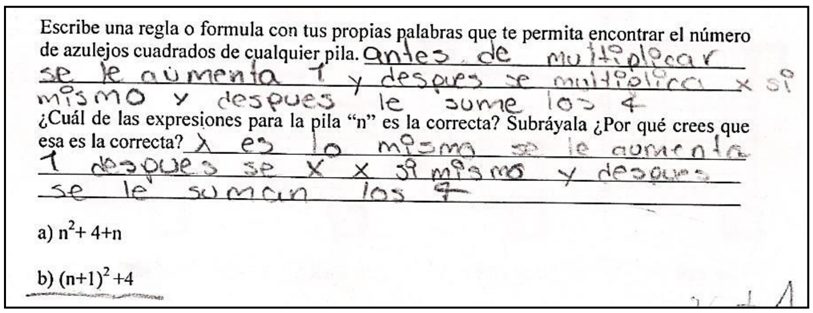

¿Cómo le explicarías a alguien cómo dibujar cualquier pila del patrón? ~~mu~~ sumar 1 a la posicion y multiplicarlo por si mismo

Escribe una regla o formula con tus propias palabras que te permita encontrar el número de azulejos cuadrados de cualquier pila. $n + 1 \times (n+1) + 4$

¿Cuál de las expresiones para la pila "n" es la correcta? Subráyala ¿Por qué crees que esa es la correcta? porque $(n+1)^2$ son lo de en medio y los 4 son lo de afuera

a) $n^2 + 4 + n$

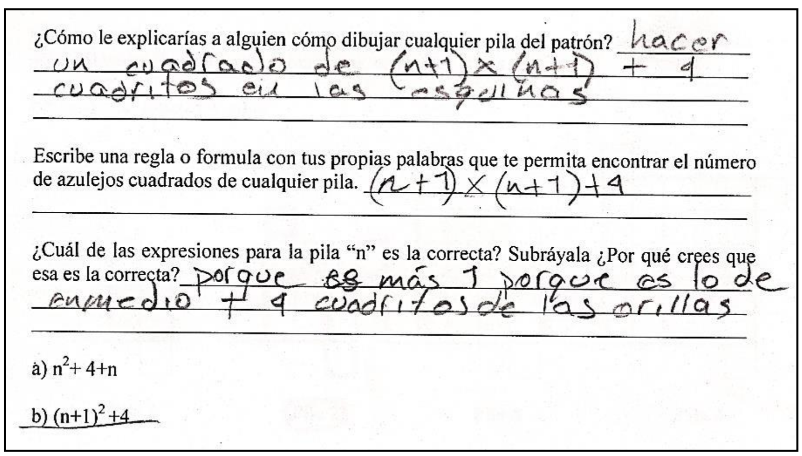
b) $(n+1)^2 + 4$


Escribe una regla o formula con tus propias palabras que te permita encontrar el número de azulejos cuadrados de cualquier pila. antes de multiplicar se le aumenta 1 y despues se multiplica x si mismo y despues le sume los 4

¿Cuál de las expresiones para la pila "n" es la correcta? Subráyala ¿Por qué crees que esa es la correcta? x es lo mismo se le aumenta 1 despues se x x si mismo y despues se le suman los 4

a) $n^2 + 4 + n$

b) $(n+1)^2 + 4$


¿Cómo le explicarías a alguien cómo dibujar cualquier pila del patrón? hacer un cuadrado de $(n+1) \times (n+1)$ + 4 cuadritos en las esquinas

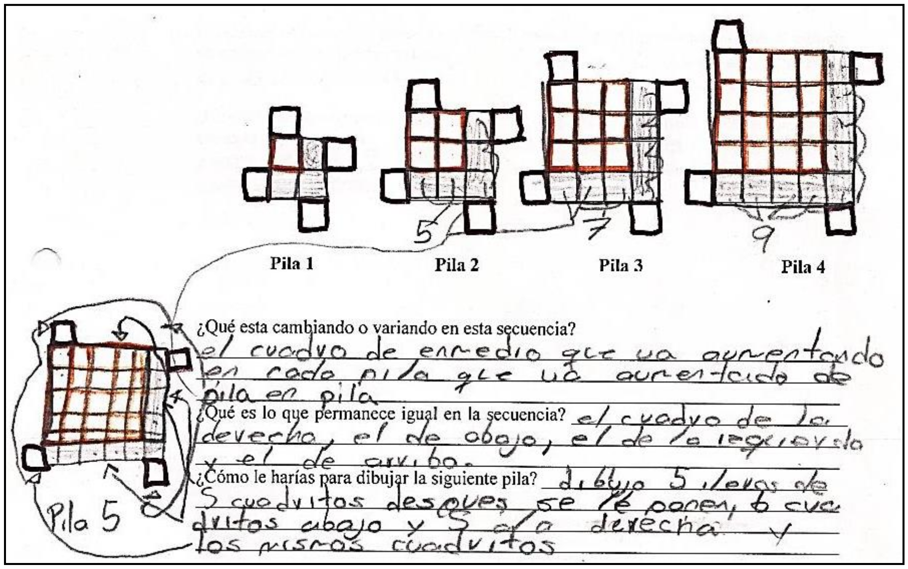
Escribe una regla o formula con tus propias palabras que te permita encontrar el número de azulejos cuadrados de cualquier pila. $(n+1) \times (n+1) + 4$

¿Cuál de las expresiones para la pila "n" es la correcta? Subráyala ¿Por qué crees que esa es la correcta? porque ~~es más 1~~ porque es lo de enmedio + 4 cuadritos de las orillas

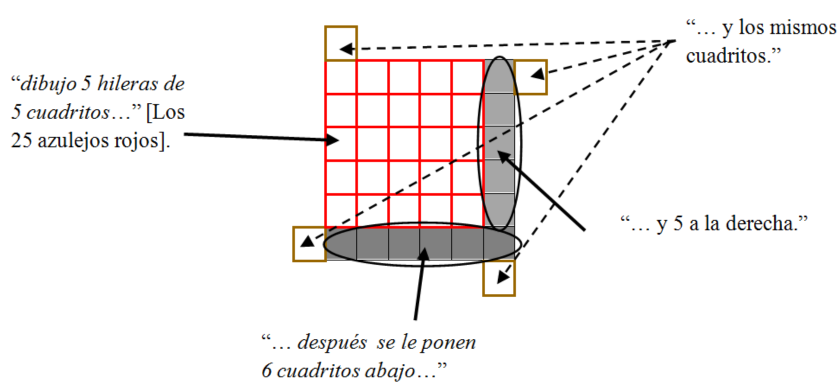
à) $n^2 + 4 + n$

b) $(n+1)^2 + 4$

En la revisión de sus hojas de trabajo, llamó la atención otro procedimiento que inició un estudiante para resolver el problema de los azulejos II el cual más adelante él lo descarto y optó por el procedimiento que describimos antes. En esencia su procedimiento es correcto, quizá más elaborado pero finalmente llegaría a lo que los demás estudiantes concluyeron. Le faltaron recursos algebraicos más desarrollados y seguridad en él mismo para desarrollar un procedimiento distinto al de sus compañeros. En adelante mostramos y explicamos lo que él hizo.



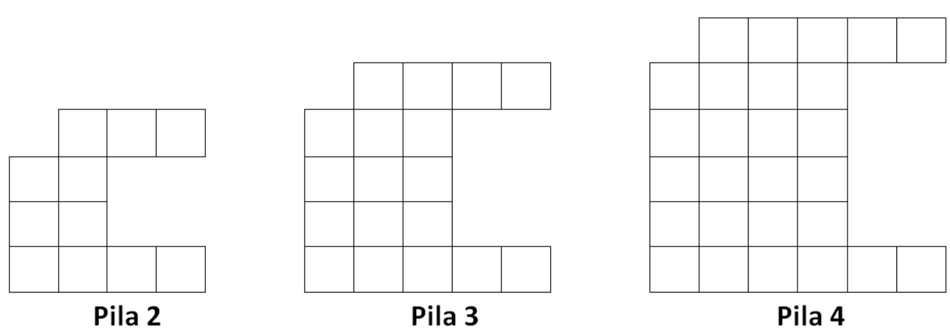

El estudiante sólo nota los cuatro azulejos exteriores como elementos permanentes en la secuencia y los remarca con color café. Textualmente se refiere a éstos así: "*el cuadrado de la derecha, el de abajo, el de la izquierda y el de arriba*". Por otro lado, lo que para él es cambiante lo describe así: "*el cuadrado de en medio que va aumentando en cada pila que va aumentando de pila en pila*". Pero éste cuadrado del que él habla lo fracciona en dos partes que remarca con rojo y con su lápiz. Con la explicación y los señalamientos que el estudiante realiza en su hoja de trabajo sobre cómo dibujar la pila 5 se aclara aún más su procedimiento. Observe lo que contesta: "*Dibujo 5 hileras de 5 cuadritos después se le ponen 6 cuadritos abajo y 5 a la derecha y los mismos cuadritos*". La siguiente imagen (pila 5) ayudará a entender sus palabras:



Más adelante en su hoja de trabajo cambia su procedimiento por el que presentamos antes. De haber seguido su procedimiento y con conocimientos más avanzados de álgebra, tal vez hubiera llegado a una expresión como esta: $n^2 +(n+1) + n +4$. En donde $n^2$ representa los azulejos rojos; $n+1$, los azulejos grises en horizontal; $n$, los azulejos grises en vertical y $+4$, los azulejos cafés. La expresión $n^2 +(n+1) + n +4$ simplificada queda como $n^2+ 2n +5$ que es equivalente a la expresión $(n+1)^2 +4$ que es a la que llegaron los demás estudiantes.

Al igual que en los anteriores problemas, cuando ellos dicen: el número de figura, el número de posición, el número de longitud, el número de pila, etcétera, parece ser un factor importante que se debe de considerar a la hora de tratar de generalizar una secuencia o patrón. Los estudiantes no lo dicen con éstas palabras pero si se dan cuenta de que hay una relación entre el número de figura y los elementos de la figura en cuestión. Detectar dicha relación les facilita el camino para descubrir y desenmarañar el patrón y de cierto modo poder predecir o caracterizar un componente de ese patrón. En el caso particular de los azulejos y del crecimiento de pilas, se trata de encontrar la cantidad necesaria de éstos para cualquier pila del patrón.

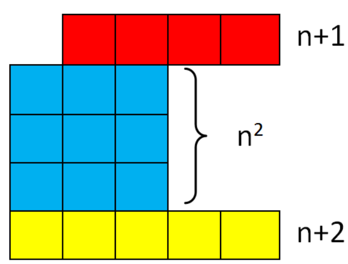
### *6) El problema del Crecimiento de Pilas*




El trabajo para los estudiantes inicia cuando se les presenta a los estudiantes un patrón de pilas, que a diferencia de los anteriores no comienza con la pila 1 sino con la pila 2. Ellos tienen que dibujar dos pilas anteriores y dos pilas posteriores. Es decir, la pila 0, la 1, la 5 y la 6. La resolución a esta solicitud permitió ver si los estudiantes identificaron regularidades en el patrón. Después de la revisión de sus hojas de trabajo, ahora se sabe que casi la mitad de estudiantes tuvo dificultad para dibujar la pila 0 y 1, pero esto no sucede para la pila 5 y 6. Existen diferentes maneras de visualizar el patrón y por consiguiente diferentes maneras de expresarlas, aunque al final todas resultan equivalentes.

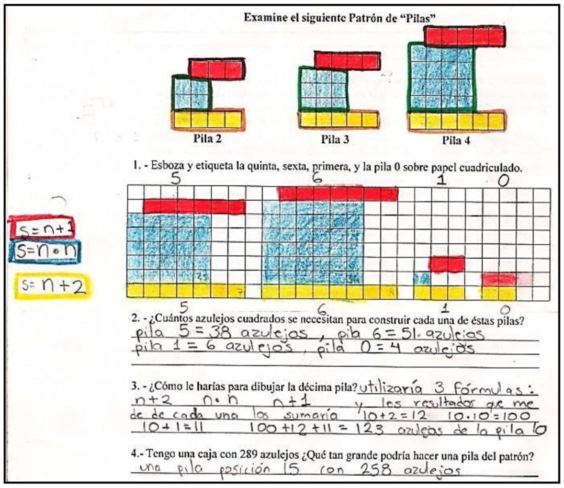
En este problema se produjeron distintos procedimientos. Son ocho los que a continuación se presentan, algunos son variantes de otros pero conducen a expresiones diferentes debido a su visualización. Se ejemplifica con la pila 3 en todos los procedimientos para hacer más evidente las diferencias entre ellos pero no significa que sólo con la pila 3 funciona el procedimiento, es válido para la pila "*n*" en cualquiera de éstos.

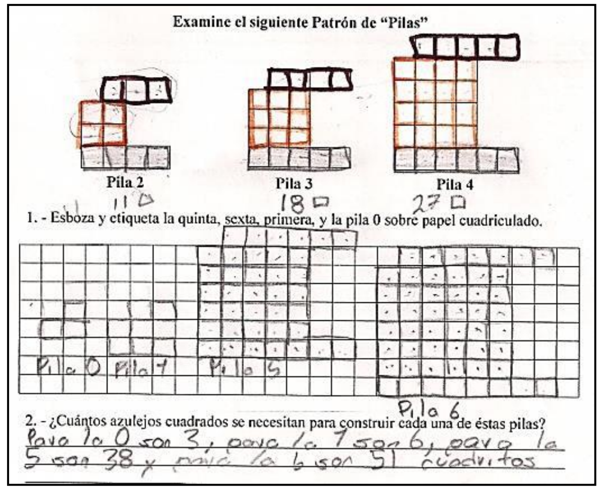
***Procedimiento 1**.* Este fue el más utilizado por los estudiantes. Consiste en fraccionar la pila en tres conjuntos de azulejos: Un cuadrado al centro, una fila debajo del cuadrado y una fila arriba del cuadrado. El cuadrado del centro tiene por medida de lado un número de azulejos igual al número de pila. Es decir, si la pila es la número 3, entonces cada lado del cuadrado tendrá 3 azulejos y 9 serán los que conformarán el cuadrado. La fila debajo del cuadrado tiene una cantidad de azulejos igual al número de la pila más dos y la fila de arriba tiene una cantidad de azulejos igual al número de la pila más uno.



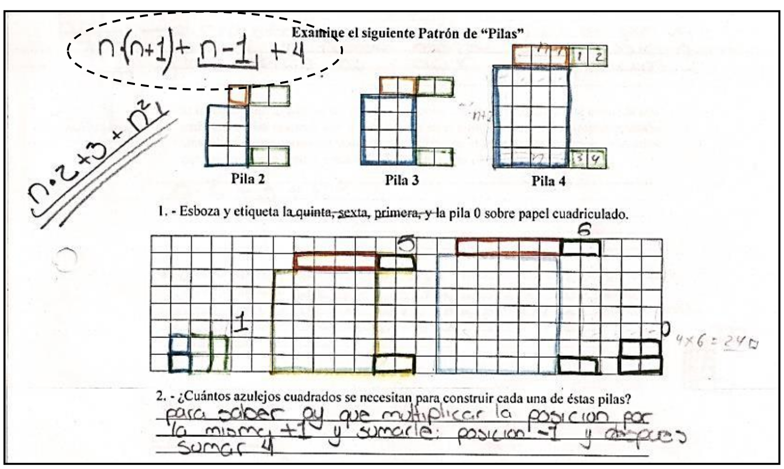
**Pila 3**

Las imágenes muestran como los estudiantes construyen y emplean tal procedimiento para dar respuesta a los cuestionamientos los cuales tienen como objetivo ir abriendo paso hacia la generalización del patrón.






***Procedimiento 2***. La pregunta de cuántos azulejos cuadrados se necesitan para construir las pilas 0,1, 5 y 6 puede ser respondida cuando se dibujan cada una de éstas. Una estudiante contestó: "*para saber hay que multiplicar la posición* [N° de pila] *por la misma, más 1 y sumarle la posición -1 y después sumar 4*". Observe imagen:




Ella escribe la expresión: $n(n+1)$ **+**$n$-$1$ **+** $4$, que nos permite entender lo que ella respondió en la pregunta antes mencionada, lo cual está estrechamente relacionado con la forma en que ella colorea las pilas presentadas en la imagen de su hoja de trabajo.

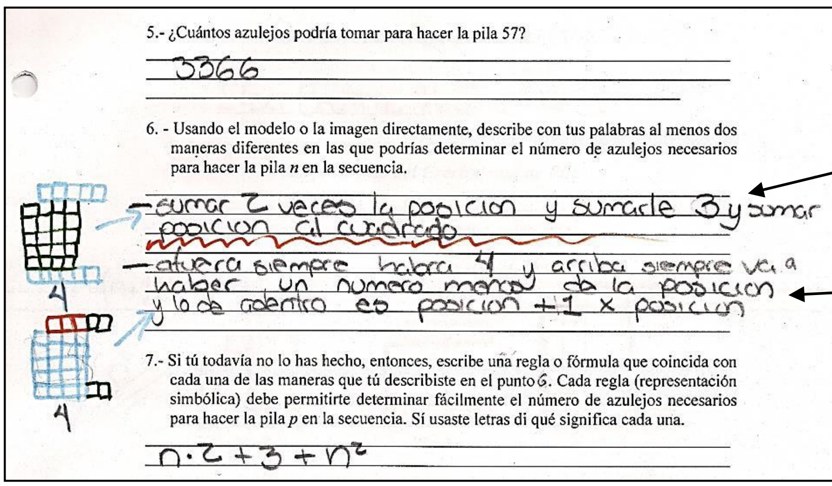
Cuando ella dice: "*hay que multiplicar la posición por la misma +1*…" se refiere a la expresión $n$ ($n$+1).

Cuando ella dice: "… *y súmale posición -1*…" se refiere a la expresión *n-1*.

Cuando ella dice: "…*y después sumar 4*"es lo que ella agrega como *+4*.

Ahora hace falta asociar éstas deducciones a las imágenes. El conjunto de que ella remarca con azul es un rectángulo que se construye con la expresión: *n* (*n*+1), cada uno de los multiplicandos de la expresión se refieren a los lados de dicho rectángulo; uno tiene el mismo número de azulejos que el número de la pila y el otro lado es el número de pila más uno. Luego, el conjunto de azulejos que la estudiante remarca de color naranja es el número de la pila menos uno y por último ella agrega los cuatro azulejos constantes coloreados de verde.

Ella deserta de este procedimiento y cambia a otro que se presenta más adelante como procedimiento 5.



5.- ¿Cuántos azulejos podría tomar para hacer la pila 57?

3366

6. - Usando el modelo o la imagen directamente, describe con tus palabras al menos dos maneras diferentes en las que podrías determinar el número de azulejos necesarios para hacer la pila *n* en la secuencia.

-sumar 2 veces la posicion y sumarle 3 y sumar posicion al cuadrado

-afuera siempre habra 4 y arriba siempre va a haber un numero menos de la posicion y lo de adentro es posicion +1 x posicion

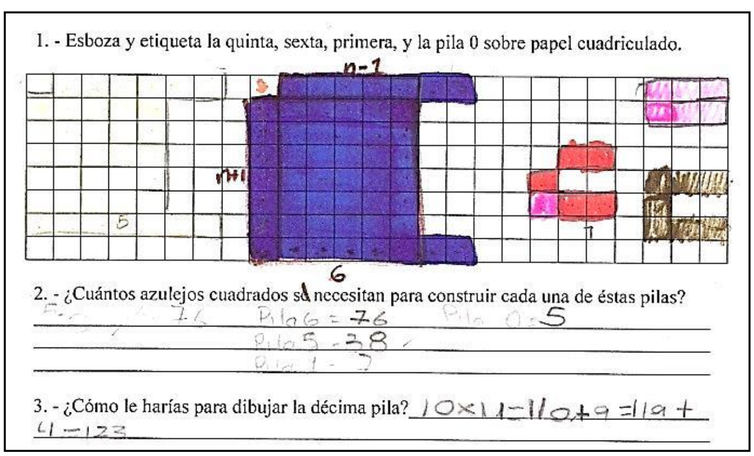
7.- Si tú todavía no lo has hecho, entonces, escribe una regla o fórmula que coincida con cada una de las maneras que tú describiste en el punto 6. Cada regla (representación simbólica) debe permitirte determinar fácilmente el número de azulejos necesarios para hacer la pila *p* en la secuencia. Si usaste letras di qué significa cada una.

$n \cdot 2 + 3 + n^2$

Ésta es la descripción del otro procedimiento que adopta. Aunque después de revisar su hoja nos percatamos que está mal interpretado por ella.

Este es la descripción del procedimiento que usó en un principio el cual está mejor comprendido por ella.

Otro estudiante también construye el mismo procedimiento. Observe lo que él hizo y la representación del procedimiento:



1. - Esboza y etiqueta la quinta, sexta, primera, y la pila 0 sobre papel cuadriculado.



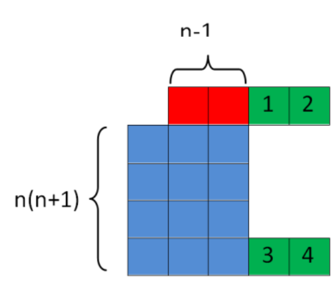
2. - ¿Cuántos azulejos cuadrados se necesitan para construir cada una de éstas pilas?

Pila 6 = 76 Pila 0 = 5

Pila 5 = 38

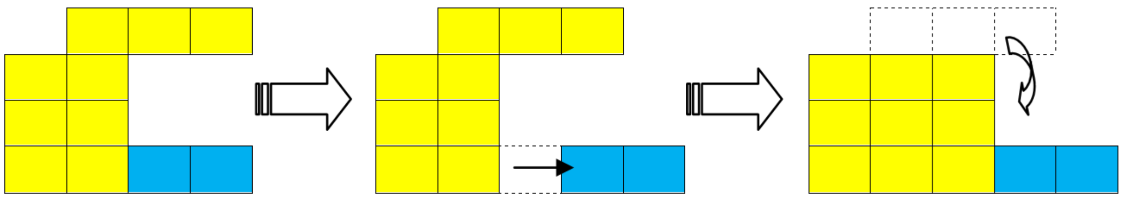
Pila 1 = 7

3. - ¿Cómo le harías para dibujar la décima pila? 10×11=110+9=119+4=123



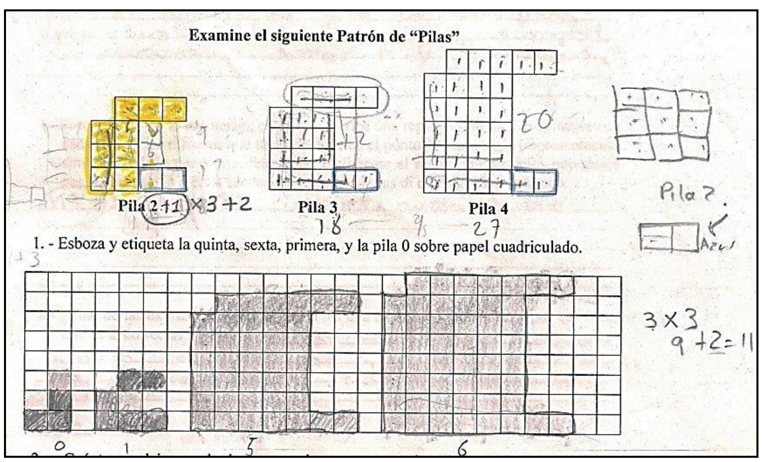

Pila 3

***Procedimiento 3***. Surge de un único estudiante. Él construye un cuadrado con azulejos y le suma dos azulejos como elementos constantes. La forma en que construye el cuadrado es movilizando una fila de azulejos de arriba hacia abajo en forma de columna y desliza dos azulejos de abajo hacia enfrente. Observe:

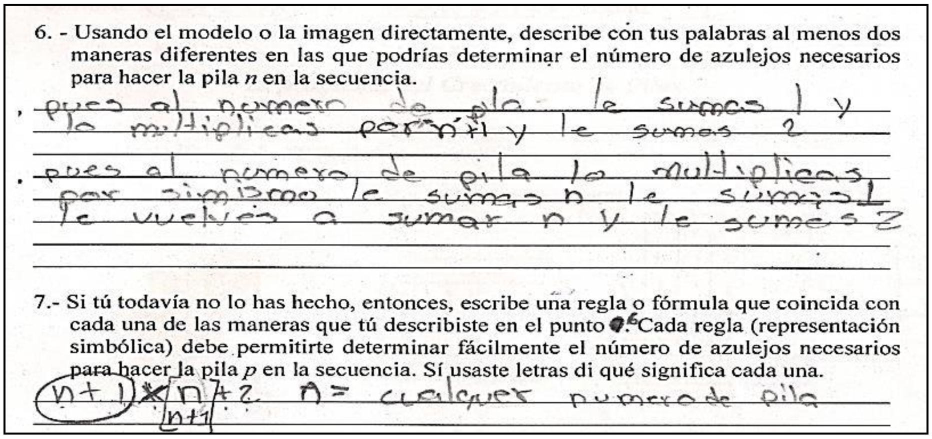


**Pila 2**

Él expresa su visualización como *(n+1) (n+1)+2*, en donde *(n+1) (n+1)* es el área del cuadrado y el "*+2*" son los azulejos restantes deslizados. Esta visualización la aplica para cada pila del patrón. Y como no hay una expresión algebraica que pueda elegir, en las hojas de trabajo, que se parezca a la suya, opta por la expresión: $n^2$ **+** *n+1* **+** *n+2*. Si su expresión *(n+1) (n+1)+2* se simplifica quedaría como: $n^2 + 2n + 3$.




Él explica su procedimiento en los primeros dos renglones de la pregunta 6 y agrega otra explicación de un procedimiento que él asocia a la expresión $n^2$ + *n+1* + *n+2* la cual al final elige como la correcta para la pila "*n*". La respuesta que da a la pregunta 7 es la que complementa a la 6.



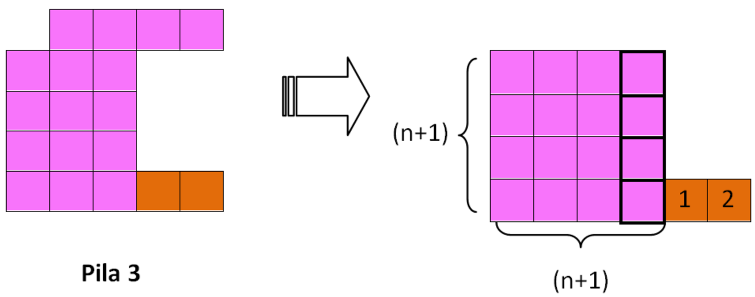
6. - Usando el modelo o la imagen directamente, describe con tus palabras al menos dos maneras diferentes en las que podrías determinar el número de azulejos necesarios para hacer la pila *n* en la secuencia.

- pues al numero de pila le sumas 1 y lo multiplicas por n+1 y le sumas 2
- pues al numero de pila lo multiplicas por si mismo le sumas n le sumas 1 le vuelves a sumar n y le sumas 2

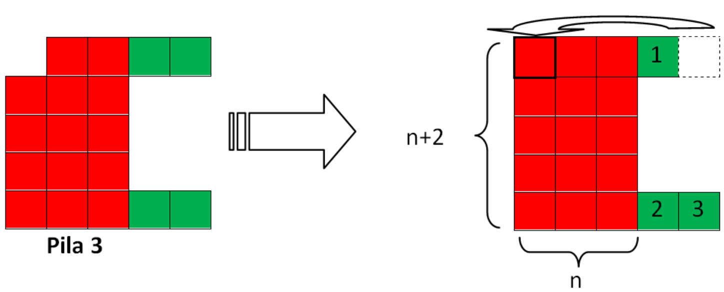
7.- Si tú todavía no lo has hecho, entonces, escribe una regla o fórmula que coincida con cada una de las maneras que tú describiste en el punto 6. Cada regla (representación simbólica) debe permitirte determinar fácilmente el número de azulejos necesarios para hacer la pila *p* en la secuencia. Si usaste letras di qué significa cada una.

(n+1) x (n+1) +2   n= cualquer numero de pila

Observe la representación gráfica:




***Procedimiento 4.*** Lo realizan dos estudiantes. Las anotaciones que hacen en sus hojas de trabajo permiten dilucidar en qué consiste éste. Ellos construyen un rectángulo moviendo un azulejo de la parte superior derecha hacia la esquina superior izquierda. De esta manera queda completo el rectángulo, que tiene por medidas: un lado igual al número de pila y el otro, igual al número de pila más dos. Como elementos constantes quedan tres azulejos fuera del rectángulo. Entonces, su fórmula *(n+2) (n) +3* se refleja en la pila así:




La expresión a la que ellos llegan: *(n+2) (n) +3*, es equivalente a: $n^2 + 2n + 3$.

Observe se las hojas de trabajo de los estudiantes:

4.- Tengo una caja con 289 azulejos ¿Qué tan grande podría hacer una pila del patrón?

una 16 pilas del patron y la formula sería $(n+2)\cdot(n+1)$

$(n+2 \cdot n)+3$

8.- ¿Cuál de las expresiones para la pila $n$ es una correcta? Subráyala ¿y por qué crees que es la correcta? porque al comprobarlos con la pila 1 y la pila 10

a) $n+2n+3$

b) $n^2 + n+2+3$

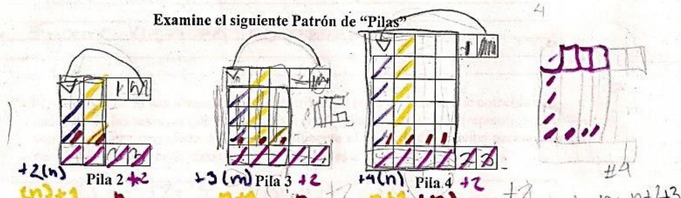
c) $n^2 + 2n +3$

d) $n^2+n+1+n+2$

$n^1 = 1+2\cdot 1+3$

$n^{10} = 10+2\cdot 10+3$

**Examine el siguiente Patrón de "Pilas"**

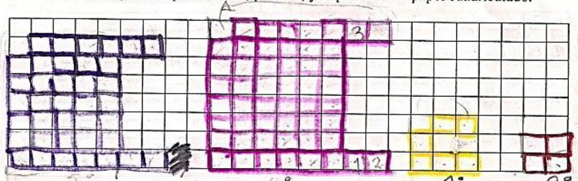



#4

$A= n\cdot n+2+3$

$n = P =$ pila#

1. - Esboza y etiqueta la quinta, sexta, primera, y la pila 0 sobre papel cuadriculado.




2. - ¿Cuántos azulejos cuadrados se necesitan para construir cada una de éstas pilas?

38 en la 5° 51 en la 6° 6 en la 1°
4 en la 0°

$(n+2)\cdot n+3$

3. - ¿Cómo le harías para dibujar la décima pila? aplicaría la misma fórmula en todos $(n+2)\cdot(n)+3$

$n+\cdot n+1$

4.- Tengo una caja con 289 azulejos ¿Qué tan grande podría hacer una pila del patrón?

Pila 15°

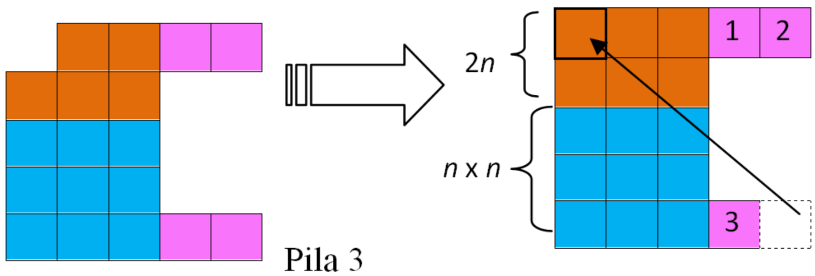
$17\times 15+3 = 258$

6. - Usando el modelo o la imagen directamente, describe con tus palabras al menos dos maneras diferentes en las que podrías determinar el número de azulejos necesarios para hacer la pila $n$ en la secuencia.

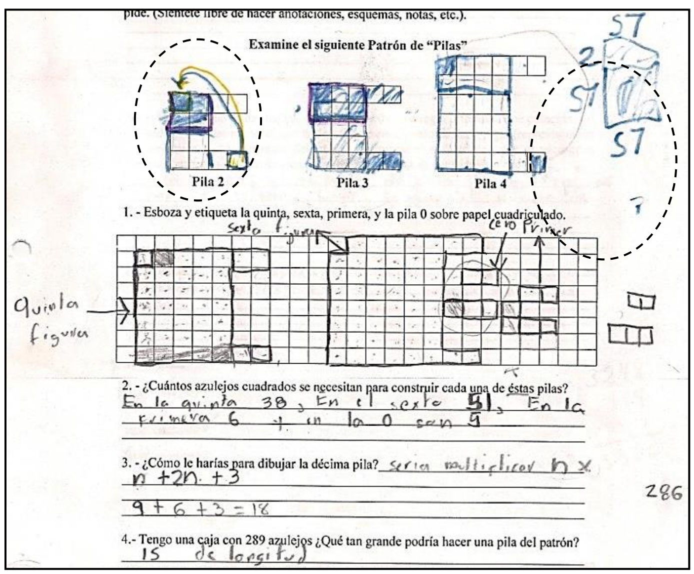
Primero aplicaría mi fórmula que es sacar el área del rectángulo más 3 sobrantes, es decir $(n+2)\cdot(n)+3$.

Fijarme bien en los datos de la base

***Procedimiento 5.*** El siguiente procedimiento lo desarrolla un sólo estudiante parece similar al anterior pero no lo es. En el anterior se construye un rectángulo y en éste procedimiento se construye un cuadrado y se ensamblan dos hileras de igual tamaño sobre éste. En otras palabras la pila se fracciona en tres conjuntos: un cuadrado, un rectángulo y tres azulejos. El rectángulo se conforma al deslizar un azulejo de la parte de abajo hacia la esquina superior izquierda observe:




Su visualización recae en la expresión: $n \times n + 2n + 3$ para determinar el número de azulejos necesarios para la pila "*n*". En donde $n \times n$ representa al cuadrado; *2n,* representa al rectángulo y *3* los azulejos restantes permanecen constantes en las pilas. Al final, él elige la expresión: $n^2 + 2n + 3$.


pide. (Siéntete libre de hacer anotaciones, esquemas, notas, etc.).

Examine el siguiente Patrón de "Pilas"

Pila 2 Pila 3 Pila 4

1. - Esboza y etiqueta la quinta, sexta, primera, y la pila 0 sobre papel cuadriculado.

2. - ¿Cuántos azulejos cuadrados se necesitan para construir cada una de éstas pilas?
En la quinta 38, En el sexto 51, En la primera 6 y en la 0 son 9

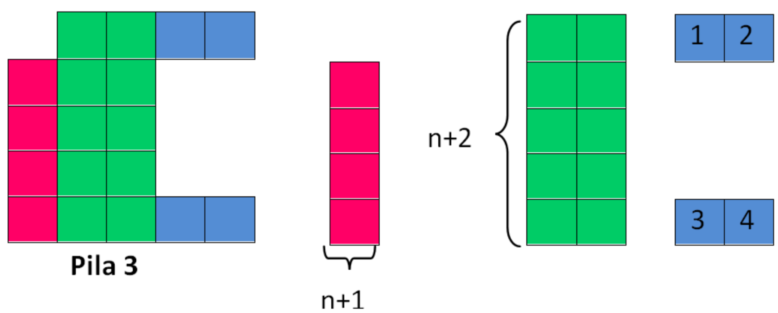
3. - ¿Cómo le harías para dibujar la décima pila? sería multiplicar n x n +2n +3
9 + 6 + 3 = 18

4.- Tengo una caja con 289 azulejos ¿Qué tan grande podría hacer una pila del patrón?
15 de longitud

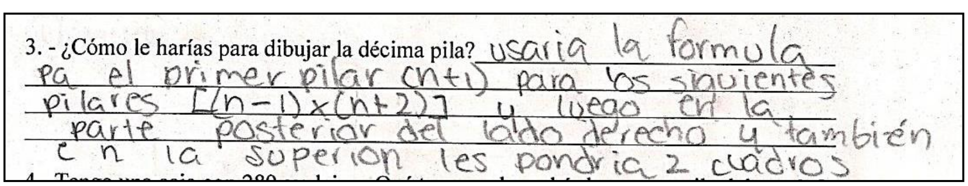
El círculo a la izquierda señala cómo el estudiante mueve el azulejo a otra posición en la que completa las dos hileras con un número de azulejos igual al número de la pila. El círculo de la derecha señala cómo el estudiante resuelve la pregunta de cuántos azulejos podría tomar para hacer a pila 57. Su respuesta fue

3366 azulejos. Lo que hizo según su procedimiento fue multiplicar el número de la pila por sí mismo, 57 por 57 obteniendo 3249. Luego multiplica 52 por 2 y obtiene 114. A estos resultados les suma los tres azulejos de esta manera obtiene los 3366 azulejos.

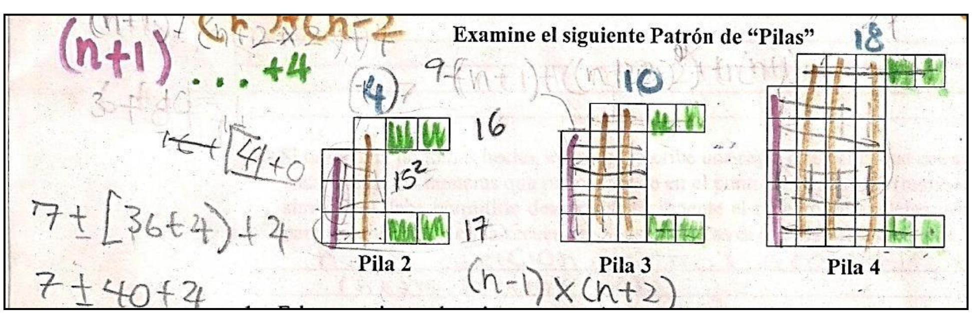
**Procedimiento 6**. Consiste en fraccionar las pilas en tres conjuntos: un rectángulo y una columna que aparecen como los elementos cambiantes; y cuatro azulejos que son el elemento constante. El rectángulo está conformado por el número de pila menos uno que sería la base y su altura es el número de pila más dos; la columna es el número de pila más uno y al final restan los cuatro azulejos de los extremos, dos arriba y de abajo. Observe el dibujo:




Éste procedimiento lo desarrollan dos estudiantes cada uno por su lado. Uno de los estudiantes lo describe cuando se le pregunta cómo dibujar la pila 10 y él contesta lo siguiente:

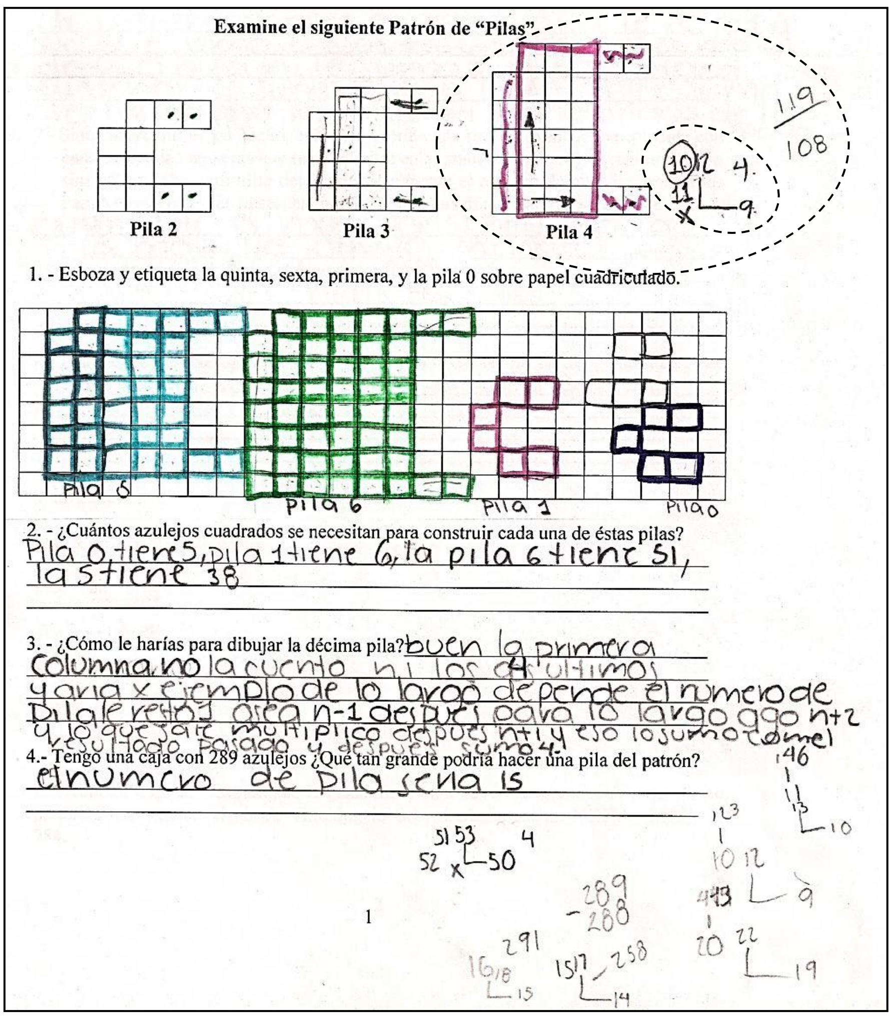

3. - ¿Cómo le harías para dibujar la décima pila? usaria la formula pa el primer pilar (n+1) para los siguientes pilares [(n-1)x(n+2)] y luego en la parte posterior del lado derecho y también en la superior les pondria 2 cuadros

Esta es la imagen que acompaña a éstas palabras:



Cuando dice: "*el primer pilar (n+1)*" se refiere a lo que marca con color rosa. Continúa diciendo: "*para los siguientes pilares [(n-1) x (n+2)]*" corresponde a lo que marca de color naranja, que es un rectángulo. Luego dice: "*y luego en la parte posterior del lado derecho y también en la superior les pondría 2 cuadros*" que son los 4 azulejos que señala con color verde. La fórmula que el estudiante establece se agrupa en la siguiente expresión: *n+1 [(n-1)(n+2)]+4* que simplificada es equivalente a la expresión. $n^2+2n+3$.

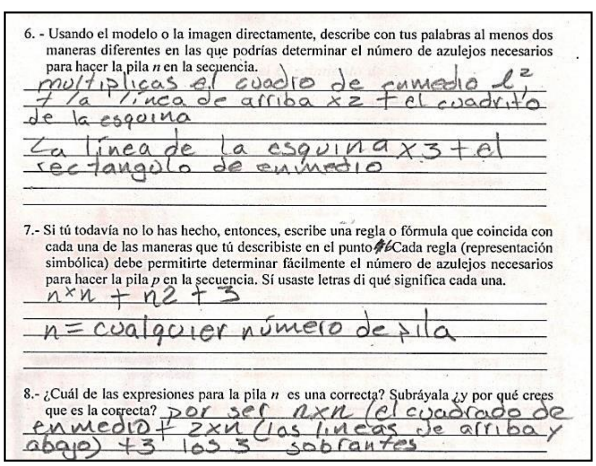
Una estudiante explica con sus propias palabras su fórmula para saber cuántos azulejos son necesarios para un número de pila cualquiera.




Ella dice: "*bueno la primera columna no la cuento* [la señala con una línea rosa] *ni los últimos* [los cuatro azulejos a la derecha] *y haría por ejemplo de lo largo* [ancho] *depende el número de pila le resto 1 o sea n-1, después para lo* *largo hago n+2* [el largo y ancho que señala con flechas, es el rectángulo] *y lo que sale multiplico, después n+1 y eso lo sumo con el resultado pasado y después sumo 4*”.

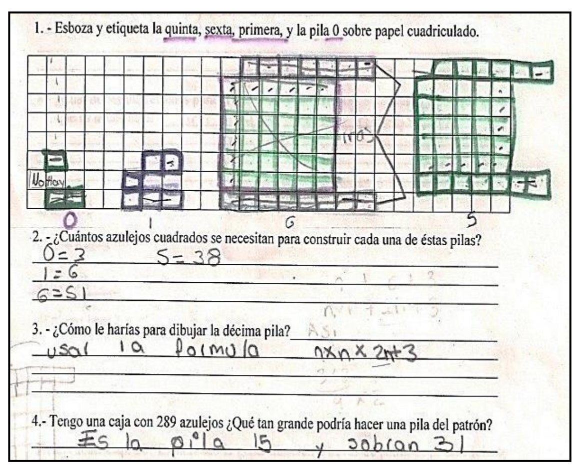
En la imagen también se señala cómo la estudiante ejecuta operaciones con un esquema de su creación que se conjuga con su descripción de la décima pila. El número “*10*” representa al número de pila, el número 9 representa a *(n-1)*, el número “*12*” representa a *(n+2)*, el “*11*” el número de la columna exterior al rectángulo y el “*4”* los azulejos que se agregan al final. Este esquema lo usa para encontrar la cantidad total de azulejos de diferentes pilas.
A final los estudiantes eligen las dos expresiones $n^2 +2n +3$ y $n^2 + n+1 + n+2$ de la hoja de trabajo, pues no había una como la que ellos construyeron.

**Procedimiento 7**. Esta forma de encontrar el número de azulejos para cualquier pila del patrón consiste en fragmentar la pila en cuatro conjuntos, resultó práctico distinguirlos a través de colores. Esta estrategia rápidamente la hicieron suya los estudiantes. Ellos describen con sus palabras cómo hallar la cantidad de azulejos para la pila “*n*”. Dos estudiantes escriben lo siguiente:


6. - Usando el modelo o la imagen directamente, describe con tus palabras al menos dos maneras diferentes en las que podrías determinar el número de azulejos necesarios para hacer la pila *n* en la secuencia.
multiplicas el cuadro de enmedio $l^2$, + la linea de arriba x2 + el cuadrito de la esquina
La linea de la esquina x3 + el rectangulo de enmedio

7.- Si tú todavía no lo has hecho, entonces, escribe una regla o fórmula que coincida con cada una de las maneras que tú describiste en el punto #6 Cada regla (representación simbólica) debe permitirte determinar fácilmente el número de azulejos necesarios para hacer la pila *p* en la secuencia. Sí usaste letras di qué significa cada una.
nxn + n2 + 3
n = cualquier número de pila

8.- ¿Cuál de las expresiones para la pila *n* es una correcta? Subráyala ¿y por qué crees que es la correcta? por ser nxn (el cuadrado de enmedio) + 2xn (las lineas de arriba y abajo) +3 los 3 sobrantes

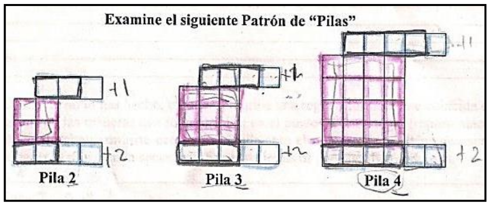

1. - Esboza y etiqueta la quinta, sexta, primera, y la pila 0 sobre papel cuadriculado.

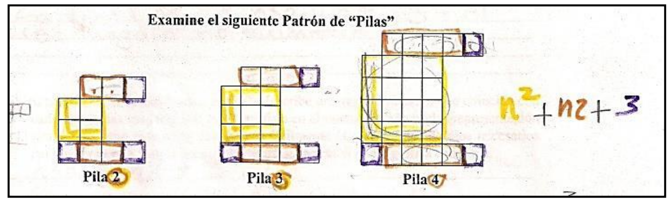
2. - ¿Cuántos azulejos cuadrados se necesitan para construir cada una de éstas pilas?
0=3 5=38
1=6
6=51

3. - ¿Cómo le harías para dibujar la décima pila?
usar la formula nxnx2n+3

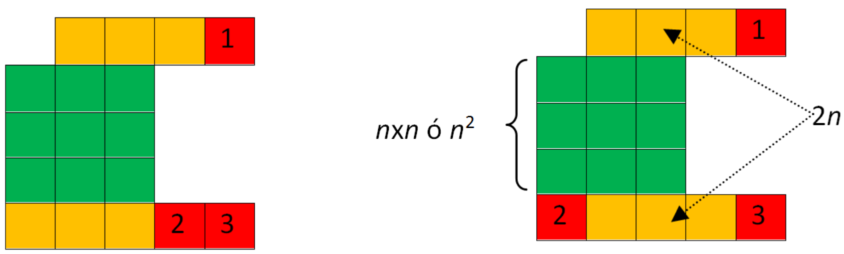
4.- Tengo una caja con 289 azulejos ¿Qué tan grande podría hacer una pila del patrón?
Es la pila 15 y sobran 31

Él expresa su visualización como: *nxn +n2 +3*. La expresión *nxn*, representa al cuadrado del centro que tiene como medida de lado el número de pila; *n*2 representa dos conjuntos de azulejos en hileras o rectángulos, uno en la parte superior del cuadrado y otro en la inferior, con una cantidad de azulejos cada uno igual al número de pila, por esta razón lo expresa como *n*2 ó 2*n* y el 3 son los azulejos restantes. Observe los dibujos de ambos estudiantes:



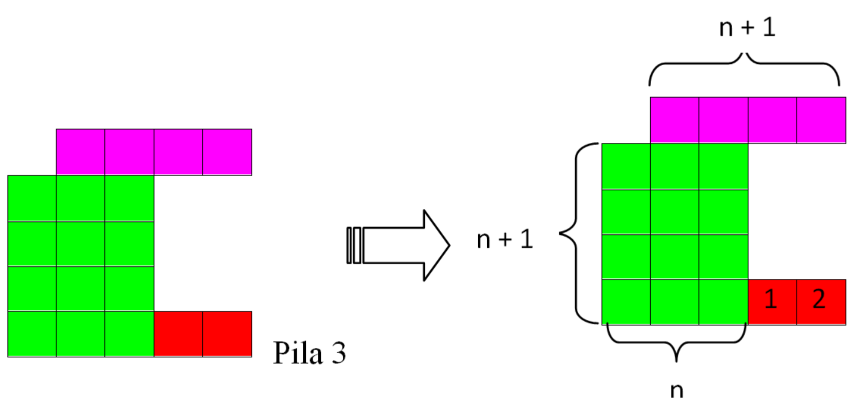




Enseguida se muestran las representaciones gráficas de cada uno respectivamente.

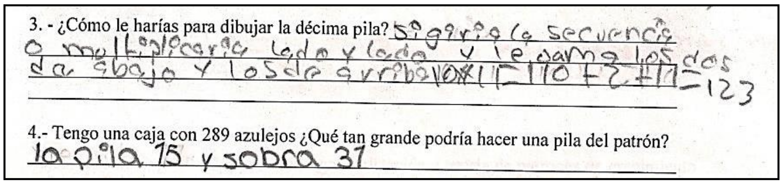



**Pila 3**

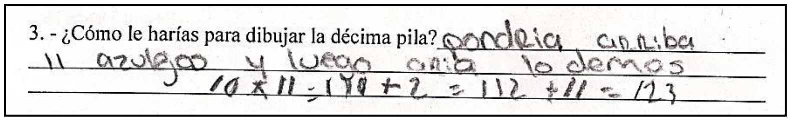
**Procedimiento. 8**. Lo realizan dos estudiantes, separan la pila en tres partes. Dos de éstas son cambiantes y la otra es constante. Una de las partes cambiantes es un rectángulo que tiene por ancho un número igual al número de pila y de largo el número de pila más uno y la otra parte cambiante es una hilera en la parte superior del rectángulo con una cantidad de azulejos igual al número de pila más uno. La parte constante está representada por dos azulejos. Observe la siguiente representación:



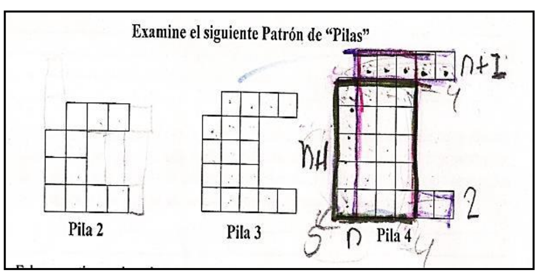
Uno de los estudiantes explica cómo dibujar la pila 10 siguiendo este procedimiento:

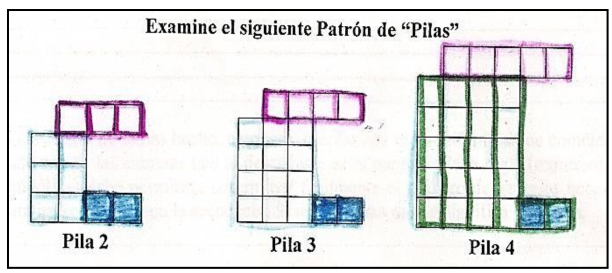

3. - ¿Cómo le harías para dibujar la décima pila? Siguiendo la secuencia o multiplicaría lado y lado y le sumo los dos de abajo y los de arriba 10x11 = 110 + 2 + 11 = 123

4.- Tengo una caja con 289 azulejos ¿Qué tan grande podría hacer una pila del patrón? la pila 15 y sobra 37

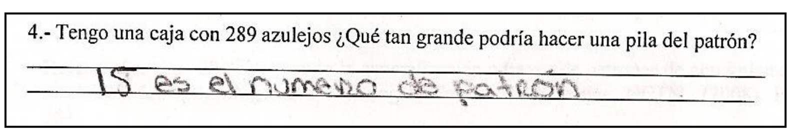

3. - ¿Cómo le harías para dibujar la décima pila? pondria arriba 11 azulejos y luego abajo lo demas 10 x 11 = 110 + 2 = 112 + 11 = 123

Lo que él hace primero es obtener la cantidad de azulejos del rectángulo expresado así: *n(n+1)*. Él multiplica 10x11= 110 a este resultado le suma los dos azulejos constantes después agrega el número de azulejos de la hilera superior que está representada por *n+1*, que en este caso es 11 y al final obtiene 123 azulejos que son los que se requieren para construir la décima torre.

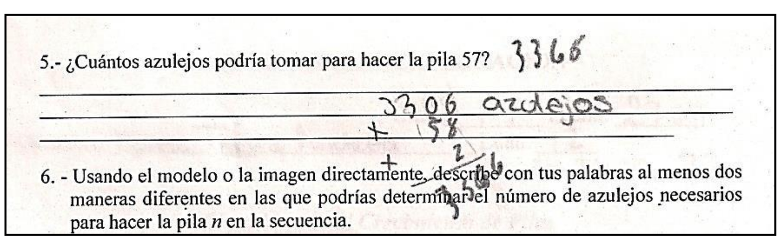



Ellos no desertan de su procedimiento, es eficaz para dar respuesta a cuestionamientos como los siguientes:


4.- Tengo una caja con 289 azulejos ¿Qué tan grande podría hacer una pila del patrón?

15 es el numero de patron

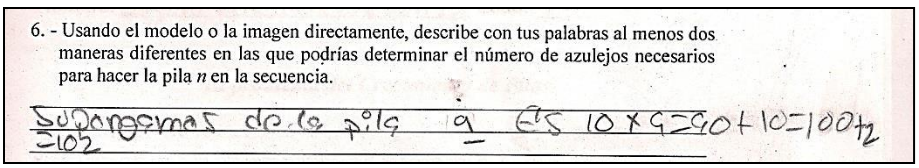

5.- ¿Cuántos azulejos podría tomar para hacer la pila 57? 3366

3306 azulejos
+ 58
+ 2
3366

6. - Usando el modelo o la imagen directamente, describe con tus palabras al menos dos maneras diferentes en las que podrías determinar el número de azulejos necesarios para hacer la pila *n* en la secuencia.

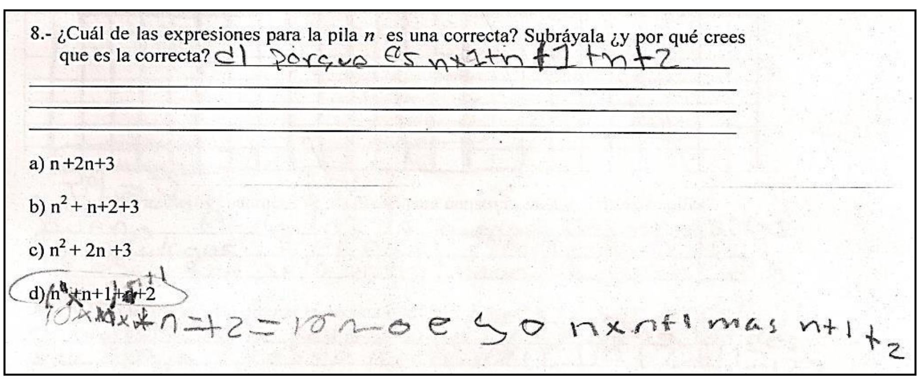
Las respuestas son correctas. Por ejemplo, en la pregunta 5 está escrita la operación que los llevó a resolverla. El número 3306 es resultado de multiplicar 57x58 que son los azulejos del rectángulo, a esta cantidad se le suma 2, que son los azulejos constantes y también se agregan 58 azulejos que son los de la hilera superior. De esta sumatoria se obtiene 3366 que son el número de azulejos para hacer la pila 57.

La estudiante no logra escribir el procedimiento de forma algebraica y elige la expresión $n^2 + n+2 + 3$ de las opciones que se le presentan en su hoja de trabajo, pues no encuentra una expresión que se asemeje a su procedimiento. El otro estudiante, a pesar de que no encuentra una que exprese su procedimiento trata de modificar una de las opciones que se le presentan pero al final el mismo la escribe. La cual es aceptable. Observe:



6. - Usando el modelo o la imagen directamente, describe con tus palabras al menos dos maneras diferentes en las que podrías determinar el número de azulejos necesarios para hacer la pila *n* en la secuencia.

Suponemos de la pila 9 es 10x9=90+10=100+2 =102



8.- ¿Cuál de las expresiones para la pila *n* es una correcta? Subráyala ¿y por qué crees que es la correcta? d) porque es nx1+n+1+n+2

a) n+2n+3

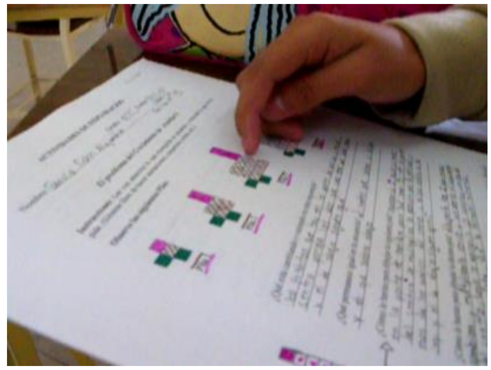
b) $n^2$ + n+2+3

c) $n^2$ + 2n +3

d) n x n+1+n+2

10x10x+n=+2=102 o es o nxn+1 mas n+1+2

Las siguientes son imágenes de los estudiantes de alto rendimiento en matemáticas resolviendo los problemas de generalización de patrones en un ambiente de lápiz y papel.





### 3.3.2. ANÁLISIS DE LOS DATOS OBTENIDOS EN LA CUARTA FASE. ACTIVIDAD DE LOS ESTUDIANTES EN EL AMBIENTE DIGITAL

Este apartado forma parte de la tercera sección del capítulo, aquí se presenta el análisis de la resolución de los estudiantes a los problemas sobre generalización de patrones con la ayuda del manipulativo virtual usado en esta investigación. El análisis corresponde a la cuarta y última fase del trabajo de campo, en ésta participaron alumnos de primer grado de bajo rendimiento académico en matemáticas. Cada uno de los problemas de patrones, tal y como les fueron presentados a los estudiantes en esta fase, se pueden consultar en el Anexo B.

El análisis de cada uno de los seis problemas se realiza de forma detallada y en el orden en el que los estudiantes los resolvieron. En éste se da a conocer los procedimientos a los que llegaron los alumnos en la cuarta fase y si estos guardan alguna correspondencia con los que desarrollaron sus compañeros de alto rendimiento en la tercera fase. Es decir, el análisis nos confirmará si las rutas de aprendizaje que se generaron a través del análisis de los procedimientos de resolución de los estudiantes avanzados cumplieron el objetivo de guiar a los estudiantes de bajo rendimiento a la comprensión y resolución de problemas del mismo tipo. Así también el análisis hace saber la pertinencia del uso del manipulativo virtual como un mediador para facilitar el aprendizaje a estudiantes de bajo desempeño en matemáticas en tópicos como el que aquí se puso en juego.

Se adelanta al lector que los argumentos incluidos en nuestras hipótesis los cuales tienen que ver con las ventajas de compartir el conocimiento entre pares, particularmente de aquellos con más capacidad en la comprensión de problemas matemáticos para aquellos que requieren de otras formas de abordar los problemas, han resultado idóneos para el propósito de hacer una clase de matemáticas más inclusiva. En otras palabras, para que más estudiantes lleguen a la comprensión de los problemas matemáticos planteados por el profesor y en el mejor de los casos consigan resolverlos.

Para iniciar cada una de las actividades sobre la generalización de patrones el estudiante ingresaba a la dirección electrónica: http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html la cual abre el manipulativo virtual. Las instrucciones precisas estaban en las hojas de trabajo para que el estudiante actuara de manera autónoma. Sólo en algunos casos, por ejemplo, cuando se cambiaba la sección del manipulativo para usarse en otro problema y para ciertos alumnos que requerían de instrucciones más puntuales, se daban sugerencias o recomendaciones breves en relación al manejo del manipulativo para conocer y usar las herramientas que les posibilitaran contestar los cuestionamientos que darían solución al patrón presentado.

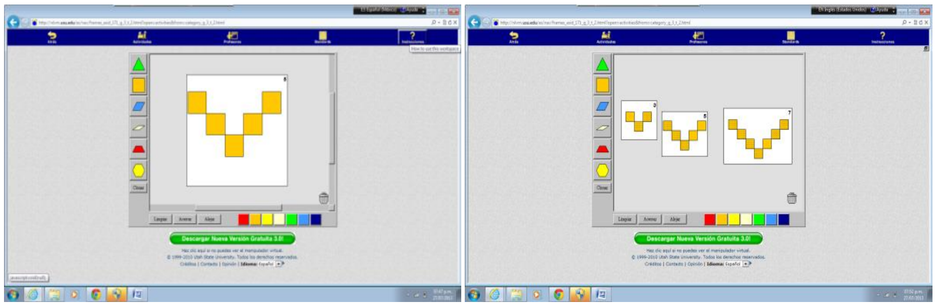
Enseguida inicia el análisis de los seis problemas de patrones resueltos bajo un ambiente de aprendizaje virtual en el siguiente orden:

1. La Letra ¨V¨
2. El Diseño de la Viga
3. Las Estampas en el Cubo
4. El Crecimiento de Azulejos I
5. El Crecimiento de Azulejos II
6. El Crecimiento de Pilas

El problema de ***LA LETRA "V"***

El problema contenía ocho preguntas, las cuales tenían como objetivo que el estudiante reconociera o identificara regularidades en el patrón lineal, éstas le permitirían discernir sobre la conformación y la cantidad de bloques en cada *Letra V* del patrón.

Después de revisar las hojas de trabajo se encontró que casi todos los estudiantes observan el aumento de bloques de una figura a otra, ésta es una primera observación que se debe considerar para avanzar en la resolución del problema. Para responder las primeras cuatro preguntas de las hojas de trabajo, los estudiantes hacen listados a través de un conteo simple. Algunos estudiantes dan continuidad a la tabla aumentando dos bloques a la secuencia iniciada en la tabla. De los listados que realizan, casi todos culminan en la figura 15. Esto es porque más adelante se les hace la pregunta de cuántos bloques tendrá la fig. 15. Hasta ese momento no parecían tener dificultades en dar respuesta a tal pregunta pero no fue así para otros que iniciaban la búsqueda de un procedimiento más práctico, el cual surge cuando comienzan a construir las primeras Letras V del patrón.



Hay dos cosas que suceden al construir las Letras V con el manipulativo. La primera, para conformar las primeras cuatro Letras V o figuras del patrón tienen como referente las imágenes que están en las hojas de trabajo, lo que les implica observar y contar el número de bloques de éstas para construir figuras iguales con el manipulativo y para continuar construyendo las figuras subsecuentes con las características que definen al patrón, ellos deben percatarse de cuánto aumentan los bloques de una figura y la siguiente. Observe lo que dicen los estudiantes:

- *“Aumenta porque la figura va aumentando”*
- *“Aumenta porque el patrón aumenta de 2 en 2”*
- *“Aumenta porque así es la secuencia, va aumentando de manera proporcional”*

La segunda, el construir con el manipulativo virtual las Letras V del patrón cada vez más grandes para saber cuántos bloques las conforman, ellos llegan a un punto en que se ven obligados a buscar un procedimiento, sin necesidad de construir todas las Letras V que anteceden a la que está en cuestión, éste les permita saber la cantidad exacta de bloques que forman cualquier Letra V del patrón. Entonces, ellos comienzan a observar más detenidamente las Letras V construidas, en otras palabras, buscan cosas comunes entre las Letras V construidas para reproducir esas características en otras más distantes en la secuencia.

Para contestar las preguntas de cuántos bloques estarán en la fig. 15 o Letra V número 15 y cómo saber la cantidad de bloques de cualquier Letra V del patrón. Los estudiantes de la cuarta fase llegan a tres procedimientos, dos de éstos fueron también encontrados por sus compañeros en la tercera fase (alumnos avanzados). Enseguida se describen los tres procedimientos a los que llegaron los alumnos de bajo rendimiento en matemáticas usando el manipulativo virtual.

*1) Procedimiento a través del número de figura antecesora*.

Los alumnos inician la resolución del problema realizando listados (ayudados por la herramienta de conteo que tiene el manipulativo) para hallar el total de bloques de una figura. Pero este ejercicio se vuelve inoperante cuando se trata de encontrar una figura lejana en la secuencia, dado que se tendría que hacer una lista extensa para llegar a saber la cantidad de bloques necesarios para construirla.

Ellos saben que la cantidad de bloques de una figura a otra aumenta en dos. Entonces tienen que conocer cuántos bloques tiene la Letra V anterior y sólo aumentarle dos para obtener la cantidad de bloques de la figura deseada. Observe lo que dijo un estudiante para el caso de la fig. 15: "*29 bloques, porque fui sumando de dos en dos porque cada figura va aumentando dos veces*". Esta manera inicial de conocer la cantidad de bloques de una figura se transforma en otra que resulta eficaz para resolver el problema de la Letra V y generalizar el patrón. Observe la respuesta de otro alumno a la misma pregunta de la fig. 15: "*29 bloques porque es la sucesión, a la cantidad se le suma su antecesor 2+1 = 3*". En esta respuesta, el joven se refiere a la Letra V número 2, a la cual le suma el número de figura antecedente que es 1, obtiene 3 que resulta ser la cantidad de bloques para la Letra V número 2. En otras palabras, si se quiere saber la cantidad de bloques de cierta Letra V del patrón, lo primero es conocer su número de figura o la posición que ocupa en la secuencia y a éste número sumarle el número de figura anterior, el resultado de la sumatoria será la cantidad total de bloques de dicha la Letra V. Por ejemplo, si se quisiera saber la cantidad de bloques para la Letra V número 72, entonces al 72 se le suma el número de Letra V anterior que es 71 y se obtiene 72+71 = 143, este resultado es la cantidad de bloques con los que se construiría la Letra V número 72 en el patrón. Este procedimiento deriva de sus conocimientos aritméticos previos, un recurso de primera mano, que encontró su base en el número de figura y el número de figura antecesor, el cual matemáticamente se escribe: $n + (n\text{-}1)$ donde $n$ es el número de figura y la expresión simplificada es: $2n\text{-}1$.

En correspondencia con la categorización de Rivera, este tipo de generalización algebraica recae en la de tipo constructiva- no estándar- aditiva.

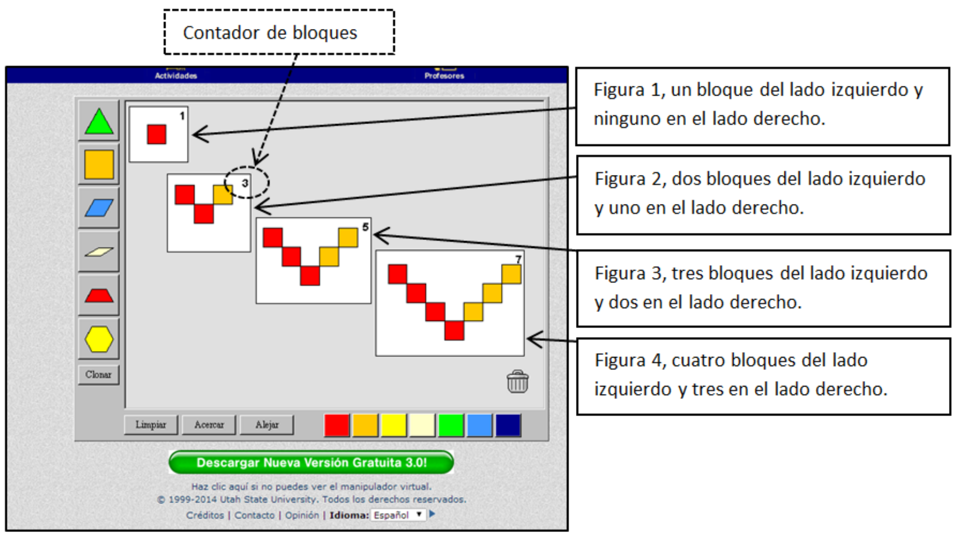
*2) Procedimiento a través de la separación de la Letra V en dos partes*

Este procedimiento también parte de listados de conteo simple (apoyados por la herramienta del manipulativo) que evidencian el aumento de dos bloques de una figura y la siguiente, pero sus observaciones van más allá. Cuando construyen las figuras en el manipulativo virtual ellos visualizan a la Letra V en dos secciones: los bloques del lado izquierdo, sería una sección y los bloques del lado derecho, la otra sección. Ellos se percatan que la cantidad de bloques que forman un lado (o sección) de la Letra V, de la que se está tratando, es igual al número de la posición que ocupa ésta en el patrón y el otro lado tendrá la misma cantidad de bloques menos uno. Es decir, si la Letra V es la número 47, uno de sus lados o una sección tendrá 47 bloques y el otro lado se formara con 46 bloques. Las respuestas que dan los estudiantes muestran este procedimiento para obtener el total de bloques en el caso de la fig. 15, observe:

> "*R = 29 sumo por ejemplo: figura 15 son 15 de un lado y 14 del otro solo se suma y ya*"

Este procedimiento al igual que el anterior involucra el número de Letra V o el número de posición que ocupa en la secuencia para construir cualquier Letra V y para saber cuántos bloques la conforman. La apropiación de este procedimiento surgió de la construcción de las Letras V con el manipulativo, pues se tiene que saber cuántos bloques colocar en cada lado de la Letra V y a su vez permite deducir la relación entre el número de bloques de una lado y el número de figura, la cual no es tan visible para muchos estudiantes cuando sólo se realizan listados numéricos que muestran la cantidad de bloques de figuras consecutivas. Lo que se quiere decir es que la manipulación y visualización del objeto hace que se hagan evidentes las características que lo definen. En varios casos de estudiantes, el procedimiento evoluciona haciéndolo más operacional. Observe la imagen y las respuestas de alumnos cuando se les pregunta cómo podrían saber la cantidad de bloques en cualquier Letra V del patrón:

- *"por el número de la figura x 2 menos 1, por ejemplo si tienes la figura 5, del lado izquierdo pones 5 [bloques] y del otro [lado] 4, dan 9"*
- *"el número de la fig. x 2-1"*




El visualizar la Letra V en dos secciones les permite traducirlas a un sentido numérico. Es decir, una sección es igual al número de figura y la otra, es el número de figura disminuido en uno. En un sentido simbólico, si $n$ es el número de figura, la cantidad de bloques para cada sección se expresaría como: $n + (n-1)$ para hallar los bloques de la figura $n$. Esta expresión se reduce a: $2n-1$. Otra ventaja para los estudiantes al visualizar la Letra V en dos secciones, aunque no necesariamente a través de ésta, es que una vez reconocida la asimetría de la cantidad de bloques de cada lado de la Letra V que al ser sumados para obtener el total, los lleva a detectar que el resultado es siempre un número impar. Esta característica la utilizan para justificar el por qué no hay una figura o Letra V que se construya con sólo 36 bloques y mucho menos que existan dos Letras V que tenga un número igual de bloques en la secuencia. Observe lo que contestan los alumnos al respecto en las dos últimas preguntas de la hoja de trabajo:

- *“No, porque en cada línea vertical de la V hay una más que otra y como 36 es par quedarían desiguales”*
- *“No, porque no son los mismos cuadritos de ambos lados”*
- *“No, porque de un lado sería más grande por un lado”*
- *“No porque todos los resultados son impares”*

El hecho de detectar que el total de bloques para construir cada una de las Letras V del patrón es un número impar, también es detectado por casi todos los estudiantes avanzados de la tercera fase.

En este procedimiento los estudiantes desarrollaron dos tipos de generalizaciones: la constructiva- no estándar- aditiva (la más recurrente) y la constructiva -no estándar- multiplicativa. Algunos alumnos expresan, en un lenguaje no simbólico, el primer tipo de generalización así: “*El mismo número que piden [N° de Letra V] en el lado izquierdo y uno menos del lado derecho y después se suma todo*”. Para el segundo tipo un estudiante escribió: *“multiplicar x 2 la letra V que quieres y el resultado le restas uno”.*

*3) Procedimiento a través de la separación de la letra V en tres secciones*

La visualización de la Letra V en tres secciones propicia un procedimiento que pocos estudiantes realizan. Consiste en que al construir una Letra V, se considere un bloque como base o vértice de sus lados, esto hace que haya una misma cantidad de bloques para cada lado. Por ejemplo, la Letra V número 8. Cada lado estaría conformado por 7 bloques y se agregaría un bloque que actúa como vértice de la figura. Observe las imágenes:

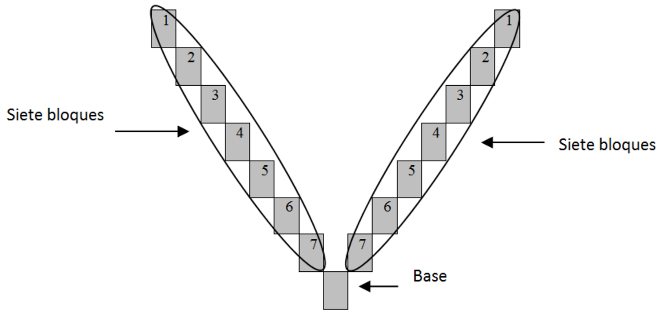
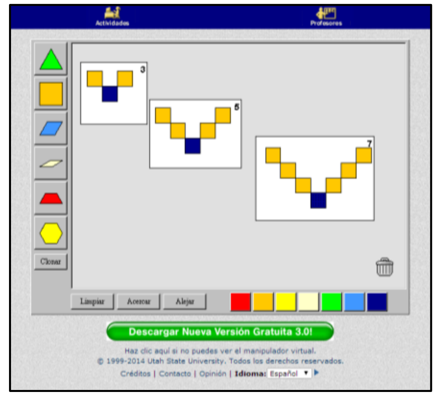



Fig. 8




Esta visualización implica varias consideraciones. La primera, existe una simetría numéricamente hablando con respecto a los lados de la Letra V que proviene de disminuir en uno el número (o posición) de Letra V de la que se trate. La segunda consideración, es que al realizarse lo anterior se está involucrando el número de Letra V en el patrón, dato que se ha considerado para desarrollar los dos procedimientos anteriores, de manera que resulta ser relevante su empleo. De modo que si se desconoce este dato, la construcción de la figura se imposibilitaría. La tercera, el realizar una descomposición de la figura en varias secciones implica más esfuerzo para expresar cada parte y luego reunirlas en una sola expresión, que de ser necesario, se tendrá que simplificar. Pero para los fines de esta investigación, el procedimiento realizado por los alumnos es suficiente para reconocer que se hizo una abstracción de la generalidad del patrón. Dado que con este procedimiento no sólo se puede construir sino saber cuántos bloques tiene cualquier Letra V del patrón.

Algebraicamente la expresión que representa a este procedimiento sería: *2(n-1)*, que son los lados de la Letra V, y se le sumaría "*1*" que es el bloque vértice o base que sostiene a los lados mencionados antes. Entonces la expresión quedaría así: *2(n-1)+1*, luego de ser simplificada se llega a *2n-1*. Desde la tipología de Rivera, la visualización del problema que se describió llevó a los alumnos a una generalización constructiva- no estándar-multiplicativa y en algunos casos la expresión que escribieron fue estándar, es decir, simplificaron la expresión que proporcionaba la cantidad de bloques para cualquier Letra V del patrón.

En general, la resolución del problema de la Letra V por parte de los estudiantes de bajo rendimiento en matemáticas con la mediación del manipulativo virtual fue benéfica, pues más de la mitad de ellos lo resolvieron desde tres distintas visualizaciones.  Traducidas a tres procedimientos. Dos de éstos fueron desarrollados por sus compañeros de alto rendimiento en matemáticas en la tercera fase. Es decir, visualizaron la composición de la Letra V de otra manera que aquí se describió como el segundo procedimiento (equivalente a los otros dos). Es alentador que los estudiantes de bajo rendimiento hayan podido encontrar distintas formas de visualizar el problema de la Letra V y llegar a generalizar el patrón bajo este ambiente de aprendizaje virtual. En otras palabras, el construir las figuras del patrón con el manipulativo, manejarlas y tener la visualización de éstas influyó en el acercamiento e interés para generar maneras más prácticas o eficientes de resolver problemas de este tipo.

El problema del ***DISEÑO DE LA VIGA***

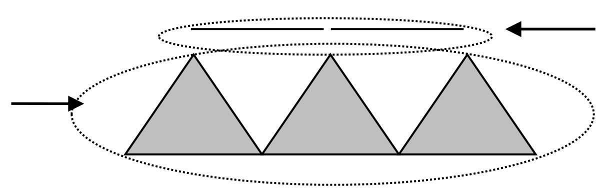
De los estudiantes que participaron en esta cuarta fase, más de la mitad de ellos resolvieron el problema del Diseño de la Viga con un procedimiento general. Las observaciones que hacen les sirvieron para llegar a un procedimiento que generaliza el patrón, comienzan con listados de conteo simple para determinar la cantidad de barras necesarias para construir las primeras vigas del patrón; hacen dibujos de distintas longitudes de vigas en donde se aprecia que cuentan una y otra vez las barras que las forman; utilizan colores para distinguir barras formando conjuntos de un mismo color que son representados por un número, una expresión en lenguaje natural o semialgebraico. Estas observaciones avanzan hacia otras con más relevancia porque conducen a los alumnos a detectar regularidades en el patrón. Por ejemplo, reconocer que cada que se incrementa la longitud de la viga en uno, aumenta en cuatro la cantidad de barras de una viga, y a su vez, el asimilar esta regularidad los conduce a desarrollar un procedimiento de resolución que generalice el patrón. Otra regularidad es reconocer que las barras de la base de cualquier viga son una más que las barras superiores o dicho de otro modo, las barras superiores son una menos que las barras de la base de cualquier viga.

Las primeras cinco preguntas de las hojas de trabajo tenían la intención de que el estudiante prestara atención u observara estas regularidades que le permitieran encontrar las relaciones que definen el patrón como por ejemplo, la relación entre la longitud de la viga y las barras de la base. Después de revisar las respuestas dadas por los estudiantes a tales preguntas se confirma que se logró la intención de éstas, pues los condujeron a la generalización del patrón.

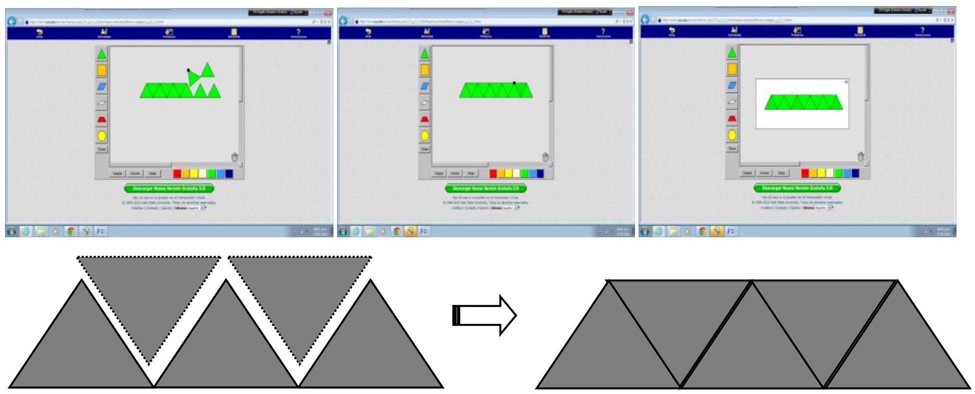
En la tercera fase, en un ambiente de lápiz y papel, los estudiantes avanzados llegaron a cuatro procedimientos de resolución distintos, aunque equivalentes. En esta última fase, en un ambiente digital, los estudiantes de bajo rendimiento también llegaron a resolver el problema mediante tres de los cuatro procedimientos. Lo destacable de la resolución del problema entre éstas dos fases es que en la tercera uno de los procedimientos de resolución sólo lo llevaron a cabo dos estudiantes y en la cuarta fase tal procedimiento fue al que más alumnos llegaron. Enseguida se describe éste y después se continúa con los otros dos procedimientos.

*1) Procedimiento a través de una conformación de triángulos*

Este procedimiento que resaltamos se basa en visualizar a la viga como una conformación de triángulos unidos por las barras superiores.

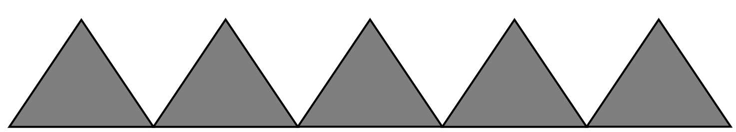


La razón de llegar a tal procedimiento tiene que ver con la forma en que se construyen las vigas con el manipulativo virtual. Con éste no se pueden construir las vigas desplazando barras individuales, es decir, colocar barra por barra para formar una viga sino que se tienen que usar triángulos equiláteros pre-construidos por el manipulativo, unir uno con otro, y colocarlos en forma “invertida” para conformar la viga tal como la establece el patrón. Observe:



La manera en que se construye la viga con el manipulativo hace que el estudiante perciba a la viga como una composición de triángulos, cada uno con tres barras en su construcción. De tal manera que el estudiante sólo tiene que observar la relación entre el número de barras inferiores y las superiores. Tal relación es que la cantidad de barras superiores se obtiene restando una barra al número de barras inferiores o de la base y la cantidad de barras de la base es el número de longitud de la viga. En concreto, aquí el *medio* de aprendizaje influyó para inclinarse hacia un procedimiento de resolución con estrecha correspondencia a éste.

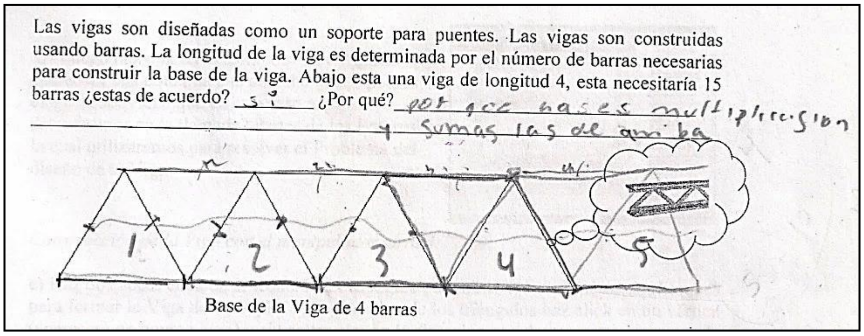
Ejemplos representativos de lo que hace la mayoría de los estudiantes cuando llegan a este procedimiento son los siguientes: se le menciona al lector que después de leer las instrucciones de las hojas de trabajo, a los estudiantes se les pedía construir con el manipulativo vigas de distintas longitudes. Esto les permitió a casi todos los jóvenes que encontraron este procedimiento, reconocer que la longitud de la viga les indicaba cuántos triángulos había que colocar como base de la viga. Observe la imagen de una viga de longitud 5, para la cual habrá de colocar 5 triángulos base:



Veamos lo significativo de este punto. Ellos logran establecer la relación entre la longitud y el número de triángulos base, llevándolos un paso adelante. Se toma como ejemplo la imagen de arriba para hacer comprensible la explicación. En un primer momento el razonamiento de este procedimiento sostiene como conocimiento previo que cada triángulo se forma de tres barras. Lo segundo, saber que es suficiente con multiplicar la longitud de la viga por tres para conocer el total de barras que se necesitaron para la cantidad de triángulos base. Considerando el ejemplo, sería: la longitud de la viga que es 5, se multiplicaría por 3 y se obtiene 15, que representa las barras hasta este momento utilizadas, porque faltan las barras superiores. En tercer lugar, para saber la cantidad de barras superiores se debe encontrar la relación con la longitud de la viga, la cual es restar uno a la longitud de la viga para obtener la cantidad de barras superiores.

Si seguimos el ejemplo de la viga de longitud 5, serían cuatro las barras superiores. Sumamos 15+4 =19, entonces 19 es el total de barras para formar una viga de longitud 5. Esta última relación puede descubrirse cuando el estudiante coloca los triángulos base equivalentes en número a la longitud de la viga y para terminar la construcción de la viga en cuestión hace falta colocar las barras superiores, esto último implica colocar más triángulos pero invertidos y para saber cuántos triángulos invertidos colocar es necesario percibir la diferencia en la cantidad de triángulos colocados como base para luego establecer dicha relación. Además hay que tener cuidado de no contar las barras sobrepuestas al unir los triángulos invertidos con los de base. Esta descripción de la abstracción que hacen los estudiantes permite saber cómo llegaron a generalizar el patrón del diseño de la viga. Enseguida se muestran evidencias de tal procedimiento.

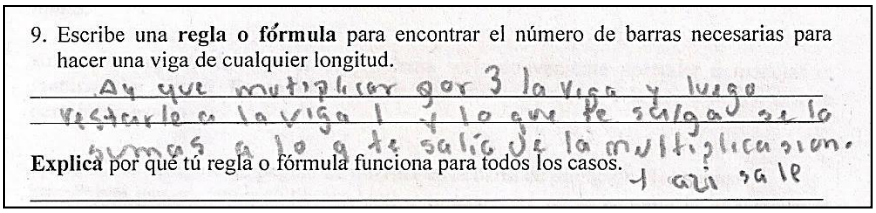
Un estudiante desde el inicio de su hoja de trabajo contesta a la pregunta de sí para una viga de longitud 4 se necesitan 15 barras, él dice que si "*porque haces multiplicación y sumas las de arriba*". Observe su dibujo en donde coloca números del 1 al 5 en cada triángulo y agrega uno más que corresponde a la viga de longitud 5:


Las vigas son diseñadas como un soporte para puentes. Las vigas son construidas usando barras. La longitud de la viga es determinada por el número de barras necesarias para construir la base de la viga. Abajo esta una viga de longitud 4, esta necesitaría 15 barras ¿estas de acuerdo? si ¿Por qué? por qe hases multiplicasion y sumas las de arriba



Base de la Viga de 4 barras

El dibujo ayuda a la comprensión de la regla o fórmula a la que él llega:


9. Escribe una **regla o fórmula** para encontrar el número de barras necesarias para hacer una viga de cualquier longitud.

Ay que multiplicar por 3 la viga y luego restarle a la viga 1 y lo que te salga se lo sumas a lo q te salió de la multiplicasion. y azi sale

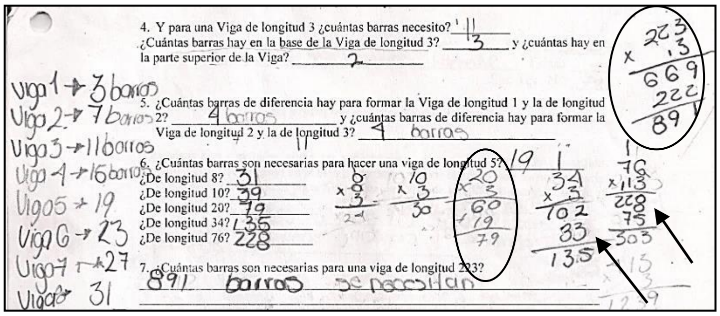
**Explica** por qué tú regla o fórmula funciona para todos los casos.

Él escribió: *"Ay  que multiplicar por 3 la viga y luego restarle a la viga 1 y lo que te salga se lo sumas a lo que te salió de la multiplicación y así sale"*

Cuando dice: "A*y que multiplicar por 3 la viga*..." se refiere a multiplicar la longitud de la viga por tres. La longitud de la viga indica cuántos triángulos son y se multiplica por 3, que son las barras que conforman cada triángulo. Luego dice: "*…y luego restarle a la viga 1…*" esto quiere decir que a la longitud de la viga hay que restarle 1 para obtener la cantidad de barras superiores. Termina diciendo: *"y lo que te salga se lo sumas a lo que te salió de la multiplicación y así sale".* La indicación es clara, hay que sumar las dos cosas, primero, el resultado de multiplicar a longitud de la viga por 3 y segundo, el resultado de la longitud de la viga menos 1. El resultado de esta suma es el total de barras que se necesitan para una viga de cualquier longitud. Otros estudiantes mencionan lo siguiente al responder la pregunta 9:

- *"longitud x 3(triángulos) más las de arriba (una menos)"*
- *"La longitud se multiplica por 3 al resultado se le suman las de arriba"*
- *"primero multiplico la cantidad de las barras y después + [sumo] las barras de arriba"*

Un estudiante no escribió su fórmula o regla pero respondió a la pregunta 6 mostrando el procedimiento que consiste en multiplicar la longitud de la viga por 3 y luego le suma la longitud de la viga menos 1 (barras superiores). Observe la imagen:


4. Y para una Viga de longitud 3 ¿cuántas barras necesito? 11
¿Cuántas barras hay en la base de la Viga de longitud 3? 3 y ¿cuántas hay en la parte superior de la Viga? 2

5. ¿Cuántas barras de diferencia hay para formar la Viga de longitud 1 y la de longitud 2? 4 barras y ¿cuántas barras de diferencia hay para formar la Viga de longitud 2 y la de longitud 3? 4 barras

6. ¿Cuántas barras son necesarias para hacer una viga de longitud 5? 19
¿De longitud 8? 31
¿De longitud 10? 39
¿De longitud 20? 79
¿De longitud 34? 135
¿De longitud 76? 228

7. ¿Cuántas barras son necesarias para una viga de longitud 223?
891 barras se necesitan



Las cantidades 102 y 228 son los resultados de multiplicar 34 por 3 y 76 por 3 respectivamente y a estos resultados se les suman las barras superiores (longitud menos 1).

Otro estudiante fue específico al escribir su regla o fórmula y explicarla.

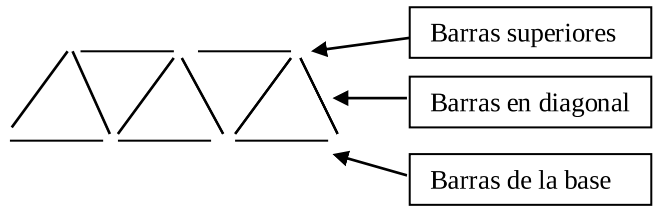
*"El número de viga lo multiplico por 3 y a lo que te salga lo sumas al número de la viga pero a este número le quitas 1 barra porque las de arriba es una menos que las de abajo"*

Y escribió su fórmula así: *"Viga x 3 + viga – 1 = total"*. Aunque no está escrita en un lenguaje algebraico (no es la intención de esta investigación que lo haga), resulta que su fórmula o la descripción de arriba expresa la generalidad del patrón para hallar el número de barras necesarias para diseñar una viga de cualquier longitud.

La visualización elaborada por los estudiantes para llegar a la generalización del patrón a partir de la conformación de triángulos estuvo asociada directamente a la herramienta del manipulativo virtual. Esto es, por el inconveniente del manipulativo de no ofrecer segmentos individuales, que fungieran como barras para construir la viga, éste ofrecía triángulos que al ser dispuestos convenientemente se obtenía la viga deseada. La visualización se expresa como 3n+n-1 que corresponde al tipo de generalización constructiva-estándar- multiplicativa. Se recuerda que el procedimiento descrito es al que más estudiantes llegan.

*2) Procedimiento a través de separar a la viga en tres conjuntos*

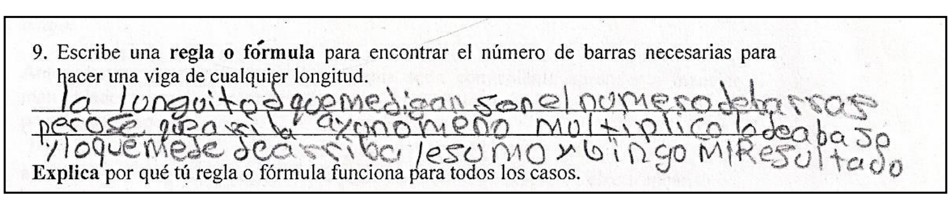
Este procedimiento consiste en separar a la viga en tres partes o en tres conjuntos que son: las barra de la base, las barras en diagonal y las barras superiores. Observe la imagen de una viga de longitud 3:




Es muy probable que este procedimiento fuera conducido por las preguntas 1 a la 4 que enfatizan la observación de las barras de la base y las superiores, que puede dar pie a descubrir la diferencia en cuanto a cantidad de los dos conjuntos de barras. De modo que sólo les queda averiguar cómo hallar la cantidad de barras en diagonal. Pero esto último no fue difícil para los estudiantes porque llegan a establecer la relación entre la longitud de la viga y las barras diagonales. Esta relación surge de observar que sobre cada barra de la base se sostienen dos barras en diagonal, entonces ellos multiplican el número de barras de la base (longitud de la viga) por dos para obtener la cantidad total de barras en diagonal.

En resumen, para saber cuántas barras hay en la base, sólo basta saber la longitud de la viga. Luego para saber cuántas hay en medio o en posición diagonal, sólo hay que multiplicar la longitud de la viga por dos y para conocer cuántas son las superiores hay que restar uno a la longitud de la viga. Si ya se tienen estos tres datos: número de barras de la base, número de barras en diagonal y las barras superiores, hay que sumarlos para obtener el total de barras de cualquier viga. Para desarrollar este procedimiento se vuelve una condición necesaria saber la longitud de la viga.

Un estudiante escribe lo siguiente cuando se le pregunta por una regla o fórmula para generalizar el patrón:



9. Escribe una **regla o fórmula** para encontrar el número de barras necesarias para hacer una viga de cualquier longitud.

la longuitod quemedigan sonel numerodebarras perose quearriba ayunomeno multiplicolodeabajo yloquemede dearriba lesumo ybingo MIResultado

**Explica** por qué tú regla o fórmula funciona para todos los casos.

El estudiante dice*: "La longitud que me digan son el número de barras pero sé que arriba hay uno menos, multiplico lo de abajo y lo que me dé de arriba lo sumo y bingo mi resultado".*

Interpretando su explicación, cuando él dice: "*La longitud que me digan…"* se refiere a la longitud de la viga dada en la hoja de trabajo; "…*son el número de barras…"* quiere decir que el número de longitud de la viga es la cantidad de barras de la base; "…*pero sé que arriba hay uno menos*…", tiene claro que las barras superiores son una menos que las barras de la base; "…*multiplico lo de abajo*…" él no es explícito en esta frase por cuanto multiplica pero al revisar su hoja de trabajo, en las operaciones que él hace descubrimos que multiplica la longitud de la viga por dos; "…*y lo que me dé de arriba*…", él habla de las barras superiores las cuales ya sabe que hay que restar uno a las barras de a base; "…*lo sumo y bingo mi resultado*", es decir suma los tres valores para encontrar las barras totales de la viga en cuestión. Otras respuestas de estudiantes son las siguientes:

- *"Se suma la longitud* [de la viga] *con lo superior* [barras superiores]*, es longitud -1*[aclara cómo obtener las barras superiores] *y las barras de en medio por 2* [longitud de la viga por dos]*"*
- *"Porque sumamos lo de arriba* [barras superiores] *con lo de abajo*[barras de la base] *y lo de abajo*[longitud de la viga] *lo multiplicamos x lo de en medio* [por dos barras] *y lo que me salga* [total de barras en diagonal] *lo vuelvo a sumar con los de abajo y lo de arriba* [se suma a las barras superiores y a las de diagonal]*"*

Este procedimiento lo expresaron los estudiantes con más nociones algebraicas en los siguientes términos $n + 2n + n-1$, otros lo hicieron en un lenguaje natural como se mostró antes. Aunque el procedimiento no esté expresado algebraicamente se puede tipificar como una generalización constructiva-no estándar- multiplicativa.

El problema de ***LAS ESTAMPAS EN EL CUBO***

De los alumnos participantes que desarrollan la actividad en un ambiente de aprendizaje digital, un 83% resuelve el problema de las estampas en el cubo con un procedimiento que generaliza el patrón. El resto de ellos no llega a un procedimiento general o no termina de contestar las hojas de trabajo por inasistencia al plantel. Del 83% de alumnos que llega a la generalización del patrón, el 78% llega a la solución a través de visualizar a la barra de cubos acoplados como un entero de cuatro lados. Los restantes (5%) lo resuelve al separar a la barra en dos secciones.

Las dos visualizaciones son equivalentes y generalizan el patrón, pero el procedimiento que encuentra la mayoría lo hemos considerado como una etapa avanzada del otro. Es decir, éste se origina de una visualización simplificada del procedimiento al que llega la minoría de alumnos, el de ver a la barra en dos secciones. Por este motivo, no se describirán los dos procedimientos por separado sino que se hará la descripción como un único procedimiento que evoluciona de una etapa a otra.

Desde la perspectiva de esta investigación, el que más de tres cuartas partes de los estudiantes hayan encontrado un procedimiento de resolución del problema en su versión simplificada o en su expresión más simple, hace constatar nuestras hipótesis acerca de que el *medio* de aprendizaje virtual influye en forma determinante en el razonamiento del estudiante y el acercar la tecnología como mediadora en el aprendizaje de las matemáticas escolares de manera que estudiantes considerados de bajo rendimiento en la materia avancen en la comprensión de problemas matemáticos y formen parte de una mayoría en su grupo que paulatinamente resuelve problemas con sentido matemático.

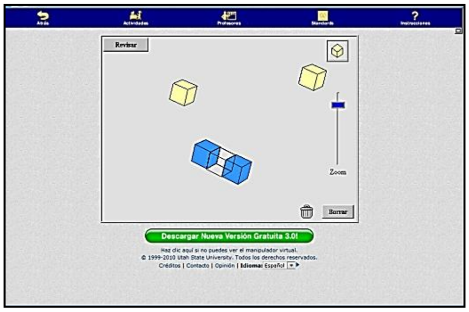
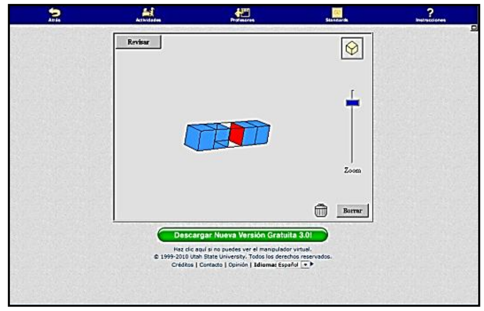
Lo que se quiere decir con esto es que el trabajo de los estudiantes da evidencia del potencial del medio ambiente de aprendizaje digital usado aquí y en parte se concreta el objetivo del uso de la tecnología digital como mediadora en el aprendizaje de las matemáticas, en particular en el tema de generalización de patrones en el que se centró la investigación que aquí se reporta.

Ahora bien, hace falta puntualizar algunos aspectos a considerar en el análisis del problema de las estampas en el cubo. Primero, decir que es el tercero de seis que se implementaron en la cuarta fase del trabajo de campo. Para este momento, los alumnos ya eran capaces de acceder al manipulativo virtual sin dificultad. Otra de las características de los estudiantes, en general, que participaron en esta fase es que además de ser de bajo rendimiento académico en matemáticas, eran alumnos que presentaban mala conducta. Sin embargo, no hay duda que el medio ambiente digital en que se desarrollaron los problemas matemáticos, mermó su comportamiento en las sesiones de trabajo en el aula digital.

Fue estimulante para ellos la manipulación de objetos para realizar construcciones, usando la computadora, en este caso sucesiones de figuras. Pero el punto más importante en este contexto fue que ellos se descubrieran capaces de resolver problemas matemáticos por sí mismos, y además el saber que esos problemas también habían sido resueltos por sus compañeros de alto rendimiento de su grupo, los hacía percibirse estar al mismo nivel cognitivo que ellos.

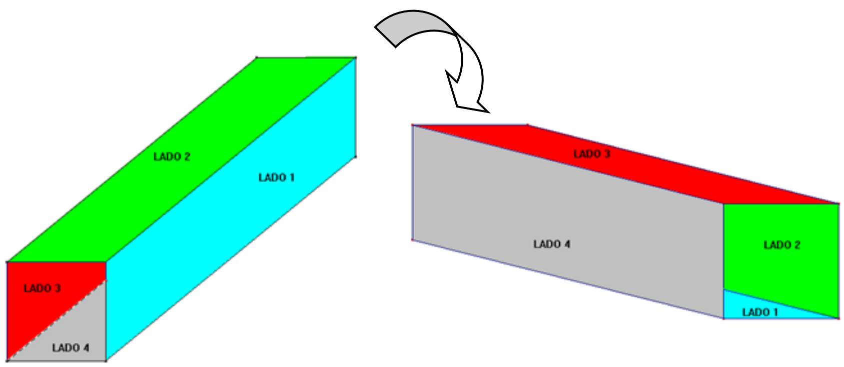
En realidad lo estaban pues habían tenido éxito en la resolución de problemas de este tipo. Se hace mención de esto porque para la resolución del problema de las estampas en el cubo se cambió a otra sección del manipulativo virtual que les brindó herramientas adecuadas que les permitieron construir, visualizar desde diferentes ángulos y avanzar en la comprensión y solución del problema. Las herramientas eran atractivas, tanto que al final de la sesión, y de posteriores, las utilizaban para construir figuras de su interés. En particular, fueron dos herramientas las que influyeron para desencadenar el procedimiento al que más estudiantes llegaron, el cual más adelante se describe.

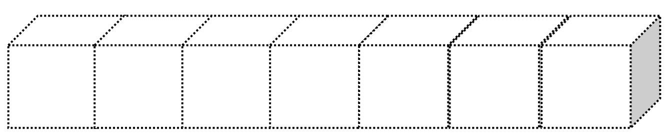
La primera herramienta del manipulativo virtual, les permitía colocar o unir un bloque (cubo) donde el usuario lo deseara y ver a través de éste. Es decir, sus caras se vuelven transparentes, conservando sólo las aristas que lo conforman. De manera que sí se coloca el cubo a la orilla de la barra o en medio de otros, se pueden ver sus caras y también las de los otros cubos. Observe las imágenes:

Con la segunda herramienta, se puede rotar (360°) y mover la barra de cubos acoplados en diferentes direcciones de modo que la visualización de sus caras sea completa. Para ser más precisos, la barra de cubos no se deforma ni se desarma, los cubos se mantienen unidos, giran o se mueven en la dirección que el usuario quiera al hacer un clic sostenido.

Es justamente esta forma de manipular el objeto lo que hace que el alumno perciba a la barra de cubos como un entero de cuatro lados, en cuyos lados están contenidas una cantidad de caras que equivalen a la longitud de la barra. Observe las imágenes:



Longitud 7

Tal manipulación originó el procedimiento de resolución del problema, en el que se visualiza a la barra de cubos como un entero de cuatro lados, pero este procedimiento tiene una etapa de razonamiento previo, la cual también se puede considerar como un procedimiento de resolución que generaliza el patrón (presentado como tal en el capítulo de metodología en la sección 3.5.3 y en este capítulo en la sección 4.3.1 que corresponde al análisis de la tercera fase). Es conveniente hablar de dicha etapa y lo que hemos considerado su evolución.

Al contestar la primera pregunta de las hojas de trabajo los estudiantes se dan cuenta que hay un aumento de cuatro estampas por cada cubo que se anexa a la barra. Esta observación fue detectada cuando los alumnos construyeron con el manipulativo virtual las barras de cubos de las distintas longitudes solicitadas pues realizan un conteo simple para dar las respuestas a la pregunta. Los estudiantes saben de antemano que la longitud de la barra es igual a la cantidad de cubos acoplados. Algunas de sus respuestas son las siguientes:

- *“En la computadora puse los cubos que me pedían y contaba sus caras”*
- *“Le fui poniendo en la computadora cubo por cubo y los fui sumando de los que están expuestos y ya”*
- *“Porque van aumentando de 4 en 4 y a cada resultado yo le iba sumando 4”*

La segunda pregunta de las hojas de trabajo buscaba confirmar que el estudiante había reconocido que en las caras donde se unen los cubos la máquina no coloca estampas. No ignorar esta acción de la máquina es el primer paso para encontrar regularidades en el patrón. El paso siguiente fue razonar sobre cuántas estampas se colocan en cada cubo acoplado de una barra. La lectura que se hace a las respuestas de los estudiantes en las hojas de trabajo nos revela que los estudiantes no pasaron por alto esta característica y además expresaron que son dos las caras a las que no se les colocan estampas en cada unión de cubos.

Para aproximarse al segundo paso que se mencionó arriba, se plantearon las preguntas 3, 4 y 5. Con la intención de que los alumnos observaran que al primero y último cubo de una barra la máquina les coloca la misma cantidad de estampas a cada uno y que esto los hace diferentes al resto de los cubos. Es decir, hay una diferencia en la cantidad de estampas que tiene un cubo del extremo de la barra (primero o último) y un cubo intermedio. Respuestas a las mencionadas preguntas dan cuenta que los estudiantes percibieron y reconocieron el valor de estas características para el desarrollo de un procedimiento general del patrón, observe algunas respuestas:

Preg. 2:

- *“No porque la máquina sólo pone las estampas en las caras que no están pegadas”*

Preg. 3:

- *“5, porque se resta una cara por cada unión con otro cubo”*
- *“5, porque una cara no se muestra de cada cubo”*

Preg. 4:

- *“4, porque lo puse en la compu y lo arme y lo conté”*
- *“4, porque 2 de sus caras no se ven”*
- *“4 porque de cada cubo intermedio no se muestran 2 caras de 6 que tiene”*

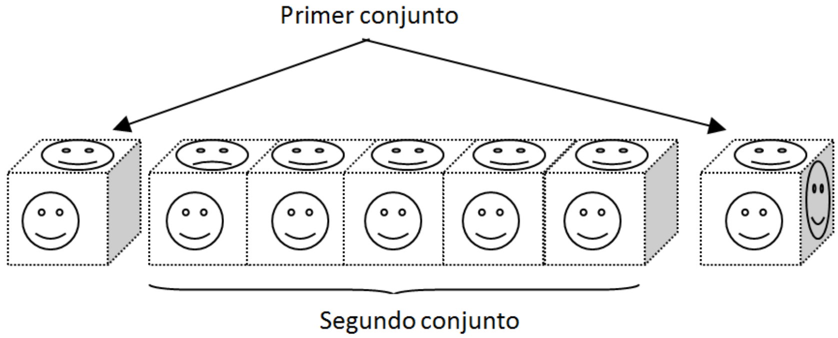
Preg. 5:

- *“Si, porque siempre los de en medio van a tocar a 2 cubos”*
- *“Si, porque 2 de sus caras no se ven, por ser las que se juntan”*
- *“Si, se muestran sólo 4 caras”*

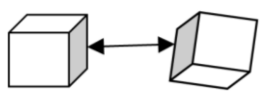
Los datos encontrados en las hojas de trabajo nos permiten enunciar las consideraciones previas que tuvieron los alumnos para dirigirse a la generalización del patrón:

i. A un cubo, la máquina le adhiere seis estampas pues tienen expuestas sus 6 caras.
ii. A una barra de longitud 2, la máquina le coloca 10 estampas dado que la barra se forma al unir dos cubos y justo donde se unen, la cara de cada cubo queda sin que se le adhiera una estampa.
iii. A partir de una barra que tiene por longitud tres cubos, al primero y último cubo, la máquina les adhiere cinco estampas a cada uno. A los cubos intermedios sólo les coloca cuatro estampas, la razón es porque al unirse con los otros cubos quedan dos caras ocultas, lo cual imposibilita a la máquina colocarles las estampas. (Esta idea ya es una abstracción de la generalización del patrón, idea que es precisamente la que denominamos al iniciar el análisis de este problema como etapa previa).

La tercera consideración nos remite a pronunciar que los estudiantes visualizaron una barra de cualquier longitud en dos conjuntos. El primero corresponde a los cubos de los extremos de la barra. El segundo conjunto son todos los cubos intermedios de la barra.




Los cubos de los extremos tienen expuestas cinco caras cada uno, razón por la cual la máquina siempre le adhiere cinco estampas a cada cubo del extremo, la cara que no es visible está unida a los cubos intermedios. Estos últimos tienen expuestas cuatro caras cada uno, de modo que la máquina coloca únicamente cuatro estampas a cada cubo intermedio debido a que dos de sus caras se unen a los cubos que tienen al costado izquierdo y al derecho.



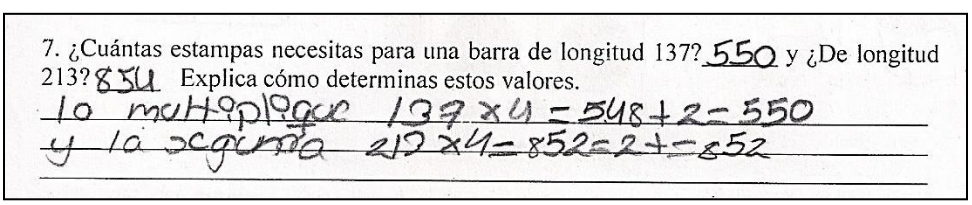
Los estudiantes separan simbólicamente el primero y último cubo de una barra, teniendo en mente que a cada uno la máquina le colocará cinco estampas, lo cual hace un total de diez, que corresponden al primer conjunto, para cualquier longitud que tenga una barra.

Ahora bien, lo que hacen los estudiantes para calcular la cantidad de estampas que tendrá que colocar la máquina en el segundo conjunto (cubos intermedios) es, en principio, determinar cuántos cubos intermedios tiene una barra de cualquier longitud.

Para saber este dato, ellos restan a la longitud de la barra el número 2, el cual representa los cubos de los extremos (primer conjunto). Una vez que se conoce cuántos son los cubos intermedios y sabiendo que cada uno de estos tiene cuatro caras expuestas, ellos multiplican la cantidad de cubos intermedios por cuatro, lo que indica la cantidad total de estampas que les serán colocadas por la máquina. Al final, ellos suman las 10 estampas del primer conjunto a la cantidad de estampas del segundo conjunto para obtener el total que colocará la máquina en una barra de cualquier longitud.

La expresión algebraica que representa esta visualización sería: *4(n-2)+10*, donde "*n*" es la longitud de la barra. El tipo de generalización en la que se ubica en la tipología de Rivera es una constructiva-no estándar-multiplicativa. Ahora, si se simplifica la expresión quedaría como *4n+2*, lo cual corresponde a una visualización de la barra de cubos de modo más simple. Esta forma de visualizar la viga es justamente a la que llegó la mayoría de los estudiantes la que les permite encontrar un procedimiento que generaliza el patrón.

Con el manipulativo virtual, los alumnos podrán separar o mover los cubos de una barra en cualquier momento y también, como se mencionó antes, podrán girar la barra completamente en cualquier dirección y es precisamente esta manipulación del objeto lo que les hace avanzar en su razonamiento. Es decir, ya no ver a la barra como dos conjuntos sino como uno solo en el que todos los cubos se considerarían, simbólicamente, intermedios. De los cuales, se sabe que cada uno tiene cuatro caras expuestas para que le sean colocadas las estampas, entonces para obtener el total de estampas sólo hay que multiplicar la longitud de la barra por las cuatro caras expuestas de cada cubo. Pero los estudiantes no olvidan que hay dos caras expuestas a los costados de la barra que no se han contado y que hay que agregar al resultado de la multiplicación anterior. Lo cual quedaría expresado así 4n+2, donde "n" es la longitud de la barra multiplicada por las 4 caras y 2 las caras de los costados. Observe la imagen:


7. ¿Cuántas estampas necesitas para una barra de longitud 137? 550 y ¿De longitud 213? 854 Explica cómo determinas estos valores.
lo multipligue 137 x4 = 548 + 2 = 550
y la segunda 213 x4 = 852 = 2 + = 852

Algunas de las respuestas que dan los estudiantes cuando se les pide encontrar el número de estampas que tendrían barras de longitudes mayores que difícilmente encontrarán por conteo simple son los siguientes:

Para la barra de longitud 20 y 56:

- *“Si son 56 caras que están de un lado por caras que se ven más las 2 que están a los extremos da el valor que necesitamos”*
- *“Si la longitud lo multiplique por 4 y lo sume 2”*

Para la longitud 137 y 213:

- *“Multiplique 137x4 y le sume 2”*
- *“Multiplique 213x4 y le sume 2”*

Casi al finalizar sus hojas de trabajo se les pide explicar su regla o fórmula del procedimiento con la cual se puede obtener el número de estampas para cualquier longitud de barra. En la revisión de sus hojas, la evidencia indica que hubo una comprensión total del problema reflejada en su procedimiento. Algunas de sus reglas o fórmulas se expresan en lenguaje natural y en otros casos sería algebraico. Observe estas respuestas:

- *“Equis x 4+2 [equis es la longitud de la barra], a las equis cubos se le multiplica por 4 y se le suma 2 siempre”*
- *“La longitud x4+2”*
- *“Pues se multiplica el número de caras que se muestra por los cuatro lados más dos que son los de los extremos”*
- *“Pones la barra de longitud, sí es 300 se multiplica por 4 y se suman 2. Sería 300x4+2=1202”*

En resumen, el procedimiento al que llegan casi todos los estudiantes corresponde a la visualización que les ofreció el manipulativo virtual concibiendo a la barra de cubos como un entero de cuatro lados en donde cada lado contenía un número de caras igual a la longitud de la barra en cuestión. Cabe decir que este procedimiento descrito sólo es eficaz cuando se conoce la longitud de la barra de cubos.

Antes de iniciar el análisis de los últimos tres problemas que se resolvieron en la cuarta fase del trabajo de campo: Crecimiento de Azulejos I, Crecimiento de Azulejos II y Crecimiento de Pilas, se van a describir cinco características que tienen en común y al mismo tiempo éstas marcan la diferencia con los primeros tres problemas:

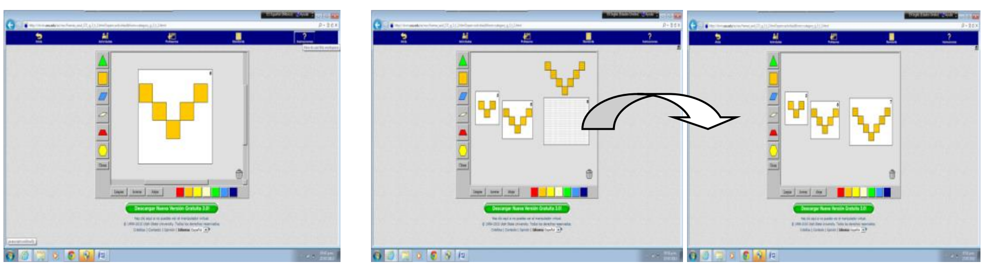
**1)** Los primeros tres problemas: la Letra V, el Diseño de la Viga y las Estampas en el cubo son del tipo lineal. Es decir, las expresiones algebraicas que generalizan el patrón son de primer grado (ninguno de sus términos tiene un exponente mayor a uno) En cambio los problemas de crecimiento de azulejos I, II y de pilas son de tipo cuadrático. Lo que quiere decir que un término de la expresión algebraica que representa el patrón está elevado a la segunda potencia.

**2)** En los problemas de crecimiento de azulejos I y II se les presentan cuatro opciones de expresiones algebraicas. Sólo dos de ellas generalizan el patrón, escritas de manera diferente pero equivalentes. Los estudiantes deben elegir la que mejor represente su procedimiento o la que crean conveniente para encontrar el número de azulejos de cualquier pila del patrón. El último problema del crecimiento de pilas ya no se les presentan opciones de expresiones algebraicas sino que se les pide escribir una fórmula o regla para encontrar el número de azulejos de cualquier pila del patrón y además decir el significado si usó letras en su regla o fórmula.

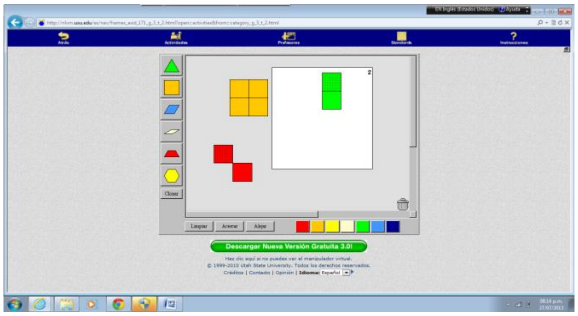
**3)** En estos tres problemas se les pide explicar cómo se puede encontrar el número de azulejos de cualquier pila del patrón, pero en sólo dos se les menciona el término “n” ya que las expresiones algebraicas que se les presentan para elegir contienen a “n” representando al número de pila. Además, el enésimo término resulta poco comprensible para los estudiantes pues es nuevo para muchas de ellos, así se observó en las anteriores fases del trabajo de campo. Pero a pesar de esto, algunos alumnos captan al parecer el sentido que tiene y lo usan para expresar sus fórmulas. Por esta razón se decide incluirlo y observar el alcance de los estudiantes para usarlo.

**4)** Se plantearon dos preguntas con una característica peculiar en cada hoja de trabajo de los tres últimos problemas. La característica es que la petición tiene una estructura en sentido inverso. Es decir, con anterioridad se les plantearon preguntas donde se les solicitaba hallar el número de azulejos de un número de pila dado, ahora se les solicita hallar el número de pila más grande que hay que se pueda construir usando una cantidad de azulejos dada. El invertir el orden de la petición requiere un esfuerzo cognitivo mayor por parte del estudiante, qué recursos y cómo los utilizan para proporcionar una respuesta correcta resulta interesante saberlo, en particular los estudiantes de bajo rendimiento usando el manipulativo virtual.

**5)** Dos herramientas del manipulativo virtual usado que están a disposición del usuario fueron conveniente para facilitar la resolución de éstos últimos tres problemas a los estudiantes. La primera es que el manipulativo indica la cantidad de bloques (azulejos) que se van colocando cuando se construye una figura (ver figura de la izquierda). Es decir, en la pantalla aparece un contador de bloques cuando se ponen o se quitan de la figura cuando está dentro del recuadro de conteo, pero también realiza el conteo cuando se ha construido la figura por fuera, se selecciona ésta y se introduce al recuadro, el manipulativo nos indica cuántos azulejos se usaron.



El ejercicio del conteo simple, es una de las primeras acciones que hacen los estudiantes (así se observó en fases anteriores del trabajo de campo) al resolver este tipo de problemas. La segunda herramienta permite cambiar el color a un azulejo o un grupo de azulejos seleccionando. El uso del color para distinguir conjuntos de azulejos en una misma pila fue una de las estrategias, más usadas por los estudiantes en el ambiente de lápiz y papel para desarrollar sus procedimientos de generalización. Sugerencia que se les hizo a los estudiantes que resolvieron los problemas con el manipulativo virtual.



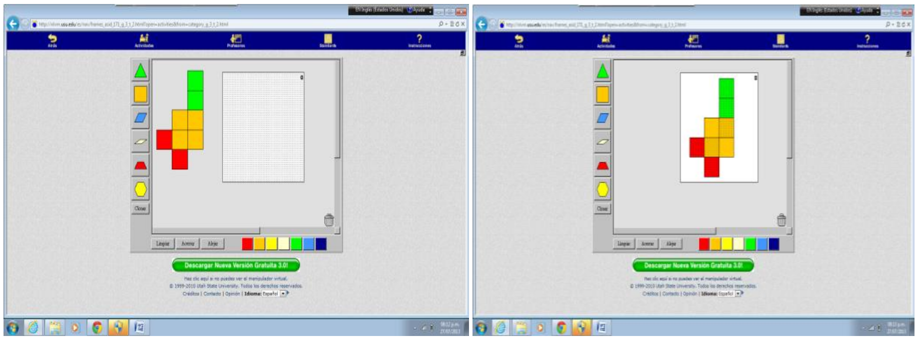
El problema de ***CRECIMIENTO DE AZULEJOS I***

El 90% de los estudiantes encontró un procedimiento general que consiste en dividir la pila de azulejos en tres partes. En un inicio la palabra "pila", como se nombró a cada figura del patrón, causaba un poco de distracción en el sentido reconocer tal palabra como una acomodación o acoplamiento de piezas como sucede con el término: apilar. Más adelante esta palabra se incorporó al vocabulario, usándola para responder en las hojas de trabajo. Aunque en sentido estricto "pila" define bien el acomodar los azulejos, palabra que también, en el contexto del problema, tuvieron que apropiar para referirse a cada cuadrado o bloque que confirmaba la pila.

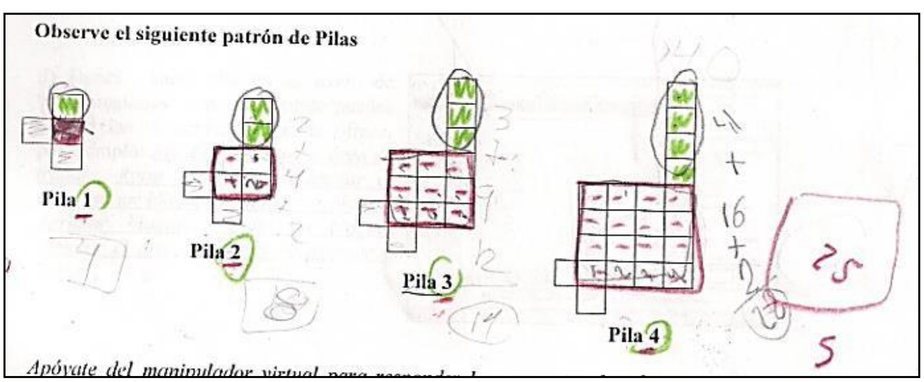
Los estudiantes inician la resolución del problema del crecimiento de azulejos I construyendo con el manipulativo las primeras cuatro pilas del patrón, mismas que son presentadas en la primera página de sus hojas de trabajo. Se les pide cambiar el color de los azulejos proporcionando un ejemplo[13] hecho con el manipulativo.

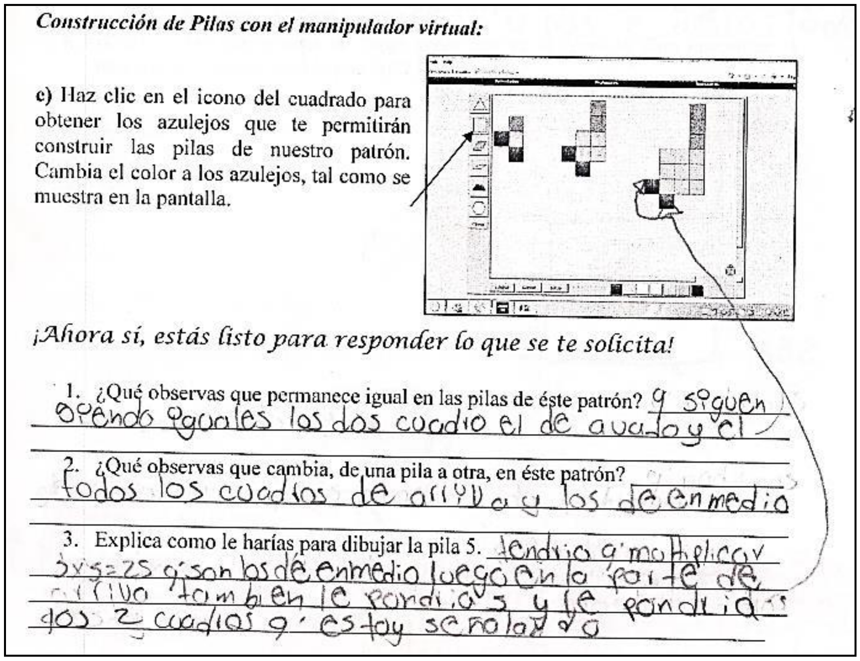
Por otro lado, el manipulativo les permitió agrupar todos los bloques (azulejos) que conformaban una pila, de modo que podían mover a la pila completamente a cualquier parte del área de trabajo. Con esta herramienta los estudiantes colocaban en orden de menor a mayor las pilas que iban construyendo, pero además los alumnos utilizaban el contador de bloques para saber cuántos había en cada pila.

[13] El ejemplo no se presentó a los estudiantes a color sino en escala de grises en sus hojas de trabajo



Con respecto a lo mencionado hasta este momento se hace necesario puntualizar sobre los logros de los estudiantes cuando realizaron dichas acciones. Primero, la simple construcción desde la pila 1 hasta la 4 (por lo menos) y las siguientes ya implica el reconocimiento, o conlleva a éste, de la estructura común que guardan las pilas del patrón. Se percataron del notable aumento de azulejos de una pila y su consecutiva. Segunda, si a lo anterior le agregamos que el estudiante hace una distinción usando colores para conjuntos de azulejos en una misma pila, entonces esto nos indica que han identificado regularidades en el patrón lo que hace que ellos tengan un criterio para establecer tales conjuntos de azulejos. Tercero, las primeras dos preguntas de la hoja de trabajo perseguían la intención de hacer que el estudiante observara en las pilas los azulejos que permanecían constantes y lo que cambiaba de una pila a otra. La intención se consigue, pues las respuestas que dan los estudiantes a esas dos preguntas así lo demuestran. Observe las siguientes:



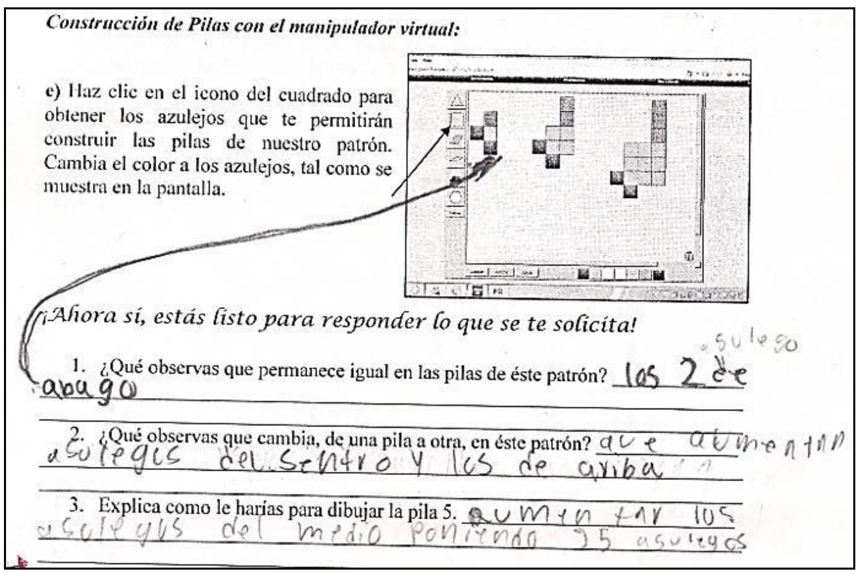


**Construcción de Pilas con el manipulador virtual:**

**c)** Haz clic en el icono del cuadrado para obtener los azulejos que te permitirán construir las pilas de nuestro patrón. Cambia el color a los azulejos, tal como se muestra en la pantalla.

*¡Ahora sí, estás listo para responder lo que se te solicita!*

1. ¿Qué observas que permanece igual en las pilas de éste patrón? q siguen siendo iguales los dos cuadio el de abajo y el
2. ¿Qué observas que cambia, de una pila a otra, en éste patrón? todos los cuadros de arriba y los de enmedio
3. Explica como le harías para dibujar la pila 5. tendria q' multiplicar 5x5=25 q' son los de enmedio luego en la parte de arriba tambien le pondria 5 y le pondria dos 2 cuadros q' estoy señalando



**Construcción de Pilas con el manipulador virtual:**

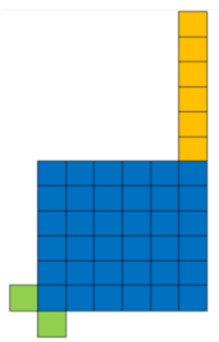
**c)** Haz clic en el icono del cuadrado para obtener los azulejos que te permitirán construir las pilas de nuestro patrón. Cambia el color a los azulejos, tal como se muestra en la pantalla.

*¡Ahora sí, estás listo para responder lo que se te solicita!*

1. ¿Qué observas que permanece igual en las pilas de éste patrón? los 2 de abajo (azulejo)
2. ¿Qué observas que cambia, de una pila a otra, en éste patrón? que aumentan azulejos del centro y los de arriba
3. Explica como le harías para dibujar la pila 5. aumentar los azulejos del medio poniendo 25 azulejos

A modo de confirmar que ellos han identificado regularidades en el patrón. Es decir, lo que permanece igual y lo que cambia en las pilas, se plantearon preguntas en las que se les pedía explicar cómo construir ciertas pilas del patrón. Las explicaciones escritas de los alumnos revelaron que hubo un total reconocimiento de las regularidades del patrón. En seguida se explican tales regularidades que hallaron los estudiantes.

Ellos visualizaron a la pila en tres secciones para determinar la cantidad de azulejos que su construcción requería. La primera sección, corresponde a lo que permanece igual o es constante en el patrón, que son dos azulejos ubicados en la esquina inferior izquierda de las pilas. Las otras dos secciones representan lo cambiante en el patrón. Una de éstas son los azulejos que forman un cuadro central, el cual tiene por medida de lado el número de la pila que se trate representado por azulejos. Por ejemplo, si la pila es la número 6, entonces el cuadrado central tendrá como medida de lado seis azulejos lo cual hace que el cuadrado este conformado por 36 azulejos. La otra sección cambiante son una columna de azulejos que se levantan sobre la esquina superior derecha del cuadrado central, la cantidad de azulejos que la conforman se determina por el número de pila que se trate. Utilizando el ejemplo anterior, la columna tendría 6 azulejos. Observe la imagen para comprender esta descripción:



La identificación de estas regularidades en el patrón no es tarea fácil, sobre todo reconocer y establecer las relaciones entre sus componentes. Ellos logran forjar dos relaciones pertinentes que tienen su base en el conocer el número de pila, pues sí se ignora este número pierden sentido ambas relaciones.

Ahora bien, la primera relación vincula al número de pila con el número de azulejos que representan la medida del lado del cuadrado central, que al calcular su área se obtienen la cantidad de azulejos que confirman al cuadrado. Tal cantidad representa la mayoría de azulejos que conforman la pila. Este valor numérico se vuelve trascendental para responder otras preguntas, de orden superior, en sus hojas de trabajo. La segunda relación tiene que ver con el número de pila y la columna de azulejos que forman la columna de la esquina superior derecha del cuadrado central.

Las relaciones que ellos establecen no fueron tan evidentes aún para los estudiantes avanzados en la tercera fase que lo lograron a lápiz y papel, pero una vez encontradas fue más fácil y rápido resolver los cuestionamientos. La ventaja para los estudiantes de la cuarta fase es justamente el uso del manipulativo virtual para lograr establecer dichas relaciones. Observe las siguientes respuestas que dan cuenta del establecimiento de las relaciones mencionadas mismas que encaminaron a un procedimiento que generaliza el patrón de crecimiento de Azulejos:

4. Explica cómo le harías para dibujar la pila 18. multiplicaría 18x18 y lo q' me salielo serían los cuadros de en medio en la parte de arriba le pondría igual 18 y los 2 cuadros q' estan señalados en la pag anterior

3. Explica como le harías para dibujar la pila 5. 5 cuadritos arriba y 2 cuadritos abajo en la esquina y en el centro un cuadrado de 5 cuadritos de cada lado

7. Explica cómo le haces para encontrar el número de azulejos cuadrados de cualquier pila ("n") del patrón. multiplicar ("n") por (n) y a su resultado sumo (n) mas 2 abajo

7. Explica cómo le haces para encontrar el número de azulejos cuadrados de cualquier pila ("n") del patrón. multiplico el num de pila por ese mismo numero y le sumo ese num y le sumo 2

Dos preguntas (5 y 6) que consideramos de orden superior por el esfuerzo cognitivo que representa para el estudiante responderlas, son las planteadas en orden inverso. Los resultados que se obtuvieron en la revisión de los datos muestran que los estudiantes no realizan un procedimiento inverso al que ellos desarrollaron. Es decir, si su procedimiento consiste en multiplicar el número de pila por sí mismo para obtener la cantidad de azulejos del cuadrado central luego a ésta cantidad se le agrega un número de azulejos igual al número de la pila para formar la columna y al final se le suman dos azulejos que permanecen constantes. Luego, dada una cantidad de azulejos ellos deben encontrar el número de pila mayor que se puede construir con dicha cantidad. Entonces el procedimiento inverso sería, primero restar 2 y luego restar el número de pila a la cantidad dada, al resultado de esto se debe obtener la raíz cuadrada. Si se obtiene como cociente un número con parte decimal, sólo se considera la parte entera, la cual será el número de pila mayor que se busca y habrá azulejos sobrantes

Ninguno de los estudiantes efectuó un procedimiento inverso, lo que ellos hicieron fue probar con números distintos que representaron el número de pila y hacer los cálculos según su procedimiento original para obtener el número de azulejos totales para ese número de pila. Es decir, su procedimiento consistía en aproximaciones al número de pila tratando de acercarse a la cantidad de azulejos dados comprobando a través de usar su procedimiento ordinario. Para ello utilizaban la calculadora de la computadora. En general, los estudiantes proporcionan respuestas correctas a las dos preguntas de orden inverso, su recurso más próximo fue su propio procedimiento. Se recuerda que los estudiantes tienen escasos conocimientos algebraicos.

Por otro lado, al final de la hoja de trabajo se les pedía elegir la expresión algebraica que consideraba correcta para encontrar el número de azulejos para la pila "n". La expresión que eligen todos los estudiantes es: *nxn+2+n*, la cual cada término está en correspondencia con su procedimiento, considerando la "*n*" como el número de la pila. Un estudiante proporciona una expresión que es la siguiente: "*PxP+P+2*" en donde "*P*" es el número de pila. Esta expresión es igual a la que se da como opción sólo cambia la literal usada. Sólo un estudiante elige la expresión: "$n^2+n+2$", aunque en sus respuestas él nunca menciona elevar al cuadrado el número de la pila sino "multiplicar el número de pila por sí mismo".

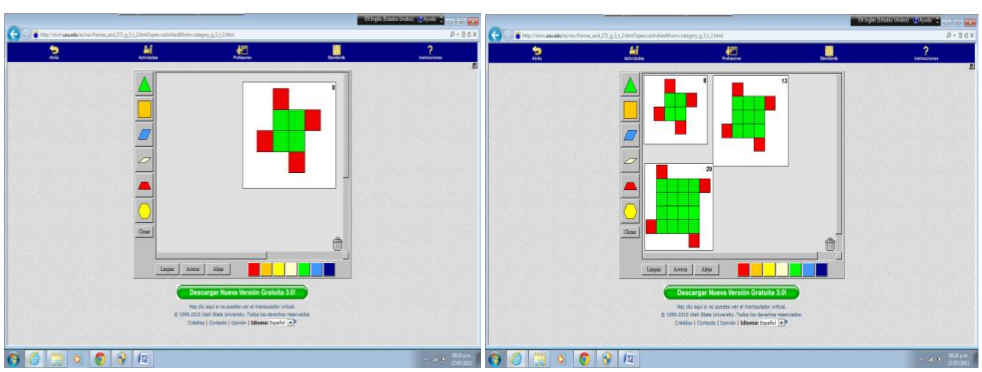
De modo que podemos deducir que tenía cierto conocimiento al saber que un número multiplicado por sí mismo es igual a elevar al cuadrado ese número. Pero esto no garantiza realmente tal conocimiento. Lo importante es que cualquiera de las dos expresiones a las que llegan los estudiantes representan al procedimiento hallado y estas generalizaciones son del tipo constructivas- no estándar-multiplicativas.

En resumen, la resolución del problema del crecimiento de azulejos I se hizo a través de encontrar sólo un procedimiento que generalizara al patrón. La visualización de la composición de las pilas fue la misma que tuvieron los estudiantes avanzados en la tercera fase. Las herramientas del manipulativo como el contador de elementos (en este caso los azulejos), el cambiar el color de los azulejos de manera conveniente y una calculadora integrada, facilitaron el avance en el reconocimiento de regularidades que permitieron establecer relaciones entre los elementos del patrón, fundamentales para crear un procedimiento que generalizará al patrón.

El problema de ***CRECIMIENTO DE AZULEJOS II***

En este penúltimo problema sobre patrones participan 39 estudiantes, de los cuales 24 (64%) logran encontrar un procedimiento que generaliza al patrón de azulejos y un 15% inicia otro que tiende hacia la generalización pero no lo consiguen, por errores en conceptos matemáticos como confundir área con perímetro.

Para iniciar la resolución del problema se les pide, por lo menos, construir con el manipulativo virtual las primeras cinco pilas del patrón. Las cuatro primeras pilas se presentan en sus hojas de trabajo. Se les sugiere modificar los colores como ellos consideren conveniente de modo que les permita visualizar características que encuentren comunes en todas las pilas.



Las respuestas a las primeras dos preguntas nos confirman el reconocimiento de los azulejos que permanecen igual y de los que cambian o aumentan. Observe algunas de las siguientes respuestas a las preguntas 1 y 2.

Preg. 1:

- *“que los rojos [azulejos] siempre van a estar, no importa si el número de pila es 20”*
- *“los cuadros que se encuentran en las esquinas”*

*Preg. 2:*

- “*los cuadros del centro van aumentando”*
- *“lo mismo que en el ejercicio anterior [Azulejos I] se va aumentando los cuadros del centro pero tiene uno más”*
-

Ellos están reconociendo como constante en el patrón los cuatro azulejos de las esquinas de cada pila y como la parte cambiante a un cuadrado conformado por cierta cantidad de azulejos. Este es el primer paso para avanzar hacia lo general.

Verbalmente se les solicita continuar la construcción de las pilas siguientes, usando el manipulativo virtual, con el fin de consolidar sus hipótesis de lo constante y lo cambiante en las pilas. Al observar directamente las pantallas de las computadoras en el momento en que realizaban sus construcciones nos percatamos que ellos habían encontrado ya una manera de saber cuántos y cómo colocar azulejos para construir pilas consecutivas. Utilizaban la herramienta de conteo de azulejos que proporciona el manipulativo. No hubo necesidad de que hicieran todas las pilas hasta llegar a la pila número 16 para poder responder cuántos azulejos se necesitan para construirla y mucho menos hacer las pilas número 45 y la 72 que corresponden a la pregunta 5. Las siguientes respuestas nos dan evidencia de tal comprensión, obsérvelas:

Preg. 3:

- *“el número que te pide [pila 5] le aumentas uno, es decir, 6 y multiplicas 6x6 y solo le aumentas 4 que son los de las esquinas”*
- *“pondría un cuadrado de 36 cuadritos, más los 4 de las esquinas”*

Preg. 4:

- *“Multiplicando 17x17=289 y a ese resultado le suma 4 = 293 cuadritos”*
- *“17x17 lo multiplico y eso es lo de en medio y después las esquinas, le sumo 4”*
- *“Se le suma 1 y son 17x17 +4=293”*

Ellos ponen el cuadrado central de un color y los azulejos de las esquinas de otro color o de distintos. Ellos observan una regularidad en el cuadrado central, éste tiene por medida de lado el número de pila aumentado en uno, de modo que para saber de cuántos azulejos se conforma sólo hay que obtener su área. Por ejemplo, sí la pila es la #8 entonces, el lado del cuadrado central mide nueve azulejos y se conformaría por 81 azulejos. Después de que los estudiantes hacen estos cálculos sólo agregan los cuatro azulejos constantes para obtener el total de azulejos de la pila #8.

La observación que hacen de los azulejos que aumentan al centro, no es cualquiera, sino que ellos encuentran la relación entre el número de pila y la medida del lado del cuadrado central. Cabe decir que para este momento de la resolución del tipo de problemas planteados a los estudiantes, ya hay una familiarización. Porque ellos ya buscan las relaciones que pudiera haber entre los componentes del patrón, principalmente aquellos que involucren al número de pila o figura del patrón.

Más adelante se les plantearon dos preguntas en sentido inverso a las anteriores, en su hoja de trabajo, con la intención de conocer la solidez de su procedimiento. Casi todos los estudiantes dijeron cuál era el número mayor de pila que se podía construir con la cantidad de azulejos dada. Hubo estudiantes que equivocaron sus respuestas aun teniendo un procedimiento correcto para responder, debido a que colocaron como respuesta el número de pila aumentando en 1en lugar de restarle uno. Por ejemplo, en la pregunta 6 la respuesta es la pila #11. Ellos dan como respuesta la pila #12, explican que multiplicaron 12x12 que resulta 144 y a esto le suman 4 azulejos obteniendo 148 azulejos que son justo la cantidad de azulejos que se les dan. El error está en que olvidan que el número 12 representa el número de pila aumentado en uno, entonces su respuesta debe ser el número de pila pero sin aumentarle uno.

El procedimiento que ejecutan para dar respuestas correctas a las preguntas 6 y 7 es a través de aproximaciones. Es decir, prueban con distintos números multiplicándolos por sí mismos hasta acercarse a la cantidad de azulejos dados en la pregunta, a modo de que con los azulejos que queden ya no se pueda construir otra pila más grande. Estos números (con los que prueban) representan el número de pila aumentado en uno y el resultado de su multiplicación corresponde a la cantidad de azulejos que conforman el cuadrado central. Al final sólo agregan los cuatro azulejos constantes. Los estudiantes no pierden de vista que el número que multiplican por sí mismo es el número de pila aumentado en uno, por esta razón ellos restan uno a éste número para proporcionar el número de pila real en el patrón. Se puede decir que ellos utilizan el mismo procedimiento que les permite conocer la cantidad de azulejos para cualquier pila de patrón pero el uso que le dan es distinto, aquí sirvió para comprobar que el número de pila que daban por respuesta era realmente la más grande que se podía construir con la cantidad de azulejos dados. Usan este procedimiento pues es su recurso más cercano. Adelante se muestran algunas respuestas a las preguntas que dan cuenta de este hecho:

Preg. 6:

- *"La [pila] 11, primero lo intenté con la 13 y luego la 12 y me salió 11"*
- *"[pila] 11. Multiplicar 12x12=144 +4 de las esquinas"*

Preg. 7:

- *"[pila] 11. Multiplicando 12x12 +4 y les sobran 17 azulejos"*
- *"Pila 11. Multiplique 12x12= 144 + los cuatro de las esquinas 148, sobran 17"*

Hay que mencionar que tres estudiantes intentaron un procedimiento inverso para hallar el número de pila más grande. Observe sus respuestas:

- *"Resté 148-4 y me salió 144, luego busqué un número y me dio 12"*
- *"Encontré el número 11+1= 12 y lo multiplique x sí mismo y le sume 4 cuadros que permanecen igual"*
- *"Primero puse 148, le quité 4 y después puse 12x12 y me salió 144 y después le sume 4"*

Invertir su procedimiento sería por ejemplo, para la pregunta 6 que les da 148 azulejos para construir la mayor una pila posible. El estudiante tendría primero que restar cuatro a los 148 azulejos, de esto resulta 144, número al cual hay que obtener su raíz cuadrada por ser la operación inversa de elevar un número al cuadrado o de multiplicarlo por sí mismo. La raíz cuadrada de 144 es 12 éste resulta ser el número de pila aumentado en uno entonces, hay que restarle uno para obtener el verdadero número de pila en el patrón que es 11. Lo que quiere decir que con 148 azulejos se puede construir la pila #11 sin que sobren ni falten azulejos. En el mejor de los casos los alumnos harían este procedimiento pero ellos recurren a su recurso matemático más cercano. Estás acción es totalmente comprensible y acorde a su nivel.

Casi al final de su hoja de trabajo ellos explican cuál es su procedimiento al que llegaron para encontrar la cantidad de azulejos que se necesitan para construir cualquier pila del patrón, lo cual manifiesta la solidez de su hallazgo, observe:

- *“es el número de la pila sumándole uno y lo multiplico por ese mismo número y sumo más 4”*
- *“Multiplicando el número de pila + 1 por sí mismo teniendo el resultado se le suman 4 + que son los de afuera. [La fórmula que elige es $(n+1)^2$ +4]”*
- *“El número de pila más +1 y lo multiplicas por sí mismo y luego le sumas +4 y te da P+1 x P+1 = 4” [P = # de pila]*
- *“Si te dan un número [de pila] cualquiera como el 16; le aumentas 1 = 17 y lo multiplicas por si 17x17 y cuando te da el número sólo le aumentas 4 y ya. 16 = 17x17= 289+4 = 293”*

Los estudiantes tienen claro cómo encontrar la cantidad de azulejos de cualquier pila en el patrón. Al final de las hojas de trabajo se les pide elegir una fórmula que sirva para encontrar la pila *n* en el patrón. La elección de los estudiantes entre las expresiones (n+1) (n+1) + 4 y la $(n+1)^2$ +4 recae en la primera sin ser mucha la diferencia en el número de estudiantes que la eligen. La razón es porque visualmente refleja la operación de multiplicar por sí mismo el número de pila aumentado en uno, justamente lo que ellos hacían.

La resolución del problema de azulejos II a través de un procedimiento que fue expresado como (n+1) (n+1) +4 y $(n+1)^2$ +4 en total correspondencia con su visualización de las pilas del patrón. Desde la tipología de Rivera la generalización a la que llegan los estudiantes es constructiva- estándar y no estándar-multiplicativa.

En general, la resolución del problema de Crecimiento de Azulejos II rebasó lo esperado. Se tiene toda la certeza de que la construcción y visualización en el manipulativo virtual facilita la comprensión y detección de regularidades del patrón lo que conlleva a encontrar formas de resolver este tipo de problemas.

El problema de ***CRECIMIENTO DE PILAS***

Este último problema tiene peticiones que lo hacen distinto a los anteriores y son las siguientes: las imágenes del patrón que se les presentaron en sus hojas de trabajo son la número 2, 3 y 4 y se les pide dibujar la pila cero; luego se les solicitó dibujar las dos pilas previas y las dos siguientes. Además de dibujarlas las tenían que construir con el manipulativo; y también se les pidió describir otras formas o procedimientos para encontrar el número de azulejos para la pila *n* del patrón.

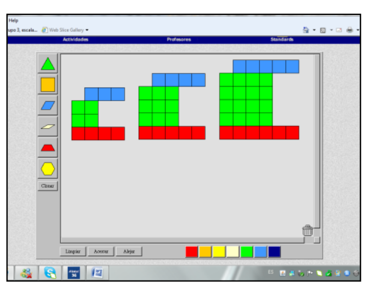
Después de las instrucciones para poder usar el manipulativo en la sección correspondiente, se les pide construir dos pilas anteriores a la pila número 2 (la cero y la uno) y también dos pilas después de la número 4. Casi todos los estudiantes construyen sin dificultad la pila número 1, 5 y 6 pero la pila número cero causó confusión en su construcción, algunos pensaron que no existía y otros la construyeron erróneamente, aunque hubo quienes hicieron una construcción correcta. La sugerencia que se les hizo fue construir primero las pilas a partir de la número 2 en adelante con la intención de que observaran cómo estaban estructuradas y luego poder construir con esa misma estructura las pilas cero y uno. Esta estrategia funcionó para muchos estudiantes dado que respondieron bien cuántos azulejos tienen las pilas número 0, 1, 5 y la 6. Además se ayudaron con la herramienta del manipulativo que cuenta los bloques (azulejos) usados en cada pila.

Enseguida se les pide decir cómo le hacen para dibujar la pila número 10, muy pocos no contestan esta pregunta. Los estudiantes primero la construyen con el manipulativo, sin que hayan hecho todas las pilas que le anteceden y después dan su explicación, ésta es muy breve y consiste en mostrar los cálculos que hicieron para obtener la cantidad total de azulejos que requiere la pila número 10. Las respuestas que dan la mayoría de los estudiantes manifiestan ya un procedimiento que les permite saber la cantidad de azulejos que tienen las pilas aun cuando el manipulativo les indica el total de azulejos empleados. Pero ellos saben que el manipulativo sólo indica este dato cuando se construye la pila pero cuando se trata de un número de pila muy grande el construirla con el manipulativo no resulta práctico, así que buscan una forma distinta de encontrar la cantidad de azulejos sin tener que construir una pila de gran tamaño o cualquiera que sea.

Tal procedimiento expresado numéricamente se clara en la descripción que dan al responder la pregunta de cuántos azulejos se necesitan para hacer la pila número 57 y además se corrobora su funcionalidad pues los alumnos no construyen dicha pila en el manipulativo, sólo hacen operaciones utilizando la calculadora de la computadora para obtener los resultados de ésta y otras preguntas. En la revisión más puntual de esta pregunta en las hojas de trabajo se detectaron tres procedimientos para resolver el problema del crecimiento de pilas. Dos de éstos fueron también hallados por los estudiantes en la fase anterior, el otro lo descubrieron en esta cuarta fase y es equivalente pero distinto o más bien una variante más. Enseguida se hará una descripción de estos tres procedimientos.

*Primer procedimiento*

Es el que más estudiantes desarrollan en esta fase y la anterior. Consiste en visualizar a la pila en tres secciones. La primera sección es una fila de azulejos en la parte superior de la pila que tiene una cantidad de azulejos igual al número de pila aumentado en uno. La segunda sección, es un cuadrado ubicado al centro de la pila que se conforma por una cantidad de azulejos igual al número de pila elevado al cuadrado. La última sección, es una fila de azulejos en la parte inferior igual al número de pila aumentado en dos. Si se suman los azulejos de cada una de estas secciones se obtiene el total de azulejos de la pila en cuestión. Los estudiantes usan la herramienta del manipulativo que permite poner color a los azulejos, de manera que cada sección tiene un color diferente para hacer notoria cada una. Observe la imagen:



Ahora bien, para definir estas tres secciones, ellos establecieron relaciones sumamente importantes basadas en el número de pila. Si se desconoce este dato su procedimiento pierde sentido. Establecer estas relaciones no es fácil pero con los antecedentes de los problemas anteriores ellos ya buscan este tipo de relaciones para hallar un procedimiento que los lleve a saber el número de azulejos necesarios para cualquier pila del patrón. La expresión algebraica que representa esta visualización es: $n^2 + (n+1) + (n+2)$ donde $n^2$ es el cuadrado central; $n+1$, la fila superior y $n+2$, la fila inferior. Observe estas respuestas que muestran las tres secciones que visualizan los estudiantes:

Preg. 3:

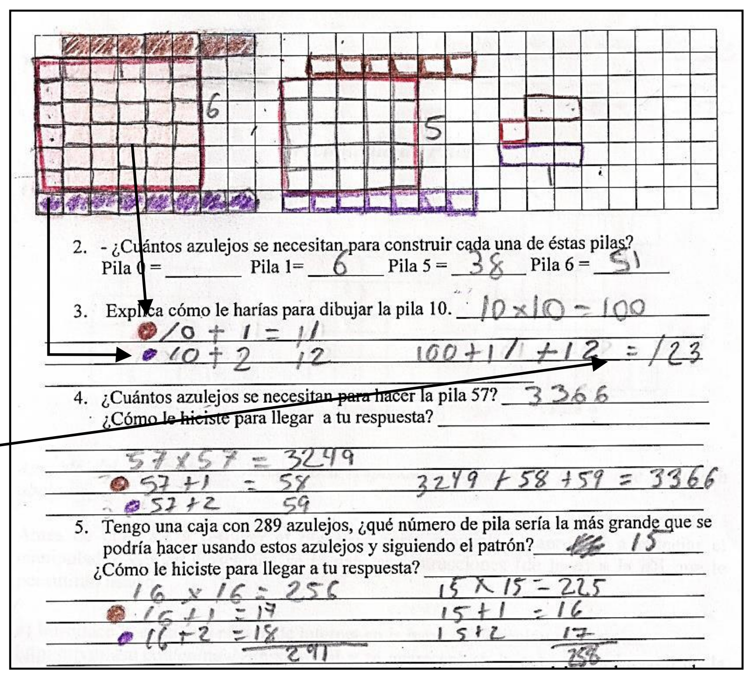
- *"Es 10x10 y se le suman arriba más 1 o sea 11 y luego abajo es 10+2 = 12 = 123 [azulejos]"*
- *"Poner 100 cuadros en el centro, arriba 11 y abajo 12"*

Preg. 4:

- *"3366, pues en el centro hay 57, multiplicas 57x57 y le sumas 59 y 58 y te sale"*
- *"3366, multiplique 57x57 y me dio 3249, después le sumé 117que es el resultado de sumar las dos barras [filas] 59 + 58 y ya"*

Una estudiante fue puntual al escribir los cálculos de su procedimiento cuando se le pregunta cómo dibujar la pila #10, ella hizo lo siguiente:

Coloca un círculo de color diferente para especificar la sección de azulejos a la que se refiere, misma que está coloreada en la pila.


6
5
1

2. - ¿Cuántos azulejos se necesitan para construir cada una de éstas pilas?
Pila 0 = ______ Pila 1= 6 Pila 5 = 38 Pila 6 = 51

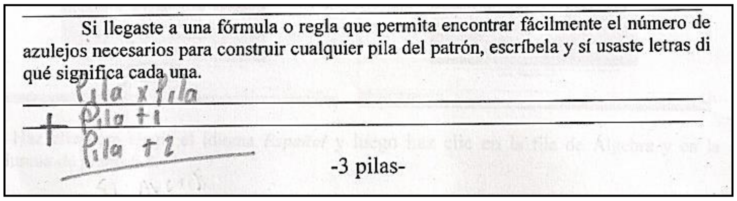
3. Explica cómo le harías para dibujar la pila 10. 10x10 = 100
10 + 1 = 11
10 + 2 12 100+11 +12 = 123

4. ¿Cuántos azulejos se necesitan ~~para hacer~~ la pila 57? 3366
¿Cómo ~~le hiciste~~ para llegar a tu respuesta?
57 x 57 = 3249
57 +1 = 58 3249 + 58 + 59 = 3366
57 +2 59

5. Tengo una caja con 289 azulejos, ¿qué número de pila sería la más grande que se podría hacer usando estos azulejos y siguiendo el patrón? 15
¿Cómo le hiciste para llegar a tu respuesta?
16 x 16 = 256 15 X 15 = 225
16 +1 = 17 15+1 = 16
16 +2 = 18 15+2 17
291 258

Al final hace una sumatoria de todos los resultados obteniendo 123, que son el número de azulejos que se requieren para la pila #10

La fórmula que escribe es:


Si llegaste a una fórmula o regla que permita encontrar fácilmente el número de azulejos necesarios para construir cualquier pila del patrón, escríbela y sí usaste letras di qué significa cada una.

Pila x Pila
+ Pila +1
Pila +2

-3 pilas-

A muchos estudiantes les es difícil describir con sus palabras en sus hojas de trabajo su procedimiento, en su lugar escriben las operaciones matemáticas que realizan para llegar al resultado. Los estudiantes llegan a establecer fórmulas como las siguientes:

- *“N° de pila$^2$ (al cuadrado) + hi (hilera inferior) + hs (hilera superior) = Número de azulejos”*
- *“ ¨n¨ x ¨n¨* **+** *¨n¨+1* **+** *¨n¨+2”*
- *“ nxn + n+1 + n+2 ”*

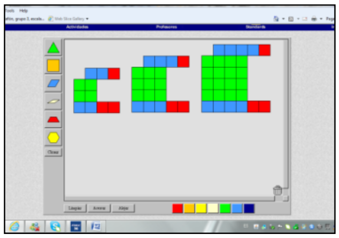
Estas expresiones de los estudiantes son del tipo constructivas- no estándar- multiplicativas en la categorización de Rivera.

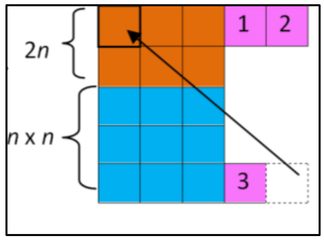
Es alentador que los estudiantes hayan progresado hasta el punto de utilizar *n* como un número general y lograr establecer una fórmula o expresión algebraica con esta característica, considerando que son estudiantes de primer grado con muy pocos recursos algebraicos.

*Segundo procedimiento*

Los alumnos parten de visualizar las pilas en tres secciones, sólo una sección es igual a la del procedimiento anterior que es la conformación del cuadrado central que tiene una cantidad de azulejos que se obtiene de elevar al cuadrado el número de pila. Una segunda sección son dos filas de azulejos, una en la parte superior y otra en la inferior de la pila. Cada fila se forma con una cantidad de azulejos igual al número de pila. La tercera sección son tres azulejos que permanecen constantes en cada pila.

Este procedimiento también fue desarrollado en la tercera fase y llegaron a la misma expresión pero la visualización fue diferente, enseguida mostramos las imágenes que muestran la diferencia en la visualización. Observe:






En la tercera fase, el estudiante hace una transformación de la pila. Mueve un azulejo ubicado en la esquina inferior derecha hacia la esquina superior derecha.

Enseguida se muestra lo que hizo una estudiante para obtener la cantidad de azulejos de la pila #57.

"*Multiplique 57x57 =3249 después le sumé 114 que es el resultado, hay que sumarle las 3 barras [azulejos]*"

Ella multiplica "57x57=3249", esto corresponde a la primera sección que visualiza como el cuadrado central. Luego dice "después le sume 114 que es el resultado", ella obtiene 114 cuando suma 57+57, cada número 57 representa los azulejos colocados en cada una de las filas de la segunda sección. Y cuando dice: "hay que sumarle las 3 barras", se refiere a los 3 azulejos que permanecen constantes. Otro estudiante expresa así este procedimiento:

> *"Multiplicando el número de pila por sí mismo, súmale el n [número] de pila 2 veces y luego súmale 3"*

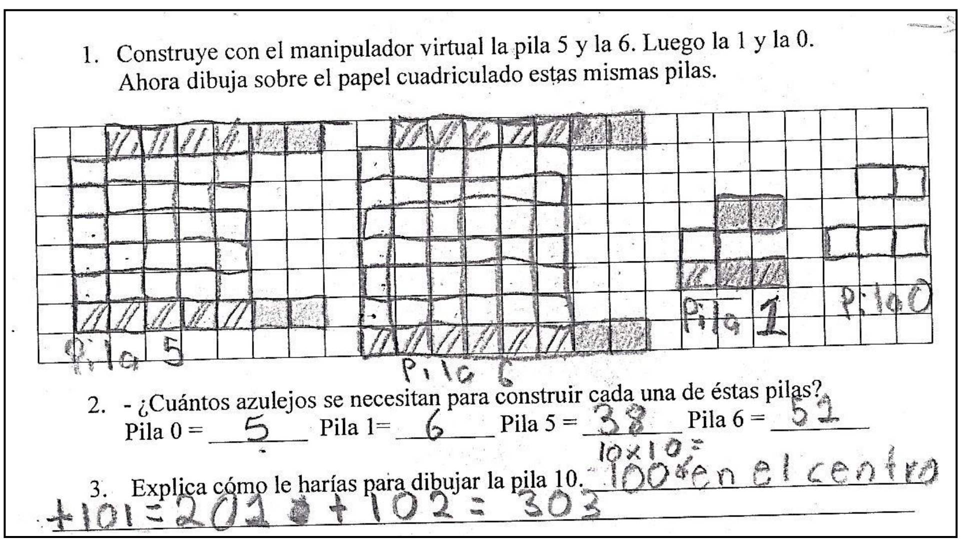
La descripción del procedimiento nos lleva a la fórmula o expresión: $n^2 +2n +3$ que es equivalente a la expresión del primer procedimiento pero en la forma más simple de expresar la generalidad del patrón.

*El tercer procedimiento*

Lo encontró sólo un estudiante y aunque no lo culmina debido a que lo cambia por el primer procedimiento descrito aquí, su procedimiento también conducía a generalizar el patrón. Él construye con el manipulativo virtual las pilas 6, 5, 1 y 0, además de otras, y en su hoja de trabajo dibuja las pilas 6, 5 y 1 en ellas hacen marcas que distinguen las diferentes partes de las pilas, pero no logra traducirlas de manera matemática para obtener el total de azulejos de cada pila. Observe lo que hace en su hoja de trabajo:

El estudiante secciona la pila. Una sección corresponde a un cuadrado en el centro formado por azulejos, de manera que el lado del cuadrado tiene una cantidad de azulejos igual al número de pila. La segunda sección corresponde a una fila de azulejos en la parte superior que se forma con una cantidad de azulejos igual al número de pila disminuido en uno y otra fila en la parte inferior tiene una cantidad de azulejos acoplados en cada una de las filas mencionadas antes, éstos cuatro azulejos permanecen constantes en todas las pilas. Observe las pilas dibujadas por el estudiante en su hoja de trabajo:

Ejemplo de la pila #5:

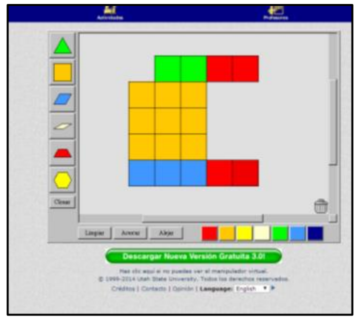

1. Construye con el manipulador virtual la pila 5 y la 6. Luego la 1 y la 0.
Ahora dibuja sobre el papel cuadriculado estas mismas pilas.

Pila 5 Pila 6 Pila 1 Pila 0

2. - ¿Cuántos azulejos se necesitan para construir cada una de éstas pilas?
Pila 0 = 5 Pila 1= 6 Pila 5 = 38 Pila 6 = 51

3. Explica cómo le harías para dibujar la pila 10. 10x10= 100 en el centro +101=201 +102= 303

Las secciones pueden interpretarse simbólicamente de la siguiente manera. La cantidad de azulejos del cuadrado central se obtiene elevando al cuadrado o multiplicando por sí mismo el número de pila. Si denominamos *n* como el número de pila, entonces se expresaría así: $n^2$ ó $n \cdot n$. La representación de la fila superior sería: *n-1* y la fila inferior sería: *n*. La sección de azulejos constantes sólo es el número cuatro. La expresión que reúne estos términos quedaría como $n^2$ +n-1 +n +4, al simplificarla se llega a: $n^2$ +2n+3. Observe la imagen de su construcción:



Aunque el estudiante resuelve el problema con otro procedimiento equivalente que se origina de una visualización distinta, éste no deja de ser menos valioso.

La manera de resolver la pregunta en sentido inverso, la cual les proporciona 289 azulejos para construirla mayor pila posible, fue a través de ensayo y error o de aproximaciones. Se consideran correctas dos respuestas. Si el alumno contesta que es la pila #16, le faltarían 2 azulejos, pues se necesitarán 291 para esta pila. Si contesta que es la pila #15, le sobrarían 31 azulejos de los 289 dados. Desde nuestra perspectiva ésta sería la respuesta más acertada. Los estudiantes no revierten su procedimiento para llegar al número de pila, sino que lo usan como una manera de comprobar que los números con los cuales intentan llegar al número de pila utilice el mayor número de azulejos posibles que se les dio.

Esta es su mejor estrategia, su recurso más próximo y efectivo. Por último, ellos no describen otros procedimientos distintos al que desarrollaron. Algunos describen nuevamente su procedimiento y escriben una regla o fórmula que lo representa, esto es relevante porque utilizan la literal "*n*" para expresarla, observe:

- *"nxn + n+1 + n+2"*
- *"pila x pila + pila+1 + pila +2 = resultado"*
- *"nxn + (n+2) + (n+1)"*
- *"NxN + N+1 + N+2"*<br>*Centro Arriba Abajo*

En resumen, los estudiantes resolvieron el problema con menos dificultad, su observación en el patrón se volvió más fina. Es decir, tratan de hallar regularidades de una pila a otra. Buscan formas más simples de ordenar lo que es constante y lo cambiante en cada pila. Utilizan los colores que proporciona el manipulador para distinguir las secciones que estructuran la pila según su criterio de visualización, la herramienta del color en los azulejos resultó una buena estrategia porque cada sección coloreada representa una regularidad en el patrón.

Más adelante se presentan dos tablas que muestran por separado un panorama general del tipo de generalizaciones algebraicas que desarrollaron los alumnos participantes en la tercera y cuarta fase en las seis actividades de generalización de patrones. Cabe recordar que las actividades en la tercera fase fueron resueltas por estudiantes de alto rendimiento en matemáticas en un ambiente de lápiz y papel y en la cuarta fase por estudiantes de bajo rendimiento en un ambiente virtual. Se clasificaron las respuestas de los estudiantes con respecto a la tipología de Rivera (plantillas visuales), esto implicó analizar la elección de *unidad de medida* que consideraron pertinente en cada patrón.

La unidad de medida elegida por el estudiante tiene que ver con su pensamiento aditivo o multiplicativo en relación a la interpretación que dieron a la estructura general del patrón. Esto es, cada estudiante visualiza los patrones de manera distinta y esto depende fundamentalmente de cómo conceptualiza sus unidades de medida.

La **Tabla 1** muestra la producción de generalizaciones algebraicas que construyeron los participantes de alto rendimiento. En primer lugar todas las generalizaciones recaen en platillas visuales del tipo multiplicativo, lo que indica un nivel de abstracción superior si se compara con el de tipo aditivo. Luego, en específico son constructivas no estándar lo que quiere decir que los estudiantes al visualizar la estructura del patrón no superponen las partes de las figuras que lo conforman y además los términos de la expresión que utilizan para generalizar el patrón no están en forma simplificada, más sin embargo hubo alumnos (un menor número) que expresaron la generalización en su forma más simple. Esto último no se esperaba pues implica conocimientos algebraicos más avanzados (suma de términos semejantes, exponentes, escritura algebraica, etcétera.) por lo menos para el primer grado de secundaria.

Finalmente, en el sexto problema (de mayor complejidad) se aprecia un gran número de procedimientos de resolución que responden a una plantilla visual de tipo multiplicativo pero además en éstos los alumnos mueven, reorganizan las piezas y transforman una figura del patrón en otra que tenga una estructura familiar para ellos, por ejemplo un cuadrado o un rectángulo en particular para este problema y para los otros, un triángulo equilátero, un prisma o cubos por decir algunas de los que los estudiantes usaron.

En la **Tabla 2** muestra la producción de generalizaciones algebraicas que construyeron los participantes de bajo rendimiento. Es notorio que casi un total de los alumnos realizaron generalizaciones que se sostienen en platillas visuales del tipo multiplicativo de carácter constructivo no estándar, muy cercano los resultados a los de sus compañeros avanzados aunque las producciones son menores, algunas son distintas y no por eso menos válidas. Lo valioso es que estos estudiantes rebasaron la expectativa de la investigación.

**TABLA 1**. Clasificación de las generalizaciones algebraicas que desarrollaron los estudiantes en la ***tercera fase*** de la investigación. Ambiente: Lápiz y papel

| **TIPOS DE GENERALIZACIONES/ PATRONES** | **LETRA V** | **DISEÑO DE LA VIGA** | **ESTAMPAS EN EL CUBO** | **CRECIMIENTO DE AZULEJOS I** | **CRECIMIENTO DE AZULEJOS II** | **CRECIMEINTO DE PILAS** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Estándar constructiva aditiva | | | | | | |
| No estándar constructiva aditiva | n + (n-1) | | | | | |
| Estándar constructiva multiplicativa | | | n·4+2 | $n^2$ +n+2 | $(n+1)^2$ +4 | |
| No estándar constructiva multiplicativa | 2 (n-1) + 1 | 4(n-1)+3<br>3n + (n-1)<br>[n-1]+[n*x*2]+[n] | 4(n-2)+10<br>4(n-1)+6 | (n*x*n)+n+2 | (n+1)(n+1)+4<br><br>$n^2$+(n+1)+n+4 | $n^2$+(n+2)+ n+1<br>n(n+1) + n-1 +4<br>n*x*n + n2 +3<br>n(n+1)+ n+1 +2 |
| Deconstructiva | | | | | | |
| Constructiva impulsada por auxiliar o deconstructiva | n · 3-1<br>[La realizó un alumno] | 4n-1<br>[Multiplicativa-estándar] | | | | |
| Constructiva basada en la transformación o deconstructiva | | | | | | (n+1)(n+1)+2<br><br>(n+2)(n)+3<br>[n+2·n]+3<br>(n+2)(n)+3<br><br>nxn +2n +3<br><br>(n-1)[(n-1)*x*(n+2)]+2<br>(n-1)(n-2)+(n+1)+4<br><br>[Todas son: No estándares-multiplicativas] |
| OBSERVACIONES | 2 Procedimientos | 4 procedimientos | 3 procedimientos | 1 procedimiento | 2 procedimientos | 8 procedimientos |

**TABLA 2**. Clasificación de las generalizaciones algebraicas que desarrollaron los estudiantes en la ***cuarta fase*** de la investigación. Ambiente: virtual

| TIPOS DE GENERALIZACIONES/PATRONES | LETRA V | DISEÑO DE LA VIGA | ESTAMPAS EN EL CUBO | CRECIMIENTO DE AZULEJOS I | CRECIMIENTO DE AZULEJOS II | CRECIMEINTO DE PILAS |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Estándar constructiva aditiva | | | | | | |
| No estándar constructiva aditiva | El problema lo responden verbalmente y la expresión matemática que representa su respuesta es: n + (n-1)<br><br>El problema lo responden verbalmente con otro procedimiento y la expresión matemática que lo representa es: n+n-1 | | | | | |
| Estándar constructiva multiplicativa | | | | | | $n^2$ +2n+3 |
| No estándar constructiva multiplicativa | El problema lo responden verbalmente y la expresión matemática que representa su respuesta es: 2 (n-1) + 1 | n*x*3 + n-1<br>n+2n+(n-1) | n*x*4 + 2 | (n*x*n)+n+2<br>p*x*p +p +2 | (n+1) (n+1)+4<br>n+1 *x* n+1 + 4 | n*x*n + n+1 + n+2<br>$n^2$ +(n+1)+ (n+2)<br><br>$n^2$ + n-1 + n + 4 |
| Deconstructiva | | | | | | |
| Constructiva impulsada por auxiliar o deconstructiva | | | | | | |
| Constructiva basada en la transformación o deconstructiva | | | 4(n-2)+10<br>[No estándar-multiplicativa] | | | |
| OBSERVACIONES | 3 Procedimientos | 2 procedimientos | 2 procedimientos | 1 procedimiento | 1 procedimiento | 3 procedimientos |

Las siguientes imágenes muestran a los estudiantes resolviendo los problemas usando el manipulativo virtual en el aula digital de su escuela.

# CAPÍTULO IV

## CONCLUSIONES

En esta tesis se abordó el tema del razonamiento algebraico a través de la generalización de patrones mediada por un manipulativo virtual. Mostramos una manera de fomentar el razonamiento inductivo, al cual se le da poco espacio en el programa de estudio de matemáticas de secundaria. La generalización de patrones ha sido estudiada y empleada como una vía para introducir el álgebra a la educación básica.

Nuestra propuesta gira en torno a la generalización de patrones de figuras, tema que ha sido investigado en nuestro país por la comunidad matemática. Sin embargo, el número de investigaciones se reduce cuando la temática se vincula a un ambiente de aprendizaje virtual. El manipulativo virtual que se utilizó para esta investigación provee de herramientas a los estudiantes desaventajados en matemáticas. Este permite la experimentación de acciones matemáticas importantes como la abducción e inducción (base en los procesos de generalización algebraica) y les brinda mayores posibilidades de avanzar hacia la comprensión y generalización de problemas relacionados con patrones de figuras.

La Trayectoria Hipotética del Aprendizaje (THA) fue el fundamento teórico de la metodología utilizada en esta investigación (Simón, 1995). Se partió de indagar cuáles eran las nociones algebraicas de los estudiantes; se planificaron actividades para abordar el tema de generalización de patrones; se seleccionaron tareas que proporcionaron herramientas para promover el aprendizaje de dicho tema; se instrumentaron fases de trabajo que en el transcurso se les incorporaron modificaciones, para ello fue necesario apropiarse de las estrategias de resolución que generaron los estudiantes avanzados trabajando en ambientes de lápiz y papel. Dichas estrategias se tradujeron en guías pedagógicas, su diseño incorporó la utilización de dispositivos digitales en el aula, y fueron la expresión concreta de la concepción de una trayectoria hipotética de aprendizaje que permitió trabajar con los estudiantes desaventajados en la resolución de tareas de generalización.

En esta investigación se resuelve de manera creativa la tensión que existe en cuanto a la meta del aprendizaje del tema curricular algebraico de patrones y ecuaciones (la cual es que el estudiante debe de formular, utilizando el lenguaje algebraico, la formula general que subyace al patrón) y la recuperación del pensamiento matemático generado por los estudiantes en este tipo de situaciones. En particular, se generan dos ciclos completos de enseñanza del tema de patrones y ecuaciones (SEP 2011, p. 16) para dar respuesta, mediante el diseño de guías pedagógicas y la incorporación de herramientas virtuales, al tipo de pensamiento y dificultades que caracterizan a los estudiantes desaventajados en esta clase de situaciones, de tal manera, que estos últimos estén en igualdad de condiciones (cognitivas) al término de determinada instrucción escolar.

Tales estudiantes se pueden caracterizar por encontrarse normalmente en situaciones de desventaja en la escuela, ya sea por falta de desarrollo de habilidades, o de recursos adecuados. Esto es, sin la ayuda de mediadores más eficaces como los que se proporcionan con el acceso a dispositivos digitales (como los de la biblioteca de manipuladores virtuales de la Universidad de Utah) este tipo de estudiantes difícilmente logra resolver las tareas de generalización de patrones con figuras o patrones *figurales*. Esto último fue lo que pudimos constatar durante la primera fase del trabajo empírico, pues en realidad este tipo de estudiantes cuando se resuelven tareas de este tipo, utilizando solamente lápiz y papel, normalmente quedan al margen de la actividad, sin recursos y a la espera de las iniciativas de los estudiantes más avanzados.

Para efectuar el análisis de los datos recabados del trabajo de campo, nos acercamos a las propuestas de Mason (1985) y Rivera (2010). Mason propone a la generalización como una vía apropiada para acceder al pensamiento algebraico, él establece un proceso por el cual se transita para llegar a ésta con respecto a tareas matemáticas. Este proceso consiste en pasar de lo específico a lo general, él lo denomina *Ciclo de la Generalización* y se desarrolla en cuatro etapas bien definidas.

Una parte del análisis consistió en identificar estas etapas en la resolución de los problemas sobre patrones de figuras que efectuaron los estudiantes. Se logró a través de la revisión de entrevistas y la resolución escrita en sus hojas de trabajo. Esta labor contribuyó en el rediseño del planteamiento de los problemas para ser presentados a los estudiantes desaventajados para su resolución en un ambiente de aprendizaje virtual. Específicamente se observó que los estudiantes transitaron por los dos principales tipos de acciones mencionados por Rivera, a saber, la acción aditiva-inductiva sobre los objetos y la acción simbólica.

Con ayuda del manipulativo virtual, los estudiantes desaventajados pudieron establecer hipótesis acerca del número de elementos que conformaban figuras que no aparecían en el patrón figural dado (etapa abductiva en el proceso de generalización, de acuerdo con Rivera), y pudieron avanzar en la prueba o confirmación de sus hipótesis (establecimiento de la etapa inductiva según el autor antes referido), de tal manera que pudieron confirmar la validez de una regla o procedimiento que define al patrón . De acuerdo con Rivera, ambas etapas forman parte del proceso de generalización de patrones figurales, vía la visualización de las plantillas figurales convenientes, según las propias estrategias de resolución que decidan los estudiantes implementar.

El trabajo de Rivera aportó significativamente al análisis de los datos obtenidos en esta investigación. Su trabajo da evidencia empírica de la existencia de *Plantillas Visuales* en las tareas sobre generalización de patrones, de tales plantillas surgen tipos de generalizaciones algebraicas. Su investigación se enfocó en la generalización de patrones, en enfatizar la visualización y en el pensamiento multiplicativo que de ahí se desprende. El autor se centró en tres tipos de plantillas visuales: aditiva, multiplicativa y pragmática, y las implicaciones cognoscitivas de éstas. Dichas plantillas exaltan el papel del ojo como un órgano legítimo de descubrimiento e inferencia.

En el análisis de los datos se identificó la relevancia de la visualización otorgada por los estudiantes en la resolución de los problemas de generalización. Esta formó parte de sus estrategias para detectar regularidades en el patrón y además se vincula con la primera etapa del proceso de generalización enunciada por Mason. Parte de este análisis fue el reconocimiento de plantillas visuales que generaron ambas poblaciones de estudiantes participantes. Al respecto diremos que se confirma lo que Rivera asume acerca de la visualización de plantillas al resolverse tareas sobre generalización de patrones de figuras con estudiantes de secundaria. En circunstancias similares con respecto a edad de los alumnos, ambiente de aprendizaje (lápiz y papel) y tareas matemáticas (patrones de figuras), nuestros alumnos aventajados resolvieron este tipo de problemas de manera semejante a los estudiantes que colaboraron en el trabajo de Rivera.

Para nuestros estudiantes desaventajados, la visualización representó el punto de partida para identificar regularidades en el patrón. Ellos seccionaron las figuras para hacer evidente lo que permanecía constante y lo cambiante en cada una de éstas, para después de varios intentos traducirse en una expresión que representara la generalidad del patrón. Las plantillas visuales que generaron estos estudiantes incurrieron en las de tipo multiplicativo. El que los estudiantes lleguen a una generalización algebraica de tipo multiplicativa, indica un nivel mayor de abstracción, el cual ubica a esta operación de pensamiento en un orden superior, según nuestro autor.

Al comprobar que la visualización contribuyó que los estudiantes desaventajados pudieran llegar a instrumentar estrategias de resolución, en torno de las tareas propuestas, similares a las de los estudiantes avanzados. Los estudiantes en desventaja privilegiaron la asociación de una unidad de medida con el número de la figura, pudieron avanzar en el establecimiento de hipótesis y en la prueba o verificación de las mismas. Es decir, que en efecto los estudiantes evidenciaron la realización de acciones del tipo abductivo e inductivo, base del proceso de generalización.

El manipulativo virtual como mediador para la visualización contenía las características idóneas para potenciarla en los estudiantes, las cuales sin duda les permitieron ampliar sus posibilidades de comprensión y resolución a un nivel similar a los estudiantes avanzados, pues el tipo de plantillas al que llegaron se ubican, casi por igual, entre las del tipo multiplicativo.

A diferencia del trabajo de Rivera en esta tesis el utilizar la tecnología en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en la educación básica fortalece los argumentos que hasta ahora se han dado en torno del uso de la tecnología para que grupos en desventaja estén en igualdad de condiciones al concluir determinada instrucción escolar.

Se hace preciso enfatizar la mediación del manipulativo virtual como un facilitador que potencializó la capacidad de visualización de los estudiantes menos aventajados y es justamente esta función, entre otras, la que debe desempeñar la tecnología en la escuela. Vista como un medio, no un fin.

En general, la instrumentación del ciclo de enseñanza a lo largo de todas las fases del trabajo empírico y en particular a partir de la utilización de las guías pedagógicas y de los manipulativos virtuales, permitió que la mayoría de los estudiantes alcanzaran la explicitación de una formula algebraica subyacente al patrón figural en cuestión y se avanzó hacia una formulación sincopada (i.e. en una combinación de lenguaje algebraico y natural) de la regla subyacente en las configuraciones en juego.

El soporte brindado por el manipulativo fue, entre otras cosas, el de exaltar la visualización, determinante para la identificación de regularidades del patrón. En tal reformulación intervino la decisión del profesor/investigador para modificar asertivamente los cuestionamientos del problema matemático para guiar pedagógicamente al estudiante menos aventajado hacia la comprensión y resolución del problema.

Por supuesto habrá y falta mucho por hacer en cuanto a encontrar formas en las que el estudio de las matemáticas, en el nivel básico, logre ser del interés de los adolescentes actuales; en donde el profesor consiga la comprensión y desarrollo de ideas matemáticas por parte de sus alumnos a través de la constante búsqueda de herramientas pedagógicas que se viertan en su práctica diaria y los estudiantes le tomen sentido a esta área del conocimiento que estará presente en casi todas sus actividades; e incorporar a la tecnología en el aula, no para suplir al maestro sino para ser una mediadora entre él, el conocimiento y sus alumnos.

Finalmente este trabajo de investigación puede ser útil en prácticas cotidianas cuando se estudian las matemáticas en la escuela secundaria. Le proporciona al profesor guías pedagógicas en relación al tema de la generalización de patrones de figuras, además brinda evidencia del potencial que tiene el uso de un manipulativo virtual para nivelar el aprendizaje de estudiantes en desventaja académica en matemáticas. Se propicia entonces clases más inclusivas de matemáticas y el planteamiento de metas de aprendizaje más elevadas. Que no baste con la sola comprensión, sino que se llegue a la resolución de problemas matemáticos. Este logro significa la formación de individuos competentes matemáticamente aptos para transitar a niveles educativos subsecuentes.

# REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS


Amit, M. y Neria, D. (2008). ‘‘Rising to the challenge’’: using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *The International Journal on Mathematics Education* (ZDM), *40(1)*, 111–129.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *52*, 215–241.

Blanton, M. y Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2 (pp.135-142). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Blanton, M. y Kaput, J. (2005). Characterizing a Classroom Practice that Promotes Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36(5),* 412-446.

Brodie, K. (2010). *Teaching mathematical reasoning in secondary school classroom*. New York: Springer.

Cañadas C. y Castro E. (2004). Razonamiento Inductivo de 12 alumnos de secundaria en la resolución de un problema matemático. *Actas del Octavo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (SEIEM) (pp. 173-182).España: La Coruña.

Cañadas, C. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada. España.

Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales.* Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada. España.

Clark, F. & Kamii, C. (1996). Identification of multiplicative thinking in children in grades 1–5. *Journal for Research in Mathematics Education, 27(1)*, 41–51.

Davidov, V. (1972/1990). Type of generalization in instruction: Logical and psychological problems in the structuring of school curricula. En J. Kilpatrick (Ed.), *Soviet studies in mathematics education* (Vol. 2). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Dretske, F. (1990). Seeing, believing, and knowing. En D. Osherson, S. M. Kosslyn & J. Hollerback (Eds.), *Visual cognition and action: An invitation to cognitive science* (pp. 129–148). Cambridge: MIT Press.

Drijvers y Hendrikus (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: design research on the understanding of the concept of parameter.* Tesis doctoral no publicada, Universidad de Utrecht, Utrecht. Recuperado de:

Dunham, P., & Hennessy, S. (2008). Equity and use of educational technology in mathematics. En K. Heid & G. Blume (Eds.), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics: Vol. 1. Research Syntheses* (pp. 345-347). USA: Information Age Publishing.

Ellis, A. B. (2007). A Taxonomy for categorizing generalizations: generalizing actions and reflection generalizations. *The Journal of the Learning Sciences, 16(2),* 221-262.

Galo, J.R. y Cañas, J.J. (2007) Análisis de una experimentación constructivista con TIC en el aprendizaje de las matemáticas. En P. Bolea, M. Camacho, P. Flores, B. Gómez, J. Murillo & M.T. González (Eds), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. X Simposio de la SEIEM* (pp.235-245) Huesca: SEIEM.

Giaquinto, M. (2007). *Visual thinking in mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

Gravemeijer, K. y Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics: a calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics, 39*, 111-129.

Guerrero, S., Walker, N., & Dugdale, S. (2004). Technology in support of middle grade mathematics: What have we learned? *Journal of computers in mathematics and science teaching, 23*(1), 5-20.

Chiappini, G. (2013). Cultural affordances of digital artifacts in the teaching and learning of mathematics. In Proceedings of 11th International Conference on Technology in Mathematics Teaching. Italy: University of Bariico.

Chiappini, G. & Cozzani, G. (2014). A methodology to design inclusive practices in mathematics based on the use of technology. In EDULEARN14 Proceedings, Barcelona: ATED/ http://www.library.iated.org/publications/edulearn14

Hartshorn, R. & Boren, S. (1990). Experiential Learning of Mathematics: Using manipulatives. ERIC Digest. Recuperado de http://www.ericdigest.org/pre-9217/math.htm.

Hewitt, D. (1998). Approaching Arithmetic Algebraically. *Mathematics Teaching, 163*, 19-29.
http://igiturarchive.library.uu.nl/dissertations/2003-0925-101838/inhoud.html
http://unesdoc.unesco.org/images/0014/001419/141908s.pdf

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fennema y T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp.133-155). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Kaput, J. (2008).What is Algebra? What is Algebraic Reasoning? En *Algebra in the Early Grades* (pp. 5-17). E.U: Lawrence Erlbaum Associates y NCTM.

Kaput, J., Carraher, D. y Blanton, M. (2008). Content Matters: Algebraic Reasoning in Teacher Professional Development. En *Algebra in the Early Grades. (pp. 333-359).*E.U: Lawrence Frlbaum Associates y NCTM

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: a structural perspective. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*, *4*, 33-59). Reston, VA.: Lawrence Erlbaum Associates y NCTM.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. A broadening of sources of meaning. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 11-49). Rotterdam: Sense Publishers.

Kieran, C. (2007). Learning and Teaching algebra at the Middle School through College Levels: Building Meaning for Symbols and Their Manipulation. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 707– 762). E. U: National Council of Teachers of Mathematics.

Kozulin, A. (2000). *Instrumentos psicológicos*. La educación desde una perspectiva sociocultural. Barcelona: Paidós.
Krutetskii V. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. E.U: University of Chicago Press.
Lannin, J. (2003). Developing Algebraic Reasoning Through Generalization. *Mathematics teaching in the middle school*. *7(8)*, 342-348.
Lannin, J., Barker, D. & Townsend. (2006). Why, Why Should I Justify? *Mathematics teaching in the middle school*. *9(11)*, 438-443.
Lesh, R. y Yoon, C. (2004). Evolving communities of mind- In which development involves several interacting and simultaneously developing strands. *Mathematical Thinking and Learning, 6(2)*, 205-226.
Lévy, P. (2007). *Cibercultura: la cultura de la sociedad digital*. México: Anthropos-Universidad Autónoma Metropolitana.
Lobato, J., Ellis, A. y Muñoz, R. (2003). How “focusing phenomena” in the instructional environment afford students’ generalizations. *Mathematical Thinking and Learning, 5(3)*, 1-36.
Mason, J. & Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics, 15*, 277-289.
Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching.* London: Kluwer Academic Publishers.
Mason, J., Graham, A., & Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing thinking in algebra*. London: The Open University.
Mason, J., Graham, A., Pimm, D. & Gowarr, N. (1985). *Routes to/roots of algebra*. Milton Keynes, United Kingdom: Open University Press.
Matus, C. y Miranda, H. (2010). Lo que la investigación sabe acerca del uso de manipulativos virtuales en el aprendizaje de la matemática. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática,* 5(6), 143-151.
Metzger, W. (2006). *Laws of seeing*. Cambridge: MIT Press.
Miles, M. B. y Huberman, M. (1994). *Qualitative Data Analisis*. California: Sage Publications.
Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada. España.
Moreno, L. & Block, D. (2002). Democratic access to powerful mathematics in a developing country. En *Handbook of international research in mathematics education*. New Jersey, USA: LEA.
Moreno, L. E. y Waldegg, G. (2004). Aprendizaje, matemáticas y tecnología. Una visión integral para el maestro. México: Santillana.
Moyer, P. S.; Bolyard, J.J.; Spikell, M.A. (2002). What Are Virtual Manipulatives? *Teaching Children. Mathematics Journal*, 8 (6), 372-377.
National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2008). El rol del contexto en el aprendizaje del algebra inicial. En *Algebraic Thinking in School Mathematics* (pp. -223).
National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2008). Explorando la generalización a través de patrones de crecimiento pictórico. En *Algebraic Thinking in School Mathematics* (pp – 282). Reston, VA: NCTM

Neisser, U. (1976). *Cognitive psychology*. New York: Meredith.

Noss, R. y Hoyles, C. (1996). *Windows on Mathematical Meanings. Learning Cultures and Computers.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Olive, J. (2010). Research on technology tools and applications in mathematics learning and teaching. En L. L. Hatfield and S. Chamberlain (Eds.) Building a collaborative research community: Proceeding of an invitational planning conference for WISDOM[e]. Laramie, Wyoming: University of Wyoming College of Education.

Olive, J. y Makar, K. (2009). Mathematical knowledge and practices resulting from access to digital technologies. En Hoyles, C & Lagrange, J-B. (Eds.), Mathematics Education and Technology: Rethinking the Terrain, 133-178. The Netherlands: Springer.

Plan Nacional de Desarrollo 2013-2018.

Programa Sectorial de Educación 2013-2018.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. En *Proceedings of the 28 conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American*, 1, 2-21). Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *The International Journal on Mathematics Education.* ZDM, *40(1*).

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA, 4(2)*, 37-62.

Resnik, M. (1997). *Mathematics as a science of patterns*. Oxford: Oxford University Press.

Rivera, F. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies in Mathematics, 73*, 297-328.

Roig, A.I. (2008). *Análisis de las fases del proceso de abstracción matemática en estudiantes de secundaria*. Tesis doctoral inédita. Universidad de Alicante, España.

Rojano, T. (1996b). Developing algebraic aspects of problem solving within a spreadheet environment. En N. Bednarz, C. kieren, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (pp.137-145). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Rojano, T. (2002). Mathematics learning in the junior secondary school: students´access to significant mathematics ideas. En L.D. English (ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, p. 143-164. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Sampieri, R., Fernández, C. y Baptista P. (2003). *Metodología de la Investigación*. México: McGraw-Hill Companies.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., Brizuela, B. M., Earnest, D., Goodrow, A., Lara–Roth, S. y Peled, E. (2003). Algebra in elementary school. En N. Pateman, G. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics*

*Education and the 25th Conference of Psychology of Mathematics Education North America*, Vol. 4 (pp.127-134). Honolulu, HI: CRDG, College of Education, University of Hawaii.
Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-371). New York: MacMillan.
Secretaria de Educación Pública. (2006a). *Educación Básica. Secundaria. Plan de Estudios 2006*. Distrito Federal, México: CONALITEG.
Secretaria de Educación Pública. (2006b). *Educación Básica. Secundaria. Programas de estudio 2006*. *Matemáticas*. Distrito Federal, México: CONALITEG.
Secretaria de Educación Pública. (2011a). *Plan de Estudios 2011. Educación Básica*. Distrito Federal, México: CONALITEG.
Secretaria de Educación Pública. (2011b). *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación básica. Secundaria. Matemáticas*. Distrito Federal, México: CONALITEG.
Simon, M. A. & Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: an elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, *6(2*), 91-104.
Simon, M. A. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy From a Constructivist Perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26 (2),* 114-145.
Sophian, C. (2007). *The origins of mathematical knowledge in childhood*. New York: Erlbaum.
Sriraman B. (2004). Reflective abstraction, uniframes and the formulation of generalizations. *Journal of Mathematical Behavior*, *23*, pp. 205-222.
Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. Usiskin, Z. (1999). Conceptions of School Algebra and Uses of Variables. En B. Moses (Ed.), *Algebraic Thinking, Grades K–12: Readings from QCTM's School-Based Journals and Other Publications*, (pp. 7–13). Reston, VA.: National Council of Teachers of Mathematics.
Steen, L. (1990). *On shoulders of giants: New approaches to numeracy*. Washington, DC: National Academic Press.
Sutherland, R. y Rojano, T. (1993). A spreadsheet approachto solving algebra problems. *Journal of Mathematical Behavior, 12*, 353-383.
Tabach, M., Arcavi, A. & Hershkowitz, R. (2008). Transitions among different symbolic generalizations by algebra beginners in a computer intensive environment. *Educational Studies in Mathematics* ,61, pp.
Tedesco, J. C. (2000). *Educar en la sociedad del conocimiento*. Buenos Aires: Fondo de Cultura Económica.
UNESCO (2005). *Hacia la sociedades del conocimiento. Informe mundial de la UNESCO*. París: Ediciones UNESCO. Recuperado de:
Usiskin, Z. (1999). Conceptions of School Algebra and Uses of Variables. En B. Moses (Ed.), *Algebraic Thinking, Grades K–12: Readings from QCTM's School-Based Journals and Other Publications,* (pp. 7–13). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vogel R. (2005). Patterns: A fundamental idea of mathematical thinking and learning. *ZDM International Journal on Mathematics Education*, *37(5)*, pp. 445-449.

Zazkis R., Liljedahl P. (2002). Generalization of patterns: the tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, 49(3), pp. 379-402.

# ANEXOS

# ANEXO A

# HOJAS DE TRABAJO PARA ESTUDIANTES DE LA TERCERA FASE

# (ALTO RENDIMIENTO ACADÉMICO)

**Ambiente:** Lápiz y papel

La Letra V

El Diseño de la Viga

Las Estampas en el Cubo

Crecimiento de Azulejos I

Crecimiento de Azulejos II

Crecimiento de Pilas

## ACTIVIDADES DE EXPLORACIÓN

Grado: ______ Fecha: _______
Nombre: ________________________________________ Edad: _____
Sec. Téc. N°: _____

### *El problema de la letra* "V"

**Instrucciones**: Observa con atención lo que enseguida se presenta y responde lo que se te pide.

**Observa las figuras**

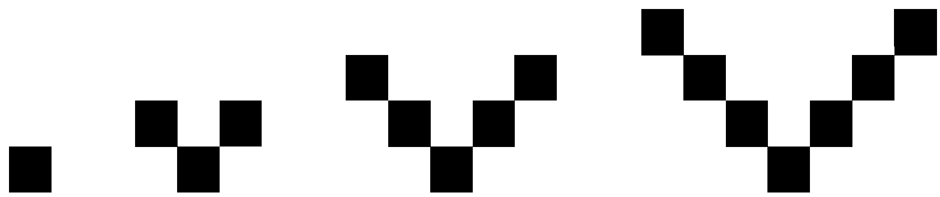


**Fig.1** **Fig. 2** **Fig. 3** **Fig. 4**

1. ¿Sí el patrón continua, cuántos bloques negros estarán contenidos en la siguiente letra **V**? ________________________________________________________________
2. ¿Cuántos bloques estarán en la figura 15 en la secuencia? ¿Cómo llegaste a tu respuesta? ____________________________________________________________
   ____________________________________________________________________
   ____________________________________________________________________
   ____________________________________________________________________
3. Tengo una caja con 36 bloques ¿puedo hacer una letra V que siga ese patrón? ________
   ¿Me sobrarían o faltarían bloques? __________________________________________
4. ¿Cuántos bloques habría que tener para hacer la figura 21 o la figura 63? ____________________________________________________________________
   ____________________________________________________________________
   ____________________________________________________________________
   ____________________________________________________________________
5. ¿Cuál de las figuras tiene exactamente 100 bloques? ___________________________

6. ¿Cómo podrías saber el número de bloques para cualquier letra V en este patrón? ______________________________________________________________________

7. ¿Cuál de las expresiones siguientes crees que sea correcta para la figura "n"? Subráyala. ¿Y por qué crees que lo es? ________________________________________

a) $n + n + 1$

b) $n^2 - 1$

c) $n + n - 1$

d) $2n-1$

8. ¿Puedes crear un problema de patrones interesante para el resto de tus compañeros? Muestra como sería.

**Referencia**: Education Development Center, 2008.

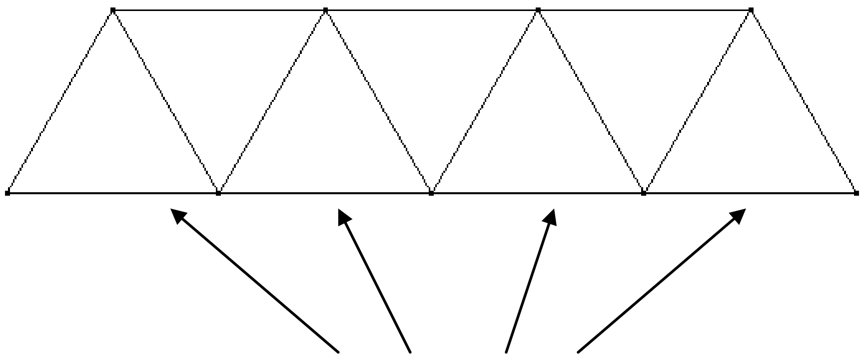
# ACTIVIDADES DE EXPLORACIÓN

Grado: _____ Fecha: ________
Nombre: __________________________________________ Edad: _____
Sec. Téc. N°: _____

## *El problema del diseño de la Viga*

**Instrucciones**: Lee con atención lo que enseguida se presenta y responde lo que se te pide. (Siéntete libre de hacer anotaciones, esquemas, notas, etc.).

Las vigas son diseñadas como un soporte para puentes. Las vigas son construidas usando barras. La longitud de la viga es determinada por el número de barras necesarias para construir la base de la viga. Abajo esta una viga de longitud 4.




1.- ¿Cuántas barras son necesarias para hacer una viga de longitud 5? _________ ¿De longitud 8?___________ ¿De longitud 10? ________ ¿De longitud 20? __________ ¿De longitud 34? _________ ¿De longitud 76? _____________

2.- ¿Cuántas barras son necesarias para una viga de longitud 143? ________________

3.- Tengo 436 barras, ¿qué tan grande podría ser la longitud de la viga? ____________
¿Me faltarían o sobrarían barras? _________________________________________

4.- ¿Qué viga tiene exactamente 267 barras? ______

5.- ¿Cómo le dirías a alguien cómo dibujar una viga de una longitud cualquiera?
_____________________________________________________________________
_____________________________________________________________________
_____________________________________________________________________
_____________________________________________________________________
_____________________________________________________________________

5.- ¿Cuántas barras son necesarias para hacer una viga de longitud “n”? _____________
___________________________________________________________________________
___________________________________________________________________________
___________________________________________________________________________

6.- ¿Cuál de las expresiones siguientes crees que sea correcta para encontrar el número de barras en una longitud “n”? Subráyala ¿Y por qué crees que lo es? ___________
___________________________________________________________________________
___________________________________________________________________________
___________________________________________________________________________
___________________________________________________________________________

a) 4n-1

b) n*x*4-1

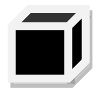
c) 3n + n-1

d) n (4-1)

**Referencia:** Lannin, J. (2003). Developing Algebraic Reasoning Through Generalization. *Mathematics teaching in the middle school*. Vol. 8, Nº 7. pp. 342-348.

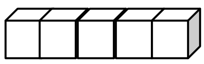
## ACTIVIDADES DE EXPLORACIÓN

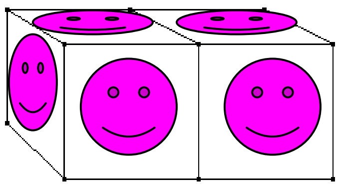
Grado: ______ Fecha: ________
Nombre: ________________________________________ Edad: _______
Sec. Téc. N°: ____

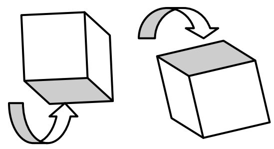
### *El problema de las Estampas en el Cubo* 

**Instrucciones**: Lee con atención lo que enseguida se presenta y responde lo que se te pide. (Siéntete libre de hacer anotaciones, esquemas, notas, dibujos, etc.).

Una compañía produce barras acoplando cubos y usando una máquina estampadora para colocar estampas "sonrientes" sobre las barras. La máquina coloca exactamente una estampa sobre cada cara expuesta de cada cubo. Todas las caras expuestas de cada cubo tienen que tener una estampa, por ejemplo, en esta barra de longitud 2, se necesitarían 10 estampas ¿estas de acuerdo? ________ ¿Por qué?____________________________
____________________________________________________________________________







Barra de longitud 2 (dos cubos)

1.- ¿Cuántas estampas necesitas para barras de longitud desde 1 hasta 10?

De longitud 1 = _________
De longitud 2 = _________
De longitud 3 = _________
De longitud 4 = _________
De longitud 5 = _________

De longitud 6 = _________
De longitud 7 = _________
De longitud 8 = _________
De longitud 9 = _________
De longitud 10 = ________

**Explica** cómo encontraste estos valores.
____________________________________________________________________________
____________________________________________________________________________
____________________________________________________________________________
____________________________________________________________________________

2.- ¿Cuántas etiquetas necesitas para una barra de longitud 137? ________ y ¿De longitud 213? __________

3.- Tengo una caja con 105 estampas de caras sonrientes, ¿qué tan grande puedo hacer una fila de cubos acoplados con éstas estampas? ¿Me faltarían o sobrarían estampas?
____________________________________________________________________________
____________________________________________________________________________
____________________________________________________________________________

4.- ¿Qué longitud de barra tiene exactamente 450 estampas sonrientes? _____________
_________________________________________________________________________

5.- ¿Cómo le dirías a alguien cómo saber cuántas estampas se necesitarían para cualquier longitud de la barra? _______________________________________________
_________________________________________________________________________
_________________________________________________________________________
_________________________________________________________________________
_________________________________________________________________________

6.- ¿Cuántas estampas necesitaría para hacer una barra de longitud "n"? _____________
_________________________________________________________________________
_________________________________________________________________________
_________________________________________________________________________
_________________________________________________________________________

7.- Escribe una regla que pueda permitirte encontrar el número de estampas necesarias para una barra de cualquier longitud. **Explica** tu regla.
_________________________________________________________________________
_________________________________________________________________________
_________________________________________________________________________
_________________________________________________________________________
_________________________________________________________________________
_________________________________________________________________________

8.- ¿Cuál de las expresiones crees que sea la correcta para encontrar el número de estampas para la longitud "n"? Subráyala ¿y por que crees que esta sea la correcta? ___
_________________________________________________________________________
_________________________________________________________________________
_________________________________________________________________________
_________________________________________________________________________

a) 4n+ 2

b) (n-2)4 + 10

c) 4*x* n-2

d) 4L +2

**Referencia:** Lannin, J., Barker, D. & Townsend. (2006). Why, Why Should I Justify? *Mathematics teaching in the middle school.* Vol. 11, Nº 9. pp. 438-443.

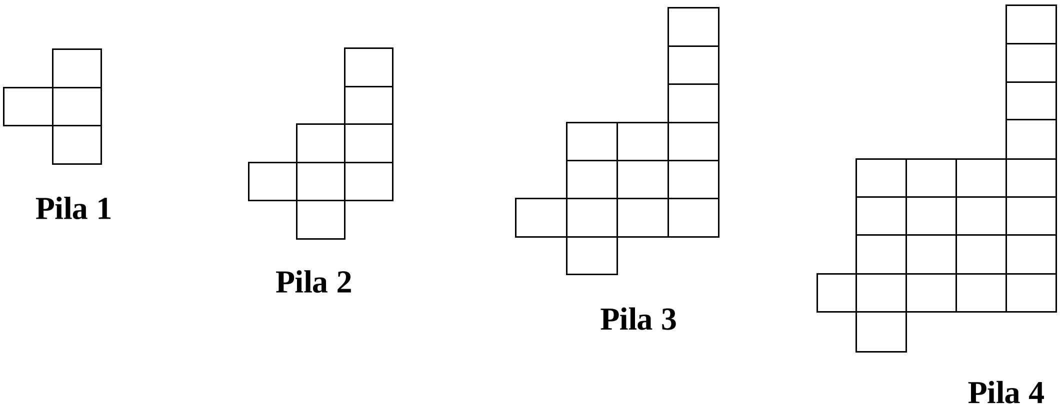
# ACTIVIDADES DE EXPLORACIÓN

Grado: _______ Fecha: _________
Nombre: ___________________________________________ Edad: _____
Sec. Téc. N°: ____

## *El problema del Crecimiento de Azulejos* I

**Instrucciones**: Lee con atención lo que enseguida se presenta y responde lo que se te pide. (Siéntete libre de hacer anotaciones, esquemas, notas, etc.).

**Observe las siguientes Pilas**




¿Qué esta cambiando o variando en esta secuencia?
______________________________________________________________
______________________________________________________________
______________________________________________________________

¿Qué permanece igual en la secuencia? __________________________________
______________________________________________________________

¿Cómo le harías para dibujar la siguiente pila? ____________________________
______________________________________________________________
______________________________________________________________
______________________________________________________________
______________________________________________________________

¿Cómo le harías para dibujar la décima pila? ______________________________
______________________________________________________________
______________________________________________________________
______________________________________________________________
______________________________________________________________

¿Cómo le harías para dibujar la 18ª pila?__________________________________
______________________________________________________________
______________________________________________________________
______________________________________________________________

Tengo una caja con 218 azulejos cuadrados ¿Qué tan grande podría hacer una figura del patrón? ____________________________________________________________

¿Cuál figura tiene exactamente 382 azulejos cuadrados?_______________________

¿Cómo le explicarías a alguien cómo dibujar cualquier pila del patrón? ____________
_____________________________________________________________________
_____________________________________________________________________
_____________________________________________________________________

Escribe una regla o fórmula que te permita encontrar el número de azulejos cuadrados de cualquier pila. ____________________________________________________

¿Cuál de las expresiones para la pila "n" es la correcta? Subráyala ¿y por que crees que es la correcta? ______________________________________________________
_____________________________________________________________________
_____________________________________________________________________

a) $n+ 2 +2n$

b) $2 + 2n^2$

c) $n^2 +n+2$

d) $2n + n^2$

Referencia. Beigie, D. (2011). The leap from patterns to formulas. Mathematics Teaching in the Middle School. Vol. 16. No.6. NCTM.

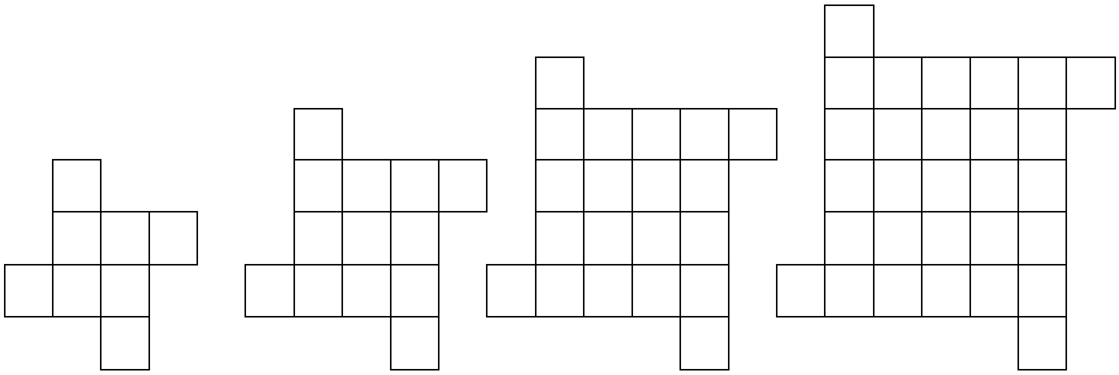
## ACTIVIDADES DE EXPLORACIÓN

Grado: _______ Fecha: ________
Nombre: __________________________________________ Edad: _____
Sec. Téc. N°: _____

### *El problema del Crecimiento de Azulejos* II

**Instrucciones**: Lee con atención lo que enseguida se presenta y responde lo que se te pide. (Siéntete libre de hacer anotaciones, esquemas, notas, etc.).

**Observe las siguientes pilas**



**Pila 1** **Pila 2** **Pila 3** **Pila 4**

¿Qué esta cambiando o variando en esta secuencia?
____________________________________________________________
____________________________________________________________
____________________________________________________________

¿Qué es lo que permanece igual en la secuencia? ______________________________
____________________________________________________________
____________________________________________________________

¿Cómo le harías para dibujar la siguiente pila? ______________________________
____________________________________________________________
____________________________________________________________
____________________________________________________________
____________________________________________________________

¿Cómo le harías para dibujar la 16ª pila?_________________________________
____________________________________________________________
____________________________________________________________
____________________________________________________________
____________________________________________________________

Tengo una caja con 165 azulejos cuadrados ¿Qué tan grande podría hacer una pila del patrón? ___________________________________________________________

¿Cuántos azulejos cuadrados podría tomar para hacer la figura 10, 19 o la 72? ________
_______________________________________________________________________
_______________________________________________________________________
_______________________________________________________________________

¿Cuál figura tiene exactamente 148 azulejos cuadrados? _________________________

¿Cómo le dirías a alguien cómo dibujar cualquier pila del patrón? ________________
_______________________________________________________________________
_______________________________________________________________________
_______________________________________________________________________

Escribe una regla o fórmula que te permita encontrar el número de azulejos cuadrados de cualquier pila. _______________________________________________________

¿Cuál de las expresiones para la figura "n" es la correcta? Subráyala ¿Por qué crees que esa es la correcta?_____________________________________________________
_______________________________________________________________________
_______________________________________________________________________

a) $n^2 + 4 + n$

b) $(n+1)^2 + 4$

c) $n^2 + 4n$

d) $n + 4n^2$

Referencia. Beigie, D. (2011). The leap from patterns to formulas. Mathematics Teaching in the Middle School. Vol. 16. No.6. NCTM.

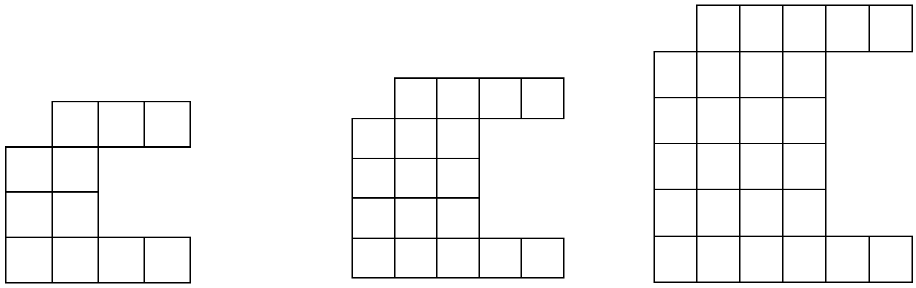
# ACTIVIDADES DE EXPLORACIÓN

Grado: _______ Fecha: ________
Nombre: ______________________________ Edad: _____
Sec. Téc. N°: ______

## *El problema del Crecimiento de Pilas*

**Instrucciones**: Lee con atención lo que enseguida se presenta y responde lo que se te pide. (Siéntete libre de hacer anotaciones, esquemas, notas, etc.).

**Examine el siguiente Patrón de "Pilas"**



**Pila 2** **Pila 3** **Pila 4**

1. - Esboza y etiqueta la quinta, sexta, primera, y la pila 0 sobre papel cuadriculado.

2. - ¿Cuántos azulejos cuadrados se necesitan para construir cada una de éstas pilas?

3. - ¿Cómo le harías para dibujar la décima pila?________________________________

4.- Tengo una caja con 289 azulejos ¿Qué tan grande podría hacer una pila del patrón?

5.- ¿Cuántos azulejos podría tomar para hacer la pila 57?

6.- ¿Cómo le dirías a alguien cómo dibujar cualquier pila del patrón?

7. - Usando el modelo o la imagen directamente, describe con tus palabras al menos tres maneras diferentes en las que podrías determinar el número de azulejos necesarios para hacer la pila *n* en la secuencia.

8.- Si tú todavía no lo has hecho, entonces, escribe una regla o fórmula que coincida con cada una de las maneras que tú describiste en el punto 7. Cada regla (representación simbólica) debe permitirte determinar fácilmente el número de azulejos necesarios para hacer la pila *p* en la secuencia. Sí usaste letras di qué significa cada una.

9.- ¿Cuál de las expresiones para la pila *n* es una correcta? Subráyala ¿y por qué crees que es la correcta?

a) $n +2n+3$
b) $n^2 + n+2+3$
c) $n^2 + 2n +3$
d) $n^2 +n+1+n+2$

**Referencia:** Cap. 20 "Explorando la generalización a través de patrones de crecimiento pictórico" del texto: Algebraic Thinking in School Mathematics. NCTM. (2008). P. 284.

# ANEXO B

# HOJAS DE TRABAJO PARA ESTUDIANTES DE LA CUARTA FASE

# (BAJO RENDIMIENTO ACADÉMICO)

**Ambiente:** Virtual

La Letra V

El Diseño de la Viga

Las Estampas en el Cubo

Crecimiento de Azulejos I

Crecimiento de Azulejos II

Crecimiento de Pilas

**ACTIVIDADES DE EXPLORACIÓN**
**CON MANIPULABLES VIRTUALES**

Grado: ______ Fecha: _______
Nombre: __________________________________________ Edad: _____
Sec. Téc. N°: _____

***El problema del diseño de la Letra “V”***

Observa las imágenes

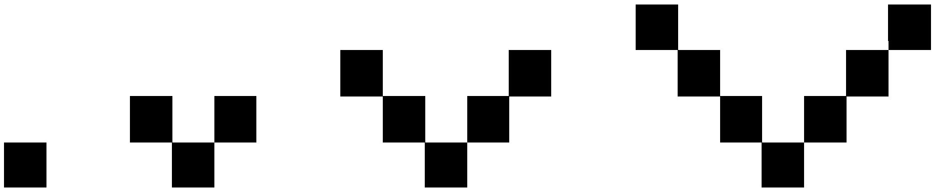
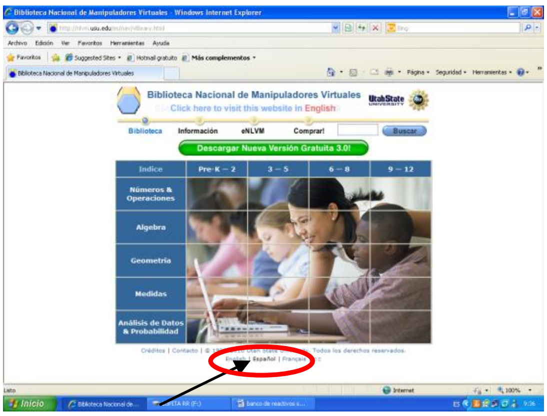


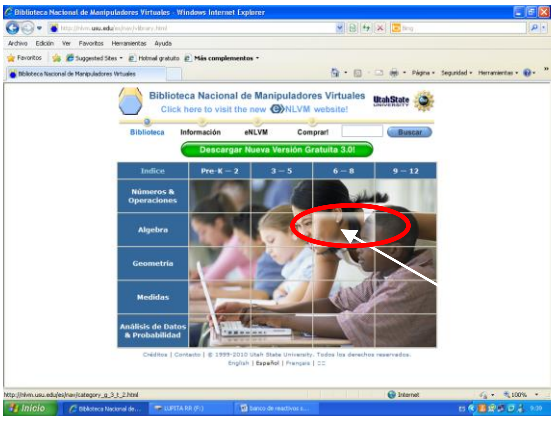
Fig.1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4

*Apóyate del manipulador virtual para responder las preguntas 1 a 8 que aparecen abajo.*

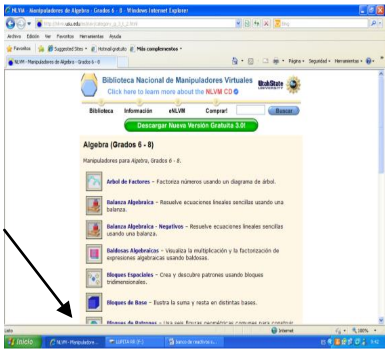
Antes de empezar a resolver el problema sería conveniente aprender a manejar el manipulador virtual. Enseguida se te dan las instrucciones (de la (***a***) a la (***f***)) que te permitirán usarlo.

**a)** Introduce la siguiente página de internet en la barra de dirección electrónica: http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html y te aparecerá en la pantalla la imagen de la izquierda.

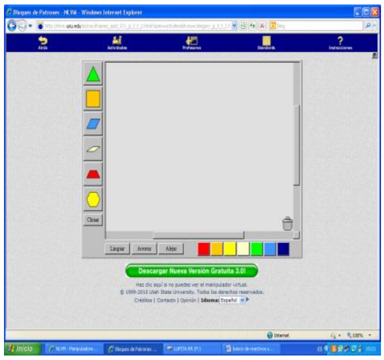


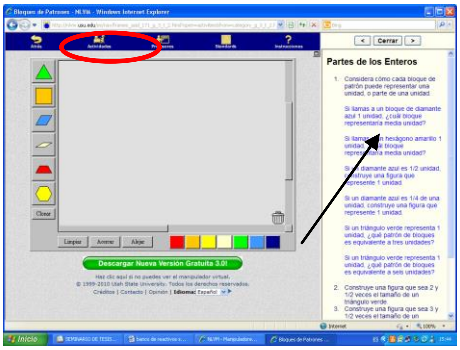

**b)** Haz click para elegir el idioma ***Español*** y luego haz click en la fila de Algebra y en la columna de grado 6-8.



**c)** Enseguida aparecerán todos los manipulativos de esta sección. Haz click en el que dice "***Bloques de Patrones***" y aparecerá la imagen de la derecha.

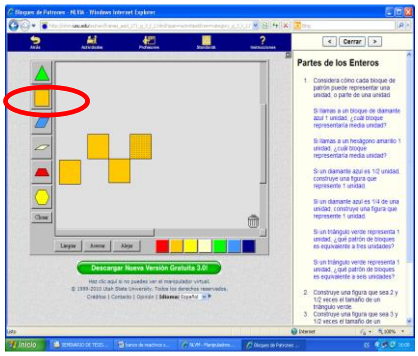


**d)** Luego haz click en el icono de "**Actividades**" aparecerá una columna a la derecha donde debes elegir la actividad llamada "Partes de los Enteros" la cual utilizaremos para resolver el Problema de la letra "**V**".



*Construcción de la letra "**V**" con el manipulador virtual:*

**e)** Haz click en el icono del cuadrado para obtener la figura1 de nuestro patrón. Nuevamente haz click las veces sean necesarias para obtener los bloques que formaran la figura 2 del patrón. Para desplazar los bloques, haz click sobre ellos, sin soltar, para desplazarlos a la posición que desees.



**f)** Debes hacer click en el icono de "**Instrucciones**" para saber cómo puedes utilizar las herramientas que te ofrece, por ejemplo: Añadir un bloque al área de trabajo, Rotar un bloque, Cambiar el color de un bloque, Remover un bloque, Agrupar bloque, Clonar un bloque, Limpiar el área de trabajo y Acercar y Alejar .

*¡Ahora sí, estás listo para responder lo que se te solicita!*

1. Vuelve a observar con atención las figuras del patrón de la letra "V". ¿Qué es lo que notas en él? ¿Qué puedes decir acerca de él?

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

2. Continúa respondiendo la siguiente tabla

| Nº de figura | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Nº de bloques | 1 | 3 | | | | |

3. ¿Sí el patrón continua, cuántos bloques negros estarán contenidos en la siguiente letra **V**? ___________________________________________________________
4. ¿Aumenta o disminuye el número de bloques de una figura y la siguiente?___________ ¿Por qué? ______________________________________
_____________________________________________________________________

5. ¿Cuántos bloques estarán en la figura 15 en la secuencia? ¿Cómo llegaste a tu respuesta? Explica ____________________________________________________
_____________________________________________________________________
_____________________________________________________________________
_____________________________________________________________________

6. ¿Cómo podrías saber el número de bloques en cualquier letra **V** en este patrón? Explica
_____________________________________________________________________
_____________________________________________________________________
_____________________________________________________________________
_____________________________________________________________________
_____________________________________________________________________

7. ¿Puedes construir una letra **V** que siga ese patrón y que tenga solo 36 bloques? Justifica tu respuesta ________________________________________________
_____________________________________________________________________
_____________________________________________________________________
_____________________________________________________________________

8. ¿Habría alguna letra **V** en este patrón que tuviera un número igual de bloques?
¿Por qué si o por qué no? ______________________________________________
_____________________________________________________________________
_____________________________________________________________________
_____________________________________________________________________

**Referencia:** Cap. 20. "Explorando la generalización a través de patrones de crecimiento pictórico" del texto: Algebraic Thinking in School Mathematics. NCTM. (2008). P 280.

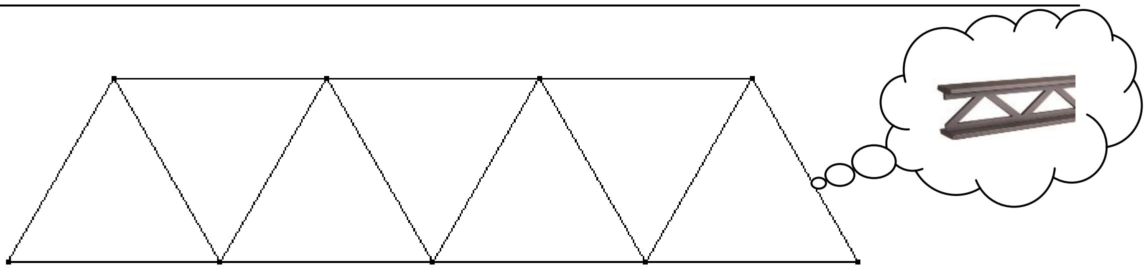
From the Mathematics in Context curriculum (National Center for Research in Mathematical Sciences and Freudenthal Institute 1998. P.6)

**ACTIVIDADES DE EXPLORACIÓN**
**CON MANIPULABLES VIRTUALES**

Grado: ______ Fecha: ________
Nombre: ___________________________________________ Edad: ______
Sec Téc. N°: ______

## *El problema del diseño de la Viga*

Las vigas son diseñadas como un soporte para puentes. Las vigas son construidas usando barras. La longitud de la viga es determinada por el número de barras necesarias para construir la base de la viga. Abajo está una viga de longitud 4, esta necesitaría 15 barras ¿estas de acuerdo? ________ ¿Por qué?_______________________________
____________________________________________________________________________

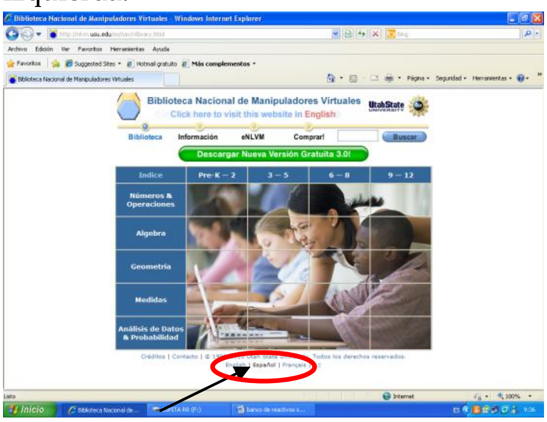


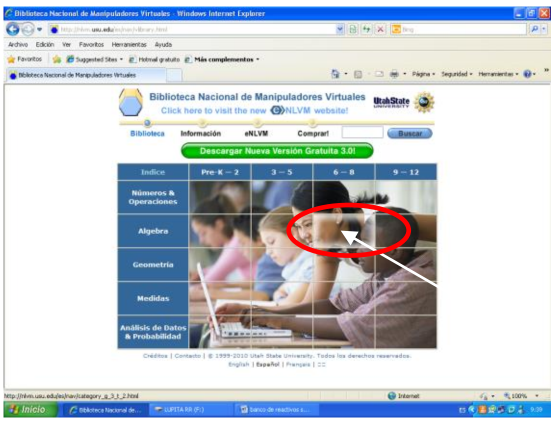
Base de la Viga de 4 barras

*Apóyate del manipulador virtual para responder las preguntas 1 a 9 que aparecen abajo.*

Antes de empezar a resolver el problema sería conveniente aprender a manejar el manipulador virtual. Enseguida se te dan las instrucciones (de la (***a***) a la (***f***)) que te permitirán usarlo.

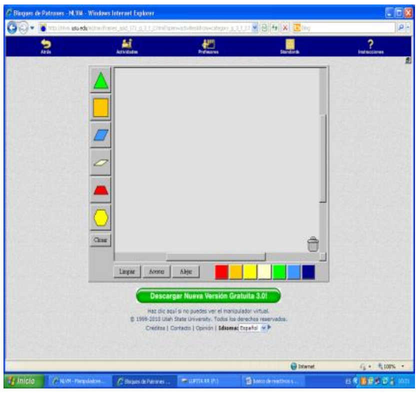
**a)** Introduce la siguiente página de internet en la barra de dirección electrónica: http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html y te aparecerá en la pantalla la imagen de la izquierda.



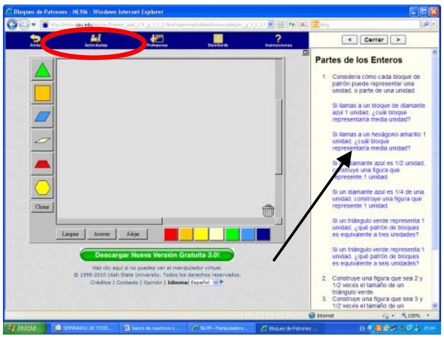


**b)** Haz click para elegir el idioma ***Español*** y luego haz click en la fila de Algebra y en la columna de grado 6-8.

**c)** Enseguida aparecerán todos los manipulativos de esta sección. Haz click en el que dice "***Bloques de Patrones***" y aparecerá la imagen de la derecha.

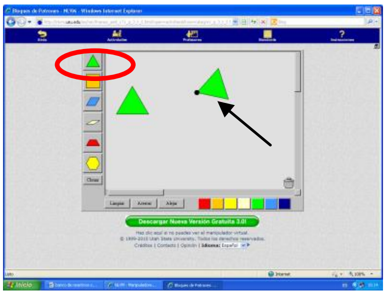


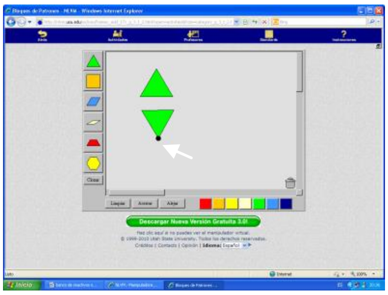
**d)** Luego haz clic en el icono de "**Actividades**" aparecerá una columna a la derecha donde podrás elegir la actividad que en este caso nos detendremos en la llamada "Partes de los Enteros" la cual utilizaremos para resolver el Problema del diseño de la Viga.



*Construcción de la Viga con el manipulador virtual:*

**e)** Haz dos veces click en el icono de un triángulo para obtener los primeros dos bloques para formar la Viga del ejemplo. Para girar uno de los triángulos haz click en un vértice (aparecerá un punto negro) y sin soltar gira en la dirección que desees hasta conseguir la posición exacta del bloque.





**f)** Debes hacer click en el icono de "**Instrucciones**" para saber cómo puedes utilizar las herramientas que te ofrece, por ejemplo: Añadir un bloque al área de trabajo, Rotar un bloque, Cambiar el color de un bloque, Remover un bloque, Agrupar bloque, Clonar un bloque, Limpiar el área de trabajo y Acercar y Alejar

*¡Ahora sí, estas listo para responder lo que se te solicita!*

1. ¿Para una Viga de longitud 1, estas de acuerdo en que se necesitarían 3 barras?______ ¿Por qué? ____________________________________________

2. Para una Viga de longitud 2 ¿cuántas barras necesito?_________ ¿Por qué? ____________________________________________

3. ¿Cuántas barras hay en la base de la Viga de longitud 2? __________ y ¿cuántas hay en la parte superior de la Viga? ____________________

4. Y para una Viga de longitud 3 ¿cuántas barras necesito?_________
¿Cuántas barras hay en la base de la Viga de longitud 3? __________ y ¿cuántas hay en la parte superior de la Viga? ____________________

5. ¿Cuántas barras de diferencia hay para formar la Viga de longitud 1 y la de longitud 2? _________________________ y ¿cuántas barras de diferencia hay para formar la Viga de longitud 2 y la de longitud 3? _____________________________________

6. ¿Cuántas barras son necesarias para hacer una viga de longitud 5? _______________
¿De longitud 8? ____________
¿De longitud 10?____________
¿De longitud 20?____________
¿De longitud 34? ____________
¿De longitud 76? ____________

7. ¿Cuántas barras son necesarias para una viga de longitud 223?
_______________________________________________________________________
_______________________________________________________________________

8. Y ¿Cuántas barras de diferencia hay para formar la Viga de longitud 412 y la de longitud 413?______ ¿Por qué? ________________________________________
_______________________________________________________________________
_______________________________________________________________________

9. Escribe una **regla o fórmula** para encontrar el número de barras necesarias para hacer una viga de cualquier longitud.
_______________________________________________________________________
_______________________________________________________________________

**Explica** por qué tú regla o fórmula funciona para todos los casos.
_______________________________________________________________________
_______________________________________________________________________
_______________________________________________________________________
_______________________________________________________________________

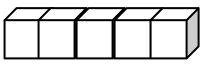
**Referencia:** Lannin, J. (2003). Developing Algebraic Reasoning Through Generalization. *Mathematics teaching in the middle school*. Vol. 8, Nº 7. pp. 342-348.

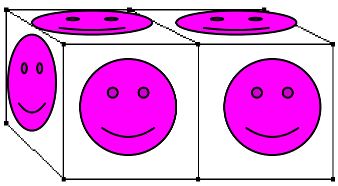
## ACTIVIDADES DE EXPLORACIÓN
## CON MANIPULABLES VIRTUALES

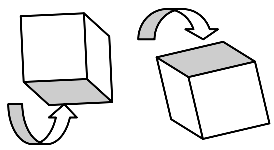
Grado: ______ Fecha: _______
Nombre: _____________________________________ Edad: _____
Sec. Téc. N°: _____

### *El problema de las Estampas en el Cubo*

Una compañía produce barras acoplando cubos y usando una máquina estampadora para colocar estampas "sonrientes" sobre las barras. La máquina coloca exactamente una estampa sobre cada cara expuesta de cada cubo. Todas las caras expuestas de cada cubo tienen que tener una estampa, por ejemplo, en esta barra de longitud 2, se necesitarían 10 estampas ¿estás de acuerdo? ________ ¿Por qué?___________________________
______________________________________________________________________





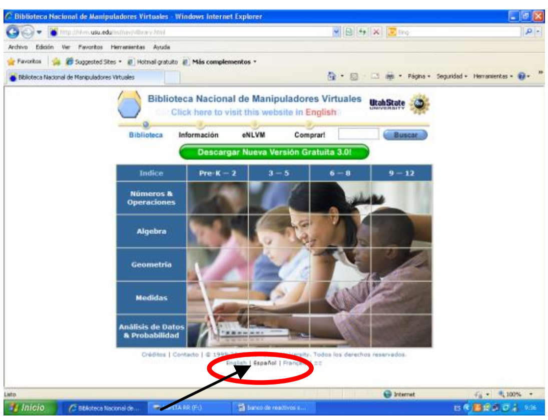


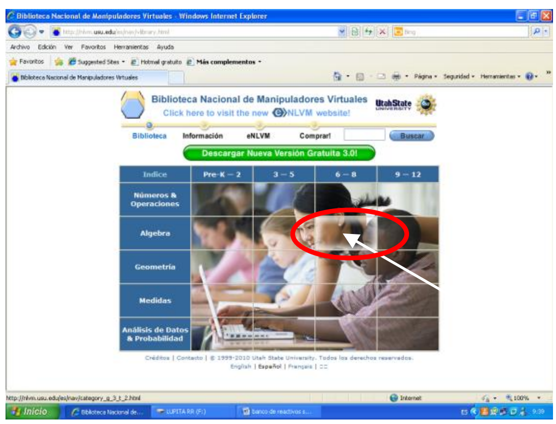
Barra de longitud 2 (dos cubos)

*Apóyate del manipulador virtual para responder las preguntas 1 a 8 que aparecen abajo.*

Antes de empezar a resolver el problema sería conveniente aprender a manejar el manipulador virtual. Enseguida se te dan las instrucciones (de la (***a***) a la (***i***)) que te permitirán usarlo.

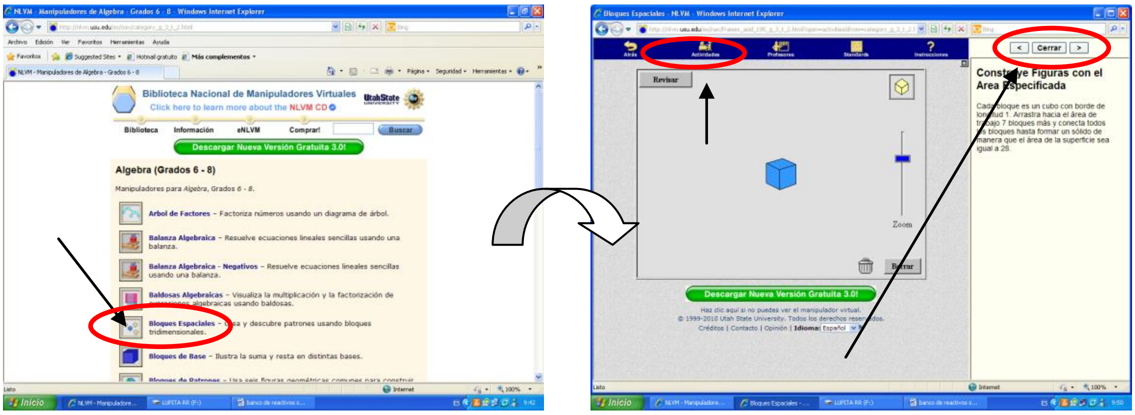
***a*)** Introduce la siguiente página de internet en la barra de dirección electrónica: http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html y te aparecerá en la pantalla la imagen de la izquierda.





**b)** Haz click para elegir el idioma ***Español*** y luego haz click en la fila de Algebra y en la columna de grado 6-8.

**c)** Enseguida aparecerán todos los manipulativos de esta sección. Luego haz click en el que dice “***Bloques Espaciales***” y aparecerá la imagen de la derecha.

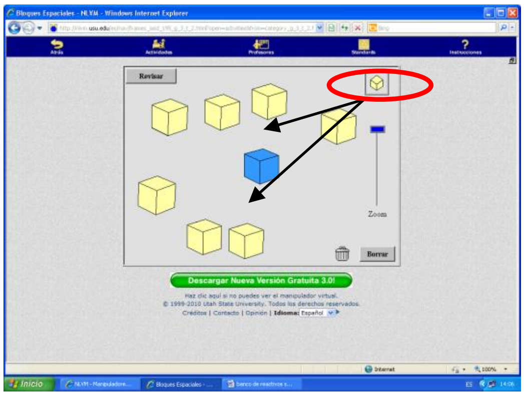



**d)** Luego haz clic en el icono de “**Actividades**” aparecerá una columna a la derecha donde podrás elegir la actividad, que en este caso, nos detendremos en la llamada “Construye figuras con el área especificada” la cual utilizaremos para ayudarnos a resolver el problema de las estampas en el cubo.

Usando este manipulador virtual podrás:

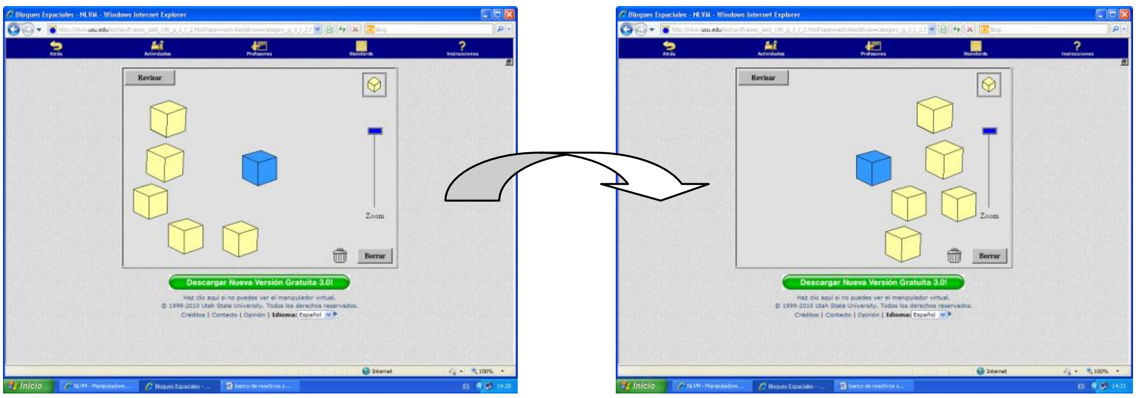
**e)** Añadir bloques

Añade bloques al área de trabajo haciendo clic y arrastrando los bloques desde el icono de bloques en la esquina superior derecha del área de trabajo.

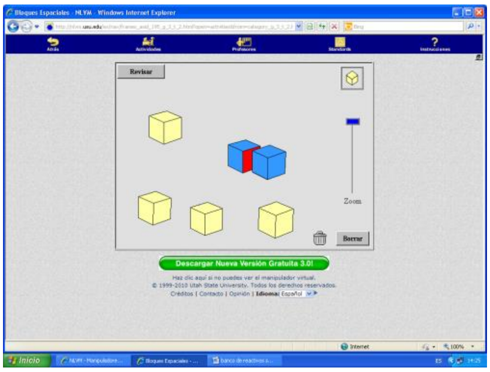



**f)** Mover bloques

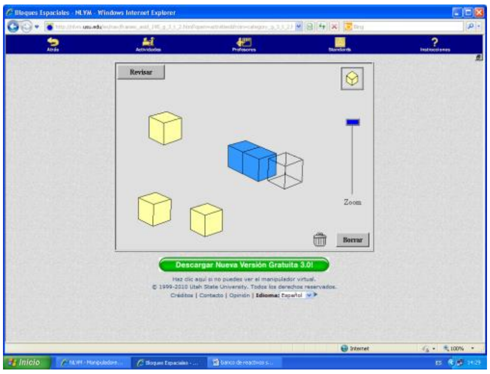
Puedes mover los bloques haciendo clic y arrastrando los bloques a cualquier espacio en el área de trabajo donde no hay bloques.



**g)** Conectar bloques




Podrás conectar un bloque amarillo a uno azul arrastrando el bloque amarillo cerca del bloque azul hasta que veas uno de los lados del bloque azul cambiar a color rojo. Luego suelta el bloque amarillo y éste se pegará al lado rojo en el bloque azul. Para despegar un bloque, haz clic sobre el bloque y arrástralo lejos del otro bloque.




**h)** Algunas veces es difícil ver dónde estás colocando un bloque. Presiona la tecla *Shift* [la tecla con la flecha↑] mientras arrastras el bloque para así poder ver a través de éste y a la vez ver mejor dónde colocas el bloque.

**i)** También puedes aumentar o disminuir el tamaño de los objetos desplazándote por la barra de Zoom, así también puedes quitar del área de trabajo los objetos que nos desees haciendo clic sobre ellos y desplazándolos hacia el contenedor de basura o borrar todos los elementos del área de trabajo haciendo clic en la tecla de Borrar. Todos estos elementos te facilitarán la visualización para resolver el problema de las estampas en el cubo.

*¡Ahora sí, estás listo para responder lo que se te solicita!*

1. ¿Cuántas estampas necesitas para barras de longitud desde 1 hasta 6?

De longitud 1 = __________ De longitud 2 = __________

De longitud 3 = __________ De longitud 4 = __________

De longitud 5 = __________ De longitud 6 = ___________

Explica cómo encontraste estos valores

______________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________

2. ¿Al juntar cubos para formar barras, cuentas las estampas donde se unen los cubos?_______ ¿Por qué? _____________________________________________________

______________________________________________________________________________

3. ¿Cuándo formas barras de una longitud de 2 o más cubos, cuántas estampas colocará la máquina sobre los cubos de los extremos, es decir sobre el primero y el último?_________________ ¿Por qué? ___________________________________________

______________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________

4. ¿Cuántas estampas coloca la máquina en los cubos intermedios de cualquier barra (los cubos intermedios son todos los cubos que están en una barra excepto el primero y el último)?_________ ¿Por qué? ______________________________________________
_____________________________________________________________________________
_____________________________________________________________________________

5. ¿La máquina coloca siempre el mismo número de estampas en los cubos intermedios? ______________ ¿Por qué? _______________________________________
_____________________________________________________________________________
_____________________________________________________________________________

6. ¿Cuántas estampas necesitas para una barra de longitud 20? ________ y ¿De longitud 56? ________
Explica cómo encontraste estos valores.
_____________________________________________________________________________
_____________________________________________________________________________
_____________________________________________________________________________
_____________________________________________________________________________
_____________________________________________________________________________
_____________________________________________________________________________

7. ¿Cuántas estampas necesitas para una barra de longitud 137?______ y ¿De longitud 213? _____ Explica cómo determinas estos valores.
_____________________________________________________________________________
_____________________________________________________________________________
_____________________________________________________________________________
_____________________________________________________________________________

8. Escribe una regla o fórmula que te permita encontrar el número de estampas necesarias para una barra de cualquier longitud.
_____________________________________________________________________________
_____________________________________________________________________________

**Explica tu regla.**
_____________________________________________________________________________
_____________________________________________________________________________
_____________________________________________________________________________
_____________________________________________________________________________
_____________________________________________________________________________
_____________________________________________________________________________

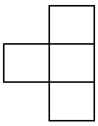
**Referencia:** Lannin, J., Barker, D. & Townsend. (2006). Why, Why Should I Justify?. *Mathematics teaching in the middle school.* Vol. 11, Nº 9. pp. 438-443.

# ACTIVIDADES DE EXPLORACIÓN
# CON MANIPULABLES VIRTUALES

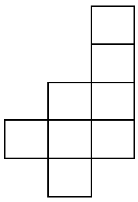
Grado: ______ Fecha: _______
Nombre: _______________________________________ Edad: _____
Sec. Téc. N°: _____

## *Crecimiento de Azulejos I*

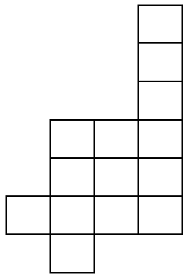
**Observe el siguiente patrón de Pilas**



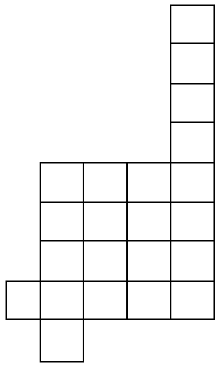
**Pila 1**



**Pila 2**



**Pila 3**

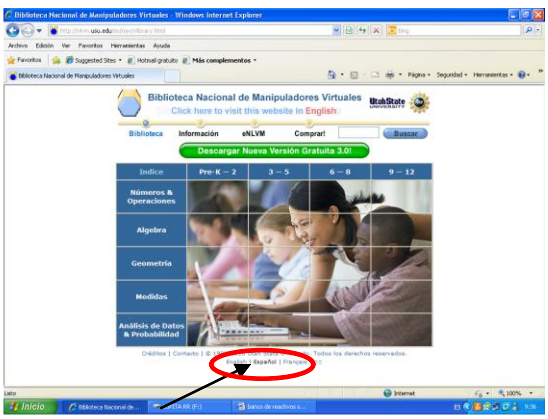


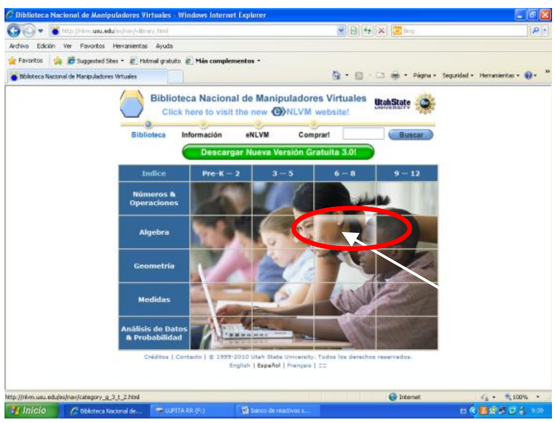
**Pila 4**

*Apóyate del manipulador virtual para responder las preguntas 1 a 8 que aparecen abajo.*

Antes de empezar a resolver el problema sería conveniente aprender a manejar el manipulador virtual. Enseguida se te dan las instrucciones [de la ***a***) a la ***e***)] que te permitirán usarlo.

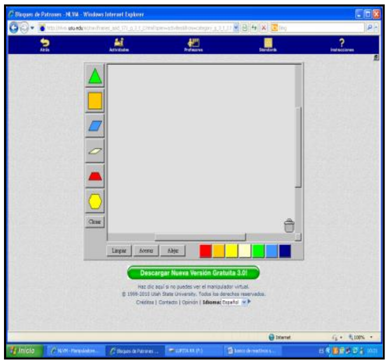
**a)** Introduce la siguiente página de internet en la barra de dirección electrónica: http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html y te aparecerá en la pantalla la imagen de la izquierda.



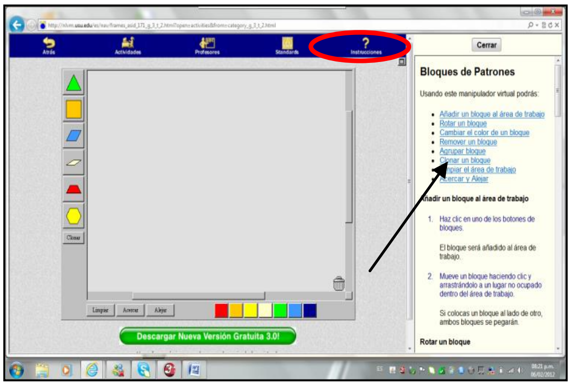




**b)** Haz clic para elegir el idioma ***Español*** y luego haz clic en la fila de Algebra y en la columna de grado 6-8.

**c)** Enseguida aparecerán todos los manipulativos de esta sección. Haz clic en el que dice “***Bloques de Patrones***” y aparecerá la imagen de la derecha.

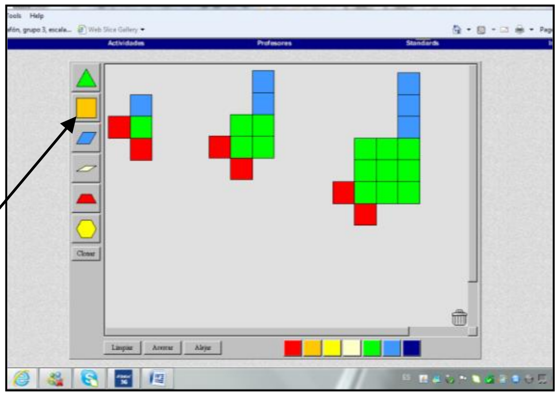


**d)** Debes hacer clic en el icono de “**Instrucciones**” para saber cómo puedes utilizar las herramientas que te ofrece, por ejemplo: *Añadir un bloque al área de trabajo*, *Rotar un bloque*, *Cambiar el color de un bloque*, *Remover un bloque*, *Agrupar bloque*, *Clonar un bloque*, *Limpiar el área de trabajo* y *Acercar y Alejar* .




***Construcción de Pilas con el manipulador virtual:***

**e)** Haz clic en el icono del cuadrado para obtener los azulejos que te permitirán construir las pilas de nuestro patrón. Cambia el color a los azulejos, tal como se muestra en la imagen.



*¡Ahora sí, estás listo para responder lo que se te solicita!*

1. ¿Qué observas que permanece igual en las pilas de este patrón? ______________

_______________________________________________

_______________________________________________

2. ¿Qué observas que cambia, de una pila a otra, en este patrón? ______________

_______________________________________________

_______________________________________________

3. Explica cómo le harías para dibujar la pila 5. ______________________________

_______________________________________________

_______________________________________________

_______________________________________________

4. Explica cómo le harías para dibujar la pila 18. ______________________________
_______________________________________________________________________________
_______________________________________________________________________________
_______________________________________________________________________________

5. ¿**Qué número de pila** tiene exactamente 382 azulejos cuadrados? ____________
¿Cómo le hiciste para llegar a tu respuesta? _________________________________
_______________________________________________________________________________
_______________________________________________________________________________
_______________________________________________________________________________

6. Tengo una caja con 218 azulejos cuadrados, ¿qué número de pila sería la más grande que se podría hacer usando estos azulejos y siguiendo el patrón? _______
¿Cómo le hiciste para llegar a tu respuesta? _________________________________
_______________________________________________________________________________
_______________________________________________________________________________
_______________________________________________________________________________
_______________________________________________________________________________

7. Explica cómo le haces para encontrar el número de azulejos cuadrados de cualquier pila (“n”) del patrón. ___________________________________________
_______________________________________________________________________________
_______________________________________________________________________________
_______________________________________________________________________________
_______________________________________________________________________________

Si tienes una fórmula o regla escríbela _________________________________________

8. ¿Cuál de las expresiones de abajo crees que es la correcta para encontrar el número de azulejos para la pila “n”? **Subráyala**.

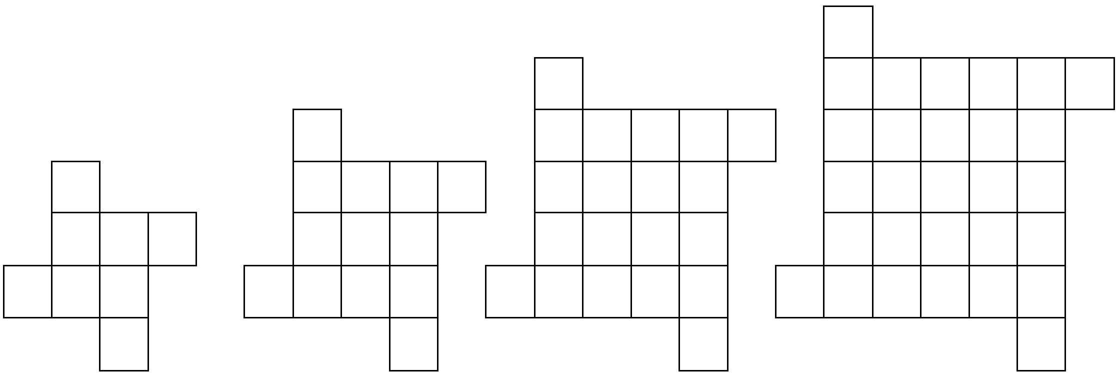
a) $n \times n + 2 + n$
b) $2n + n^2$
c) $n^2 + n + 2$
d) $2n^2 + 2$

**ACTIVIDADES DE EXPLORACIÓN**
**CON MANIPULABLES VIRTUALES**

Grado: ______ Fecha: _______
Nombre: ______________________________________ Edad: _____
Sec. Téc. N°: _____

## *Crecimiento de Azulejos II*

**Observe el siguiente patrón de pilas**

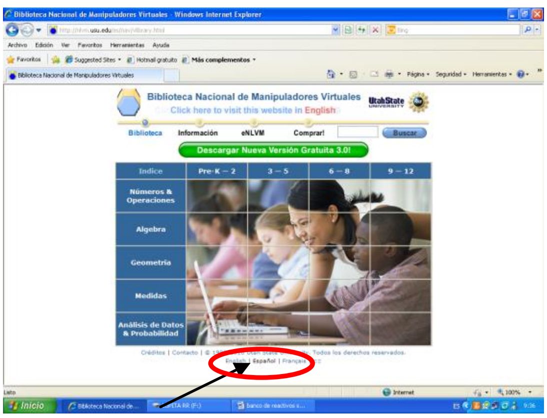


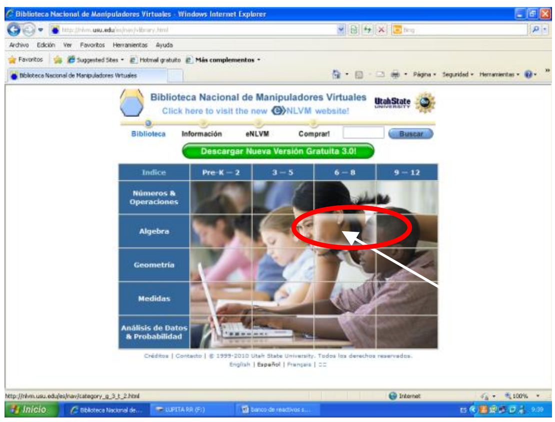
**Pila 1** **Pila 2** **Pila 3** **Pila 4**

*Apóyate del manipulador virtual para responder las preguntas 1 a 9 que aparecen abajo.*

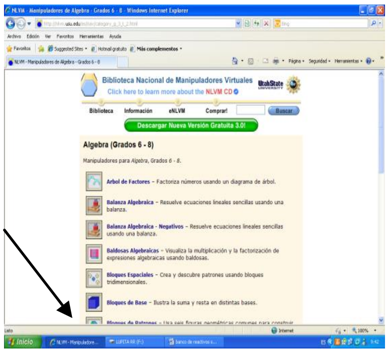
Antes de empezar a resolver el problema sería conveniente aprender a manejar el manipulador virtual. Enseguida se te dan las instrucciones [de la ***a***) a la ***e***)] que te permitirán usarlo.

**a)** Introduce la siguiente página de internet en la barra de dirección electrónica: http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html y te aparecerá en la pantalla la imagen de la izquierda.

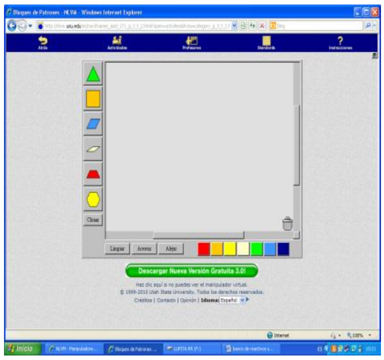


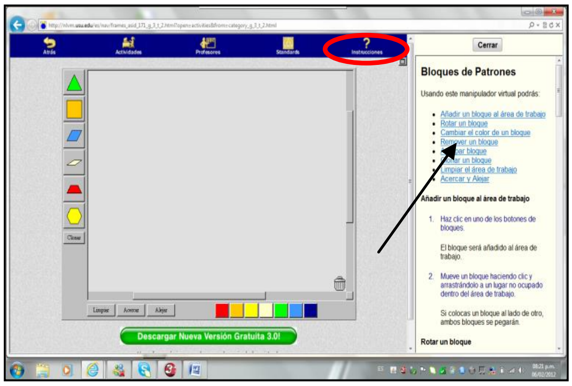

**b)** Haz clic para elegir el idioma ***Español*** y luego haz clic en la fila de Algebra y en la columna de grado 6-8.



**c)** Enseguida aparecerán todos los manipulativos de esta sección. Haz clic en el que dice "***Bloques de Patrones***" y aparecerá la imagen de la derecha.

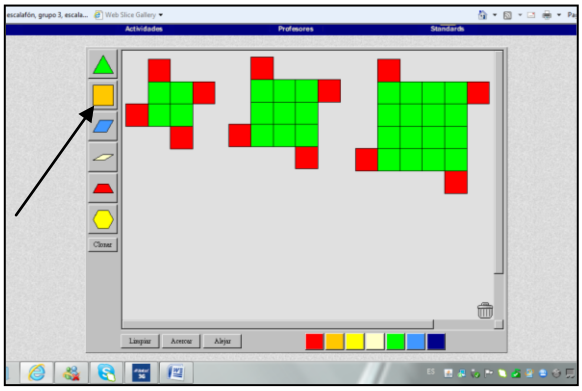


**d)** Debes hacer clic en el icono de "**Instrucciones**" para saber cómo puedes utilizar las herramientas que te ofrece, por ejemplo: *Añadir un bloque al área de trabajo*, *Rotar un bloque*, *Cambiar el color de un bloque*, *Remover un bloque*, *Agrupar bloque*, *Clonar un bloque*, *Limpiar el área de trabajo* y *Acercar y Alejar* .



***Construcción de las Pilas con el manipulador virtual:***

**e)** Haz clic en el icono del cuadrado para obtener los azulejos que te permitirán construir las pilas de nuestro patrón. Cambia el color a los azulejos, tal como se muestra en la imagen.



*¡Ahora sí, estás listo para responder lo que se te solicita!*

1. ¿Qué observas que permanece igual en las pilas de este patrón? ______________

________________________________________________

________________________________________________

2. ¿Qué observas que cambia, de una pila a otra, en este patrón? ______________

________________________________________________

________________________________________________

3. Explica cómo le harías para dibujar la pila 5. ______________________________

________________________________________________

________________________________________________

4. Explica cómo le harías para dibujar la pila 16. ____________________________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________

5. Cuántos azulejos cuadrados se necesitan para hacer la pila 45 _____________ y la 73?____________

6. ¿Qué número de pila tiene exactamente 148 azulejos cuadrados? ____________
¿Cómo le hiciste para llegar a tu respuesta? ______________________________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________

7. Tengo una caja con 165 azulejos cuadrados ¿qué número de pila sería la más grande que se podría hacer usando estos azulejos y siguiendo el patrón? ______
¿Cómo le hiciste para llegar a tu respuesta? ______________________________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________

8. Explica cómo le haces para encontrar el número de azulejos cuadrados de cualquier pila del patrón. _____________________________________________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________

Si tienes una fórmula o regla escríbela _____________________________________

9. ¿Cuál de las expresiones de abajo crees que es la correcta para encontrar el número de azulejos para la pila "n"? **Subráyala**.

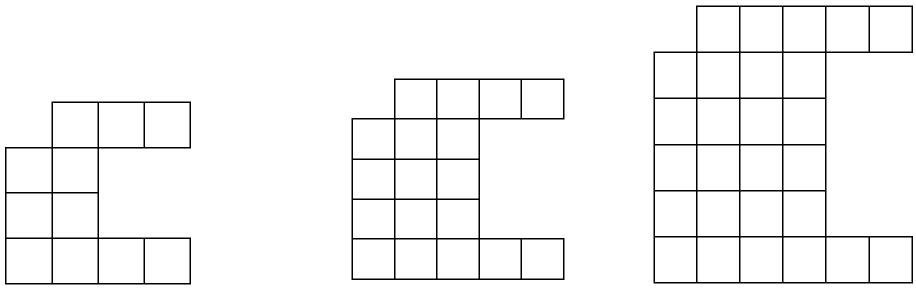
a) $(n+1)(n+1) + 4$
b) $n^2 + 4n$
c) $n \times n + 4$
d) $(n+1)^2 + 4$

# ACTIVIDADES DE EXPLORACIÓN
# CON MANIPULABLES VIRTUALES

Grado: ______ Fecha: _______
Nombre: _____________________________________ Edad: _____
Sec. Téc. N°: _____

## *Crecimiento de Pilas*

**Observe el siguiente Patrón de pilas**

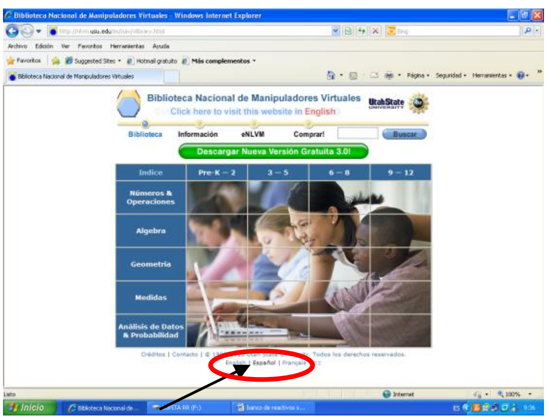


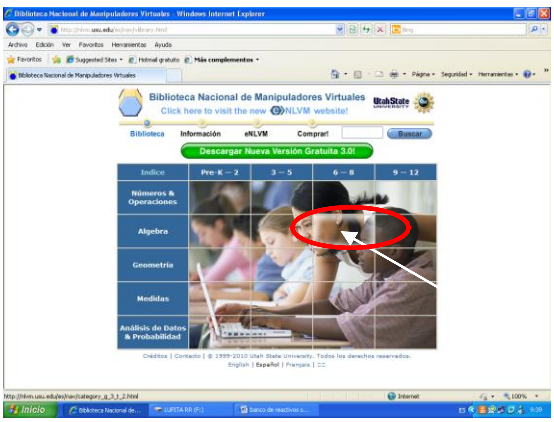
**Pila 2** **Pila 3** **Pila 4**

*Apóyate del manipulador virtual para responder las preguntas 1 a 6 que aparecen abajo.*

Antes de empezar a resolver el problema sería conveniente aprender a manejar el manipulador virtual. Enseguida se te dan las instrucciones [de la ***a***) a la *d*)] que te permitirán usarlo.

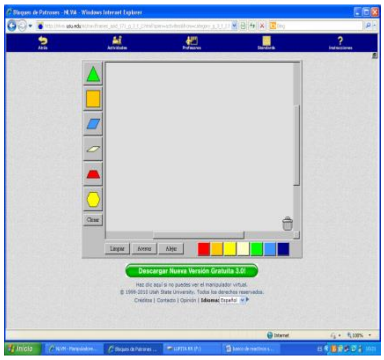
**a)** Introduce la siguiente página de internet en la barra de dirección electrónica: http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html y te aparecerá en la pantalla la imagen de la izquierda.




**b)** Haz clic para elegir el idioma ***Español*** y luego haz clic en la fila de Algebra y en la columna de grado 6-8.

**c)** Enseguida aparecerán todos los manipulativos de esta sección. Haz clic en el que dice “***Bloques de Patrones***” y aparecerá la imagen de la derecha.



***Construcción de las Pilas con el manipulador virtual:***

**d)** Haz clic en el icono del cuadrado para obtener los azulejos que te permitirán construir las pilas de nuestro patrón. Cambia el color de los azulejos. Enseguida se muestran diferentes opciones (muestran las pilas 2, 3 y 4).

*Imagen 1*

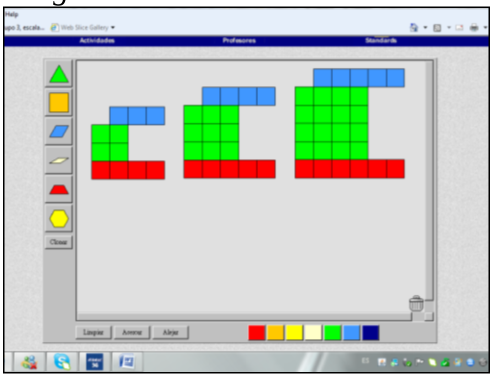


*Imagen 2*

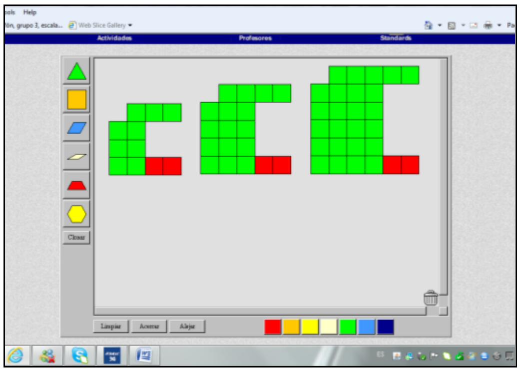


*Imagen 3*

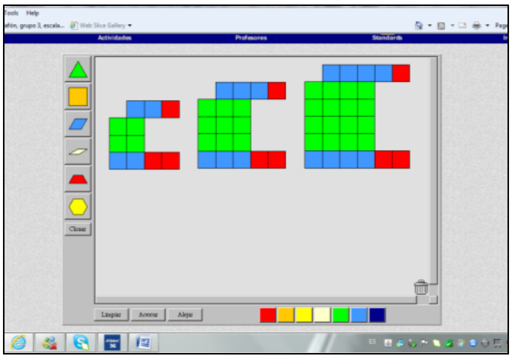


*Imagen 4*

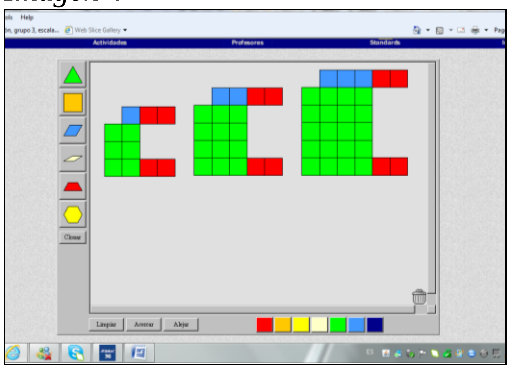
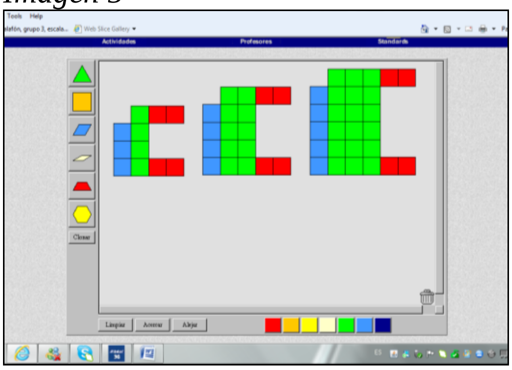


*Imagen 5*



*¡Ahora sí, estás listo para responder lo que se te solicita!*

1. Construye con el manipulador virtual la pila 5 y la 6. Luego la 1 y la 0. Ahora dibuja sobre el papel cuadriculado estas mismas pilas.

2. - ¿Cuántos azulejos se necesitan para construir cada una de estas pilas?
   Pila 0 = ________ Pila 1= ________ Pila 5 = ________ Pila 6 = ________

3. Explica cómo le harías para dibujar la pila 10. ____________________________

4. ¿Cuántos azulejos se necesitan para hacer la pila 57? ______________________
   ¿Cómo le hiciste para llegar a tu respuesta? ______________________________

5. Tengo una caja con 289 azulejos, ¿qué número de pila sería la más grande que se podría hacer usando estos azulejos y siguiendo el patrón?__________________
   ¿Cómo le hiciste para llegar a tu respuesta? ______________________________

6. Usando las imágenes directamente, describe con tus palabras al menos dos maneras diferentes con las que podrías encontrar el número de azulejos necesarios para hacer la pila "n" del patrón.

Si llegaste a una fórmula o regla que permita encontrar fácilmente el número de azulejos necesarios para construir cualquier pila del patrón, escríbela y sí usaste letras di qué significa cada una.

# ANEXO C

| DIRECTORIO DE LAS ESCUELAS SECUNDARIAS TÉCNICAS PARTICIPANTES DEL DISTRITO FEDERAL | |
|---|---|
| **Secundaria Técnica #08**<br>Carlos B. Zetina #32. Col. Ex hipódromo Condesa. Del. Cuauhtémoc.<br>Turno Vespertino.<br>Tels. 55 15 30 92 o 55 15 45 15<br>Dir. Mtra. Alicia Ochoa Berrospe<br>Horario de sesiones: Lunes de 14:00 a 3:40 |  |
| **Secundaria Técnica #14**<br>Av. Coyoacán y Ángel Urraza. Col. Del Valle<br>Del. Benito Juárez<br>Turno Matutino<br>Tel. 55 59 66 80<br>Dir. Lic. José Gilberto Espinoza Álvarez<br>Horario de sesiones: Lunes de 11:30 a 13:10 |  |
| **Secundaria Técnica #43**<br>Tenoch y Sargento 2º Gustavo Salazar Bejarano. Esq. Pedro Sainz de Baranda. Col. Los Cipreses. Del Coyoacán.<br>Turno Matutino<br>Tel.  56 77 35 67<br>Dir. Lic. Armando Romero Bárcenas<br>Horario de sesiones: Jueves de 9:30 a 11:30 |  |
| **Secundaria Técnica #72**<br>Parcela s/n. Esq. Carbonero. Col. Lomas de San Bernabé Ocotepec. Del. La Magdalena Contreras.<br>Turno Vespertino<br>Tel. 55 85 99 88<br>Dir. Anterior: Lic. José de la Cruz Patiño García<br>Dir. Actual: Cir. Dent. Ma. de Lourdes Escobar Martínez |  |
| **Secundaria Técnica #109**<br>Camino Real a Sta. Cecilia s/n. Col. San Andrés Ahuayucan. Del. Xochimilco.<br>Turno Matutino<br>Tel. 55 48 10 63<br>Dir. Med. Cir. Gonzalo Trujillo González |  |

# ANEXO D

# OFICIOS DE PRESENTACIÓN A LAS ESCUELAS SECUNDARIAS TÉCNICAS PARTICIPANTES

ACUSE

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

90 años

1921 - 2011

Dirección General de Educación Secundaria Técnica
Dirección Técnica
Oficio: AFSEDF/DGEST.1/1365/2011

"2011, Año del Turismo en México"

México, D.F., a 27 de Septiembre de 2011

**PROFRA. ALICIA OCHOA BERROSPE**
**Directora de la E.S.T. No. 8**

**Presente**

Por instrucciones superiores. me permito presentarle a la C. Guadalupe Rodríguez Ruiz quien además de ser Maestra de nuestro Subsistema es doctorante de la Universidad Pedagógica Nacional en Educación en la línea de Educación Matemática, para quien solicito su amable y valioso apoyo a fin de implementar durante un período aproximado de 18 semanas el proyecto denominado ***"Desarrollo del Razonamiento Algebraico en Estudiantes de Secundaria con la Mediación de Tecnologías Digitales".***

Este proceso tiene como finalidad recabar información sobre las maneras de razonar de los estudiantes de secundaria cuando usan las propiedades fundamentales de la aritmética en actividades encaminadas a desarrollar el razonamiento algebraico, información que por otra parte nos será de mucha utilidad en la enseñanza de las matemáticas con el uso de la tecnología digital.

En tal sentido la Mtra. Rodríguez Ruiz, le explicará con detalle la estrategia y programa de trabajo que realizará en su escuela.

**Atentamente**

**Ing. Juan Antonio Nevarez Espinoza**
**Director Técnico**

A. F. S. E. D. F.
Direccion General de Educación
Secundaria Técnica
DIRECCIÓN TÉCNICA

S.E.P.
ADMINISTRACION FEDERAL
DE SERVICIOS EDUCATIVOS
EN EL DISTRITO FEDERAL
E.S.T. No. 8
GUILLERMO GONZALEZ CAMARENA
C.C.T. 09DST0008S

04-10-2011

c.c.p.- Lic. Manuel Salgado Cuevas.-Director General.-Edificio
c.c.p.- Mtro. Carlos Chimal Fuentes.-Subdirector Académico-.Edificio
c.c.p.- Expediente

JANE/ka

ACUSE.

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

90 años 1921 - 2011

Dirección General de Educación Secundaria Técnica
Dirección Técnica
Oficio: AFSEDF/DGEST.1/1366/2011

"2011, Año del Turismo en México"

México, D.F., a 27 de Septiembre de 2011

**LIC. JOSÉ GILBERTO ESPINOSA ÁLVAREZ**
**Director de la E.S.T. No. 14**

**Presente**

Por instrucciones superiores. me permito presentarle a la C. Guadalupe Rodríguez Ruiz quien además de ser Maestra de nuestro Subsistema es doctorante de la Universidad Pedagógica Nacional en Educación en la línea de Educación Matemática, para quien solicito su amable y valioso apoyo a fin de implementar durante un período aproximado de 18 semanas el proyecto denominado ***"Desarrollo del Razonamiento Algebraico en Estudiantes de Secundaria con la Mediación de Tecnologías Digitales".***

Este proceso tiene como finalidad recabar información sobre las maneras de razonar de los estudiantes de secundaria cuando usan las propiedades fundamentales de la aritmética en actividades encaminadas a desarrollar el razonamiento algebraico, información que por otra parte nos será de mucha utilidad en la enseñanza de las matemáticas con el uso de la tecnología digital.

En tal sentido la Mtra. Rodríguez Ruiz, le explicará con detalle la estrategia y programa de trabajo que realizará en su escuela.

**Atentamente**

**Ing. Juan Antonio Nevarez Espinoza**
**Director Técnico**

ESTADOS UNIDOS MEXICANOS
A. F. S. E. D. F.
Direccion General de Educación
Secundaria Técnica
DIRECCIÓN TÉCNICA

Recibí Original
4-oct-2011

c.c.p.- Lic. Manuel Salgado Cuevas.-Director General.-Edificio
c.c.p.- Mtro. Carlos Chimal Fuentes.-Subdirector Académico-.Edificio
c.c.p.- Expediente

JANE/ka

Acuse

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

90 años

1921 - 2011

Dirección General de Educación Secundaria Técnica

Dirección Técnica

Oficio: AFSEDF/DGEST.1/1367/2011

"2011, Año del Turismo en México"

México, D.F., a 27 de Septiembre de 2011

**LIC. ARMANDO ROMERO BARCÉNAS**
**Director de la E.S.T. No. 43**

**Presente**

Por instrucciones superiores. me permito presentarle a la C. Guadalupe Rodríguez Ruiz quien además de ser Maestra de nuestro Subsistema es doctorante de la Universidad Pedagógica Nacional en Educación en la línea de Educación Matemática, para quien solicito su amable y valioso apoyo a fin de implementar durante un período aproximado de 18 semanas el proyecto denominado ***"Desarrollo del Razonamiento Algebraico en Estudiantes de Secundaria con la Mediación de Tecnologías Digitales".***

Este proceso tiene como finalidad recabar información sobre las maneras de razonar de los estudiantes de secundaria cuando usan las propiedades fundamentales de la aritmética en actividades encaminadas a desarrollar el razonamiento algebraico, información que por otra parte nos será de mucha utilidad en la enseñanza de las matemáticas con el uso de la tecnología digital.

En tal sentido la Mtra. Rodríguez Ruiz, le explicará con detalle la estrategia y programa de trabajo que realizará en su escuela.

**Atentamente**

**Ing. Juan Antonio Nevarez Espinoza**
**Director Técnico**

A. F. S. E. D. F.
Direccion General de Educación Secundaria Técnica
DIRECCIÓN TÉCNICA

S.E.P.
ADMINISTRACION FEDERAL DE SERVICIOS EDUCATIVOS EN EL DISTRITO FEDERAL
ESCUELA SECUNDARIA TECNICA No. 43
09DST0043Y

Recibí doctos
03.10.11

c.c.p.- Lic. Manuel Salgado Cuevas.-Director General.-Edificio
c.c.p.- Mtro. Carlos Chimal Fuentes.-Subdirector Académico-.Edificio
c.c.p.- Expediente

JANE/ka

Acuse

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

90 años

1921 - 2011

Dirección General de Educación Secundaria Técnica
Dirección Técnica

"2011, Año del Turismo en México"

Oficio: AFSEDF/DGEST.1/1368/2011

México, D.F., a 27 de Septiembre de 2011

**LIC. JOSÉ DE LA CRUZ PATIÑO GARCÍA**
**Director de la E.S.T. No. 72**

**Presente**

Por instrucciones superiores. me permito presentarle a la C. Guadalupe Rodríguez Ruiz quien además de ser Maestra de nuestro Subsistema es doctorante de la Universidad Pedagógica Nacional en Educación en la línea de Educación Matemática, para quien solicito su amable y valioso apoyo a fin de implementar durante un período aproximado de 18 semanas el proyecto denominado ***"Desarrollo del Razonamiento Algebraico en Estudiantes de Secundaria con la Mediación de Tecnologías Digitales".***

Este proceso tiene como finalidad recabar información sobre las maneras de razonar de los estudiantes de secundaria cuando usan las propiedades fundamentales de la aritmética en actividades encaminadas a desarrollar el razonamiento algebraico, información que por otra parte nos será de mucha utilidad en la enseñanza de las matemáticas con el uso de la tecnología digital.

En tal sentido la Mtra. Rodríguez Ruiz, le explicará con detalle la estrategia y programa de trabajo que realizará en su escuela.

**Atentamente**

**Ing. Juan Antonio Nevarez Espinoza**
**Director Técnico**

ESTADOS UNIDOS MEXICANOS
**A. F. S. E. D. F.**
**Direccion General de Educación**
Secundaria Técnica
DIRECCIÓN TÉCNICA

Recibí
3-X-2011

c.c.p.- Lic. Manuel Salgado Cuevas.-Director General.-Edificio
c.c.p.- Mtro. Carlos Chimal Fuentes.-Subdirector Académico-.Edificio
c.c.p.- Expediente

JANE/ka

Acuse.

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

90 años 1921 - 2011

Dirección General de Educación Secundaria Técnica
Dirección Técnica
Oficio: AFSEDF/DGEST.1/1369/2011

"2011, Año del Turismo en México"

México, D.F., a 27 de Septiembre de 2011

**MED. CIR. GONZALO TRUJILLO GONZÁLEZ**
**Director de la E.S.T. No. 109**

**Presente**

Por instrucciones superiores. me permito presentarle a la C. Guadalupe Rodríguez Ruiz quien además de ser Maestra de nuestro Subsistema es doctorante de la Universidad Pedagógica Nacional en Educación en la línea de Educación Matemática, para quien solicito su amable y valioso apoyo a fin de implementar durante un período aproximado de 18 semanas el proyecto denominado *"Desarrollo del Razonamiento Algebraico en Estudiantes de Secundaria con la Mediación de Tecnologías Digitales"*.

Este proceso tiene como finalidad recabar información sobre las maneras de razonar de los estudiantes de secundaria cuando usan las propiedades fundamentales de la aritmética en actividades encaminadas a desarrollar el razonamiento algebraico, información que por otra parte nos será de mucha utilidad en la enseñanza de las matemáticas con el uso de la tecnología digital.

En tal sentido la Mtra. Rodríguez Ruiz, le explicará con detalle la estrategia y programa de trabajo que realizará en su escuela.

**Atentamente**

**Ing. Juan Antonio Nevarez Espinoza**
**Director Técnico**

ESTADOS UNIDOS MEXICANOS
A. F. S. E. D. F.
Direccion General de Educación
Secundaria Técnica
DIRECCIÓN TÉCNICA

ESTADOS UNIDOS MEXICANOS
S.E.P.
ADMINISTRACIÓN FEDERAL DE SERVICIOS EDUCATIVOS EN EL DISTRITO FEDERAL
E. S. T. No. 109

c.c.p.- Lic. Manuel Salgado Cuevas.-Director General.-Edificio
c.c.p.- Mtro. Carlos Chimal Fuentes.-Subdirector Académico-.Edificio
c.c.p.- Expediente

JANE/ka

# ANEXO E

# OFICIOS DE CONCLUSIÓN DE ACTIVIDADES EN LAS ESCUELAS SECUNDARIAS TÉCNICAS PARTICIPANTES

**Dirección General de Educación Secundaria Técnica**
**Subdirección de Escuelas Secundarias Técnicas en el D. F.**
Escuela Secundaria Técnica No. 8
"Guillermo González Camarena"
Clave: 09DST0008S

**A QUIEN CORRESPONDA,**
**P r e s e n t e.**

Por medio de la presente hago **CONSTAR** que la Profra. **GUADALUPE RODRÍGUEZ RUÍZ**, desarrolló actividades relacionadas a su proyecto doctoral, denominado "Desarrollo del Razonamiento Algebraico en Estudiantes de Secundaria Mediado por las Tecnologías Digitales", con alumnos de primer grado, mismas que fueron realizadas en los periodos que se mencionan a continuación:

| **Primer periodo (10 de octubre al 8 de diciembre de 2011) Alumnos con ALTO rendimiento académico** | **Segundo periodo (16 de abril al 15 de junio de 2012) Alumnos con BAJO rendimiento académico** |
|---|---|
| • Luis Alberto Martínez Rodríguez<br>• Valeria Monserrat Vargas Hernández<br>• Karina Laguna Ortega<br>• Oscar Alejandro Venancio Molina<br>• Liliana Morales Gutiérrez<br>• Joanna Alcántara Rodríguez<br>• Gustavo Yair Varela González | • Marcos Martínez Sánchez<br>• José Refugio Antonio Casso<br>• Cecilio Trejo Ángel Emmanuel<br>• Bernardo Gabino Ismael<br>• Miguel Ángel Mejía Contreras |

La presente se extiende para los fines legales que convengan a la interesada, a los cinco días del mes de diciembre del año dos mil doce.

A T E N T A M E N T E.

DRA. ALICIA OCHOA BERROSPE,
DIRECTORA DEL PLANTEL.

ESTADOS UNIDOS MEXICANOS
S.E.P.
ADMINISTRACION FEDERAL
DE SERVICIOS EDUCATIVOS
EN EL DISTRITO FEDERAL
E.S.T. No. 8
GUILLERMO GONZALEZ CAMARENA
C.C.T. 09DST0008S


Carlos B Zetina No. 32, Colonia Ex Hipódromo Condesa. Delegación Cuauhtémoc, c.p.06170, México, D.F.
Teléfonos: 55 15 30 92 y 55 15 45 15. Email: est8.guillermoglzcamarena@gmail.com

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

Dirección General de Educación Secundaria Técnica
Subdirección de Escuelas Secundarias Técnicas en el D. F.
ESCUELA SECUNDARIA TÉCNICA 14
"CINCO DE MAYO"
AFSEDF/DGEST.E-14/0903/2012.

México. D.F. a 28 de noviembre de 2012.

A QUIEN CORRESPONDA:
Presente.

Por medio de la presente se hace constar que la relación de alumnas que se presenta a continuación participaron en el proyecto doctoral: "Desarrollo de razonamiento algebraico en estudiantes de secundaria mediado por las tecnologías digitales".
En su primera fase con participantes de alto rendimiento del 10 de octubre de 2011 al 8 de diciembre de 2011.
En la segunda fase del 16 de abril de 2012 al 15 de junio de 2012 con alumnos de bajo rendimiento.

| Estudiantes participantes: | |
|---|---|
| En la primera fase (alto rendimiento): | En la segunda fase (bajo rendimiento): |
| • Mariana Torrentera Tapia<br>• Omar Ocaña Patiño<br>• Ismael Hernández Zurita<br>• Luisa Fernanda Medina Bañuelos<br>• Mauricio Estrada Figueroa<br>• Tatiana Sánchez Phillips<br>• Araceli Pedro Cerón<br>• Elsa Carolina Argueta<br>• Abraham Omar Rodríguez González<br>• Hannah Aguilar Castañeda<br>• Elizabeth Zaragoza Ramirez | • Castro Torres Allan Leonardo<br>• Meza Servín Fernando<br>• Obregón Martínez Ana Laura<br>• Jiménez Tobón Carlos Daniel<br>• Escobar Villa Vanessa<br>• Guzmán Ortíz Rogelio<br>• Cruz Malvido Aranza<br>• García Reyes Carla<br>• De León Gabino Mario Sebastián<br>• Bueno Tinoco José de Jesús<br>• Ugalde Acosta Sergio Aldair |

Sin otro particular por el momento, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE

LIC. JOSE GILBERTO ESPINOSA ALVAREZ
DIRECTOR

ESTADOS UNIDOS MEXICANOS
ADMINISTRACIÓN FEDERAL DE SERVICIOS EDUCATIVOS EN EL DISTRITO FEDERAL
SECUNDARÍA TÉCNICA
E.S.T. No. 14
"CINCO DE MAYO"
09DST0014C

Ángel Urraza S/N, Esq. Con Av. Coyoacán; Colonia del Valle, Código Postal 03100,
Delegación Benito Juárez, Teléfono 55 59 66 80, México, D.F.

SEP
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

Dirección General de Educación Secundaria Técnica
Subdirección de Escuelas Secundarias Técnicas en el D. F.
Escuela Secundaria Técnica No. 43
"Luis Enrique Erro"

**Oficio No. AFSEDF/DGEST E-43/1061/2012**
México D.F. a 28 de noviembre de 2012

**A QUIEN CORRESPONDA:**
**P R E S E N T E.**

Por medio de la presente se hace constar que la relación de alumn@s que se presenta a continuación participaron en el proyecto doctoral:"Desarrollo de razonamiento algebraico en estudiantes de secundaria mediado por las tecnologías digitales".
En su primera fase con participantes de alto rendimiento del 10 de octubre de 2011 al 8 de diciembre de 2011.
En la segunda fase del 16 de abril de 2012 al 15 de junio de 2012 con alumnos de bajo rendimiento.

| Estudiantes participantes: | |
|---|---|
| En la primera fase (alto rendimiento): | En la segunda fase (bajo rendimiento): |
| • Daniela Ichel Dorantes Esparza<br>• Italia Joselle Castillo Aguilar<br>• Gerardo Márquez Andrade<br>• Byron Valdés Rodríguez<br>• Ricardo Arriaga Reyes<br>• Edgar Ricardo Noriega Avilés<br>• Brenda Dayana Mercado López<br>• Elsa Beatriz Medina Cruz<br>• Diego Olín Cabañas<br>• Alejandra García Colín | • Diego Cabrera Martínez<br>• Leonardo Joel Sosa Lara<br>• Jassen Aguilar Israel Aarón<br>• Salma Almanza Hernández<br>• Abster Rivera Miranda<br>• Alberto Bernal Suantz<br>• Ana Isabel Godínez Colín<br>• Carla Daniela Chávez Chávez<br>• Joe Kevin Vázquez Martínez<br>• Elisa Hernández Soto |

Sin otro particular por el momento, reciba un cordial saludo.

**A T E N T A M E N T E**

ESTADOS UNIDOS MEXICANOS
S.E.P.
ADMINISTRACION FEDERAL
DE SERVICIOS
EDUCATIVOS EN EL DISTRITO FEDERAL
ESCUELA SECUNDARIA TECNICA No. 43
09DST0043Y

**LIC. ARMANDO ROMERO BÁRCENAS** **DIRECTOR**
ARB*RGA*HGDF*ISH*MLS*sm.

SEP
SECRETARÍA DE
EDUCACIÓN PÚBLICA

ESTADOS UNIDOS MEXICANOS

**Administración Federal de Servicios Educativos en el Distrito Federal**
Dirección General de Educación Secundaria Técnica
Escuela Secundaria Técnica 72
"Manuel María Contreras"
09DST0072T
"2013, Año de la Lealtad Institucional y Centenario del Ejército Mexicano".

Oficio: AFSEDF/DGEST. E.072/548/2013

México, D. F. a 13 de Agosto de 2013.

A QUIEN CORRESPONDA:

Por medio de la presente se hace constar que la Mtra. Guadalupe Rodríguez Ruiz desarrolló sus exploraciones como parte de su proyecto doctoral denominado: *Desarrollo del Razonamiento Algebraico en Estudiantes de Secundaria Mediado por las Tecnologías Digitales,* con estudiantes de nuestro plantel con las características que demandaba su estudio que enseguida se enlistan:

| Estudiantes participantes de primer grado del turno vespertino: | |
|---|---|
| En la primera fase (alto rendimiento en matemáticas): | En la segunda fase (bajo rendimiento en matemáticas): |
| • Mario Alexis Pabello Pina<br>• Erika Morales Hernández<br>• Arturo del Pilar Morales<br>• José Sebastián Rubio Ruiz<br>• Valeria Benítez Rojas<br>• Carlos Eduardo Rojas Valadez<br>• Andrea Muñoz Téllez<br>• Carlos Ortiz García | • González Hernández Juan Carlos<br>• Ocampo Olvera Enrique<br>• Aguilar Esquivel Bryan Jesús<br>• Gómez Pérez Víctor Manuel<br>• Saldaña Ramírez Daniel Alejandro<br>• Sánchez Abad Ángel<br>• Tenorio Resendiz Omar Alejandro<br>• Álvarez Enríquez Andrea<br>• Hernández López Mariana Michelle<br>• Hernández Ortiz Orlando |

El proyecto fue realizado en dos fases: La primera fase se llevó a cabo del 10 de octubre de 2011 al 08 de diciembre de 2011. La segunda fase inició el 16 de abril de 2012 y terminó el 15 de junio del mismo año.

A T E N T A M E N T E

MARIA DE LOURDES ESCOBAR MARTINEZ DIRECTORA

S.E.P.
ADMINISTRACION FEDERAL DE SERVICIOS EDUCATIVOS EN EL DISTRITO FEDERAL
E. S. T. No. 72
MANUEL MARIA CONTRERAS

Calle Parcela S/N Esquina Carbonero, Col. Lomas de San Bernabé,
Delegación La Magdalena Contreras C.P. 10350 México D.F.
Teléfono 55 85 99 88

Oficio número AFSEDF/DGEST/EST-109/245/2014

México, D.F., 03 de abril de 2014.

**A QUIEN CORRESPONDA**
PRESENTE

Por medio de la presente se hace constar que la Mtra. Guadalupe Rodríguez Ruiz desarrolló sus exploraciones de campo como parte de su proyecto doctoral: Desarrollo del razonamiento algebraico en estudiantes de secundaria mediado por las tecnologías digitales, con estudiantes de primer grado de nuestro plantel en el turno matutino con las características que demandaba su estudio.

El proyecto fue realizado en dos fases: la primera se llevó a cabo del 10 de octubre al 08 de diciembre de 2011 y la segunda fase inició el 16 de abril de 2012 y terminó el 15 de junio del mismo año.

Los estudiantes participantes se enlistan enseguida:

| Estudiantes de la Primera fase (alto rendimiento académico en matemáticas) en un ambiente de lápiz y papel. | Estudiantes de la Segunda fase (bajo rendimiento académico en matemáticas) en un ambiente computacional. |
|---|---|
| • Osiris Martínez González<br>• Axel Rivera Rubio<br>• Artemio Segura Posadas<br>• Valeria Alferez Barajas<br>• Anaid Reyes Bautista | • Juan Carlos Corrales Bucio<br>• Yoali Itzel Capultitla González<br>• Jazmín Cano Cruz<br>• Michael Castro Zagursky<br>• Rosa Sarai García García |

Sin otro particular, reciba un cordial saludo.

**Atentamente.**

ESTADOS UNIDOS MEXICANOS
S.E.P.
ADMINISTRACIÓN FEDERAL DE SERVICIOS EDUCATIVOS EN EL DISTRITO FEDERAL
E. S. T. No. 109

**Gonzalo Trujillo González.**
Director

GTG/ rihm.