



**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL**

---

**SECRETARIA ACADÉMICA  
CONSEJO DE POSGRADO  
DIRECCIÓN DE POSGRADO  
DOCTORADO EN EDUCACIÓN**

**"Competencias Matemáticas Básicas  
que Muestran Estudiantes de Bachillerato  
en la Resolución de Problemas  
que Involucran  
Análisis  
y  
Toma de Decisiones"**

**Tesis que para obtener el grado de  
Doctor en Educación  
Presenta**

**SERGIO CRUZ CONTRERAS**

**TUTOR:  
DR. L. MANUEL SANTOS-TRIGO**

**México, D. F.**

**Enero del 2006**

**In memoriam**

**ELFRIEDE WENZELBURGER  
GUTTENBERGER†**

## **Agradecimientos**

**A la UNAM**

**Por su apoyo para la realización de  
este trabajo**

**A la UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL**  
**a los PROFESORES del DOCTORADO en EDUCACIÓN**  
**en la línea de**  
**EDUCACIÓN MATEMÁTICA**

**Por su diálogo, su atención para escuchar y sus preguntas.**

**Al Comité Tutorial**

**DR LUZ MANUEL SANTOS-TRIGO, director de tesis**

**Por sus consejos, ayuda y paciencia  
durante la elaboración del trabajo**

**DRA. VERÓNICA HOYOS AGUILAR**

**Por su apoyo y estímulo constantes durante el periodo de  
estudios y por sus observaciones que tuvo  
para mejorar el trabajo.**

**DR. JORGE BAROJAS WEBER**

**Por su interés y dedicación durante la realización del trabajo y  
por sus observaciones dirigidas a  
mejorar el trabajo.**

**A los Lectores**

**DR. RODRIGO CAMBRAY NÚÑEZ,  
DR. JUAN MANUEL ESTRADA MEDINA,  
DR. EDUARDO MANCERA MARTÍNEZ y  
DRA. MARIANA SÁIZ ROLDAN.**

**Por el trabajo de revisión realizado y por las valiosas  
observaciones dirigidas a mejorar el trabajo.**

**A los alumnos del grupo 229 del COLEGIO DE CIENCIAS Y  
HUMANIDADES – PLANTEL SUR, del año 2003.**

**Por su disposición a cooperar en la experiencia  
didáctica llevada a cabo.**

# Índice

INTRODUCCIÓN .....	1
--------------------	---

## CAPITULO 1

### LA INVESTIGACIÓN

INTRODUCCIÓN .....	4
El ciudadano actual y su cultura matemática.....	5
Competencias matemáticas en el currículo escolar.....	8
La resolución de problemas dentro de la perspectiva de los “ <i>Modelos</i> y la <i>modelación</i> ”.....	11
Problemas de toma de decisiones y de construcción y/o aplicación de sistemas de Evaluación .....	12
El trabajo en grupos pequeños .....	14
El Problema .....	15
Importancia del Estudio .....	16
Cuestiones de Indagación .....	17

## CAPÍTULO 2

### REVISIÓN DE LA LITERATURA

INTRODUCCIÓN .....	18
La Resolución de Problemas .....	20
El modelo de Alan Schoenfeld .....	21
Los problemas matemáticos como tarea .....	22
El trabajo en grupos pequeños .....	25
El concepto de <i>modelo</i> .....	31
Las matemáticas como la ciencia de los <i>modelos</i> y la <i>modelación</i> .....	32
Introducción a la perspectiva de los <i>Modelos</i> y la <i>Modelación</i> .....	34
La resolución de problemas en la perspectiva de los <i>Modelos</i> y la <i>modelación</i> . .....	38



Proceso de resolución de un problema desde la perspectiva de los <i>Modelos</i> y la <i>modelación</i> .....	42
La resolución de problemas en grupos pequeños de acuerdo a la perspectiva de los modelos y la modelación .....	44
Toma de decisiones .....	47
La Personalidad y la Toma de Decisiones .....	51
<i>La toma de decisiones</i> y el currículo .....	52
Ejemplo de la Enseñanza de la Toma de Decisiones .....	52
La toma de decisiones por adolescentes en situaciones de riesgo .....	53
La Toma de Decisiones y la Resolución de Problemas .....	55
Las Matemáticas y la Toma de Decisiones .....	56
La evaluación .....	56
La estadística y el tratamiento de datos .....	57
La Investigación en Educación Matemática acerca de la Incertidumbre .....	62
La investigación en educación matemática del concepto de <i>promedio</i> .....	63
Algunas investigaciones, en la línea de los <i>Modelos</i> y la <i>Modelación</i> , relacionadas con el objetivo del presente estudio .....	67

### CAPITULO 3

#### METODOLOGÍA

INTRODUCCIÓN .....	72
La <i>comprensión</i> : objetivo fundamental de este trabajo .....	73
La Investigación Cualitativa: método de indagación para lograr <i>comprensión</i> .....	74
Características a considerar en la investigación cualitativa .....	77
La investigación en educación matemática .....	78
Metodología de investigación en educación matemática desde la perspectiva teórica de los <i>Modelos</i> y la <i>modelación</i> .....	80
Diseño metodológico de la experiencia llevada a cabo en el contexto del salón de clases .....	81
Conjunto de problemas utilizados en la experiencia .....	81
Problemas de <i>Toma de decisiones</i> .....	84
Ejemplo de Problema de <i>toma de decisiones</i> , con dos posibles soluciones .....	85
Problemas de construir un <i>instrumento de evaluación</i> .....	92
Los Participantes y el Escenario .....	93
Población estudiada .....	94
Experiencia didáctica .....	94
Fuentes de datos y análisis de los mismos .....	96

## CAPÍTULO 4

### RESULTADOS Y DISCUSIÓN

INTRODUCCIÓN .....	98
Análisis de los ciclos de desarrollo que exhibe un grupo pequeño (AMA') al abordar el problema de: " <i>Los críticos de cine y las películas</i> " .....	100
Características generales de los modelos construidos por los diferentes grupos pequeños para el problema " <i>Los críticos de cine y las películas.</i> " .....	114
Análisis de los ciclos de desarrollo que exhibe un grupo pequeño (FAS) al abordar el problema de: " <i>La familia Zapata cambia de lugar de residencia</i> " .....	119
Características generales de los modelos construidos por los grupos pequeños que abordaron el problema " <i>La familia Zapata cambia de lugar de residencia</i> " .....	133
Características generales de los modelos construidos por los grupos pequeños que abordaron el problema " <i>La niñera de Kareem...una niña rubia y traviesa</i> " .....	142
Características generales de los modelos construidos por los grupos pequeños que abordaron el problema " <i>Gladiadores de Neza vs. Romanos de la Roma</i> " .....	146
Análisis de los ciclos de desarrollo que exhibe un grupo pequeño (Abi, Ad, Al) al abordar el problema de: " <i>La calificación de las licuadoras</i> " .....	151
Características generales de los modelos construidos por los grupos pequeños que abordaron el problema " <i>La calificación de las licuadoras</i> " .....	162
Características generales de los modelos construidos por los grupos pequeños que abordaron el problema " <i>La compra de zapatos deportivos</i> " .....	167
Análisis de los ciclos de desarrollo que exhibe un grupo pequeño (Ab, Ad) al abordar el problema de: " <i>La elección de carrera</i> " .....	170
Características generales de los modelos construidos por los grupos pequeños que abordaron el problema " <i>La elección de carrera</i> " .....	175
Análisis de los ciclos de desarrollo que exhibe un grupo pequeño al abordar el problema de: " <i>El salón de clases</i> " .....	179
Características generales de los modelos construidos por los grupos pequeños que abordaron el problema " <i>El salón de clases</i> " .....	190
Análisis de los ciclos de desarrollo que exhibe un grupo pequeño al abordar el problema de: " <i>La película Titanic se saca un ...</i> " .....	197
Características generales de los modelos construidos por los grupos pequeños que abordaron el problema " <i>La película Titanic se saca un ...</i> " .....	209
Respuestas a las preguntas de investigación .....	214
CONCLUSIONES .....	229
BIBLIOGRAFÍA .....	233
ANEXO 1	

## INTRODUCCIÓN

Entre los objetivos de las matemáticas escolares está ayudar a los estudiantes a desarrollar herramientas conceptuales poderosas para construir y trabajar en sistemas cada vez más complejos del mundo actual (NCTM, 2000; Lesh y Doerr, 2003a). Además, las herramientas conceptuales que los estudiantes desarrollen deberían tender a revertir las conductas anuméricas que de acuerdo a Paulos (1988) aumentan la vulnerabilidad del ciudadano ante diversas influencias del entorno natural y social en que se encuentra.

Las herramientas conceptuales que los estudiantes desarrollen están estrechamente relacionadas con el currículo de matemáticas (NCTM, 2000), con el ambiente de instrucción escolar (Bransford; Brown y Cocking, 1999), y con las tareas y problemas que enfrenta el estudiante durante su instrucción (Santos, 1988a, 1998b, 1998c, 2000a; Santos y Mojica, 2003).

Una de las orientaciones curriculares más conocidas en la comunidad de educadores matemáticos es la que propone la NCTM (NCTM, 2000). En ella se reconocen como ideas rectoras para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas elementales cinco áreas de contenidos (Números y Operaciones, Álgebra, Geometría, Medición; Análisis de Datos y

Probabilidad), y cinco procesos (Resolución de Problemas, Razonamiento y Prueba, Comunicación, Conexiones y Representaciones). Sin embargo, al lado de la propuesta curricular de la NCTM hay otros puntos de vista (Doerr y English, 2003; Santos, 2002; Steen, 1990) que manifiestan que hay procesos del pensamiento matemático que no tienen en el currículo matemático el lugar que deberían tener. Entre ellos se pueden mencionar ponderar, ordenar, controlar, describir, aplicar, modelar, experimentar, clasificar, visualizar, evaluar, seleccionar, organizar y transformar conjuntos completos de datos en lugar de datos puntuales.

Con relación al ambiente de instrucción, al menos en un aspecto, es casi posible afirmar que entre la comunidad de educadores matemáticos hay consenso del papel central que juega la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas (Santos 1997; Schoenfeld, 1992) y, por lo tanto, el papel relevante que debe desempeñar en la instrucción.

Los *Modelos y Modelación* (Lesh y Doerr, 2000; Lesh y Doerr, 2003b) es una perspectiva teórica por medio de la cual se intenta racionalizar la resolución de problemas, la enseñanza y el aprendizaje matemáticos. En esta perspectiva un *modelo* (Lesh y Doerr, 2000) es un sistema formado de: (a) *elementos*, (b) *relaciones* entre elementos, (c) *operaciones* que describen como interactúan los elementos y (d) *patrones* o *reglas*, tales como la simetría, la conmutatividad, o la transitividad, que se aplican a las relaciones y operaciones. Una idea central en el enfoque de los *modelos* y la *modelación* es que los individuos le dan sentido a sus experiencias en términos de los modelos que previamente han construido.

Respecto a las tareas y problemas que el estudiante enfrente durante su instrucción, English y Lesh (2003) señalan que “*los problemas de fin conocido*” son relevantes para el mundo actual. Los “*problemas de fin conocido*” son aquellos en que se presentan a los alumnos criterios particulares para generar productos útiles, complejos y con múltiples facetas que van más allá de la información dada, (English y Lesh, 2003). Entre los diversos productos que este tipo de problemas genera están los modelos y los sistemas para realizar evaluaciones, (English y Lesh, 2003). La *toma de decisiones* es otro tipo de situaciones problemáticas relevantes para los futuros ciudadanos. En la vida cotidiana casi a cada instante se toman decisiones (Márquez, 1993) y en la ciencia es fundamental (Nunn, 2005). La toma de decisiones ha sido profundamente influenciada por las matemáticas, (Lucas,

1991) y, de acuerdo a Lesh y Lamon (1992) la toma de decisiones requiere cada vez más de la construcción, refinamiento y adaptación de modelos.

El objetivo central del presente estudio es tener una aproximación, desde la perspectiva de los modelos y la modelación, a las competencias matemáticas que se promueven cuando estudiantes de bachillerato, sin recibir una instrucción previa para tal fin, enfrentan en grupos pequeños, y en condiciones naturales del salón de clases, tareas consistentes en situaciones problemáticas acerca de *toma de decisiones* y de construir y/o aplicar *sistemas de evaluación*, que demandan del alumno procesos y contenidos que han recibido una escasa atención en el currículo tradicional de matemáticas elementales.

La investigación en educación matemática en aspectos como los señalados en el párrafo anterior es escasa; gran parte de ella ha sido llevada a cabo, fundamentalmente, por Lesh y colaboradores (Lesh y Lamon, 1992; Lesh y Doerr, 2000; Lesh y Doerr, 2003b; Doerr y English, 2003).

El trabajo consta de cuatro capítulos, la bibliografía y un Anexo. En el Capítulo 1 se plantea el problema de investigación y se enuncian las preguntas que orientaron el estudio. En el Capítulo 2 se revisa la literatura que se considera pertinente para el estudio, en especial lo relacionado a la Resolución de Problemas y a la perspectiva de los Modelos y la Modelación. El Capítulo 3 trata acerca del diseño de la experiencia didáctica y de la recopilación y tratamiento de la información. En el Capítulo 4 se abordan el análisis de la información y sus resultados, así como las respuestas a las preguntas de investigación, las conclusiones y limitaciones a que condujo el estudio. En el Anexo se registran las situaciones problemáticas que se utilizaron en el estudio.

## CAPITULO 1

# LA INVESTIGACIÓN

### INTRODUCCIÓN

Con los propósitos de dar un contexto y bosquejar los antecedentes del *problema* que será objeto de estudio en el presente trabajo, y que páginas más adelante se enuncia, en seguida se tratan, de manera escueta, los siguientes aspectos que constituirán rasgos característicos del problema en cuestión: El ciudadano actual y su cultura matemática, Competencias matemáticas en el currículo escolar, La resolución de problemas dentro de la perspectiva de los “*Modelos* y la *modelación*”, Problemas de toma de decisiones y de construcción y/o aplicación de sistemas de evaluación y El trabajo en grupos pequeños.

## El ciudadano actual y su cultura matemática

En la actualidad se reconoce la necesidad de que todo individuo desarrolle un dominio de las ideas básicas de las matemáticas (Cockcroft, 1982; Kilpatrick, 2001; NCTM, 2000; O'Donoghue, 1995; Schwartz, 1991; Steen, 1990). Kilpatrick (2001) caracteriza las competencias matemáticas en términos de: (a) La *comprensión conceptual*, se refiere a la comprensión de conceptos, operaciones y relaciones matemáticas; (b) La *fluidez en procedimientos*; o sea, a las destrezas para llevar a cabo procedimientos matemáticos de manera flexible, eficiente, apropiada y precisa; (c) La *competencia estratégica*, o la habilidad para formular, representar y resolver problemas matemáticos; (d) El *razonamiento adaptativo*, o capacidad para el pensamiento lógico y para explicar y justificar argumentos matemáticos así como para reflexionar acerca de ello; (e) La *disposición productiva*, o inclinación habitual para ver a las matemáticas como algo sensible, útil y que vale la pena aprehenderse, así como la creencia en el valor del trabajo diligente y en la propia eficacia como una persona activa en matemáticas.

La necesidad de que el individuo desarrolle una competencia matemática que le permita entender eventos cotidianos y del campo laboral (NCTM, 2000), nunca ha sido mayor que ahora, y seguirá en aumento en aspectos como los siguientes: (a) *Matemáticas para la vida*, (b) *Matemáticas como una parte de la herencia cultural*, (c) *Matemáticas para el trabajo*, (d) *Matemáticas para la comunidad científica y tecnológica*.

¿Qué consecuencias pudiese tener el hecho de que un ciudadano tuviese “deficiencias” en su *pensamiento matemático*? Por “deficiencias” se entiende desconocimiento y/o escaso desempeño en contenidos y procesos asociados comúnmente a las matemáticas elementales: principios de Aritmética, Álgebra, Geometría, Probabilidad y Estadística y en procesos generales como resolver problemas, construir representaciones, comunicar resultados, establecer conexiones entre aspectos matemáticos y no-matemáticos, razonar y justificar resultados. Las deficiencias que en cultura matemática experimente un ciudadano se pueden sentir en la sociedad en su conjunto.

A nivel personal, es posible que tales consecuencias se reflejen en acciones, decisiones, interpretaciones, explicaciones, creencias y actitudes con relación a determinados aspectos de su vida cotidiana. Es más, su propio nivel de conciencia acerca de

su situación en su entorno familiar y comunitario podría verse influido por su cultura matemática. Naturalmente tendría consecuencias en la relación que guarde con el ámbito laboral: sus posibilidades laborales, y el desempeño en diversas actividades, también influidas por su cultura matemática.

Algunas consecuencias de la limitada competencia en matemáticas (Paulos, 1988; Dewdney, 1993) se manifiestan ante los abusos, y malos usos, de las matemáticas sobre los cuales, el ciudadano desprovisto de elementos matemáticos aparece con pocos recursos para comprenderlos.

Paulos (1988), ha reflexionado acerca de la carencia de competencias matemáticas, y algunas de sus consecuencias que acarrea a nivel personal y social. Su libro *Innumeracy: Mathematical Illiteracy and its Consequences*, está dedicado a estas cuestiones en relación al *anumerismo* es decir, utilizando la definición que él da a este término, a la incapacidad de manejar cómodamente los conceptos fundamentales de número y azar. Paulos explica la manera en la cual el anumerismo moldea las creencias y actitudes de un individuo: creer en la “buena y mala suerte”, prestar oídos a toda suerte de artes adivinatorias, dar crédito a toda clase de charlatanerías, etc., se debe, en parte, al anumerismo. Bastarían unos pocos cálculos sencillos como argumento para convencerse de la imposibilidad de haber sido visitados por extraterrestres y, sin embargo, hay personas, por otro lado cultas, que creen en tales cosas.

De acuerdo con Paulos, el anumerismo pone en desventaja y hace vulnerable a un ciudadano ante situaciones cotidianas que no puede interpretar correctamente. Hace pocos meses, con motivo de la aparición en México de los billetes con denominación de mil pesos, un representante del Banco de México quiso hacer creer que la situación económica de México en el año 2004 era semejante a la que se tenía en la década de los sesentas ya que, argumentaba que, “con mil pesos actuales se compra el mismo número de dólares que los que se compraban en la década de los sesentas.” Tal vez el cociente de las divisiones sea igual, pero los contextos económicos son diferentes: simplemente con mil pesos de 2004 no se compra lo que se compraba con esa cantidad en, 1968 por ejemplo. ¿Qué recursos se necesitan para analizar este tipo de situaciones?



Paulos ejemplifica la forma en la cual la carencia de estructuras conceptuales que permitan dar sentido a experiencias con números (Paulos llama a esto “carecer de una perspectiva numérica”) tiene consecuencias como las siguientes:

- Si no se tiene cierta *comprensión de las grandes cantidades* que a veces se mencionan, no se reacciona con el escepticismo pertinente o con la serenidad adecuada ante informes aterradores que tienen que ver con números.
- Si la gente estuviera más capacitada para hacer estimaciones y cálculos sencillos, se sacarían (o no) muchas conclusiones obvias y no se considerarían opiniones ridículas.

Paulos atribuye esta carencia de perspectiva numérica, en parte, a la forma en la cual se enseñan las matemáticas ya que según él la enseñanza elemental de las matemáticas es generalmente pobre, y señala algunas características de tal enseñanza:

- Aparte de unas pocas lecciones sobre redondeo de números, no se enseña a hacer cálculos. Raramente se enseña que el redondeo y las estimaciones razonables tengan algo que ver con la vida real.
- Casi nunca se enseña a razonar inductivamente, ni se estudian los fenómenos matemáticos con vistas a captar las reglas y propiedades más relevantes.
- No son frecuentes las discusiones de lógica informal.
- No se comentan enigmas, juegos o adivinanzas.
- Las matemáticas como herramienta útil, como modo de pensar o como fuente de placer es algo completamente ajeno a la mayoría de programas de la educación elemental.
- Parte de la culpa de la pobre instrucción que se recibe en la escuela primaria recae en los maestros poco competentes y que en el fondo sienten poco aprecio y tienen poco interés en las matemáticas.

En la situación actual, en muchos casos, no se consigue que los estudiantes adquieran los elementos básicos de la cultura matemática (Paulos, 1988). Según Douglas Hofstadter,

autor de “*Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid*”, nuestra sociedad sería totalmente distinta si cualquiera pudiera entender realmente las ideas del libro de Paulos y que su contenido podría constituir una auténtica revolución en la enseñanza de las matemáticas.

De acuerdo a Paulos (1988) el anumerismo atormenta a demasiados ciudadanos que, por lo demás, pueden ser perfectamente instruidos. Se arguye que toda “persona instruida”, así como ve enriquecida su experiencia personal con los productos de la “gran literatura”, la filosofía, la música de concierto y las artes plásticas, así debería verse recompensada con la producción matemática. Sin embargo, es difícil especificar que parte de la producción matemática debería formar parte del bagaje cultural de una “persona instruida”.

Por ejemplo, en Alemania país de matemáticos, en 1999 se publicó un libro (Schwanitz, 1999), que en español lleva por título *La Cultura. Todo lo que Hay que Saber*, que de sus 558 páginas, aproximadamente un 4 % está dedicado a la ciencia, entre ellas las matemáticas; la gran parte del libro la comparten la historia, la filosofía, la literatura, la historia del arte (artes plásticas), la historia de la música. Entre los setenta libros que reconoce que han cambiado el mundo, solamente menciona a *Los Elementos* de Euclides, como propiamente matemático. Finalmente, el número de libros que recomienda leer son, aproximadamente: historia, veintisiete; literatura, dos; arte, cinco; música, uno; filosofía e ideología, cuatro; ciencia, tres; matemáticas, dos: “*Gödel, Escher, Bach. Una eterna trenza dorada*”, de Douglas Hofstadter y “*Planilandia*” de E. Abbot.

Aún reconociendo que el libro: *La Cultura. Todo lo que Hay que Saber*, es una visión personal de Dietrich Schwanitz, (filólogo, historiador y filósofo), ejemplifica la dificultad que entraña definir la cultura matemática que debería poseer un ciudadano instruido matemáticamente.

## Competencias matemáticas en el currículo escolar

Una propuesta para desarrollar desde la escuela el pensamiento matemático en la ciudadanía, es la que formula la NCTM en sus *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000), en donde, a través de cinco estándares sobre contenidos (Números y Operaciones, Álgebra, Geometría, Medición, y Análisis de Datos y

Probabilidad), y cinco estándares sobre procesos (Resolución de Problemas, Razonamiento y Prueba, Comunicación, Conexiones, y Representación) establece lo que un estudiante debiera conocer y saber hacer en matemáticas, justo antes de ingresar al nivel universitario. Si bien por razones de presentación estos diez estándares se desarrollan cada uno por separado, una observación que reiteradamente se hace es que en el aprendizaje de las matemáticas, tanto contenidos como procesos son inseparables y se manifiestan completamente interrelacionados.

Hay opiniones (Steen, 1990; Santos, 2002; Doerr y English, 2003; Schoenfeld, 1992; Mason et al., 1982) en el sentido de que existen aspectos importantes del pensamiento matemático que no aparecen en el currículo matemático con el énfasis que debiera, aún en los *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000).

Steen (1990), al hacer un breve análisis del currículo tradicional de matemáticas, señala que hay ideas valiosas para las matemáticas a las cuales no se les da un papel relevante. Entre las ideas que menciona y ejemplifica están los siguientes procesos que reconoce como capacidades que deben desarrollarse para *hacer* matemáticas: Construir un modelo, Experimentar, Clasificar, Visualizar.

En el mismo sentido Santos (2002), sugiere o propone como ideas generales que orienten el currículo a las siguientes: ordenar, estimar, ponderar, calcular, medir, representar. Estas últimas son como los *procesos* que consideramos propiamente matemáticos.

Schoenfeld (1992) ha documentado otras competencias importantes para la resolución de problemas y que podemos considerar como “más elementales”. De acuerdo con Schoenfeld (1992) el tiempo que emplea una persona cuando resuelve un problema, en acciones como leer, analizar, explorar, planificar, implementar y verificar, es muy distinto según se sea experto o novato.

El experto pasa más de la mitad del tiempo otorgado en tratar de comprender el problema. El experto antes de empezar en algún sentido específico, analiza y explora mucho (de forma estructurada); no pasa a la implementación hasta estar seguro de que está avanzando en la dirección correcta. En cambio, los novatos leen el problema y rápidamente eligen un enfoque para tratarlo y comenzar en esa dirección. Siguen trabajando en ese sentido, a pesar de las claras evidencias de que no están progresando, durante el tiempo

destinado para el problema. Como se puede observar, **leer, analizar, explorar, planificar, implementar** y **verificar** son competencias centrales en la resolución de problemas matemáticos.

Para abundar un poco más en otras competencias importantes para el pensar matemático, Mason et al. (1982), destacan dos estrategias que inducen a usar a los alumnos: **particularizar** (elegir valores específicos) y **generalizar** (pasar a cualquier valor). A lo anterior se añade, conjeturar, establecer sub-objetivos, suponer que hay una solución y decidir qué propiedades debe tener, analizar casos extremos, explotar la simetría, trabajar hacia atrás (para empezar a resolver un problema el interés se fija, primordialmente, en el objetivo a lograr en lugar de fijar la atención en los datos que se proporcionan) (Wickelgren, 1974), trabajar hacia adelante, resolver problemas de más de una manera y crear los propios problemas, son competencias importantes en la resolución de problemas.

Con respecto a la relación entre *procesos* y *currículo*, es posible preguntarse: ¿En qué medida debieran aparecer los distintos procesos en el currículo de matemáticas? ¿Cómo integrar los distintos procesos? ¿Cómo integrar los procesos con los *contenidos matemáticos* en una estructura curricular? ¿Cuáles procesos debieran estar presentes en todos los niveles educativos de matemáticas? Diversos enfoques se han propuesto para organizar el currículo alrededor de actividades relevantes, en oposición al currículo basado en contenidos. Como hemos visto la NCTM (2000) propone ‘procesos estándares’ que no son otra cosa que las formas de adquirir y usar conocimientos en forma de contenidos. Bishop (1991), señala seis actividades que son significativas para el desarrollo de ideas matemáticas en cualquier cultura: contar, localizar, medir, diseñar, jugar y explicar. Goldenberg (1996) propone ‘hábitos de la mente’ como organizadores del curriculum -por ejemplo, la tendencia a describir relaciones y procesos o buscar invariantes.

Para la última pregunta se infiere la siguiente respuesta: si los *procesos* tienen que ver con el *hacer* matemáticas, y se está de acuerdo en que lo deseable en cualquier nivel educativo es que el alumno “haga matemáticas”, entonces debieran estar los que menciona Steen y los que enlista Santos, y otros más. Por ejemplo, habría que mencionar algunos procesos básicos como son generalizar, particularizar, abstraer, analizar, comparar, deducir, pues como dice Steen (1990):

... *Los conceptos y los procesos son, respectivamente, los sustantivos y los verbos del lenguaje de la matemática.* Steen (1990: 8)

En este estudio interesan particularmente las ideas de ponderación, cuantificación de información cualitativa, ordenar, clasificar, organizar, seleccionar, y transformar conjuntos completos de datos en lugar de datos puntuales aislados, en virtud de que se encuentran entre los procesos que se necesitan para matematizar situaciones realistas y que con frecuencia van más allá de lo que generalmente se enseña en las matemáticas escolares (Santos, 2002; Doerr y English, 2003).

### La resolución de problemas dentro de la perspectiva de los “*Modelos y la modelación*”.

Cada vez más se reconoce que las matemáticas se aprenden cuando se resuelven problemas. El aprendizaje empieza con problemas (Schoenfeld, 1992; Hiebert, Carpenter, Fennema, Fuson, Wearne, Murray, Olivier y Human, 1997). Los problemas estimulan la actividad matemática y proporcionan el contexto para trabajar relaciones entre ideas matemáticas.

En este estudio se acepta a la resolución de problemas, desde la perspectiva teórica de los *Modelos y la modelación* (Lesh y Lamon, 1992; Lesh y Doerr, 2000), como una propuesta para promover el aprendizaje de las matemáticas. Según esta perspectiva, un individuo da sentido a sus experiencias basándose en los modelos que previamente ha construido y en el aprendizaje de las matemáticas se construyen modelos donde se resaltan los recursos y las estrategias del quehacer de la disciplina.

Un elemento central de la perspectiva de los *Modelos y la modelación* es el tipo de *tarea* que enfrentan los estudiantes en el salón de clases. A tales tareas se les llama “*tareas de promoción de modelos*” o también “*problemas de promoción de modelos*” (models eliciting tasks) y a las actividades que realizan los alumnos cuando se involucran en su resolución se les llama “*actividades de promoción de modelos*”. Las “*tareas de promoción de modelos*” son tan importantes que a la perspectiva de los *Modelos y la modelación* también se le conoce con el nombre de “*perspectiva de promoción de modelos*”.

Las “*tareas de promoción de modelos*” se diseñan (Lesh y Lamon, 1992) para que las actividades que se realicen en su resolución se enfoquen en la realización de representaciones simbólicas, gráficas y numéricas y en la descripción de situaciones que sean significativas para los estudiantes.

El *proceso de resolución* es lo que interesa como producto final cuando se resuelven “*tareas de promoción de modelos*”. Se espera que el producto revele información significativa acerca del proceso de razonamiento que lo produjo.

La característica esencial de las “*actividades de promoción de modelos*” es lo que demandan de los estudiantes que las realizan: demandan desarrollar, extender y/o revisar un modelo que es útil para alcanzar algún propósito específico (Zawojewski y Lesh, 2003). A veces a este propósito se le llama el “*fin a la vista*” del problema y por tal razón a tales problemas también se les conoce con el nombre de “*problemas de fin a la vista*” (Ends-in-View Problems). El “*fin a la vista*” es lo que permite a la persona que resuelve el problema saber cuando ha producido un constructo (por ejemplo, un modelo, una descripción, una explicación) que sea “bastante bueno”.

Entre los problemas de “*fin a la vista*” que se consideran importantes para la vida actual, y que son la clase de problemas que se utilizan en el presente estudio, están los relacionados con la *toma de decisiones* y con la realización de *evaluaciones* (Lesh y Lamon, 1992; Doerr y English, 2003; English y Lesh, 2003)

### Problemas de toma de decisiones y de construcción y/o aplicación de sistemas de evaluación.

La toma de decisiones y la evaluación son procesos que a veces aparecen juntos (toda decisión presupone una evaluación, pero puede haber evaluación sin decisión). Generalmente se acepta que una de las funciones de la evaluación es para la toma de decisiones. Es posible afirmar que “casi siempre” una decisión va precedida de una evaluación, así sea ésta algo sumamente simple y realizada casi de manera “intuitiva”. En este sentido es posible pensar a la evaluación como parte integrante de la toma de decisiones.

El proceso que se sigue en cualquier toma de decisiones pasa por fases que básicamente se reducen a la necesidad de responder a estas cinco preguntas: ¿Qué hay que decidir? ¿Qué opciones se tienen? ¿Cuáles son las ventajas y desventajas que suponen cada una de ellas? ¿Cuál es la mejor opción de todas las posibles? ¿Qué medidas se deben tomar para ponerla en marcha?

La *evaluación* es el enjuiciamiento sistemático de la valía o el mérito de un objeto (Joint Committee on Standards for Educational Evaluation, 1981). La evaluación desempeña un papel. Y si sirve al progreso y se utiliza para identificar los puntos débiles y los fuertes, y para tender hacia una mejora, puede ser una fuerza positiva.

Aunque la evaluación es tan antigua como la civilización, sólo desde hace muy poco existe como práctica formal. A partir de 1960 se han realizado esfuerzos serios para recopilar la historia de la especialidad, teorizar sobre la práctica evaluativa y planificar estudios que resulten adecuadamente descriptivos y se basen en hipótesis apropiadas (Madaus, Scriven y Stufflebeam, 1983).

Todo el mundo recurre a evaluaciones cuando tiene necesidad de opinar, emplear, aceptar o comprar cosas; pero en general las evaluaciones que realizamos son de naturaleza “informal” y nuestras evaluaciones resultan poco o nada sistemáticas, y en modo alguno convincentes, ni siquiera para nosotros mismos. En muchos casos preferiríamos que nuestras conclusiones tuvieran más relevancia, rigor y objetividad.

Tanto para la toma de decisiones como para la realización de evaluaciones se usan numerosas habilidades que se aprenden (o debieran) en la escuela. La más importante de todas, y que pocas veces se menciona, es la habilidad de transformar en problema matemático un problema que aparezca en un contexto no puramente matemático, resolver el problema matemático, y después explicar las implicaciones de su solución para el problema original surgido en el contexto no matemático (en resumen: habilidad de modelación).

Resolver problemas acerca de toma de decisiones y de evaluaciones involucra el *desarrollo de modelos* que requieren de la *ponderación* y el *tratamiento de datos* (Doerr y English, 2003.). Se entiende por “ponderación” el *proceso por el cual se asigna un valor o grado de importancia a un conjunto de opciones*. De inicio es pertinente reconocer que ante una *situación problemática*, el estudiante tendrá que acceder a una serie de recursos y procesos matemáticos que le permitan valorar y matematizar las ideas de ponderación en el proceso de resolución del problema.

Por *datos* se entiende: contenidos matemáticos en *contextos no matemáticos* (Moore, 1990). Por *tratamiento de datos* o *manejo de datos* se entiende los *conocimientos matemáticos* y los *procesos* necesarios para darle un sentido a volúmenes grandes de datos,

cuantificar información cualitativa, identificar patrones y tendencias, producir argumentos convincentes apoyados de datos adecuados, y evaluar los productos generados por los “pares”. El *manejo de datos* es “un enfoque para tratar con datos, un marco de la mente, un ambiente dentro del cual podemos explorar datos” (Shaughnessy, Garfield, y Greer, 1996-b: 205).

### El trabajo en grupos pequeños.

Una característica importante de las “*actividades de promoción de modelos*” es que en el salón de clases se llevan a cabo trabajando en *grupos pequeños de alumnos* (Zawojewski, Lesh y English, 2003).

La resolución de problemas en grupos pequeños con *problemas de promoción de modelos* requiere que los estudiantes trabajen cooperativamente, y que lleven a cabo múltiples *ciclos de interpretación y reinterpretación* de sus propuestas de solución.

El proceso de desarrollo de su modelo matemático, que resulta de estos ciclos, puede revelarse cuando los estudiantes externalicen su pensamiento al comunicarse con los otros integrantes del grupo pequeño mientras trabajan cooperativamente.

La comunicación es necesaria cuando se trabaja en una tarea que requiere el esfuerzo del grupo para tratar con la complejidad de la tarea.

Es de fundamental importancia proporcionar a los estudiantes un ambiente en donde grupos pequeños de estudiantes tengan la oportunidad de interactuar de manera estrecha, y en forma sostenida, en tanto trabajan en un problema complejo.



## El Problema

En este estudio existe interés en documentar, en forma aproximada y desde la perspectiva de los modelos y la modelación, las competencias matemáticas que se promueven cuando estudiantes de bachillerato, sin recibir una instrucción previa para tal fin, enfrentan en grupos pequeños, y en condiciones naturales del salón de clases, tareas consistentes en situaciones problemáticas acerca de *toma de decisiones* y de construir y/o aplicar *sistemas de evaluación*, que demandan del alumno procesos y contenidos que han recibido una escasa atención en el currículo tradicional de matemáticas elementales y en la investigación en educación matemática.

El siguiente problema es un ejemplo típico de situaciones tratadas:

La niñera de *Karem*...una niña rubia y traviesa

La Sra. Elizabeth y su esposo de 28 años de edad, necesitan una persona que cuide y atienda, por las mañanas, a su pequeña *Karem* que tiene 2 años de edad, es rubia y muy traviesa. La Agencia de Colocaciones "*El Mejor Trabajador*" le ofrece cuatro candidatos con algunas características que se presentan en la siguiente tabla

Persona	Edad (años)	Estudios	Experiencia (años)	Disponibilidad De tiempo	Estado Civil	Presentación	Puntualidad
Alicia	30	Bach.	3	SPH	Casada	E	MB
Betty	20	C. Técnica	1	SPH	Casada	E	E
Carolina	24	Enfermería	2	SPH	Soltera	MB	MB
Dorotea	45	Secretaria	1	Mañanas	Separada	E	R

En donde: Bach.: Bachillerato; C. Técnica: Carrera Técnica. SPH: Sin Problema de Horario. E: Excelente; MB: Muy Bien; R: Regular.

¡Ayúdenlos a elegir!. Envíenles una carta en donde les sugieran cual es, desde su punto de vista el mejor candidato. Proporcionen suficientes razones que puedan convencerlos de su propuesta.

Este es un problema de toma de decisiones: hay que decidir quién, de las cuatro personas que se proponen, es la "mejor" candidata para cuidar a *Karem*. De cada una de las cuatro candidatas (Alicia, Betty, Carolina y Dorotea) se proporciona información acerca de siete características personales, determinadas de alguna manera: edad, estudios, experiencia en el cuidado de niños, disponibilidad de tiempo, estado civil, presentación y puntualidad. Con base en esta información que se proporciona hay que decidir por un candidato.

Quien vaya a tomar la decisión deberá considerar, sopesar, valorar, *ponderar*, todas y cada una de las siete características para los cuatro candidatos. Es muy probable que el peso o grado de importancia que se asigne a, digamos, la puntualidad, no sea la misma para distintas personas que hagan la elección: para algunos, determinadas características tendrán

más peso que otras, y algunas tal vez ni importen. Tal vez la Sra. Elizabeth, su esposo o la propia Karem, valoren de manera distinta la edad, estudios, experiencia, etc. Para alguien el estado civil de la niñera carecerá de importancia y para otra persona posiblemente sea muy importante.

¿Qué tan importantes son todas y cada una de las siete cualidades en el trabajo de cuidar a Karem?, ¿Cuál o cuáles, de las siete cualidades, son más o menos importantes?, ¿Cómo decidir, con base en la información que se proporciona, cuál es el mejor candidato?, ¿Habrá un candidato que sea “claramente mejor” que los otros?

### Importancia del Estudio

¿Qué procesos, de los enumerados por Santos (2002), han sido objeto de estudio por la Educación Matemática? Tal vez se ordenen de mayor a menor atención recibida como objeto de estudio: calcular, medir, representar, estimar, ordenar, ponderar.

Sowder (1992) hace una revisión de la investigación realizada acerca de la *estimación* y el *sentido numérico*.

Las *representaciones* se identifican como un elemento clave en el aprendizaje de las matemáticas.

La *medición*, como temática y como uno de los hilos conductores en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, tiene ahora un papel central, sobre todo a partir de su inclusión como estándar en los *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000). Hay muchos aspectos por investigar con respecto a la medición no solamente en el ámbito propio de las matemáticas, sino en relación con otras áreas del conocimiento.

La *ponderación* aparece mencionada (Lesh y Lamon, 1992) con relación a la información cualitativa, pero no como objeto de investigación.

Por otro lado, la investigación de la resolución de problemas relacionados con la toma de decisiones es escasa, lo fundamental lo ha hecho el grupo encabezado por R. Lesh (Lesh y Lamon, 1992; Lesh y Doerr, 2000; Lesh y Doerr, 2003).

La investigación de los aspectos matemáticos, relacionados con la educación matemática, de la construcción y/o aplicación de instrumentos de evaluación se puede decir que es inexistente.

## Cuestiones de Indagación

Tomando en cuenta lo expuesto anteriormente, en este estudio interesa analizar el desempeño que exhiben los estudiantes al trabajar series de actividades que demandan el uso de recursos relacionados con la toma de decisiones y la realización de evaluaciones. Así, las preguntas que guiaron la indagación incluyen:

1. ¿Qué competencias matemáticas muestran alumnos de bachillerato cuando toman una decisión que requiere de ordenamiento de opciones mediante el tratamiento de datos numéricos contenidos en tablas?
2. ¿Qué recursos básicos exhiben los estudiantes al resolver actividades relacionadas con la toma de decisiones?
3. ¿Qué recursos básicos exhiben los estudiantes al resolver actividades relacionadas con la construcción y/o aplicación instrumentos de evaluación?
4. ¿Cuál es el desarrollo del pensamiento del estudiante acerca del ordenamiento, la selección y el tratamiento de información cuando desarrollan modelos que podrían usarse en la toma de decisiones?
5. ¿Cuál es el desarrollo del pensamiento del estudiante acerca del ordenamiento, la selección y el tratamiento de información cuando desarrollan modelos que podrían usarse para realizar evaluaciones?
6. ¿Hasta qué punto se desarrollan modelos como resultado de abordar una serie de tareas de modelación en diferentes contextos?

## CAPÍTULO 2

# REVISIÓN DE LA LITERATURA

### INTRODUCCIÓN

En el presente estudio se documenta y analiza, desde la perspectiva de los *Modelos* y la *modelación*, la forma en la cual grupos pequeños (2, 3 ó 4 alumnos) de estudiantes de bachillerato abordan problemas que involucran la toma de decisiones y la construcción de un sistema de evaluación.

Los cinco elementos fundamentales que se integran en el *problema* que se estudia en este trabajo son los siguientes: 1) La resolución de problemas como actividad central en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, 2) la toma de decisiones y la evaluación que constituyen *fin visible* del tipo de problemas que resuelven los alumnos, 3) el proceso de ponderación y el tratamiento de datos como los contenidos matemáticos centrales que aparecen en el tipo de problemas que se abordan, 4) el trabajo en grupos pequeños como la forma de organizar la actividad de resolución de problemas que realizan los alumnos en el salón de clases, y como paraguas de todo ello, 5) la perspectiva teórica de los *Modelos* y la *modelación*.

En este Capítulo se revisa la literatura relevante a la investigación y en principio cubre los cinco apartados arriba mencionados, aunque es pertinente hacer el siguiente señalamiento:

La perspectiva teórica de los *Modelos* y la *modelación* intenta ser un marco teórico para la problemática de la educación matemática, aunque hay que tener presente que los distintos aspectos que aborda han sido tratados con otros enfoques teóricos y cuyos resultados no es posible dejar de considerar.

Por la razón anterior se hará una breve mención de algunos resultados que se han obtenido desde otras posiciones teóricas, en las temáticas referentes a la resolución de problemas, el trabajo en grupos pequeños, la toma de decisiones, la evaluación, la Estadística y el tratamiento de datos.

Con la aclaración anterior, este capítulo está formado de cuatro apartados en donde se revisa la literatura pertinente a los siguientes aspectos:

- La resolución de problemas.
- El trabajo en grupos pequeños.
- La perspectiva teórica de los *Modelos* y la *modelación*.
- La toma de decisiones.
- La evaluación.
- La estadística y el tratamiento de datos.
- Algunas investigaciones, en la línea de los *Modelos* y la *modelación*, relacionadas con el objetivo del presente estudio.

Tal vez sea necesario señalar lo desigual en el desarrollo, visto incluso en el número de páginas empleadas, de cada uno de los temas anteriores. La razón fundamental fue la disponibilidad de información. Por ejemplo, la presentación del tema de la evaluación es en extremo limitada. La evaluación es tema de enseñanza a nivel de licenciatura en algunas carreras, pero no se encontró información relacionada con los niveles básicos, y menos como objeto de investigación educativa. Naturalmente que existe una extensa literatura que trata a la evaluación en general y aplicada a problemáticas específicas, por ejemplo al área educativa, pero es casi inexistente en programas educativos elementales, aún en aquellos orientados al desarrollo del *pensamiento crítico* (Boisvert, 1999).

## La Resolución de Problemas

La *resolución de problemas* y su relación con la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, ha sido uno de los temas que más ha merecido la atención de la investigación en educación matemática (Charles y Silver, 1988; Lester y Kehle, 2003; Krulik y Reys, 1980; Lester, 1980; Lester, 1994; Silver, 1985; Schoenfeld, 1992). La *resolución de problemas* tiene que ver con la propia naturaleza de las matemáticas y del pensar matemático; una visión matemática del mundo, de la realidad, de la vida, sin que ésta necesariamente tenga que ser la que tiene un matemático profesional en activo.

Cézanne, en una carta a Émile bernard (Doran, 1980) afirma:

Trate la naturaleza a través del cilindro, de la esfera, del cono, todo ello situado en perspectiva, o sea que cada lado de un objeto, de un plano, se dirija hacia un punto central.  
- Las líneas paralelas en el horizonte dan la extensión, o sea una sección de la naturaleza  
...(Doran, 1980: p. 63).

Si recordamos que Cézanne reducía estructuras naturales complejas, como lo es un paisaje a una serie de planos superpuestos, parecería que hacía una lectura del entorno físico a través de elementos geométricos elementales.

¿De qué manera un estudiante puede desarrollar su pensamiento de forma que llegue a percibir estructuras, modelos, patrones y sea consciente de que tales estructuras tienen propiedades que se pueden pensar ajenas de la situación material, concreta, “real”, donde se encuentra incorporado? ¿Cómo conducir a un carpintero a percibir triángulos rectángulos y que vea que éstos tienen la propiedad que establece el teorema de Pitágoras, al margen de estar, día tras día, año tras año, trabajando con formas geométricas de madera y construyendo formas geométricas materiales con ellas? Porque tal es la esencia de lo que se acepta como pensamiento matemático.

Mientras un estudiante resuelva uno, dos, tres, cuatro, etc. situaciones problemáticas isomorfas, desde el punto de vista matemático, sin intuir, captar, racionalizar, “aprehender” la estructura que subyace, y sin plantearse preguntas acerca de ella, y sin que la haga objeto de reflexión y estudio, continuará estando “casi” al nivel matemático del carpintero que resuelve problema tras problema utilizando una fórmula transmitida a través del tiempo.

¿Qué problemas, en qué ambiente, con qué forma de trabajo, con qué más además de esto, deberá enfrentar la tarea un estudiante, de forma tal que vislumbre números,

formas, conceptos, procesos, establezca conexiones, comunique resultados, dudas, conjeturas; justifique procedimientos, decisiones, resultados y demuestre relaciones?

La *resolución de problemas*, como tema de investigación en la educación matemática, ha encarado esta problemática: lo escueto de las líneas que siguen no hacen justicia al trabajo, resultados, fortalezas, debilidades e incógnitas, de la *resolución de problemas*.

### El modelo de Alan Schoenfeld.

De acuerdo con Schoenfeld (1985: 74), un *problema* es una situación en la cual el sujeto que desea resolverlo no tiene a la mano los medios inmediatos para encontrar la solución.

El proceso que realice el sujeto para tener los medios, que al utilizarlos de cierta forma lo lleven a la solución, es la resolución del problema. Un aspecto interesante de ello es concebir a la propia resolución de un problema como vehículo para apropiarse o construir los “*medios*” al momento en que la reflexión se centra en la propia *resolución del problema*. Esta concepción de *problema* es la que sustenta la creencia sobre la *resolución de problemas* para aprehender matemáticas, porque a través de tal proceso se puede recapitular y sistematizar lo que se sabe y lo que no se sabe, elaborar conceptos, procesos, representaciones, conexiones, etc.

Schoenfeld (1985, 1992) construyó un modelo cuya intención es aproximarse a entender la forma en la cual un sujeto que enfrenta una situación problemática, y la desea encarar, elabora los medios para poder resolverla. Según la visión de Schoenfeld lo que entra en juego en el proceso de resolución de un problema son *recursos*, *heurísticas* (Maneras de buscar la solución de un problema mediante métodos no rigurosos, como por tanteo, reglas empíricas, etc. (Real Academia Española, 2001)), *control*, y el *sistema de creencias*.

Los *recursos* son el cuerpo de conocimientos que un individuo es capaz de concentrar en una situación matemática particular. Son los conocimientos de hechos, procedimientos, y proposicionales que el individuo posee. Acá la frase clave es “capaz de concentrar”; necesitamos saber lo que un individuo podría haber sido capaz de hacer, para entender lo que el individuo hizo.

Las *heurísticas* son las reglas empíricas para la resolución efectiva de problemas. Son estrategias bastante amplias para realizar progresos en problemas difíciles o no familiares. Ejemplos de estrategias son explotar las analogías o trabajar hacia atrás. A pesar de que la

comunidad de educadores matemáticos generalmente ha aceptado la idea de que las estrategias son útiles y dignas de enseñarse, hasta recientemente ha habido poca comprensión de su complejidad y poca evidencia de que los estudiantes pueden aprender a usar bien tales estrategias.

El *control* trata con el problema de la administración y asignación de recursos durante los intentos de resolver el problema. En este contexto el control se reserva para las decisiones importantes con respecto a la planeación, monitoreo, y evaluación de soluciones en línea, y cosas por el estilo. Con buen control, los que resuelven problemas pueden explotar al máximo sus recursos y resolver problemas bastante difíciles con cierta eficiencia. Careciendo de control, los que resuelven problemas pueden mal gastar sus recursos y fallar en resolver problemas dentro de su dominio de manera fácil.

El *sistema de creencias* son nuestra propia visión del mundo de las matemáticas, la perspectiva con la cual enfocamos las matemáticas y las tareas matemáticas. Nuestras creencias acerca de las matemáticas pueden determinar la forma que uno escoge para aproximarse a un problema, qué técnicas se usaron y cuáles se evitaron, qué tan duro y prolongado es el trabajo que se realiza en él, y así por el estilo. Las creencias establecen el contexto dentro del cual operan los recursos, las heurísticas y el control. (Schoenfeld, 1985; pp. 44-45).

Posteriormente Schoenfeld (1992), menciona a los *afectos* junto a las *creencias* y adiciona la categoría de las *prácticas*, refiriéndose a las experiencias en las matemáticas escolares que tienen los estudiantes. Reconoce que se sabe poco acerca de las interacciones entre las categorías, y menos aún acerca de cómo llegan a ser coherentes - en particular, cómo un aprendizaje individual en estas categorías se ajusta entre sí para darle al individuo un sentido de la empresa matemática - su “punto de vista” matemático. La postura de Schoenfeld sobre el tema es la solución basada en el *proceso de enculturación*; según él:

“...la gente desarrolla su sentido de cualquier tarea seria - sean sus creencias religiosas, su actitud hacia la música, sus identidades como profesionistas o trabajadores, su sentido de sí mismos como lectores, (o no lectores), o su sentido de las matemáticas, - de las interacciones con los otros. Y si deseamos entender cómo desarrolla la gente su perspectiva matemática, debemos mirar al problema en términos de las comunidades matemáticas en las cuales los estudiantes viven y las prácticas que subyacen en estas comunidades.....” (Schoenfeld 1992: 346)

## Los problemas matemáticos como tarea.

*La tarea* - trabajo que debe realizarse en tiempo limitado- es un aspecto central de la actividad que tiene lugar en el salón de clases.

Desde la perspectiva en que se encuadra este trabajo una tarea es la *resolución de problemas matemáticos*.



La resolución de algún *problema matemático* es fundamental en: el trabajo individual, el trabajo en grupos pequeños, la discusión de enfoques o visiones, la generación de ideas novedosas, la comunicación, el surgimiento de más preguntas, etc.

Lo anterior lleva a considerar, aunque sea con brevedad, el *problema matemático* como objeto de investigación en la educación matemática. Sin pretender hacer una revisión exhaustiva de este aspecto de la instrucción matemática, hay que tener presente que es un aspecto que merece, y ha merecido, atención por parte de los investigadores de la educación matemática y que no se puede obviar en un trabajo que tenga que ver con la resolución de problemas matemáticos.

Para Schroeder y Lester (1989) en la enseñanza *vía* resolución de problemas éstos son valorados no sólo como un objetivo para el aprendizaje de las matemáticas, sino también, como un medio primario para hacer matemáticas. La enseñanza de un tópico matemático comienza con una situación problemática que envuelve aspectos clave para tal tema, y las técnicas matemáticas son desarrolladas como respuesta a problemas razonables.

Santos (1998a, 1998b, 1998c, 2000a, 2000b, 2003) ha investigado sistemáticamente el papel de los problemas en el desarrollo del pensamiento matemático, y entre las preguntas que han guiado sus indagaciones se pueden enumerar las siguientes: ¿Qué tipo de actividades de aprendizaje tienden a promover valores matemáticos durante la implementación de la instrucción *vía* resolución de problemas? ¿Qué clase de tareas ayudan a los estudiantes a involucrarse en discusiones matemáticas en el salón de clases? ¿Qué tipo de problemas matemáticos ayudan a los estudiantes a aprender y a aplicar diversas estrategias durante sus experiencias de aprendizaje? ¿Qué tareas o problemas matemáticos juegan un papel importante en el aprendizaje matemático de los estudiantes? ¿Qué recursos matemáticos y didácticos son importantes en el proceso de diseñar problemas o actividades de aprendizaje? ¿Existen principios que puedan guiar el diseño o la formulación de problemas? ¿Cómo transformar los problemas y ejercicios rutinarios que emplean los maestros en sus prácticas cotidianas, en actividades de resolución de problemas?

De manera por demás esquemática pareciera ser que la idea central es contar con problemas que en potencia, si se satisfacen otras condiciones, promuevan el pensamiento matemático de los estudiantes. Ello implica se favorezca o propicie el razonamiento, la comunicación, las representaciones, la propia resolución de problemas con sus estrategias,

sus diversas formas de resolución, conceptos, procedimientos y métodos matemáticos, a la vez de que se propicia un sistema de creencias y valores hacia el saber matemático, como son la confianza en lo que se sabe y la paciencia para no desesperarse porque el problema no “salió” en hora y media.

En el *High School Assessment Package 1* perteneciente al Balanced Assessment for the Mathematics Curriculum (1999), se toman en consideración para cada tarea cuatro dimensiones: Contenido matemático, Procesos matemáticos, Tipo de tareas, Circunstancias de realización. Por su importancia a continuación se reproduce en extenso las distintas dimensiones:

#### **Dimensión del Contenido Matemático**

- El **Contenido Matemático** incluirá algunos de los siguientes:

**Número y Cantidad** incluyendo: conceptos y representación; cálculos; estimación y medición; teoría de números y propiedades generales de los números.

**Patrones, Funciones, y Álgebra** incluyendo: patrones y generalización; relaciones funcionales (incluyendo razón y proporción); representaciones gráfica y tabular; representación simbólica; formación y resolución de relaciones.

**Geometría, Forma, y Espacio** incluyendo: forma, propiedades de las formas, relaciones; representación espacial, visualización, y construcción; localización y movimiento; transformación y simetría; trigonometría.

**Manejo de Datos, Estadística y Probabilidad** incluyendo: recolección, representación e interpretación de datos; modelos probabilísticos - experimental y teórica; simulación.

**Otras Matemáticas** incluyendo: matemáticas discretas, incluyendo combinatoria; apuntalamiento de cálculo; estructuras matemáticas.

#### **Dimensión del Proceso Matemático**

- **Fases** de la resolución de problemas, el razonamiento y la comunicación incluyendo, como categorías amplias, algunas de las siguientes: modelación y formulación; transformación y manipulación; inferir y sacar conclusiones; checar y evaluar; reportar.

#### **Dimensiones del Tipo de Tareas**

- El **Tipo de Tareas** será alguna de las siguientes: investigación abierta; problema no rutinario; diseño; planeación; evaluación y recomendación; revisión y crítica; representación de información; ejercicio técnico; definición de conceptos.
- **No-rutinariedad** en: contexto; aspectos o resultados matemáticos; conexiones matemáticas.
- **Apertura**: puede tener un final abierto con preguntas abiertas; semiabierto.
- El **Tipo de Objetivo** es uno de los siguientes: matemáticas puras; aplicación ilustrativa de las matemáticas; potencia aplicada en la situación práctica.
- **Duración del Razonamiento** es el tiempo que se espera para la parte más larga de la tarea. (es una indicación de la cantidad de “scaffolding” - la orientación detallada paso a paso que el *prompt* puede proporcionar.)

### Dimensiones de las Circunstancias de Realización

- **Duración de la Tarea:** variando a partir de tareas cortas (5-15 minutos), a través de tareas largas (45-60 minutos), hasta tareas amplias (varios días o varias semanas).
- **Formas de Presentación:** escrita; oral; video; computadora.
- **Formas de Trabajo** en la tarea: individual; grupal; mixta.
- **Formas de Respuesta** por el alumno: escrita; construcción; hablada; programada; realización (performed). (Balanced Assessment for the Mathematics Currículo, 1999: vii)

### El trabajo en grupos pequeños.

Actualmente se reconoce el mérito del trabajo colectivo -trabajo en grupos pequeños y trabajo de todo el grupo- en el salón de clases (NCTM, 2000; Artzt y Newman, 1990) en el aprendizaje de las matemáticas. Según Good, Mulryan y McCaslin (1992), de los diferentes usos potenciales que tiene la instrucción mediante grupos pequeños tal vez su mayor fortaleza está en ayudar a los estudiantes a desarrollar destrezas y disposiciones para la resolución de problemas. Su justificación radica en la interacción social entre individuos como uno de los componentes del aprendizaje. Para avalar esta creencia uno de los referentes obligados es el trabajo de Vygotsky (1896-1934).

Good, Mulryan y McCaslin (1992) y Slavin (1990) han realizado revisiones de la investigación en problemas de enseñanza-aprendizaje y su relación con el trabajo en pequeños grupos. La investigación para las matemáticas del bachillerato es escasa. La revisión de Slavin incluye sesenta y ocho comparaciones, treinta y tres tratan de matemáticas y de éstas sólo cuatro tratan del nivel de bachillerato.

Uno de los aspectos que la investigación educativa ha considerado es el aprendizaje individual, personal, de los integrantes del grupo pequeño como resultado de la interacción entre los diversos elementos del grupo, la tarea, los recursos con que contaron para realizarla y el ambiente en que tuvo lugar la actividad. A diferencia de ello, en estas páginas hay prioridad en el producto que resulta de la actividad del grupo pequeño y de las características de la actividad. En otras palabras, en el resultado del trabajo y en las cualidades del mismo. La atención está centrada en lo que el grupo produce, y cómo lo produce, al margen de logros personales de los integrantes del grupo (Zawojewski, Lesh, y English, 2003).

En las situaciones de trabajo en grupo, los estudiantes se enfrentan con dos clases de problemas: deben resolver un problema matemático, pero deben lograr esto a través de una

actividad social. Así, en forma adicional ellos están confrontados con un problema social. Los estudiantes deben resolver conjuntamente un problema y estar de acuerdo en una solución común. El problema planteado a ellos no depende del hecho de que la solución deba ser encontrada por un estudiante solo o por un grupo de estudiantes. Los roles respectivos de los compañeros no están determinados por la situación; un estudiante puede estar de acuerdo con cada cosa que sea propuesta por su compañero o compañera o puede estar en contra sistemáticamente a las propuestas de sus compañeros. La “devolución” del problema matemático no está ligado a la organización social a priori de la situación, sino que el desarrollo de la situación se considera como dependiente de los compañeros (Laborde, 1994).

Una parte de la literatura sobre el trabajo en grupos pequeños señala algunos efectos positivos de tal trabajo (Coulibaly, 1987; Grisvard y Leonard, 1983). La solución producida por el grupo generalmente es mejor que la producida por un individuo (Zawojewski, et al. op cit., Middleton, Lesh, y Heger, 2003). De acuerdo a Zawojewski (2003), la interacción entre pares tiene el potencial para amplificar el interés y la motivación de los estudiantes involucrados, incrementando el potencial de la potencia matemática, esto es el impulso grupal con frecuencia recaptura el interés individual.

La perseverancia, un aspecto para el éxito en las situaciones de trabajo real, puede mantenerse en los ambientes grupales mientras que en los individuos puede decaer. ¿Cuál es el papel de la interacción social en el proceso de resolución de problemas matemáticos? ¿Por qué algunos trabajos en grupos pequeños son más exitosos que otros? Laborde (1994) distingue dos clases de procesos involucrados en el trabajo en grupo: los procesos conflictivos y los procesos cooperativos entre los compañeros.

El papel del conflicto cognitivo aparece en muchos estudios como la posible causa de muchos resultados positivos en la construcción de la solución de un problema (Mugny, 1985; Laborde, 1982). De acuerdo a esta teoría, la contradicción proveniente de dos puntos de vista opuestos es percibida más fácilmente y no puede ser refutada tan fácilmente como la contradicción que proviene de los hechos para un individuo. Este último puede que no perciba la contradicción o que no la tome en cuenta cuando se mueva entre dos puntos de vista opuestos y finalmente escoja uno de ellos.

Para dominar una tarea, los estudiantes que trabajan en conjunto están “obligados” a sobreponerse al conflicto. Cuando intenten resolver la contradicción, pueden dirigirse a coordinar los dos puntos de vista en un tercero que salve ambos puntos de vista iniciales y que corresponda a un nivel de conocimiento más alto.

Al organizarse ambientes de trabajo en grupos pequeños con estudiantes resolviendo problemas matemáticos, se ha observado la construcción de nuevas soluciones de un nivel conceptual más alto y la superación del conflicto entre los compañeros (Coulibaly, 1987; Grisvard y Leonard, 1983).

Sin embargo, una interacción social podría conducir a un conflicto, o un conflicto puede ser que no aparezca en todos los casos en que podría aparecer y los conflictos no necesariamente se resuelven por la construcción de un conocimiento nuevo (Laborde 1994; Grisvard y Leonard, 1983).

Los resultados de tales contradicciones sociales dependen de varios factores, algunos de los cuales pueden ser más o menos controlados, como la selección de las variables de tarea de los problemas planteados a los estudiantes.

El efecto de otras variables ligadas a los estudiantes involucrados en la interacción es más incierto: una negociación social entre dos individuos no está predeterminada, y toda la experiencia pasada de un compañero puede jugar un papel en el resultado a que se llegue (Laborde, 1994; Hoyles; Healy, y Pozzi, 1993).

Los conflictos no siempre son resueltos por argumentos racionales sino también por argumentos de autoridad. Entre compañeros se pueden encontrar arreglos que son externos al problema matemático. Y si un conflicto es resuelto por argumentos racionales, ni la solución ni la razón son necesariamente correctas desde un punto de vista matemático (Laborde, 1994; Balacheff, 1991).

Según Laborde (1994) el problema social sobrepasa al problema matemático: los estudiantes están más preocupados por ganar socialmente que por resolver el problema y en este sentido, es posible considerar a la interacción social como un obstáculo potencial para la “devolución” (i. e., la apropiación) del problema matemático y así para el desarrollo de los procesos matemáticos.

Se ha observado que aún cuando los estudiantes no estén en conflicto, el *trabajo cooperativo* puede conducir a una mejor solución que el trabajo individual (Noddings, 1989; Slaving, 1989a; Slavin, 1989b).

El trabajo cooperativo está más extendido en los salones de clase que las situaciones conflictivas (Laborde, 1994; Grevsmühl 1991). Las propuestas hechas por un estudiante pueden ser mejoradas por los otros compañeros y transformadas en soluciones más sofisticadas. Nuevos enfoque hacia una solución pueden ser elaboradas a partir de propuestas hechas por cualquier estudiante e ir más allá de la simple adición de ideas (Laborde, 1994; Robert y Tenaud, 1989).

¿Cuáles son las características del trabajo en grupo que favorecen el fenómeno de una construcción social en una solución de más alto nivel que las soluciones propuestas en forma individual? Para contestar a esta pregunta se ha intentado extender (Forman, 1989; Laborde 1994; Goos, M., Galbraith, P., Renshaw, P., 2002)) el concepto de “zona de desarrollo próximo” propuesto por Vygotsky (1985); la zona de posibles estados conceptuales alcanzados por el estudiante cuando interacciona con un adulto o con un compañero más avanzado.

Parece que es posible extender algunas características de esta noción al caso en el cual un grupo de pares está colaborando en una tarea conjuntamente. Las dos características principales en las cuales los conceptos científicos difieren los conceptos de la vida diaria, son, de acuerdo a Vygotsky (1985), los aspectos de ser consciente y de voluntad de sus génesis. La cooperación con otros contribuye al desarrollo de estas dos características a través de los procesos de explicación y refutación que la interacción social requiere: llegar a un acuerdo sobre una solución común con otros requiere, al menos, hacer explícito nuestro propio enfoque, posiblemente compararlo con el enfoque del compañero y eventualmente, argumentar en contra de él; este es el caso extremo de la situación conflictiva (Robert y Tenaud, 1989; Yackel 1991).

El trabajo en grupo puede también permitir la exteriorización de diversas estrategias y llevar a los estudiantes a una descentralización de sus puntos de vista, debido a que los impulsa a situar su solución entre las otras. Moviéndose de una estrategia de resolución a otra es un segundo hecho que puede ser también el origen del progreso conceptual; sabiendo cómo considerar un problema bajo puntos de vista distintos, cómo moverse de una

estrategia a otra con respecto al problema a resolver contribuye a un uso más flexible del conocimiento y a una descontextualización de las ideas matemáticas (Laborde, 1994).

Debería notarse que esta habilidad para moverse de una estrategia a otra es particularmente eficiente para problemas complejos, los cuales no pueden resolverse por rutinas o algoritmos sino que requieren la combinación de diversos enfoques. Esto significa que la posible superioridad del trabajo en grupo es reforzada en situaciones complejas, permitiendo diversos enfoques y no una sola solución rutinaria (Laborde, 1994; Hoyles, Healy, y Pozzi, 1993)

Laborde (1994) sugiere que tres categorías de condiciones intervienen en el resultado positivo del trabajo en grupos pequeños: la selección de los compañeros, la selección de la tarea, la duración de las interacciones.

Según algunos autores (Carubaty y Mugny, citado en Mugny, 1985, p. 66) el problema planteado a los alumnos es esencialmente de naturaleza social. Las herramientas sociocognitivas se desarrollan sólo por el restablecimiento de un equilibrio de naturaleza social y los problemas sociales preceden a los problemas cognitivos. Sin embargo, en situaciones problemáticas que involucran un problema matemático y contenidos complejos, el proceso de resolución requiere el uso de conocimientos matemáticos.

En este caso, Laborde (1994) no está de acuerdo con la posición anterior en relación a la prioridad del problema social. Ésta dice que el encubrimiento de la situación por el problema social es un desarrollo equivocado que debe evitarse, y el equilibrio es conceptual, relacionado a las concepciones matemáticas de los estudiantes; por lo cual la “distancia cognitiva” entre los compañeros debe tener un tamaño óptimo: ni tan grande que ellos no puedan entenderse, ni tan pequeña donde ellos tengan puntos de vista idénticos.

Los investigadores en educación matemática han puesto de manifiesto la influencia de la tarea sobre el comportamiento de los estudiantes en el grupo de trabajo y sobre el contenido de sus intercambios (Cohen, 1994; Hoyles, Healy, y Possi, 1993; Laborde, 1994; Robert y Tenaud, 1989; Zawojewski, et al. 2003). La tarea debe proporcionar una situación nueva para los estudiantes que no puedan resolver de manera inmediata (una discusión en este caso debería ser inútil), pero en la cual ellos inicien con sus conocimientos previos, si bien ellos no son suficientes para lograr la tarea.

La tarea debe favorecer la verbalización y la comunicación entre los estudiantes, esta es la razón porque no puede ocurrir, cuando los estudiantes tienen que hacer algo sin justificación, porque realmente no intercambian argumentos al realizar la tarea. El trabajo cooperativo se incrementa cuando los estudiantes tienen que describir o justificar sus soluciones. La retroalimentación objetiva inmediata puede también cancelar una discusión entre compañeros.

Un periodo de tiempo demasiado pequeño no permite que la interacción tenga lugar; el proceso de interacción no es un proceso secuencial. Se requiere tiempo para internalizar lo que el compañero está proponiendo, para relacionar las propuestas a los enfoques previos, y para entender las consecuencias de las propuestas (Cobb, Yackel, y Wood, 1992; Laborde, 1994).

Una perspectiva constructivista pone atención en situaciones en las cuales el estudiante debe evolucionar por sí mismo y no con la ayuda del maestro. Para tales situaciones, Brousseau (1986, p. 49) ha puesto de manifiesto el papel jugado por las interacciones del estudiante con un “medio” dado, esto es, todos los elementos del entorno de la tarea sobre los cuales los estudiantes pueden actuar y los cuales les proporcionarán retroalimentación de distintas clases sobre lo que ellos están haciendo. Ofrecidas por la misma situación, la retroalimentación a las acciones de los estudiantes debe permitirles tener acceso a información acerca de lo que ellos deben hacer, inferir algunas conclusiones acerca de la validez de su trabajo, y hacer otros intentos que resulten en una solución adaptada.

Tal retroalimentación podría dar evidencia a los estudiantes de la medida en que su solución no es pertinente, y ello podría crear contradicciones aparentes. Estas contradicciones provocan un desbalance que puede dar origen a nuevos intentos de equilibración: El conocimiento se puede originar de este proceso dinámico de desbalance y re-equilibración. Esta retroalimentación no sólo es de naturaleza material sino que también puede ser de naturaleza intelectual cuando provoca una contradicción entre lo que el estudiante espera gracias a su conocimiento previo y lo que puede observar en la situación. De acuerdo a Margolinas (1993), el conocimiento previo del estudiante hace el papel de *criterio de validez*.



De acuerdo a Laborde (1994), introducir una dimensión social en la situación de aprendizaje contribuye a un incremento en la complejidad de la situación por la introducción de un problema adicional al problema matemático: diversos elementos pueden jugar un papel crucial en la calidad del trabajo en grupo y en el subsiguiente resultado. Entre tales elementos están los siguientes:

1. Cuando se trabaja en pequeños grupos, los estudiantes deben ser conscientes de las demandas sociales de la tarea y de lo que estas demandas implican. Deben intentar llenar estas demandas, y esta conciencia no resulta en una adaptación espontánea sino que debe ser aprendida. Esto es porque un resultado positivo de tales situaciones requiere de experiencias a largo plazo.
2. Trabajar en pequeños grupos involucra una multiplicidad de enfoques y puntos de vista, y en consecuencia un trabajo de coordinación conceptual más grande.

De acuerdo a Laborde (1994) se concluye: (1) Estos elementos pueden no ser fácilmente controlados; (2) Los resultados positivos de introducir una dimensión social en las situaciones de aprendizaje en matemáticas está relacionado al incremento de complejidad de estas situaciones debido a los aspectos sociales, quizá la mayor complejidad es una razón mayor para más aprendizaje.

### El concepto de *modelo*.

Los significados que al término *modelo* (Black, 1961; Badiou, 1969), fuera del ámbito cognitivo, son diversos. Entre los usos no-cognitivos de los modelos Black (1961), reconoce modelos a escala, analógicos, matemáticos y teóricos.

*Modelo a escala*: Abarca todos los simulacros de objetos materiales, tanto reales como imaginarios, conservan las proporciones relativas; entre ellos se incluyen los experimentos en que se desaceleran artificialmente procesos químicos o biológicos (“experimentos a ritmo lento”) y aquellos en los que se pretende imitar, en miniatura, procesos sociales.

*Modelo analógico*; Es cualquier objeto material, sistema o proceso destinado a reproducir de la manera más fiel posible, en otro medio, la *estructura* o trama de relaciones del original.

*Modelo matemático*: Es la aplicación (“mapping”) de un “sistema de objetos” sobre otro “sistema matemático”. Al hacer lo anterior, se sugieren por añadidura tres cosas: se considera el campo original “proyectado” sobre el dominio abstracto de las funciones, conjuntos, etc., de que se ocupe la teoría matemática con la que se lo coordine; se concibe al “modelo” como algo *más sencillo y abstracto* que el original, y es frecuente que se insinúe que el modelo es una especie de modelo analógico etéreo, como si las ecuaciones matemáticas se refiriesen a un mecanismo invisible cuyo funcionamiento ejemplificase –o, incluso, explicase en parte- el del sistema original que se investigue (sugerencia esta última, que es preciso rechazar por ilusoria).

Hay que hacer notar que el “modelo matemático”, y su proceso de construcción de que se habla, en este punto pertenece al ámbito de las matemáticas (particularmente al de las Matemáticas Aplicadas).

En resumen, el modelo es siempre modelo de algo, se construye con cierta finalidad, es una representación de la cosa real o imaginaria a la que sustituye; por la propiedad anterior, algunos rasgos del modelo no hacen al caso o carecen de importancia, en tanto que otros son pertinentes y esenciales para la representación en cuestión y, como sucede con todas las representaciones, existen unas convenciones subyacentes de interpretación, esto es, maneras debidas de “leer lo que dice”, el modelo.

### Las matemáticas como la ciencia de los *modelos* y la *modelación*.

Es posible suponer que el surgimiento y evolución del pensamiento matemático, se da en un ambiente de relación y dependencia entre los siguientes elementos: necesidad social, desarrollo del pensamiento y disponibilidad de instrumentos adecuados (Campiglio y Eugeni, 1990). De acuerdo con Campiglio y Eugeni, (1990) se puede decir, para definir de modo sintético el proceso, que el pensamiento matemático en general ha nacido para responder a la necesidad de construcción de modelos de la realidad que fueran bastante abstractos y generalizables.

Un ejemplo de tales modelos es la geometría euclídea: es un producto del pensamiento, pero se ha convertido también en un modo de pensar el espacio. Se piensa en el espacio según categorías exclusivamente euclídeas.

Probablemente, uno de los puntos fuertes del modelo euclídeo viene dado por el hecho de que la no variación de los elementos constitutivos del espacio es aún hoy fundamental para la actividad de intercambio comercial del mismo; como ejemplo real la compraventa del espacio.

La utilidad social es un elemento fuerte para la supervivencia de un modelo matemático. La disponibilidad de instrumentos del nivel de la geometría euclídea comporta una capacidad muy diversa de comprender el mundo circundante y de construir modelos que puedan “explicarlo”, o bien permitirnos “controlarlo”.

El pensamiento matemático ha llevado al hombre hacia formas de abstracción cada vez más elevadas: la *abstracción* ha permitido identificar los caracteres generales y “transferibles” de los fenómenos.

En consonancia con lo anterior, Dörfler (1999) señala que las matemáticas proporcionan herramientas para pensar y comunicarse, y que estas actividades humanas dependen, y están determinadas, por los medios y herramientas socialmente disponibles e identifica algunos rasgos fundamentales de las matemáticas:

- con frecuencia, los conceptos matemáticos presentan estructuras relacionales, algunas veces de considerable complejidad;
- las matemáticas desarrollan medios para materializar relaciones y estructuras relacionales, haciéndolas visibles y manipulables;
- los conceptos matemáticos presentan estructuras relacionales en una forma esquemática y formal;
- las matemáticas proporcionan medios poderosos para pensar en alternativas, para experimentos pensados, y para simulaciones;
- las matemáticas ofrecen un gran repertorio de esquemas los cuales obtienen su poder del uso de variables (algebraicas o en forma de diagramas).

Esta visión de las matemáticas como “... *el principal arsenal de abstracciones de posibilidad ...* ” (Bochner, 1966), o como “*La Ciencia de los patrones*” (Devlin, 1994) y que, como todas las ciencias, “... *dan un esquema aproximado de la realidad ...*” (Fréchet, 1955); aproximado, porque: “*La realidad tiene la costumbre de desviarse del camino que las fantasías humanas habían planeado para ellas*”, (Barrow, 1992), es la visión de matemáticas que subyace en la perspectiva de los *Modelos* y la *Modelación* en la Educación Matemática.

### Introducción a la perspectiva de los *Modelos* y la *Modelación*.

La presentación más acabada de la perspectiva teórica de los *Modelos* y la *modelación* aparece en el libro *Beyond Constructivism. Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (Lesh y Doerr, 2003), en donde 31 colaboradores diferentes escriben 28 capítulos y resumen el trabajo de investigación continua durante más de 20 años.

Los *Modelos* y la *Modelación* en Educación Matemática (Lesh y Lamon, 1992; Lesh y Doerr, 2000; Lesh y Doerr, 2003b), es una perspectiva en donde el objetivo central del aprendizaje matemático involucra la construcción o refinamiento, de “*modelos matemáticos*”.

**Concepto de Modelo.** Un *modelo* (Lesh and Doerr, 2000) es un sistema formado de: (a) *elementos*, (b) *relaciones* entre elementos, (c) *operaciones* que describen como interactúan los elementos y (d) *patrones* o *reglas*, tales como la simetría, la conmutatividad, o la transitividad, que se aplican a las relaciones y operaciones.

Para que un sistema sea modelo debe usarse para describir algún otro sistema, o para pensar acerca de él, o para darle sentido, o para explicarlo, o para hacer predicciones sobre él. Los modelos que particularmente interesan son aquellos en los cuales las características estructurales subyacentes son de carácter matemático. Ejemplos de tales modelos son los *sistemas de coordenadas cartesianas*, las *razones*, las *proporciones*, etc.

Un principio fundamental en la ciencia cognitiva es que los humanos interpretan sus experiencias poniéndolas en correspondencia con modelos mentales. De esta forma, lo que una persona “ve” o “escucha” en una situación determinada es filtrada, organizada e

interpretada por los modelos cognitivos que ha construido, basados en su experiencia pasada.

Según esta línea de pensamiento, los estudiantes usan estos modelos para construir, describir o explicar sus experiencias matemáticas.

De acuerdo a Lesh y Carmona (2003), estos modelos se pueden pensar como formados por una componente “interna” (mental) y una “externa” de naturaleza representacional. A las componentes internas se les denomina *constructos* o *sistemas conceptuales*. A la componente externa se le llama *artefacto* o *medio representacional*. Los artefactos y los medios representacionales sirven para “expresar” constructos y sistemas conceptuales.

De acuerdo a Lesh y Doerr (2000) los modelos deben construirse de acuerdo a sistemas interactuantes basados en sistemas conceptuales complejos y, como tales no pueden proporcionárseles a los estudiantes en una forma significativa ya construidos.

Los modelos se construyen, con frecuencia, por grupos y no por individuos, puesto que el desarrollo de modelos por lo general involucra funciones cognitivas y sociales.

Involucrarse en la construcción de esta clase de modelos no se percibe como la solución a un problema dado sino al desarrollo de generalizaciones que el aprendiz pueda usar y ‘re-usar’ para encontrar soluciones a otros problemas semejantes, ya que las descripciones y explicaciones que son compartidas y ‘re-usables’ involucran maneras de pensar que representan formas de aprendizaje importantes. Las descripciones, explicaciones y justificaciones no son simples compañías a respuestas útiles; son la esencia de respuestas útiles.

El hecho de considerar la construcción de un *modelo* desde una perspectiva *constructivista social*, de acuerdo a la cual *toda* construcción cognitiva individual –ya sean conocimientos, habilidades, destrezas, valores y actitudes– está mediada por la interacción en un grupo social, a través de la *comunicación*, permite ver a actividades cognitivas como la *resolución de problemas* y la *metacognición*, así como el trabajo en *grupos pequeños*, de una forma más comprensible.

Por ejemplo, *recursos*, *heurísticas*, *control*, *sistema de creencias* y *metacognición*, como elementos de un individuo, debieran manifestarse primero socialmente, por ejemplo, en tareas abordadas grupalmente, en particular, en grupos pequeños: “...*la inteligencia es*

*en gran medida la interiorización de instrumentos proporcionados por una cultura dada”* (Greenfield y Bruner, 1966).

Este aspecto ya había sido puesto de relieve por Schoenfeld (1992), a través de conceptos tales como *enculturación* y la *comunidad de practicantes*. En términos generales, esta posición teórica no es nueva, tiene sus raíces en la psicología soviética, en los trabajos de Galperin, de la década de 1950 a 1960:

*“La acción, antes de ser mental, generalizada, reducida y asimilada, pasa por estados transitorios. Los principales de ellos constituyen las etapas de asimilación de la acción, cada una de las cuales se caracteriza por el conjunto de los cambios de las propiedades (parámetros) fundamentales de la acción”,* (Talizina, 1988: pp. 108).

**Modelos y Representaciones.** Según Lesh y Doerr (2000) el significado de un modelo, o sistema conceptual, tiende a distribuirse a través de varios sistemas representacionales interactuantes que pueden incluir símbolos escritos, lenguajes hablados, dibujos o diagramas, objetos concretos manipulables, o metáforas basadas en la experiencia. Esto solamente se cumple cuando un individuo es capaz de representar un modelo en más de una forma, en caso contrario no se da, a menos de que se acepte que el *significado* es algo absoluto y no dependiente del sujeto que modela.

La *modelación* involucra las interacciones entre tres tipos de sistemas: (a) **Sistemas conceptuales internos**. Los sistemas conceptuales, en un sentido Piagetiano, parece que existen, principalmente, en la cabeza.; (b) **Sistemas representacionales**. Funcionan como externalizaciones de sistemas conceptuales internos así como internalizaciones de sistemas externos. Esta clase de sistemas parece que están incorporados en el lenguaje hablado, los símbolos escritos, los dibujos, los diagramas y los modelos concretos que la gente usa tanto para expresar sus sistemas internos como para describir sistemas externos. Frecuentemente a estos sistemas se les denomina sistemas representacionales; (c) **Sistemas externos que se presentan en la naturaleza, o que son artefactos construidos por humanos**. Esta tercera clase de sistemas funcionales son aquellos que los humanos han creado, tales como los sistemas económicos, los sistemas de comunicación y los sistemas mecánicos.

Es importante enfatizar que las fronteras entre estos sistemas son indefinidas, y a veces ambiguas. Si bien hay diferencias entre estos tres sistemas, éstos se traslapan,

interconectan e interactúan parcialmente. Estas interacciones son fundamentales y aparecen en primer plano en el análisis del aprendizaje matemático de los estudiantes.

**Etapas en la construcción escolar de un modelo.** Desde el punto de vista instruccional, las etapas, por las que pasa la construcción de un modelo son: *provocación* (elicitation), *exploración*, *aplicación* y *extensión* en nuevas formas.

**Ciclos de modelación.** Cada una de las etapas (provocación, exploración, aplicación, extensión) del proceso de desarrollo escolar de un modelo, incluye múltiples ciclos de interpretaciones, descripciones, conjeturas, explicaciones y justificaciones que son refinadas y reconstruidas de forma iterativa por el aprendiz, generalmente interactuando con otros aprendices.

**Matematización.** Matematizar, es decir, producir descripciones o explicaciones matemáticas, (por ejemplo, cuantificar, visualizar, coordinar) es una forma de modelación; en donde generalmente se involucra el uso de lenguajes especializados, símbolos, gráficas, dibujos, materiales concretos, y otros sistemas de notaciones. Desde el punto de vista del constructivismo social (van Oers, 2000), la *matematización* puede verse como una actividad desarrollada culturalmente y que el aprendiz puede apropiarse a través de una participación asistida y la imitación constructiva.

Para van Oers (2000), la *simbolización* es el corazón de la matematización. La *simbolización* es una actividad de formar y usar símbolos, que incluye, tanto el signo, como el significado del símbolo

van Oers ha profundizado en el análisis psicológico del proceso de simbolización y ha explicado el proceso de apropiación. Un principio fundamental en su posición es la simbolización como proceso para etiquetar una situación de tal forma que la caracterice y la haga diferente a las otras.

van Oers designa con el nombre de *predicación* a este aspecto de la simbolización y argumenta que la apropiación de símbolos consiste en la adquisición de una idea y en la pericia en el proceso de predicación. El autor señala que esta adquisición se basa en una actividad semiótica, esto es, en la reflexión entre la relación reflexiva del signo y el significado, así como en el desarrollo de esta inter-relación.

van Oers argumenta que un factor que complica el proceso de construcción y uso del símbolo es la urgencia o premura en la predicación basada en símbolos.

van Oers explica que esta premura es un resultado de la abreviación de las acciones que constituyen el proceso de predicación y afirma que la mejora de la actividad de predicación relacionada con símbolos debería empezar con la ejecución o construcción explícita de este acto de predicación.

Para van Oers, la instrucción de su propuesta implica un enfoque constructivista para promover la mejora de la simbolización y la matematización en la escuela. Esto es, debería ponerse una seria atención en hacer explícita la predicación y la actividad semiótica socialmente distribuidas desde edades tempranas.

Para aclarar y explicar sus afirmaciones teóricas e ilustrar el enfoque constructivista que predica, van Oers ejemplifica con un grupo de niños pequeños que intentan encontrar un medio para organizar cajas de zapatos de varios tipos y tamaños. Con la asistencia del profesor, los niños primero desarrollan la necesidad para simbolizar el tipo de zapato en una caja y después desarrollar símbolos que encuentran útiles. Durante el proceso, se hacen explícitas las acciones semióticas.

De acuerdo a la perspectiva de van Oers, el profesor se considera como un individuo semióticamente más capaz que promueve acciones semióticas cuando éstas son relevantes, y evoca acciones comunicativas y reflexivas que dan como resultado alumnos constructores de símbolos públicos. Así, el maestro juega un papel crítico en la actividad predicativa de los niños.

### La resolución de problemas en la perspectiva de los *Modelos* y la *modelación*.

Como se dijo en el Capítulo 1, uno de los aspectos fundamentales en la perspectiva de los *Modelos* y la *modelación* es el tipo de problemas que abordan los estudiantes en el salón de clases. También se dijo que tales problemas se denominan *problemas que promueven modelos* (models eliciting problems).

***Seis principios para crear simulaciones de problemas de la vida real.*** Para crear *problemas que promueven modelos* que sean simulaciones de problemas de la vida real, Lesh, Cramer, Doerr, Post y Zawojewski, (2003) desarrollaron los seis principios siguientes:



1. *El Principio de la Significancia Personal.* ¿Podría esto suceder realmente en situaciones de la vida real? ¿Los estudiantes se motivarán para darle sentido a la situación basándose en extensiones de sus conocimientos y experiencias personales? ¿Las ideas de los estudiante se tomarán en cuenta seriamente, o serán obligados a conformarse a la noción del maestro acerca de la forma correcta de pensar acerca de la situación problemática?
2. *El Principio de la Construcción del Modelo.* ¿La tarea asegura que los estudiantes reconozcan con claridad la necesidad para la construcción, modificación, extensión o refinamiento de un modelo? ¿La tarea involucra construir, describir, explicar, manipular, predecir, o controlar un sistema estructuralmente significativo? ¿La atención se enfoca sobre patrones o regularidades subyacentes en lugar de enfocarse sobre información superficial?
3. *El Principio de la Auto-Evaluación.* ¿Hay un criterio claro a los estudiantes para evaluar la utilidad de respuestas alternativas? ¿Serán capaces los estudiantes de juzgar por sí mismos cuándo sus respuestas son bastante buenas? ¿Para qué propósitos se necesitan los resultados? ¿Para quiénes? ¿Cuándo?
4. *El Principio de la Externalización del Modelo.* ¿La respuesta requiere de que los estudiantes revelen explícitamente cómo están pensando acerca de la situación (datos, objetivos, caminos posibles de solución)? ¿En qué clases de sistemas están pensando los estudiantes (objetos matemáticos, relaciones, operaciones, patrones, regularidades)?
5. *El Principio del Prototipo Simple.* ¿La situación es tan simple como sea posible, pero aún crea la necesidad para un modelo significativo? ¿La solución proporciona un prototipo útil para interpretar una variedad de otras situaciones estructuralmente semejantes? ¿La experiencia proporcionará una historia que tenga poder explicativo -o poder para darle sentido a otras situaciones estructuralmente semejantes?
6. *El Principio de la Generalización del Modelo.* ¿La herramienta conceptual que se ha construido se aplica sólo a una situación particular, o puede modificarse y extenderse fácilmente para aplicarse a un rango más amplio de situaciones? ¿Los estudiantes deberían motivarse para ir más allá de producir formas de pensar dirigidas hacia un único propósito a modelos re-usables, compartibles y modificables?

***Problemas de fin conocido*** Un tipo de tareas que pareciera poder proporcionar experiencias de aprendizaje poderosas, desde la perspectiva de los modelos y la modelación

(English y Lesh, 2003), son los denominados *problemas de fin conocido* (Ends-in-View Problems). Los *problemas de fin conocido* son aquellos que proporcionan un criterio particular para generar productos que tienen un propósito, son complejos, presentan diversas facetas y van más allá de la información dada. Estos problemas se clasifican de acuerdo al tipo de producto que se desarrolla y a la naturaleza de los fines conocidos que se le aplican a cada uno. Tales productos incluyen herramientas (por ejemplo, modelos, planes, y diseños), construcciones (por ejemplo, artefactos complejos, embalajes, y evaluaciones), y problemas (por ejemplo, problemas que se plantean, preguntas que se formulan, o hipótesis que deben ponerse a prueba). Ejemplos de tales problemas son las siguientes: ¿Por qué el Palacio de Bellas Artes de la Ciudad de México se considera una obra de arte?; Diseñar un vestido de noche para la próxima temporada de invierno.

Los *problemas de fines conocidos* se diferencian de los problemas típicos que los alumnos enfrentan en una clase tradicional de matemáticas en diversos aspectos: 1) Los productos que se deben desarrollar son complejos -por ejemplo, pueden incluir construcciones, descripciones o explicaciones. 2) Se especifican los criterios para probar el producto además de las características que describen la naturaleza del producto. 3) Los problemas de fin conocido son relevantes para el mundo actual. No así los problemas que se encuentran en los libros de texto de matemáticas. 4) Los productos, así como el proceso de su generación, en los problemas de fin conocido son diferentes a los de los problemas típicos de los libros de texto.

Si bien los problemas de fin conocido comparten ciertas características, difieren en el tipo de producto final que buscan. Desde la perspectiva de los modelos y la modelación, (English y Lesh, op.cit.) los problemas de fin conocido se clasifican en tres categorías según el producto que persiguen: herramientas, construcciones y problemas, cada uno de los cuales incluye varios ejemplos diferentes.

**Las Herramientas como un Producto.** En las herramientas como productos se incluyen modelos, descripciones matemáticas, explicaciones, diseños, planes, e instrumentos de evaluación. En términos generales, las herramientas son productos que cumplen un papel operacional o funcional.

**Las Construcciones como un Producto.** Una construcción normalmente requiere que el estudiante use el criterio dado para desarrollar un artículo matemático, el cual puede

tomar muchas formas incluyendo construcciones espaciales, artefactos complejos, casos persuasivos, y evaluaciones (es decir, los productos resultantes de aplicar un instrumento de evaluación). El criterio para una construcción no especifica la naturaleza exacta del producto a desarrollar, más bien proporciona determinados parámetros para el diseño del producto. A diferencia de las herramientas, las construcciones no necesariamente son reusables.

**El Problema como un Producto.** La habilidad para plantear problemas (además de resolverlos) es cada vez más importante tanto en contextos académicos como en contextos vocacionales (Brown y Walter, 1993; English, 1998; Silver, Mamona-Downs, Leung y Kenny, 1996; citados por English y Lesh, op.cit.). La generación de problemas aparece en diversas situaciones, ya sea que un matemático plantee posibles conjeturas para trabajar determinadas hipótesis, o una agencia gubernamental enfrente la solución de un asunto nacional importante, o una compañía financiera planea una fusión compleja en donde se requiera considerar con cuidado ciertos problemas potenciales.

Aún en el transcurso de los ciclos de modelación que surgen durante el trabajo en las actividades de la generación de modelos, los alumnos están involucrados en el planteamiento de problemas, esto es, están repetidamente revisando y refinando su conceptualización del problema dado. Los problemas que son capaces de plantear están influenciados fuertemente por los fines previstos, incluyendo lo apropiado y efectivo de un problema sobre otro.

***Secuencia de actividades instruccionales para llegar a construir un modelo.*** Desde la perspectiva de la modelación para llegar a construir un modelo o sistema que sea reusable en un cierto rango de contextos, es necesario diseñar una secuencia de actividades instruccionales que empiecen por involucrar al estudiante en situaciones problemáticas no rutinarias que “*provoquen*” el desarrollo de algún modelo matemático significativo y que después lo explore, aplique y extienda a otras situaciones problemáticas hasta que llegue a construir un sistema o modelo que sea re-usable en un cierto rango de contextos.

## Proceso de resolución de un problema desde la perspectiva de los *Modelos* y la *modelación*.

Lester y Kehle (2003) afirman que la resolución de problemas es una empresa humana extremadamente compleja y sugieren nuevas perspectivas para analizar la naturaleza de la resolución de problemas y su papel en las matemáticas escolares. Aceptan que es difícil definir resolución de problemas, pero que, según ellos, el sentido en que se dice es el siguiente:

“La resolución exitosa de un problema involucra coordinar experiencias, conocimientos, representaciones familiares, y patrones de inferencia previos con la intuición, en un esfuerzo por generar nuevas representaciones y patrones de inferencia relacionadas que resuelven la tensión o ambigüedad (es decir, falta de representaciones significativas y pasos inferenciales apoyados) que induzcan la actividad original de resolución de problemas” (Lester y Kehle, 2003: 510).

De acuerdo a Lester y Kehle (2003) se necesita una perspectiva que explique las acciones cognitivas que tienen lugar durante la real solución de problemas. Según estos autores un modelo “ideal” (“ideal” en el sentido que denota las acciones principales en las cuales un individuo debería involucrarse para obtener resultados aceptables, procesos de fases múltiples que empiecen trabajando en un contexto matemático complejo, real o imaginario, se enfrente a un problema específico) de la actividad matemática durante el trabajo individual, (aunque también se aplica al trabajo en pequeños grupos colaborativos), en alguna tarea matemática real, estaría integrado por las siguientes fases:

1) **Fase de simplificación y planteamiento del problema:** Para resolver el problema, el individuo simplifica la situación compleja identificando aquellos conceptos y procesos que parecieran estar directamente relacionados con el problema. Esta fase de simplificación y de planteamiento del problema está relacionada con la toma de decisiones acerca de lo que puede ignorarse, el desarrollo de un sentido acerca de cómo los conceptos esenciales están conectados y acerca de los resultados en una representación realista de la situación original. Esta representación realista es un modelo del contexto original, del cual el problema se sacó debido a que es más fácil de examinar, manipular, y entender que la situación original.

2) **Fase de la abstracción:** En esta fase se introducen los conceptos matemáticos y las notaciones e involucra la selección de conceptos matemáticos para representar los hechos esenciales del modelo realista. Con frecuencia la fase de abstracción está guiada por

el sentido de lo que una representación particular hace posible en la subsecuente fase de la computación. La representación explícita del escenario y del problema, en simbolismos matemáticos, constituye una representación matemática tanto del escenario como del problema. Una vez que se ha generado una representación matemática de la situación original, el problema realista se ha convertido en un problema matemático específico relacionado a la representación. Este problema matemático adquiere un significado en sí mismo, convirtiéndose en un problema matemático aislado bien definido.

3) **Fase de computación:** La tercera fase involucra manipular la representación matemática y deducir algunas conclusiones matemáticas. Durante esta fase se pone de manifiesto el acervo personal en cuanto a hechos matemáticos, destrezas, habilidades de razonamiento matemático.

4) **Fase de comparación:** Esta es la fase fina, en ella el individuo se involucraría en comparar las conclusiones/resultados que obtuvo con el contexto original y con el problema, así como con las representaciones matemáticas utilizadas. Sin embargo, el acto de comparar no sólo ocurre cuando se obtienen los resultados y se sacan las conclusiones. Más bien, el proceso de comparar podría tener lugar en cualquier momento y en cualquier punto del proceso. En realidad, este monitoreo continuo y regular -actividad metacognitiva - del trabajo propio es un hecho fundamental del éxito en tareas matemáticas complejas y en todo tipo de tareas complejas.

De acuerdo a Lester y Kehle (op. cit.) el acto de comparar el estado actual de nuestro trabajo, pensamiento, y decisiones denota la complejidad de la actividad matemática. El grado al cual el individuo escoge para comparar el estado actual de su trabajo con estados anteriores puede considerarse un aspecto determinante de la complejidad de la tarea.

Lester y Kehle (op. cit.) proponen la metáfora de “desdibujar”, (“hacer menos nítido”, “hacer más borroso”) la distinción entre resolución de problemas y otras actividades matemáticas debido a que tal distinción es inútil e innecesaria. En otras palabras: no es posible marcar una clara separación entre resolver un problema y hacer matemáticas.

Los autores dan dos ejemplos del uso de esta metáfora, ambos relacionados con el enfoque de los modelos y la modelación (Lesh y Doerr, 2000; Lesh y Lamon, 1992).

Primero, que el trabajo en esta perspectiva (la de los modelos y la modelación) ha implicado un desdibujamiento, un hacer más borrosa la tarea, la persona, la actividad matemática, la actividad no matemática, el aprendizaje, la aplicación de lo que se ha aprendido, y otros hechos de la resolución de problemas matemáticos.

Segundo, que el uso del concepto *modelo*, en esta perspectiva, ha significado una unificación del sentido tradicional de modelo matemático con el concepto de modelo mental de los científicos que codifica la comprensión.

### La resolución de problemas en grupos pequeños de acuerdo a la perspectiva de los modelos y la modelación.

El desarrollo de un modelo matemático grupal, (Zawojewski, Lesh, y English, 2003), tiene el potencial para evolucionar de una colección de interpretaciones y perspectivas individuales a un modelo grupal coordinado, eficiente y flexible.

Cuando los grupos pequeños trabajan en tareas de provocación de modelos, invierten poco tiempo en actividades de “masticar” números. Más bien, utilizan la mayor cantidad de su tiempo en refinar sus interpretaciones de los datos y de los objetivos. Los modelos conceptuales iniciales tienen la característica de ser inestables, en tanto que las soluciones finales tienden a coordinar, diferenciar e integrar tales modelos iniciales.

Al inicio del trabajo de los estudiantes en uno de tales problemas no reconocen explícitamente ni escogen formas de pensar alternativas acerca de la situación. Al principio sólo reparan en pocos hechos sobresalientes. Al mismo tiempo, y con frecuencia, formulan suposiciones sin fundamento acerca de la situación problemática o imponen restricciones innecesarias. Gradualmente, cuando una o más de las interpretaciones iniciales se hacen más organizadas y más refinadas, se empiezan a notar más detalles con respecto a la interpretación inicial, y se empiezan a elegir e integrar diversas interpretaciones.

Consecuentemente, al final de la sesión de resolución de problemas los estudiantes, que al principio funcionaban como individuos, generan productos grupales con las siguientes características: *detallados, diferenciados, integrados, condicionales y flexibles y conscientes de las suposiciones y posibles fuentes de error.*

El modelo grupal inicial es un amasijo desorganizado de acciones y perspectivas individuales. En el grupo, cada uno de los individuos forma su propia interpretación de la

situación problemática, y cada uno actúa como si sus compañeros no sólo comprendieran su propia perspectiva, sino que también ellos actuaran desde el mismo punto de vista.

Al transcurrir el tiempo, en los grupos exitosos, los estudiantes empiezan a comunicarse, a comparar y contrastar sus perspectivas, notan que los integrantes del grupo tienen diferentes interpretaciones y finalmente resuelven sus diferencias.

Cuando el grupo empieza a funcionar como un sistema suficientemente bien coordinado, con frecuencia se da una reorganización conceptual, y por lo general se asocia tal reorganización con una forma de pensar más simple y más elegante de la situación problemática.

Si bien el nuevo modelo es más simple, aún retiene un enfoque de todos los detalles y relaciones descubiertas originalmente. La reorganización de las ideas permitirá a la nueva estructura conceptual, más integrada, necesitar menos espacio conceptual para que “corra el sistema”.

Una vez que el modelo alcanza su reorganización y simplificación conceptual, pueden notarse dentro de él nuevos hechos, desajustes entre la realidad y el modelo, e inconsistencias internas, y el modelo será refinado de manera consecuente.

Cuando un grupo empieza a actuar como una unidad, este proceso continúa hasta que en conjunto deciden que las predicciones basadas en el modelo cumplen el propósito del cliente en el problema.

Cuando los miembros de un grupo se involucran en la actividad de promover un modelo (*model eliciting-tasks*), los miembros del grupo generalmente empiezan a funcionar individualmente, cada uno nota determinados hechos sobresalientes de la situación dada, e ignorando otros hechos relevantes. Simultáneamente los individuos distorsionan sus interpretaciones iniciales para ajustarlas a sus primeras concepciones y tienden a no ver que los otros compañeros tienen diferentes formas de pensar acerca de la situación. Esta tendencia egocéntrica está asociada a modelos inmaduros, y ocurren de manera inevitable durante las primeras etapas de la actividad de modelación grupal.

Lo que inevitablemente se observa es que los grupos exitosos siempre transitan a través de ciclos de desarrollo a partir de interpretaciones personales, inestables y sin coordinación a modelos grupales más coordinados y crecientemente estables.

Existen dos mecanismos que al parecer promueven el desarrollo de modelos inestables a modelos estables. El primer mecanismo es *la perspectiva de los individuos en cuanto su participación en el grupo*, y el segundo es cuando los miembros del grupo empiezan a *internalizar* lo que una vez fueron comportamientos grupales externos.

La *toma de una perspectiva* sucede cuando los individuos encuentran las interpretaciones de otros en situaciones problemáticas y se motivan para entender y reconciliar los diferentes puntos de vista.

Los procesos sociales que conducen a una toma de perspectiva suceden de forma externa en los ambientes de pequeños grupos cuando los estudiantes se desafían unos a otros, monitorean unos a otros sus procedimientos, y ponen a prueba sus propias hipótesis y las de los otros. Estos procesos externos tienen el potencial de proveer imágenes y experiencias que eventualmente los individuos pueden internalizar.

La internalización de comportamientos de toma de perspectivas tiene el potencial de contribuir a las habilidades metacognitivas del propio individuo.

*El proceso de internalizar acciones externas.* El contexto social de la resolución grupal de problemas da oportunidades para que los miembros del grupo piensen *acerca* de un modelo propuesto. Esto está en contraste a pensar *con* un modelo, donde el énfasis está en usar el modelo para producir una respuesta.

Pensar *acerca* de un modelo significa que el modelo mismo es objeto de crítica, probado, comparado con modelos alternativos, y como resultado es refinado. Pensar acerca de los modelos es similar a lo que Vygotsky (1978) llamaba pensamiento de orden superior, el cual, de acuerdo a él se origina por las relaciones reales entre los individuos.

Vygotsky describió la internalización de procesos externos como una serie de transformaciones. Las dos primeras son relevantes a este segundo proceso invocado por Zawojewski et al, (2003):

1. Una operación que inicialmente representa una actividad externa se reconstruye y empieza a ocurrir internamente.
2. Un proceso interpersonal se transforma en intrapersonal. Cada función en el desarrollo cultural del niño ocurre doblemente: primero a nivel social, y después a nivel individual; primero, entre personas, (interpsicológica) y después dentro del niño (intrapsicológica). (Zawojewski et al, 2003: 341).



Estas dos transformaciones se observan durante la actividad exitosa de provocación de un modelo grupalmente.

## Toma de decisiones

En 1613 Kepler tenía cuarenta y un años y antes de su segundo matrimonio tenía que elegir entre no menos de once candidatas a mano. Al respecto, Arthur Koestler (1959), nos dice:

*“...éste resolvió el problema de elegir la esposa conveniente entre las once candidatas mediante el mismo método con que descubrió la órbita de Marte: cometió una serie de errores que pudieron haber resultado fatales, pero que luego se anularon; y hasta último momento no comprendió que tenía la solución correcta en sus manos.”* (Koestler, op. cit. pp. 392)

Más adelante, Koestler (op. cit. pp. 396), dice: *“... se decide por la persona unánimemente rechazada por todos.”* Kepler murió a finales de 1630. Susanna, su segunda esposa, con quien tuvo siete hijos, le sobrevivió. El juicio de Koestler (op. cit. pp. 396) en relación a este matrimonio es el siguiente: *“Parece que Susana justificó la elección de Kepler, y estuvo a la altura que él esperaba.”*

Elegir esposa, para un cierto número de personas, es un ejemplo típico de *toma de decisiones* en la vida cotidiana. El pensamiento, la solución de problemas y la toma de decisiones son fundamentales en el comportamiento humano (Kast y Rosenweing, 1979; Márquez, 1993; Jurguin, 1973). Cualquiera persona es “tomadora de decisiones”. Hacemos decisiones cada minuto del día, principalmente pequeñas decisiones con pequeñas consecuencias. Los dirigentes de empresas, laboratorios y talleres, jefes militares, miembros del Gobierno, deben tomar decisiones de carácter administrativo. El médico toma una decisión al diagnosticar, al determinar el tratamiento o cuando da de alta al paciente. El chofer y el aviador toman una decisión al determinar el itinerario, al modificarlo, al acelerar o al frenar. La actividad más importante de un administrador profesional, actualmente, es la de tomar decisiones. Cuando se va a una entrevista, al Registro Civil o al Juzgado se toman decisiones previas que, desgraciadamente, no siempre están bien pensadas.

¿Cómo se *debería* tomar una decisión? ¿Cómo se podría caracterizar, *formalmente*, una decisión? ¿Cuáles son los *elementos importantes* en un proceso decisional? ¿Cómo se

podrían clasificar los procesos decisionales? En otras palabras, ¿Cuál es la *naturaleza* de las decisiones? De acuerdo a Márquez (1993), la mayoría de las decisiones de la vida cotidiana se toman en base a la intuición, el “sentido común” o el puro instinto.

Sin embargo, en el proceso decisional el abuso de la intuición, el sentido común o el instinto puede ser muy peligroso, sobre todo en situaciones complejas y trascendentes. Actualmente se acepta que en este tipo de situaciones, antes de aplicar la intuición y el sentido común para decidir, la objetividad y la racionalidad se deben llevar hasta sus últimas consecuencias dentro de los límites de la oportunidad y disponibilidad de recursos. Según Márquez (1993), en cualquier decisión se identifican tres ingredientes básicos:

- a) Una idea clara de lo que es deseable o bueno para el que decide (es decir, lo que quiere).
- b) Un proceso de reflexión o análisis sobre los cursos de acción disponible al decidir para obtener lo que quiere.
- c) El compromiso, por parte del decidor, de seguir el curso de acción que parece más prometedor, para obtener lo que para él es bueno o deseable. (Márquez, 1993: 143-144)

Desde un punto de vista pragmático, de acuerdo con Márquez (1993):

*Se toma una decisión cuando, habiendo identificado lo que se desea y después de concluir un proceso de reflexión y/o análisis sobre los distintos cursos de acción posibles para obtener lo que se quiere, se adquiere el compromiso de seguir aquel curso de acción que el proceso de reflexión señala como el que más posibilidades tiene de proporcionar al que decide lo que desea.* (Márquez, 1993: 144).

En esta línea de pensamiento, de acuerdo a Márquez (1993), cuando se habla de un *problema decisional*, se hace referencia al problema de *determinar la mejor forma de proceder para tomar una buena decisión*. Es decir, a los métodos que se deben usar, a los pasos que se deben dar, a la información que se requiere y cómo se debe utilizar, a las preguntas que se deben hacer y, *sumamente importante: cuáles son las características de una buena decisión*.

Simon (1960), clasifica los problemas decisionales en *duros*, es decir, *bien estructurados*, y problemas decisionales *blandos*, es decir, *carentes de estructura y/o confusos*. Mientras más duro sea un problema más fácil será programar las decisiones. Mientras más blando sea el problema más difícil será su programación.

Las decisiones “programables” pueden estructurarse dentro de procedimientos definitivos por instrucciones precisas. En cambio, las decisiones “no programables” no

pueden manejarse con procedimientos preestablecidos. Su atención requiere *creatividad*, la cuidadosa *ponderación* de juicios de valor y *pensamiento abstracto*. Un ejemplo típico de un problema duro, que hasta la fecha no ha sido “bien resuelto”, es el del agente viajero. El problema consiste en encontrar la manera en que el “agente viajero” puede escoger la ruta más corta que le permita visitar las “n” ciudades que tiene que recorrer de manera que no repita ninguna ciudad.

Jay (1967), utiliza el tiempo como referencia y llega a una clasificación que distingue entre problemas decisionales *estratégicos*, *tácticos* y *operativos*. Es obvio, como en cualquier esquema taxonómico, que hay problemas de delimitación en la clasificación.

Hay problemas decisionales muy complicados tanto en la vida cotidiana como en la de las organizaciones. Las definiciones anteriores evidencian las razones (Márquez, 1993) que dificultan tomar decisiones. Para empezar, no siempre está claro lo que se quiere, es decir, hay ocasiones en que no es fácil definir un objetivo racional (es decir, un objetivo en donde el aspecto emotivo esté plenamente controlado y además que exista plena congruencia entre los supuestos que se acepten y las consecuencias que se derivan). Además, quizás resulta complicado descubrir los distintos cursos de acción para obtenerlo, así como la medida en que éstos darán al que decide lo deseado.

Por esta misma razón, no siempre es una tarea sencilla identificar el curso de acción más prometedor para lograr lo que se quiere, imposibilitando cualquier compromiso. Más aún, actualmente se reconoce que una de las dificultades para tomar una decisión es que no sólo se quiere una cosa.

Por lo general, las decisiones, y sobre todo las complejas, buscan satisfacer varios objetivos, que tal vez estén definidos con toda claridad, y su grado de cumplimiento sea fácil de medir, pero ser conflictivos entre sí.

Otro aspecto importante es que la propia racionalidad con la que se ataca un problema decisional debe ser accesible a la persona que va a decidir. La propia selección de un proceso racional para abordar un problema decisional puede ser complicada.

En situaciones complejas, un problema decisional debe abordarse de manera ordenada y racional. En primer lugar, para definir los objetivos, después, para identificar los cursos de acción disponibles y la medida en que cada uno cumple con los objetivos propuestos y por último, para identificar el que más posibilidades tiene de lograr dichos

objetivos. Por esta razón el hombre se avoca a la tarea de diseñar metodologías formales para resolver problemas decisionales.

El objetivo de las técnicas o paradigmas formales que se han ideado para atacar problemas decisionales, es precisamente el de garantizar que el proceso decisional se realice de manera racional, y desemboque en una decisión que sea la más prometedora para alcanzar el objetivo que persigue el que decide. Como tal, debe haber una congruencia total entre la racionalidad de lo que se quiere y la racionalidad con la que se resuelve el problema decisional. Se pueden identificar, (Márquez, 1993), dos enfoques que buscan darle mayor racionalidad al proceso decisional: el de *gestión científica* y el de la *informática*. Así, se observa que distintos grupos de personas han buscado contribuir a la racionalidad u objetividad de las decisiones por dos caminos diferentes:

- a) la disponibilidad inmediata de información relevante altamente organizada (el enfoque informático). La idea subyacente es que *la información habla por sí sola*, es decir: ... Si la información es relevante y está bien organizada y presentada, la mejor decisión es obvia; y,
- b) el diseño y aplicación de paradigmas formales, buscando utilizar la información disponible y relevante de forma óptima. Estos paradigmas se desarrollaron sólo para resolver problemas complejos estratégicos, tácticos y operativos.

En un problema decisional complejo, probablemente blando, la cantidad de factores que se deben tomar en cuenta es tal que la información disponible requiere de cierto procesamiento para poderla analizar e interpretar adecuadamente. Con el tiempo ha habido un acercamiento entre todas las metodologías, pues se reconoce que ni la información habla por sí misma, ni un modelo (por ejemplo, los modelos econométricos, los estadísticos), paradigma (por ejemplo, la investigación de operaciones, la inteligencia artificial) o marco formal de análisis (por ejemplo, la teoría de sistemas), se puede utilizar de modo conveniente sin la información adecuada.

## La Personalidad y la Toma de Decisiones

Tener decisión (Smirnov et al, 1995), es saber y tener la costumbre de tomar resoluciones fundamentadas y constantes a su tiempo, en circunstancias difíciles, y pasar a su realización sin esperas innecesarias. Se manifiesta con especial claridad en las situaciones complicadas, cuando hay que elegir una posibilidad de entre unas cuantas y donde la acción está ligada a algún peligro. Tomar las decisiones a su tiempo es saber tomarlas en el momento necesario, cuando lo exigen las circunstancias.

La persona decidida puede no darse prisa en tomar una decisión, si las circunstancias le permiten no apresurarse y no es necesario actuar inmediatamente. Esto le da la posibilidad de orientarse mejor en la situación, de valorarla exactamente, de recoger datos complementarios, de comparar todas las posibilidades y tener sólidos fundamentos. Pero en casos indispensables es capaz de orientarse rápidamente en la situación y tomar inmediatamente la decisión más racional. En cambio, las personas indecisas, o se dan prisa en tomar una decisión, a consecuencia de lo cual no toman en consideración todos los datos, o se retrasan en tomarla.

Si las decisiones (Smirnov et al., 1995), están fundamentadas serán constantes y no habrá vacilaciones y dudas innecesarias. Por ello la persona decidida piensa cuidadosamente todas las posibilidades y, una vez que ha planeado la acción que tiene que realizar, es firme en sus decisiones (si las circunstancias ulteriormente no cambian). El indeciso, en cambio, no está seguro de la exactitud de su decisión; duda y oscila entre distintas posibilidades, sobre todo si la acción que tiene que realizar está ligada a algún riesgo. Constantemente vuelve a considerar, aplaza, cambia la decisión tomada y con frecuencia cae en un estado de completa impotencia y confusión.

Es rasgo indispensable de la decisión saber pasar a su tiempo y con energía a realizarla (Smirnov et al, 1995). El individuo indeciso, incluso después de haber tomado una decisión, no puede obligarse a sí mismo a comenzar a realizarla, amparándose algunas veces a cada posibilidad para retrasar sus acciones. La decisión supone, finalmente, saber retrasar o suspender totalmente la ejecución de la decisión tomada, si así lo exige el surgimiento de nuevas circunstancias antes imprevistas.

## La toma de decisiones y el currículo.

La *toma de decisiones* aparece en el currículum (AAAS, 1998), es objeto de enseñanza-aprendizaje y tema de investigación tanto en el área de la psicología como en la educación. ¿Cómo *toma decisiones* un adolescente en situaciones de riesgo? ¿Cómo se desarrolla la competencia para la *toma de decisiones*? ¿Cómo influye la cultura matemática en la *toma de decisiones*? En particular ¿Qué herramientas matemáticas utiliza un adolescente para medir el riesgo de una situación? ¿Cómo influye la cultura estadística en la *toma de decisiones*? Los elementos matemáticos para la toma de decisiones, por lo general no han aparecido como contenidos en el currículo matemático, al menos el correspondiente a la matemática elemental.

## Ejemplo de la Enseñanza de la Toma de Decisiones.

### *Evaluación de los riesgos y beneficios de una decisión*

#### Contexto

*Nivel de enseñanza:* alumnos de 12 a 16 años.

*Finalidad:* resumir un proceso de toma de decisiones.

#### *Objetivos:*

Hacer que los alumnos comprendan el concepto de evaluación de los riesgos y beneficios inherentes a una decisión al evaluarla y al tomarla aceptando los riesgos.

Hacerlos conscientes de que las decisiones personales se basan por lo general en un conjunto de factores y de valores. Ayudarlos a evaluar sus afirmaciones.

Evidenciar los valores inherentes a sus decisiones.

Comparar los riesgos y los beneficios relacionados con otras decisiones que pueden tener necesidad de tomar, transfiriendo de esta forma sus adquisiciones a contextos nuevos.

#### *Elementos del pensamiento crítico observados.*

De acuerdo con la concepción del pensamiento crítico de Richard Paul, la estrategia afectiva y las estrategias cognitivas que se persiguen y se ponen en práctica en esta lección son las siguientes:

E-33 Evaluar los hechos comprobados y los hechos supuestos.

E-19 Descubrir soluciones o evaluarlas.

E-31 Distinguir entre hechos pertinentes y los que no lo son.

E-4 Explorar los pensamientos subyacentes en las emociones y las emociones subyacentes en los pensamientos.

E-15 Elaborar criterios a partir de la evaluación: dejar en claro los valores y las normas.

E-11 Comparar situaciones análogas: transferir lo comprendido a contextos nuevos.

E-29 Señalar semejanzas y diferencias significativas.

E-35 Examinar las implicaciones y las consecuencias.

#### PROCEDIMIENTO

1. Los alumnos leen una historia sobre un misterioso mal que ha cobrado víctimas entre los miembros de una comunidad cercana. Se presentan en el texto los hechos tal como se conocen en el momento y las estadísticas más recientes de este hecho inusitado. Algunos médicos han experimentado un posible tratamiento en la zona afectada: la inoculación de gérmenes de la enfermedad. Tras la aparición de esta dolencia en su barrio, los

alumnos deben decidir de forma independiente si desean o no recibir esta inyección. Se responden de manera individual las preguntas siguientes:

- ¿Qué información se suministró?
- ¿De qué fuente(s) proviene esta información?
- ¿Se puede considerar válida esta información? Menciona las razones en las que basas tu respuesta.
  2. Después de que elaboraron su propio punto de vista, se puede comenzar una discusión con todo el grupo.
    - ¿Qué elegiste? ¿Por qué?
    - ¿Qué información es importante? ¿Cuál es secundaria?
    - ¿Hay otros hechos o factores susceptibles de influir en tu decisión y que no se hayan mencionado en esta historia? (Pensamos sobre todo en factores logísticos, económicos, políticos, morales y éticos)
    - ¿Hay una buena elección o una mala elección? Justifica tu respuesta.
    - ¿Qué opinas de quienes tomaron una decisión distinta de la tuya? ¿Por qué?
    - ¿Cuáles son los beneficios de cada opción?
    - ¿Cuáles son sus riesgos?
    - ¿Qué valores expresa esta decisión? ¿Por qué mencionaste esos valores?
    - ¿Rechazas los otros valores o elegiste el menor de los males?
  3. Una vez terminado el estudio del tema se pide a los alumnos que mencionen las decisiones que tomarían relacionadas con el tema. Se les invita a que platicuen de sucesos de actualidad o de ejemplos de problemas que exijan las habilidades de toma de decisión parecidas a las que acaban de emplear.
    - ¿En qué se parece este suceso o problema a la otra decisión que acabas de tomar? ¿En qué es distinto? ¿Cómo influyen estas semejanzas y diferencias en la toma de decisión en el caso nuevo? ¿Por qué es así?
    - 4. Se anima a los alumnos a que modifiquen la historia original y examinen las implicaciones de los cambios que se introdujeron. Con estas modificaciones, ¿su decisión cambiaría? ¿Por qué?
    - 5. ¿La discusión hizo que los alumnos modificasen su punto de vista. De ser así, ¿por qué?

FUENTE: Richard Paul, A. J. A. Binker, Douglas Martin y Ken Adamson (1989), *Critical Thinking: High School. A Guide for Redesigning Instruction*, Sonoma State University, Center for Critical Thinking and Moral Critique, Rohnert Park, California, pp. 265-266.

## La toma de decisiones por adolescentes en situaciones de riesgo

Un tipo particular de toma de decisiones es aquel en el cual se tiene que tomar en una situación que involucra un *riesgo*, es decir, en donde existe la posibilidad de que se produzca un contratiempo o una desgracia, de que alguien o algo sufra perjuicio o daño. En esta categoría de decisiones un tipo especial ha tenido una atención incipiente en la educación matemática: el papel de la cultura estadística en las decisiones dentro de un contexto riesgoso (Watson, 1997; Watson, Collins and Moritz, 1997; Watson, 1998). Según Watson (1998) tanto la investigación como el currículo en las Ciencias de la Salud, en el área de los riesgos para la adolescencia, han ignorado la contribución potencial que podría aportar la comprensión de la estadística o la probabilidad, a la capacidad de los estudiantes para obtener conclusiones confiables, acerca de los factores que influyen en su comportamiento. Sin embargo, según Watson (1998), el currículo matemático escolar, ha empezado a tomar en consideración el riesgo en la definición amplia de *cultura matemática*, (numeracy), que se requiere para las experiencias de la vida y cita el caso de A

*National Statement on Mathematics for Australian School*, según el cual realizar selecciones informadas requerirá una comprensión general de las matemáticas subyacentes en el análisis de los costos y beneficios.

Watson (1997) ha sugerido una jerarquía la cual podría ser útil para comprender los conceptos necesarios para interpretar el azar. La jerarquía involucra tres niveles:

- (1) tener conocimiento de los términos estadísticos básicos;
- (2) reconocerlos e interpretarlos en contextos de aplicación;
- (3) ser capaz de cuestionar las afirmaciones no realistas formuladas por los medios de comunicación y otros.

De acuerdo a Watson (1998), las situaciones en donde los adolescentes enfrentan riesgos proporcionan contextos adecuados en los cuales se puede considerar la jerarquía que propone. Para ello, plantea las tres preguntas siguientes, en torno a las cuales, según él, (Watson, 1998), no se ha realizado mucha investigación:

- Nivel 1: ¿Existe la comprensión básica requerida para interpretar las probabilidades asociadas con las afirmaciones de riesgo?
- Nivel 2: ¿Existen situaciones de riesgo comprendidas en el contexto y bajo las condiciones presentadas? ¿Los alumnos entienden las asociaciones entre los datos empíricos sobre los cuales se basan los estados?
- Nivel 3. ¿Pueden los adolescentes cuestionar, cuando es apropiado hacerlo así, las afirmaciones con respecto a las relaciones entre los datos empíricos, el método de presentación y el estado de riesgo?

Según Watson (1998), la investigación acerca de la comprensión básica de los alumnos en relación a la probabilidad y a sus habilidades generales con respecto a su cultura estadística indica que para muchos adolescentes la respuesta a todas las preguntas anteriores posiblemente sea “no”.

De acuerdo a Watson (1998), los alumnos necesitan saber no solamente por qué no deben involucrarse en prácticas sexuales inseguras, o no permanecer largo tiempo bajo el



sol en la playa, sin protección; sino también cómo juzgar proposiciones acerca de riesgo que tengan que ver con desastres ambientales y con accidentes nucleares, y que esto hace a la cultura estadística, en relación al riesgo, la responsable de muchas áreas temáticas en el currículo escolar.

## La Toma de Decisiones y la Resolución de Problemas

*The Complete Problem Solver*, (Hayes, 1981) es un libro de texto diseñado para enseñar las habilidades de pensamiento a estudiantes universitarios y para informarles acerca de los descubrimientos de la investigación sobre el pensamiento. El apartado dedicado a la toma de decisiones divide los problemas en cuatro clases: decisiones bajo certidumbre, riesgo, incertidumbre y conflicto.

Las decisiones bajo certidumbre surgen cuando la persona conoce todas las opciones y sus propiedades, pero puede tener dificultades para separar los pros y los contra. Hayes discute varias estrategias; por ejemplo, la ordenación lexicográfica elige la dimensión más importante de variación y calcula sus ventajas y desventajas; a continuación trata la siguiente dimensión en importancia y así sucesivamente.

Entre los demás enfoques examinados se encuentran las sumas ponderadas de atributos y la “satisfacción”, donde la persona que toma decisiones examina las opciones hasta que encuentra una que traspasa un determinado umbral de suficiencia. Las decisiones tomadas bajo riesgo surgen cuando los sucesos se producen con una probabilidad conocida o estimable. Las conjeturas de todo tipo son un ejemplo de ello.

Hayes (1981), también escribe sobre los valores de expectación y sus limitaciones. Las decisiones bajo incertidumbre se producen cuando no existen medios fiables para estimar las probabilidades, y las decisiones bajo conflicto se producen en situaciones competitivas, como los juegos o las guerras. Para los dos últimos tipos de decisiones, Hayes (1981) considera las elaboraciones y variantes de la estrategia “mini-Maxi”, que utiliza una matriz de los posibles resultados de todos los cursos de acción bajo todas las condiciones a fin de minimizar la pérdida máxima. Se presenta el teorema de Bayes, así como la modificación de una estrategia pura de “mini-maxi” en las situaciones competitivas en una estrategia mixta en la cual los diferentes enfoques se toman con diferentes probabilidades.

Con ello se logra optimizar los resultados, según la teoría del juego. Por último, Hayes (1981), discute el análisis de costos y beneficios, en el cual es necesario determinar todas las posibles consecuencias de los cursos de acción y considerar los costos y los beneficios. Se presta atención al problema de descubrir todos los posibles costos y beneficios, y el problema de las “manzanas y naranjas” que consiste en asignar valores conmensurables a factores tan diferentes como la salud y la conveniencia.

## Las Matemáticas y la Toma de Decisiones

Una serie de ramas de las matemáticas (Jurguín, 1973; Hurwicz, 1968; Lucas, 1988), está estrechamente relacionada con los problemas de la toma de decisiones. La tabla que se muestra a continuación, (Lucas, 1988) registra una docena de aspectos que interesan al tomar una decisión y la especialidad matemática a que ha dado lugar.

Aspecto que interesa en la decisión	Tema matemático relacionado
1. Identificar y medir variables estratégicas	Teoría de la Medición
2. Comprender un sistema complejo	Análisis de Sistemas, Teoría de Gráficas
3. Cuantificar preferencias	Teoría de la Utilidad
4. Formular objetivos y restricciones	Programación Matemática
5. Adquirir datos y predecir resultados	Estadística
6. Determinar los resultados más eficientes	Teorías de Optimización
7. Trabajar con incertidumbres	Teoría de las Probabilidades
8. Resolución de conflictos	Teoría de Juegos
9. Mecanismos de decisión grupal	Teoría de la Preferencia Social
10. Consideraciones de equidad	Teoría del Reparto Justo
11. Tomar decisiones utilizando un enfoque multidisciplinario	Investigación de Operaciones, Ciencia de la Dirección
12. Tomar decisiones en un ambiente institucional	Ciencia Política

## La evaluación.

En el Capítulo 1 definimos *evaluación* como *el enjuiciamiento sistemático de la valía o el mérito de un objeto* (Joint Committee on Standards for Educational Evaluation, 1981).

A la hora de llevar a cabo una evaluación, deben tenerse en cuenta las siguientes preguntas:

- ¿Qué valores deben ser mencionados al juzgar los resultados?
- ¿Qué criterios deben ser adoptados y cuáles deben tener preferencia?

- ¿La evaluación debe ser comparativa?
- ¿La evaluación debe servir para guiar el desarrollo, responsabilizar a los profesionales, ordenar las opciones o promover nuevas intuiciones acerca de los fenómenos implicados?

Para nuestro estudio es importante sobre todo la última pregunta en lo que se refiere a la ordenación de opciones: para decidir hay que ordenar varias opciones.

Cotidianamente la mayoría de nuestras evaluaciones se basan en la intuición. Pero no todas pueden ser así. Cuando se pasa de las evaluaciones realizadas con juicios rápidos e intuitivos a las que suponen una rigurosa recopilación de resultados que deben ser considerados de un modo efectivo, necesariamente se llega a áreas del conocimiento como la epistemología, las reglas empíricas, las ciencias de la información, la metodología de la investigación, las valoraciones (ética), la estadística, la comunicación, etc.

Los evaluadores profesionales, para realizar sus evaluaciones, utilizan técnicas como las siguientes: las entrevistas, los informes preliminares, el análisis de contenidos, la observación, el análisis político, el análisis económico, el examen investigativo, los informes técnicos, el estudio de casos, la evaluación sin metas, la escucha de opiniones contrapuestas, las listas de control, la elaboración de pruebas, el análisis estadístico, el diseño de la investigación, el análisis sistemático, la teorización y la administración de proyectos (Stufflebeam y Shinkfield, 1985).

Una evaluación debe cumplir las siguientes condiciones (Joint Committee on Standards for Educational Evaluation, 1981): debe ser *útil, factible, ética y exacta*.

## La estadística y el tratamiento de datos.

Hace aproximadamente noventa años, G. H. Wells (1856-1946), autor de *La Guerra de los Mundos* dijo: “El pensamiento estadístico será un día tan necesario para el ciudadano eficiente, como las capacidades de leer y escribir”, (Citado en Jacobs, 1970: 392). Actualmente hay propuestas curriculares, entre ellas NCTM (2000); Moore (1990), AAAS (1998) para las matemáticas escolares que parecieran hacer eco de la idea de Wells, al integrar estadística y probabilidad como contenidos matemáticos básicos. En este aspecto

hay que hacer notar la paulatina sustitución del concepto “estadística” por los siguientes: “manejo o tratamiento de datos” (Ainley y Pratt, 2001), “análisis exploratorio de datos” (Lucas, 1991) y “análisis de datos”(Moore, 1991).

La información concreta sobre hechos, elementos, etc., que permite estudiarlos, analizarlos o conocerlos recibe el nombre de *dato*. Por ejemplo, para estudiar, analizar y conocer los siguientes hechos: a) La situación del sistema ferroviario mexicano; b) La situación del empleo formal en México y, C) La situación del Impuesto Sobre la Renta (ISR) en México, necesitamos *datos*. Algunos de ellos se muestran a continuación.

<b>Año</b>	<b>Pasajeros (miles)</b>	<b>Pasajeros-kilómetros (millones)</b>	<b>Distancia media (kilómetros)</b>	<b>Coches de pasajeros</b>
1993	10,878	3,219	296	1,029
1994	7,189	1,855	258	1,113
1995	6,678	1,899	284	1,242
1996	6,727	1,799	267	513
1997	5,092	1,508	296	509
1998	1,576	460	292	483
1999	801	254	317	295
2000	334	82	246	220
2001	242	67	277	48
2002	237	69	291	56
2003	270	78	289	56

Fuente: Anuario estadístico 2003, Secretaría de Comunicaciones y Transportes (SCT)

\*La Jornada en la Economía, suplemento semanal de La Jornada. 7 de febrero de 2005.

### Empleo formal en estados seleccionados entre 2000 y 2004

Miles de personas

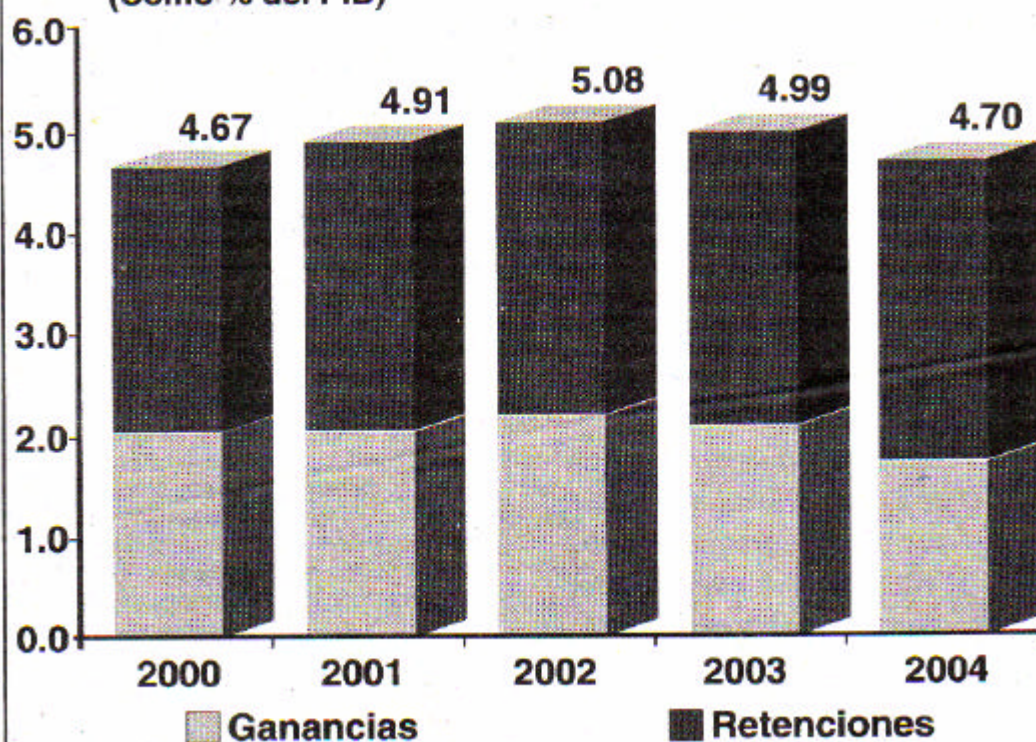
Entidad	2000	2001	2002	2003	2004
Total Nacional	12,570	12,196	12,257	12,222	12,581
Baja California	609	555	553	558	593
Chihuahua	723	640	617	610	621
Coahuila	522	487	493	475	487
Distrito Federal	2,264	2,198	2,185	2,176	2,211
Durango	181	162	163	160	165
Hidalgo	146	144	142	140	142
México	1,036	1,015	1,012	991	1,014
Puebla	422	398	399	385	391
Sonora	371	343	337	340	364
Tamaulipas	534	509	499	494	518
Tlaxcala	77	74	72	68	72

Fuente: IMSS

\*La Jornada en la Economía, suplemento semanal de La Jornada. 4 de abril de 2005.

### Impuesto sobre la renta

(Como % del PIB)



Fuente: Servicio de Administración Tributaria

LA JORNADA

La Jornada. 3 de abril de 2005. Pág. 26.



Considerando la información proporcionada parece que no es “difícil” aceptar las siguientes conclusiones: Para el caso del sistema ferroviario: *“Luego de casi una década, desapareció prácticamente el movimiento de pasajeros”*. Para el caso del empleo permanente: *“Generar empleos formales, con prestaciones y bien remunerados ha sido una batalla perdida en los últimos años ...”*. Para el caso del Impuesto al Sobre la Renta: *“Hay una tendencia a la baja en el cobro del ISR”*.

Datos como los anteriores son, actualmente, contenido casi obligado en cualquier periódico o revista. En consecuencia cabe preguntarse: Cuando un ciudadano lee el periódico, ¿qué significados construye para tales datos? ¿Mediante qué proceso llegan a constituir la información significativa para el ciudadano que lee el periódico? Estos datos son aspectos de lo que en matemáticas se conoce como Estadística, la cual es una rama de las matemáticas que trata con la recolección, organización e interpretación de hechos numéricos.

En una situación problemática es muy posible que se cuente con datos de naturaleza distinta; por ejemplo, se pueden tener datos numéricos provenientes de una regla pero los datos ligados a una regla tienen una regularidad que los hacen muy diferentes en cuanto a su naturaleza de los datos más “desordenados” que se obtienen de experimentos o de encuestas. La yuxtaposición de dos o más clases de datos puede ser efectiva en la construcción de significados para datos provenientes de diferentes fuentes, por ejemplo datos ligados a una regla, como puede ser una relación lineal (Ainley y Pratt, 2001).

El mismo término “manejo de datos” (Ainley y Pratt, 2001), refleja los cambios recientes en la forma en la cual el tópico se enfoca en el currículo escolar, extendiendo la “representación gráfica” a la enseñanza primaria, y ampliando el acceso a la “estadística” en la escuela secundaria. Este cambio, no hay duda, ha sido influido por factores como los siguientes: la disponibilidad de tecnología, la cual hace posible manejar y presentar grandes cantidades de datos; el aumento en el uso y en la conciencia pública de la estadística, y la introducción en el currículo escolar de las nociones de relevancia y ciudadanía.

Hay que insistir en que el cambio de “estadística” por “manejo de datos” no es un asunto de nomenclatura, sino de enfoque o perspectiva de los contenidos estadísticos: son los mismos conceptos y métodos de la estadística, pero con un enfoque diferente: el manejo de datos es el arte de dejar que los datos hablen, de ver patrones en los datos que no se

hubiesen previsto. El manejo de datos es informal, no busca respuestas a preguntas específicas. El manejo de datos puede revelar errores obvios o un efecto importante que no fue anticipado.

El manejo de datos combina “resúmenes numéricos” (frecuencias, promedio aritmético, mediana, cuartiles) con representaciones gráficas (histogramas, gráficas de los valores de dos variables como puntos en el plano, la representación gráfica de la mediana, los cuartiles y las observaciones de los extremos - diagramas de caja-, etc.). Las representaciones gráficas se pueden comprender más fácilmente que las columnas de datos, por lo tanto, las gráficas son herramientas poderosas en el manejo de datos (Lucas, 1991).

Se utiliza la expresión “construir significados a partir de datos” (Ainley y Pratt, 2001) para referirse al proceso psico-pedagógico que ocurre cuando los estudiantes se involucran en actividades, en donde manipulan e interpretan datos en forma significativa: el interés está en los significados que se pueden construir (sobre conceptos estadísticos o en cualquier uso real de ellos en resolver problemas) a través de la manipulación e interpretación intencionadas de datos.

La construcción de significados a partir de datos involucra la construcción de significados para los mismos números y para las funciones de aquellos datos, tales como el promedio, la tendencia, la dispersión y la distribución. Excepto para el caso de los mismos números, los significados que se pretenden construir corresponden a objetos que no existen explícitamente en los datos y que sólo existen como construcciones mentales.

El interés radica en “actividades orientadas hacia los conceptos”, las cuales tienen el propósito de ofrecer oportunidades para la construcción de significados para ideas estadísticas poderosas, tales como las de promedio, variación, azar, distribución, asociación, tendencia, la aplicación de tales ideas en la resolución de problemas, aplicando modelos matemáticos a los datos y comprendiendo el papel de tales modelos.

Por ejemplo, un conjunto de datos podría utilizarse con el propósito explícito de proporcionar oportunidades para que los estudiantes construyan significados para el promedio a partir de los datos, poniendo énfasis en el comportamiento del promedio con un significado matemático: cómo y por qué el promedio puede ser útil para darle sentido a los datos. Se podría poner énfasis en el promedio como “el mejor” estimado, y tal vez estudiar las propiedades de los diferentes promedios calculados a partir de los datos o el estudiante

puede muy bien construir un significado para el promedio, el cual tenga que ver con su utilidad.

Una perspectiva particular, para el manejo de datos es El Análisis Exploratorio de Datos. El Análisis Exploratorio de Datos, el cual es un enfoque para el análisis de datos desarrollado por Tukey (1977), está enfocado a la organización, descripción, representación, y análisis de datos, y hace uso de manera amplia de presentaciones visuales, muy frecuentemente a través del uso de tecnología.

### La Investigación en Educación Matemática acerca de la Incertidumbre

El grueso de la investigación en el tema de incertidumbre ha estado dedicado a las nociones básicas del pensamiento probabilístico. Shaughnessy (1992) hace una revisión del estado del arte en Probabilidad y Estadística haciendo énfasis en conceptos de probabilidad. En esta revisión él no hace referencia al concepto “Manejo de Datos”, cuando en 1989, la UNESCO en su libro *Estudios en Educación Matemática. La enseñanza de la estadística* (Dunkels, 1989), le dedica un amplio espacio a tal concepto, y al cual Shaughnessy, Garfield y Greer le dedicarán, en 1996, un capítulo en el *International Handbook of Mathematics Education* (Shaughnessy, Garfield y Greer, 1996a). Lo único que muestra es lo nuevo del concepto “Manejo de datos”.

Con respecto a la estadística la presente investigación se refiere a algunos resultados que tienen relación con los *promedios* (Watson y Moritz, 1999a; Watson y Moritz, 1999b; Goodchild, 1988; Mokros y Russell, 1995), la *mediana* (Barr, 1980), la *moda* (Barr, 1980), la *media aritmética* (Cai, 1995; Strauss y Bicler, 1988; Leon y Zawojewski, 1991), la *media* (Hardiman, Well, y Pollatsek, 1984; Pollatsek, Lima y Well, 1981) y en general, al *manejo de datos* (Doerr y English, 2003; Ainley y Pratt, 2001; Shaughnessy, Garfield y Greer, 1996b; Tukey, 1977; Cobb, 1999).

La pregunta que ocupa el centro de la investigación en la construcción de significados a partir de los datos, (Ainley y Pratt, 2001) es la siguiente: cuando un alumno, o un grupo de alumnos están en posesión de datos, ¿de qué manera transforman mentalmente (suponiendo que transformación es una metáfora adecuada para describir el proceso) el



conjunto de números, caracteres o figuras en información significativa? Se investiga este aspecto para el caso particular del concepto de *promedio*.

### La investigación en educación matemática del concepto de *promedio*.

El término *promedio* se usa comúnmente en ámbitos sociales de la vida diaria y, generalmente, es sinónimo del término *media aritmética*

Reflejando la visión tradicional del *promedio* como la *media*, la investigación matemática sobre la comprensión en los estudiantes del concepto promedio empieza en el lapso de tiempo comprendido entre 1980 y 1990 a nivel universitario con el concepto complejo de media ponderada (Hardiman, Well, y Pollatsek, 1984; Pollatsek, Lima y Well, 1981). Desde entonces el interés se ha desplazado a estudiantes más jóvenes y hacia cómo construyen significados de la media aritmética y de sus propiedades.

Goodchild, (1988) reportó los significados para el *promedio* en estudiantes de bachillerato, en términos de **representatividad** (qué tanto una cierta “medida” representa a una colección de datos), **localización** (en qué “lugar”, de la colección de datos se “encuentra” el número que la representa), y **expectativa** (qué valor se esperaría para una cierta característica de un objeto individual, si se conoce el número que representa a la cualidad para una cierta colección de objetos a la que pertenece el individuo), concluyendo que las experiencias de los estudiantes no engendraron un significado sofisticado del concepto.

Strauss y Bicler (1988) y Leon y Zawojewski (1991), usaron tareas que involucraban situaciones de reparto igual, sin mencionar el término *promedio* para analizar en detalle los significados que les asocian los alumnos de ocho a catorce años de edad a siete propiedades del *promedio*. Entre las propiedades estaban incluidas propiedades matemáticas (por ejemplo, la suma de las desviaciones de la media es cero); propiedades estadísticas abstractas (por ejemplo, el promedio puede ser un número que no tenga contraparte en la realidad física) y representatividad. Concluyeron que las diferentes propiedades se desarrollan a diferentes edades, si bien no se propuso una estructura específica para el desarrollo de la adquisición de las propiedades.

Por otro lado en un estudio con 250 alumnos del sexto grado, Cai (1995) encontró que mientras el 88% reconocieron el algoritmo correcto para calcular la media aritmética, solamente el 50% podría aplicar el concepto para resolver un problema abierto.

Gal, Rothschild, y Wagner (citados por Watson, y Moritz, 1999a), investigan el desarrollo del razonamiento estadístico para aplicar el concepto de promedio a la tarea de comparar dos conjuntos de datos. Clasifican las respuestas de niños de tercer y sexto grados de la siguiente forma: (a) *estadística*, cuando se incluyó el cálculo de la media aritmética; (b) *proto-estadística*, cuando sólo se consideraron algunos hechos de los conjuntos de datos; y (c) *otra/tarea específica*, cuando se incluyeron el uso de totales aún cuando los conjuntos de datos no eran del mismo tamaño.

En un estudio posterior, Gal, Rothschild, y Wagner (citados por Watson, y Moritz, 1999a), analizaron las respuestas que produjeron alumnos de tercer, sexto y noveno grados a preguntas específicas sobre la media aritmética, en el mismo contexto del estudio anterior y encontraron un incremento en el conocimiento de la media con la edad pero los alumnos se mostraron reticentes a usarla como una herramienta para comparar conjuntos de datos. Watson, y Moritz (1999b), utilizando tareas semejantes, encontraron que los estudiantes frecuentemente no consideraban el promedio del conjunto de datos cuando se presentaban en forma de gráficas, si bien algunos podían calcular la media aritmética cuando se les pedía realizarlo.

Mokros y Russell (1995) consideraron una variedad de problemas sobre construcción, interpretación y promedio pesado para investigar los diferentes enfoques de los estudiantes, de cuarto, sexto y octavo grados para el concepto de promedio y las relaciones entre el promedio y un conjunto de datos. Reportaron cinco enfoques para resolver una serie de problemas basados en datos concretos y diseñados para explorar las formas en que los estudiantes describen la representatividad y usan la media aritmética. Dos enfoques que no se vieron como representativos consideraron al *promedio* como moda o como algoritmo. Tres enfoques que aparecieron como representativos identificaron al *promedio* como algo justo, como el punto medio, o como el punto matemático de equilibrio. Una observación importante en el estudio es la siguiente:

...hasta que un conjunto de datos pueda pensarse como una unidad, y no simplemente como una serie de valores, no puede describirse y sintetizarse como algo que es más que

la suma de sus partes. Un promedio es una medida del centro de los datos, un valor que representa aspectos del conjunto de datos como un todo. Un promedio no tiene sentido hasta que el conjunto de datos tenga sentido como una entidad real (Mokros y Russell, 1995: 35).

Este es el hecho crucial que cambia al promedio de algo que fue el objetivo de una tarea dirigida hacia un procedimiento a algo que se aplica para resolver otras cuestiones.

Mientras Mokros y Russell (1995), identificaron ideas relacionadas con la media (medio, intermedio) y con la moda (mayoría), muy poca investigación se ha dirigido específicamente hacia estos dos aspectos. Barr (1980) reportó las respuestas de estudiantes de ciencias y de ingeniería a problemas dirigidos específicamente a la mediana y a la moda. Describió “conceptos superficiales” que no reflejan sutilezas de los dos constructos.

Moritz, Watson y Pereira-Mendoza (1996), citados por Watson y Moritz (1999a), exploraron la relación entre el lenguaje natural y los términos estadísticos promedio, muestra y aleatorio. Encontraron que se observan diversos sentidos coloquiales así como pre-matemáticos para el promedio en descripciones basadas en el lenguaje que los estudiantes hacen del mismo. Los términos que predominan son: *típico*, *normal*, *muy bien*, e *intermedio*. Estas primeras definiciones de trabajo se refinan posteriormente para especificar, de manera más precisa, cómo los conceptos se relacionan a conjuntos de datos, y frecuentemente están ligados a ejemplos de contextos tales como el promedio de alturas o pesos.

Watson y Moritz, (1999a, 1999b), en investigaciones que se han extendido por varios años, han fijado su atención en el desarrollo de las ideas relacionadas con el promedio a través de los diversos grados elementales de escolaridad (grados, 3, 5, 6, 8, 9 y 11). De acuerdo a Watson y Moritz (1999a) la apreciación inicial de los estudiantes del concepto promedio parece derivarse de su experiencia de oír esta palabra en la conversación, dirigida hacia otros usos. La idea de representatividad del concepto de promedio para un conjunto de datos es un concepto básico que relaciona la medida y su propósito, y constituye la base para un desarrollo posterior del concepto que involucra la evaluación de la representatividad de las distintas medidas del promedio, así como para determinar las características de un conjunto de datos basadas en la medida del promedio calculado.

Sin embargo, según Watson y Moritz (1999a), para muchos estudiantes la idea de representatividad del promedio no es visible en sus intentos de identificar el promedio en contextos de la vida diaria. Parece, (Watson y Moritz, 1999a) que la concepción de promedio, más natural o intuitiva, para los estudiantes, tanto en contextos personales como sociales, es la idea de **intermedio**, la cual, con posterioridad, se asocia con la mediana. Por lo general, un concepto primitivo de mediana como “intermedio”, o del concepto de moda como “igual que muchos otros” se desarrollan bastante bien antes de que se presente a los estudiantes el concepto de media aritmética (Watson y Moritz, 1999a).

En un contexto personal (Watson y Moritz, 1999a), la idea de la **mayoría** o **moda** es la siguiente conceptualización más frecuente de **promedio**, después de la idea de **intermedio**. En un contexto social, (Watson y Moritz, 1999a), en donde los números indican medidas, predominan las ideas asociadas con la moda sobre las ideas asociadas al promedio.

Doerr y English (2003) desarrollan un enfoque basado en los Modelos y la Modelación de Lesh y Doerr (2003), a partir de la modelación de datos, involucrando la construcción y uso de datos, retomando la definición de Lehrer y Schauble (2000), citados por Doerr y English, 2003: 111:

“... un proceso formado por múltiples componentes de plantear preguntas; desarrollar atributos de un fenómeno; medir y estructurar estos atributos; y entonces componer, refinar y presentar modelos para sus relaciones ...”. (citados por Doerr y English, 2003: 111)

Doerr y English (Op. cit) abordan las siguientes cuestiones: ¿Cuál es el desarrollo del pensamiento de los estudiantes acerca de la selección, ordenamiento y ponderación de datos cuando construyen sistemas que podrían usarse para describir datos y tomar decisiones? ¿Qué ideas o formas diferentes de pensar se promueven cuando los estudiantes interaccionan con la tarea y entre ellos? ¿En qué medida los estudiantes desarrollan sistemas generalizables o modelos a través de diferentes contextos?

Doerr y English (2003), ponen especial atención a las tareas que plantean a los estudiantes, diseñándolas en forma de una secuencia de cinco situaciones problemáticas, isomorfas desde el punto de vista matemático, tratando datos reales, refiriéndose a un contexto real y buscando que estos últimos sean motivantes, interesantes y relevantes para los estudiantes. La secuencia de tareas está diseñada para promover, explorar y extender,

así como aplicar, simbolizar y refinar las nociones de ordenar mediante múltiples factores y cantidades ordenadas, las operaciones y transformaciones sobre estos ordenamientos y la generación de relaciones entre y a través de cantidades para definir relaciones descriptivas y explicativas.

Los autores aplican estas tareas a estudiantes que se encuentran en un rango de edades de 10 a 13 años, quienes trabajan en grupos de tres alumnos y también con todo el grupo. Los alumnos desarrollaron un modelo (en este caso un sistema de ordenamiento) tornándose cada vez más refinado y estable a través de la secuencia de actividades. Los alumnos progresaron de métodos de pensamiento subjetivos, no-matemáticos, a un sistema sofisticado y generalizable. La línea de pensamiento que los estudiantes siguen al resolver la situación problemática no es única, sino que exhiben múltiples líneas de pensamiento. La actividad de modelación en que se involucran los alumnos está formada por múltiples ciclos de interpretación del contexto, de las cantidades, de las relaciones entre y a través de cantidades, y de las representaciones de estas relaciones. Las soluciones de los alumnos evolucionan en formas que son cada vez más útiles para describir, explicar, y tomar decisiones acerca de la situación problemática que se tenga entre manos.

Algunas investigaciones, en la línea de los *Modelos* y la *Modelación*, relacionadas con el objetivo del presente estudio.

Utilizando la perspectiva de los *modelos* y la *modelación* se han llevado a cabo numerosas investigaciones. A continuación sólo se revisan algunas relacionadas estrechamente con el presente trabajo.

La primera investigación que se revisa es: “*Using modeling eliciting problems to examine student’s understanding of early functional reasoning*”, (Koellner, K.A. y Lesh, R., 1999). El estudio registra el surgimiento del razonamiento funcional temprano y los ciclos de modelación que producen tres estudiantes cuando resuelven problemas para provocar modelos. El objetivo principal del trabajo fue comprender las series cronológicas colaborativas de significados, verbalizaciones, interacciones, modelos escritos y construcciones de conceptos matemáticos y operaciones de los estudiantes con respecto al razonamiento funcional temprano. La idea matemática central que se abordó fue la representación de situaciones y de patrones numéricos mediante tablas y graficas, así como

representar relaciones entre variables y trabajar con conjuntos grandes de datos para la toma de decisiones. La secuencia de situaciones problemáticas estuvo integrada por cuatro problemas y el estudio que se reporta es sobre el tercer problema que se trabajó. Este tercer problema se diseñó para extender y refinar las ideas iniciales exploradas y aplicadas con el trabajo de los dos primeros problemas. Se trabajó con alumnos de séptimo grado y cada uno de los cuatro problemas se aplicaron en sesiones de una hora. A los alumnos se les proporcionó un “periódico estudiantil rico en matemáticas” para ofrecerles información básica sobre la situación problemática, así como una tabla que contenía datos acerca del problema.

El tercer problema fue el siguiente: *El Problema del Juego en Computadora*. Janet y Mitch poseen una compañía que vende juegos para computadora a través de un cierto número de tiendas al menudeo. En los últimos tres meses las ventas han aumentado. Janet y Mitch desean reconocer a las tres primeras tiendas con un regalo para demostrar su aprecio. Sin embargo, tienen un problema. Mitch y Janet entienden que tomar en cuenta el total de las ventas no sería justo debido a que algunas de sus tiendas son tiendas muy pequeñas de “papá y mamá”, mientras que algunas otras se encuentran en centros comerciales grandes con mucha venta. El problema cuyo trabajo se reporta es el siguiente:

### **Problema del Juego de Computadora**

Usted es el número uno en estudios de mercado y finanzas. Su empresa se especializa en evaluar tiendas al menudeo. Mitch y Janet han pedido su ayuda para determinar a las tres tiendas a quienes les harán el reconocimiento considerando todos los factores que aparecen en su registro de datos. Por favor, evalúe que tan bien se han desempeñado las distintas tiendas en los últimos tres meses y decida a las tres a quienes se les dará la recompensa. Escriba una carta a Mitch y a Janet dándole su resultado. En su carta describa cómo evaluó a las tiendas. Proporcione detalles de cómo pueden checar su trabajo, y proporcione una clara explicación de modo que ellos puedan decidir si su método es bueno para que ellos lo usen a futuro.

A los estudiantes también se les proporcionó una tabla que registra cómo se vendió el juego *Space Fighters*, en 8 diferentes tiendas. La tabla contiene el nombre de la tienda, el número de vendedores, el número de copias vendidas del juego *Space Fighters*, el número de horas que la tienda abre a la semana y, el precio al que vendió cada copia del juego. Naturalmente todas las cantidades registradas son muy distintas unas de otras. A continuación aparece un extracto de tal tabla:

Nombre de la Tienda al Menudeo	# de Empleados	# de Copias Vendidas	Horas Abiertas por Semana	Precio por Copia
Mega Mall Computer Giant	28	1400	110	\$49
Wheelock and Sons Software	5	385	90	\$65

Todos los extractos que apoyan los resultados importantes que se reportan pertenecen a un grupo pequeño de tres estudiantes de séptimo grado. Tres resultados importantes se reportan: 1) Los estudiantes construyeron múltiples ciclos de modelación (se documentaron hasta diez). 2) Estos ciclos de modelación muestran un incremento en su estabilidad y sofisticación a medida que transcurre la sesión de resolución del problema. 3) Los resultados indicaron que los problemas para provocar modelos produjeron sistemas (o modelos) valiosos, generalizables y re-usables para seleccionar, clasificar y describir relaciones entre variables.

El Problema del Juego de Computadora evocó interpretaciones tempranas e inestables que fueron revisadas y refinadas en el grupo pequeño. Las diferentes interpretaciones que hicieron los tres alumnos del pequeño grupo que se reporta son las siguientes: 1) El primer intento fue enfocar el problema *sobre las ventas totales de cada tienda*. La información se registró en forma de tabla para comparar fácilmente las ventas totales. 2) En la segunda interpretación el problema se *enfocó sobre las ventas por el número de empleados de cada una de las diferentes tiendas*. Hicieron los cálculos necesarios, una tabla y una gráfica de barras que ilustró los dólares hechos por los empleados. 3) De nuevo, tenían claridad que necesitaban tomar en cuenta todas las variables, lo cual indicó un alto nivel de pensamiento y se *enfocaron en direcciones de ordenar a través de dos variables, las ventas totales y las ventas promedio por empleados por tienda*. 4) Su siguiente interpretación fue *enfocarse en dólares por hora*. 5) Al convertir dos variables en una (número de empleados y tiempo) los llevó a su interpretación final que fue *enfocarse en direcciones a través de tres variables*.

Las conclusiones de este estudio fueron las siguientes: 1) Durante una hora de trabajo con los problemas presentados el razonamiento funcional inicial de los alumnos se vuelve más sofisticado en la medida en que las ideas, de manera continua, se identificaron, probaron y refinaron. 2) Lo anterior se documentó a través de diez ciclos de modelación que desarrollaron los alumnos. 3) La interpretación final del problema, por parte de los

alumnos, produjo un método re-usable para determinar las mejores tiendas usando las variables dadas. 5) Al parecer cada vez que los estudiantes resolvían un problema diferente de provocación de un modelo iniciaban con interpretaciones ingenuas aun cuando los problemas de provocación de un modelo se enfocaban en la misma clase de ideas matemáticas. Así, aunque los estudiantes construyeron un sentido de una idea matemática en una situación contextual, no fueron capaces de reaplicar este conocimiento en otra situación contextual. Por lo tanto, una idea que permea esta investigación es que el conocimiento está organizado alrededor de situaciones, en sentido opuesto al conocimiento que está organizado alrededor de abstracciones.

*Problema del Catálogo de Sears.* La segunda investigación es en relación a la solución de un problema en donde hay necesidad de *ponderar* información cualitativa. Lesh y Lamon (1992) dicen:

...en muchas situaciones de resolución de problemas y de la toma de decisiones en la vida diaria, una cantidad abrumadora de información es relevante, pero con frecuencia esta información necesita filtrarse, ponderarse, simplificarse, organizarse, o interpretarse, antes de que sea útil. (Lesh y Lamon, 1992: 22)

En este caso es la información la que se pondera. Hay necesidad de decidir cuál es el grado de importancia que tiene la información que se proporciona.

Lesh y colaboradores (Doerr y English, 2003; Lesh y Doerr, 2000) han construido problemas matemáticos, dentro de su teoría de modelos y modelación, en donde la ponderación de la información es un aspecto relevante. Si uno piensa y está de acuerdo, en que el “realismo” (en el sentido de muy cercano a la realidad) es una de las características que Lesh le atribuye a este tipo de problemas, podría reconocer la importancia de la ponderación de la información. El siguiente es uno de los problemas típicos de Lesh, es el denominado Problema del Catálogo de Sears.

#### Problema del Catálogo de Sears.

**Problema.** Fred Findey empezó a enseñar en la escuela preparatoria de este lugar hace 10 años. El y su reciente esposa rentaron un departamento en el número 328 de Main Street por \$315 al mes., y también compró un VW Rabbit nuevo por \$6, 200. Su salario inicial fue de \$16, 300 al año. Este año, la hermana de Fred, Pam, también empezó a enseñar en la preparatoria. Pam, igualmente, se acaba de casar. En efecto, ella rentó el mismo departamento que su hermano rentó hace diez años, sólo que ahora la renta es de \$610 al mes. Ella también compró un VW Rabbit nuevo por el cual pagó \$13,700. Usando esta



información, y estos periódicos y catálogos, escriba una carta a el Consejo de la Escuela - recomendando (y justificando) qué tanto piensa usted que se le debería pagar a Pam.

nota: A los estudiantes se les dio: (i) una calculadora; (ii) dos catálogos de Sears -uno actual, y otro de hace 10 años, y (iii) dos periódicos -uno actual, y otro de hace 10 años.

En su solución al Problema del Catálogo de Sears los estudiantes inventaron, de acuerdo a Lesh, en forma sorprendente, formas sofisticadas de tratar con *la cuantificación de información cualitativa*. Por ejemplo, contestaron, entre otras, las siguientes dos preguntas: ¿Qué pesos debieran asignárseles a las distintas clases de información? ¿Cómo se puede combinar la información que se basa en diferentes clases de cantidades o de unidades de medida? Como puede verse, parece ser que otorgar pesos, ponderar, información cualitativa, es un aspecto importante en la resolución de cierto tipo de problemas. En general, algunos de los problemas que Lesh y colaboradores estudian, requieren para su solución procesos matemáticos como ordenar, ponderar, organizar, seleccionar y transformar conjuntos completos de datos.

## CAPITULO 3

# METODOLOGÍA

### INTRODUCCIÓN

En el Capítulo 1 de este trabajo se reconocieron algunos hechos, se planteo un problema y se formularon algunas preguntas. En el Capítulo 2 se introdujo un lenguaje, el lenguaje de los *Modelos* y la *modelación*, para poder hablar y pensar acerca del proceso de *modelación* que siguen los estudiantes cuando resuelven problemas sobre toma de decisiones y aplicación de sistemas de evaluación. En este capítulo se aborda “un” camino seguido en la búsqueda de respuesta a las preguntas planteadas, pues el arte de formular preguntas y buscar respuestas es cualquier cosa menos un conjunto de recetas (Bunge, s.f.). A continuación se abordan los siguientes apartados:

- La *comprensión*: objetivo fundamental de este trabajo.
- La Investigación Cualitativa: Método de indagación para lograr *comprensión*
- La investigación en educación matemática

- Diseño metodológico de la experiencia llevada a cabo en el contexto del salón de clases.

### La *comprensión*: objetivo fundamental de este trabajo.

El objetivo fundamental de este trabajo es aproximarse a lograr cierta *comprensión*, en relación a la conducta de estudiantes de bachillerato, cuando enfrentan situaciones problemáticas que involucran la toma de decisiones y/o la construcción y aplicación de un sistema de evaluación

El propósito está en aproximarse al sentido que los estudiantes dan a lo que hacen cuando toman una decisión o realizan una evaluación, las razones en que fundan su hacer, el proceso de construcción de sus modelos, los procesos que siguen al utilizar sus recursos, los fines que orientan sus distintas acciones, la coherencia personal del sistema de acciones que realizan.

En este sentido, en lo fundamental, el presente trabajo se enmarca en una perspectiva científica que busca *comprender*; comprender, más o menos en el sentido del verbo alemán *verstehen*: reactualizar la atmósfera espiritual, sentimientos, motivos, valores, pensamientos, del objeto de estudio; en este caso, la toma de decisiones y la realización de evaluaciones en la clase de matemáticas, (Dilthey, 1980).

Es preciso señalar, de inmediato, que la *comprensión* a la que se pretende acercarse, en torno a la toma de decisiones y a la realización de evaluaciones por parte de estudiantes de bachillerato, no es tan “amplia” como la define Dilthey. Habrá “acercamientos” a elementos de las cinco componentes que señala Dilthey (1980).

El concepto de *comprensión* es un concepto muy debatido (Mardones y Ursúa, 1982). Dilthey (1980) lo entendió, en principio como capacidad psicológica o empática. Posteriormente, bajo la influencia de Hegel le dio un significado más “objetivo”. Weber (1969) avanza en esta dirección. Para Schutz (1974) no es un método sino la forma experiencial como el pensamiento de sentido común toma conocimiento del mundo social. Gadamer (1977), la define como la interpretación lingüística de los fenómenos. Apel (1975), con Habermas (1977), ve en la *comprensión* las condiciones de posibilidad de la captación de la intencionalidad de las acciones humanas. La *comprensión* responde a la

pregunta ¿qué son las cosas? Para los teóricos de raíz empírico-analítica la *comprensión* es a lo más un procedimiento psicológico-heurístico para proponer hipótesis. Neurath (1973), creía que su utilidad no iba más allá de una buena taza de café para el científico. Según Stegmüller (1982), el concepto de explicación está considerado como la respuesta a la pregunta porqué o causa del acontecimiento. Stegmüller (1982), por su parte, no considera a la mera *comprensión* como un método científico, insiste en que se ha de llegar a la explicación causal.

### La Investigación Cualitativa: Método de indagación para lograr *comprensión*

Aceptemos que la búsqueda de *comprensión* sea el objetivo central de las ciencias sociales. La pregunta pertinente es: ¿Qué *métodos de indagación* utilizan para lograr tal *comprensión*? Ahora bien, ciencias sociales hay varias: está la Sociología, la Economía, el Derecho, la Arqueología, las Ciencias de la Educación, la Antropología, la Educación Matemática, la Psicología, la Filosofía, la Filología, la Comunicación, la Política, etc. Cada una de ellas se propone *comprender* cierta área del quehacer humano. ¿Qué *métodos de indagación* utilizan estas distintas ciencias para establecer sus conocimientos?

En principio, se esperaría, debido a la especificidad de sus objetos de conocimiento, que los *métodos de indagación* para lograr tal *comprensión* fueran distintos unos de otros, aunque tal vez, compartan rasgos en común. La denominada Investigación Cualitativa ha sido el camino, de mayor arraigo entre los investigadores sociales, para aproximarse a tal *comprensión*.

Según Taylor y Bogdan (1984), las diez características esenciales de los métodos de investigación cualitativa son los siguientes:

- 1) la investigación cualitativa es inductiva: los investigadores intentan desarrollar la comprensión de los fenómenos que se encuentran al inicio de los patrones de datos más bien que recoger datos para evaluar un modelo teórico preconcebido o hipótesis a priori.
- 2) en la metodología cualitativa, los sujetos o los grupos no se reducen a variables, sino que son considerados como un todo: el investigador cualitativo estudia el

contexto ecológico en el que se desenvuelven las personas, así como el pasado de éstas.

- 3) el investigador cualitativo presta atención al efecto que él mismo produce en las personas que estudia. Este efecto de interacción no puede ser eliminado y debe ser considerado en la interpretación de los datos. Tal cosa es la observación participante.
- 4) el investigador cualitativo trata de comprender a los sujetos al comienzo de su juego de referencia, la perspectiva fenomenológica es central, debe centrarse en la significación social que los sujetos atribuyen al mundo que los rodea;
- 5) el investigador cualitativo no saca a relucir sus propias creencias, perspectivas y predisposiciones, no se da nada por sentado; no se considera nada de inicio como “verdad”;
- 6) para el investigador cualitativo, todos los puntos de vista tienen valor, sea el del adolescente delincuente o el del juez.
- 7) los métodos cualitativos implican la corriente humanista que supone la apertura al otro y a lo social; los métodos utilizados para estudiar a los sujetos afectan necesariamente a la naturaleza de los conocimientos; lo que se examina “cualitativamente” en las personas es su vida cotidiana, y lo que se investiga es la manera en la que entienden conceptos como la belleza, el sufrimiento, el amor, etc.;
- 8) los investigadores cualitativos insisten en la calidad de la validez de su investigación: observando a los sujetos en su vida cotidiana, oyéndoles hablar de sus recuerdos, analizando los documentos que producen, ellos obtienen datos no filtrados y, por tanto, no entrecortados por conceptos *a priori*, definiciones operacionales o escalas de medida y de nivel. Por todo esto, acrecientan la validez de sus datos, de modo contrario a los investigadores cuantitativos más centrados en la fidelidad y la contrastabilidad de las investigaciones;
- 9) para el investigador cualitativo, todos los sujetos son dignos de estudio, todos son iguales aunque no dejen de ser únicos.
- 10) la investigación cualitativa es, además de la utilización de unas técnicas, la puesta en marcha de una habilidad: no está normativizada como un enfoque cuantitativo y las vías para acceder a ella son flexibles. El investigador cualitativo es un artesano,

en el sentido que crea él mismo su propia metodología en función de su campo de investigación.

Los puntos de vista de Taylor y Bogdan (1984) han recibido distintas críticas. Por ejemplo, se critica el procedimiento inductivo; se cree (Chalmers, 1987) que una observación nunca es neutra: siempre existe una teoría que precede a la observación y que la sostiene; además la investigación cualitativa siempre se lleva a cabo dentro de un marco teórico (Borges, 1985), y el investigador posee en un principio un número reducido de cuestiones que orientan el estudio, aunque las cuestiones e hipótesis fundamentales surjan más tarde, a lo largo de la investigación. Además los investigadores cualitativos se encuentran en un periodo de reflexión sobre un conjunto de problemas metodológicos que anteriormente eran considerados sin importancia: el muestreo, la generalización, las pretensiones de validez, etc. Por último, pero no por eso lo último que se les cuestiona a Taylor y Bogdan, actualmente existe la tendencia (Miles y Huberman, 1994) a no seguir oponiendo la metodología cualitativa a la cuantitativa.

El pensamiento científico actual en ciencias sociales está, en nuestros días, insoslayablemente marcado por el procedimiento cualitativo, que ha alcanzado ya un reconocimiento. Sin embargo, la investigación cualitativa choca aún con dificultades que siguen siendo importantes, y que se deben sobre todo a la complejidad y a la variedad de los factores que entran en juego. Un aspecto sobresaliente es la manera de llegar a resultados que no respondan únicamente a la característica de un particularismo estéril, es decir, la manera de evitar el relativismo de los conocimientos. Una cuestión es cómo llevar a cabo la reducción de los datos cualitativos sin provocar una simplificación exagerada. Otro problema crucial es acerca del valor del conocimiento que se obtiene de sus diversos enfoques.

Si bien en la investigación cualitativa la construcción científica se refiere a la significación subjetiva de las acciones humanas, eso no impide que deba ser objetiva en el sentido de que la recogida de datos, las conclusiones y las interpretaciones deban someterse a verificaciones controladas y no situadas meramente bajo el control de la experiencia particular, y por tanto a vez la incontrolable, del investigador.

## Características a considerar en la investigación cualitativa

La investigación cualitativa, cuya pertinencia ha sido plenamente establecida, se fundamenta en principios epistemológicos, enfrenta con ética su problemática mediante el uso de diversas metodologías que cuentan con criterios para validar la puesta en práctica. En relación a éste último punto, el asunto de la validez en base a Lincoln y Guba (1985), la calidad de una investigación científica debería valorarse de acuerdo a las siguientes cuatro características: (a) valor de verdad; (b) aplicabilidad; (c) consistencia y (d) neutralidad. Para el caso de la investigación cualitativa estas características se denominan, respectivamente: credibilidad, transferibilidad, constancia interna y fiabilidad.

La *credibilidad* es la garantía que el investigador debe otorgar en lo que toca a la calidad y la cantidad de las observaciones hechas y a la exactitud de las relaciones que él establece entre las observaciones en el momento de la interpretación. En lo que respecta a la observación, se debe permanecer en el terreno de la investigación durante un tiempo suficiente; recoger los datos de fuentes diversas y utilizar la técnica de triangulación de datos.

En el momento de la interpretación, el investigador cualitativo someterá los resultados de su análisis a los actores que han participado en los hechos con vistas a una corroboración y buscar la coherencia interna de las deducciones que se hagan y confrontar las interpretaciones con los materiales básicos de referencia, es decir, con los estudios y las investigaciones relacionadas que han permitido la elaboración de las primeras hipótesis, así como con teorías reconocidas y bien definidas.

La *transferibilidad* es la cualidad que se enfoca en ver si las conclusiones a las que se llega pueden extrapolarse a otros contextos que el estudiado. Es indispensable una descripción detallada del lugar estudiado para evaluar el grado y el tipo de semejanza entre el lugar observado y otros lugares a los cuales se desea transferir las conclusiones. Es recomendable escoger a los sujetos en función de la pertinencia de sus características respecto de los objetivos de la investigación (muestreo teórico o razonado), incluyendo tanto casos típicos como atípicos.

La *constancia interna* consiste en la independencia de las observaciones y de las interpretaciones respecto de las variaciones accidentales o sistemáticas, tales como el tiempo, la experiencia o la personalidad del investigador, los instrumentos utilizados, las

condiciones en las que se recogen los datos, etc. Es recomendable una descripción precisa y detallada de los procedimientos empleados por el investigador para recoger e interpretar los datos: utilizar la triangulación de observadores y temporal y en la redacción del trabajo, procurar explicar el significado de los términos “técnicos” utilizados.

La *fiabilidad* consiste en la independencia de los análisis respecto de la ideología del investigador. Como condición de la fiabilidad, está la lucidez del investigador respecto de sus juicios y el reconocimiento de éstos en tanto que elementos que influyen en sus análisis e interpretaciones (triangulación interna del investigador). Es necesario que el investigador enuncie con claridad sus presupuestos y orientaciones epistemológicas y realizar sus análisis sobre la base de opiniones teóricas alternativas o concurrentes (triangulación teórica).

## La investigación en educación matemática

De las ciencias humanas más recientes está la Educación Matemática y como tal, se ha beneficiado de los logros de aquellas otras ciencias sociales que le antecedieron en el tiempo, en particular de los métodos de indagación. Los educadores matemáticos no han dudado en recurrir a construcciones conceptuales de otras ciencias en su lucha por construir la especificidad de la educación matemática. De esta forma, la Educación Matemática, en su búsqueda de comprensión de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, se ha valido en particular de los métodos de indagación conocidos, en términos generales, como métodos cualitativos, los cuales, teniendo sus raíces en otras ciencias sociales han sido rehechos para adaptarse a la problemática de la educación matemática.

La investigación en educación matemática es una actividad compleja. En ella están presentes elementos como los siguientes: el objeto de estudio, el problema de investigación, las preguntas de investigación, la población en la cual se estudia el aspecto que interesa, el contexto en el cual se estudia el problema, el investigador, los instrumentos para llevar a cabo la investigación, la recabación de información, el análisis e interpretación de la información, los resultados.

Naturalmente, al final de cuentas, lo que interesa de la investigación son los resultados que se obtengan. Sería deseable que estos últimos fueran un producto de



“calidad”, que fuesen “buenos” resultados. Con independencia de lo que entendamos por “resultados buenos o de calidad”, es claro que estos dependen de diversos factores que van desde el planteamiento del problema hasta la redacción de los resultados, pasando por la formulación de las preguntas, la elaboración de los instrumentos, la recabación, análisis e interpretación de la información, sólo por señalar los aspectos más visibles que están presentes en toda investigación.

Por ejemplo, a los revisores, encargados de valorar los manuscritos que se presentan al JRME se les pide que consideren, al emitir sus opiniones (Williams, 2005), si: (a) la investigación extiende o profundiza nuestra comprensión de cuestiones importantes o tiene el potencial para conducir el campo en nuevas direcciones; (b) las preguntas de investigación están bien fundamentadas en la teoría o en investigaciones previas; (c) existe una adecuada compaginación entre las preguntas de investigación y los métodos y los análisis; (d) la realización del estudio incluye la aplicación efectiva de técnicas apropiadas de recolección, análisis e interpretación de datos; (e) las afirmaciones y conclusiones en el manuscrito están justificadas; y (f) el escrito es lúcido, claro y bien organizado.

El contenido fundamental de este capítulo tiene que ver con el punto (c) y parcialmente con el (d). Una de las dificultades, no menor, en la investigación cualitativa es la elección de “una” metodología de investigación debido a la diversidad de posturas epistemológicas, paradigmas, enfoques, principios, criterios, métodos y técnicas existentes: Combinar distintas propuestas de estos aspectos ha puesto a disposición de la investigación cualitativa una multiplicidad de metodologías de investigación.

La pregunta central en este capítulo es la siguiente: ¿Qué metodología de investigación, de la multiplicidad existente en la educación matemática, (Grouws, 1992; Kelly y Lesh, 2000; Lesh y Doerr, 2003; Miles y Huberman, 1994; Romberg, 1992; Sánchez y Santos, 1994; Shulman, 1986; Shumway, 1980; Wittrock, 1986) permitirá responder las preguntas de investigación planteadas? La respuesta es: aquella que sea congruente con la perspectiva teórica de los *Modelos* y la *modelación*.

Metodología de investigación en educación matemática desde la perspectiva teórica de los *Modelos* y la *modelación*.

Como se dijo en el Capítulo 2 la perspectiva teórica de los *Modelos* y la *modelación* pretende ser un marco teórico para la problemática de la educación matemática, en particular para el aspecto referente a la investigación básica que en ella se realiza.

La metodología de investigación en educación matemática, desde la perspectiva teórica de los *Modelos* y la *modelación*, es de naturaleza cualitativa y en consecuencia comparte técnicas y principios que le son propias a la indagación cualitativa (Kelly y Lesh, 2000).

Lo que da especificidad a la metodología de investigación en educación matemática, desde la perspectiva teórica de los *Modelos* y la *modelación*, son los instrumentos que utiliza, la forma de aplicarlos y la manera de analizar los datos. Los instrumentos son *problemas para promover modelos*, la forma de aplicarlos es mediante *trabajo en grupos pequeños*, y la forma de analizar los resultados es a través de los *ciclos de modelación*.

Las *actividades para la promoción de modelos* (models-eliciting activities) están diseñadas para motivar a los estudiantes para que construyan sentidos para situaciones significativas, y para que inventen, extiendan, y refinan sus propios constructos matemáticos (Kelly y Lesh, 2000).

Los productos resultantes de la actividad de modelación de los estudiantes revelan el pensamiento de los estudiantes (en este sentido se dice que las *actividades para la promoción de modelos* son “reveladoras”) y proporcionan, tanto al profesor como al investigador, “lentes” poderosos para visualizar el desarrollo conceptual y del razonamiento de los estudiantes.

Además, debido a que distintas formas de desarrollo conceptual significativas ocurren en periodos breves de tiempo, con frecuencia es posible observar los procesos que los estudiantes usan para extender, diferenciar, integrar, refinar, o revisar los constructos relevantes. En consecuencia, para investigar el desarrollo cognitivo es posible para los investigadores ir más allá de describir los sucesivos estados de conocimiento a observar los procesos que promueven el desarrollo de un estado a otro (Lesh y Doerr, 2003-b)

## Diseño metodológico de la experiencia llevada a cabo en el contexto del salón de clases.

Un conjunto de situaciones problemáticas enfocadas a provocar sistemas de evaluación y sistemas de clasificación nos proporcionan el escenario en el cual intentamos examinar el desarrollo de las interpretaciones de los estudiantes de la situación problemática, su razonamiento acerca de elementos relevantes del sistema, su selección de cantidades, operaciones y representaciones y ver si es posible, identificar ciclos de interpretación de las situaciones problemáticas.

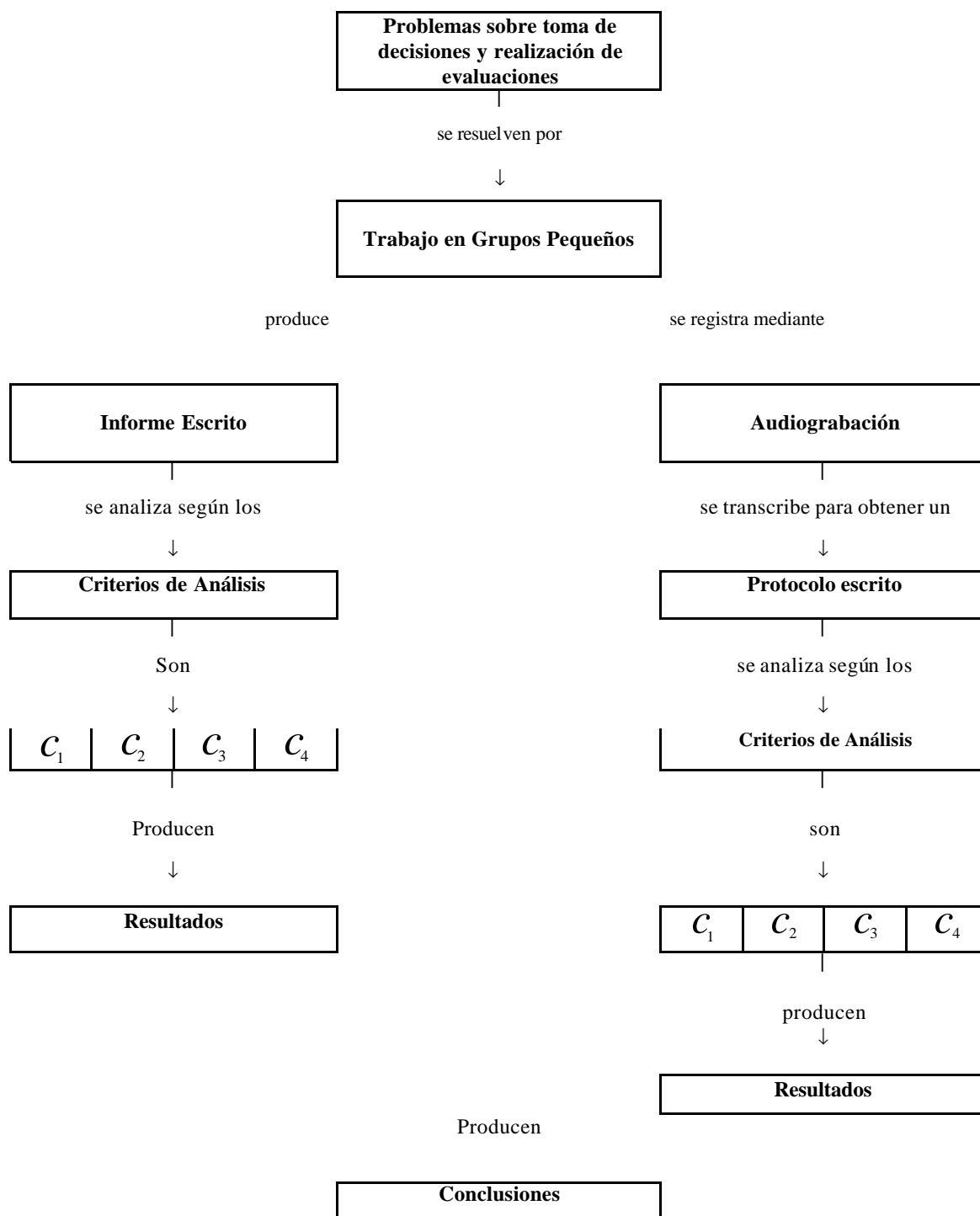
El diagrama que aparece en la página siguiente esquematiza el trabajo de los alumnos en el salón de clases, los productos de tal trabajo, los datos que se obtuvieron, el análisis que se hizo de ellos y los resultados y conclusiones a que finalmente se llegó.

A continuación se abordan los siguientes aspectos: 1) El conjunto de tareas (situaciones problemáticas) utilizadas, 2) Los participantes y el escenario, 3) Las fuentes de datos y el análisis de los mismos.

Conjunto de problemas utilizados en la experiencia.

La *toma de decisiones* y los *procesos de evaluación* son acciones que uno realiza cotidianamente y que un estudiante de bachillerato lleva a cabo en distintos contextos, ya sea en forma individual o de manera colectiva. La escuela y el salón de clases son lugares en que se toman decisiones y se evalúan cosas. Naturalmente que hay gran diversidad de contextos en donde se puede estudiar la toma de decisiones: la casa, la calle, el trabajo, etc. son algunos ejemplos. Es muy posible que la “clase de matemáticas” no se considere “contexto natural” en donde se tenga que decidir la elección de una niñera, o la compra de unos zapatos tenis; sin embargo, si se toma como ejemplo que en el transcurso de tomar una decisión o de efectuar una evaluación aparecen procesos de pensamiento de naturaleza matemática, ya no se ve tan forzada la “clase de matemáticas” como contexto natural para tales acciones. Por otro lado, si bien un individuo toma decisiones y realiza evaluaciones de manera individual, en este trabajo lo que interesa es cuando tales acciones se llevan a cabo

en forma colectiva, por tal razón las tareas que los alumnos abordan lo hacen en grupos pequeños.



Los problemas utilizados en la experiencia pertenecen a la clase denominada como *problemas de final conocido* -Ends-in-View Problems- (English, 2001; English y Cudmore, 2000; English y Lesh, 2003). Acerca de este tipo de problemas ya se trató en el Capítulo 2 (pp. 12-14). Este tipo de problemas recibe poca atención en la curricula matemática existente (English y Lesh, 2003). En nuestro caso todas las situaciones problemáticas requieren de la acción de *ponderar* algún aspecto de la situación. Cinco de tales situaciones problemáticas corresponden a lo que English y Lesh (2003) clasifican como de *manejo de datos*, cuatro de ellos pertenecen a la categoría de *construir una herramienta*, en este caso un *instrumento de evaluación*, y dos de ellos son *modelos* o *sistemas* para la toma de decisiones que utilizan la noción *ordenación multifactoral*.

En estos problemas, las ideas matemáticas esenciales están centradas en las nociones de ponderar, cuantificar información cualitativa, ordenar, seleccionar y agregar (combinar, juntar) cantidades ordenadas, construir clasificaciones. Los problemas están pensados para provocar la noción de ordenación multifactoral con la finalidad de tomar una decisión y se puede decir que todos ellos son isomorfos desde el punto de vista matemático, lo que cambia es el contexto de la situación problemática.

La tabla que aparece a continuación registra el tipo, de acuerdo a English y Lesh, (2003), y las características generales de cada uno de estos nueve problemas y en el ANEXO a este trabajo se encuentran los problemas que se utilizaron en la experiencia, así como el formato que sirvió para registrar la solución que produjeron los alumnos.

Problema	Tipo	Características
Los críticos de cine y las películas	Toma de decisiones	En base a valoraciones de críticos de cine a diversas películas se decide acerca de críticos y películas.
La familia Zapata cambia de lugar de residencia (Primera versión)	Toma de decisiones	Para seleccionar ciudades se consideran diversas cualidades, cuantitativas y cualitativas, de cada una de ellas, junto a ciertas condiciones de la situación problemática.
La niñera de Karem...una niña rubia y traviesa	Toma de decisiones	Para seleccionar a la niñera se consideran diversas cualidades, cuantitativas y cualitativas, de varias personas, junto a ciertas condiciones de la situación problemática.
Gladiadores de Neza vs. Romanos de la Roma	Toma de decisiones	Para seleccionar jugadores se consideran diversas cualidades, cuantitativas y cualitativas, de cada uno de ellos, junto a ciertas condiciones de la situación problemática.
La calificación de las licuadoras	Transformar una evaluación cualitativa en cuantitati	Se construye una evaluación cuantitativa en base a una valoración cualitativa.
La compra de zapatos deportivos	Criterios para la toma de una decisión	Se hace una propuesta de criterios a tomar en cuenta al momento de comprar unos zapatos para hacer deporte.
La elección de carrera	Criterios para la toma de una decisión	Se hace una propuesta de criterios a tomar en cuenta al momento de elegir una carrera.
El salón de clases	Construir un sistema de evaluación	Se propone un sistema de evaluación acerca de las condiciones de un salón de clase.
La película Titanic se saca un ...	Construir un sistema de evaluación y aplicarlo	Se construye una valoración de la película Titanic.

Los problemas son problemas matemáticos dentro de un contexto y se diseñaron pensando que no estuvieran muy alejados de la experiencia de alumnos de entre 15 y 16 años. Son situaciones problemáticas que no admiten una solución única sino que dependiendo de las consideraciones que se hagan, y/o de los “pesos” que se asignen a determinadas condiciones, así será la respuesta que se obtenga; es decir, las respuestas a las soluciones dependen de los supuestos que se acepten. En general, se puede decir que estos problemas, al resolverse, ayudan en *la toma de una decisión*: Tomar una decisión (la mejor), bajo ciertas condiciones; para lo cual se cuenta con varios candidatos, cada uno de los cuales tiene determinadas características.

#### Problemas de *Toma de decisiones*.

La resolución de los problemas de *toma de decisiones* demanda:

- Considerar las características de los candidatos en función de las condiciones que la situación problemática establece. Esto conduce a establecer aquellas características que serán tomadas en cuenta.
- *Ponderar* las características y establecer una jerarquía entre ellas.
- Disponer en orden jerárquico los distintos candidatos de la situación problemática.
- Discriminar entre los candidatos aquellos que reúnan las características con el “peso” adecuado, para tomar una decisión.

La siguiente tabla ilustra aspectos distintos de tres de estos problemas: condiciones de la situación problemática, candidatos, características de estos, la forma en la cual se presentan las características de los candidatos y la ordenación (ranking) que se requiere para tomar la decisión.

Problema	Condiciones	Candidatos	Características	Características dadas en forma	Ordenarlas para proponer:
<i>La familia Zapata cambia de lugar de residencia</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Razones de trabajo.</li> <li>• Tienen dos hijos adolescente por quienes están preocupados.</li> <li>• Buscan un lugar “tranquilo”.</li> <li>• Viven en la zona conurbada.</li> </ul>	12 Lugares	8P problemas	Cuantitativa	Tres mejores opciones para residir
<i>La niñera de Kareem ...una niña rubia y traviesa</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Kareem es traviesa.</li> <li>• Kareem tiene dos años.</li> <li>• Kareem es rubia.</li> <li>• Se requiere por las mañanas</li> </ul>	4 personas	7 cualidades	Cuantitativa y cualitativa	La mejor niñera
<i>Gladiadores de Neza vs. Romanos de la Roma</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Faltan 15 min. para que el partido termine.</li> <li>• Están empatados .</li> <li>• Es un partido semifinal.</li> <li>• Uno de los equipos ha estado dominando en los últimos 15 minutos.</li> </ul>	4 personas	Diversas cualidades	Cuantitativa y cualitativa	Proponer dos jugadores

Ejemplo de Problema de *toma de decisiones*, con dos posibles soluciones.

El siguiente problema es un ejemplo típico de situaciones tratadas:

**Problema**

La niñera de *Karem*...una niña rubia y traviesa

La Sra. Elizabeth y su esposo de 28 años de edad, necesitan una persona que cuide y atienda, por las mañanas, a su pequeña *Karem* que tiene 2 años de edad, es rubia y muy traviesa. La Agencia de Colocaciones "*El Mejor Trabajador*" le ofrece cuatro candidatos con algunas características que se presentan en la siguiente tabla

Persona	Edad (años)	Estudios	Experiencia (años)	Disponibilidad de tiempo	Estado Civil	Presentación	Puntualidad
Alicia	30	Bach.	3	SPH	Casada	E	MB
Betty	20	C. Técnica	1	SPH	Casada	E	E
Carolina	24	Enfermería	2	SPH	Soltera	MB	MB
Dorotea	45	Secretaría	1	Mañanas	Separada	E	R

En donde: Bach.: Bachillerato; C. Técnica: Carrera Técnica. SPH: Sin Problema de Horario. E: Excelente; MB: Muy Bien; R: Regular.

¡Ayúdenlos a elegir!. Envíenles una carta en donde les sugieran cual es, desde su punto de vista, el mejor candidato. Proporcionen suficientes razones que puedan convencerlos de su propuesta.

A continuación se ilustran dos maneras posibles de resolver el problema de la niñera de *Karem* y se resumen diferentes acciones que posiblemente subyacen en una, en otra o en ambas formas de resolución.

**Primera forma de resolución.** Viendo la columna de la edad uno podría inclinarse por Alicia ya que no es tan joven como Betty o Carolina, pero tan poco tan grande como Dorotea, y así, por la edad la candidata es Alicia. Pasando a la columna de los estudios podría elegirse a Carolina por ser enfermera, lo cual sería de utilidad en el caso de que *Karem* se enfermara en algún momento. Hasta este momento se cuenta con dos posibles candidatos: Alicia por la edad y Carolina por sus estudios. En la columna de la experiencia se observa que las dos de más experiencia son Alicia y Carolina, llevándole un poco de ventaja Alicia ya que tiene 3 años de experiencia y Carolina 2 años. Aún así, se mantiene a las dos candidatas por arriba de las cuatro restantes. Considerando la columna de la disponibilidad de horario, ambas están en las mismas condiciones ya que ninguna de las dos tiene problemas de horario. Tomando en cuenta su estado civil se observa que una es casada y la otra soltera, ¿a cuál de las dos preferimos? Esta situación lleva a otra decisión:

hay que decir qué es más importante en el trabajo del cuidado de Karem, estar casada o ser soltera. Se pospone esta decisión después de considerar la presentación y la puntualidad.

Con relación a la presentación se observa que la de Alicia es excelente y la de Carolina muy bien; en este aspecto conviene estar de acuerdo que en este rubro ambas se encuentran en condiciones iguales ya que no hay una marcada diferencia entre tener una excelente presentación y estar bien presentable. Por último al considerar el aspecto de puntualidad, ambas están en iguales condiciones. En resumen: partiendo de las suposiciones de que tener una edad de 30 años y tener estudios de enfermería son cualidades “superiores” para dedicarse al cuidado de Karem, y después de considerar, ponderar y comparar las cinco restantes cualidades, hay dos candidatos con sus respectivas cualidades: Alicia, de 30 años, con estudios de bachillerato, 3 años de experiencia y casada; Carolina, de 24 años, con estudios de enfermería, dos años de experiencia y soltera. ¿A cuál elegir? De nuevo, hay una situación de toma de decisión: ¿Por quién decidir? Se considera que: a) entre 24 y 30 años de edad “no hay mucha diferencia”, b) entre 3 y 2 años de experiencia “no hay mucha diferencia”, c) ser enfermera es más importante y d) no importa si se es casada o soltera, la elección es por Carolina. Pero, si consideramos que: a) es preferible una niñera de 30 años a una de 24 años, b) es más importante contar con experiencia que tener estudios y, c) es preferible una persona casada a una soltera, la elección sería Alicia. Bajo otras consideraciones, suposiciones o valoraciones, la elección pudo haber sido diferente. Contar con información “incompleta”, “vaga” o interpretable, así como ser de naturaleza condicional la respuesta a que se llegue, son características de estos problemas.

***Segunda forma de resolución.*** Otra forma de abordar el problema es utilizar recursos claramente matemáticos; sin embargo, para este tipo de problemas el utilizar recursos matemáticos no sustrae de *ponderar situaciones* bajo argumentos extramatemáticos, muchos de ellos subjetivos. De principio se reconoce lo discutible, por la subjetividad implícita y explícita de la ponderación que se hace de algunas situaciones. En esta línea de pensamiento primero se decide si es o no el caso de considerar relevantes o irrelevantes algunas de las cualidades (edad, estudios, experiencia, disponibilidad de tiempo, estado civil, presentación, puntualidad) de que se informa con relación a la elección de la niñera.



*Edad.* La edad de una persona dedicada al cuidado de un niño es importante debido a que el pequeño, por su inexperiencia e ignorancia, puede asumir conductas peligrosas para su integridad física ante las cuales el encargado de su cuidado podría carecer de experiencia debido a su edad en el caso de que sea “joven” (menor de 20 años), o no resistir a la actividad física del niño en el caso de que sea un “adulto mayor” (mayor de 50 años). En este aspecto se acepta que una edad “adecuada” para cuidar niños menores de seis años se encuentra en el intervalo de los 20 y cincuenta años.

*Estudios.* Los estudios acerca del trato, cuidado, manejo y educación del niño es un aspecto importante debido a que proporciona elementos racionales al momento de decidir en situaciones problemáticas. Una persona que posea conocimientos de *Educadora* podría garantizar cierto nivel de conocimientos con relación al trato y cuidado de los niños. En un nivel parecido podría estar un médico, una enfermera, un dietista, un profesor de deportes, un psicólogo: de alguna manera sus conocimientos los ponen más cerca de lo que podría estar un plomero, por ejemplo, de la actividad del niño.

*Experiencia.* Si estamos de acuerdo en que la experiencia -entendida como el repertorio de vivencias acerca de algo- depende un tanto del tiempo dedicado a ése algo, uno esperaría que entre más tiempo le haya dedicado una persona al cuidado de niños, su repertorio de problemas y respuestas con que cuenta es mayor y por lo tanto, su desempeño en el cuidado del niño sea mejor.

*Disponibilidad de tiempo.* Este aspecto es importante sobre todo para las personas que contratan el servicio debido a que lo deseable es contar con una persona que pudiese estar disponible en el tiempo que se le necesite.

*Estado civil.* Se considera que este aspecto no tiene relevancia para el cuidado del niño. No se percibe que haya elementos que hagan diferente a una persona de otra con respecto a su estado civil, en relación al cuidado de un niño.

*Presentación.* El aspecto de la presentación que es importante con respecto al cuidado del niño es la limpieza personal de la persona encargada de él. El cuidado por parte de una persona desaseada podría ser causa de enfermedades en el niño.

*Puntualidad.* La puntualidad es importante para el que contrata el servicio debido a que él debe tener la seguridad de que la persona que cuidará al niño esté presente, salvo

razón justificada y, en lo posible, prevista con anterioridad, en el periodo de tiempo que se le requiere.

De la argumentación precedente, en este caso se consideran seis cualidades como relevantes para el trabajo de niñera: edad, estudios, experiencia, puntualidad, disponibilidad de horario, presentación y solamente se considera al *estado civil*, como una cualidad irrelevante para el cuidado de Karem.

Como segundo paso está jerarquizar a cada una de las seis cualidades restantes (edad, estudios, experiencia, disponibilidad de tiempo, presentación, puntualidad) en la elección de la niñera. De principio habría dos posibilidades: todas tienen la misma importancia variable. En este caso se inclina por la misma importancia, o sea por el mismo peso, porque ¿que ocurriría si no cumpliera con alguna de las cualidades? Por ejemplo, que cumpliera cinco, excepto con la de puntualidad. Simplemente los papás de Karem estarían intranquilos, sabiendo que no se puede confiar en que estará a tiempo cuando se le necesite.

En el tercer paso de este proceso se asigna puntuación a cada uno de los candidatos en cada una de las seis cualidades consideradas relevantes, en base a una escala de 0 a 10 puntos para cada cualidad y tomando en consideración lo siguiente: a) la mejor edad para el cuidado de los niños está en la parte “central” del intervalo de los 20 a los 50 años, b) los estudios más adecuados son aquellos que aportan elementos para tomar decisiones en la vida cotidiana, c) entre más años se tenga una actividad se adquiere más experiencia, d) la disponibilidad de horario es adecuada cuando se encuentra en el intervalo de las necesidades del demandante de los servicios, e) las equivalencias numéricas a las valoraciones cualitativas ya realizadas, según la tabla que contiene la información son las siguientes: Excelente = 10, Muy Bien = 8, Regular = 6.

Tomando en consideración los criterios anteriores, la tabla que se muestra a continuación registra la puntuación asignada a cada candidato en cada una de sus cualidades, así como su puntuación final, obtenida sumando las puntuaciones obtenidas por cada candidato.

Persona	Edad (años)	Estudios	Experiencia (años)	Disponibilidad de tiempo	Presentación	Puntualidad	Total
Alicia	10	6	10	10	10	8	<b>54</b>
Betty	6	8	7	10	10	10	<b>51</b>
Carolina	8	9	8	10	8	8	<b>51</b>
Persona	Edad (años)	Estudios	Experiencia (años)	Disponibilidad de tiempo	Presentación	Puntualidad	Total
Dorotea	6	7	7	10	10	6	<b>46</b>

De esta forma se “ve” que con los supuestos establecidos el candidato “más adecuado” es Alicia y el “menos adecuado” es Dorotea y hay un empate entre Betty y Carolina. Sin embargo uno se puede preguntar y discutir: ¿Es realmente significativa la diferencia entre obtener 54 puntos y obtener 51, o entre 54 y 46 puntos? Posiblemente, con la información con que se cuenta, da lo mismo escoger a Alicia, a Betty o a Carolina. ¿Qué hubiese ocurrido si, con las mismas puntuaciones, se hubiese otorgado pesos diferentes a las distintas cualidades? ¿Cuál hubiese sido la selección? Por ejemplo, si a los estudios y a la experiencia les asignamos un peso del 30% a cada uno de ellos, a la puntualidad un 20%, un 10% a la edad y un 5% a la disponibilidad de tiempo y otro 5% a la presentación, los resultados que se obtendrían son los que aparecen en la tabla siguiente:

Persona	Edad (años)	Estudios	Experiencia (años)	Disponibilidad de tiempo	Presentación	Puntualidad	Total
	10%	30%	30%	5%	5%	20%	
Alicia	.10	1.8	3	5	5	1.6	<b>16.5</b>
Betty	.06	2.4	2.1	5	5	2	<b>16.6</b>
Carolina	.08	2.7	2.4	5	4	1.6	<b>15.8</b>
Dorotea	.06	2.1	2.1	5	5	1.2	<b>15.5</b>

De acuerdo a esta tabla se puede observar que de nueva cuenta no hay diferencia significativa en las puntuaciones que obtienen Alicia, Betty: 16.5, 16.6 respectivamente, y entre Carolina y Dorotea 15.8 y 15.5, respectivamente. ¿Por quién se decidirá? Pareciera ser que los números en lugar de ayudar son fuente de más confusión; sin embargo, todo se debe a los supuestos que se han hecho, al combinar los números cambiarán: los números por sí solos dicen poco, habrá que interpretarlos a la luz de las suposiciones iniciales.

Se ha deseado mostrar con estos dos intentos de resolución diversas oportunidades que el problema de la niñera de Karem podría ofrecer para que los estudiantes realicen

acciones que se valoran como importantes en el pensamiento matemático. A continuación se resumen algunas de tales acciones.

*Interpretar información dada en una tabla:* Los renglones contienen el nombre del candidato y sus cualidades; por ejemplo, el tercer renglón contiene información sobre Carolina, quien tiene 24 años de edad, con estudios de enfermería, dos años de experiencia, no tiene problemas de horario, es soltera, con muy buena presentación y muy buena puntualidad. Las columnas registran los diferentes “valores” para una cualidad, por ejemplo, la última columna registra la puntualidad para cada candidato.

*Cuantificar cualidades.* Por ejemplo, asignarle una puntuación al *estado civil*. Normalmente, los alumnos utilizan y manejan números provenientes de conteos o de mediciones de magnitudes medibles, pero no valoraciones de aspectos cualitativos.

*Establecer condiciones.* Es decir, obtener conclusiones a partir de ciertas suposiciones. Por ejemplo, decir: Si la cualidad “más importante” de los candidatos fuese ser soltera, entonces el mejor candidato sería Carolina.

*Manejo de información numerosa.* Ver, leer y trabajar con información numerosa puede ser abrumador si no se tienen estrategias para reducir su cantidad mediante la valoración en cuanto a su relevancia con relación a la situación problemática. La relevancia de la información está determinada por el criterio de valoración o ponderación que se haga de ciertos aspectos del problema. Precisamente, una forma de simplificar el problema en cuanto a la cantidad de información es a través del proceso de ponderación. Por ejemplo, si alguien pondera como más importante para la elección de la niñera los aspectos de la experiencia, los estudios, la puntualidad y la disponibilidad de horario, en tal orden, esto automáticamente define cual es la información relevante y, en consecuencia, por eliminación, indica que información podría no ser considerada.

*Tratamientos matemáticos.* Son los procedimientos matemáticos aplicados sobre entes de tal naturaleza, por ejemplo, encontrar el promedio de una colección de números, resolver una ecuación, diagonalizar una matriz. En el problema que nos ocupa han sido operaciones elementales: promedios, porcentajes.

*Toma de decisiones con base en la ponderación.* Por ejemplo, cuando alguien decide (toma una decisión) por las razones que tenga, que lo único importante para ser niñera son los estudios (quiere decir que las razones que tiene para defender esta posición

son más valiosas que las razones que podría ofrecer a favor de cualesquiera de las otras seis cualidades) ha realizado la acción de ponderación.

*Justificar una decisión.* Por ejemplo, si alguien dice: “a veces, por el hecho de estar casada se adquiere más estabilidad emocional” entonces, “es probable que Alicia y Betty, (a pesar de su corta edad) sean más estables emocionalmente que Carolina”, está ofreciendo un argumento que hace plausible la siguiente decisión: “Si la estabilidad emocional es una cualidad deseable para ser niñera entonces, Alicia y Betty serían candidatos adecuados”.

*Modelación matemática.* La segunda forma seguida en la “resolución del problema” se puede entender como un ejemplo de modelación matemática en la cual, de manera simplificada, se han llevado a cabo los pasos siguientes: a) decidir cuales son las cualidades relevantes para ser niñera, b) decidir el peso que cada una de las seis cualidades relevantes (edad, estudios, experiencia, disponibilidad de tiempo, presentación, puntualidad) tendría en la elección de la niñera, c) obtención de la puntuación final de cada uno de los candidatos obtenida sumando las puntuaciones obtenidas por cada candidato y d) interpretación de la puntuación final y de los supuestos aceptados inicialmente que llevan a establecer que el candidato “más adecuado” es Alicia.

*Matematizar.* Al proceso de interpretar con recursos matemáticos un problema de la “vida real” o mejor, en contexto no-matemático, se le denomina matematizar. Hay una variedad de formas a través de las cuales la matematización se puede llevar a cabo, tres ejemplos son la cuantificación (introducción de números, mediante el conteo o la medición), la visualización (desplegar la estructura geométrica, por ejemplo cuando se hacen intentos al diseñar una casa habitación que cumpla con determinados requerimientos), la coordinación (cuando se establecen en forma explícita las relaciones existentes entre subsistemas integrantes de un macro-sistema productivo). En el problema de la niñera de Karem se presenta la situación de asignar valores numéricos a cualidades, por ejemplo a la puntualidad.

*Resolver problemas.* Se entiende como resolución de problemas al proceso de enfrentarse a una dificultad que plantea una pregunta en la cual no se conoce con claridad la vía o vías que lleven a la solución. El problema de la niñera de Karem se puede considerar como relacionado a un contexto no-matemático, se proporciona información cualitativa que puede ser completa o no dependiendo del que resuelve el problema, éste es susceptible de

resolverse de varias maneras y su solución reclama de ponderar información cualitativa con el objeto de tomar una decisión.

*Representar.* Son las “representaciones externas”, visuales, de cualesquier naturaleza. Aunque el problema no hace grandes demandas representacionales, ésta es una de sus limitaciones, abre la posibilidad de que el estudiante haga uso de algunas representaciones escritas que no utiliza con frecuencia como son las tablas.

*Comunicar.* Una de las limitaciones que se señalan en la clase tradicional de matemáticas es la escasa atención que presta la acción de comunicar, no sólo resultados sino también procedimientos, argumentaciones, dudas, resúmenes, conclusiones, preguntas, reflexiones, etc. El problema de la niñera de Kareem ofrece la oportunidad de que el alumno se ejercite en la comunicación escrita. El país no lee porque tampoco escribe, y las dos van juntas, la lectura y la escritura.

*Construir un modelo cognitivo.* Un modelo es una estructura, una forma, resultado de un proceso de abstracción en donde lo particular ha desaparecido para dar paso a lo general, a lo esencial y no a la circunstancia. Un modelo, como toda forma, carece de contenido, de especificidad, tal es su potencia. Así como un vaso se puede utilizar una vez con agua y otra y más ocasiones (es reusable), así un modelo cognitivo: una vez que se ha construido en la mente se podrá utilizar en circunstancias específicas, particulares, tal vez muy parecidas a las circunstancias que llevaron a su construcción, pero será en incontables ocasiones.

La idea es que los estudiantes construyan el modelo cognitivo que corresponde a las situaciones de ponderación, porque se considera que tal acción contribuye a robustecer el pensamiento matemático. Sin embargo, aparecen las dos preguntas siguientes: ¿Cómo es el proceso de construcción de tal modelo cognitivo? ¿En qué momento podemos decir que un estudiante ya cuenta con dicho modelo?

Problemas de construir un *instrumento de evaluación*.

Los instrumentos de evaluación son un ejemplo de herramienta poderosa, re-usable y compartible. Tales instrumentos se usan en un amplia variedad de contextos tales como evaluar el progreso de los estudiantes, evaluar el crecimiento económico de una compañía o

de una nación, seleccionar personal, e implementar medidas de control de calidad (Recordar el CENEVAL, la OCDE, la ISSO 9000, la FIFA, Profeco, etc).

El esquema de estos problemas es más o menos el siguiente: Un objeto o situación tiene cualidades que se pueden evaluar o valorar de cierta forma, la valoración total del objeto o situación es la valoración de las distintas cualidades del objeto o situación tomadas en su conjunto.

La resolución de estos problemas demanda:

- construir clasificaciones a través de categorías y subcategorías, cada vez más específicas
- determinar la forma de valorar determinada cualidad, ya sea en forma cuantitativa o cualitativa
- decidir la manera de traducir valoraciones cualitativas en cuantitativas
- fijar los pesos que determinada cualidad o conjuntos de cualidades tendrán en la valoración final.

La siguiente tabla es un ejemplo que resume una posible forma de construcción de un sistema de valoración para la situación problemática: “*La compra de la lavadora*”.

Problema	Categorías		Categorías, Subcategorías y sus Porcentajes				
	Necesidades del usuario	Necesidades del usuario	40%	Cualidades del objeto	40%	Condiciones del vendedor	20%
<i>Compra de la lavadora</i>	Cualidades del objeto	• Medidas	10%	• Precio	5%	• Forma de pago	5%
	Condiciones del vendedor	• Capacidad de lavado	10%	• Instructivo	5%	• Forma de cobro	5%
		• Precio	10%	• Garantía	5%	• Transporte	5%
		• Condiciones de pago	10%	• Marca	5%	• Atención al cliente	5%
				• Accesorios	5%		
				• Funciones	5%		
				• Acabado	5%		
			• Seguridad	5%			

### Los Participantes y el Escenario

A continuación se describe la forma en la cual se llevó a cabo el estudio, considerando los siguientes aspectos: Alumnos que participaron en la experiencia y la forma en que ésta se realizó.

### Población estudiada

La escuela en donde se desarrollo la experiencia que se reporta es pública, pertenece al sistema del Colegio de Ciencias y Humanidades de la Universidad Nacional Autónoma de México y se encuentra ubicada al Sur de la Ciudad de México, en una zona residencial denominada Pedregal de San Ángel. El investigador tiene acceso a la escuela ya que en ella se ha desempeñado como profesor de matemáticas.

La experiencia se llevó a cabo con 51 estudiantes, del primer año de bachillerato, de los cuales 37 fueron mujeres y 14 hombres. La edad promedio de los alumnos se encontraba entre los 15 y 16 años. Los 51 estudiantes conformaban un grupo académico normal y su selección no atendió a ningún criterio en particular. Durante el año escolar el grupo tuvo cero deserciones, ya que los 51 alumnos que iniciaron los cursos los concluyeron. El horario de clases fue matutino, de 7 a 9 de la mañana los días martes y jueves y de 8 a 9 los viernes. Desde el punto de vista socioeconómico, se puede decir que los alumnos pertenecen a la clase media baja.

### Experiencia didáctica

El investigador permaneció en el grupo escolar durante un año escolar (dos semestres). Durante tal año escolar el investigador se desempeñó como el profesor de matemáticas. El año escolar tiene aproximadamente 120 horas de trabajo efectivo en el salón de clases y el trabajo en grupos pequeños fue una práctica cotidiana de tal forma que podría suponer que los alumnos al final del año escolar, periodo en el cual se llevó a cabo la experiencia que se reporta, se desempeñaban en forma “natural” cuando trabajaban en pequeños grupos, sin que la presencia del profesor pudiera inducir alguna forma especial de desempeño: al final del año escolar trabajaron como se acostumbraron a trabajar.

Por otro lado, es posible suponer también que en dicho lapso de tiempo se hayan desarrollado conductas estereotipadas en el trabajo de grupos pequeños. En un año de trabajo es de esperarse que se desarrollen y afiancen conductas de diversa índole. Durante el año escolar el investigador aprendió a reconocer las voces de los alumnos del grupo, lo cual fue importante al momento de hacer las transcripciones de las audiograbaciones de trabajo en los grupos pequeños.



Los cincuenta y un estudiantes se dividieron en dos subconjuntos, a un subconjunto se le llamó la población “A” y al otro subconjunto la población “B”. A cada uno de estos subconjuntos les fueron aplicados situaciones problemáticas diferentes. Cada uno de los doce problemas se aplicó a grupos de tres o dos estudiantes. La tabla siguiente muestra el orden en que se aplicaron los diferentes problemas y a la población a que se aplicó.

POBLACIÓN	ACTIVIDAD	TIPO DE ACTIVIDAD
A	Los críticos de cine y las películas	Toma de decisiones
B	La familia Zapata cambia de lugar de residencia.	Toma de decisiones
B	La niñera de Kareem ... una niña rubia y traviesa	Toma de decisiones
B	Gladiadores de Neza vs. Romanos de la Roma	Toma de decisiones
A	La calificación de las licuadoras	Evaluación cualitativa y cuantitativa
A	La compra de zapatos deportivos	Criterios para evaluar
A	La elección de carrera	Criterios para evaluar
B	El salón de clases	Sistema para evaluar
A	La película Titanic se saca un ...	Sistema para evaluar y su aplicación

Los problemas se aplicaron uno por sesión. En ninguna ocasión el mismo grupo de estudiantes abordó más de una situación problemática por sesión. Las sesiones tuvieron una duración máxima de 60 minutos. Los alumnos tenían a su disposición, por si lo requerían, los siguientes materiales: papel blanco, papel cuadriculado, regla, colores y calculadora sencilla.

Los alumnos que participaron en la experiencia habían practicado el trabajo sobre resolución de problemas en pequeños grupos, se había utilizado con ellos casi durante dos semestres escolares. La experiencia se realizó al final del segundo semestre, es decir al final del primer año de bachillerato y el trabajo que realizaron formó parte de la evaluación final del curso. Cabe aclarar, sin embargo, que durante los dos semestres no se trabajó en problemas de los tipos que se aplicaron durante la experiencia, debido a que los dos semestres de matemáticas están dedicados, fundamentalmente, a álgebra y a geometría; los problemas que se abordaron fueron como los que se muestran a continuación:

- Elena en los primeros tres exámenes sacó 8, 9 y 10. ¿Cuánto tiene que sacar para obtener 9 de promedio con cuatro exámenes?
- Las longitudes de los lados de un triángulo son  $b + 1$ ,  $7 - b$  y  $4b - 2$ . ¿Para cuántos valores de  $b$  el triángulo es isósceles?
- ¿En qué número termina  $2002^{2002}$  ?

- A una fiesta asistieron 20 personas. María bailó con siete muchachos, Olga con ocho, Vera con nueve y así hasta llegar a Nina, que bailó con todos ellos. ¿Cuántos muchachos había en la fiesta?
- Si la base de un triángulo aumenta en un 10% y su altura disminuye en un 10%, ¿cuánto cambia su área?
- ¿Cuántos números enteros positivos  $n$  satisfacen la desigualdad

$$\frac{2}{5} < \frac{n}{17} < \frac{11}{13}$$

Al inicio de la sesión, una vez integrados los grupos de trabajo y acomodados en su lugar, a cada alumno se le entregaba de manera escrita el problema por resolver. La organización interna de los equipos fue definida por ellos y no se proporcionó información alguna en relación al problema por resolver. El profesor del grupo durante los dos semestres fue el investigador, y su papel durante las sesiones fue de observador del trabajo de los alumnos. Debido a que los alumnos ya tenían experiencia en el trabajo en pequeños grupos se puede decir que habían internalizado una de las reglas del trabajo en equipo en el salón de clases: **“El profesor no responde preguntas, ni valida respuestas, sólo puede orientar y sugerir a través de otras preguntas”**; por lo tanto, cuando había alguna duda se les devolvía con otros cuestionamientos. En una de las sesiones un alumno dijo: *“... ya sé que no nos va a contestar, pero dígame siquiera cómo vamos... ¿verdad que estos problemas no son como los que hemos hecho?”*). Como a los alumnos se les dijo que el trabajo que desarrollarían durante la experiencia sería su evaluación de trabajo en equipo, su conducta durante las sesiones fue consecuente con esta indicación; por ejemplo, ya conocían la regla de que durante la sesión de trabajo no se permitía intercambiar puntos de vista con los elementos de otros grupos de trabajo. El salón de trabajo medía aproximadamente 8 x 6 metros y en él trabajaron ocho grupos de tres integrantes, distribuidos lo más separados posible con el objeto de disminuir, en lo posible, la interferencia por ruido, negativo para las audiograbaciones que se hicieron del trabajo de cada equipo.

Fuentes de datos y análisis de los mismos.

En tanto los estudiantes resolvían los problemas se audigrabaron sus participaciones que hacían en voz alta y éstas se transcribieron. Los integrantes de cada equipo operaron las

grabadoras y, aunque tenían experiencia en su manejo, en diversas sesiones de trabajo durante el año escolar se audio-grabaron con el propósito de que analizaran su participación en las sesiones, por descuido dos equipos, en una ocasión cada uno, no audio-grabaron su trabajo.

Además de lo anterior, se tiene la producción escrita de cada grupo de trabajo para cada situación problemática que abordaron.

Por otro lado el profesor-investigador tomó notas de aspectos que consideró relevantes durante todas las sesiones de la experiencia didáctica.

En consecuencia, los datos que se analizaron fueron las transcripciones de las audio-grabaciones, el trabajo escrito de cada equipo y las notas de campo.

El análisis de los datos se realizó en dos fases. En la primera fase se analizaron seis transcripciones (apoyadas por las notas de campo del investigador y por los trabajos escritos de los alumnos) correspondientes al proceso de resolución que seis grupos pequeños realizaron de las siguientes tareas: *“Los críticos de cine y las películas”*, *“La familia Zapata cambia de lugar de residencia”*, *“La calificación de las licuadoras”*, *“La elección de arrera”*, *“El salón de clases”* y *“La película Titanic se saca un ...”*. Este análisis se enfocó sobre las cantidades y las relaciones que consideraron los estudiantes, en los cambios en su interpretación de la tarea, en su razonamiento matemático acerca de su enfoque del problema, en las representaciones utilizadas. Este análisis produjo la identificación de los diferentes ciclos de interpretación para cada uno de los grupos pequeños a través de cada una de las tareas.

La segunda fase del análisis de los datos estuvo enfocada en describir las variaciones entre los diferentes modelos que fueron desarrollados por los estudiantes para todas y cada una de las nueve tareas. Se analizaron los productos del trabajo escrito de los alumnos y las notas de campo del trabajo de los estudiantes en grupos pequeños con el propósito de identificar las diferencias entre los diferentes modelos construidos.

## CAPÍTULO 4

# RESULTADOS Y DISCUSIÓN

### Introducción

En este capítulo se presentan y discuten algunos modelos construidos por alumnos de bachillerato para las situaciones problemáticas que se abordaron en la experiencia didáctica.

El análisis de las soluciones para las diferentes situaciones problemáticas es, en general, de dos tipos:

1. Se analiza un modelo particular construido por un grupo pequeño, en el cual se presenta el análisis de los ciclos de desarrollo que exhibe un grupo pequeño al abordar la situación problemática. En este análisis nos enfocamos en una trayectoria específica de desarrollo como un ejemplo de las múltiples secuencias de aprendizaje que pueden suceder al abordar la tarea en el salón de clases. En general el grupo pequeño se escoge porque su trabajo es un ejemplo de los diferentes enfoques que se observan en el trabajo de los grupos pequeños que abordaron la situación problemática. Para realizar este tipo de análisis se utilizó la información proveniente de las audiograbaciones, una vez transcritas, la producción escrita de los estudiantes y las notas de campo del profesor-investigador.

2. Características generales de los modelos construidos por los diferentes grupos pequeños que abordaron la tarea. Acá se presenta un análisis global de los diferentes patrones de pensamiento que se observaron en los trabajos realizados por los distintos grupos pequeños que abordaron algunas situaciones problemáticas. Este análisis se llevó a cabo utilizando la información obtenida de las producciones escritas de los alumnos.

Es preciso aclarar que la extensión, en número de páginas, para los dos tipos de análisis es diferente. La extensión para el que corresponde a “*un modelo particular construido por un grupo pequeño*” es considerablemente mayor que la correspondiente a las “características generales de los modelos construidos por los diferentes grupos pequeños”. Lo anterior se debe a que el primer tipo de análisis se refiere el *proceso de resolución*, en tanto que el segundo al *producto* resultante del proceso de resolución.

La tabla que se muestra a continuación registra los tipos de soluciones que se presentan para cada una de las situaciones problemáticas que resolvieron los estudiantes.

<b>Problema</b>	<b>Tipo de problema</b>	<b>Características de las soluciones</b>
<i>Los críticos de cine y las películas</i>	Toma de decisiones	<ul style="list-style-type: none"> <li>Modelo particular construido por un grupo pequeño.</li> <li>Características generales de los modelos construidos por los diferentes grupos pequeños.</li> </ul>
<i>La familia Zapata cambia de lugar de residencia</i>	Toma de decisiones	<ul style="list-style-type: none"> <li>Modelo particular construido por un grupo pequeño.</li> <li>Características generales de los modelos construidos por los diferentes grupos pequeños.</li> </ul>
<i>La niñera de Kareem...una niña rubia y traviesa</i>	Toma de decisiones	<ul style="list-style-type: none"> <li>Características generales de los modelos construidos por los diferentes grupos pequeños.</li> </ul>
<i>Gladiadores de Neza vs. Romanos de la Roma</i>	Toma de decisiones	<ul style="list-style-type: none"> <li>Características generales de los modelos construidos por los diferentes grupos pequeños.</li> </ul>
<i>La calificación de las licuadoras</i>	Transformar una evaluación cualitativa en cuantitativa	<ul style="list-style-type: none"> <li>Modelo particular construido por un grupo pequeño.</li> <li>Tres estrategias de solución</li> <li>Estrategia general por los ocho equipos que lo resolvieron</li> <li>Resumen de resolución que siguieron los diferentes equipos</li> </ul>
<b>Problema</b>	<b>Tipo de problema</b>	<b>Características de las soluciones</b>
<i>La compra de zapatos deportivos</i>	Criterios para la toma de una decisión	<ul style="list-style-type: none"> <li>Características generales de los modelos construidos por los diferentes grupos pequeños.</li> </ul>
<i>La elección de carrera</i>	Criterios para la toma de una decisión	<ul style="list-style-type: none"> <li>Modelo particular construido por un grupo pequeño.</li> <li>Características generales de los modelos construidos por los diferentes grupos pequeños.</li> </ul>
<i>El salón de clases</i>	Construir un sistema de evaluación	<ul style="list-style-type: none"> <li>Modelo particular construido por un grupo pequeño.</li> </ul>

		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Características generales de los modelos contruidos por los diferentes grupos pequeños.</li> </ul>
<i>La película Titanic se saca un ...</i>	Construir un sistema de evaluación	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Modelo particular construido por un grupo pequeño.</li> <li>• Características generales de los modelos contruidos por los diferentes grupos pequeños.</li> </ul>

Análisis de los ciclos de desarrollo que exhibe un grupo pequeño (AMA') al abordar el problema de: *“Los críticos de cine y las películas”*.

### Los alumnos leen el problema.

.....

Apenas acabado de leer el problema se pone de manifiesto uno de los elementos de la cultura tradicional de las matemáticas escolares:

**A:** Oye, entonces no está tan difícil.

Es que los problemas en matemáticas, y sobre todo si son de examen, tienen que ser difíciles.

En seguida aparece la primera propuesta de estrategia para resolver el problema:

**M:** Pues eso lo podemos hacer por una tablita, ¿no?

¿Qué información va a tener la tabla? ¿Cómo se va a construir? No se dice nada de ello, pero se acepta que construir una tabla, es decir una forma de representar información, puede ser un camino para llegar a la solución del problema. Esto muestra que las formas representacionales, son herramientas para resolver problemas. Quién sabe qué idea tenía M de la tabla, o cómo pensaba construirla utilizando la información proporcionada en el problema, pero entreveía, en lo

general, sin conocer los detalles, de manera global, que mediante una tabla podía resolver el problema.

Ciclo 1. *Identificación de una relación de implicación entre el grado de exigencia de un crítico y la calificación que asigna.* A través de una idea inacabada de A, y refinada por A' y M, se regresa a parte de las preguntas del problema. Pero no sólo hay un regreso a las preguntas del problema, sino que además se establece una relación entre lo que se pide en el problema y la información que se proporciona: la exigencia del crítico está relacionada con las calificaciones que pone. En otras palabras, se reconoce una relación esencial entre algunos elementos del problema: la característica de exigencia, en relación a las calificaciones que se asignan.

- A: Ah, tenemos que representar quién es el más .....
- A': Sí, dice: ¿Quién es el crítico más exigente? Yo creo que con respecto a las calificaciones que le ponen. ¿No?
- M: Al que pone menor calificación.

También se pone de manifiesto otra idea representacional: la construcción de una gráfica.

- A: Y hacemos la gráfica. A ver ...
- A': Vamos anotando los ....
- A: No son muy grandes las gráficas., ¿verdad?
- A': Mira, va. Hacemos de la primera, este ...de los Expertos y los Expertos opinan...

De nuevo, no se menciona que se va a graficar, pero se reconocen en el problema elementos susceptibles de ser graficados. No se especifica, por el momento, la finalidad de hacer una gráfica, pero en la búsqueda inicial de la estrategia a seguir en la resolución del problema, surge la idea de graficar y como la información que se proporciona está formada de tres tablas (es a lo que se refiere A'), A' propone, construir tres.

Se vuelve a regresar al problema, a la primera pregunta que hay que contestar:

- A: ¿El más exigente? El que le ponga menor calificación es el más exigente. ¿No?
- A': Para mí, pues, sería, ése.

El alumno A retoma la primera pregunta y se pregunta (y pregunta) quién será el crítico más exigente y él mismo se contesta que será aquel que otorgue la menor calificación. Pide la opinión de los otros compañeros acerca de su idea y uno de ellos está de acuerdo con él.

Ciclo 2. *Idea de comparación.* Ahora ya hay más ideas, se propone hacer una “tabla” para cada una de las tres tablas que se presentan en el problema pero aún no se dice nada acerca del contenido de las tablas. Aparece la idea de *comparación*. No se aclara que se va a comparar, pero la decisión acerca del crítico más exigente exige la idea de comparar:

**M:** Hacemos la tablita, ¿no?

**A:** Pero la hacemos de cada tabla. Por decir, de ésta es éste el más exigente, de esta es, ... y después comparamos, ..

Ciclo 3. *Idea de promedio.* Se avanza en la estrategia para resolver el problema con la idea del cálculo de promedios:

**A’:** Hacemos un promedio de las calificaciones que da generalmente y hacemos promedio por película también. Cuánto le dieron de calificación, para ver cuál es la más buena, etc., etc.,

Aparece la idea de integrar un conjunto de números a través de su **promedio**. Esta es una idea que un alumno que está por concluir su primer año de bachillerato ya la conoce, por la escuela y por su propia experiencia: en todos sus años de escolar, y el ya está en el décimo, le han hablado de su promedio de calificaciones. Él tuvo un promedio de calificaciones en cada uno de sus años de escolar, también tuvo un promedio por ciclo. En resumen, la idea de **promedio** es familiar a un alumno de bachillerato.

A continuación surge otra idea estratégica para resolver el problema y la réplica de parte de uno de los integrantes del grupo y la disculpa (¿Por qué se disculpó?, ¿De qué se disculpó?) del que planteo la reciente estrategia:

**M:** No sería una forma que sumemos todos estos. Viéramos cuanto da, así sucesivamente, de todas las columnas y ver quién da menos puntos. Así sabríamos, ....

**A:** Sí, pues eso va a ser.



M: Perdón...

¿Lo que plantea M es idéntico a lo que propuso con anticipación A? No, no es lo mismo. El planteamiento de M es hacer sumas, el planteamiento de A' es encontrar promedios. Sin embargo, M no replica, al contrario, se disculpa: en un grupo, a veces, se aceptan como idénticas opiniones que no lo son, este es el caso de M. Cuando A le dice a M: *Sí, pues eso va a ser*, indica que están entendiendo lo mismo. Sin embargo no entienden lo mismo, y esto se pondrá de manifiesto más adelante.

¿Por qué se proponen trazar gráficas? ¿Por qué trazan gráficas? Uno pensaría que como un recurso cognitivo puramente. Pero, veamos por qué lo hacen (y es el único equipo que traza gráficas para el problema:

A': Pero hay que hacer la gráfica para que digan que hicimos algo...

Parece que lo hacen pensando en la calificación (*..para que digan que hicimos algo...*). El trazar las gráficas parece que no está ligado a requerimientos de la tarea: bien se pudo haber hecho sin gráficas. La enseñanza tradicional desarrolla en los alumnos, tal vez sin intención, actitudes como impresionar al maestro, dar la imagen de que se ha entendido, de que se ha realizado el trabajo, de que se sabe de lo que se está hablando, etc., eso cuenta para la calificación.

En lo que hasta acá ha trabajado el grupo pequeño ha aparecido la estrategia a seguir para avanzar en la solución del problema. Lo que sigue a continuación es la puesta en marcha de la estrategia vislumbrada, así como la solución a ciertas dificultades que se les presentan en el tratamiento de los datos. Más adelante surgirá una última idea para concluir el problema. Hasta ahora se sabe por donde avanzar, el propio trabajo aportará elementos a su desarrollo. Basta, para iniciar, saber que hay que utilizar *promedios*, otros elementos aparecerán en la propia acción. Por tal razón los alumnos organizan el trabajo:

A: Primero vamos haciendo esto y alguien que vaya haciendo la gráfica de .....

No se sabe aún qué es lo que se va a graficar, pero ya es posible pasar a otra etapa del proceso de resolución.

El tiempo que transcurre entre la lectura del problema y la afirmación *‘Primero vamos haciendo esto y alguien que vaya haciendo la gráfica de .....’* es de minuto y medio. A través de una especie de lluvia de ideas los tres alumnos interaccionan a través de propuestas que giran en torno a la elaboración de tablas, construcción de gráficas y cálculo de promedios como formas de abordar el problema.

Dos de los alumnos (A y M) se dedican a calcular los promedios correspondientes a las calificaciones otorgadas por cada uno de los críticos y el tercer estudiante (A’) empieza a trazar las gráficas. En cierto momento se da un diálogo entre M y A que pone de manifiesto que M, aún habiéndose disculpado con anterioridad, no comprendió lo mismo que A en cuanto a lo que habría que hacer:

- M:** Ya tengo todas.  
**A:** ¿Todos los promedios de todas?  
**M:** De todas éstas, ya.  
**A:** ¡Ahss ..! (*con enfado*),.. yo los estoy sacando.  
**A:** Ah, pero todavía no lo divides.  
**M:** No, nada más falta dividirlo

Con anterioridad, M propone hacer sumas y es lo que hace. A’, hablaba de promedios. Aparentemente ya estaban de acuerdo en lo que iban a realizar. Sin embargo este diálogo muestra que tal entendimiento no existía.

Por otra parte, ya habían decidido hacer gráficas y es con posterioridad cuando reparan en parte de lo que van a graficar:

- A’:** Este, y vamos hacer la gráfica con los promedios, ¿verdad ... ¿A?  
**A:** Espérame

Cuando los estudiantes empiezan leyendo el problema y tienen entre ellos los primeros intercambios de ideas, alguno de ellos, “percibe intuitivamente” que el problema tiene elementos que permiten la representación gráfica. De alguna manera, no clara, identifican en el problema

características que les permiten anticipar la posibilidad de construir gráficas. ¿Es que acaso, cognitivamente, alguno de estos tres alumnos ha desarrollado alguna estructura que le permite percibir que algo es susceptible de ser representado mediante una gráfica? Es probable que así sea, y además es posible que esto no sea frecuente, ya que fue el único grupo de trabajo que las utilizó.

El alumno A continúa haciendo cálculos de promedios y cuando llega al final de la tercera tabla y encuentra en una de las celdas un asterisco (como se muestra en la siguiente tabla) en lugar de un número, se enfrenta a una de las dificultades que todos los equipos

Películas	CRÍTICOS							
	Mario P. Székely	Andrés de Luna	Gustavo García	Rafael Aviña	Jorge Ayala Blanco	Nelson Carro	José Xavier Nívar	Oscar Uriel
Nunca más	7	5	7	5	6	5	7	5
Un gran chico	9	9	8	9	7	6	8	9
¡Oye Arnold!	6	7	6	9	6	6	7	6
Frío de perros	6	5	6	6	6	5	7	*

\* El crítico se reserva su opinión.

exhiben, y que sólo dos resuelven “correctamente”. Veamos el siguiente dialogo entre A y A’:

- A: ¿Oye y este asterisco, qué significa?  
 A’: ¿Dónde?  
 A: Acá.  
 A’: Este, ....  
 A: ¿Diez?  
 A’: El crítico se reserva su opinión, aquí arribita dice, bueno, abajito de cada tabla.  
 A: Y entonces, ¿qué le vamos a poner en eso?  
 A’: Pues que es muy mala.

En este momento aparecen las dos propuestas con relación a qué hacer con la celda en donde hay un asterisco: No tomar en cuenta tal calificación ó ponerle un cero:

- A: Solamente que lo dividamos entre tres. No dividamos esa calificación.  
 A’: No, ponle un cero, porque no está poniendo nada.

De acuerdo a la última opinión de A' en una celda vacía de una tabla hay que poner un cero: "...ponle un cero, porque no está poniendo nada". De esta manera **no poner nada** o estar una celda vacía de información es interpretado como que ahí hay un **cero**. Posiblemente la raíz de esta interpretación está en que con frecuencia, en los cursos de matemáticas, se dice que "no tener nada" es tener cero y si en la celda no hay información se tiene cero información. Los alumnos no se percatan de que simplemente el crítico no evaluó la película, es decir no la calificó. Es muy distinto a poner cero, porque entonces se está diciendo que el crítico evaluó la película con la calificación cero. Esta debe ser una idea compleja, ya que sólo dos equipos, de ocho que abordaron la tarea, la interpretaron correctamente. A raíz de todo esto surgen las siguientes preguntas que tal vez valga la pena indagar: ¿Cómo interpretaría un alumno las situaciones en donde un crítico apareciera en una tabla con 2, 3, o todas las celdas vacías? O de manera más general, habría que enfrentar al alumno a la tarea de interpretar información en forma de tablas en donde se consideren una multiplicidad de posibilidades para la presentación de tal información e indagar cómo son interpretadas.

Los alumnos continúan en una larga interacción entre ellos y en algún momento le plantean al maestro la cuestión que él devuelve para que sea resuelta por ellos. Después de un largo diálogo (del cual a continuación sólo se muestra parte), sobre todo entre los alumnos A y A', deciden, con razones no muy claras, eliminar el cero, tal como se muestra en los siguientes diálogos:

- A: No, sabes que no se contaba, ¿sabes por qué?, porque tú no lo estas viendo con los demás, o sea, no estás viendo películas, sino estás viendo crítica, el promedio de la crítica.
- A': Pues sí, nada más criticó tres películas él, el otro criticó otras y con respecto a ...
- A: O sea, tanto pudo haber criticado la otra con un promedio así bajo, como pudo haber subido .. pero, ... su
- A': Sí, sí, sí, ....
- A: De acuerdo a los tres es ....
- A': Sí es menos exigente porque si te fijas en las calificaciones quítale el cinco al de Tiempo Libre y este tiene cinco, seis, seis, y el otro tiene cinco, nueve, seis . Entonces es más exigente que no se haya contado una película.
- A: Entonces dividimos entre tres.
- .....
- .....
- A: Lo hacemos como si no valiera. No como cero, sino como que no valiera.
- A': Lo dividimos entre tres.

Llegar a esta última decisión fue difícil para los dos alumnos. Más adelante veremos que el tercer alumno no se percató de todo lo hecho por sus otros dos compañeros. Ya casi cuando A y A' habían llegado a la conclusión M les dice que ellos sigan con esa cuestión mientras él se dedica a otra cosa:

- M: En lo que ustedes siguen haciendo eso, ...entonces,... ustedes siguen haciendo eso, y yo me sigo con las películas.  
 A': A ver, ¿cómo?  
 A: Espérate, nada más deja que nos pongamos de acuerdo con esto y ya seguimos con el otro.

Está documentado que en el trabajo en grupos pequeños, cuando sus integrantes presentan potencialidades académicas no muy “homogéneas” las interacciones entre ellos son asimétricas. Por lo que se observó durante un año de trabajo con estos estudiantes, pareciera que tal es la situación entre M, A y A'.

Cuando los alumnos resuelven cómo interpretar la celda vacía en la tercera tabla del problema, ya pueden concluir el cálculo de los promedios de calificaciones de los críticos que aparecen en cada una de las tres tablas que figuran en el problema. Las tres tablas que aparecen en seguida, registran lo que el equipo AA'M encontró como promedios para cada

Tabla	CRÍTICOS								
Tabla 1	Eduardo Scheffler	Mario P. Székely	Andrés de Luna			Jorge Ayala Blanco	Nelson Carro	José Xavier Návar	Oscar Uriel
Promedio	7.75	8.2	7.5			7	6.25	8	7.2

Tabla	CRÍTICOS								
Tabla 2		Mario P. Székely	Andrés de Luna	Gustavo García		Jorge Ayala Blanco	Nelson Carro		
Promedio		8	7.25	6.5		6.25	6		

Tabla	CRÍTICOS								
Tabla 3		Mario P. Székely	Andrés de Luna	Gustavo García	Rafael Aviña	Jorge Ayala Blanco	Nelson Carro	José Xavier Návar	Oscar Uriel
Promedio		7	6.5	6.7	7.2	6.25	5.5	7.2	6.6

uno de los críticos que aparecen en las tres tablas que figuran en el problema. Obsérvese que con relación a los críticos, las tablas que aparecen en el problema que se les proporcionó a los alumnos, no son homogéneas, es decir, no contienen a los mismos críticos, ni el número de ellos es el mismo para cada tabla. Lo anterior es causa de dificultad cuando, más adelante, haya necesidad de agregar las tres tablas en una sola y construir un único listado ordenado de críticos (Pregunta 5 del problema).

Cuando el equipo ha terminado de calcular los promedios de calificaciones de los críticos vuelven al problema, como se muestra en seguida:

- A: ¿Quién es el crítico menos exigente? Con los mismos promedios vamos a sacar esa. Así que ya no hay necesidad. ¿Cuál es la mejor película?  
 M: Eso lo tenemos que sacar con los promedios.

Los alumnos (A y M) realizan los cálculos de los promedios de las calificaciones otorgadas a todas y a cada una de las doce películas, y no tienen dificultad, salvo cuando llegan a la celda con asterisco.

- A: Ah, y la última, ¿la dividiste entre siete?  
 M: Entre ocho.  
 A: Entre siete. Porque no se cuenta el último. Porque él no dio crítica sobre la película. Lo hicimos, lo contamos como que si no dio crítica de esa película.  
 M: Entonces lo tienes que dividir entre siete.  
 A: Entre siete.  
 M: Cuanto te da.  
 A: Espérame, deja volver a hacerla. ...

Debido a que M no participó activamente en la discusión acerca de la interpretación de la celda con asterisco, consideró como si en tal celda hubiera un cero y entonces el promedio que calculó para la película *Frío de perros* lo encontró dividiendo 41 entre 8, y no entre siete. Esto vuelve a mostrar un ejemplo de asimetría en el trabajo en un grupo pequeño que se encuentra en la misma mesa. Da la impresión de que M no hubiese estado en la discusión.

Cuando los alumnos A y M están dedicados al cálculo de promedios de las calificaciones de las películas, el alumno A' pregunta por el tipo de gráficas que está haciendo, y es la única mención en relación a este asunto. A', que fue el que fundamentalmente trabajó en el trazado de las gráficas, parece que decidió su tipo. El siguiente pasaje es la única mención con respecto al tipo de gráficas que el equipo trazó:

A': Esta sería una gráfica de barras, ¿verdad?  
A: Sí

Cuando los alumnos del equipo AA'M terminan de calcular los promedios de calificación para todas las películas vuelven al problema original para revisar qué les falta por hacer.

A: Después, ¿qué sigue? Ah tú los vas a sacar como dice ella.  
M: No. No sé, digo, ahorita vamos a leer qué otras preguntas vienen.  
A: ¿Cuál es la peor película? Ya la tenemos. Haga un listado de críticos ordenados de más exigente a menos exigente.  
N: Eso todavía no lo hemos sacado.

Los datos en el problema aparecen en tres tablas: en la primera siete críticos evalúan cuatro películas, en la segunda cinco críticos califican cuatro películas y en la tercera ocho críticos ponen calificación a cuatro películas. En total son nueve críticos pero algunos aparecen en las tres tablas (por ejemplo, Andrés de Luna), otros en dos (por ejemplo, Oscar Uriel) y otros sólo en una tabla (por ejemplo, Rafael Aviña).

Ciclo 4: *Integración de varios conjuntos de números: Promedio de promedios.* Para conjuntar las tres tablas en una sola hay necesidad de integrar los promedios de calificación de aquellos críticos que aparecen en más de una tabla, para obtener un indicador global de sus calificaciones otorgadas. La estrategia que siguió el equipo AA'M (que fue la que utilizaron cinco de los ocho equipos que abordaron la tarea) fue encontrar el *promedio de los promedios* parciales de las calificaciones asentadas por los críticos que aparecen en más de una tabla, tal y como lo dice el alumno A':

- M:** Pues con el mismo promedio este ...
- A':** Sumen los promedios. Es lo que les estaba diciendo. Por ejemplo, de Andrés de Luna, tuvo aquí 7.5, de este lado tuvo también 7.25, y, dónde está, ..ya no sale más, ..ah sí sale, 6.5. Suma 7.5 más 7.25 más 6.5 entre tres, y ahorita me lo pasas y también lo graficamos. lo podemos hacer así, ...
- M:** Sí, ya se más o menos cómo.

Utilizando la estrategia de calcular el “*promedio de los promedios*” este pequeño grupo integra las tres tablas de información en un sólo listado con los promedio de calificaciones asentadas por los once críticos.

Ciclo 5: *Ordenamiento de un conjunto de elementos*. La tarea original en el problema es *hacer un listado de críticos ordenados de más “exigente” a menos “exigente”*. Veamos cómo aborda esta tarea el grupo de AA'M:

- A:** Oyes: para ordenarlos, por decir, de más exigente a menos exigente, el más exigente es el que va tener un menor promedio, el que va a dar un menor promedio, ¿verdad?
- A':** Sí
- A:** Ah bueno, entonces está bien.

Por una cuestión cultural hemos aprendido (sin razón, a veces) que entre más exigente es un crítico, un evaluador, etc., la calificación que asigna a lo que evalúa es menor, esto ya lo han aprendido estos alumnos y, en general, los que participaron en la tarea.

Cuando los alumnos del equipo AA'M han “ordenado” a los críticos, regresan a las preguntas del problema original.

- A:** Hagan un listado de películas ordenadas de ..., esto no lo hemos hecho.
- M:** ¿Cuál?
- A:** El listado de películas ordenadas de mejor a peor.
- M:** Con el promedio ya se puede hacer, ¿no?. Vamos a hacerlo
- A:** Sí.
- .....
- ....
- A:** Oye, ¿también lo divido entre tres?, por decir, la peor película de aquí, o ...
- A':** No, esa ya es una película solita, porque todas son diferentes, son éstas, mira, A.

“M” dice que “...*con el promedio ya se puede hacer.*”, si, pero, ¿cómo? No se aclara. Por otro lado, ¿cómo es posible que A, quien ha estado participando activamente en la solución



del problema le pregunte a A': "...Oye: ¿también lo divido entre tres?". Esta pregunta pareciera indicar que no ha comprendido este aspecto del problema. Por otro lado, el sentido de la pregunta pareciera indicar que reconoce en A' autoridad para decidir lo correcto e incorrecto del procedimiento a seguir. A esta altura del trabajo la discusión en el equipo ha disminuido: se pide consejo, en lugar de indagar. Un estilo del trabajo en equipo es cuando aparece una "jerarquía intelectual", en la cual hay alguien a quien socialmente se le reconoce autoridad para validar las acciones. Pareciera que tal es el caso con este equipo de trabajo.

Al momento de estar ordenando las películas el alumno A tiene necesidad de volver a sacar el promedio de dos películas para tenerlos con más decimales. Veamos lo que dice:

A: Voy a sacar otra vez los promedios de dos de estas películas, para sacarles decimales, para ver quien es el fin con decimales.

El alumno A se refiere a las películas *Nunca más* y *Frío de perros*, para quienes, cuando calcularon los promedios, registraron el mismo número: 5.8. Hay que hacer notar que en los cálculos de este equipo, la película *La reina de los condenados* tiene el mismo promedio (5.8), pero en este caso el decimal ahí termina. Al calcular los nuevos promedios encuentran para la película *Nunca más* el valor 5.875 y para la película *Frío de perros*, el valor 5.857. De esta manera deshacen el empate entre las tres películas. Sin embargo, cabe la pregunta: ¿es un uso "adecuado" de las matemáticas para fines prácticos?: Concedamos que la evaluación que se hizo sea confiable, ¿cómo se percibe, desde el punto de vista cinematográfico, una diferencia de dos centésimas en la evaluación?

¿En qué medida los estudiantes pueden expresar, de manera abstracta, en general, el procedimiento que siguieron en la resolución del problema? Veamos cómo externalizan los alumnos este aspecto. Los alumnos del equipo AA'M lo plantean de la siguiente forma:

M: ¿Qué hace falta?

A: ¿Cómo decidimos que eran los más ... a ver yo les doy mi opinión de cómo le hicimos y ya después ustedes me dicen si la escribo así. Los más exigentes y los menos exigentes: para poder sacar primero sacamos su promedio, de cada uno, con respecto a las películas,  
.....

- A': Pero no con respecto a las películas  
 A: Bueno sí, por el autor, .....
- .....  
 A: ...al promedio que le dio a cada película. Sacamos ese promedio y allí vimos quién fue el menor y quién fue el mayor.  
 A': ¿Si, no? Perfecto  
 M: No pues sí, era lo que ...
- .....  
 A: Pero es que no es muy grande mi explicación, ¿no importa?  
 ...  
 A: Ya ves está bien corta mi explicación.  
 A': Ahorita la leo y si, ... le metemos choro, va.
- A: Es que tu eres más ...  
 .....

La explicación que da “A” retiene los elementos esenciales de la estrategia: promedios, comparación, promedio de promedios y ordenación. El proceso de *comparación* es esencial cuando hay que construir listas ordenadas: comparar y la propiedad de orden de los sistemas numéricos son la base para ordenar objetos con base en cierta propiedad cuantificada de ellos. Estas dos ideas están presentes en la explicación que da el alumno “A”. Para resolver el problema los estudiantes primero utilizan un “índice” que cuantifique una propiedad (por ejemplo, la calidad de una película se puede “garantizar” por la calificación que le otorgan personas expertas en cuestiones cinematográficas”) y después comparar estos índices, desde el punto de vista matemático, ya que se han expresado como elementos de conjuntos numéricos que cumplen con la relación de orden.

Después los alumnos del equipo AA'M abordan la última pregunta del problema:

- M: ¿Qué hace falta?  
 A: La explicación de la última, de cómo ordenamos, este, las películas.  
 M: A ver, ah, ¿también piden para las películas?  
 A: Si.

Al margen de que el alumno “M” pareciera que no escuchó bien cuando “A” leyó el problema, la idea que externan es que la respuesta es análoga a la que dieron a la pregunta inmediata anterior. Todos los equipos que participaron en la experiencia contestan ambas preguntas, diferenciándose su respuesta en precisión y amplitud.

La instrucción para contestar las preguntas decía “...explica lo más detalladamente que te sea posible ....”. ¿Cómo entiende un estudiante tal instrucción? Tal vez hay un indicio en lo que dice el alumno A’: “ *..le metemos choro...*”:

- A: Pero es que no es muy grande mi explicación, ¿no importa?  
 ...  
 A: Ya ves está bien corta mi explicación.  
 A’: Orita la leo y si, ... le metemos choro, va.  
 A: Es que tú eres más ...  
 .....

Si “explicar ampliamente” tiene que ver con el “choro” (esta palabra, aunque si la registra el diccionario de la Real Academia Española de la Lengua, en la comunicación cotidiana no se usa con el significado que la Academia asigna), pero es un choro pertinente, que interrelacione ideas importantes con el asunto que se esté tratando. Se acepta comúnmente que un indicio de la comprensión de un asunto queda de manifiesto por la elaboración y uso de un lenguaje adecuado: no en vano toda la Filosofía se aborda en lenguaje materno.

Finalmente, a continuación se reproduce el dialogo que los estudiantes sostienen previo a la entrega de su trabajo. Dos ideas hay que resaltar: la importancia que asignan a las gráficas, y su preocupación por que el profesor note que las utilizaron. Nosotros nos quedamos con reconocer que las gráficas “ya son” un instrumento de trabajo para estos dos alumnos.

- A’: ¿Nadie hizo gráficas?  
 A: No  
 A’: Es que así justificamos más las respuestas, porque mira, aquí se ve desde el principio cual es la mejor película, es más, si quiere se las hacemos en excel  
 ....  
 A: ¿Crees que en algún tema de, por decir, de redes, se pueda hacer una gráfica?  
 A’: La factibilidad de las redes, o cuántas computadoras se conectan en red  
 ....  
 A’: Se las voy a poner aquí enfrente las gráficas, mira, para que se de cuenta que hicimos gráficas  
 A: Si, si se dio cuenta

Hasta acá el análisis del proceso de resolución que sigue el equipo A’AM al problema de *Los críticos de cine y las películas*. A continuación, presentamos los resultados del análisis a

nivel macro de la diversidad de los patrones de pensamiento que se observaron en el problema de *“Los críticos de cine y las películas”*.

### Características generales de los modelos construidos por los diferentes grupos pequeños para el problema *“Los críticos de cine y las películas.”*

Ahora reportamos los diferentes modelos para el problema *“Los críticos de cine y las películas”* que encontramos en nuestro estudio. La diversidad de modelos ilustra la variedad de enfoques e interpretaciones que los estudiantes hacen cuando avanzan a través de la tarea. El modelo desarrollado por el equipo AMA' (analizado en la sección anterior) es justamente una de las diferentes secuencias de aprendizaje que ocurren en el salón de clases. Los modelos de los estudiantes fueron categorizados de acuerdo a las diferencias en las cantidades utilizadas y a las relaciones entre las cantidades. En algunos casos, los modelos resultantes fueron matemáticamente equivalentes pero las operaciones que los estudiantes usaron fueron diferentes. Tales modelos se consideraron distintos, debido a que diferían a un nivel operacional y en cómo los estudiantes expresaron su pensamiento.

Se identificaron seis modelos distintos que los estudiantes desarrollaron. En todos los modelos los conceptos que se utilizaron para construir una relación jerarquizada única fueron las

ideas de *promedio* y de *comparación*. La diferencia entre los modelos radicó en la forma en que se utilizaron tales ideas. En el primer modelo los alumnos construyen un listado único de calificaciones emitidas para cada uno de los críticos, agregando los datos que se proporcionaron por separado en las tres tablas. Una vez construida una sola tabla para cada uno de los críticos calculan el promedio de las calificaciones que cada uno otorga. En seguida, utilizando la idea de *comparación* de los números racionales, construyen una única lista ordenada para los distintos críticos. Esta lista permite decidir cuál es el crítico más exigente y quién el menos exigente.

Un segundo modelo desarrollado por los alumnos consistió en tratar cada una de las tres tablas de datos de manera individual, encontrando los promedios de calificaciones para cada crítico que aparecía en la tabla y después, para los casos que lo requiriesen, calcular un promedio de promedios. Cuando ya tienen un promedio para cada crítico, utilizan el proceso de *comparación* para integrarlos en una única lista ordenada que les permite tomar una decisión.

Un tercer modelo que construyen los alumnos consiste en sumar la totalidad de puntos otorgados y construir con estas sumas un único listado ordenado a través del proceso de *comparación*. En este caso no se utilizó el concepto de *promedio*.

Un cuarto modelo que los alumnos desarrollan consistió en promediar las calificaciones otorgadas por cada crítico con respecto al número de tablas en donde aparecía el crítico y después construir un solo listado a través del proceso de *comparación*.

Un quinto modelo que los alumnos construyen comparte con algunos de los anteriores la idea de construir un listado ordenado único, pero distinguiéndose de los anteriores por las representaciones que utilizan: a los críticos los designan con las letras A, B, C, ..., S, y a las películas con los números 1, 2, 3, ..., 12. La lista jerarquizada de críticos es una tabla de tres columnas con el nombre del crítico en una columna, en la segunda columna aparece entre paréntesis las letras mayúsculas que corresponden a las veces en que aparece el crítico, y en la tercera columna su promedio final. Además utilizan una notación “bastante” elaborada para referirse a un reglón de la columna. Por ejemplo, para referirse al renglón en que aparece el crítico Andrés de Luna, lo hacen de la siguiente forma: Andrés x 3 (A, L, N) 7.0, lo cual quiere decir que aparece tres veces, en los lugares de las letras A, L, N y obtuvo siete de promedio global.

El sexto modelo es el que desarrolló el equipo cuya línea de pensamiento fue descrito anteriormente —el que desarrolló el equipo A, M, A’—. Este modelo es equivalente al segundo que se ha descrito líneas arriba, salvo que en este caso utilizan gráficas de barra como parte de él.

Hay que hacer notar que los seis modelos descritos no son, desde el punto de vista matemático, equivalentes. Esto debido a que no todos los críticos evalúan el mismo número de películas, ni cada una de las películas fue evaluada por el mismo número de críticos. Esto hace que los seis modelos construidos por los alumnos sean diferentes unos de otros. Además, es posible que integrar una sola lista para cada crítico es conceptualmente “más” complicado en virtud de que sólo tres equipos la llevan a cabo. Por otro lado, un equipo llega a integrar un listado único a través de los promedios para cada crítico según cada una de las tablas, pero ya no puede resolver la dificultad que se le presenta cuando el mismo crítico aparece en lugares diferentes.

Por otro lado, atendiendo a cómo los distintos equipos interpretan el hecho de que un crítico de cine se haya abstenido de evaluar una película —lo cual se refleja en que una celda de una tabla esté vacía— los modelos que los alumnos construyen son de dos tipos: aquellos que interpretan la celda vacía como si el crítico hubiere calificado con cero a la película, y los que interpretan la celda vacía como ausencia de calificación.

A manera de conclusión a la solución del problema *Los críticos de cine y las películas*, en seguida se enumeran cinco etapas que se identifican en el proceso de resolución que siguen los alumnos:

1. *Identificación de la estrategia de resolución.* Casi al finalizar la lectura del problema los alumnos reconocen como estrategia para resolverlo el trabajar con *promedios*.
2. *Cálculo de promedios.* Los alumnos calculan los promedios de las calificaciones otorgadas por cada uno de los nueve críticos (calculando el promedio para crítico por tabla y después encontrando un promedio de promedios ó integrando todas las calificaciones que dio cada crítico y obtener su promedio) y los promedios de las calificaciones asignadas a cada una de las doce películas.

3. *Construcción de lista ordenada.* Los alumnos construyen sendas listas ordenadas para los críticos y las películas en base a los cálculos realizados en la segunda etapa.
4. *Toma de decisión.* Utilizando los valores máximos y mínimos de los promedios calculados en la etapa anterior los alumnos contestan las preguntas de la 1 a la 4.
5. *Abstracción del proceso que siguieron en la solución del problema,* que se muestra en la descripción que hacen los alumnos del proceso de modelación que siguieron.

Las tablas que se muestran a continuación resumen el trabajo de los diferentes equipos.

**TABLA 1.** Esta tabla registra el promedio de calificaciones para las doce películas que obtuvo cada equipo

Tabla	Película	EQUIPOS							
		AA'M	SEG	GAE	EJcJ	PLA	ENML*	CJP	WRFj
Tabla 1	Hombres de negro	6.5	6.5	6.57	6.5	6.5	46	6.5	6.5
	Episodio II:El ataque de	7.4	8.4	7.42	7.4	7.4	52	7.4	7.4
	Iris-Recuerdos imborr..	7.7	7.7	7.7	7.7	7.7	54	7.7	7.7
	Lilo y Stitch	8	8.0	8.0	8.0	8	56	8	8
Tabla2	Mejor que el sexo	7	7.0	7.0	7	7	35	7	7
	La reina de los conde..	5.8	5.8	5.80	5.8	5.8	29	5.8	5.8
	El asalto	7.6	7.6	7.6	7.6	7.6	38	7.6	7.6
	Tiro penal	6.8	6.8	6.8	6.8	6.8	34	6.8	6.8
Tabla 3	Nunca más	5.875	5.8	5.87	5.875	5.87	47	5.8	5.8
	Un gran chico	8.1	8.1	8.1	6.875	8.1	65	8.1	8.1
	¡Oye Arnold!	6.6	6.6	6.6	6.625	6.6	53	6.6	6.6
	Frío de perros	5.857	5.1	5.85	5.125	5.1	41	5.1	5.1

\*Este equipo no encuentra el promedio aritmético sino que suma la calificación que dieron los críticos a cada película.

\*\*El sombreado indica los resultados del equipo cuyo trabajo que se describió en el apartado anterior y las calificaciones obtenidas por la película Frío de perros.

**TABLA 2.** Tabla que registra, por equipos, el promedio de calificaciones que cada uno de los nueve críticos asignó en las películas que calificó.

Crítico	NPC*	EQUIPOS							
		MAA	SEG	GAE	EJcJ	PLA	ENML	CJP	WRFj
Nelson Carro	12	6.1	5.9	5.8	no	6.8	23.6	5.9	5.9
Gustavo García	8	6.6	6.6	6.6	lo	6.62	26.5	6.6	6.6
Jorge Ayala B.	12	6.7	6.5	6.28	hacen	6.5	26	6.5	6.4
Oscar Uriel	7	6.9	6.1	6.9		6.12	22.5	6.1	6.1
Andrés de Luna	12	7.083	7.0	7.08		7.0	28	7.0	6.9
Rafael Aviña	4	7.2	7.25	7.2		7.25	20	7.25	7.2
José Xavier Nívar	8	7.6	7.6	7.6		7.62	30	7.6	7.6
Mario P.. Szeckely	12	7.733	10.5	7.73		7.75	31	7.75	7.7
Eduardo Scheffler	4	7.75	7.75	7.75		7.75	31	7.75	7.7

\*NPC: Número de Películas Calificadas.

**TABLA 3.** Tabla que registra la respuesta que los diferentes equipos dieron a la petición: hagan un listado de críticos ordenados de más “exigente a “menos” exigente.

Equipos							
MAA'	SEG	GAE	EJcJ	PLA	ENML	CJP	WRFj
NELSON C.	NELSON C.	NELSON C.	NO	NELSON C.	RAFAEL A.	NELSON C.	MARIO P. S.
GUSTAVO G.	OSCAR U.	JORGE A. B.	LO	OSCAR U.	OSCAR U.	OSCAR U.	EDUARDO S.
JORGE A. B.	JORGE A. B.	GUSTAVO G.	HACEN	JORGE A. B.	NELSON C.	JORGE A. B.	JOSÉ X. N.
OSCAR U.	GUSTAVO G.	OSCAR U.		GUSTAVO G.	JORGE A. B.	GUSTAVO G.	RAFAEL A.
ANDRÉS de L	ANDRES de L	ANDRÉS de L		ANDRÉS de L	GUSTAVO G.	ANDRÉS de L	ANDRÉS de L
RAFAEL A.	RAFAEL A.	RAFAEL A.		RAFAEL A.	ANDRÉS de L	RAFAEL de L	GUSTAVO G.
JOSÉ X. N.	JOSÉ X. N.	JOSÉ X. N.		JORGE A. B.	JOSÉ X. N.	JOSÉ X. N.	JORGE A. B.
MARIO P. S.	EDUARD S.	MARIO P. S.		MARIO P. S.	MARIO P. S.	EDUARDO S.	OSCAR U.
EDUARDO S.	MARIO P. S.	EDUAR S.		EDUARD S.	EDUARDO S.	MARIO P. S.	NELSON C.

**TABLA 4.** Esta tabla registra el listado de películas ordenadas de “mejor” a “peor” que cada equipo construyó

Equipos							
MAA*	SEG	GAE	EJcJ	PLA	ENML	CJP	WRFj
Un Gran	Episodio II	Un Gran	Lilo y ..	Un Gran	Un Gran	Un Gran	Un Gran
Lilo y ..	Un Gran	Lilo y ..	Iris ...	Lilo y ..	Lilo y ..	Lilo y ..	Lilo y ..
Iris ...	Lilo y ..	Iris ...	El Asalto	Iris ...	Iris ...	Iris ...	Iris ...
El Asalto	Iris ...	El Asalto	Episodio II	El Asalto	Oye Arnold	El Asalto	El Asalto
Episodio II	El Asalto	Episodio II	Mejor que .	Episodio II	Episodio II	Episodio II	Episodio II
Mejor que .	Oye Arnold	Mejor que .	Un Gran	Mejor que .	Nunca más	Mejor que .	Mejor que .
Tiro Penal	Tiro Penal	Tiro Penal	Tiro Penal	Tiro Penal	Hombres d	Tiro Penal	Tiro Penal
Oye Arnold	Hombres d	Oye Arnold	Oye Arnold	Oye Arnold	Frío de perr	Oye Arnold	Oye Arnold



Hombres d	Nunca más	Hombres d	Hombres d	Hombres d	El Asalto	Hombres d	Hombres d
Nunca más	La Reina d	Frío de perr	Nunca más	Nunca más	Mejor que	Nunca más	Nunca más
Frío de perr	Frío de perr	Nunca más	La Reina d	La Reina d	Tiro Penal	La Reina d	La Reina d
La Reina d		La Reina d	Frío de perr	Frío de perr	La Reina d	Frío de perr	Frío de perr

**TABLA 5.** Tabla con los diferentes tratamientos de datos que los ocho equipos utilizaron al enfrentar la tarea.

Equipo	Respuestas a las preguntas 7 y 8*	
MAA'	7	Primero sacamos el promedio con respecto a las calificaciones que el crítico le dio a cada película, después comparamos los promedios de todos los críticos y el que tuvo menor promedio ese fue el más exigente.
	8	Primero sacamos el promedio de cada una de las películas con la calificación que ya les habían dado los críticos, después comparamos cual tuvo mayor promedio y así fue como concluimos que fue la mejor, y la que tuvo más bajo promedio fue la peor película.
SEG	7	Sacamos los promedios de cada uno de los críticos tomando en cuenta las veces que participaron, en otras palabras hacer el promedio del resultado de sus opiniones.
	8	Sacando su promedio y acomodándolas en escala de la mejor a la peor en caso de empate comparamos sus números de los resultados.
GAE	7	Por promedios.
	8	Por promedios.
EJcJ	7	Según su promedio que dieron los críticos.
	8	Con las películas según su promedio general.
PLA	7	Sacando el promedio que cada crítico le dio a las películas.
	8	Sacando el promedio de todas las películas.
ENML	7	Sumamos las calificaciones que dieron (las columnas verticales) y luego sacamos el promedio de cada uno de los críticos.
	8	Sumamos horizontalmente las calificaciones dadas a las películas y luego comparamos la mayor y menor de las calificaciones.
CJP	7	Sacamos los promedios de cada columna conforme al crítico, posteriormente a cada crítico lo acomodamos de acuerdo a los promedios de las 3 tablas, y de igual forma sacamos promedios, tomando en cuenta cuantas películas calificó.
	8	Sacamos promedios por fila; que en este caso son las calificaciones y dividimos entre 7; que en este caso son las calificaciones dadas. De eso, la acomodamos de mejor a peor película.
WRFj	7	Decidimos por medio de los promedios de cada crítico y si se repetía en otras tablas se sumaban los 3 o dos promedios para sacar uno sólo.
	8	Hicimos lo mismo pero en este caso no se repitieron las películas y fue más fácil.

\* Las respuestas son textuales.

Análisis de los ciclos de desarrollo que exhibe un grupo pequeño (FAS) al abordar el problema de:  
*La familia Zapata cambia de lugar de residencia*

Antes de pasar a la revisión de la solución que dieron los alumnos a este problema es necesario recordar dos características en relación a la tabla de datos numéricos anexa al problema: Primero, la suma de los porcentajes de los ocho problemas para las doce ciudades no suman cien (como debería ser) en todos los casos y, segundo, la celda correspondiente al desempleo en la ciudad de León está en blanco. Estas dos características son con la intención de indagar el efecto que la estructura de la tabla de datos tiene sobre el tratamiento que de los mismos hacen los alumnos.

Ciclo 1: *Decisión de los problemas relevantes. Acción de ponderación. Criterios No-matemáticos.* Después de leer el problema hay, en el proceso de resolución, un primer momento en que los integrantes del equipo tratan de definir, sin llegar a ponerse de acuerdo, qué problemas, de las ocho que se dan (pobreza, inseguridad, desempleo, delincuencia, violencia, servicios públicos, drogadicción y contaminación) deberán tener las tres mejores opciones en donde los Zapata podrían residir. Desde el principio de la resolución se muestra que los integrantes del equipo realizan la acción de **ponderación** ya que de los ocho problemas presentes, en cada uno de los doce lugares, consideran que algunos de ellos son más relevantes para seleccionar las mejores opciones. Esto se deja entrever por afirmaciones, pronunciadas por los integrantes del equipo, como las siguientes:

- A: El que tiene mayor pobreza es Cancún y Puebla, ¿No?
- S: Yo digo que tiene que ver donde haya, este, menor pobreza y desempleo, ¿no? ¡Ajá!
- S: No, mejor desempleo.
- A: Las dos.
- F: Hay que ver lo que dice acá (y lee la nota que explica el significado de cada número), ¿Ves?
- F: Tenemos que buscar uno que tenga poca pobreza, pon tú, Saltillo. No, .. tiene mucha inseguridad, verdad?
- S: No, yo digo que sea que tenga poca inseguridad, desempleo y delincuencia, o drogadicción.
- A: No, drogadicción, no.
- S: Sí, porque tienen hijos.
- A: Pero eso lo encuentran en cualquier lugar.
- A: De todas maneras, casi, bueno, no tienen ni mucho ni poco.
- A: No, yo digo que pobreza es lo primero, desempleo, delincuencia o violencia ¿cuál es la que más importaría?
- S: Delincuencia.
- A: ¡Nooo!
- F: Primero está la violencia, ¿no?, para que salga la delincuencia.
- A: Sí, ¿no?
- F: Primero está la violencia, ¿no? para que salga la delincuencia.

Ciclo 2. *Formulación de una conjetura*. En este momento formulan la suposición de que fuera la *violencia* lo más importante, y con base en esta suposición intentan encontrar ciudades que teniendo “poca” violencia tengan también un nivel “bajo” en otros problemas. Veamos algunas de sus afirmaciones:

- A: Bueno, a ver, que fuera la violencia lo principal.  
 S: En Aguascalientes hay poca violencia pero, hay mucha inseguridad.  
 A: Aja, entonces, ¿en dónde sería?  
 A: En Tijuana hay dieciséis de pobreza y seis de desempleo. En Ciudad Juárez hay quince de pobreza y tres de desempleo. Estaría mejor ahí, este, ¿no? porque, pues ya al menos tendrían empleo. ¿No?  
 F: ¿En cuál?  
 A: En Ciudad Juárez.  
 S: Si, ¿no?, está bien.  
 F: ¿Si?  
 A: A ver otro. Luego, Saltillo tiene cinco y cinco  
 F: ¿Saltillo? ¡Ah, ya!  
 A: ¿Y cuánto tiene de violencia?  
 S: Si, Saltillo esta bien. Si, ve, sólo que tiene veintinueve de inseguridad.  
 A: Ayyyy.....  
 F: Por eso, ah no, León tiene veintiuno en drogadicción.  
 F: Pues por eso, podrían, a ver, ser Ciudad Juárez.  
 A: León en desempleo no tiene nada.  
 F: León y Saltillo.  
 A: Saltillo, si, ¿no?  
 A: A ver, ¿cuáles son?  
 A: Ciudad Juárez.. Ciudad Juárez tiene quince de pobreza, tres de desempleo, dieciocho de delincuencia, dieciocho de violencia, dos de servicios públicos.....

También en este punto no logran encontrar, en este primer momento, cuáles serían las mejores opciones.

Ciclo 3: *Fin a la vista del problema*. Los alumnos pasan a considerar qué es, en concreto, lo que les demanda la tarea. Plantean algunos elementos que la carta contendrá y entre ellos las representaciones en forma gráfica. Con posterioridad analizaremos la carta que producen los alumnos. Por el momento hay que observar que aparecen ya integrados los problemas que los alumnos consideran relevantes con la formas representacionales (tablas y gráficas)

- .....  
 F: Tenemos que hacer una tabla, ¿no?  
 S: Una carta, bueno, la carta y entre ella la tabla.

- F: Por eso, la tabla la hacemos con los tres. Ó, ¿hacemos una tabla para cada lugar?
- S: Yo decía ponerle, este, no sé, ....consideramos que la pobreza, el desempleo y esto ....y hacer así una tabla de lo que tienen de pobreza, y de esto....
- F: A ver qué entonces ¿qué?. O sea, ¿hacemos las gráficas, por cada ciudad?
- A: Pues hay que redactar una carta.
- S: Yo digo que primero hagamos una gráfica de pobreza, una de desempleo y una de delincuencia que fue en lo que nos basamos, ¿No?
- F: A ver entonces, ¿cuántas ciudades son?
- S: 3
- A: No, No, ¿en total?
- F: Aguas calientes, ¿qué más?
- F: Tijuana
- A: Ah, yo pensé que de todas.
- F: Sí. ¿De todas las ciudades?
- A: Sí, ¿no?
- F: Ah, O.K.
- ...

En seguida de esto se dedican, por un corto tiempo, a trazar tres sistemas de coordenadas. En esta acción tienen algunos problemas en situar la escala correcta que necesitan de acuerdo a los números que ven en la tabla. Hay que hacer notar que, sin haber estado de acuerdo en qué *problemas*, de los ocho, se considerarían, alguien (S) dice que se haga una gráfica para la pobreza, una para el desempleo y otra para la delincuencia. Esta falta de acuerdo se pone de manifiesto una vez que han trazado los sistemas de coordenadas y hay que dibujar los puntos de las gráficas.

Ciclo 4: *Definición de los problemas relevantes. Proceso de ponderación.* Con los sistemas de coordenadas ya trazados, hay que dibujar puntos. Puntos, pero, ¿de quién? En este ciclo, por otra parte, se toman en cuenta aspectos de la situación problemática que no se habían considerado en la primera etapa. El equipo repara en que los Zapata ya tienen empleo, quieren vivir tranquilos y están preocupados por sus hijos, esto forma de la construcción de significado del problema. Considerar esto le va a permitir, por un lado, aceptar como más relevantes ciertos problemas (la drogadicción) y, por otro, rechazar por poco relevantes otros problemas como el desempleo. En esta etapa el equipo llega a definir, de manera más o menos clara, los problemas relevantes que deberán tener las mejores opciones de lugares para vivir: inseguridad, delincuencia, y drogadicción. Todo esto queda de manifiesto en la siguiente transcripción de la conversación que tuvo el equipo:

...

- F: Nada más vamos a tomar en cuenta, ¿cuáles puntos?...Pobreza, ¿qué más?  
 S: Fue desempleo y violencia y ya, ¿no?  
 A: Pobreza, desempleo y violencia.  
 F: Entonces, ¿nada más vamos a hacer dos gráficas? ¿O, cuántas vamos a hacer? Esta gráfica ¿de qué van a ser?  
 S: ¿Por qué? Es que yo digo que la pobreza no es tan importante, ¿o sí?  
 F: No, porque se supone que ellos ya tienen trabajo.  
 A: Sí, no, sí, sí, no.  
 S: Desempleo, luego violencia  
 F: Es que ellos quieren vivir en un lugar tranquilo.  
 A: Ah entonces inseguridad. ¿No?  
 S: Desempleo y violencia. En donde menos inseguridad, estén.  
 A: A ver ¿cuál es, inseguridad, desempleo y delincuencia?  
 F: Inseguridad. ¿Desempleo?, ¿por qué? si ellos ya tienen empleo.  
 S: ¿Ahí dice que tienen empleo? A ver.  
 F: Sí, por razones de trabajo.  
 S: Ah, sí. ¿Delincuencia?  
 A: ¿Inseguridad, delincuencia y violencia?  
 F: Inseguridad y delincuencia, ¿No? y violencia.  
 S: Aja. ...Entonces, en donde hay menos de inseguridad es ..  
 A: Drogadicción porque ellos están principalmente preocupados por sus hijos.  
 F: Bueno entonces todas, ¿no? ¿Drogadicción?  
 A: Pues sí, ¿no?  
 F: Primero inseguridad. Hay que tomar en cuenta inseguridad y drogadicción, ¿no? Esas dos  
 A: Y delincuencia, ¿no?  
 F: A bueno, pero de todos modos lo hacemos en una gráfica con diferentes puntos. Entonces me volví a equivocar otra vez porque lo hubiera hecho más grande porque los números pasan del treinta acá.

En este punto vuelve a haber discusión entre ellos porque los planos cartesianos que trazaron no contaban, en el eje de las ordenadas, con las divisiones suficientes para abarcar los números más grandes que para la inseguridad contiene la tabla. Hasta acá llega el proceso de ponderación, lo que sigue, decidir los mejores lugares de residencia y redactar la carta, son aspectos en donde ya no tiene lugar la ponderación. Su papel fue decidir cuáles, de los ocho problemas que presentan los lugares, son más relevantes y cuáles tienen menos “peso”. Su papel ha sido definir con claridad una variable: los problemas importantes de los lugares. De acá adelante hay que vérselas con las dos variables restantes, los lugares y los índices para sus problemas.

Ciclo 5. *Selección de las mejores opciones para vivir: Proceso de comparación:* La siguiente etapa se inicia con la discusión para seleccionar los tres mejores lugares tomando en

consideración los números más pequeños para inseguridad, delincuencia, violencia y drogadicción que aparecen en la tabla. Al inicio de esta etapa se dan cuenta que la Zona conurbada no puede ser un candidato ya que los Zapata viven ahí. Hay que hacer notar que de los miembros del grupo pequeño, F hizo notar más condiciones que estable el problema planteado; por lo tanto, cabe la pregunta: ¿F fue la que mejor construyó un significado del problema?

Observando y comparando los números que contiene la tabla concluyen que las tres mejores opciones que pueden proponer a los Zapata son Morelia, Puebla y Cancún. Esto es lo que se manifiesta en la siguiente conversación:

- ...
- F: Entonces, inseguridad y ¿qué?
- S: Drogadicción.
- A: No, delincuencia.
- S: Yo digo que
- F: En Aguascalientes.
- S: Hay mucha inseguridad.
- F: En zona conurbana, no porque ellos vivían ahí.
- S: Si En León hay doce de inseguridad, delincuencia diecinueve, drogadicción veintiuno.
- A: Más bajo en drogadicción es Puebla, pero tiene veinticuatro de inseguridad.
- S: Guadalajara, pero tiene treinta y cuatro.
- A: Y Puebla también tiene cinco. Puebla tiene cinco de drogadicción, y veinticuatro de inseguridad, y de delincuencia, dieciocho. Esa puede ser una opción, ¿no?
- S: ¿Quién?, ¿Puebla?
- A: Aja, porque, mira, tiene cinco de drogadicción. Luego, ....
- S: ¿Y de inseguridad?
- A: Pues veinticuatro. No está tan alto ni tan bajo en inseguridad.
- F: ¿Por qué no Cancún? Cancún tiene de inseguridad veintiséis, de violencia dos, de drogadicción diez. Es mucho veintiséis, ¿verdad?
- A: Si, porque, bueno, Puebla tiene veinticuatro.
- S: Mejor ponemos León.
- F: Puebla, ¿dónde está Puebla? Puebla tiene veinticuatro. Pues tomamos los dos: Puebla y Cancún.
- S: León también, ¿no? León tiene doce de inseguridad.
- F: ¿De violencia?, ¿de drogadicción?
- A: Pero tiene veintiuno de drogadicción.
- F: Si, es que es mucho, ¿no?
- S: Ajá. ¿Morelia?
- A: Morelia tiene veintiuno, veinte, nueve, También podría ser una opción Morelia. ¿No?
- F: ¡Ah!, pues sí
- A: Y ya, ¿no?
- F: Ajá. Entonces, vamos a graficar nada más estos tres. ¡Ah, no! Primero hay que ¿qué íbamos a hacer?,...¿Por qué pusimos todos estos?
- S: Para graficar inseguridad.
- F: ¿Inseguridad?
- A: No.
- F: Inseguridad y drogadicción. ¿No?

- S: Ándale, drogadicción.  
 F: Los tres. Los tres, pero con diferente color.  
 ...

Hay que hacer ver que estos alumnos experimentan dificultades para decidir sobre las tres mejores opciones aparentemente porque no siguen una forma sistemática de comparar las evaluaciones para los diferentes lugares. Sin contar con un método que permita llevar a cabo una comparación sistemática entre diversos conjuntos de valores, es difícil ordenarlos de alguna manera, ya que algunas opciones tendrán, para algún o algunos problemas valores más pequeños que otras, pero, al mismo tiempo, para otros problemas tendrán valores mayores que otras opciones.

*Fin a la vista del problema: la carta.*

Al inicio de esta actividad se da la discusión acerca de la escala en los planos cartesianos que con anterioridad se han dibujado. Parece ser que la dificultad reside en ajustar el eje de las ordenadas al tamaño de la hoja y que contenga las divisiones necesarias para que se puedan representar los números más grandes que aparecen para inseguridad, drogadicción y delincuencia, en los doce lugares que la tabla muestra. Entre F y S dibujan los puntos de la gráfica y A empieza a redactar la carta ayudada por sus otras dos compañeras. Trazan las gráficas para la inseguridad, la drogadicción y la delincuencia en los doce lugares y, en este momento deciden, de manera clara y explícita, trazar también la gráfica para la violencia. Este aspecto no se trató de forma sistemática en la discusión. Las cuatro gráficas las representan en mismo plano cartesiano, sólo que con diferentes colores. A continuación, en tanto A continúa redactando la carta, F y S dibujan sendas gráficas para los ocho problemas (pobreza, inseguridad, desempleo, delincuencia, violencia, servicios públicos, drogadicción y contaminación) en las ciudades que han elegido: Morelia, Puebla y Cancún.

*Análisis de la carta producida por el grupo FAS.*

La acción de ponderación, en el sentido de que en una situación problemática, por las condiciones específicas o particulares de ella, hay ciertos elementos que se pueden considerar como más relevantes o que tienen más “peso”, sólo está presente, en forma contundente, en la resolución que hace un equipo (FAS). Uno podría estar de acuerdo o no en los elementos que se consideran más relevantes, eso es lo de menos, lo realmente importante acá es la posibilidad de que en forma consciente e intencionada determinadas situaciones se acepten, no como que no importan en absoluto, sino que para la situación no son tan importantes. A continuación se muestra la carta que redacta este equipo:

12-Jun-03

*Familia Zapata:*

*Les enviamos un cordial saludo. Nos dirigimos a ustedes con el propósito de informarles sobre algunos lugares que consideramos convenientes para que puedan vivir tranquilamente, tomando en cuenta cuatro puntos: Inseguridad, drogadicción, delincuencia y violencia.*

*Los lugares que recomendamos son:*

- Puebla*
- Cancún*
- Morelia*

*Creemos que estos lugares son adecuados debido a que son los que tienen un índice regular; consideramos que pobreza, desempleo, servicios públicos y contaminación, no eran puntos tan importantes ya que tienen empleo y porque no hay mucha diferencia de contaminación entre las ciudades.*

*Para una mejor comprensión les enviamos gráficas sobre los índices de los puntos que tratamos.*

*Esperamos que su elección brinde tranquilidad a su familia.*

*Atte.: Alejandra  
Fide  
Sara*



Analicemos con detalle esta carta a la luz de la acción de ponderación y la resolución de problemas. Anteriormente hemos definido como *ponderación* el **proceso por el cual se asigna un valor o grado de importancia a un conjunto de opciones**. En este caso las opciones son ocho problemas y doce ciudades. La ponderación tiene como intención incluir pero también excluir. Considerar cosas en distinta medida o proporción. ¿Hasta qué punto incluir y hasta dónde excluir? Depende de muchos factores. No hay una respuesta simple ni única.

Cuando este equipo dice:

: “...*sobre algunos lugares que consideramos convenientes.....*”,

explícitamente reconocen que eso es lo que *ellos* consideran, otros equipos u otras personas podrían considerar otras cosas y, en consecuencia, podrían llegar a otra u otras respuestas.

Al decir:

“... *que consideramos convenientes para que puedan vivir tranquilos ..*”,

reconocen un deseo de los Zapata, de acuerdo a la condición del problema que establece: “...los Zapata, preocupados principalmente por sus hijos, preferirían establecerse en un lugar “tranquilo”...”. En otras palabras, para los Zapata es importante su tranquilidad, esta condición hace que las diferentes opciones que tienen a su disposición tengan un valor diferente: valdrán más aquellas opciones que les garanticen mayor tranquilidad.

Cuando este equipo dice:

“...*tomando en cuenta cuatro puntos: Inseguridad, drogadicción, delincuencia y violencia...*”,

cabe preguntarse: ¿Qué pasó con los restantes problemas, porqué los descartan? ¿Porqué esos cuatro problemas y no otros? Descartar aspectos, incluir con diferente grado de importancia, son puntos esenciales en la ponderación: son las condiciones de la situación problemática las que

determinan qué aspectos incluir, qué aspectos excluir, qué peso o valor tendrán unos aspectos sobre otros. Cuando este equipo incluye problemas como la inseguridad, la drogadicción, la delincuencia y la violencia, reconocen, según ellos, que estos problemas están directamente relacionados con la *tranquilidad* que desea la familia Zapata, que lo logren, eso ya es otro problema.

Cuando este equipo dice:

*“...consideramos que pobreza, desempleo, servicios públicos no eran puntos tan importantes ya que tienen un empleo y porque no hay mucha diferencia de contaminación entre las ciudades...”*,

exhibe de manera clara y fehaciente que han realizado la acción de ponderación. Si los Zapata tienen empleo no les debería importar el desempleo como problema y, por lo tanto, tampoco les debería importar si el lugar a donde se puedan ir a vivir lo tiene como problema importante. Ponderar implica, de alguna manera, clasificar cosas de acuerdo a su importancia: estos alumnos lo hacen claramente cuando afirman *“...no eran puntos tan importantes..”*; Los puntos más importantes los mencionaron antes, eran la inseguridad, la drogadicción, la delincuencia y la violencia. Pero todavía hay más, de acuerdo a estos alumnos, si no hay mucha diferencia de contaminación entre las ciudades da lo mismo una ciudad u otra, con respecto a la contaminación.

Hay que hacer notar que cuando estos alumnos descartan a la contaminación lo hacen a través de un *tratamiento a los datos* que corresponden a la evaluación de este problema en las diferentes ciudades: comparan los datos y ven que “no hay mucha diferencia entre ellos”. Textualmente dicen: *“... no hay mucha diferencia de contaminación entre las ciudades...”*

Hasta acá se manifiesta la acción de ponderación de los alumnos. Resumiendo lo que hicieron vemos que el considerar o tomar en cuenta las dos condiciones siguientes de la situación problemática

- la familia Zapata está formada de los papás, una hija de 16 años y un niño de 11 años;
- los Zapata, preocupados principalmente por sus hijos, preferirían establecerse en un lugar “tranquilo”;

les permitió “pesar”, “valorar”, “ponderar” el grado de importancia de ocho problemas (pobreza, inseguridad, desempleo, delincuencia, violencia, servicios públicos, drogadicción y contaminación) que existen en doce lugares. Esta acción de ponderación les llevó a considerar como problemas más importantes o de más peso a la inseguridad, la drogadicción, la delincuencia y la violencia y, a considerar como menos importantes a la pobreza, el desempleo, los servicios públicos y la contaminación. Esto es en esencia la acción de ponderación, los alumnos la usaron para decidir qué problemas de las ciudades son más relevantes y cuáles son menos importantes.

Por otro lado, estos alumnos dicen:

*“Los lugares que recomendamos son:*

- Puebla
- Cancún
- Morelia

*Creemos que estos lugares son adecuados debido a que son los que tienen un índice regular; ...”*

Una vez decidido que los problemas importantes en las doce ciudades son la inseguridad, la drogadicción, la delincuencia y la violencia pasan a decidir cuáles son los tres lugares, de las doce opciones que se dan, en donde tales problemas presentan el menor índice. Pero esto ya no se decide ponderando, se decide utilizando otras formas del pensar matemático: estos alumnos recurren simplemente a *comparar* (sin hacer más) los porcentajes que de estos cuatro problemas exhiben los doce lugares y concluyen, que es Puebla, Cancún y Morelia, en donde tales problemas se presentan, según ellos, en menor cuantía. El proceso de ordenar un conjunto de situaciones es importante cuando hay que tomar una decisión, en este caso los alumnos lo hacen utilizando la relación de orden de los números naturales.

Si sólo tuviéramos el resultado escrito (cuatro hojas) que los estudiantes producen, sin contar con la audiograbación, tal vez sería difícil percatarse del complicado camino que llevó a su producción.

Se pueden resumir, de la siguiente forma, las etapas por la que pasa el modelo que producen A, F y S:

1. Etapa inicial de decidir, sin éxito, los aspectos relevantes que deberán cubrir los candidatos a lugar de residencia.
2. Etapa de consideración de lo que la tarea demanda hacer: carta, tabla y/o gráfica.
3. Definir de entre los ocho problemas (pobreza, inseguridad, desempleo, delincuencia, violencia, servicios públicos, drogadicción y contaminación) que enfrenta cada uno de los doce posibles lugares de residencia aquellos que se consideren relevantes, de acuerdo a las condiciones de la familia Zapata, y que se establecen en el problema planteado.
4. Decisión de las mejores opciones para lugar de residencia.
5. Producción escrita de la resolución del problema.

En este problema, las condiciones de la familia Zapata (la familia Zapata, por razones de trabajo, se ve obligada a cambiar de lugar de residencia; la familia Zapata está integrada por los papás, una hija de 16 años y un niño de 11 años; en la actualidad la familia Zapata vive en la Zona conurbada; los Zapata están preocupados por sus hijos; los Zapata preferirían establecerse en un lugar tranquilo) sirven de guía para definir de entre los ocho problemas que enfrenta cada uno de los doce posibles lugares de residencia (pobreza, inseguridad, desempleo, delincuencia, violencia, servicios públicos, drogadicción y contaminación) aquellos que se deben tomar en cuenta (porque son relevantes de acuerdo a las condiciones de la familia Zapata) y cuáles se pueden despreciar (porque son irrelevantes de acuerdo a las condiciones de la familia Zapata).

Los integrantes del equipo establecen relaciones entre las condiciones de la familia Zapata y algunos de los ocho problemas que enfrentan los candidatos a lugar de residencia. Estas relaciones las fundan en interpretaciones personales, por ejemplo: si ya tienen trabajo no les preocupará el desempleo; ya que están preocupados por sus hijos también les debe preocupar la drogadicción; si desean vivir tranquilos entonces deben considerar la inseguridad, la delincuencia y la violencia como importantes. La interpretación personal de las condiciones establecidas en el problema es una característica de los problemas que admiten diversas soluciones: la solución es, en cierto sentido, resultado de las suposiciones que se hagan.

La acción de *ponderar* se fundamenta, afirma o justifica en estas suposiciones. Son estas últimas precisamente las que harán que algunos aspectos de entre la pobreza, inseguridad, desempleo, delincuencia, violencia, servicios públicos, drogadicción, contaminación tengan más o menos “peso” para la solución y que se consideren algunos y se descarten otros. En este caso, por ejemplo, no hubo una sola mención a los servicios públicos como algo importante. Naturalmente que desde otra interpretación personal, que puede ser válida, alguien puede argumentar, no sin razón, que la “pobreza” es causa de inseguridad, delincuencia, violencia y drogadicción y, en consecuencia, privilegiar o dar más peso a este aspecto que a los otros.

Una vez que los alumnos definen con mayor claridad los aspectos (de entre la pobreza, inseguridad, desempleo, delincuencia, violencia, servicios públicos, drogadicción, y contaminación) a considerar para la selección de las mejores opciones donde vivir, entra en juego el hecho de que las mejores opciones para vivir serán aquellas donde los índices para tales aspectos sean los menores, de entre los que se proporcionan en el problema. Esto involucra el proceso de medición. En este caso basta “comparar” los diversos valores que se dan como indicadores de inseguridad, delincuencia, violencia y drogadicción. En este punto, aunque hay una interpretación errónea de lo que significan los números que aparecen en la tabla, comparar tales números les permite decidir.

Los alumnos del equipo interpretan mal el significado de los 95 números que aparecen en la tabla: los interpretan como índices que miden directamente cada uno de los problemas, cuando en realidad lo que indican es lo que las personas aprecian como el problema más importante. Veamos cómo interpretan los números:

A: O sea, ve nada más, dice que México Distrito Federal, uno de contaminación.

S: ¡Si como no!

A: Uno de contaminación. O sea Fide, ¿no es una estupidez? ¿Cómo el D. F. va a tener uno de contaminación y tienes, Guadalajara cinco?

Tal vez esta incompreensión se pueda resolver con otro problema: Que los alumnos del grupo definan cuáles son, según ellos, los cinco problemas más importantes que consideren enfrentan los adolescentes en el Distrito Federal y después que cada uno vote por cuál, desde su

apreciación, es el más importante; esto daría el porcentaje de alumnos que decidan por cada uno de los cinco problemas.

Una cosa obvia, pero que hay que tener muy en cuenta, porque es un elemento que complica el estudio de la resolución de problemas, es que las *acciones* que intervienen en el “hacer matemáticas” pueden ser muy distintas y numerosas y su interrelación entre ellas compleja y difícil de analizar en detalle. Ilustremos esto, (puesto de manifiesto por lo que expresan los alumnos al momento de estar involucrados en la resolución del problema), mediante la tabla que aparece a continuación:

Acción	Ejemplo
Ponderar	S: Yo digo que tiene que ver donde haya, este, menor pobreza y desempleo, ¿no? ¡Ajá! F: Tenemos que buscar uno que tenga poca pobreza, pon tú, Saltillo. No, .. tiene mucha inseguridad, verdad? A: No, yo digo que pobreza es lo primero, desempleo, delincuencia o violencia ¿cuál es la que más importaría?
Relacionar	F: Primero está la violencia, no? para que salga la delincuencia. A: En Tijuana hay dieciséis de pobreza y 6 de desempleo. En Ciudad Juárez hay quince de pobreza y tres de desempleo. Estaría mejor ahí, este, ¿no? porque, pues ya al menos tendrían empleo. ¿No? A: Drogadicción porque ellos están principalmente preocupados por sus hijos. F: En zona conurbana, no porque ellos vivían ahí.
Formular suposiciones	A: Bueno, a verr, que fuera la violencia lo principal.
Comparar	S: En Aguascalientes hay poca violencia pero, hay mucha inseguridad. A: De todas maneras, casi, bueno, no tienen ni mucho ni poco.
Razonar	F: Inseguridad. Desempleo, ¿por qué? si ellos ya tienen empleo S: ¿Ahí dice que tienen empleo? A ver. F: Si, por razones de trabajo S: Ah, si.
Representar	F: Tenemos que hacer una tabla, ¿no? S: Una carta, bueno, la carta y entre ella la tabla. F: Por eso, la tabla la hacemos con los tres, o hacemos una tabla para cada lugar. S: Yo decía ponerle, este, no sé, ....consideramos que la pobreza, el desempleo y esto ....y hacer así una tabla de lo que tienen de pobreza, y de esto.... F: A ver qué entonces ¿qué?. O sea, ¿hacemos las gráficas, por cada ciudad? A: Pues hay que redactar una carta. S: Yo digo que primero hagámos una gráfica de pobreza, una de desempleo y una de delincuencia que fue en lo que nos basamos, ¿No?
Dudar	F: ¿En cuál? A: En Ciudad Juárez. S: Sí, ¿no?, está bien. F: ¿Sí? A: A ver otro. Luego, Saltillo tiene cinco y cinco F: ¿Saltillo? ¡Ah, ya! A: ¿Y cuánto tiene de violencia?

Es en la interrelación rica, variada y compleja de un gran número de acciones: observar, relacionar, otra vez observar, comparar, dudar, volver a observar, relacionar de nuevo, ..., etc., etc., como se va construyendo la resolución del problema. Y entre todas ellas la *ponderación*

como una acción central en este tipo de problemas. Este equipo de trabajo desde el inicio de la resolución “intuyó” que un aspecto central en la solución del problema era la ponderación. Así queda de manifiesto por la segunda afirmación que Sara hace:

S: Yo digo que tiene que ver donde haya, este, menor pobreza y desempleo, ¿no? ¡Ajá!

Esta ponderación, equivocada, por los elementos que considera, será la que con el trabajo en equipo se va ir transformando, refinando y “corrigiendo” hasta llegar, finalmente, a que los elementos de más peso son la inseguridad, delincuencia, violencia y drogadicción, cada uno teniendo diferentes pesos en sí.

La resolución del problema, como proceso, en el salón de clase, por tres alumnos, tiene que ser, de principio, diferente a la resolución que cada uno por separado podría producir. Sistema de creencias, recursos, metacognición, conceptualización de matemáticas, heurísticas, sistema de control, todo ello mediado por el trabajo y discusión en pequeño grupo. Cada uno de los aspectos anteriores, puestos en la mesa de la discusión, lleva a negociar, a través de la comunicación oral, escrita, corporal (como cuando alguien hace un gesto que quiere decir: *¿cómo puede ser éso?*) significados -esto se manifiesta claramente cuando las tres alumnas definen los términos de la carta:

F: Es que el de Lectura dijo, ¿cómo?, ¿se acuerdan?

Características generales de los modelos construidos  
por los grupos pequeños que abordaron el problema  
*“La familia Zapata cambia de lugar de residencia”*

Para todos los equipos fue claro que los Zapata se podrían cambiar a las tres ciudades que presenten la “menor” problemática posible. En cómo encontrar, determinar o cuantificar esta “menor” problemática es en donde se hallaron diferencias. ¿Cómo llegaron los estudiantes a estas opciones? En general, se identifican cuatro diferentes modelos para el problema, los modelos de los estudiantes fueron categorizados de acuerdo a las diferencias en las cantidades utilizadas y a las relaciones entre las cantidades.

Solamente un equipo (FAS) considera el proceso de *ponderación* como parte de la estrategia para resolver el problema. Como se ha descrito ampliamente en las páginas anteriores, el proceso de ponderación los lleva a considerar como problemas relevantes a la solución del problema a la inseguridad, drogadicción, delincuencia y violencia y a descartar los otros problemas. A continuación comparan los valores que estos problemas tienen en las diferentes ciudades propuestas y se deciden por aquellas, que según ellos, tienen los valores más pequeños en los cuatro problemas que aceptan.

Tres equipos (IIE, SID, SSS) suman los porcentajes correspondientes a cada ciudad y escogen las tres sumas menores. A continuación se muestra un ejemplo de cómo un equipo explica el procedimiento que siguieron:



*“A nuestro punto de vista las Ciudades + adecuadas para vivir son ....Esto lo encontramos sumando los porcentajes de los problemas de c/Ciudad y Resulta que la suma de las ciudades, en las mencionadas resultaron los menores porcentajes de todas las ciudades”*

Cuatro equipos (VRR, JcLMaG, NJE, ALE) encuentran el promedio de los porcentajes para cada ciudad y se deciden por los tres menores. A continuación se muestra un ejemplo de cómo un equipo explica el procedimiento que siguieron:

*Se seleccionaron las tres ciudades con menos índice de problemas, mediante un proceso que consta de obtener el promedio general de los conflictos principales que se consideraron en cada ciudad.*

Un equipo (GJK) considera las tres ciudades con menor porcentaje para cada problema (pobreza, inseguridad, desempleo, delincuencia, violencia, servicios públicos, drogadicción y contaminación), asigna una calificación de tres al menor porcentaje, de dos al intermedio y de uno al mayor; para las ciudades escogidas suma todas las calificaciones asignadas en el caso en que ellas aparezcan mas de una vez dentro de las tres ciudades seleccionadas; y, finalmente, escoge las tres ciudades con mayor suma; la mayor suma indica que es la ciudad que tiene el menor porcentaje en problemas. Este procedimiento, entre paréntesis, no está descrito en la carta, pero se infiere por el registro escrito de los estudiantes.

*Generalidades acerca de las soluciones.* Para los equipos (IIE, SID, SSS, VRR, JcLMaG, NJE, ALE, GJK) que encuentran promedios de todos los porcentajes y para aquellos que suman todos los porcentajes se puede interpretar que todos los problemas que presentan las ciudades son igualmente importantes: consideran a todos los problemas en la suma. Al no descartar ningún problema lo que se pone de manifiesto es que tales alumnos, o no consideraron las condiciones que establece el problema (los Zapata se cambian por razones de trabajo, sus hijos son adolescente y les preocupa su seguridad y, desearía establecerse en un lugar tranquilo) o si las consideraron, juzgaron que para ello son importantes, por igual, todos los problemas que se presentan en las ciudades. Como no aparece, en forma explícita, una aclaración en ninguno de

estos sentidos, puede ocurrir que los alumnos ni siquiera hayan reparado en que la situación problemática establecía ciertas consideraciones que habría que tomar en cuenta al momento de pensar en las mejores opciones para la ciudad de residencia.

Un equipo (JcLMaG), muestra indicios de ponderación, pero, no logran realizarla: Siguen la estrategia de encontrar el promedio de los porcentajes de los ocho problemas para cada uno de los doce lugares y se quedan con los tres que presentan los promedios menores. Después intentan argumentar que estos tres lugares tienen menos delincuencia, violencia y drogadicción y, por lo tanto, dicen, podrían vivir a gusto. En la carta afirman que los lugares que proponen son los que tienen menos delincuencia, violencia y drogadicción. Es más, construyen una tabla con la ciudades que sugieren (León, Morelia y Puebla) y los porcentajes en inseguridad, delincuencia, violencia, servicios públicos y drogadicción), sin

CIUDAD	INSEGURIDAD	DELINCUENCIA	VIOLENCIA	SERVICIOS PÚBLICOS	DROGADICCIÓN
León	12	19	10	4	21
Morelia	21	20	12	2	9
Puebla	24	18	6	11	5

embargo, de esta tabla no se “ve” que León, Morelia y Puebla tengan menos delincuencia, violencia y drogadicción, que los otros nueve lugares; es más, sólo Puebla tiene esa característica debido a que la suma de sus porcentajes en delincuencia (18), violencia (2) y drogadicción (5), es veintinueve. En términos de resolución de problemas, la estrategia que siguió este equipo fue “al revés”: decidieron primero los lugares de residencia y luego los problemas importantes para una vida tranquila.

Recordemos brevemente que la situación problemática planteada involucra los siguientes aspectos o características:

- Por razones de trabajo, la familia Zapata, necesita cambiar de lugar de residencia;
- actualmente, la familia Zapata vive en la Zona conurbada (Zona limítrofe entre el estado de México y el Distrito Federal);
- la familia Zapata está formada de los papás, una hija de dieciséis años y un niño de once años;
- los Zapata, preocupados principalmente por sus hijos, preferirían establecerse en un lugar “tranquilo”;

- las opciones que les da la empresa en donde trabajan los padres son las siguientes ciudades: Aguascalientes, Tijuana, Ciudad Juárez, Saltillo, Distrito Federal, León, Guadalajara, Morelia, Monterrey, Puebla y Cancún.

Por otro lado, la siguiente tabla registra las opciones que los diferentes equipos sugieren como lugar de residencia.

TABLA . Tabla con las diferentes opciones que los equipos sugieren como lugar de residencia:

Equipos								
IIE	GJK	SID	VRR	JcLmaG	SSS	NJE	ALE	FAS
León	León	León	León	León	Morelia	León	León	Morelia
Morelia	Ac	Morelia	Morelia	Morelia	Puebla	Morelia	Morelia	Puebla
Puebla	DF-CJ	Puebla	Puebla-ZC	Puebla	ZC	Puebla	Puebla	Cancún

Abreviaturas: Ac: Aguascalientes; DF: Distrito Federal; CJ: Ciudad Juárez; ZC: Zona conurbada.

Como puede verse de la tabla anterior cinco equipos sugieren León, Morelia y Puebla; un equipo propone León, Aguascalientes y un empate entre el Distrito Federal y la Ciudad Juárez; un equipo sugiere León, Morelia y un empate entre Puebla y Zona Conurbada y, por último un equipo recomienda Morelia, Puebla y Cancún.

Si uno observa la TABLA, notará que hay dos equipos (VRR, SSS) que entre las opciones que proponen como lugar de residencia para los Zapata está la Zona conurbada a pesar de que el problema originalmente planteado establece que la familia Zapata vive en la Zona conurbada y de ahí se va a cambiar. Esto pone de manifiesto la existencia de alumnos que no consideran algunas condiciones de la situación problemática que les permitirían obtener inferencias directas para la solución del problema: Si los Zapata viven en la Zona conurbada y de ahí se van a cambiar, la Zona conurbada no puede ser una posible opción de residencia a futuro, es más, ni siquiera aparece entre las opciones que la empresa ofrece. Algo, aparentemente obvio, no es tomado en cuenta por algunos alumnos.

¿A qué se puede deber esto? Una posible explicación es que los estudiantes centran su actividad en la tabla de datos numéricos que acompaña al problema: por ejemplo, obtienen los promedios aritméticos para los doce lugares que registra la tabla, y se quedan con las tres

ciudades que presentan los menores promedios, y como uno de esos lugares es la Zona conurbada, se quedan con ella, sin tomar en cuenta lo que establece la situación problemática.

Para estos alumnos lo realmente importante fue la tabla con datos numéricos y la petición de ¡Ayúdenlos señalándoles las tres mejores opciones! Exceptuando a estos tres equipos, los seis restantes sí toman en cuenta el hecho de que la familia Zapata vive en la Zona conurbada, aunque, cabe aclarar, no lo escriben de manera explícita, se deduce que sí lo hacen porque habiendo empate entre Puebla y la Zona conurbada a este último lugar no la toman en cuenta.

Resumiendo: Las consideraciones que hacen acerca de las condiciones de la situación problemática se refleja, tanto en el tratamiento que dan a la información que se presenta, como en la interpretación que dan al resultado del tratamiento.

*Interpretación de la tabla de datos.* Volvamos a los alumnos que para decidir acerca de las tres mejores opciones recurrieron al promedio de los porcentajes que la tabla de datos registra. La siguiente tabla contiene los promedios de porcentajes que obtuvieron los alumnos que siguieron este procedimiento:

TABLA 2. Tabla de promedios de porcentajes para la problemática de los siguientes lugares

CIUDAD	VRR	JcLmaG	NJE	ALE
Aguascalientes	12.62	12.625	12.6	12.6
Tijuana	12.3	12.375	12.3	12.3
Ciudad Juárez	12.5	12.5	12.5	12.5
Saltillo	12.5	12.5	12.5	12.5
Distrito Federal	12.5	12.5	12.5	12.5
Zona conurbada	12.25	12.25	12.25	12.25
<b>León</b>	<b>10.5</b>	<b>10.5</b>	<b>10.5</b>	<b>10.5</b>
Guadalajara	13	13	13	13
Morelia	12	12	12	12
Monterrey	13.75	13.75	13.7	13.75
Puebla	12.25	12.25	12.25	12.25
Cancún	13.125	13.125	13.1	13.125

Dos observaciones en relación a la tabla anterior. Una tiene que ver con el promedio que obtiene la ciudad de León: 10.5. ¿De dónde proviene este promedio? Este promedio se obtiene de sumar los porcentajes ( $17 + 12 + 19 + 10 + 4 + 21 + 1 = 84$ ) que aparecen en la tabla siguiente y dividir tal suma entre ocho ( $84 / 8 = 10.5$ ).

Los Principales Problemas para Habitantes de 12 Ciudades.

CIUDAD	POBREZA	INSEGURIDAD	DESEMPEÑO	DELINCUENCIA	VIOLENCIA	SERVICIOS PÚBLICOS	DROGADICCIÓN	CONTAMINACIÓN
--------	---------	-------------	-----------	--------------	-----------	--------------------	--------------	---------------

León	17	12		19	10	4	21	1
------	----	----	--	----	----	---	----	---

(Cada porcentaje corresponde a una ciudad y un problema. El número indica el porcentaje de habitantes que considera que tal problema es el más importante. Así, por ejemplo, para el 8% de los habitantes de Aguascalientes, el principal problema es la pobreza)

Fuente: Fundación Rosenblueth, 2000.

Sin embargo, tal procedimiento encierra un error debido a la interpretación de la tabla de datos: los alumnos interpretan como si en la celda sombreada existiera el porcentaje cero. Pero esto no es así: la celda vacía sólo quiere decir que no se registra el porcentaje correspondiente a la ciudad de León, pero no que tal porcentaje sea cero. El promedio de porcentajes real de la ciudad de León debería ser 12 ( $84/7 = 12$ ). Este mismo problema se observó primero en la interpretación que hicieron los alumnos con la tabla de datos que se presentó anexa al problema de *“Los críticos de cine y las películas”*. Por lo anterior, un problema general interesante a estudiar son las dificultades que los alumnos presentan al interpretar datos en forma de tablas.

Otra observación con referencia a la TABLA 2 tiene que ver con la manera de representar los racionales en forma decimal. Esto se ve más claramente si observamos la forma en que los alumnos escriben el promedio de porcentajes para la ciudad de Aguascalientes, tal como se presenta en la siguiente tabla:

CIUDAD	VRR	JcLMaG	NJE	ALE
Aguascalientes	12.62	12.625	12.6	12.6

Los alumnos utilizan, al menos, tres representaciones diferentes. ¿Cuál de estas tres representaciones corresponde al promedio de porcentajes de la ciudad de Aguascalientes? Depende del grado de precisión que se desee. Tal vez para alguna situación sea suficiente con 12.6, pero para otra se requiera 12.625. Este aspecto, de “redondear” números decimales, que también se observó en el problema de *“Los críticos de cine y las películas”*, es interesante de discutir en el contexto del uso que hacen los estudiantes de sus matemáticas.

*Representaciones Gráficas y Tabulares.* En virtud de que el problema pedía:

“...ilustrándoles su propuesta por medio de tablas, gráficas o diagramas, ...”,

siete equipos ilustraron su trabajo escrito con tablas y todos los equipos hicieron uso de gráficas. La tabla que se muestra a continuación registra las características que tienen las tablas construidas por los diferentes equipos, de acuerdo al número de tablas que elaboraron, la variable independiente y la variable dependiente.

	EQUIPOS								
Tablas	IIE	GJK	SID	VRR	JcLMaG	SSS	NJE	ALE	FAS
No de tablas	1	2	1	1	1	1	1	Ninguna	Ninguna
V. I.	Lugares	Problema Lugar	Lugares	Lugares	Lugares	Lugares	Lugares		
V. D.	Suma de porcentajes	Calificación Suma de calificaciones	Suma de porcentajes	Promedios de porcentajes	Suma de porcentajes Promedios de porcentajes	Suma de porcentajes	Suma de porcentajes Promedios de porcentajes		

La información contenida en esta tabla se refiere a los siguientes aspectos:

- No. de tablas: Número de tablas elaboradas por el equipo.
- V. I.: Variable independiente.; V. D.: Variable dependiente.
- Lugar(s): Aguascalientes, Tijuana, Ciudad Juárez, Saltillo, Distrito Federal, León, Guadalajara, Morelia, Monterrey, Puebla y Cancún.
- Suma de porcentajes: Se refiere a los porcentajes registrados, por problema y por lugar, de acuerdo a la tabla anexa al problema original.
- Calificación: Se refiere a la calificación que el equipo (GJK) asigna, por problema y por ciudad de acuerdo al procedimiento que usaron (seleccionan los tres lugares que tienen los tres porcentajes menores por problema; a la que tiene menor porcentaje le asignan una calificación de tres, a la que tiene porcentaje intermedio la califican con dos y a la que tiene el porcentaje más alto la califican con uno; suman todas las calificaciones que asignaron y esa es la calificación que le asigna a algunas ciudades).
- Promedios de porcentajes: Promedios de los porcentajes de los problemas, por lugar, que los equipos calculan.

La tabla que se muestra a continuación registra las características que tienen las diversas gráficas construidas por los equipos.

Gráficas	EQUIPOS
----------	---------

	IIE	GJK	SID	VRR	JcLMaG	SSS	NJE	ALE	FAS
No de gráficas	6	1	1	1	1	9	1	9	2
Tipos de gráficas	Puntos unidos por segmentos	Puntos unidos por segmentos	Barras	Puntos unidos por segmentos	Barras	8 de barras Una de puntos unidos por segmentos	Puntos unidos por segmentos	8 de barras Una de puntos unidos por segmentos	Puntos unidos por segmentos
V. I.	Lugares Problemas	Calificación obtenida*	Lugares	Lugares	Lugares	Problemas Lugares	Lugares	Problemas Lugares	Problemas Lugares
V. D.	Porcentajes	Lugares	Suma de porcentajes	Promedio de porcentajes	Suma de porcentajes	Porcentajes Suma de porcentajes	Promedio de porcentajes	Porcentajes Promedio de porcentajes	Porcentajes
No. de gráficas por PC	3	1	1	1	1	1	1	1	3
Lugares considerados	León Morelia Puebla	12	12	12	12	12	12	12	12* Morelia Puebla Cancún
Problemas considerados	Todos	Todos	Todos	Todos	Todos	Todos	todos	Todos	Inseguridad* * Drogadicción Delincuencia Violencia Todos

\* Los alumnos trazaron gráficas para la inseguridad, drogadicción, delincuencia y la violencia en todos los lugares (Aguascalientes, Cancún, etc.)

\*\*Los alumnos trazaron gráficas para las ciudades de Puebla, Morelia y Cancún y todos los problemas (inseguridad, drogadicción, etc.).

La información contenida en la tabla anterior se refiere a los siguientes aspectos:

- *No. de gráficas*: Número de gráficas construidas por el equipo.
- *No. de gráficas por P. C.*: Número de gráficas construidas en un plano cartesiano.
- *V. I.*: Variable independiente, *V. D.* Variable dependiente.
- *Lugar(s)*: Aguascalientes, Tijuana, Ciudad Juárez, Saltillo, Distrito Federal, León, Guadalajara, Morelia, Monterrey, Puebla y Cancún.
- *Problemas*: Pobreza, inseguridad, desempleo, delincuencia, violencia, servicios públicos, drogadicción y contaminación.
- *Suma de porcentajes*: Se refiere a los porcentajes registrados, por problema y por lugar, de acuerdo a la tabla anexa al problema original.
- *Calificación*: Se refiere a la calificación que el equipo (GJK) asigna, por problema y por ciudad de acuerdo al procedimiento que usaron (seleccionan los tres lugares que tienen los tres porcentajes menores por problema; a la que tiene menor porcentaje le asignan una calificación de tres, a la que tiene porcentaje intermedio la califican con dos y a la que tiene el porcentaje

más alto la califican con uno; suman todas las calificaciones que asignaron y esa es la calificación que le asigna a algunas ciudades).

- *Promedios de porcentajes*: Promedios de los porcentajes de los problemas, por lugar, que los equipos calculan.

En particular llaman la atención dos aspectos en la tabla anterior: Primero, sólo dos equipos trazan tres gráficas en un mismo plano cartesiano, lo cual implica trabajar con tres variables, diferenciando una variable por el color que utilizan para trazar cada gráfica; segundo, sólo un equipo traza una gráfica en donde el eje de las ordenadas no empieza en cero, sino en doce, todas las demás gráficas inician en cero, para la variable dependiente.

*Las cartas*. Un registro escrito que vale la pena considerar, por su importancia como medio de comunicación y como recurso para el desarrollo cognitivo, es la carta que se les pide a los alumnos que escriban. Las cartas que se producen van desde 7 hasta 36 renglones. Algunas muestran el sentido del humor de sus autores: “... *P.D. Cómprale comida al perro*”, escribe un equipo al final de su carta. Esto forma parte de la comunicación. En general las cartas (exceptuando la que sólo tiene 7 renglones) contienen: destinatario, propósito, sugerencia, justificación de la sugerencia, anexos (tablas y/o gráficas) y despedida. Tres de ellas son muy puntuales en el procedimiento que siguieron para llegar a la elección.

En conclusión, es posible afirmar que en este problema se propició en los alumnos: ponderar información cualitativa, manejo de datos en forma de tablas, ordenar opciones con base a cierto tipo de ponderación (cálculo de promedios, suma total, comparación por pares), construcción de modelos y uso de representaciones en forma de tablas y gráficas. Al mismo tiempo se identificaron algunas dificultades como considerar la información cualitativa que se proporciona y obtener inferencias a partir de ellas; interpretar números decimales y la información contenida en una tabla, como es la existencia de una celda vacía en la tabla.





LRE	Alicia	s	n	n	n	s	n	N	Incompleta	Asignan calificación numérica a c/u de las características y promedian. La opción es el promedio más alto.
LMaG	Caro	n	s	n	s	n	n	S	Completa	Construyen una escala cualitativa (Muy Buena, Buena, Mala) y grafican las características Vs. la escala para el caso de Carolina.
IJK	Caro	s	s	s	s	s	s	S	Completa	Ejemplo de justificación: <i>Edad, ella cuenta con 24 años de edad ya que está en una edad considerable para estar al pendiente de un menor de edad.</i>
VRR'	Caro	n	n		n	n			Completa	Caro tiene estos 4 puntos a su favor. Dicen: <i>“La finalidad de este cuadro es saber quién tiene mayores y/o menores cualidades para ocupar el puesto. Por lo tanto “Carolina” es la que tiene 4 puntos. (La mejor en cuanto a puntos) y es la que mejor perfil tiene”.</i> Según su tabla Alicia tiene 3 puntos; Betty tiene 3 puntos y Dorotea tiene 1 punto. Pero no dicen nada, por ejemplo, porque la edad de Carolina es la mejor. O porque sus estudios, o su estado civil.. En los otros 3 puntos Caro pierde junto a las otras candidatas.
SS'D	Caro	s	s	n	s	s	n	N	Completa	Dicen: <i>“es la mejor opción ya que es tan joven como Betty y no es tan grande como Dorotea..”</i> “... no tiene problemas de horario, es soltera, por estas razones puede dedicarle más tiempo a su hija...”
AE	Caro		s	s	s	s	n	N	Completa	Ejemplo de razón: <i>“Los 2 años de experiencia son un fuerte apoyo para poder relacionarse más fácilmente con la niña”</i>
SJG	Caro		s	n	n		n	N		No toman en cuenta los otros factores?
FEI	Caro	s	s	n	n	s	n	N	Completa	Dicen: <i>“La Srta. Carolina..”.</i> Ejemplo de razón: <i>“No es muy joven ni muy grande”</i>
ASI	Caro		n	n		n	n	N	Incompleta	Dicen: <i>“Tiene de experiencia 2 años, es soltera y para nosotros eso es muy bueno, entre los 4 candidatos.”</i>

\*1: Edad; 2: Estudios; 3: Experiencia; 4: Disponibilidad de horario; 5: Estado civil; 6: Presentación; 7: Puntualidad. s (significa que se considera la cualidad en la respuesta y se justifica su inclusión); n(significa que se considera la cualidad en la respuesta pero **no** se justifica su inclusión).

\*\*La carta se considera *completa* cuando consta de: fecha, destinatario, texto y firmante/s.

Atendiendo al grado de *cuantificación* que utilizan los alumnos para construir el modelo para la solución de este problema, se identifican tres tipos: cualitativos, cualitativo-cuantitativo y cuantitativo.

Seis equipos toman su decisión con base en una ponderación de tipo *cualitativo*: consideran como más o menos importante a algunas de las cualidades de las candidatas y por este medio deciden el mejor candidato.

*Modelo cualitativo-cuantitativo.* Otro equipo (LMaG) establece una escala cualitativa (Muy buena, Buena y Mala) para todas las características y hace una representación gráfica de las características Vs. la escala cualitativa para el caso de Carolina. No aparecen las evaluaciones para las otras candidatas.

*Modelos cuantitativos.* En otro equipo (VRR') utilizan, como ayuda a su decisión, una tabla para los cuatro candidatos en donde le asignan un punto a la "mejor" característica y luego suman cuántos puntos sacó cada candidato. La observación, de nuevo, es que no se aclara el porqué esta o esa cualidad, y no otra, tiene un punto. Por ejemplo, para ellos el ser enfermera, el tener 24 años, son casos que merecen un punto. Este procedimiento los lleva a que Carolina tenga 4 puntos, Alicia y Betty 3, y Dorotea uno. Hay un equipo (LRE) que califica en forma numérica las 28 características de las cuatro candidatas y calcula el promedio para cada uno de ellos y se decide por el que tiene mayor promedio, y terminan diciendo: *El mejor o la mejor niñera es Alicia porque.... primero asignando a cada cualidad un número o un valor, después sacamos el promedio y resultó: Por lo tanto Alicia es la más capaz para ser la niñera de Karem.*". Es pertinente observar que los alumnos no aclaran por qué asignan las calificaciones que otorgan. Además fue el único equipo que propuso como niñera a alguien diferente a Carolina.

*Generalidades acerca de la solución al problema.* Todos los equipos reconocen que las candidatas (Alicia, Betty, Carolina y Dorotea) no tienen problemas de horario, ya que la persona que se busca es por las mañanas.

En las producciones escritas de los alumnos se hace alusión parcial a las condiciones que rodean a la situación problemática.

Todos los equipos reconocen que la solución depende de las características de los candidatos, aunque no todos los equipos toman en consideración todas las características.

Cinco equipos (LRE, LMaG, IJK, SS'D, FEI) consideran las siete características, y cuatro (VRR', AE, SJG, ASI) sólo consideran algunas de ellas. Esto indica, de alguna manera, que el peso que asignan a las distintas características no es el mismo. Por ejemplo, algunos no toman en cuenta la edad, pero todos incluyen el estado civil.

En uno de los equipos, una alumna se manifiesta en contra de los candidatos que son jóvenes, con el argumento de que se podrían enredar sentimentalmente con el papá de Karem, ya que él tiene sólo 28 años de edad.

Un hecho relevante es la casi escasa justificación o fundamentación, en forma explícita, de las selecciones que hacen. Por ejemplo, se inclinan por una cierta edad como de más peso, pero

no dicen por qué tal edad es mejor que otra. Naturalmente que hay algunos casos en donde si se proporciona diciendo cosas como las siguientes: *“es la mejor opción ya que es tan joven como Betty y no es tan grande como Dorotea...”* *“... no tiene problemas de horario, es soltera, por estas razones puede dedicarle más tiempo a su hija...”*.

En su selección, o decisión, por injustificada que se encuentre, al menos en forma escrita, hay, un proceso de ponderación: valoran diferentes cualidades de los candidatos, en relación al problema, y se deciden por uno.

Todos los equipos, excepto uno (LRE), proponen a Carolina como la mejor candidata. El hecho de que Karem sea una niña traviesa de alguna forma inclinó las preferencias sobre Carolina, ya que varios equipos argumentaron el hecho de que al ser ella enfermera la podría atender si sufriera algún accidente. En este caso hay una clara valoración de los estudios, como importante para el candidato que se propone.

La carta que se les pide escribir, como medio que propicie la sistematización, estructuración, coherencia, externalización de ideas, se puede decir que es completa en siete equipos, sólo dos la elaboran en forma un tanto incompleta.

En las cartas siete equipos (LMaG, IJK, FEI, VRR', AE, SJG, ASI) proponen respuestas como sugerencias y dos (LRE, SS'D) las formulan de manera categórica. Este es un aspecto importante porque caracteriza a los problemas de ponderación que caen en la clase de problemas que admiten múltiples respuestas. La Tabla siguiente registra lo anterior:

EQUIPO	TIPO DE RESPUESTA (Sugerencia ó Decisión categórica)
LRE	<i>El mejor o la mejor niñera es Alicia porque...</i> <i>Sacamos el promedio, primero asignando a cada cualidad un número o un valor, después sacamos el promedio y resultó: Por lo tanto Alicia es la más capaz para ser la niñera de Karem.</i>  <i>Alicia tiene 9.4 de promedio, “... Por lo que Alicia es la mejor opción”.</i> <i>La mejor niñera es Alicia porque tiene una edad buena de 30 años y puede comprender a los niños, . . . . , es casada y sabe entender a los niños</i>
LMaG	<i>“...le recomendamos a la niñera Carolina ya que cumple con muy buenas expectativas...”...esperando que sea muy grata la recomendación ..”</i>
EQUIPO	TIPO DE RESPUESTA (Sugerencia ó Decisión categórica)
IJ	<i>“...el motivo de nuestra carta es informarle sobre las cualidades de la señorita Carolina que sobresale de las demás niñeras...” “esperando que tome en cuenta nuestros puntos ...”</i>

VRR'	"...con la finalidad de sugerirle la persona que a nuestro criterio es la mejor..." "... las cuales fueron sus mejores cualidades para sobresalir de las demás candidatas".
SS'D	informarle que seleccionamos a la mejor candidata para niñera...
AE	"... se les recomienda ...por parte nuestra que la mejor candidata ..." "...Esperamos consideren que al hacerle la propuesta, nos fijamos en todas las cualidades para poder ejercer el puesto."...
SJG	"... nuestra recomendación sería..." "...esperamos que tome la mejor decisión"
FEI	"... te sugerimos que la mejor elección
ASI	"... le escribimos esta carta con el afán de ayudarte a elegir..."

Podemos concluir que en este problema los procesos centrales que entran en juego en su solución, y que de alguna aparecen en algunos en los modelos que construyen los estudiantes son los siguientes: Ordenar una serie de elementos, ponderar tanto cuantitativa como cualitativamente; transformar una evaluación cualitativa (dada con cierta escala) en cuantitativa; construir una escala de equivalencias entre dos tipos de evaluaciones; describir un conjunto numérico por medio de un promedio o a través de una suma; comparar dos o más números e interpretar un número racional

### Características generales de los modelos construidos por los grupos pequeños que abordaron el problema "*Gladiadores de Neza vs. Romanos de la Roma*"

Diez equipos abordaron la tarea, los diez proponen a Juan, cuatro a Walter, cuatro a Rafael y dos a José Juan.

*Tipos de modelos construidos.* Las respuestas explícitas dadas por todos los equipos ponen de manifiesto, que han llevado a cabo acciones de ponderación puesto que han valorado en forma comparativa diferentes candidatos con distintas cualidades, y se han inclinado por uno:

ocho equipos en forma cualitativa y dos de ellos de manera cuantitativa. Lo anterior permite identificar modelos de carácter cualitativo y otros de tipo cuantitativo.

Veamos el caso de la ponderación cualitativa que da lugar a modelos cualitativos. Esta se manifiesta a través de expresiones como las siguientes; tomadas de lo que escriben los ocho equipos:

Equipo	PONDERACIONES CUALITATIVAS
MaGE M	<ul style="list-style-type: none"> <li>“...son los mejores porque presentan características favorables para ganar y los otros dos jugadores no porque uno está lesionado y el otro no tiene un buen promedio de goleo</li> </ul>
SS' G	<ul style="list-style-type: none"> <li>“...primera opción...Walter, ya que es uno de los rematadores, aunque es individualista su promedio de goleo es el mayor de todos, el único problema es el golpe que tiene en el pie derecho.</li> <li>segunda opción ... que aunque no ha jugado su condición física es excelente, a comparación de Walter tiene espíritu de grupo y su promedio es bueno, por estas razones creemos que los mejores candidatos son ellos..”</li> </ul>
IK	<ul style="list-style-type: none"> <li>“...De los otros dos jugadores no los tomamos en cuenta porque uno está expulsado y el otro no tiene lo requerido para ganar el partido.</li> <li>Por todas estas características el elegido es Juan ya que tiene más a favor que en contra.</li> <li>NOTA: Si aún le quedan dos cambios disponibles puede meter 10 min. a Walter y otros 10 min. a Juan o al revés”</li> </ul>
FII	<ul style="list-style-type: none"> <li>“...La razón por la que escogimos a Rafael en primer lugar es ...y esto es bueno ya que así hace un mejor equipo, ...Aunque no es ...puede tener grandes jugadas por el compañerismo y su promedio de goleo.</li> <li>Juan, aunque...su promedio...Y consideramos que con estas dos personas el juego puede salir adelante y ganar el partido y pasar a las finales.”</li> </ul>
JJ'	<ul style="list-style-type: none"> <li>“...Si el entrenador necesita salvar el partido en 15 min., la mejor opción es Walter, debido a que.....aunque es....en 15 minutos podría salvar el partido.</li> <li>El otro cambio podría ser Juan, ya que sería el complemento de Walter porque es un jugador rápido y tiene una condición física excelente.</li> <li>Rafael...mala opción...es lento y su promedio de goleo es bajo.</li> <li>José Juan...aunque...no puede jugar porque está expulsado.”</li> </ul>
ESA	<ul style="list-style-type: none"> <li>“...proponemos a...ya que ellos dos cumplen con unas características que se necesitan para meter goles en poco tiempo.</li> <li>Además la condición de Juan es excelente y eso es bueno porque tienen poco tiempo para poder ganar....</li> <li>Escogimos a Rafael porque si necesitan poco tiempo para ganar el tiene un promedio de...y esto le proporciona una gran ventaja para poder ganar.</li> <li>No escogimos a Walter y a José Juan porque tienen algunas características que no le convienen al equipo, aunque aceptamos que los dos tienen cosas que los beneficia.”</li> </ul>
AA'L	<ul style="list-style-type: none"> <li>José Juan Descartado...ya que fue expulsado en el último partido por lo que ya no puede jugar.</li> <li>Walter...descartado por individualista y estar lastimado. NOTA: No dicen más.</li> </ul>
VRR'	<ul style="list-style-type: none"> <li>“Nosotros proponemos a ... y a .... , porque son los que tienen mejores habilidades y mayor posibilidades para poder anotar un gol.</li> <li>Por ejemplo: el objetivo del partido es ganar, entonces se deben anotar más goles al equipo contrario, por lo tanto Walter tiene .30 intentos de gol (es el más alto en este rango) y Juan con .22, pero por escala después de Walter seguiría José Juan pero como fue expulsado no puede jugar este partido aunque tenga .29 en el aspecto de promedio de goleo.</li> <li>Entonces mientras más oportunidades tenga el jugador para anotar un gol es o causa un mayor beneficio del equipo, porque hay más posibilidades de que puedan ganar.”</li> </ul>

De acuerdo a lo expresado en estas citas, se puede afirmar que los alumnos reconocieron características en los jugadores, las compararon en forma cualitativa y decidieron, tal es la esencia de la ponderación.

Veamos la ponderación cuantitativa que da lugar a modelos cuantitativos. Dos equipos, de forma diferente, reconocen características en los jugadores, les asignan cierta calificación

numérica a tales características, y luego, mediante una escala deciden cuáles son las dos mejores propuestas:

LEA	<ul style="list-style-type: none"> <li>• “Llegamos a la conclusión mediante un estudio que se le hizo a los jugadores dándole valores a c/u de sus características y haciendo gráficas de c/u de ellos que los mejores jugadores que le podemos proponer son: José Juan y Juan.</li> <li>• Ver gráficas</li> </ul>
JCRE	<ul style="list-style-type: none"> <li>• “Tomamos puntos a favor si tiene cualidades buenas o -1 si tiene cualidades malas. Sumamos los puntos y vimos cual calificación es la más alta que fueron la de Juan y Rafael y los elegimos para jugar a ellos.”</li> <li>• “Juan y Rafael son los mejores jugadores debido a su promedio que es :Rafael: 1.70; Juan: 1.61.</li> <li>• Designan con A, B, C y D a Juan, Walter, Rafael y José Juan.</li> </ul>

El proceso de ponderación cuantitativa que siguen los equipos LEA y JCRE tienen las siguientes características:

LEA	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Construyen dos escalas para calificar, una numérica del cero al diez y otra cualitativa (Excelente, Muy Bien, Bueno, Suficiente, No Califica y Deficiente). Establecen la siguiente equivalencia: Excelente (10), Muy Bien (9), Bien (8), Suficiente (7), No Califica (5), Deficiente (0).</li> <li>• De acuerdo a su criterio, asignan calificaciones numéricas a las distintas características (Rapidez, Estatura, Promedio de Goleo, Actitud, Condición Física) de los jugadores.</li> <li>• Construyen gráficas de barras, una para cada jugador, colocando en el eje horizontal cualidades de los jugadores (Rapidez, Estatura, Prom. de Goleo, Actitud, Condición Física) y en el eje vertical número del cero al diez. Naturalmente, de acuerdo a su criterio, asignan calificación numérica a las distintas características de los jugadores.</li> <li>• Hay que hacer notar que en la gráfica correspondiente a Rafael, la barra asociada a su promedio de goleo tiene una altura de cero, lo que parece indicar que hay una incomprensión del significado de los números racionales escritos en forma decimal</li> </ul>																																																																																																																																											
JCRE	<p>Designan con A, B, C y D a Juan, Walter, Rafael y José Juan y, entre otras tablas, construyen la siguiente:</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td></td> <td>A</td> <td>B</td> <td>C</td> <td>D</td> <td></td> <td>Juan</td> <td>Walter</td> <td>Rafael</td> <td>J. Juan</td> </tr> <tr> <td></td> <td>+1</td> <td>-1</td> <td>-1</td> <td>+1</td> <td></td> <td>5</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td></td> <td>+1</td> <td>-1</td> <td>+1</td> <td>+1</td> <td></td> <td>+3</td> <td>+2</td> <td>+3</td> <td>+2</td> </tr> <tr> <td></td> <td>+1</td> <td>+1</td> <td>+1</td> <td>-1</td> <td></td> <td>.22</td> <td>.30</td> <td>.4</td> <td>.29</td> </tr> <tr> <td></td> <td>+1</td> <td>+1</td> <td>+1</td> <td>-1</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>+1</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>+5</td> <td>0</td> <td>+2</td> <td>-1</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td></td> <td>A</td> <td>B</td> <td>C</td> <td>D</td> </tr> <tr> <td>Promedio</td> <td>.22</td> <td>.30</td> <td>.4</td> <td>.29</td> </tr> <tr> <td>C Física</td> <td>E</td> <td>Ligero golpe</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Carácter</td> <td></td> <td></td> <td>No es rápido</td> <td>Rápido</td> </tr> <tr> <td>Partidos</td> <td></td> <td>2 últimos no</td> <td></td> <td></td> </tr> </table> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>A</td> <td>-1</td> <td>+1</td> <td>+1</td> <td>+1</td> <td>.22</td> <td>+3</td> <td>y</td> <td>.22</td> <td>3.22</td> <td>1.61</td> </tr> <tr> <td>B</td> <td>+1</td> <td>-1</td> <td>-1</td> <td>-1</td> <td>.30</td> <td>+2</td> <td>y</td> <td>.30</td> <td>2.30</td> <td>1.15</td> </tr> <tr> <td>C</td> <td>+1</td> <td>+1</td> <td>+1</td> <td>-1</td> <td>.40</td> <td>+3</td> <td>y</td> <td>.40</td> <td>3.40</td> <td>1.70</td> </tr> <tr> <td>D</td> <td>+1</td> <td>-1</td> <td>+1</td> <td>-1</td> <td>.29</td> <td>+2</td> <td>y</td> <td>.29</td> <td>2.29</td> <td>1.145</td> </tr> </table>		A	B	C	D		Juan	Walter	Rafael	J. Juan		+1	-1	-1	+1		5	3	4	3		+1	-1	+1	+1		+3	+2	+3	+2		+1	+1	+1	-1		.22	.30	.4	.29		+1	+1	+1	-1							+1										+5	0	+2	-1							A	B	C	D	Promedio	.22	.30	.4	.29	C Física	E	Ligero golpe			Carácter			No es rápido	Rápido	Partidos		2 últimos no			A	-1	+1	+1	+1	.22	+3	y	.22	3.22	1.61	B	+1	-1	-1	-1	.30	+2	y	.30	2.30	1.15	C	+1	+1	+1	-1	.40	+3	y	.40	3.40	1.70	D	+1	-1	+1	-1	.29	+2	y	.29	2.29	1.145
	A	B	C	D		Juan	Walter	Rafael	J. Juan																																																																																																																																			
	+1	-1	-1	+1		5	3	4	3																																																																																																																																			
	+1	-1	+1	+1		+3	+2	+3	+2																																																																																																																																			
	+1	+1	+1	-1		.22	.30	.4	.29																																																																																																																																			
	+1	+1	+1	-1																																																																																																																																								
	+1																																																																																																																																											
	+5	0	+2	-1																																																																																																																																								
	A	B	C	D																																																																																																																																								
Promedio	.22	.30	.4	.29																																																																																																																																								
C Física	E	Ligero golpe																																																																																																																																										
Carácter			No es rápido	Rápido																																																																																																																																								
Partidos		2 últimos no																																																																																																																																										
A	-1	+1	+1	+1	.22	+3	y	.22	3.22	1.61																																																																																																																																		
B	+1	-1	-1	-1	.30	+2	y	.30	2.30	1.15																																																																																																																																		
C	+1	+1	+1	-1	.40	+3	y	.40	3.40	1.70																																																																																																																																		
D	+1	-1	+1	-1	.29	+2	y	.29	2.29	1.145																																																																																																																																		

Por ejemplo, la última tabla muestra lo que hizo el equipo para llegar a proponer a Rafael y a Juan. Asignan valores numéricos a las distintas características de los cuatro jugadores: +1 para

una característica “buena” y -1 para una característica mala; la siguiente columna representa los porcentajes de goleo de cada jugador; la tercera columna contiene la suma de las características “buenas” de los jugadores; en la cuarta columna vuelven a repetir el promedio de goleo; en la penúltima columna anotan la suma de las características buenas con el promedio de goleo y, finalmente, la última columna registra el promedio de las características “buenas” de cada jugador con su promedio de goleo.

*Generalidades acerca de la solución.* Como se dijo anteriormente los diez grupos pequeños proponen a Juan, cuatro a Walter, cuatro a Rafael y dos a José Juan. Para el caso de José Juan, tres equipos (IK, AA'L, JJ'), lo descartan por haber sido expulsado en el último partido y, de acuerdo al reglamento Internacional de Fútbol, no puede jugar en el partido siguiente:

IK	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>“...De los otros dos jugadores no los tomamos en cuenta porque uno está expulsado y el otro no tiene lo requerido para ganar el partido.</i></li> </ul>
AA'L	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>José Juan Descartado...ya que fue expulsado en el último partido por lo que ya no puede jugar.</i></li> </ul>
JJ	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>José Juan...aunque...no puede jugar porque está expulsado.”</i></li> </ul>

Otros equipos sí lo proponen. En fin, los alumnos no tienen por qué conocer las reglas del fútbol.

Hay que remarcar el hecho de que, exceptuando a los equipos JJ' y ESA, los ocho restantes formulan sus propuestas al margen de las condiciones de la situación problemática, considerando únicamente las características individuales de los jugadores. Esto es algo que debe tenerse en cuenta ya que ante una situación que presenta diversos escenarios, la decisión, en lo fundamental, se toma en términos del escenario que se considere. En el problema que nos ocupa, ante cierta situación del juego, algunos jugadores son más adecuados que otros y eso depende, tanto de los jugadores como del mismo juego. Veamos las respuestas que formularon los equipos JJ' Y ESA:

JJ'	<p><i>“...Si el entrenador necesita salvar el partido en 15 min., la mejor opción es Walter, debido a que es uno de los rematadores del equipo, tiene el promedio más alto de goleo (30) y su estatura es la adecuada. Aunque es individualista,.en 15 minutos podría salvar el partido. El otro cambio podría ser Juan, ya que sería el complemento de Walter porque es un jugador rápido y tiene una condición física excelente.”</i></p>
-----	---



ESA	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>“...proponemos a Juan y a Rafael ya que ellos dos cumplen con unas características que se necesitan para meter goles en poco tiempo.</i></li> <li>• <i>Además la condición de Juan es excelente y eso es bueno porque tienen poco tiempo para poder ganar....</i></li> <li>• <i>Escogimos a Rafael porque si necesitan poco tiempo para ganar el tiene un promedio de...y esto le proporciona una gran ventaja para poder ganar.</i></li> </ul>
-----	---

los demás equipos, si lo consideraron, no lo registran por escrito.

Dos equipos (AA'L, VRR') hacen uso de representaciones en forma de gráficas, pero las gráficas las usan como medios para ilustrar las propuestas a que llegaron por medios cualitativos y no como un instrumento que les haya permitido llegar a las propuestas que hacen. Las características de las gráficas son las siguientes:

AA'L	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Construyen una gráfica cartesiana de los nombres de los jugadores vs. el promedio de goleo. Cabe anotar que el punto para Rafael está mal representado, posiblemente esto se deba a una mala interpretación del decimal .4. Los puntos de la gráfica están unidos con segmentos de rectas.</li> </ul>
VRR'	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Construyen dos gráficas, una para Juan y otra para Walter, en el eje de las abscisas colocan las habilidades de cada uno y en el eje de las ordenadas colocan una escala cualitativa (Mal, Bien, Excelente), y grafican con una línea paralela al eje de las ordenadas la evaluación de cada habilidad de los dos jugadores.</li> <li>• Aparecen otras dos gráficas, ahora de barras, una para Rafael y otra para José Juan, con las características de cada jugador en el eje de las abscisas y una escala cualitativa diferente (Malo, Regular, Bueno, Muy Bueno, Excelente) a la de las gráficas anteriores, en el eje de las ordenadas. Hay que señalar que la barra correspondiente al promedio de goleo de José Juan es mayor que la barra asociada al promedio de goleo de Rafael, lo cual indica una incomprensión del significado de los números racionales escritos en forma decimal</li> </ul>

Dos equipos (AA'L, VRR'), además del equipo JCRE, construyen tablas con las características siguientes:

AA'L	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Aspectos evaluados: condición, promedio de goleo, rapidez, compañerismo. Con esto eligen a los “mejores”.</li> <li>• Construyen una tabla con los jugadores y las cuatro características anteriores y las llenaron con los datos que proporciona el problema.</li> </ul>
VRR'	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Construyen una tabla con los nombres de los jugadores en la parte superior y a la izquierda escriben “Habilidades de cada uno”. Es una tabla que tiene 20 entradas, y en las entradas aparecen ó números correspondientes al promedio de goleo ó la estatura ó “palomitas” ó “taches”, pero no se aclara más.</li> </ul>

En conclusión, en esta situación problemática se han podido reconocer los siguientes elementos del pensamiento matemático:

- Pocos grupos consideran algunas condiciones de la situación problemática como elemento para hacer su propuesta. La mayoría de los grupos formulan sus propuestas al

margen de las condiciones de la situación problemática, considerando únicamente las características individuales de los jugadores. Han llevado a cabo acciones de ponderación en forma cualitativa y de manera cuantitativa.

- En la ponderación cuantitativa reconocen características en los jugadores, les asignan cierta calificación numérica a tales características, y luego, mediante una escala deciden cuáles son las dos mejores propuestas.
- Construyen dos escalas para calificar las características de los jugadores, una numérica y otra cualitativa y establecen equivalencias entre ellas.
- Hacen uso de representaciones en forma de gráficas, pero las gráficas las usan como medios para ilustrar las propuestas a que llegaron por medios cualitativos y no como un instrumento que les haya permitido llegar a las propuestas que hacen.
- Construyen gráficas de barras, colocando en el eje horizontal una escala nominal y en el eje vertical una escala numérica y con una escala cualitativa en el eje de las abscisas y otra escala cualitativa diferente en el eje de las ordenadas.
- Construyen gráficas cartesianas en donde en el eje de las abscisas colocan una escala nominal y en el eje de las ordenadas colocan una escala cualitativa y grafican con una línea paralela al eje de las ordenadas.
- Construyen gráficas cartesianas en donde los puntos de la gráfica están unidos con segmentos de rectas.
- Construyen tablas con características diferentes.

Análisis de los ciclos de desarrollo que exhibe un grupo pequeño (Abi, Ad, Al) al abordar el problema de: “*La calificación de las licuadoras*”

Lo singular del problema “*La calificación de las licuadoras*” es que hay dos tipos de cualidades que se evalúan: cuatro se evalúan en una escala (Excelente, Bueno, Regular y Deficiente) y otra cualidad en otra escala (Medio, Bajo). Las cuatro primeras cualidades son: Prueba de licuado, prueba de molido, facilidad de operación y seguridad para ocho licuadoras. La quinta cualidad se refiere al ruido que produce el motor de la licuadora. Entre menos ruido haga una licuadora se puede considerar que es de “mejor” calidad y se esperaría que su evaluación sea mayor, y al contrario con una licuadora ruidosa.

En general, podemos decir: Entre una escala cualitativa y su correspondiente cuantitativa, puede haber dos tipos de relaciones: una *directa* y otra *inversa*. Será *directa* cuando el orden o grado de los valores en una escala se correspondan recíprocamente: si una crece, la otra también; si una disminuye, así lo hace la otra. Será *inversa* cuando al aumentar el grado de en una escala, en la otra disminuye y al disminuir en la primera, en la segunda aumenta.

Ciclo 1. *Definición de una escala cuantitativa.* Después de concluir la lectura del problema, los alumnos exhiben elementos de la estrategia a seguir para su solución, la estrategia no está acabada, ni dedican tiempo de discusión para tratar de aclararla, sino que de manera inmediata realizan acciones concretas, basándose en sus experiencias previas con respecto a las calificaciones:

- Ad: ¿Cómo sería eso de la calificación numérica?  
 Abi: Ha de ser diez, ocho,...algo así, ¿no?  
 Ad: No. Es: ¿Excelente es diez, bueno un ocho ó un nueve, regular un ocho ó siete?  
 Al: Esa calificación la teníamos atrás de nuestras boletas.

De inmediato se plantea el aspecto de las equivalencias entre una de las dos escalas cualitativas que presenta el problema con una cuantitativa que los alumnos se empeñan en

construir. Inician la discusión sobre la escala numérica y no hay indicio de discusión de la estrategia a seguir. Después de algunas propuestas concretas de equivalencias se plantea la necesidad de establecer la escala de calificaciones y se continúa con la discusión de las equivalencias:

Al: Bueno, empecemos en la escala. A ver. Aquí, ¿qué sigue de E?  
 Ad: Sigue B  
 Al: B es igual a nueve, ¿no?  
 Ad: Si.  
 Abi: R,... ocho  
 Al: ¿D? Siete, ¿no?  
 Abi: D es deficiente.  
 .....  
 .....

En el transcurso de la discusión se toca la cuestión de la estructura propia que debiera tener la escala de medida:

Ad: Entonces que regular sea seis, deficiente cinco, bueno ocho, ¿o tiene que llevar una escala?  
 Al: Tienen que llevar un orden, ¿no? Supongo.

Ciclo 2. *Uso del promedio*. Aún no definida la escala de medición cuantitativa, los estudiantes intentan utilizarlas y entonces aparece la segunda idea importante dentro de la estrategia: la idea de *promedio* para agrupar un conjunto de datos numéricos en una sola cantidad:

Abi: Ahora, hay que poner todos los valores en la tabla.  
 Ad: Hay que promediar.  
 Al: Bueno, se supone que esos son nuestros valores. Y ahora, este por ejemplo...

En apariencia, el hecho de intentar sustituir, aunque sea mentalmente, letras por números en la tabla trae a la memoria la necesidad de *promediar*, en otras palabras, tal vez usar representaciones numéricas en una tabla, en lugar de letras, recuerda la idea de calcular un promedio. Continúa la discusión de la escala numérica a utilizar y se llega a una escala concensada:

Ad: ¿No podría subir así?  
 Al: ¿Cómo?  
 Ad: seis, siete, ocho, diez.  
 Abi: Es que .....podría bajar dos ó subir uno.  
 Al: Yo creo que sí debería de tener una secuencia.  
 Abi: Entonces así. Lo dejamos, con siete en deficiente.  
 Al: ¡Va!

Ciclo 3. *Segunda escala cualitativa.* Al intentar realizar los cálculos los alumnos enfrentan el problema del ruido de las licuadoras que está expresado en otra escala cualitativa:

Abi: Hay que poner los valores primero aquí para....  
 Al: ¿En dónde? ¿Al ladito?  
 Abi: Aja.  
 ....  
 Al: A ver préstame tu calculadora Abi para ir sumándolo, ¿me los dictas?  
 ....  
 Abi: A ver,... espérame. ¿Van así, verdad? OK. Es nueve...espérate, aguanta, ¿pero lo del ruido generado?

Este equipo resuelve exitosamente el establecimiento de la escala de valores para esta cualidad, cosa que, como veremos más adelante, significa un problema para otros equipos.

Al: Mira, yo digo que mediano y bajo ...  
 Abi: Diez y ...  
 Al: No, ocho y ..¡no!. diez bajo, ¿Mediano podría ser un ocho?  
 Abi: Aja. ...Medio ocho y bajo, ¡no! ..Bajo, diez.  
 Al: Aja

Ciclo 4. *Integración de dos escalas cuantitativas en una sola.* Cuando el equipo establece la segunda escala numérica para la segunda escala cualitativa, está en posibilidad de calcular los promedios para cada licuadora:

Abi: Entonces, a ver, la licuadora numero 1.  
 Al: Es nueve más diez, ocho, nueve, diez. ¿Ya?  
 Abi: Sí.  
 Al: ¿Entre cuantos son?  
 Abi: Cinco con todo lo del ruido.  
 ....  
 ....

*Algunas peculiaridades del modelo construido por el grupo pequeño AlDeEd.* A continuación presentamos el modelo que construye el grupo pequeño AlDeEd para tratar el problema del *ruido*.

Ed: A ver, medio y bajo, ¿qué? Medio y bajo ya no tiene calificación, es medio, bajo y alto, y ya. ¿Pero para sacar el promedio le ponemos medio, seis, bajo: cinco?

En el tratamiento de diversas escalas cualitativas hay la posibilidad de que los estudiantes interpreten que una calificación ya utilizada en una escala no se puede utilizar en otra al mismo tiempo, el siguiente pasaje, así lo muestra:

Al: Medio, ocho, ¿No?  
Ed: No, porque bueno ya es ocho.  
Al: Pero, pues, esto es otra cosa.

Resuelta la dificultad anterior los estudiantes construyen la escala cuantitativa pero no se percatan de que para el caso del ruido de la licuadora, la escala cuantitativa es inversa con respecto a la escala cualitativa, lo cual está determinado por el *contexto* del problema, al tener su origen en el tipo de cualidad que se está considerando para las licuadoras:

Ed: Bajo, cero; medio cinco, y alto ...  
Al: Medio, seis y bajo, cuatro.  
Ed: Medio, ocho...  
...  
Al: Pero para sacar el promedio global si. Hay que darle valores: bajo cinco, medio seis.  
Lu: No, medio ocho, bajo seis.  
Ed: Bueno, medio ocho, bajo seis.

Este ejemplo ilustra la presencia de dificultades al intentar agregar escalas cualitativas diferentes en una sola para obtener una calificación numérica única. De manera general podría hipotetizarse que los alumnos enfrentan dificultades al integrar información que representa

evaluaciones dadas en escalas distintas, provenientes de cuantificar cualidades de naturaleza diferente.

*Algunas peculiaridades del modelo construido por el grupo pequeño ELN.* En seguida se muestra otro modelo construido por el grupo pequeño ELN para resolver el problema del ruido de la licuadora. Los alumnos, después de leer el problema discuten para darle sentido a la demanda de la tarea; perciben que el cálculo de *promedios* es la estrategia a seguir; recurren a su experiencia en calificaciones cualitativas; construyen una escala de evaluación cuantitativa en correspondencia a la escala cualitativa que el problema proporciona y determinan la *Calificación global de calidad* (en forma numérica) utilizando el concepto de *promedio* y después enfrentar el problema del ruido de las licuadoras.

Discusión para construir un sentido de la demanda de la tarea:

- E: ¿Cómo?  
 L: Tenemos que ponerle la calificación que nosotros creamos.  
 .....  
 E: Es que, ¿cómo?  
 L: Tenemos que ponerle la calificación. Tú, ¿cómo crees? Si es excelente, si es buena, regular o deficiente.

Se intuye la estrategia, a través del cálculo de promedios, y se recurre a la experiencia para afinar el sentido de la tarea:

- N: ¿Se le suma? , ¿no?  
 L: Es como sacar el promedio, ¿no?  
 N: Es como te hacen en la Universidad. Te ponen B, MB  
 ...

Se inicia la discusión sobre la escala numérica que le correspondería a la escala cualitativa que utiliza el problema:

- ....  
 E: El E se supone que sería diez  
 N: El E es el ocho  
 E: No. El E es el diez, ¿no?

...

Hay una especie de “cobrar conciencia” de lo que ya en la práctica se está haciendo. Esto significa refinamiento y precisión en el proceso de resolución del problema:

...

E: Bueno, pero primero hay que asignarles una calificación a las letras y luego le sacamos el promedio, ¿No?

L: Sí.

...

El equipo continúa discutiendo acerca de la escala numérica que van a utilizar hasta que negocian una escala:

....

E: La E es el diez, la B es el nueve, el ocho es regular y la D esa seis ...

....

Puestos de acuerdo en la escala numérica, determinan la *Calificación global de calidad* a través de calcular el *promedio* de las calificaciones numéricas otorgadas:

....

L: Entonces para la licuadora 1 en la prueba de licuado sacó B y en la prueba de molido sacó E, luego en facilidad de operación B, y en seguridad E. O sea que sacó en la primera nueve, en la segunda sacó diez, en la tercera sacó nueve y en la otra diez. ¿Sí es así?

N: Sí.

L: Sí, ¿no?

E: nueve, diez, nueve, diez ¿Y a ver, ¿cuánto da?

L: 9,5

....

Cuando han determinado la *Calificación global de calidad* se plantean el problema del ruido de la licuadora:

....

E: Y el ruido, ¿cómo le vamos a hacer?

De manera inmediata el equipo recurre al contexto, y esto ayudó a la construcción de sentido del problema:



- ...
- L: Pues hay que ver qué tipo de ruido es el que hace.: Medio, bajo y alto. Sería muy molesto si tienes un ruido alto, ¿no?
- E: Sí
- N: Chillante, diría yo
- ...
- E: Debe de ser medio
- N: Esta mejor el molcajete, en ése caso. Lo prefiero.
- ...

Empiezan a conjuntar de manera simultánea los dos aspectos de la evaluación de las licuadoras: el promedio que ya obtuvieron y el nivel de ruido que presenta. Sin embargo aún no se aclara como van a llevar a cabo la fusión de los dos elementos en uno solo:

- ...
- N: Sería la primera, pues es medio. Es que no hay ninguna que no tenga ruido, es obvio.
- E: No, por eso, tampoco....
- L: Pues por ejemplo, en la primera tenemos que es un promedio de 9.5 y es un ruido medio ...sería -... ¿Cómo le hacemos?, ¿Cómo?
- ....

Llegan a la primera estrategia para fusionar las dos evaluaciones: subir y/o bajar puntos a la calificación ya establecida:

- ...
- L: Subirle o bajarle un punto
- E: A los de medio....sería a los de ruido bajo sería subirle, digamos un punto porque pues no hacen ruido no molestan los oídos y los de ruido medio bajarles , ¿les bajamos .5?
- L: Un punto.
- N: Es que un punto es mucho, ¿no?
- E: Aja. Si no.. éste se bajaría a 8.5 y éste sube a 10.2. Entonces no. Entonces hay que bajarles .5.
- N: O décimas menos de .5
- E: .5, ¿no?
- L: .5
- ....
- E: Sería nueve este, sería nueve, luego 9.2, 8.7, ....aquí se pasa, diez punto y cacho....
- L: Sí, 10.2.
- E: Sería décimas, ¿no? Bueno, diez, lo redondeamos, acá se sube. Es medio, se baja.....
- .....

Sin embargo, esta estrategia no les satisface. Da la impresión de que no se percataron que solamente habría que subir o bajar puntos, cualquiera de las dos, pero no las dos al mismo tiempo: todas las licuadoras son ruidosas, sólo difieren en grado, por lo tanto, o le sumo puntos a todas, pero en grados diferentes, o le resto puntos a todas pero en medidas distintas. Al sumar puntos en un caso y restar en otros, les llevó a resultados que no los convencieron, aún intentado diferentes cantidades a sumar y restar, y se vuelven a plantear el problema:

- ...  
 E: Ya, ¿cómo hacemos lo del ruido?  
 ...  
 E: Es que el ruido, no se me ocurre como hacerle

Se intenta regresar a la estrategia que se estaba siguiendo:

- L: Solamente hacerle como le estábamos haciendo: subirle.

Los alumnos regresan al problema original para tratar de justificar la idea de que en el problema no se pide explícitamente que se considere el ruido, y que, por lo tanto, ya han resuelto el problema con el promedio que con anterioridad han encontrado

- .....  
 N: O sólo que ya no ...o sólo que no se cuente el bajo, el medio y eso, pero aquí nada más dice la E, la B, la R, la D, ¿Qué calificación global numérica? No dice que le asigne a medio, bajo.  
 L: Pues ya...  
 N: No, pues entonces esto ya sería el global, ¿no?

Sin embargo, por alguna razón no clara a un alumno se le ocurre la idea de hacer, para el caso del ruido, lo mismo que hicieron con anterioridad y en esto los demás compañeros están de acuerdo:

- E: O fijarte...O también sería ponerle si hace, si tiene ruido alto ponerle seis, si tiene medio ponerle ocho, ¿no?, o nueve y si tiene bajo ponerle diez y también promediar.  
 L: Sí  
 N: Solamente. Pero ninguno tiene ruido alto  
 L: No, pero sería la escala

E: Esto es lo único que se me ocurre

Con esta idea el equipo está de acuerdo y entran a discutir la escala que van a utilizar:

N: Entonces, tendríamos que sumar otra vez todo, todo.. Bueno, pues ya nada más poner .5 más ocho...

E: No, pero, ¿qué, qué calificación le ponemos a la escala? Al alto ¿seis?, al medio ¿ocho o nueve?, y al bajo ¿diez?

L: Pues sí: al alto seis, al medio ocho, y al bajo diez.

N: Pues ahí está.

Resuelto el problema de la escala, pasan a determinar la *Calificación global de calidad* (en forma numérica) para cada licuadora, sumándole al promedio encontrado con anterioridad la calificación que le corresponde por ruido y dividiendo la suma entre dos, esto último ni siquiera lo hacen explícito, y con esto ya resuelven con éxito el problema:

E: A ver, 9.5 más ocho entre, dos, 8.7.....

*Algunas peculiaridades del modelo construido por el grupo pequeño CEJ.* En el modelo que se presenta a continuación los alumnos empiezan discutiendo la escala numérica asociada a la escala cualitativa para las pruebas de licuado, molido, facilidad de manejo y seguridad de las licuadoras, pero presentan dos rasgos peculiares en este proceso: asignar más de una calificación numérica a una calificación cualitativa, pero después reconsideran este hecho cuando intentan encontrar un promedio y se preguntan cuál de las dos calificaciones van a tomar en cuenta; además, al momento de decidirse por una sola calificación algún alumno entra en conflicto por los valores numéricos que ya no aparecen en la escala elegida y se pregunta que en dónde van a estar tales y tales números. Por otro lado, en este ejemplo, se muestra el papel que juega considerar el contexto del problema para establecer una escala de medición adecuada: Como en el trabajo de los demás equipos, una vez que los alumnos terminan de leer el problema inician la discusión de la escala numérica:

E: ....entonces B es nueve,..

...

J: Excelente, diez B es nueve y ocho,

- E: No, al revés, excelente nueve y diez.  
 J: Así ya habíamos dicho, ¿no?  
 E: Bien, ocho.  
 J: Ocho y siete, ¿no?  
 C: Siete, ¿no?  
 E: Siete y seis.

Establecida la escala los alumnos reconocen la estrategia de *sumar* para resolver el problema:

- C: Ya entonces,.. luego las sumamos

En este momento se dan cuenta de que no pueden tener dos asignaciones numéricas para una evaluación cualitativa:

- J: Primero, ..vamos a hacer una cantidad, ¿no?  
 E: ¿Porqué?  
 C: Porque, ¿cómo vamos a saberle si ponerle, por ejemplo, a excelente nueve ó diez?  
 E: No, por eso.  
 J: Ah sí, tiene que ser una.

Cuando parte del equipo está de acuerdo en que va a ser una la calificación numérica asignada a una calificación cualitativa, un alumno plantea la duda acerca del lugar donde quedan los otros números no considerados en la escala:

- E: Pero entonces, ¿dónde va a quedar el nueve, y dónde va a quedar el siete y el seis?

Sin embargo, en este momento los compañeros no prestan atención a la observación de su compañero y vuelven a considerar la escala que van a utilizar:

- C: Ni modo que a todo le pongamos diez y nueve.  
 E: Ya sé, a Excelente le ponemos diez nada más, y a bien le ponemos ocho y a regular le ponemos seis.  
 J: Ajá.  
 E: Sí, ¿no?  
 C: Y ahora se suman, ¿no?

Otro compañero retoma la pregunta por los número que no se consideran en la escala, y los otros dos le dicen que simplemente *ya no están*:

- J: Y, ¿en dónde queda el siete?  
 E: No queda siete.  
 C: Ya el siete ya no.  
 J: Entonces, ¿ya el siete, ya no?  
 E: Ni siete, ni nueve.  
 ....

¿Por qué esta insistencia en los números no considerados en la escala? No se tiene una respuesta, sólo especulaciones: Tal vez tenga que ver con la experiencia personal del alumno en relación a las escalas numéricas. El alumno tendría que repensar el resultado de esta experiencia para poder acceder al aspecto de “arbitrariedad” en la construcción de una escala numérica.

Cuando estos alumnos enfrentan la situación del ruido de la licuadora resuelven una interpretación equivocada de uno de los compañeros recurriendo al contexto del problema:

- ...  
 C: Y el ruido generado, ¿cómo se va a calificar?  
 E: Medio, bajo, y...  
 J: No sé.  
 C: Porque se supone que el ruido medio pues es que está bien, ¿no?, porque no se oye mucho.  
 E: No. Al revés. El ruido bajo es el que está bien, porque no se oye mucho, y el ruido medio es el que se oye más. Entonces, el bajo, ¿sería ....

Los alumnos muestran que recurrir al contexto les permite establecer una escala adecuada para cuantificar el ruido, utilizar el concepto de *promedio* y resolver con éxito la tarea:

- E: .... Entonces, el bajo, ¿sería ....  
 J: Diez  
 C: Y el medio sería, ..sería otro  
 E: Ocho, ¿no?  
 C: Sí.  
 ....  
 E: Entonces ya está.  
 ....  
 C: Ocho más diez, dieciocho, y ocho, veintiséis, y ocho treinta y dos, y diez, cuarenta y dos, ..entre cinco, ¿no?  
 ...  
 E: ¿Ya las tienes todas?  
 C: ¿Qué tiene?  
 E: Todos los promedios.  
 C: ¿Qué promedios?  
 E: La calificación global de calidad, ....

C: Se divide, ¿no?  
 E: Ajá.  
 C: Pero no confío en J  
 ...

### Características generales de los modelos construidos por los grupos pequeños que abordaron el problema “La calificación de las licuadoras”

Todos los equipos utilizan el cálculo de *promedios* para resolver el problema. En tal sentido, estos alumnos cuentan ya con este concepto como herramienta para resolver situaciones problemáticas como éstas. Sin embargo, para poder aplicar esta idea los alumnos tienen que construir una escala numérica que integre en forma unitaria dos escalas cualitativas distintas. Este es realmente el foco matemático de la actividad: Integrar información cualitativa, dada en escalas diferentes, a través de una sola calificación numérica.

*Modelos construidos para el problema.* La tabla siguiente registra, textualmente, la conceptualización matemática final que los estudiantes tuvieron de la tarea:

AbiAdAl	Para sacar los promedios le dimos un valor a cada letra (E=10, B=9, R=8, D=7) los sumamos (según el caso de cada licuadora) y después lo dividimos entre cinco obteniendo de esta manera los promedios.
PAN	No contestaron
AIEdDe	Hicimos una gráfica de cada una de las pruebas que se les hicieron a las ocho licuadoras. y así con ese resultado sacamos el promedio y poniéndole valores a las palabras Excelente, Bueno, etc.
CEJ	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Asignamos valores a cada letra: con una escala del 5 al 10, teniendo así E=10, MB=9, B=8, R= 7, D=6, NA=5.</li> <li>2. En el ruido generado tomamos que Alto=10, Medio=5, Bajo=2.5.</li> <li>3. Con esos valores asignados; sumamos las cinco calificaciones y dividimos entre 5; así obtuvimos promedio, y esa es la calificación global de calidad.</li> </ol>
Unjo	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Primero asignamos valores a las letras.</li> <li>2. Sumamos la calificación de las pruebas según la letra asignada.</li> <li>3. El resultado lo dividimos entre cinco para que nos diera la calificación final.</li> </ol>
ELN	<p>Establecimos una escala de calificaciones para obtener el promedio, por lo que quedara de la siguiente manera. E - 10, B - 9, R - 8, D-6.</p> <p>En base a estas calificaciones sacamos el promedio y obtuvimos la calificación global; para asignar una calificación al ruido generado al igual que en la anterior establecimos una escala. Alto- 6, Medio -8, Bajo-10.</p> <p>Al promedio anterior les sumamos la calificación de ruido y después lo dividimos entre dos y los resultados finales de calificación global de calidad son:</p>

	Licuadora	1	2	3	4	5	6	7	8
	Calificación	8.7	9.6	9.8	8.6	9.6	8.8	8.7	9.5
WFR	Le pusimos valores de 0 a 100 y de 0 a 10 después los sumamos las calificaciones de cada licuadora y sacamos un promedio y esa fue la calificación de cada una de las licuadoras.								
EJc	Asignamos una calificación según el significado de cada letra llegamos a la conclusión por lógica excelente es 10 deficiente será cinco y con los valores asignados a cada letra sumamos y sacamos el promedio y así obtuvimos la calificación.								

Los ocho equipos que abordan este problema formulan escalas de equivalencias “correctas” para las siguientes pruebas: Prueba de licuado, prueba de molido, facilidad de operación y seguridad para ocho licuadoras. Naturalmente, no todos coinciden en el valor numérico que asignan a las distintas valoraciones cualitativas (Excelente, Bueno, Regular y Deficiente). La tabla siguiente registra las distintas escalas que los diferentes grupos construyen en correspondencia con la escala cualitativa que el problema utiliza:

Tabla de equivalencias para evaluar Prueba de licuado, prueba de molido, facilidad de operación y seguridad en una licuadora.

Evaluación	Equipos/Equivalencias							
	AbiAdAl	PAN	AlEdDe	CEJ	JNJ <sub>o</sub>	ELN	WFR	EJc
E	10	10-9	10	10	10	10	100/10	10
B	9	8	8	8	8	9	75/8	8
R	8	7	6	7	7	8	50/5	6
D	7	6-5	5	6	5	6	25/	5

En este punto hay que hacer notar que un equipo estableció dos equivalencias: una en base a una escala de 0 a 100 puntos y otra basada en una escala de 0 a 10. Otra cosa por mencionar es que hubo un equipo que intentaron asignar dos calificaciones numéricas para la misma evaluación cualitativa, sin embargo al momento de calcular los promedios se decidieron por una sola equivalencia.

Para la escala que indica el ruido, tres equipos le asignaron un valor numérico mayor a la cualidad “medio”, que a la cualidad “bajo” y cinco lo hacen en forma inversa. La tabla que se presenta a continuación registra las distintas escalas cuantitativas que los diferentes equipos asocian a la escala cualitativa que utiliza el problema:

Tabla de equivalencias para evaluar el ruido en una licuadora.

Evaluación	Equipos/Equivalencias							
	AbiAdAl	PAN	AlEdDe	CEJ	JNJo	ELN	WFR	EJc
Medio	8	8	8	5	5	8	50/5	5
Bajo	10	10	6	2.5	10	10	25/3	10

Este punto hace que para este problema los alumnos hayan construido *dos tipos de modelos*. Cinco equipos (AbiAdAl, PAN, JNJo, EJc, ELN) establecen una relación inversa entre la escala cualitativa y la cuantitativa, este es un tipo de modelo. Tres equipos (AlEdDe, CEJ y WFR) construyen relaciones directas entre ambas escalas, este es el segundo tipo de modelo. Pareciera ser que las cualidades que se valoran y la forma de evaluación de tales cualidades es algo que puede dificultar el tratamiento de este tipo de problemas.

Para obtener la calificación final los alumnos encuentran un promedio de todas las calificaciones parciales. Naturalmente que los tres equipos que evaluaron el ruido en forma inversa encuentran una calificación global que no coincide, como tendencia, con los resultados obtenidos por los otros seis equipos. La siguiente tabla registra la *Calificación global de calidad*, por equipos, para cada licuadora:

Tabla de calificación global por equipos para cada licuadora.

Licuadora	Equipos/Equivalencias							
	AbiAdAl	PAN	AlEdDe	CEJ	JNJo	ELN	WFR	EJc
1	9.2	8.8	8.8	8.2	8.2	8.7	80	8.4
2	9.4	8.8	8	7.3	8.8	9.6	70	8.8
3	9.8	9.6	8.8	8.1	9.6	9.8	80	9.6
4	9	8.4	8.4	7.8	7.8	8.6	75	8.8
5	9.6	8.8	8	7.3	8.8	9.6	70	8.8
6	9.4	9.2	9.2	8.6	8.6	8.8	85	9.2
7	9.2	8.8	8.8	8.2	8.2	8.7	80	8.8
8	9.2	8.6	7.6	7.1	8.6	9.5	65	8.4

La tabla anterior muestra cierta consistencia entre los resultados que obtienen los equipos AbiAdAl, PAN, JNJo, ELN y EJc y entre los equipos AlEdDe, CEJ y WFR). Por ejemplo entre “la mejor licuadora”, “la peor licuadora”, “licuadoras iguales en calidad”, entre otras. Lo anterior como consecuencia de la homogeneidad que siguieron en sus procesos de abordar la tarea.



*Generalidades acerca de la solución para el problema.* Con respecto al problema de *transformar una evaluación cualitativa en cuantitativa*, es posible bosquejar las siguientes conclusiones:

- Se puede decir que el proceso de modelación que siguen los diferentes grupos pequeños puede resumirse en la siguiente forma:

Ciclo 1. *Definición de una escala cuantitativa* y el establecimiento de la equivalencia entre la escala cualitativa y la cuantitativa, cuando la relación entre ambas es directa, a través de la creación de una escala numérica.

Ciclo 2. *Uso del promedio* para agrupar un conjunto de datos numéricos en una sola cantidad: Encuentran una primera *“Calificación global de calidad”* a través de calcular el *promedio* de las calificaciones numéricas otorgadas.

Ciclo 3. Construcción de una escala cuantitativa inversa para la *Segunda escala cualitativa dada*. Los alumnos construyen una escala cuantitativa inversa con respecto a una escala cualitativa dada.

Ciclo 4. Integración de ambas escalas cuantitativas en una sola a través, por lo general de un promedio de promedios.

- El resultado del *proceso de modelación* es el *modelo* construido por los distintos grupos pequeños y que consiste en el promedio (o promedio de promedios) de las evaluaciones cuantitativas asignadas a cada una de las evaluaciones cualitativas, resultantes de introducir dos escalas cualitativas.

Por otro lado, para el caso de la escala cualitativa del ruido, se observa:

- Algunos estudiantes no se dan cuenta que la escala cuantitativa es inversa con relación a la escala cualitativa.
- El ruido lo consideran a través de sumar o bajar puntos a la calificación ya establecida.

Además, en el manejo de las escalas se observan en algunos estudiantes las siguientes dificultades:

- Algunos alumnos creen que una calificación ya utilizada en una escala no se puede utilizar en otra al mismo tiempo.
- Algunos alumnos presentan dificultades al intentar agregar escalas cualitativas diferentes en una sola para obtener una calificación numérica única.
- Algunos alumnos asignan más de una calificación numérica a una calificación cualitativa, pero después reconsideran este hecho cuando intentan encontrar un promedio y se preguntan cuál de las dos calificaciones van a tomar en cuenta
- Al decidirse por una sola calificación algún alumno entra en conflicto por los valores numéricos que ya no aparecen en la escala elegida y se pregunta en dónde van a estar tales números, los otros alumnos simplemente responden que “*ya no están*”

Características generales de los modelos construidos por los grupos pequeños que abordaron el problema “*La compra de zapatos deportivos*”.

*Modelos construidos por los alumnos.* Este problema lo resolvieron nueve equipos y podemos decir que solamente aparece un tipo de modelo: los alumnos seleccionan los factores y los ordenan de acuerdo a un peso que le asignan a cada factor. El peso se expresa como un porcentaje de la calificación total. Ningún grupo pequeño explica cómo se calificaría cada uno de los factores que señala.

*Generalidades acerca de la solución para el problema.* Siete de los equipos coinciden en enumerar ocho de las características que menciona el texto: Proteger al pie, Base anatómica, Base amortiguadora, Transpirables, Flexibles, Ligeros, Cómodos y Resistentes. De los otros dos equipos, uno menciona otras tres (Idóneos, Tecnología reciente y Evitar lesiones) y el otro equipo hace mención de dos más: disponibles para hombre y mujer, especiales para su utilidad (tenis, correr, baloncesto, etc.). Si se compara lo que dice el texto, con lo que los alumnos mencionan se ve que, en general, obtienen información correcta.

Respecto a cuáles de las características anteriores consideran más importantes, todos los equipos coinciden en que *protejan al pie*. La otra coincidencia, que siete equipos señalan, es que sean *cómodos*. Y son, digamos, en lo que coinciden. Después divergen tanto en número, y en cuáles otras cualidades, consideran como más importantes. Lo mismo ocurre con las características “menos” importantes. No hay en general concordancia en el punto de vista.

Los alumnos no consideran como sinónimos a “*más importantes*” y “*más peso*”, así como a “*menos importante*” y a “*menos peso*”, lo cual hay que tomar en cuenta al momento de ponderar cuantitativamente las características. Lo anterior queda de manifiesto en la Tabla 1 que se muestra en seguida, en donde no hay coincidencia entre el primer y tercer renglón, ni tampoco entre el segundo y cuarto, con excepción del primer equipo.

Tabla 1. Factores que algunos grupos de alumnos consideran relevantes al momento de decidir la compra de zapatos tenis.

Variables	Equipos						
	AAA	JCJE	GMaLS	LMN	JS	JPN	AEEL
Más importantes	Proteger anatómicos* amortiguador*	proteger amortiguadora	proteger cómodos resistentes transpirables	proteger transpirables ligeros cómodos resistentes evitar lesiones	proteger flexibles cómodos resistentes ligeros transpirables amortiguador	Proteger anatómicos amortiguador transpirables cómodos	proteger anatómicos cómodos amortiguadora
Menos importantes	transpirables flexibles ligeros cómodos	anatómicos transpirables flexibles ligeros resistentes	amortiguadora respiradores redondos	tecnología reciente	anatómicos disponibles para hombre y mujer	flexibles ligeros resistentes	transpirables flexibles ligeros resistentes
Variables	Equipos						
Variables	AAA	JCJE	GMaLS	LMN	JS	JPN	AEEL
Más peso	proteger anatómica amortiguadora	proteger cómodos	presentación diseño colores marca	cómodos idóneo anatómicos flexibles ligeros	proteger cómodos ligeros	Proteger Cómodos	plantilla forro interior del zapato tipos de suela
Menos peso	transpirables flexibles ligeros cómodos resistentes	Anatómicos tecnología reciente	Suela Plantilla	tecnología reciente	disponibles para hombre y mujer especiales para su utilidad	Resistentes	materiales material de la suela

\*Donde dice *anatómicos* y *amortiguado(a)* se refiere a *base anatómica* y a *base amortiguadora*.

La siguiente tabla registra otras características que siete equipos señalan como importantes y que no aparecen en el texto periodístico; dos equipos no mencionan características adicionales.

Tabla 2. Tabla que registra *otras características* que los equipos consideran importantes al momento de comprar zapatos deportivos y que no aparecen en el artículo periodístico que sirvió de base a la actividad.

Equipos						
AAA	JCJE	GMaLS	CEP	RJW	LMN	JS
<ul style="list-style-type: none"> <li>• marca y/o modelo</li> <li>• precio</li> <li>• Clasificación: correr, tenis, baloncesto.</li> </ul>	no señalan	<ul style="list-style-type: none"> <li>• ancho</li> <li>• suavidad</li> <li>• material</li> <li>• tipo de suela</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• talla</li> <li>• precio</li> <li>• material</li> <li>• marca</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• bonitos</li> <li>• económicos</li> <li>• válvulas de aire</li> <li>• Nike</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• no tosco</li> <li>• no grande</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• agradable al interesado</li> </ul>

Como se ve de la tabla hay un número considerable (18) de cualidades adicionales que los alumnos consideran importantes.

La siguiente tabla muestra los factores que seis grupos de alumnos proponen tomar en cuenta cuando se toma la decisión de comprar zapatos tenis, ponderados cuantitativamente y ordenados de acuerdo a su ponderación:

Tabla 3. Tabla que registra los factores ponderados cuantitativamente y ordenados según su importancia tal como lo hicieron seis grupos de estudiantes.

Orden de importancia	Grupos de estudiantes					
	AAA	JCJE	GMaLS	RJW	LMN	JPN
1	1. marca y/o modelo 40%	• proteger 20%	• material 50%	• proteger 10%	• proteger 20%	• proteger 20%
2	• precio 20%	• cómodos 18%	• ancho 30%	• cómodos 10%	• evitar lesiones 15%	• cómodos 18%
3	• Clasificación: 12%	• amortiguador 16%	• suavidad 15%	• amortiguadores 9%	• cómodos 10%	• anatómicos 15%
4	• proteger 10%	• flexibles 14%	• tipo de suela 5%	• transpirables 9%	• ligeros 10%	• amortiguador 14%
5	• transpirables 8%	• ligeros 12%		• flexibles 8%	• flexibles 10%	• transpirables 12%
Orden de importancia	Grupos de estudiantes					
	AAA	JCJE	GMaLS	RJW	LMN	JPN
6	• cómodos 5%	• transpirables 8%		• ligeros 8%	• resistentes 10%	• ligeros 8%
7	• resistentes 3%	• resistentes 6%		• anatómicos 7%	• transpirables 10%	• ligeros 8%
8	• ligeros 1%	• base anatómica 4%			• amortiguadores 9%	• resistentes 5%
9	• amortiguador* .5%	• resistentes 2%			• anatómicos 6%	
10	• anatómicos* .5%					

\*Donde dice *anatómicos* y *amortiguado(a)* se refiere a *base anatómica* y a *base amortiguadora*.

Algunos equipos (3) argumentan que los porcentajes los establecieron pensando en la actitud del comprador. El equipo que privilegia la marca y/o modelo y el precio, lo justifican diciendo que ellos, como adolescentes, cuando compran tenis lo hacen, fundamentalmente, bajo tales criterios.

Dos equipos utilizan representaciones geométricas para ilustrar los pesos que asignan: uno de ellos utiliza una *gráfica circular de porcentajes*. El otro equipo, representan su asignación de

porcentajes con la “planta” del tenis de uno de los integrantes del equipo. La longitud total de la planta representa el 100% y los demás porcentajes los representan con longitudes diferentes, las cuales encontraron usando la *regla de tres*.

Por último, solamente cinco equipos justifican, con algún tipo de razones, la forma en que asignan los pesos a las diferentes cualidades. Las razones tienen que ver con las actitudes de los compradores y un equipo se basa en criterios de adolescentes como consumidores.

A manera de conclusión, podemos establecer los siguientes hechos identificables en los procesos de solución:

- Se reconocen múltiples factores para la toma de una decisión.
- Se ordenan factores mediante una escala cualitativa.
- Se ordenan factores de acuerdo a una escala cuantitativa.
- Se proporcionan argumentos que justifican la ponderación realizada.

**Análisis de los ciclos de desarrollo que exhibe un grupo pequeño (Ab, Ad) al abordar el problema de: “La elección de carrera”**

*Ciclo 1: Inferencias a partir de datos.* De acuerdo al problema Alan es un estudiante que está a punto de escoger qué carrera estudiar. Poco se dice de Alan que pudiese servir de fundamento a la posible carrera que pudiera estudiar. Sólo se dice “...ha sido un buen estudiante de matemáticas”. Esto sirve de justificación para que el equipo sugiera que las carreras de Administración y Contaduría son las mejores opciones que tiene Alan como posibles carreras a estudiar:

- Ad: ¿Pero son carreras, no escuelas?  
 Ab: Por eso.  
 Ad: Entonces, puede ser contador; ingeniero, tal vez.  
 Ab: Este, todas las carreras tienen matemáticas.  
 Ad: Administrador, administración.  
 Ab: Yo creo que a lo mejor es administración, y contador.  
 ...  
 Ab: Eso serían las principales.

De acuerdo a este equipo ya que Alan ha sido un buen estudiante en matemáticas es un elemento importante para elegir la carrera a estudiar: si eres un buen estudiante en matemáticas, escoge una carrera en donde las matemáticas estén presentes. Esta es una forma de proceder en

la práctica y estos alumnos muestran tal comportamiento, producto de la experiencia. Sin embargo, más adelante, Ad plantea el siguiente cuestionamiento: “...*Pero es que no necesariamente que vayas bien en una materia necesariamente tienes que ejercer la carrera de la materia*”. Muy pertinente la observación de Ad, pero pocas veces considerada en la vida real.

*Ciclo 2: Razonamiento multifactorial y ordenamiento cualitativo.* Elegir una carrera implica tomar una decisión. ¿Qué otros factores hay que considerar para elegir una carrera? Por lo general la toma de una decisión implica utilizar un razonamiento multifactorial: una decisión, en general, puede depender de más de un factor. En nuestro caso, no es suficiente que Alan sea un buen estudiante de matemáticas, deberá considerar otros elementos para tomar su decisión: entre más elementos o factores se identifiquen, es posible que se tome una “mejor” decisión. Este equipo, como casi todos los que abordaron la tarea, identifican dos tipos de factores: aquellos que tienen que ver con Alan, como persona, y los que son “externos” a él, como las características de la carrera y el campo ocupacional en general. Pero no todos los factores tienen la misma “importancia”: algunos son más importantes que otros. Identificar factores y su *ponderación* son procesos que se presentan de manera simultánea en este equipo de trabajo. En la toma de decisiones algunos factores “pesan” más que otros: esto lo muestran Ad y Ab:

- Ad: ¿Cuáles son los aspectos que tienen que considerar? Primero yo creo que es que le llame la atención la carrera.
- Ab: Sí, esa es la uno.
- Ad: Que le guste
- ...
- Ab: Que la desempeñe de manera fácil, con respecto a sus conocimientos.
- Ad: ¿Cómo sería?
- Ab: Buen desempeño en ella, o algo así, ¿no?
- Ad: ¿Qué más?
- Ad: ¡Ay!. Te iba a decir, bueno y esto sería el último que quedará cerca de su casa, que fuera cómodo, ..
- Ab: No, pero sí una Universidad, una Universidad buena es la UNAM, el Tec de Monterrey.
- Ad: También yo creo que tendría que ver las carreras que implica esa carrera.
- Ab: Bueno, las... las materias.
- Ad: ¿Pero eso no sería en tercer término?
- ..
- Ab: Estas dos si tienen que ver mucho con matemáticas.
- Ab: A ver, ahora ya hay que empezar, ...no, ¿qué otra?
- Ad: No pero es que, ...
- ....

- Ad: ¿Algo más Ab?  
 Ab: A ver,..., veamos. Podría ser contador, administrador.  
 Ad: Ah, Que haya empleo, o sea que que hay un buen ...cuando acabe la carrera que haya empleo.  
 Ab: ¿Eso es como tercer lugar? Que sea muy solicitada ese tipo de carrera.  
 Ad: ¿Que se crea capaz de acabar la carrera?  
 Ab: Evaluar, ....Bueno si quieres como tercer punto nada más se puede poner que...Bueno, que una vez terminada la carrera puede desempeñarse. Que desempeñe, bueno,..., ya eso, hay que poner como punto numero tres que una vez terminada la carrera, sepa que esa, bueno, no, que como tercer punto saber que esa carrera es muy solicitada.  
 Ad: O tal vez ver qué tan solicitada está la carrera.  
 Ab: Ajá.  
 Ad: Pero cómo le hacemos.  
 Ab: ¿Qué tan solicitada es la carrera para, ¿cómo se dice cuando ya la vas a hacer?, para desempeñarla, hay otra palabra, para ..., ¿cómo se dice cuando ya aplicas tu carrera?, (desempeñarla, aplicarla, elaborarla) para regirla, no, es una palabra que se usa mucho, (dominar, gobernar), ¡Noooo!, ..

Ciclo 3: *Tomar en consideración el fin conocido, o sea la carta.* Sin formar un ciclo, en el sentido que Lesh y colaboradores lo entienden (Lesh y Doerr, 2000), la redacción de la carta es una etapa importante debido a que en su elaboración se intenta aclarar las ideas, completarlas, precisarlas, ampliarlas o transformarlas. En esta etapa tiene lugar casi una revisión de lo que se ha pensado. Un ejemplo: En la última intervención arriba registrada, Ab no recuerda la palabra que considera “adecuada” para expresar una idea que tiene y es al principio de los episodios que siguen cuando la recuerda. La palabra es “*ejercerla*” y la desea utilizar en la idea de que una carrera se *ejerce*. Por otro lado, Ad dice: “...*yo voy haciendo la gráfica*”. ¿Por qué esta decisión? ¿Qué se va a graficar? Hasta este momento, de acuerdo al audio, en ningún momento se ha planteado la cuestión de la gráfica. ¿Es resultado de la intuición de Ad? ¿O es que la “estructura” del problema “le indica” que ahí hay una gráfica? De acuerdo a la siguiente transcripción es posible que sea lo último:

- Ad: Hay que hacer la carta, ...  
 .....  
 Ad: Ab: Sabes que, vas haciendo la carta en lo que yo voy haciendo la gráfica.  
 ...  
 Ab: Para ejercerla,...  
 Ad: ¿Qué cosa?  
 Ab: La carrera.  
 Ad: ¿Qué cosa?  
 Ab: ¡Ajá!, has de cuenta, ...  
 Ad: No, pero, ¿qué pongo? Para ejercerla.



Ab: De ahí que, ve que tan solicitada es la carrera para poder ejercerla..  
 ....  
 Ab: ¿Cómo le pongo? Hola Alan:  
 Ad: Ponle la fecha.  
 Ad: Yo creo que, ...la bolsa de trabajo.  
 Ab: A ver, ..., aguanta.  
 Ad: La pongo como el quinto término.  
 Ab: Sí. ¿Qué le pongo?, ¿Las recomendaciones?..  
 Ad: Pero es que no necesariamente que vayas bien en una materia necesariamente tienes que ejercer la carrera de la materia.  
 Ab: No, no, no. Ya sé, pero esas son las carreras que más desempeño tienen en matemáticas, ya que le gustan y dice que es muy bueno en ellas.  
 Ad: Yo creo que también tiene que ver el tiempo, de la carrera.  
 Ab: La mayoría se hacen como en cinco años.  
 Ad: Sí, por eso, pero también tiene que ver eso. Si quiere ya el trabajo a corto plazo o a largo plazo.  
 Ab: Y que tal si quiere una carrera técnica. Técnica, ¿qué podría hacer con matemáticas?, ..electricista  
 Ad: No, no, no.  
 Ab: Si quieres aquí también las meto  
 Ad: ¿Pero aquí le pongo que tiene que ver el tiempo de la carrera? La duración.  
 Ab: El si quiere, lo puede  
 Ad: Tiene que considerar la duración de la carrera  
 ....  
 Ad: ¿Traes calculadora.?  
 Ab: No

**Ciclo 4: Ponderación cuantitativa.** El planteamiento del problema establecía, entre otras cosas: *“...Escríbanle una carta en donde le recomienden los aspectos que deberá considerar, la importancia que cada uno de ellos tiene, el mayor o menor peso que podrían tener unos con respecto a otros. ....pónganles sus recomendaciones en forma matemática, señalando qué peso tiene cada una de las consideraciones que proponen para la correcta elección de su futura carrera”*. Ad y Ab entienden estas demandas en dos sentidos: primero ordenan cualitativamente los seis factores que identifican (Segundo ciclo) y en este ciclo traducen dicho ordenamiento a una forma cuantitativa a través de la asignación de porcentajes: El 100% correspondiente a la totalidad de factores considerados lo reparten entre seis, ya que ellos consideran tal número de factores. En este ciclo se precisa más lo que se va a graficar. Debido a que los alumnos siguen la estrategia de escribir la carta al mismo tiempo que están resolviendo el problema, en la siguiente transcripción se entremezclan los procesos de la ponderación cuantitativa con detalles de redacción de la carta. Así mismo, se notará que el proceso de identificar y decidir sobre los múltiples factores, y su ponderación,

continúan desarrollándose en paralelo con procesos como la redacción de la carta, la ponderación cuantitativa y el trazado de la gráfica.

- Ad: Lo dividimos, ¿no?, en porcentajes, y después hago la gráfica.  
 Ab: Sí.  
 Ad: ¿Que le guste yo creo que sería el 60%?  
 Ab: Ahorita, es que, ...  
 Ad: Es que ya...  
 Ab: Sesenta, ó más, setenta.  
 ....  
 Ab: Las recomendaciones que te podemos dar a conocer para que al terminar la preparatoria puedas elegir una buena carrera.  
 Ad: Oye, también tiene que ver el dinero, ¿no? Si es costosa la carrera o no.  
 Ab: Es que tenga que ver en gran parte, ...  
 Ad: ¿Cómo le pongo?  
 Ab: Costo de la carrera.  
 ....  
 Ab: Que tenga que ver en gran parte con las matemáticas ya que, ya que eres bueno para ellas, ya que eres bueno, ¿otra palabra?  
 ...  
 Ad: Yo creo que es menos, ¿eh?.  
 ...  
 Ad: Voy hacer unos edificios, a ver si te gustan.  
 Ab: Ajá.  
 ....  
 Ab: Los pongo tal y como están aquí, ¿no?  
 Ad: Sí.  
 ...  
 Ab: ¿Cómo se pone?, es decir, lo que tu tienes que hacer en ella. Es decir, ¿cómo se desarrolla?  
 Ad: ¿Cómo se desarrolla?  
 Ab: ¿Cómo se desarrolla y lo que deber hacer en ella?  
 ...  
 Ab: ¿Buen desempeño?  
 Ad: Buen desempeño, o sea, ...  
 ...  
 Ab: Yo pondría estas dos al revés, primero va el costo de la carrera.  
 Ad: Yo también lo vi, pero ya lo puse, ... no, no, todavía puede aumentar, ...  
 Ab: Vamos a ponerla a esta así.  
 ....  
 Ab: Y por último la bolsa de trabajo.  
 Ad: La bolsa de trabajo, ¿no?  
 ...

En conclusión, el proceso de modelación que siguen los alumnos muestra, en general, las siguientes características:

*Ciclo 1: Inferencias a partir de datos:* Ser un “buen estudiante” en matemáticas es un elemento importante para elegir la carrera a estudiar

*Ciclo 2: Razonamiento multifactorial y ordenamiento cualitativo.* Identifican dos tipos de factores: aquellos que tienen que ver con la persona, y los que son “externos” a él.

*Ciclo 3: Tomar en consideración el fin conocido, o sea la carta.* La redacción de la carta plantea la necesidad de aclarar las ideas, completarlas, precisarlas, ampliarlas o transformarlas. En esta etapa tiene lugar casi una revisión de lo que se ha pensado.

*Ciclo 4: Ponderación cuantitativa.* Primero ordenan cualitativamente los seis factores que identifican (Segundo ciclo) y en este ciclo traducen dicho ordenamiento a una forma cuantitativa a través de la asignación de porcentajes: El 100% correspondiente a la totalidad de factores considerados lo reparten entre seis, ya que ellos consideran tal número de factores.

Así mismo, el proceso de identificar y decidir sobre los múltiples factores, y su ponderación cuantitativa, continúan desarrollándose en paralelo con procesos como la redacción de la carta, la ponderación cualitativa y el trazado de la gráfica.

### Características generales de los modelos construidos por los grupos pequeños que abordaron el problema “La elección de carrera”

El problema lo abordaron diez grupos pequeños, ocho integrados por tres alumnos y dos con dos alumnos.

En términos generales podemos decir que el modelo seguido por los estudiantes para la toma de decisión fue identificar los factores que consideran relevantes y reconocer que tales factores no todos tienen la misma importancia o peso en la decisión. Siete grupos ordenaron los factores desde un punto de vista cuantitativo.

*Modelos producidos.* En seguida se analizan las características de los modelos desarrollados y a en segundo lugar se describen los diferentes tipos de modelos en términos de las características que estén o no presentes.

Con relación a los factores considerados, los modelos se clasifican en dos grupos: los que identifican un número mayor de factores relacionados con el individuo, que con relación a lo

externo y los que identifican un mayor número de factores externos al individuo que con relación a él. Las dos tablas siguientes registran el número de factores, y tipo, identificados por los diferentes grupos:

Tabla. Número de factores personales y externos identificados por los diferentes grupos. El número de factores personales es mayor que el número de factores externos

Factor	Grupos pequeños de alumnos				
	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5
Personal	5	2	3	3	5
Externo	0	1	1	2	2

Tabla. Número de factores personales y externos identificados por los diferentes grupos. El número de factores personales es menor que el número de factores externos

Factor	Grupos pequeños de alumnos				
	Grupo 6	Grupo 7	Grupo 8	Grupo 9	Grupo 10
Personal	1	1	1	2	2
Externo	2	4	4	4	4

Otra característica que diferencia los modelos es la ponderación cuantitativa que se asignan a los dos tipos de factores identificados. Se presentan tres categorías: la ponderación total de factores personales es mayor que la ponderación total de factores externos, las ponderaciones totales son iguales y la ponderación total de factores externos es mayor que la correspondiente a factores personales. Las ponderaciones totales se encontraron sumando los pesos que cada grupo asigna tanto a factores personales como a factores externos a la persona. La tabla que aparece en seguida registra las ponderaciones totales que asignan siete grupos, ya que tres grupos no ponderaron cuantitativamente los factores que identificaron:

Tabla. *Ponderación total* de los factores personales y externos identificados por los diferentes grupos.

Ponderación total	Grupos pequeños de alumnos						
	Grupo 1	Grupo 3	Grupo 5	Grupo 8	Grupo 2	Grupo 6	Grupo 10
Personal	80	45	77.5	75	50	50	23
Externo	20	16	22.5	25	50	50	77

Considerando la relación numérica entre el número de *factores personales* con el número de *factores externos*, y la relación numérica entre la *ponderación personal total* y la *ponderación total externa*, identificamos cuatro tipos de modelos:

1. Número de *factores personales* mayor que el número de *factores externos* y la *ponderación personal total* mayor que la *ponderación total externa*, tres grupos (Grupos 1, 3 y 5)
2. Número de *factores personales* mayor que el número de *factores externos* y la *ponderación personal total* igual a la *ponderación total externa*, un grupo (Grupo 2).
3. Número de *factores personales* menor que el número de *factores externos* y la *ponderación personal total* mayor que la *ponderación total externa*, un grupo (Grupo 8).
4. Número de *factores personales* menor que el número de *factores externos* y la *ponderación personal total* igual que la *ponderación total externa*, un grupo (Grupo 6).
5. Número de *factores personales* menor que el número de *factores externos* y la *ponderación personal total* menor que la *ponderación total externa*, un grupo (Grupo 10).

El resultado anterior nos permite sugerir que para los estudiantes que abordaron la tarea, los factores personales están por encima de los factores externos en la decisión acerca de la carrera a estudiar. El hecho de que los *factores personales* tengan más relevancia en la elección de una carrera puede contribuir a explicar la situación de que en la realidad mexicana hay un porcentaje considerable de profesionistas que concluyeron una carrera pero no trabajan en labores propias de ella: se inclinaron más por deseos personales que por las oportunidades reales de trabajo que el mercado ofrecía.

*Generalidades acerca de la solución para el problema.* Pensamiento multifactorial. Todos los equipos reconocen una serie de factores que consideran pertinentes al momento de decidir acerca de la carrera a estudiar. Nueve equipos reconocen dos tipos de factores: uno relacionado a características personales del individuo que va a decidir, y otro tienen que ver con circunstancias externas a él, concretamente, con la carrera y el mercado laboral. Solamente un equipo reconoce únicamente factores de decisión ajenos al sujeto que va a decidir.

*Ponderación cualitativa.* Todos los equipos *ponderan cualitativamente* los factores que identifican como relevantes para la decisión. El resultado de la ponderación es la ordenación de

las cualidades que identifican, por lo general, de más importante a menos importante. Como ejemplo, la siguiente tabla registra los factores relevantes ordenados, que reconocen cuatro grupos de estudiantes:

**Tabla. Factores ordenados de cuatro grupos de estudiantes.**

Orden de importancia	Grupos pequeños de alumnos			
	Grupo 2	Grupo 7	Grupo 9	Grupo 10
1	Te guste	Que te guste	Te llame la atención	Tener buen promedio
2	Tenga bolsa de trabajo	Vocación	Te guste	Tenga demanda
3	Bien pagada	Tener buen promedio	La puedas dominar	Dificultad de la carrera
4	Que sea sobre las materias en que más sobresales	Cerca de casa	Te ayude en el futuro	Opciones de trabajo
5	Cerca de casa	Encontrar trabajo	Tiempo suficiente para realizarla	Duración de la carrera

Ponderación cuantitativa. Siete equipos llevan a cabo una *ponderación cuantitativa*, de los cuales, seis grupos utilizan *porcentajes* y uno utiliza una escala numérica. Tres grupos no llevan a cabo ponderación cuantitativa. Los grupos primero ordenan los factores desde un punto de vista cualitativo y enseguida le asignan valores numéricos a cada uno de los factores. La siguiente tabla registra los factores ponderados cuantitativamente y ordenados que realizan cuatro grupos de estudiantes:

**Tabla. Factores ponderados cuantitativamente y ordenados, de cuatro grupos de estudiantes.**

Orden de importancia	Grupos pequeños de alumnos							
	Grupo 2		Grupo 3		Grupo 6		Grupo 10	
	Factor	%	Factor	Calif.	Factor	%	Factor	%
1	Te guste	50%	Agradarte	10	Vocación	30%	Tener buen promedio	23%
2	Tenga bolsa de trabajo	30%	Tener información	10	Posición económica	20%	Tenga demanda	22%
3	Bien pagada	15%	Tener carácter	8	Campo de trabajo	20%	Dificultad de la carrera	21%
4	Que sea sobre las materias en que más sobresales	3%	Conocer ventajas y desventajas	8	Escuelas	15%	Opciones de trabajo	19%
5	Cerca de casa	2%	Ganar lo suficiente	9	Plan de estudios	10%	Duración de la carrera	15%
6			Costo de la carrera	9	Duración de la carrera	5%		
7			Tiempo que se requiere para estudiar	7				

Representaciones gráficas. Cuatro grupos utilizan representaciones gráficas para sus factores ponderados, escogiendo una escala nominal en el eje horizontal para los factores que consideraron y una escala numérica en el eje vertical de acuerdo a la ponderación cuantitativa que utilizaron.

En conclusión, se puede decir que los modelos desarrollados por los alumnos muestran, en general, las siguientes características:

- Identifican múltiples factores a considerar para tomar una decisión.
- Ordenan los factores tanto en forma cualitativa como cuantitativa.

Análisis de los ciclos de desarrollo que exhibe un grupo pequeño al abordar el problema de:  
*“El salón de clases”*.

Ciclo 1. *Sentido de la tarea*. Después de leer el problema, al menos dos estudiantes (Si y Su) no comprenden el sentido de la tarea. Otro (St), sin embargo, tiene una primera aproximación a él empieza a ser compartido por otro alumno. Este alumno reconoce al estado físico de objetos, como el foco de la evaluación. Naturalmente, este es un componente de todo sistema de evaluación que se intenta construir:

St: Lee el problema.

- Si: ¿Le entendieron?  
 St: No.  
 Si: Se supone que necesita un procedimiento, ¿no?, para evaluar los salones, pero evaluarlos ¿cómo?, o sea, no entiendo.  
 St: Bancas, pizarrones, yo me imagino que es así, de si las bancas están rayadas, cuántas bancas hay, si las ventanas están rayadas, cuántas están rayadas, me supongo.  
 Su: Ah, ya.  
 ...

Como parte de la construcción del sentido de la tarea se identifica una demanda de la tarea (*.. se necesita un procedimiento, ¿no?, para evaluar los salones ...*), y aparecen elementos del pensamiento multifactorial (*... Bancas, pizarrones, yo me imagino...*). Estos elementos iniciales, aún incoherentes, se irán refinando en el transcurso del proceso de modelación.

Los alumnos reconocen la naturaleza distinta de este problema con respecto a otros que han resuelto (*...si lo piensan bien, los problemas no son como los de aritmética, no son de los que hay que hacer operaciones, muy complicadas, son, este, problemas de puro razonamiento...*). Esta comprensión no la tienen todos los alumnos del grupo pequeño, dos de ellos pareciera que no comprenden lo que “Si” dice:

- Si: Es que mira, si lo piensan bien, los problemas no son como los de aritmética, no son de los que hay que hacer operaciones, muy complicadas, son, este, problemas de puro razonamiento, no todos llevan operaciones.  
 Su: ¿No?  
 St: ¿Y?  
 Si: Pues así de simple.  
 Si: A ver: vamos a echarnos uno rápido, St.

Los estudiantes inician la escritura de la carta. *El fin a la vista* del problema es la carta, algo que los alumnos son capaces de escribir. ¿Qué va a decir la carta? Los estudiantes no lo saben porque no han abordado la discusión del problema. Lo único que pareciera comprensible es la demanda de una carta. La solución del problema se inicia por los aspectos que son “comprensibles”. Sin embargo, en la redacción de ésta llega un momento en que ya no pueden avanzar: hay que poner en la carta lo que se demanda y tal cosa aún no se aborda:

- Si: Hay que hacer la carta, ¿no?, primero.  
 Su: Señor director.  
 Si: A quien corresponda



- St: No, porque va al señor director.  
 Su: Sr: Judas Fox:  
 Si: Señor director, dos puntos. Por medio de esta carta,... por medio de la presente, nos permitimos informarle que el procedimiento que puede seguir y los argumentos, son los siguientes, dos puntos y aparte.  
 Su: ¿Y aquí nada más quiere la carta?  
 St: ¿Qué debe seguir?, ¿y qué?

Cuando *el fin a la vista* se ha reconocido y se ha logrado hasta un nivel no satisfactorio (esto se nota por lo que se logró redactar de la carta) los estudiantes plantean preguntas que sirven como “el motor” que impulsa el proceso de construcción del *fin a la vista* que se ha entrevistado (... *¿Qué debe seguir?, ¿y qué?...*)

En la carta que los estudiantes produjeron, el resultado de la discusión inicial queda, finalmente, de la siguiente forma:

*Sr. Director:*

*Por medio de la presente nos permitimos informarle el procedimiento que debe seguir y sus argumentos:*

Ciclo 2: *Reconocimiento de un aspecto del sistema de evaluación: periodicidad.*  
 Cuando han iniciado la redacción de la carta toman conciencia de que el problema está por resolverse y deciden abordar su resolución (...*vamos a desglosar el problema...*) discuten en relación al problema de “La familia Zapata,...” que dos días anteriores habían trabajado. De paso es posible vislumbrar cómo perciben los alumnos problemas como el presente por la forma en que contesta el alumno denominado Si: “...*Sí, pero no tan complicadas como las de otros problemas que hemos tenido...* El alumno está haciendo referencia al tipo de problemas matemáticos que “normalmente” se tratan en los salones de clase. En este ciclo los alumnos resuelven una de las componentes de un *sistema de evaluación*: la periodicidad en la cual se efectúa. Resuelven (sin dar justificaciones) que sea bimestralmente:

- Si: Y sus argumentos, pones dos puntos y hay que ver cómo lo vamos a hacer. Vamos a desglosar el problema.  
 Su: Oye, ¿entonces el del otro día tampoco tenía que llevar operaciones?

- Si: Sí, pero no tan complicadas como las de otros problemas que hemos tenido. Periódicamente,... periodo puede ser mes, por trimestre, por bimestre, por semestre, por año.
- St: Vamos a hacerlo por semestre, ¿o por bimestre?
- Si: Por bimestre.
- Su: Ya.
- St: ¿Son seis bimestres?
- Si: Ajá.

Ciclo 3 *Otro elemento de un sistema de evaluación: objetos a evaluar.* Ya en el primer ciclo un estudiante había reconocido el foco de la evaluación, pero hasta ahí llegó. En este ciclo los alumnos enumeran objetos concretos, individuales que serán evaluados. Hay que hacer notar que su reconocimiento llega sólo a objetos individuales y no a categorías más amplias de ellos. Cualquiera de los alumnos que participaron en esta experiencia ha asistido a la escuela durante, por lo menos, diez años. Sin embargo, llama la atención lo escaso que es el reconocimiento de los objetos a evaluar. Tal vez esto se deba a que no se tiene la suficiente experiencia en la identificación de elementos de una determinada situación, en este caso de un salón de clases: ¿qué se tendría que evaluar de un salón de clases? El problema fomenta el análisis de las componentes de una determinada situación:

- Su: En el primero, bancas. En el segundo...
- Si: En todos debe haber...
- St: En todos los bimestres debe que haber bancas Y ventanas, y mesas y pizarrones, ...
- Si: Mira indica en qué periodo lo podría hacer, pues lo puede hacer, tanto, ya habíamos quedado por bimestre, por semestre, por año, por trimestre, por mes, quedamos que por bimestre. Espérame, primero hay que hacer las operaciones y después lo redactamos, este, ahora todos los aspectos que deben evaluarse, el estado de las bancas, las ventanas, las puertas,.. aja, váyanme dictando todo eso.
- St: Bancas, mesas, pizarrones, las paredes, sillas, ventanas, las puertas...
- Si: ¿El piso?
- St: No manches.
- Su: No, el piso no.
- Si: Yo digo que el piso también, ¿no?
- St: ¿Cómo va a ser el piso?, ni modo que se roben un mosaico. No manches.
- Si: Si se los roban.
- Su: ¿Lo lavan, no?
- St: Las lámparas. Sí las lámparas, porque unas luego se funden
- Su: Y ya, ¿no?
- Si: A ver, yo creo que con eso, ¿no?
- .....

En este ciclo el modelo, comparado con el que surge en las actividades iniciales, ya se percibe modificado, ampliado, refinado; ya están definidos casi todos los objetos que se van a evaluar y el periodo de evaluación ya casi está definido.

Ciclo 4: *Forma de registrar la evaluación: construcción de una tabla.* Los alumnos pasan a la construcción de la tabla. ¿Qué información va a contener la tabla? hasta este momento, no se sabe. Lo que los estudiantes dibujan es la “forma de la tabla” pero aún no se dice cuál va ser su contenido. En seguida se reproduce la “forma” de la tabla que los estudiantes trazan:

	BIM1	BIM2	BIM3	BIM4	BIM5	BIM6	CAL.GLOB. SALÓN
BANCAS							
MESAS							
PIZARRONES							
VENTANAS							
PUERTAS							
PAREDES							
LÁMPARAS							

En los siguientes ciclos que a continuación se describen los estudiantes encuentran, y relacionan, otros elementos del sistema de evaluación, sin embargo, al trazar en este momento la forma de la tabla, parecería indicar que la propia tabla forma parte del significado de la evaluación, porque de otra manera la representación o el registro de la evaluación hubiera sido, tal vez, el último paso: una tabla, no es sólo el registro del resultado de la evaluación, es parte de ella misma:

- Si: Ah, muy fácil. Ahora, aquí por ejemplo en la tabla vamos a poner: calificación global del salón.  
 St: Eso es, no tenemos por qué poner ni número ni nada, ¿o sí?  
 Su: No.  
 Si: Ahora, traen una regla o algo así.  
 ....

Ciclo 5: *Definición de una escala cualitativa de evaluación.* Los estudiantes introducen una *escala de evaluación*, en este caso una escala cualitativa. La escala de evaluación es otro

componente importante de todo sistema de evaluación: elementos de esta escala son los que aparecerán en algunas celdas de la tabla. En este caso los estudiantes deciden la escala que utilizan relacionándola con su experiencia al ser evaluados:

- Si: Qué les parece si para evaluar ponemos Muy Bien, Bien, Regular, Mal.  
 St: No, Excelente, Muy Bien, Bien y Mal.  
 Su: Aja. Excelente, Muy Bien, Bien, Regular y Mal.  
 St: Así me calificaban en el kinder.  
 Si: A mí no, a mí así me calificaban en las materias de Física y Química.  
 ...

Ciclo 6 *Definición de los criterios para usar la escala de evaluación.* Relacionado con el ciclo anterior, en este los estudiantes definen los criterios para aplicar la escala que antes han decidido, éste es otro componente de todo sistema de evaluación. ¿Qué condiciones tiene que cumplir una silla para que se coloque en el conjunto de los objetos “excelentes”? Contestar esta pregunta significa construir una definición, la definición de objeto excelente:

- Si: Ahora, para ir tomando los rangos de este, que tal si le ponemos Excelente es igual a...¿A qué le ponemos?  
 Su: Bancas sin rayas, completa, con todas las patas, con toditas las varitas.  
 St: No, pues así está bien, yo digo que así está bien.  
 Si: No, porque dentro de qué entra en el rango, por ejemplo, ¿qué diferencia puede haber de ése cristal al de acá?  
 Su: Bueno, a ver, pon, excelente va a ser bancas, todo en buen estado, sin ninguna ralladura, sin pintura y sin nada.  
 St: Yo digo que esto ya nada más se lo agreguemos.  
 Si: Ajá.  
 Su: Todo en buen estado, sin ralladuras, completo todo el mobiliario.  
 St: Oigan también se tiene que evaluar el salón.  
 Su: Sí.  
 St: Porque el salón...  
 Su: Ya, luego el Muy Bien. Es que como que Muy Bien y Excelente está todo, ¿no?  
 St: No, Excelente es  
 Su: Muy Bien, ... que, pues que está en buen estado, pero con alguna ralladura...  
 Si: Con alguna cosa que le rayan, que le pintan, todo eso, ¿no?  
 Su: Regular.  
 Si: Regular, ah, no, Bien, que sería no se como pintaduras como que le falte pintura, ¿no?, como algo así, falta de pintura, que esté en estado ....  
 Su: Yo digo que Muy Bien sería Excelente, y Muy Bien sería Bien.  
 Si: A ver qué les parece, me falta el Bien , en Mal le puse no hay posibilidad de usarlos, en regular hay posibilidad de usarlos, pero es preferible hacer cambio de mobiliario.  
 Su: En bien, pues se encuentra en buen estado y sin ninguna, se puede usar, simplemente se puede usar.  
 St: Digamos que se puede usar.

Si: A ver, les leo rápido: En Excelente sería todo en buen estado, no ralladuras, que está completo. En MB, sería buen estado sólo un poco dañado, digamos no sería una exageración, en Buen se puede utilizar pero hay que hacerle reparaciones, todavía está en posibilidades de repararlo; en R hay posibilidad de usarlos pero es preferible hacer un cambio completo del inmobiliario y en Mal de plano no te puedes ni sentar en las sillas. OK.

Lo que aparece en la transcripción anterior es sumamente interesante: aparece la construcción de conceptos (Excelente es igual a... ¿A qué le ponemos? Bancas sin rayas, completa, con todas las patas, con toditas las varitas.). Los estudiantes hacen intentos de definir las categorías de su escala de medición que proponen.

*Ciclo 7: Introducción de una escala de evaluación cuantitativa “equivalente” a la escala cualitativa definida con anterioridad.* La necesidad de una escala de evaluación cuantitativa aparece cuando los alumnos se preguntan por cómo evaluar la calificación global (...., *ahora espérame, en la calificación global, ¿cómo la evaluamos?*). ¿Es que acaso no puede ser cualitativa la evaluación global? Naturalmente que sí, sin embargo, si alguien tiene, por poner un caso sencillo, las calificaciones de muy bien y regular, ¿qué calificación global le corresponde? Los alumnos hacen varios intentos por definir una escala cuantitativa, y el primero los lleva a una escala cualitativa por intervalos:

Si: .... Entonces que así quede, ahora espérame, en la calificación global, ¿cómo la evaluamos?  
 St: De salón sería este, que todas las bancas estén completas,  
 Su: No  
 Si: No, la Calificación Global se puede tomar por diez, ocho, seis, cuatro, y dos.  
 Et: No, diez, ocho, cinco, y cero  
 Su: Si  
 Si: Diez, ocho, cinco, dos, y cero, porque tenemos cinco tipos de calificaciones. Entonces eso hay que escribirlo abajo.  
 ....  
 Si: Mira ya se lo que vamos hacer: voy a poner una escala así de diez, nueve, ocho, siete, seis, cinco, cuatro, tres, dos, uno, cero, les vamos poner diez, nueve excelente; ocho, siete muy bien; así para que vean que es, como es el rango.  
 Su: No aquí está bien.  
 St: Mira, entonces déjame, atrás le pongo los nombres, ¿no?  
 Si: Ajá.  
 ....  
 Si: A ver, quedaría así: diez y nueve, entran dentro de excelente; ocho, siete, y seis entran dentro de Mb; cinco, y cuatro entran dentro de bien; tres y dos dentro de regular; y uno y cero dentro de mal.  
 St: Ajá.

Hay que hacer notar que en la transcripción anterior los alumnos proponen hasta *cinco escalas diferentes, incluyendo dos por intervalos*.

Al intentar aplicar la escala cuantitativa por intervalos que definieron, enfrentan dificultades. Una forma de resolverlas, pero que no prosperó en el equipo es utilizar la idea de la *moda*, es decir, utilizar la calificación más frecuente, es el proceso que propone el alumno St: “Yo digo que si sale MB, MB, Mal, Mal, Mal, tiene tres mal pues ya está mal.” Los otros dos alumnos no la aceptan, y él no insiste. De la transcripción no es claro qué dificultad en concreto enfrentan, pero llegan a abandonar la escala por intervalos por una escala de valores numéricos puntuales: “Ay, mejor así, olvídenlo. En lugar de que sea 10, 9, 8, ..., que sea 5, 4, 3, 2, y 1, y tenemos uno, dos, tres, cuatro, ..., tenemos cinco, que cinco sea la calificación más alta, para qué nos complicamos con dieses”. En la siguiente interacción aparece también la idea de *promedio* como la forma de integrar un conjunto de datos numéricos:

- Si: O sea, digamos: la mayor aquí sería la mayor cantidad de mal sería contarlas, y de ahí sacar un promedio pero es que también hay que pensar un método para sacar eso.
- Su: Bueno, ahorita hay que poner esto, a ver.
- Si: Ahh...., pues muy fácil, digamos que por ejemplo aquí sacas, no se, MB, MB, Mal, Mal, MB, MB, Mal, serían uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, sería sumar, sería ver el rango de la, ...
- St: Yo digo que si sale MB, MB, Mal, Mal, Mal, tiene tres mal pues ya está mal.
- Su: ¡Ahh....!
- Si: No, yo digo que no, sería más fácil por ejemplo,
- St: Sí porque ya al último ya está mal el salón, después ya las bancas se fueron deteriorando, las ventanas. ¿No?
- Si: Pues sí.
- .....
- Su: ¡Ay! ¿Cómo?
- Si: Ay, mejor así, olvídenlo. En lugar de que sea diez, nueve, ocho..., que sea cinco, cuatro, tres, dos, y uno, y tenemos uno, dos, tres, cuatro, tenemos cinco, que cinco sea la calificación más alta, para qué nos complicamos con dieses.
- .....

Cuando los estudiantes han construido una escala cuantitativa puntual, con cinco valores (5, 4, 3, 2, 1) debido a que su escala cualitativa tiene cinco “valores” (Excelente, Muy bien, Bien, Regular y Malo), ponen a prueba la utilidad de esta escala para determinar la *Calificación del*

*Estado Global del Salón*, para un caso hipotético y ven que “funciona” y pasan al ciclo de explicar lo que han hecho:

- Su: Pero hay que ponerle...  
 Si: Déjame hacer una operación rápida aparte, ...este, ..  
 ...  
 Si: Ahh, mira, muy fácil: ya quedó resuelto: que queden estas calificaciones, por ejemplo, digamos que en el bimestre sacan esto: MB, B, M, MB, E, y R, se sumarían las calificaciones que estamos poniendo aquí y se dividiría entre seis porque son seis bimestres, que estamos sumando y así daría la Calificación Global, si queda por ejemplo a tres, la Calificación Global es de Bien. Ahora eso hay que explicarlo.  
 St: Ahh, si.  
 Su: Si es cierto.  
 Su: No, ya, a ver.  
 St: A ver, acá tengo otra hoja.

*Escritura de la carta.* Los estudiantes sintetizan el procedimiento a través de la producción de la carta que demanda la tarea. El proceso colectivo de redacción de la carta muestra múltiples interrelaciones entre los tres miembros del equipo que manifiestan una variedad de negociación de significados que van desde detalles del método seguido en la solución del problema (fue una estrategia “construida” en el propio proceso de solución, sin un esbozo inicial claro) hasta el esquema de la propia redacción de la carta:

- Si: Redáctenle  
 Su: No pero primero, ahí tenía que redactarlo, ¿no?  
 Si: Ahh sí, primero hay que redactar cómo estamos evaluando esto.  
 St: Y después ya lo pasamos en limpio.  
 Su: Ajá en la carta.  
 St: No, hay que hacerlo ya en limpio.  
 Si: ....por medio de los siguientes argumentos, le podemos demostrar cómo puede calificar a los salones.  
 St: No, le podemos demostrar de que la forma en que nosotros decimos es más fácil calificar; no, evaluar, el estado del, mobiliario, no, del salón.  
 Si: ..El estado en el que se encuentra el salón.  
 Su: Ah, está bien.  
 St: Pero, ¿cómo?  
 St: Por medio de los siguientes argumentos, porque ya después formulamos esto, ¿no?  
 Si: Es que eso no es un argumento.  
 ....  
 Su: Por medio de los siguientes resultados.  
 Si: Por medio de la siguiente resolución podrá darse cuenta, cómo pudimos resolver de que el método que utilizamos es sencillo.  
 St: Ajá.

En la carta, la discusión anterior, finalmente, quedó de la siguiente forma:

*Por medio de la siguiente resolución podrá darse cuenta de que el método que utilizamos es sencillo:*

La discusión que continúa se centra, después de que los estudiantes deciden que primero debe ir la descripción de lo que hicieron, y en seguida las razones que lo justifican, en la descripción del proceso de evaluación del mobiliario en los diferentes bimestres. En la transcripción del diálogo entre los estudiantes, lo que aparece entre paréntesis se refiere a las interrupciones que hace uno u otro estudiante, al momento en que otro está hablando. Estas intervenciones simultáneas no se pueden evitar cuando no se tiene el hábito de hablar hasta que el “otro” ha terminado, algo difícil de lograr en una discusión cotidiana:

- Su: Primero calificamos.  
 Si: No, no, no, ponle, ponle argumentos, ponle así como, dos puntos, ponle argumentos.  
 St: Es sencillo, punto.  
 Si: Ahora tenemos que decir por qué decidimos hacer ese tipo de tabla.  
 Su: No, primero explicar cómo la...  
 St: No, sí, primero, tenemos que explicar lo que hicimos y después los argumentos,..no podemos argumentar algo que no hemos explicado  
 Su: A ver, entonces, realizamos una tabla en la cual...  
 Si: Una tabla entre paréntesis, realizamos una tabla, luego subrayen en la cual, (colocamos) se evalúa por bimestres, (e hicimos una referencia) cabe mencionar que se puede (¿que, qué?) que se puede evaluar por otro, por distintos periodos, ya sean semestres, trimestres, mes (o anual) o anual. Sí se puede, nada más habría que (qué, semestre qué,..), semestre, trimestre, mes, (mensual), (y anual) y anual...  
 Su: Lo cual,.. lo que hicimos clasificar en excelente, (pusimos los), colocamos, ..  
 Si: Ah , se colocaron, se colocó el nombre de cada mobiliario, ... no, espérame, se colocó el nombre, se colocó el nombre, sí, de cada, de cada mobiliario, (se colocó el nombre del mobiliario) de mobiliarios ubicados en el salón, (¿se qué?) se colocó el nombre de todos los mobiliarios ubicados en el salón, (¿salón?) .... y se evaluaron por la siguiente tabla: (Excelente). Ahora fíjate cómo vas a hacer la tabla: ... (En excelente). Ponle ahí, e igual a excelente, MB igual muy bien, B igual a bien, R igual a regular y M igual a mal, ya. Ahora, aparte, la evaluación del salón se puede saber por la siguiente tabla: (Cinco es igual a excelente, MB igual a cuatro, B igual tres, ...) no le pongas dos puntos; Bueno sí, tabla, dos puntos. Ahora ponle cinco, cuatro, tres, dos, uno y le pones igual a E, todo eso, (E, MB, B, R, y una M). De acuerdo a esta tabla,... a esta estadística, se puede,..se puede, se puede evaluar la calificación global del salón, (la cual será dividida, sumada por los porcentajes de la tabla y del salón) de acuerdo a la letra que aparezca en cada bimestre, de acuerdo a la letra que aparezca en cada periodo, (se le pondrá la calificación) aja, se le pondrá la calificación de acuerdo a la estadística, (bueno), ... (de acuerdo a qué) a la estadística, ...éste se sumará, estas, estas se sumarán y se dividirán entre los seis semestres que son (Nooo..), se dividirán entre el número de periodos (que se encuentran



en la tabla), entre el número de periodos, porque igual lo puede hacer por semestres, y son dos semestres, pero, pero, ...

El episodio anterior resume el proceso de construcción y aplicación del sistema para evaluar. En él aparece el pensamiento multifactorial, la ordenación de elementos, la ponderación cualitativa y la cuantitativa, escalas de medición, formas representacionales, el algoritmo para obtener la media aritmética, periodos de evaluación, etc.

La discusión anterior, quedó, finalmente, en la forma (la transcripción es textual), siguiente:

*(Argumentos:) Realizamos una tabla en la cual se evalúa por bimestre, cabe mencionar que se puede evaluar por distintos periodos (semestre, trimestre, mensual y anual).*

*Se colocó el nombre de todos los mobiliarios ubicados en el salón y se evaluaron por la sig. tabla:*

*E = Excelente  
MB = Muy Bien  
B = Bien  
R = Regular  
M = Mal*

*La evaluación del Salón se puede saber por la siguiente tabla:*

*5 = E  
4 = MB  
3 = B  
2 = R  
1 = M*

*De acuerdo a esta estadística se puede evaluar la calificación global del salón, de acuerdo a la letra que aparezca en cada periodo se le pondrá la calificación de acuerdo a la estadística, estos se sumaron y se dividirán entre el número de periodos.*

Habiendo hecho lo anterior, los tres estudiantes dan por terminada la tarea:

St: Ajá  
Su: Listo.  
St: Ya,  
Si: Ya, ya acabamos, hay que entregarlo.

...

Por lo descrito anteriormente se puede ver que el problema *El salón de clases* fomenta o propicia el desarrollo de un sistema de evaluación. Por otro lado, se observa que el trabajo del equipo transcurre por ciclos que conducen a la identificación e integración de elementos del sistema de evaluación, que en el trabajo del equipo reseñado, se sintetiza en la construcción de una tabla que resume: periodicidad de la evaluación, elementos a evaluar, escala cuantitativa de evaluación, criterios para aplicar tal escala y escala de evaluación cuantitativa. De esta forma la tabla puede considerarse, no sólo como un medio representacional del sistema de evaluación, sino como parte del propio significado de dicho proceso. Naturalmente el sistema de evaluación construido por este equipo (producto sólo del trabajo del equipo) es susceptible de robustecerse a través de otras formas instruccionales en el salón de clases, pero, ya constituyen un modelo factible de experimentar “mejoras” y, en tal sentido, la actividad ha cumplido con su finalidad: propiciar el surgimiento de un modelo de pensamiento.

Características generales de los modelos construidos

por los grupos pequeños que abordaron el problema  
 “El salón de clases”

En este problema se trata de construir un sistema que permita evaluar y registrar el estado en que se encuentran los salones de clase de una escuela. Veamos cómo abordan los alumnos este problema. Este problema lo trabajaron nueve equipos. En esta página y en la siguiente (por razón de espacio) se registran las tablas que concentran el trabajo escrito de los distintos grupos pequeño.

Los *modelos* para la evaluación se analizan en término de nueve aspectos denominados “variables de análisis” (Aspectos a evaluar del salón, Escala de evaluación cualitativa, Periodo de evaluación, Forma de registro de la evaluación, Ejemplo de la evaluación, Peso de los aspectos a evaluar, Construcción de varias categorías, Evaluación cuantitativa y Definición de las categorías de la escala de evaluación. Estas categorías de análisis se obtuvieron del análisis de los trabajos escritos de los equipos que abordaron la tarea, y aparecen al menos una vez en alguna de las soluciones producidas.

Variables de análisis	Equipos			
	MAGPL	IJK	JEJC	VRR
Aspectos a evaluar del salón	Si, 6	Si, 4	Si, 7	Si, 11, incluidos en 4 categorías.
Escala de evaluación cualitativa	Si, 5(B,R,M, necesita cambio, no necesita cambio)	Si, una, sólo cantidad	No	No, sólo cuantifica objetos dañados
Periodo de evaluación	Si, mensual	Si, semestral y anual	Si, trimestre	No
Forma de registro de la evaluación	Tabla	Tabla gráfica de barras; Mobiliario Vs. Porcentaje de existencia	Gráfica circular de porcentajes de los 7 elementos.	Tabla: registro del número de objetos dañados Gráfica: Aspectos evaluados Vs. Porcentaje de dañados.
Ejemplo de la evaluación	Si	No	Si	Si
Peso de los aspectos a evaluar	No	No	Si, da el peso porcentual de cada elemento dentro de la evaluación total, pero no da cómo evaluar cada aspecto.	
Construcción de varias categorías	No	No	Si, una. Mobiliario: mesas y sillas.	si; 4, una de sólo un elemento
Evaluación cuantitativa	No	No	No	No
Definición de las categorías de la escala de	No	No	No	No

evaluación				
------------	--	--	--	--

A continuación se describe lo que se observa en las soluciones que ofrecen los diferentes grupos pequeños.

*Aspectos por evaluar.* Ocho equipos definen aquellos aspectos del salón de clases que hay que evaluar. El número de aspectos que consideran (al menos los que escriben de manera explícita) va desde tres (bancas, ventanas, pizarrones) hasta once (bancas, sillas, mesas, escritorio, estante, ventanas, piso paredes, pizarrón, lámparas y enchufes). Seis equipos enumeran objetos concretos por evaluar; un equipo, además de objetos concretos señala una categoría de objetos más amplia, el mobiliario, en donde incluye a las sillas y a las mesas.

Variables de análisis	Equipos			
	MLD	SuSiSt	LEA	ISA
Aspectos a evaluar del salón	Si, 3	Si, 7	Si, 7	Si, 4
Escala de evaluación cualitativa	No, sólo cuantifica daños	Si.; E, MB, B, R, M.	No	No
Periodo de evaluación	Anual	Bimestral, anual. Promedio	Bimestre, periodo, semestral, anual	No
Forma de registro de la evaluación	Gráfica: Salones Vs. Número de objetos dañados. Una gráfica por objeto.	Tabla	Tabla de tres entradas, gráfica pero no la hace.	Tabla: el total de objetos, y en buen y mal estado y también en porcentajes.
Ejemplo de la evaluación	Si	Si	Si	Si
Peso de los aspectos a evaluar	No	No	No	No
Construcción de varias categorías	No	No	No	No
Evaluación cuantitativa	No	si: E=5, MB=4; B=3; R=2; M=1.	Escala de 0 a 10	No
Definición de las categorías de la escala de evaluación	No	Si. Definen E, MB, B, R, M	No	No

Variables de análisis	Equipo
	<b>FEI</b>
Aspectos a evaluar del salón	Si, 4
Escala de evaluación cualitativa	No, sólo cuantifica daños
Periodo de evaluación	No
Forma de registro de la evaluación	Gráfica: Objetos (4) Vs. Porcentaje de objetos dañados.
Ejemplo de la evaluación	Si
Peso de los aspectos a evaluar	No
Peso de los aspectos a evaluar	No
Evaluación cuantitativa	No
Definición de las categorías de la escala de	No

evaluación	
------------	--

Un equipo construye categorías más amplias (Mobiliario, Aula, Alumbrado) que incluyen a objetos individuales. El *mobiliario* comprende bancas, sillas, mesas, escritorio, estante; en el *aula* se incluye ventanas, piso y paredes; en el alumbrado están los enchufes y las lámparas. Este aspecto tiene que ver con la capacidad cognitiva y lógica de la clasificación: colocar en clases a objetos es básico en el pensamiento formal. Observar la capacidad de construir clases de objetos es uno de los propósitos de este problema.

*Evaluación cualitativa.* Un aspecto en la evaluación es la *escala de evaluación*. Un equipo propone una escala de evaluación cualitativa con cinco categorías: Bueno, Regular, Malo, Necesita cambio y No necesita cambio. Otro equipo establece cinco niveles (Excelente, Muy Bien, Bien, Regular y Malo) para la evaluación cualitativa y, además, define las condiciones para incluir un objeto en cada uno de tales niveles: Los niveles que establece son Un ejemplo de definición que dan es el siguiente: *Bueno: Se puede utilizar, pero habrá que repararlos*. Dos equipos (entre ellos el inmediato anterior) establecen escalas de evaluación cualitativa y cuantitativa así como su equivalencia entre ambas.

*Evaluación cuantitativa.* Cinco equipos proponen llevar un recuento del total de objetos y de los objetos dañados y de los que están en buen estado, en algunos casos esto último lo expresan como porcentajes del total. Un equipo evalúa a través del *número de objetos presentes*. Es decir, cuenta cuántos objetos se encuentran. Un equipo propone evaluar mediante una escala de cero a diez. Otro equipo, que también propone una escala de tipo cualitativo, establece una equivalencia entre ambas formas de calificación, lo cual le permite pasar de una forma a otra. Cinco equipos proponen llevar un recuento del total de objetos y de los objetos dañados y de los que están en buen estado, esto último dos equipos lo expresan como porcentajes del total.

*Periodo de evaluaciones.* Seis equipos fijan la periodicidad (cada 15 días, mensual, bimestral, trimestral, semestral, anual) de la evaluación. En los casos (2) en que proponen

evaluaciones cuantitativas, proponen una evaluación final, semestral o anual, como el promedio de las calificaciones parciales.

*Registro escrito de la evaluación.* Tres equipos utilizan tablas y gráficas; cuatro equipos sólo tablas; un equipo sólo gráfico y un equipo ninguno de las dos formas. Las gráficas tienen las siguientes características:

- Gráfica de barras. Escala nominal en el eje horizontal (objetos a evaluar (tres equipos) ó salones (un equipo)), en el eje vertical porcentaje de objetos dañados (un equipo).
- Gráfica de barras. Escala nominal en el eje horizontal (objetos a evaluar), en el eje vertical un “cierto porcentaje” no especificado (un equipo).
- Gráfica puntual unida con una línea continúa. Escala nominal (objetos a evaluar) en el eje horizontal, en el vertical un porcentaje no especificado, pero, al parecer se refiere a objetos dañados. Es una gráfica del equipo que construye categorías y construyen, como ejemplo, la que corresponde al mobiliario. Un equipo **no pueden integrar en una sola gráfica todas las categorías evaluadas.**
- Gráfica puntual unidos los puntos con segmentos de recta. Escala nominal (Salones), en el vertical hay una escala numérica que al parecer corresponde al número de objetos dañados. Construyen una gráfica por cada objeto a evaluar (Un equipo).

Las características de las tablas son las siguientes:

- Forma de tabla (Tabla sin llenar). Cantidad de objetos (mobiliario) al final de cada semestre y del año (un equipo).
- Tabla llena con calificaciones numéricas (escala de diez): Calificación de los diferentes salones en cada periodo de evaluación (un equipo).
- Tabla llena con cantidades totales y porcentajes. Total de objetos, numero de objetos en buen estado, número de objetos en mal estado, porcentaje de objetos en buen estado y porcentaje de objetos en mal estado (un equipo)

- Forma de tabla (tabla no llena). Calificación cualitativa (E, MB, B, R, M) por cada bimestre para diversos objetos a evaluar (un equipo).
- Tabla llena indicando “existencia” y “acciones a tomar”. Calidad de los objetos (Bueno, Regular, Malo) y la necesidad de sustitución (Necesario, No Necesario) (un equipo).
- Tabla llena con números. Número total de cosas y de las que están descompuestas en el salón (un equipo).
- Forma de tabla (Tabla no llena). Porcentaje de objetos dañados (No se especifica, pero pareciera que es por salón) (un equipo).

Hubo un equipo cuyo registro escrito es una tabla de tres entradas: Salones, Periodos de evaluación y Aspectos a evaluar. Por otro lado utilizan a la S con subíndices para indicar los salones. Este uso de subíndices es particularmente llamativo porque utilizarlos no es algo que hagan los alumnos.

Hay un equipo (JEJC) que, en lo fundamental, el problema lo interpretan como decidir la importancia o peso que cada uno de los diversos factores del salón de clase tendría en la evaluación global del salón. La *ponderación* la llevan a cabo asignando diversos porcentajes a cada uno de los factores como partes del 100% de lo que ellos llaman “salones de calidad”. Hacen una representación gráfica de esta ponderación mediante una “gráfica de pastel”. Es el único equipo que lo hace, aunque no propone cómo evaluar cada uno de los aspectos que sugieren. En este mismo equipo uno de sus integrantes interpreta *evaluar* como *¿cuánto cuesta?* Después de hacer un esquema en una hoja de papel, que según él representa al salón de clases se pregunta: ¿Cuánto cuesta? Sus otros dos compañeros, de forma inmediata, le dicen que eso no es lo que pide el problema. Sin embargo esto es un ejemplo más de la diversidad de formas en que puede interpretarse la tarea que se les plantea a los estudiantes.

En cuanto a las *interpretaciones* que los diferentes equipos hacen de la *tarea* se pueden documentar tres: identificar distintos factores a evaluar y asignarles una calificación, ya sea cualitativa o cuantitativa, pero sin dar una evaluación global de la calidad del salón; identificar objetos que constituyen el mobiliario del salón de clases y realizar un recuento de todos y cada uno de ellos, de los que se encuentran dañados y de los que se encuentran en buen estado;

tercero, identificar distintos factores a evaluar y ponderar su importancia de cada uno de ellos como parte de la evaluación global que le asignan al salón.

Al abordar la tarea se puede reconocer que las *cantidades consideradas* por los alumnos son escalas de evaluación cualitativas, escalas de evaluación cuantitativas, escalas ordinales, tablas, gráficas de barras y puntuales, y porcentajes.

Consideremos el *razonamiento matemático*, involucrado, de alguna manera, en la resolución que han hecho los alumnos de este problema. Evaluar algo conlleva la idea de *comparación*: **a** es más que **b**, **a** es igual que **b**, ó **a** es menos que **b**. Cuando se establece una *escala* idealmente se ordenan objetos de la misma especie con respecto al grado en que muestran alguna o algunas características previamente establecidas. Al mismo tiempo, cuando se establece una escala se forman clases ajenas de objetos: tantos cuántos grados o niveles tenga la escala. Por lo tanto *evaluar* un objeto es *clasificarlo* es decir ponerlo en una clase determinada. Pero para poner a **ésta silla** en la clase de las que tienen la calificación MB, habría que ver que **ésta silla** tenga las cualidades necesarias y suficientes para estar en tal clase. Y para poder identificar en **ésta silla** las cualidades necesarias y suficientes primero se tienen que identificar toda una colección de atributos que **ésta silla** tiene, y en ellas reconocer las que la escala define, y para hacer esto hay que *analizar* a **ésta silla** de acuerdo a sus atributos, esenciales y no esenciales. Como se puede ver de este breve análisis en el proceso de *evaluar* un objeto están presentes acciones como seriar, clasificar, analizar, etc. Y es que en el fondo el proceso de *evaluar* cualquier objeto exhibe un *patrón*, una *regularidad*. La búsqueda de tal patrón o regularidad es lo que se persigue con problemas como el de evaluar un salón de clases. La tabla que se presenta a continuación, elaborada por uno de los equipos que abordaron la tarea, resume aspectos como los anteriores:

Artículos	Total	En buen estado	Porcentaje	En mal estado	Porcentaje
Mesas	40	15	28%	25	62%
Vidrios	20	5	25%	15	75%
Sillas	80	20	25%	60	75%
Pizarrones	2	2	100%	0	0%



La tabla sintetiza procesos como el de clasificar (buen estado, mal estado), analizar (para colocar a cada una de las 20 sillas en la categoría de las que están en buen estado se tiene que analizar cada silla), cuantificar (se contaron elementos de colecciones) y establecer proporciones (de 100 sillas, 25 están en buenas condiciones). En esta tabla subyace un orden, un patrón, un modelo: basta con cambiar “en buen estado” y “en mal estado” por dos categorías que se excluyan y agoten mutuamente y en lugar de mesas, vidrios, sillas y pizarrones poner otras cuatro cosas pertinentes con las dos categorías previamente definidas (y que se puedan contar) y se tendrá otro ejemplo de evaluación. Este aspecto se percibe mejor a través de la siguiente “forma de tabla”:

Artículos	Total	P	Porcentaje	Q	Porcentaje
A					
B					
C					
D					

En el esquema anterior, A, B, C, y D son artículos que se puedan contar, y P y Q propiedades que definen colecciones de objetos mutuamente excluyentes y que su unión agota todo un universo. Toda colección de objetos A, B, C, D y propiedades P, Q, que cumplan con las condiciones anteriores se pueden “evaluar” mediante la tabla anterior. Para los alumnos que elaboraron la tabla (y para todas las tablas construidas por los otros equipos), el orden, patrón o modelo que subyace a su solución se puede ilustrar con una “forma de tabla” como la precedente. Este carácter de la solución del problema, nos permite tener cierto grado de certeza en lo “adecuado” de este tipo de problemas para promover un *modelo*, en el sentido de Lesh y colaboradores (Lesh y Doerr, 2000).

Análisis de los ciclos de desarrollo que exhibe un grupo pequeño al abordar el problema de:  
*“La película Titanic se saca un ...”*.

En seguida se presenta un ejemplo de trayectoria de pensamiento que siguen los alumnos que abordaron el problema *“La película Titanic se saca un ...”*. La solución corresponde al equipo formado por tres alumnas a quienes denominaremos *El, Lu y Ne* respectivamente. El análisis, además de exhibir los diferentes *ciclos* de modelación por los que pasa la resolución del problema, hace énfasis en el papel que desarrolla la elaboración de la carta y el planteamiento de preguntas como medios para promover el avance en la solución del problema. Al final del análisis de los *ciclos de modelación* se transcribe la producción escrita que produjo este grupo pequeño con el objeto de mostrar la forma en que resumen todo el proceso de resolución que siguieron.

*Ciclo 1: Identificación de la demanda de la tarea.* **“El”** empieza a leer el problema y no había avanzado más allá de los primeros renglones cuando, simultáneamente a la lectura, **Ne** dice:

Yo digo que como un nueve...

Es la primera vez que se menciona una calificación para la película. Los alumnos del grupo habían visto la película y naturalmente, ya habían elaborado, personalmente, un juicio sobre ella, es decir ya han construido un “concepto” sobre la película. Lo más probable es que su juicio se base en sus gustos personales y a sus conocimientos sobre cine. La actividad es significativa para ellos: han visto películas, en particular la que se pide evaluar. La cuestión de la calificación, como observaremos, más adelante se vuelve a considerar en diversas ocasiones.

Los alumnos empiezan a resolver el problema iniciando la redacción de la carta. Pareciera ser que en este problema *el fin a la vista* que resalta es *la carta*. Los alumnos saben que al final se les pide una carta y es por donde empiezan, como se muestra a continuación:

Ne: Bueno, ¿ya empezamos?...¿Por qué empezamos? ¿Por escribir la carta?  
 Lu: Ajá... Pues sí  
 ...  
 ...  
 Ne: Empezamos... escribimos la carta.

Discuten sobre quien escribe la carta y deciden que sea *El* porque escribe “bien” y las otras compañeras tienen dificultades para escribir en una hoja blanca. No discuten sobre el contenido de la carta, empiezan con una entrada como de cualquier carta y logran avanzar en su redacción a través de los saludos y el reconocimiento de la demanda del señor Juan:

Por medio de la presente reciba un cordial saludo de los estudiantes del Colegio de Ciencias Humanidades Plantel Sur... he recibido una carta donde Usted expresa el deseo de saber sobre la calidad de la película Titanic...

Hay que hacer notar que en tanto *El* se dedica a redactar lo anterior, ayudada por *Lu*, *Ne* vuelve a leer el problema original *cinco veces más*, sobre todo en lo que demanda el problema. Esta necesidad de volver a leer las condiciones que establece el problema está relacionada con la *construcción del significado* que la alumna va a construir de la tarea. Veremos más adelante que es precisamente ella (*Ne*) la que va a plantear el mayor número de preguntas hacia aspectos que el problema demanda, preguntas que sirven para proseguir el proceso de resolución al preguntar. ¿Tiene esto relación con una mayor comprensión de la tarea? Lo que sí parece un hecho es que plantear preguntas dinamiza el proceso de resolución del problema.

*Ciclo 2: Asignación de una calificación numérica a la película.* Por segunda vez aparece el aspecto de asignarle una calificación a la película. Aún sin avanzar en la discusión del problema, los alumnos están en posibilidad de asignarle una calificación:

Ne: Yo así, así, nada más por verla, le otorgo como un nueve.  
 Lu: Un ocho... Ocho-siete (a lo que se refiere es a “ocho, punto, siete)  
 Ne: El diez no se lo lleva.

Lu: No.  
 Ne: Es más, no hay película que tenga diez., a menos que sea una de Nicolas Cage.  
 Lu: ¡Ah!

En este punto cabe la siguiente pregunta: ¿se detecta algún cambio en la percepción original hacia la película, y en especial la calificación que se otorga inicialmente a la película, como resultado de discusión en el grupo pequeño?

*Ciclo3: Pensamiento multifactorial.* Cuando *El* termina de escribir la entrada de la carta plantea la siguiente pregunta que intenta llevar adelante la solución del problema:

El: Ya, ¿qué más?

*El* vuelve a leer lo que lleva escrito y entre las tres alumnas discuten sobre los elementos inmediatos que debe llevar la carta, las cualidades o aspectos de la película:

Lu: ¡Ajá!  
 Ne: Bueno, hay que comentarle,... También, esto, por ejemplo, el aspecto valioso, y eso... ¿lo vas a meter en la carta?  
 Lu: Sí, todo... Nada más es la carta.  
 Ne: ¡Ajá!  
 El: ¿Sí? Yo digo que no.  
 Ne: Como que tenemos que hacer una lista.  
 El: Es una carta, y aparte una lista de las cualidades.  
 Ne: Yo por eso lo puse así, para luego hacer una lista.  
 El: Ajá!  
 Ne: Para que ahorita los pongamos y ya podamos hacer la carta.

En esta interacción de las alumnas aparecen las ideas de los *aspectos valiosos de la película* y de las *cualidades de la película*, es decir aparece otro elemento central en la solución del problema: *la multiplicidad de factores*. Hay que aclarar que si bien la idea multifactorial está explícita en la redacción original del problema, otra cuestión es que los alumnos la reconozcan.

*El* vuelve a leer lo que lleva escrito de la carta y llega un momento en el proceso de resolución que los alumnos parecen “bloqueados” para seguir adelante, por ejemplo *Ne* dice:

Ne: ¡Uh! Ya se nos secó el cerebro.

Pero, inmediatamente *El* dice, al continuar redactando la carta:

El: Y por lo tanto, nosotros hemos considerado los siguientes puntos para poder asignarle una calificación... nosotros nos basamos en los siguientes puntos.

Después de esta expresión de *El* sigue un periodo de silencio de aproximadamente dos minutos que solamente se interrumpe para que los alumnos hablen del tiempo:

Lu: Hoy se ve que va a llover.  
Ne: Si.

De nuevo *El* al continuar la redacción de la carta “obliga” a continuar en el proceso de resolución como condición para poder seguir redactando la carta. Esto muestra que la redacción de carta es fundamental en el proceso de resolución y de alguna manera es como “la fuerza” que motiva la continuación del proceso de resolución:

El: Nosotros nos basamos en los siguientes puntos para poder asignarle una calificación y así saber si la película es buena o no... a ver, puntos a consideración...

Hay que notar que *Al* dice “...nos basamos en los siguientes puntos para poder asignarle una calificación...” lo cual establece que la calificación se otorga después de considerar ciertos puntos, en otras palabras que la calificación resulta de ciertos factores. Pero *Al* dice algo más: hace depender la calidad de la película de los puntos que se consideran. En otras palabras, la calificación, como indicador de la calidad de la película está sustentada en los “puntos” que se tomen en cuenta.

En la siguiente interacción de los alumnos se muestra una divergencia de opinión entre *El* y *Ne* ya que *El* habla de “puntos a consideración” en general y *Ne*, que ha leído varias veces el problema, habla de “aspectos valiosos, características importantes”. En esta interacción los alumnos encuentran el ser “taquillera” como la primera característica que le asignan a la película:

Ne: Y, ¿vamos a ponerle aspectos valiosos, características importantes?  
...  
El: ¿Qué te dije? ¿Puntos a consideración?  
Ne: Fue una de las películas más taquilleras... Eso sí.... Cuando yo fui estaba abarrotado el cine.  
El: Entonces, ¿eso lo ponemos?... Fue una película de las más taquilleras.

Ne: Es más, ha sido la más taquillera.

A continuación *El* con la pregunta (y otras tantas preguntas semejantes) ¿Qué más? (que ella misma se contesta) abre una “lluvia” de ideas que hace que los alumnos identifiquen otras características para la película:

El: ¿Qué más?... Tiene buenos efectos especiales.  
 ...  
 Lu: Aja.  
 Ne: Buenos actores.  
 Lu: Buen sonido.  
 Ne: Además, el director cambió un poco la trama de los anteriores.  
 El: Este, tiene buenos actores..... (Está escribiendo la carta).  
 ...  
 El: Tiene buenos actores...  
 ...  
 Ne: ¿Qué otra cosa podría ser bien?  
 ...  
 El: Buenos actores...este... ¿Qué otra cosa dijimos?  
 ....  
 Lu: El director creo una buena trama.  
 Lu: La música.  
 Ne: Sí cierto, le pudieron poner una buena música...

La redacción de la carta también hace que los alumnos busquen precisión en la forma de externar sus ideas, esto se pone de manifiesto en la siguiente interacción en donde buscan cómo referirse a la música de la película:

Ne: Sí, sí...buena música.  
 Lu: La música, por ejemplo Celine Dion.  
 Ne: También hay que ver cómo canta ésa...ésa tipa no canta cualquier cosita, eh.  
 El: ¿Qué le ponemos, entonces? Tiene un nombre especial, ¿no?...Las canciones de las películas.  
 Ne: Sí, son los...este...  
 El: Track, ¿no?... Creo que sí. Es el track de la película... Se escribe así, ¿no?  
 Lu: Con c y k.  
 Ne: Sí, creo que sí.

*El* lee lo último que ha escrito de la carta: “... fue una película muy taquillera, tiene buenos efectos especiales, tiene buenos actores, el director crea una excelente trama, el track de la película interpretado por Celine Dion es excelente...” y *Ne* plantea una pregunta

para continuar con el proceso de resolución. *Lu* contesta la pregunta pero su respuesta apenas es tomada en cuenta por *El* que plantea la idea de *evaluar cualitativamente* la película. Esta es la primera evaluación de la película como consecuencia de los factores que consideran las alumnas:

- Ne: Además...este, ¿qué otra cosa podemos poner?  
 ...  
 Lu: ¿Vestuario?  
 ...  
 El: Uh...ya sería... es por ello que consideramos que la película es bastante buena...a pesar de crear ciertos daños ecológicos.

*El* plantea preguntas para continuar pero sólo aparece un punto más.

- El: ¿Qué más? Y entonces, ¿qué le ponemos?  
 Ne: ¡Ay! Como nota...esa te la recomendamos una sola vez  
 Lu: Eso te aburre.  
 ...  
 Ne: Está melosa...muy... Bueno, ya.  
 El: Ya

*Ciclo 4. Asignación de una calificación numérica a la película.* En seguida *Ne* plantea, por tercera vez, la cuestión de la calificación que se le otorgará a la película y en este momento se avanza más en tal dirección. Parece que con la discusión anterior, las alumnas ya están en más posibilidades de abordar tal asunto, pero sin llegar a un acuerdo:

- Ne: ¿Qué calificación le damos? Yo le doy como un nueve, un ocho-siete.  
 El: Pero... Yo le doy un...un nueve, la verdad...porque a mí sí me gustó...pero verla nada más una vez...porque ya después...  
 Lu: Ocho.  
 Ne: De ocho-siete a nueve-  
 El: ¿Entonces?  
 Ne: A mí no...  
 El: ¿Entonces?  
 Ne: Yo le pongo un ocho-siete o nueve.  
 Lu: Un ocho... Ocho-siete.

*Ciclo 5: Introducción de una clasificación:* La interacción que sigue a continuación, que es la más larga, registra los intentos de los alumnos de *clasificar* los distintos aspectos de la

película que con anterioridad han identificado (taquillera, música, etc.) como “aspectos valiosos”, “características importantes”, “cualidades”, “defectos”. Sin distinguir claramente cada una de estas categorías los alumnos llevan a cabo tal clasificación. Por otra parte, aparece la idea de *escala de calificaciones*. Los alumnos van a utilizar esta clasificación para introducir una escala de calificaciones. Si reprodujéramos íntegra la interacción entre las alumnas en esta etapa nos llevaría tres páginas con un interlineado sencillo, lo cual es demasiado, por tal razón sólo reproducimos una pequeña parte, registrando sobre todo las preguntas que motivan el avance de la solución:

- Ne: Pero hay que sacar los aspectos... ¿No?  
 El: Aja, para hacer una escala de calificaciones.
- Ne: A ver, ¿cuál crees que es un aspecto valioso?
- ...
- El: Los efectos especiales, ¿Qué más?... A ver, ¿qué otras características importantes?
- ...
- Ne: Pero primero vamos con los aspectos valiosos, ¿no? Y así nos vamos.
- .....
- Lu: ¿Qué más?  
 Ne: ¿Qué otro aspecto valioso?
- ...
- El: Otro aspecto importante....el carrito, el cochecito ese, sin él no hay acción en la película.
- ...
- El: Bueno,... ya, continuemos con esto...
- ...
- Ne: Este, características importantes en la película... ¿Una característica importante?
- .....
- Ne: ¿Qué otra cosa?... Este, ¿otra característica importante?
- ..Ne: ¿Qué otra característica importante?
- ...
- Ne: Pero, es que lo pusimos en objetos valiosos...  
 Lu: También puede ir ahí.
- ...
- Ne: ¿Cuál otro Lu?
- ...
- Ne: ¿Cuál otro?...¿Cuál otra característica importante?
- ...
- Ne: Sus cualidades.  
 El: Cualidades.
- ...
- Ne: Pero lo puedes repetir, ¿no? Novas a basarte en una cosa.
- .....
- El: ¿Qué otra cosa? ¿Qué dice ahí?



...  
 Ne: Unos defectos...sólo se recomienda verla la primera vez...nosotros con su primera vez.  
 Lu: ¿Defectos?  
 ...  
 El: ¿Defectos?  
 Ne: Un defecto... no es una película para verse cada ocho días.  
 ...  
 Lu: Muy larga...  
 ...  
 El: Señales obsenas.  
 ...  
 Ne: No es una película apta para niños.  
 ..  
 Ne: Nicolas Cage, por Dios, ese hombre no es cualquier babosada.  
 ...  
 Ne: ¿Qué otra cosa?... ¿Qué otro defecto tuvo?

La discusión anterior, que como dijimos antes fue la más larga realizada por las alumnas se reduce, en la producción escrita de ellas, a la siguiente clasificación: aspectos valiosos (efectos especiales, actores, trama); características importantes (historia verídica, película taquillera, trama); cualidades (verídica, interesante, ha sido una de las más caras); defectos (muy larga, no apta para menores, daños ecológicos en Baja California, dividirla en dos partes cuando salió a la venta en VHS). Es de notarse que la música no la ponen en ninguna de las categorías anteriores. Otro aspecto interesante es lo que las alumnas identifican como defectos de la película pues mencionan los daños ecológicos que causaron su filmación y el hecho de dividirla en dos partes cuando salió en VHS, ambos ajenos a la propia película. ¿Cuál será la posible explicación de esto?

*Ciclo 6: Asignación de una calificación numérica a la película.* Cuando las alumnas han concluido la clasificación anterior vuelven al problema de asignar calificación a la película. Cada alumna asigna una calificación y obtienen el promedio aritmético. No se plantean ninguna duda en el uso del promedio lo cual indica que para ellas es una herramienta para resolver un problema, en este caso otorgar una medida de la calidad de una película:

Ne: ¿Qué calificación le das?  
 Lu: Yo, ocho-siete.  
 Ne: ¿Ocho-siete?  
 Lu: Sí.  
 Ne: ¿Tú?  
 El: Ocho-cinco.

Ne: Le doy como un ocho-siete.  
 El: Ya.  
 Ne: Si lo sumas... ¿cuánto te da?  
 El: No traje ahora calculadora.  
 ...  
 Ne: Nos da un seis, ¿no?... Ocho-cinco, mas ocho-siete, mas ocho-siete.  
 El: Entre tres, nos da ocho-seis.  
 Ne: Ocho-seis tiene de promedio... Eso le damos... Eso le damos... Sólo para que...

Hay una inconsistencia entre las calificaciones otorgadas y lo que sostuvieron las alumnas a lo largo del proceso de solución: La calificación que otorga *Ne* (que dijo que no le gustaba la película) es mayor que la que otorga *El* que dijo que a ella si le había gustado. En seguida los alumnos identifican otro defecto de la película, lo cual muestra que el proceso de resolución continúa en direcciones que aparentemente ya están agotadas. Este es un ejemplo claro de *refinamiento de un modelo* :

Ne: ¿Saben? Otro defecto es que cuando la sacaron VHS la dividieron en dos partes, perdió hasta trama...

*Ciclo 7: Ponderación cualitativa y cuantitativa.* Cuando *El* plantea la pregunta “¿Cómo terminamos la carta?” y *Ne* la pregunta “¿qué más tenemos que hacer?” las alumnas identifican dos aspectos más para la solución del problema: el procedimiento que siguieron en su solución y la *ponderación* que asignaron a los diferentes aspectos de la película:

El: Otro defecto...dividirla en dos partes en video-cassette... Entonces le... ¿Cómo terminamos la carta?... La calificación que le asignamos es de ocho-seis en promedio.  
 ...  
 Ne: De acuerdo a los críticos.... esta es de *Lu*, esta es de *El* y esta es mía.  
 Lu: Explicando claramente el procedimiento.... (Lee lo que dice el problema)  
 Ne: Este... ¿qué más tenemos que hacer?  
 Lu: Explicar el procedimiento que seguimos para obtener las calificaciones... y el peso o valor que le dieron a cada uno de ellos...

...

(*Ne* vuelve a leer el problema)

...  
 Ne: O sea, ¿a todo le tienes que dar un valor?  
 El: Esto es muy importante, esto es importante y esto poco importante.  
 Lu: Mucho más importante.  
 Ne: Mega importante.  
 ...

El: A ver... espérame... vamos a ver...a terminar la carta, ¿no?...a ver... la calificación que le asignamos es en promedio ocho-seis, punto y coma... obtuvimos esa calificación...

Lo anterior muestra una escala cualitativa para ponderar los aspectos de la película: muy importante, importante y esto importante. En este momento los alumnos sólo reconocen la escala. *Ne* plantea la cuestión de asignar valores a los distintos aspectos y reconoce que estos últimos están estrechamente interrelacionados en la película y que en consecuencia “como que” todos son importantes:

Ne: Es que aquí todo va a ser valioso... si no hay actores, no hay película... si hay actores y no hay trama qué van a hacer... y ni modo que se van a poner a recitar ahí... o sea debe tener efectos especiales... ahora en la otra... ya teniéndolo si no tienen la historia... entonces qué va a hacer... y si no recaudas lo que invertiste... qué chiste tiene... Después las cualidades... yo que éstos serán un poco más bajos... y los defectos serán un poco más bajos... ya...

*Ne* retoma la calificación que se le otorgarán a las cualidades de la película pero ya como categorías, sin embargo *Al* le reconviene diciéndole que está terminado la carta:

Ne: ¿Qué calificación le das a los aspectos valiosos?  
 Lu: Un nueve... diez.  
 Lu: Nueve.  
 Ne: Tú... El.  
 El: Espérame, estoy terminando la carta.

El proceso de resolución que siguen los alumnos termina con la asignación de calificaciones a las distintas categorías de cualidades que construyen los alumnos:

Ne: ¿Qué calificación le das a los aspectos valiosos?... aspectos valiosos.... ¿Qué calificación le dan?  
 ...  
 Lu: Nueve  
 Ne: Nueve le damos... ¿A las características importantes?  
 El: Ocho  
 Lu: Cinco  
 Ne: ¿A las cualidades?  
 El: Ocho.  
 El: Ocho.  
 Ne: ¿Qué más?... ¿A la Otra?  
 El: A qué... como un siete-seis... Ponle un siete.  
 Lu: Siete.

Treinta minutos, aproximadamente, fue el tiempo que las alumnas tardaron en resolver el problema. A manera de resumen a continuación se enumeran las etapas por las que pasa la trayectoria que siguen las alumnas en el proceso de construir la solución del problema:

- Leen el problema y surge la primera idea de asignar calificación numérica a la película;
- concluye la primera etapa de elaboración de la carta con los saludos y el reconocimiento de la demanda del “cliente”;
- aparece un segundo intento de asignar calificación numérica a la película;
- hay un bloqueo momentáneo en el avance de resolución pero se salva rápidamente determinando los aspectos de la película que justifican la calificación que posteriormente se asignará, esta es la etapa más larga del proceso y en ella surge el aspecto multifactorial del problema;
- aparece un tercer intento de asignar una calificación numérica a la película; se clasifican en cuatro categorías los diferentes factores relacionados con la calidad de la película;
- aparece el cuarto, y último, intento por calificar a la película, la cual finalmente es calificada mediante el promedio de las tres calificaciones que dan las alumnas;
- por último las alumnas definen una escala cualitativa y su correspondiente cuantitativa para ponderar las diferentes categorías que definen para las características que encuentran para la película.

En el proceso de construcción de la solución del problema jugaron papeles centrales la redacción de la carta (*el fin conocido fue la carta*) y preguntas dirigidas acerca de que otros elementos faltaban para la solución del problema. Hay que hacer notar que la calificación numérica se asienta al cuarto intento. A continuación se reproduce el documento escrito que producen las alumnas consistentes en la carta y algo que ellas denominan “las listas” que no son otra cosa que las categorías que construyen para las cualidades que identifican en la película y las calificaciones que le asignan a cada categoría.

24 de junio – 2003

Estimado Sr. Juan:

Por medio de la presente reciba un cordial saludo de los estudiantes del Colegio de Ciencias y Humanidades plantel Sur.

Hemos recibido una carta de usted, en donde expresa el deseo de saber acerca de la calidad de la película *Titanic*.

Nosotros nos basamos en los siguientes puntos para poder asignarle una calificación, y así saber si la película es buena o no.

Puntos a consideración:

- fue una película muy taquillera
- tiene buenos efectos especiales
- tiene buenos actores
- el director crea una excelente trama
- el track de la película interpretado por Celine Dion es excelente.

La calificación que le asignamos es en promedio 8.6, obtuvimos esa calificación tomando en cuenta todos los aspectos importantes en la película.

Cada una de nosotras asignó una calificación y luego sacamos el promedio.

La verdad es que recomendamos ampliamente ver la película, pero sólo una vez ya que verla en repetidas ocasiones aburre y la película pierde su encanto.

De esta manera nos despedimos enviándole un cordial saludo y deseándole salud a usted y a sus seres queridos.

Atte. CCH

Aspectos valiosos	Características importantes	Cualidades	Defectos	Sin categoría	Calificación
Efectos especiales	Historia verídica	Verídica	Muy larga		<i>Lu:</i> 8.7
Actores	Película taquillera	Interesante	No apta para menores		<i>El:</i> 8.5
Trama	Trama	Ha sido una de las más caras	Daños ecológicos en B. C. Dividirla en dos partes cuando salió a la venta en VHS.	Track	<i>Ne:</i> 8.7
Calificación 9	Calificación 8.5	Calificación 8	Calificación 7		<i>Promedio:</i> 8.6

Características generales de los modelos construidos por los grupos pequeños que abordaron el problema “*La película Titanic se saca un ...*”

El problema lo abordaron nueve grupos pequeños. La tabla que se muestra a continuación resume los elementos que consideran para asignarle una calificación a la película.

	Aspecto	Categorías		Qué se Calif.	Escala	Calif. Global	Tipo de calif.
	(No.)	Si ó No	(No.)				
REJ	8	Si	2	Aspectos	Numérica 6,7,8,9,10	Si Promedio	Numérica
JAL	18	Si	4	Aspectos	Numérica 7-10	Si Promedio	Numérica
LEA	8	No		Aspectos	Numérica 8, 9, 10	Si Promedio	Numérica Literal
ACN	14	Si	3	Categorías	Numérica 5, 8, 10	Si Promedio	Numérica
EILuNe	13	Si	4	Categorías	Numérica 7, 8, 8.5, 9	Si Promedio	Numérica
PJP	7	Si	3	Categorías	Numérica 7, 8, 10	Si Promedio	Numérica
EJCJ	6	Si	3	Aspectos	Numérica Porcentaje	Si Absoluta	Numérica
FAW	9	Si	4	Categorías	Numérica Porcentaje	Si Absoluta	Numérica
SSD	4	No		No	No	No	No

La primera columna registra los pequeños grupos, *aspecto* se refiere a las características que el grupo pequeño reconoce en la película, *categorías* hace referencia a la clasificación que se construye para los aspectos, *Qué se Calif.* se refiere a qué es a lo que el equipo asigna calificación, *escala* se refiere a el tipo de escala que se utiliza, *calif. Global* significa la calificación que se asigna a la película y *tipo de calif.* se refiere refiérese a si la calificación es numérica y/o literal.

A continuación trataremos de algunos aspectos que muestran los modelos construidos por los alumnos.

*Pensamiento multifactorial.* Los alumnos consideran diferentes aspectos de la película como objeto de evaluación. Si bien el número de características que consideran es variable (de

cinco a dieciocho), este aspecto, importante en el proceso de evaluación, se puede decir que los nueve equipos lo satisfacen. A continuación de muestran los aspectos que consideran dos grupos pequeños.

JAL	Rescata hechos históricos, El amor, Profesionalismo (Actor, Director), Ambiente agradable, Tragedia, Los hechos se desarrollan en un barco, Narra hechos reales, Romance, Película familiar, Termina en muerte, Injusticia, Discriminación, Muchos recursos, Efectos especiales, Adaptación a la época, Adaptación musical, Tiró el diamante, Tiempo de la película.
SSD	Muy entretenida, Buenos efectos especiales, Reparto bueno, Película importante, No tuvo ningún defecto.

*Proceso de ponderación.* De alguna manera, por razones idiosincrásicas, los alumnos ponderan los diferentes elementos que consideran importantes en la película y les asignan una calificación. Influida ésta última por sus conocimientos y gustos personales acerca del cine, ésta asignación es variable. Va desde aquellos que consideran que la *música* de la película es un aspecto valioso, hasta aquellos que no la mencionan o que dicen que es un defecto, por ejemplo los grupos pequeños ACN y FAW:.

ACN	FAW
<b>Aspectos buenos</b>	<b>Aspectos valiosos</b>
Entretenida.	Basada en hechos reales.
Actuaciones.	Basada en hechos de amor.
Resolución de imagen.	<b>Características importantes</b>
Escenografía.	Narra una historia de amor.
Final.	Efectos especiales y música muy buenos y acorde a la película.
Presupuesto.	<b>Cualidades</b>
<b>Aspectos malos</b>	Entretiene al público.
Muy larga.	No es muy violenta.
Efectos especiales	Buena música.
Música	<b>Defectos</b>
<b>Aspectos más o menos</b>	Abrieron recuerdos dolorosos a los familiares de las personas que en él fallecieron.
Historia.	Larga duración.
Diálogos.	
Drama.	
Vestuario.	
Actores.	

En general se puede decir que son consistentes cuando asignan calificaciones, ya que a aquello que consideran como defecto le asignan una calificación menor que a lo que es una cualidad, por ejemplo, el equipo PJP asigna las siguientes calificaciones:

	Cualidad		Defecto		Otra	
	Actores	Vestuario	Trama	Duración	Música	Guión
Calificación	10	10	7	7	8	8

Cuando los alumnos construyen categorías para las características que consideran, por ejemplo, en *aspectos buenos* y *aspectos malos*, en algunos casos (por ejemplo los equipos ACN y EILuNe) asignan la misma calificación a todas las características que pertenecen a la misma categoría:

ACN		EILuNe	
	Calif.		Calif.
<b>Aspectos buenos</b>		<b>Aspectos valiosos</b>	
Entretenida.	10	Efectos especiales	9
Actuaciones.	10	Actores	9
Resolución de imagen.	10	Trama	9
Escenografía.	10	<b>Características importantes</b>	
Final.	10	Historia verídica	8.5
Presupuesto.	10	Película taquillera	8.5
<b>Aspectos malos</b>		Trama	8.5
Muy larga.	5	<b>Cualidades</b>	
Efectos especiales	5	Verídica	8
Música	5	Interesante	8
<b>Aspectos más o menos</b>		Costosa	8
Historia.	8	<b>Defectos</b>	
Diálogos.	8	Muy larga	7
Drama.	8	No apta para menores	7
Vestuario.	8	Daños ecológicos en B.C.	7
Actores.	8	Dividida en dos partes en DVD	7

Otras veces asignan calificaciones distintas, por ejemplo los equipos REJ y JAL, a diferentes elementos considerados en la misma categoría.

REJ		JAL	
	Calif.		Calif.
<b>Aspectos Buenos</b>		<b>Aspectos valiosos</b>	
Contenido histórico.	9	Rescata hechos históricos.	10
Historia romántica.	8	El amor.	8
Reconstrucción del barco.	10	Profesionalismo (Actor, Director)	8.5
Escenografía.	9	Ambiente agradable.	7
Uso de material para respaldar la historia.	10	<b>Características</b>	
<b>Aspectos malos</b>		Tragedia.	10
		Los hechos se desarrollan en un	9



No se dan pormenores de los sucesos. Puede ser cansada y en parte tediosa por su gui3n entre dos personajes. Se centra s3lo en los personajes principales.	7	barco	7.5
	6	Narra hechos reales.	10
	6	Romance.	8.7
		Pel3cula familiar.	9
		Termina en muerte.	8
		Injusticia.	10
		Discriminaci3n.	
		<b>Cualidades</b>	9
		Muchos recursos.	
		Efectos especiales.	8
		Adaptaci3n a la 3poca.	10
	Adaptaci3n musical.		
	<b>Defectos</b>	9.2	
	Tir3 el diamante.		
	Tiempo de la pel3cula.		

*Uso de porcentajes.* Los equipos que asignan porcentajes (FAW y EJCJ, hacen un uso incorrecto de ellos: Hay inconsistencia entre los porcentajes asignados y la calificaci3n global obtenida. El problema de fondo en estos casos es usar la misma escala para calificar cualidades que son opuestas. ¿C3mo es posible que asign3ndole u 15% a los defectos se obtenga la m3xima calificaci3n?

FAW			EJCJ		
	Calif.	C:G:		Calif.	C:G:
<b>Aspectos valiosos</b>	40%	10	M3sica Cualidad)	20%	8
Basada en hechos reales.	25%		Efectos especiales (Cualidad)	19%	
Basada en hechos de amor.			Reparto	18%	
<b>Caracter3sticas importantes</b>	20%		Argumentos	16%	
Narra una historia de amor.			Trama (Defecto)	14%	
Efectos especiales y m3sica muy buenos y acorde a la pel3cula.	15%		Duraci3n (Defecto)	13%	
<b>Cualidades</b>					
Entretiene al p3blico.					
No es muy violenta.					
Buena m3sica.					
<b>Defectos</b>					
Abrieron recuerdos dolorosos a los familiares de las personas que en 3l fallecieron.					
Larga duraci3n.					

*Uso del promedio aritm3tico:* Seis equipos asignan calificaciones num3ricas con escalas num3ricas diferentes a cada una de las caracter3sticas que consideran, y en seguida obtienen una calificaci3n global a trav3s del promedio aritm3tico de las calificaciones parciales. La tabla siguiente registra las calificaciones globales que los diferentes equipos asignan a la pel3cula:

Equipo	REJ	ACN	EILuNe	JAL	PJP	EJCJ	SSD	FAW	LEA
<b>Calificaci3n global</b>	7.5	8	8.6	8.6	8	8	10	10	9.3

Hay que hacer notar que las calificaciones que asignan los equipos FAW, SSD y EJCJ las asignan después de evaluar globalmente los aspectos que consideran pero sin asignarles calificación específica a tales características.

*Interpretación de un número como índice de calidad.* Como consecuencia de la asignación de la calificación es importante puntualizar que se observan dos actitudes en relación a la evaluación de la película: para algunos alumnos porque la película tiene éstas y aquellas características, obtiene tal calificación y, para otros porque la película obtuvo tal calificación, entonces tiene tales características. Pero en ningún caso se plantea la bicondicional: tiene tales características, si y sólo si, tiene tal calificación. La condicional en el segundo sentido es delicada porque conlleva el prejuicio de sacar inferencias cualitativas sólo por contar con referentes cuantitativos. Esto último es exactamente lo que dice el equipo LEA: “...Según un estudio que se realizó... por medio de una tabla comparativa dándole valores a cada una de las características sacamos el promedio y obtuvo 9.3 esto quiere decir que es una película Muy Buena...”. Si obtuvo 9.3 de calificación fue debido a cómo se calificaron las características consideradas. Y cabe la pregunta, ¿por qué se calificaron de tal forma?

*Formas representacionales usadas:* Los alumnos utilizan, naturalmente el lenguaje escrito, sobre todo en la redacción de la carta; representaciones numéricas, para el cálculo de la media aritmética; tablas y solamente hay un equipo que utiliza una representación gráfica: representan un barco y la longitud total de la línea de flotación representa una calificación de diez, pero como ellos le asigna una calificación de 8.6 solamente consideran parte de tal línea.

*Procedimiento utilizado para realizar la evaluación.* Un aspecto que hay que registrar es que en todas las cartas escritas lo único que se consigna es una mención general sobre el procedimiento de evaluación que siguieron los diferentes equipos, pero la forma detallada de llevarla a cabo no se menciona. Esta aparece en las hojas que se usaron para resolver el problema, pero no forman parte del cuerpo de la carta.

Se puede decir que, al menos para esta situación, los alumnos son capaces de realizar un proceso de evaluación, asignando una calificación a un objeto, en este caso, a una película.

Finalmente podemos decir que el modelo que construyen los alumnos toma en consideración múltiples factores y utiliza una evaluación cuantitativa, construyendo una escala de evaluación y valiéndose del promedio aritmético.

Respuestas a las preguntas de investigación.

A continuación se presentan las respuestas a las preguntas de investigación, las cuales corresponden a diferentes aspectos del problema al que nos planteamos aproximarnos:

1a. Pregunta de investigación

*¿Qué competencias matemáticas muestran alumnos de bachillerato cuando toman una decisión que requiere de ordenamiento de opciones mediante el tratamiento de datos numéricos contenidos en tablas?*

El *proceso de promoción del modelo* transcurre por *cuatro ciclos*. En el primero aparece la *interpretación del problema* como algo que se resuelve aplicando el concepto de *promedio*. Durante este ciclo se realizan algoritmos y se recurre a representaciones aritméticas y al uso de tablas. El segundo ciclo está caracterizado por el *proceso de “conjuntar” colecciones de números* la cual es una de las ideas centrales en el manejo de datos. En esta segunda etapa se aplica de nuevo el algoritmo para calcular la media aritmética y se usan representaciones aritméticas y tablas. En el tercer ciclo aparece la *interpretación* de que *la mejor y peor opción está determinada por los valores numéricos que adquieran los descriptores de las*

*coleccion de números asociadas a cada opción.* En el cuarto ciclo se *ordenan colecciones* que constituye el otro proceso importante de la actividad, la cual se realiza a través del *proceso de comparar por parejas* los diversos elementos numéricos del conjunto. El modelo promovido contiene descripciones (como se aborda el problema), el algoritmo para calcular promedios, el proceso de ordenar opciones, representaciones aritméticas, y geométricas. Expliquemos un poco más algunos de estos aspectos.

*Los estudiantes rápidamente se percatan de las situaciones en que pueden hacer uso de la idea de media aritmética.* Perciben cuando una colección de números puede describirse con la media aritmética. Es muy posible que esta idea ya este entre sus herramientas de pensamiento. Son estudiantes con nueve años de escolaridad previos en los cuales el *promedio* ha sido índice de su aprovechamiento, rendimiento y calidad de estudiante. Esta vivencia la reusan en situaciones similares.

*Relacionan atributos como “mejor”, “peor” con el valor de los índices que miden una característica determinada.* Ellos han aprendido, por su experiencia, que el nivel de exigencia de un profesor se indica por el valor de las notas que asigna y un profesor “más exigente” es aquel que asigna las notas más bajas. Pareciera ser que esta experiencia la transfieren a otros contextos: la mejor película, la mejor niñera, la mejor licuadora, es aquella que tenga el índice numérico más alto.

*Acción de “conjuntar” dos o más colecciones de datos en una sola.* Para describir numéricamente dos o más colecciones de datos numéricos de la misma naturaleza, la mayoría de estudiantes recurre a la idea de “promedio de promedios”: obtienen la media aritmética de cada colección y después la media aritmética de la colección de medias aritméticas. Pero no se percatan que esto no siempre se puede aplicar. Otros estudiantes, los menos, unen las distintas colecciones particulares para formar una sola y después para esta colección “mayor” encuentran la media aritmética.

*Ordenación de un conjunto de datos numéricos a través de la comparación por parejas.* Pareciera ser que para una colección pequeña de datos (ocho o diez números) los estudiantes utilizan el procedimiento de comparar números por “parejas” para poderlos ordenar. Llama la atención que cuando los números aparecen registrados en forma de tabla, por ejemplo

de tres columnas y dieciocho renglones no utilicen este método para ordenar los números de las columnas. Pareciera ser que se “confunden” al ver muchos números.

*Algunas limitaciones observadas.* Hay competencias básicas en donde algunos alumnos presentan limitaciones. Las que se pusieron de manifiesto son las siguientes:

- La mayoría de alumnos parece que no comprenden en qué situaciones es posible utilizar la “media de medias”.
- Una celda vacía fue interpretada por la mayoría de estudiantes como si contuviera un cero.
- Algunos alumnos, para el caso de varias tablas no-homogéneas (es decir que no tienen el mismo número de renglones y de columnas) utilizaron como descriptor de las colecciones de números a la suma de ellos, sin tomar en cuenta cómo son las tablas.
- Algunos alumnos calcularon el promedio sumando los números de diferentes tablas y dividiendo entre el número de tablas de donde tomaron los números.
- Algunos estudiantes presentan dificultades al utilizar la relación de orden en los números racionales escritos en forma decimal: ¿Quién es más grande 7.125 o 7.3?
- Algunos estudiantes no cuestionan lo adecuado o inadecuado de un número como medida de una cualidad. A la película A, por algún medio, se le califica con 7.8 y a la película B con 7.8125, ¿se puede decir que la película A es de menor calidad que la B'?

Este *modelo* promovido durante la actividad podría ser re-usado en cualquier situación que tuviese la siguiente estructura:

1. Se tienen dos conjuntos de opciones (1, 2, 3,... 8...), (I, II, III,..., X) que como conjunto sus elementos son de la misma naturaleza.
2. Cada opción tiene un conjunto de valores numéricos asociados.
3. Los valores asociados a las opciones están registrados en una tabla.
4. Se proporcionan más de una tabla.
5. Las tablas no son homogéneas, es decir, no tienen el mismo número de renglones ni de columnas.
6. Algunas de las opciones de los renglones (o columnas) aparecen en más de una tabla.

A continuación se representa esquemáticamente la estructura de las tablas que contienen los datos. Ejemplos posibles de situaciones podrían ser: calificaciones de distintos alumnos en diversas asignaturas; número de turistas en diversas estaciones del año en centros vacacionales distintos; producción de frutas varias en distintos países, etc.

**O P C I O N E S**

	I	II	...	V	...	C
<b>1</b>	<b>a</b>	<b>e</b>		<b>i</b>		<b>m</b>
<b>2</b>	<b>b</b>	<b>f</b>		<b>j</b>		<b>n</b>
<b>..</b>	<b>..</b>	<b>..</b>	<b>..</b>	<b>..</b>	<b>..</b>	<b>..</b>
<b>5</b>	<b>c</b>	<b>g</b>		<b>k</b>		<b>o</b>

**O P C I O N E S**

	I'	II'	...	V'	...	C'	...	M'
<b>1</b>	<b>a</b>	<b>e</b>		<b>i</b>		<b>m</b>		<b>q</b>
<b>2</b>	<b>b</b>	<b>f</b>		<b>j</b>		<b>n</b>		<b>r</b>
<b>8</b>	<b>c</b>	<b>g</b>		<b>k</b>		<b>o</b>		<b>s</b>
<b>..</b>	<b>..</b>	<b>..</b>	<b>..</b>	<b>..</b>	<b>..</b>	<b>..</b>	<b>..</b>	<b>..</b>
<b>20</b>	<b>d</b>	<b>h</b>		<b>l</b>		<b>p</b>		<b>t</b>

**O P C I O N E S**

	I''	II	...	V'
<b>8</b>	<b>a</b>	<b>e</b>		<b>i</b>
<b>9</b>	<b>b</b>	<b>f</b>		<b>j</b>
<b>..</b>	<b>..</b>	<b>..</b>	<b>..</b>	<b>..</b>
<b>11</b>	<b>c</b>	<b>h</b>		<b>k</b>
<b>..</b>	<b>..</b>	<b>..</b>	<b>..</b>	<b>..</b>
<b>20</b>	<b>d</b>	<b>h</b>		<b>L</b>

Y se pida encontrar:

La mejor opción tanto de los renglones como de las columnas.

La peor opción tanto de los renglones como de las columnas.

Algunos problemas que podrían ser extensiones del investigado serían como los siguientes:

- ¿Qué ocurre cuando la información está contenida en tablas con una gran diversidad de variantes tanto en renglones, columnas y celdas?
- Qué ocurre cuando se toman decisiones pero la información no sólo es cuantitativa sino también cualitativa y se presenta en diversos formatos: textos escritos, gráficas diversas, distintos tipos de tablas, etc.

## 2a. Pregunta de investigación.

*¿Qué recursos básicos exhiben los estudiantes al resolver actividades relacionadas con la toma de decisiones?*

*Formular conjeturas.* Posiblemente debido a que *el fin* en cada uno de los problemas se “ve” de manera inmediata, algunos alumnos empiezan formulando alguna conjetura acerca de cual consideran que es la mejor opción; dicen cosas como: “...yo creo que debe ser...”. En este caso en el proceso de modelación surgen acciones orientadas a validar, probar o justificar lo que proponen.

*Reconocen particularidades del contexto en que surge la necesidad a satisfacer.* Una *necesidad* (cambiar de lugar de residencia, cambiar a jugadores, buscar niñera) aparece en un contexto con ciertas particularidades específicas. Hay que reconocer claramente tales particularidades porque son un elemento importante en la decisión a tomar. La gran mayoría de los alumnos no toman en cuenta las condiciones en que aparece la necesidad al momento de decidir.

*Ponderar las características de las opciones (con base en las particularidades del contexto en que aparece la necesidad).* Si una persona tiene necesidad de cambiar de vivienda y tiene tres hijos, debe tomar muy en cuenta las características de las opciones que le presenten.

Los alumnos valoran cuales son las características relevantes de las opciones con respecto a las condiciones que rodean a la necesidad.

*Ponderar las características de las opciones con base en los valores que tienen las características de las opciones.* Cuando una característica tiene casi los mismos valores para un cierto número de opciones (que puede ser en todas) los alumnos la consideran irrelevante para la decisión en las opciones que se presente.

*Simplificar el problema.* Los alumnos, una vez ponderadas las características de las opciones, eliminan aquellas que no son relevantes. Simplificar el problema es una estrategia adecuada cuando hay que tratar con la complejidad.

*Transformar una escala cualitativa en cuantitativa.* En los casos en donde los valores de las características de las opciones están dados en forma cualitativa, los alumnos las transforman a cuantitativa construyendo escalas de medición para hacer las transformaciones.

Además de las anteriores competencias básicas los alumnos *ordenan colecciones de datos numéricos.*

*Algunas limitaciones observadas.* Hay competencias básicas en donde algunos alumnos presentan limitaciones. Las que se pusieron de manifiesto son las siguientes:

- tienen dificultades para interpretar qué representan algunos valores numéricos que aparecen en la tabla;
- tienen dificultades de aplicar la relación de orden cuando los valores numéricos que aparecen en la tabla están escritos en forma decimal;
- presentan dificultades para ordenar los valores numéricos de las columnas de una tabla cuando esta es “grande”(por ejemplo de tres columnas por doce renglones); esto posiblemente se deba a que se “confunden” al ver “muchos” números y ya no saben qué hacer;
- no reconocen particularidades que rodean a la necesidad, esto posiblemente se deba a que prestan poca atención al enunciado del problema y la fijan más en la tabla de valores.



El *modelo* promovido durante la actividad podría ser re-usado en cualquier situación que tuviese la siguiente estructura:

- 1) **N**
- 2)  $\{\Delta, \Phi, \dots, \Gamma, H, \Lambda\}$

Donde:

**N:** Representa una **necesidad**, como puede ser cambiar de lugar de residencia.

$\Delta, \Phi, \dots, \Gamma, H, \Lambda:$  Representan las **particularidades**  
en que surge la necesidad, como puede ser tener hijos  
adolescentes por quienes se tiene preocupación.

La demás información que se les proporciona a los estudiantes tiene la forma como la de la tabla que se muestra a continuación, en donde: **1, 2, 3, 4, 5,** representan las opciones, (una de ellas puede ser la ciudad de Puebla) y **I, II, III, IV, V** las características de tales opciones (por ejemplo la drogadicción); lo que aparece en cada celda son los “valores” de cada característica.

		CARACTERÍSTICAS							
		I	II	...	V	...	C	...	M
O P C I O  N E S	1	a	e		i		m		q
	2	b	f		j		n		r
	..	..	..	..	..	..	..	..	..
8	c	g		k		o		s	
..	..	..	..	..	..	..	..	..	
20	d	h		l		p		t	

En el problema se pide decidirse por alguna o algunas de las opciones.

3a. Pregunta de investigación.

*¿Qué recursos básicos exhiben los estudiantes al resolver actividades relacionadas con la construcción y/o aplicación instrumentos de evaluación?*

*Pensamiento multifactorial.* La competencia fundamental en estas situaciones problemáticas es la identificación de los factores, tanto positivos como negativos, que serán objeto de evaluación. La gran mayoría de alumnos identifican pocos factores (cuatro). Pocos alumnos identifican clases de factores. Esta limitación posiblemente esté relacionada a la escasa práctica en el *análisis* y de *observación*.

*Ponderación de los factores identificados.* Asignan “peso” a los factores que identifican, principalmente en términos de porcentaje de la calificación total.

*Construcción de definiciones.* Se construyen definiciones que establecen los criterios para poder llevar a cabo las evaluaciones. Este aspecto es importante porque en el fondo está la construcción de conceptos que al aplicarse dan origen a clasificaciones, por ejemplo, qué se va a entender por “*un mueble en buenas condiciones*”.

*Procedimiento para calificar los factores establecidos.* Debido a que un factor a evaluar puede tener distintos valores, se precisa un procedimiento para calificarlo. Si un factor importante en un tenis es su resistencia, se debe establecer un procedimiento para calificarla.

*Establecimiento del carácter periódico de la evaluación.* Muchos hechos y fenómenos tienen la característica de ser periódicos. Los alumnos reconocen que las evaluaciones son de esta naturaleza.

*Elaboración de representaciones para registrar evaluaciones y sus resultados.* Los alumnos construyen representaciones en forma de tablas para registrar las evaluaciones y distintos tipos de gráficas (barras, circulares, poligonales) para representar los resultados finales de la evaluación.

Además de lo anterior los alumnos utilizan *algoritmos* para encontrar porcentajes y promedios, y ordenan colecciones de objetos.

El *modelo* promovido durante la actividad podría ser re-usado en cualquier situación que tuviese la siguiente estructura:

- 1) Determinar los factores (**I, II, III, ... X**) de un objeto **n**.
- 2) Ponderar las características **I, II, III, ... X**.
- 3) Diseñar un procedimiento para determinar la forma en la cual se van a asignar calificaciones a los factores **I, II, III, ... X**

- 4) Aplicar el procedimiento anterior a una colección de objetos “**n**” en particular.  
 5) Dar una evaluación global para cada uno de los objetos “**n**”.

		FACTORES							
		I	II	...	V	...	C	...	M
OBJETOS	1		BIEN		9				
	2		REGULAR		7				
	..		BIEN		8				
	8		EXCELENTE		7				
	..		REGULAR		8				
	20		BIEN		9				

4a. Pregunta de investigación.

*¿Cuál es el desarrollo del pensamiento del estudiante acerca del ordenamiento, la selección y el tratamiento de información cuando construyen modelos que podrían usarse en la toma de decisiones?*

Vamos a describir primero el *desarrollo del pensamiento* de los alumnos para el caso en donde la situación problemática presenta solamente valores numéricos como medida de las características de las distintas opciones entre las cuales habría de decidir, y en segundo lugar, el que corresponde a situaciones en donde las evaluaciones para las características de las opciones eran, unas cuantitativas y otras cualitativas.

El proceso de desarrollo constructivo del *modelo* presentó cinco ciclos. El primero consistió en formular *conjeturas* sobre las características de las opciones que fuesen relevantes en la decisión de las mejores opciones. No es nada claro el motivo de la aparición de esta conjetura pues aparece inmediatamente de que termina la lectura colectiva del problema. El segundo ciclo, el más largo por el tiempo empleado, está dedicado a *ponderar* (entre paréntesis, documentar la existencia de este proceso fue una de las principales motivaciones del presente estudio) las características de las diversas opciones en términos de las circunstancias particulares

en que surge la necesidad que lleva a la búsqueda de una decisión. En este proceso jugó un papel importantísimo el *reconocimiento de las condiciones particulares en que surgió la necesidad* que plantea el problema. Pocos alumnos tomaron en consideración las condiciones en las cuales se enmarca la necesidad. Al poner en relación las condiciones que rodean la necesidad con las características de las opciones se fueron *refinando y justificando* las conjeturas ofrecidas en el primer ciclo. Ahora bien entre las condiciones en las que aparece la necesidad algunas son de carácter interpretable, y son estas interpretaciones las que tienen implicaciones en las características de las opciones. Otras condiciones tienen implicaciones de carácter lógico sobre las opciones (por ejemplo, si una condición unida a la necesidad es  $\sim Y$ , y entre las opciones figura Y, en forma automática Y no podrá ser una opción. Bueno, algunos alumnos que no reconocieron este hecho proponen Y como opción. La consecuencia inmediata de poner en relación las características de las opciones con las circunstancias que rodean a la necesidad es que las características se *ponderan* y al ponderarse es posible ordenarlas según su importancia para la satisfacción de la necesidad. Los alumnos que lograron hacer estos procesos fueron capaces de considerar como *irrelevantes*, para la decisión, a algunas de las características de las opciones; y al ser irrelevantes se podían eliminar y al eliminarlas el problema se simplificaba.

Casi al mismo tiempo que se plantaron las primeras conjeturas sobre las mejores opciones se planteó la *necesidad de dibujar gráficas*. Lo más seguro es que la motivación para trazar gráficas surgió de la redacción del problema planteado. Sin embargo, el deseo de trazar gráficas sirvió de impulso hacia la construcción del modelo ya que reiteradamente los alumnos se preguntaban por los elementos que deberían contener las gráficas. El intento de buscar los elementos de las gráficas contribuyó a refinar las conjeturas iniciales. Gran parte del proceso de construcción del modelo transcurrió en un “ir y venir” entre definir las características de las opciones que serían relevantes para la decisión y los elementos que contendría la gráfica.

Otro ciclo importante en el proceso de modelación fue que los alumnos *reconocieron características de las opciones intrínsecamente irrelevantes para la decisión*. Esto está relacionado con los “valores” de las características de las opciones. Por ejemplo, si la contaminación es “casi” la misma en una serie de opciones, la contaminación es irrelevante para la decisión. Este reconocimiento llevó a simplificar aún más el problema. Cuando los alumnos ya ha

“eliminado” las características de las opciones, por irrelevantes para la decisión, mediante el proceso de *ponderación*, pasan al ciclo de la toma de decisiones.

Cuando los alumnos han decidido cuáles son las características de las opciones que son relevantes a la decisión tienen todas las opciones (renglones) y solamente algunas columnas. Siguen la estrategia de formular una *conjetura*, ahora para la mejor opción. El criterio que tienen para validar su conjetura son los valores numéricos de las características de la opción: hay que comparar los valores de las características de la opción que proponen contra los valores de las otras opciones, sin embargo no son capaces de idear un método sistemático para llevar a cabo tal comparación. Comparan su propuesta con una y otra opción, pero sin método, y esto termina por confundirlos y pasar a otra propuesta de opción y volver hacer lo mismo. Pareciera que ya encontraron una opción adecuada y se dan cuenta que entre las otras opciones hay alguna que parece mejor y pasan a ella. Así, “rebotando” como bola de billar, pasan de una conjetura a otra sin poderlas establecer o descartar con seguridad.

Para los alumnos que siguieron esta trayectoria de pensamiento desempeñó un papel relevante la discusión entre los elementos del grupo pequeño y la lectura reiterada del texto del problema. Se preguntaban continuamente y planteaban nuevas conjeturas acerca de lo que consideraban fuesen las características a tomar en cuenta. Y de nueva cuenta estas conjeturas se juzgaban a la luz de las circunstancias en las cuales se encontraba inmersa la necesidad planteada.

Como se dijo anteriormente la mayoría de los alumnos no toma en cuenta las circunstancias que rodean a la necesidad y entonces su línea de pensamiento sigue otra dirección. Solamente prestan atención a la parte de información que se presenta en las tablas y “consideran” (yo creo que sin darse cuenta), como igualmente importantes a todas las características de las opciones. Calculan un índice para cada opción a través de sustituir los valores de todas las características de las opciones por la media aritmética. Ordenan las medias aritméticas de acuerdo al método de *comparación por parejas* y, ya ordenadas las medias aritméticas, vuelven a usar el *método de comparación por pares* para tomar su decisión.

*Situaciones problemáticas en donde los valores de las características de las distintas opciones, son cuantitativas para algunas y cualitativas para otras.* En esta situación algunos alumnos convierten calificaciones cualitativas en cuantitativas, para lo cual construyen una escala.

La diferencia que aparece en este enfoque se encuentra en la diversidad de escalas que los alumnos utilizan. Algunos utilizan la media aritmética para encontrar una calificación global para cada opción. Hay que llamar la atención que quienes usan este método no toman en consideración las circunstancias que rodean la necesidad por satisfacer. Usan matemáticas pero no consideran la situación real que se presenta. Otros alumnos definen una escala cualitativa y con ella traducen todas las escalas cualitativas que aparecen en el problema a una sola. Algunos alumnos trabajan con la escala del problema original y ponen en relación las condiciones que enmarcan la necesidad, con las características de los candidatos, y con razones que resultan de la interpretación que hacen de los valores de las características de las opciones, y de las circunstancias que rodean las necesidades toman, la decisión.

Un hecho que se observó fue que hay alumnos que tienen dificultades para integrar en una sola calificación cuantitativa diversas calificaciones cualitativas asignadas a características “positivas” y “negativas”. Pierden de vista que en este caso la escala es inversa para las características negativas: entre más negativa es una cualidad tiene menos calificación numérica. La forma inversa de proceder no la reconocen algunos alumnos.

#### 5a. Pregunta de investigación.

*¿Cuál es el desarrollo del pensamiento del estudiante acerca del ordenamiento, la selección y el tratamiento de información cuando desarrollan modelos que podrían usarse para realizar evaluaciones?*

En el desarrollo de su pensamiento el primer ciclo que aparece es el de identificar los aspectos a evaluar de un objeto. Identifican aspectos aislados y en corto número. Algunos alumnos logran identificar categorías más amplias de factores, pero en número escaso. En este ciclo, en algún momento, se produce una lluvia de ideas, pero aún así las ideas producidas son escasas. Es posible que esta limitación este ligada a una escasa *experiencia de análisis* de objetos en particular. Las *descripciones* que producen, son coherentes con la observación anterior. Los estudiantes que logran reconocer categorías de aspectos muestran un ciclo en donde asignan un

peso a cada categoría como parte de la evaluación final. En otras palabras *ponderan* las categorías con respecto a la evaluación final. Por lo general utilizan el concepto de *porcentaje* como recurso de ponderación. En algunos casos los alumnos identifican factores positivos y negativos por evaluar y al ponderarlos asignan porcentajes a ambos tipos de factores, sin percatarse que los aspectos negativos requieren un tratamiento diferente. Otro ciclo importante en el desarrollo del modelo es cuando los alumnos construyen el procedimiento para llevar a cabo el proceso de evaluación propiamente dicho. En este momento surge, por un lado, la necesidad de asignar una calificación y de decir cómo se hace para determinar la calificación. Algunos alumnos, los menos, definen criterios a partir de definir, por ejemplo, que van a entender por un objeto “en buenas condiciones”. Como parte del proceso de asignar una calificación está la construcción de una escala de medición. En esto, los alumnos utilizan su experiencia como sujetos a quienes en la escuela han calificado. Conocen escalas cuantitativas, cualitativas y por intervalos para asignar calificaciones.

En las actividades que se realizaron para la construcción de los instrumentos de evaluación y su aplicación los alumnos no contaron con fuentes de información más que la propia experiencia de los alumnos que colaboraban en el grupo pequeño. Posiblemente esto propicio que la interacción grupal se realizara con mayor intensidad. Un hecho que también en esta actividad se observó fue que cuando los alumnos estaban convencidos de que el resultado a que debían llegar contendría gráficas y/o tablas, la búsqueda de los elementos que estarían contenidos en ambas representaciones sirvió de impulso para el desarrollo colectivo del modelo. Un papel parecido se observó que jugó el planteamiento de preguntas por elementos del grupo pequeño; preguntas como ¿qué más sigue?, ¿qué más hay que hacer?, ¿qué otra cosa pide?, servían para mantener al pequeño grupo trabajando. En esta actividad, como en otras, se pedía la escritura de una carta, dirigida al supuesto cliente que plantea el problema, en estos casos se observó que su redacción fue un elemento que dinamizó el proceso de construcción del modelo. La necesidad de encontrar el contenido de la carta motivó la búsqueda de solución al problema. Por otro lado, las tablas fueron la representación más utilizada para registrar el resultado de la evaluación, aunque también hubo alumnos que utilizaron representaciones gráficas.

6a. Pregunta de investigación.

*¿Hasta qué punto se desarrollan modelos como resultado de abordar una serie de tareas de modelación en diferentes contextos?*

De acuerdo a la perspectiva de los *Modelos* y la *modelación* se busca que un alumno cuando enfrente una situación problemática nueva cuente con *interpretaciones, descripciones, conjeturas, explicaciones y justificaciones; formas de representación diversas* con las cuales pueda interactuar con el “exterior” y tener a su disposición *sistemas conceptuales y materiales* a los cuales poder recurrir para enfrentar la dificultad.

Desde el punto de vista de la perspectiva de los *Modelos* y la *modelación* se dice que el maestro plomero tiene *modelos* con los cuales enfrenta problemas propios de su trabajo; y en estos *modelos* incluye todos los elementos de que se vale: algunos visibles como los sistemas materiales (soplete, medidores); formas de comunicación (hablada, escrita, gráfica) y otros invisibles, los de tipo cognitivo, pero que en determinadas circunstancias se pueden desplegar externamente: explicaciones, descripciones, interpretaciones, conjeturas, justificaciones.

Un *plomero* cuando va a arreglar un desperfecto lleva consigo una caja de herramientas; formas de comunicación donde incluye maneras de representar aspectos de su actividad y algo que no percibimos, experiencias, vivencias; formas de interpretar, explicar, describir, justificar, conjeturar, etc. relacionados con aspectos de su quehacer. Equipado con todo eso es como enfrenta los problemas de su trabajo.

El maestro plomero tiene necesidad de todo eso porque, en primer lugar, cuando llegue, observe el desperfecto y escuche las explicaciones de la ama de casa deberá idear, imaginarse, conjeturar por donde anda el problema; una vez que se ha formado una conjetura se la tiene que explicar a la ama de casa, diciéndole lo que se imagina pasó, para eso deberá contar con explicaciones, interpretaciones descripciones, justificaciones y maneras de representar aspectos del desperfecto que imagina; en tercer lugar debe ir a la tlapalería para adquirir lo necesario y va a tener que interactuar con un experto y de nuevo necesita maneras propias de comunicarse sobre aspectos de la plomería, componentes materiales, dimensiones, materiales, precios, etc. y



finalmente tiene que ser hábil en el manejo de sus herramientas de trabajo, cuál usar, qué adaptaciones les puede hacer; y si contara con un ayudante, que se inicia en los secretos de la plomería, de nuevo deberá comunicarse con él y poder darle explicaciones, justificaciones, interpretaciones, descripciones, instrucciones, etc.

El maestro plomero tiene necesidad de interactuar al menos a tres niveles distintos: ama de casa, dependiente en la tlapalería, ayudante; y para desenvolverse adecuadamente en cada uno de ellos necesita un lenguaje propio que se pueda adaptar a esas tres situaciones. Tal lenguaje es el de los *Modelos* y la *modelación*.

Desde esta perspectiva intentemos contestar la pregunta de investigación. Las actividades realizadas (que no fueron precedidas ni continuadas por instrucción alguna que se relacionara con ellas) fueron el escenario para tener una primera aproximación a la manera en la cual los estudiantes realizaban actividades de modelación. Por otro lado las tareas planteadas durante la experiencia didáctica tenían el propósito de promover el surgimiento de modelos (fueron como diría Lesh y colaboradores: Model-eliciting Tasks). A los alumnos no se les dijo cómo se hacía una evaluación o cómo se tomaba una decisión; y sin embargo, cuando uno lee las producciones escritas de los alumnos, sobre todo las cartas, y escucha y analiza el audio concluimos que las actividades sí promovieron el surgimiento de modelos. Las actividades fueron reveladoras de *interpretaciones, descripciones, conjeturas, explicaciones y justificaciones*, todas ellas de naturaleza cognitiva, pero puestas de manifiesto hacia el exterior por los alumnos. Las *formas de representación diversas* se pueden ver en lo que los estudiantes escribieron, y al realizarse las actividades en el salón de clase, sin ningún otro apoyo más que el bagaje cultural propio, pero compartido con los demás miembros del grupo pequeño, pone en evidencia la capacidad de los alumnos por recurrir a los artefactos culturales de que dispone los considera adecuados para realizar la tarea.

## CONCLUSIONES

En este estudio argumentamos que hay procesos del pensamiento matemático que, por lo general, no están plenamente reconocidos en el currículo tradicional de matemáticas. Se hace necesario identificar y mostrar la importancia de tales procesos porque se contribuye a precisar líneas que ayuden a organizar el currículo. Ilustramos lo anterior con el tratamiento de datos, el pensamiento multifactorial, la ordenación de situaciones y la ponderación de información que están presentes, por ejemplo, en problemas relacionados con la toma de decisiones.

El enfoque de los modelos y la modelación para el aprendizaje de las matemáticas ha puesto de manifiesto el papel de tales procesos en problemas de toma de decisiones. Como tal, es un marco teórico adecuado para entender mejor el proceso de resolución de los problemas. El concepto de *ciclo de modelación*, el cual tiene que ver con las características que tiene la interacción de los estudiantes con la tarea y entre los miembros de un grupo pequeño, es poderoso para aproximarse a la forma en la cual la solución de un problema se va robusteciendo a medida que transcurre el proceso de resolución.

Proporcionando ejemplos de diversas trayectorias particulares de modelación, como producto final del proceso de resolución de un problema, se mostró como el enfoque de los modelos y la modelación y del concepto de ciclo de modelación en particular, pueden ayudar al observador, ya sea un profesor o un investigador, a interpretar y comprender lo que está sucediendo mientras los estudiantes trabajan en un problema de modelación. La lista de los diversos ciclos de modelación para cada situación problemática planteada no pretende tener un

carácter rígido y universal; proporcionan ejemplos de cómo la descomposición en ciclos de modelación pueden ayudar al observador a analizar la complejidad del trabajo de los estudiantes en procesos de modelación.

Por lo tanto, la conclusión es que precisa identificar procesos matemáticos, adicionales a los ampliamente reconocidos, que sirvan de orientación para organizar el currículo y que en esta búsqueda los modelos y modelación es un marco teórico fructífero, como se ha intentado ilustrar en el presente estudio para el proceso de ponderación de información cualitativa. Al mismo tiempo se han identificado algunas limitaciones que se mencionan a continuación.

Un aspecto discutible al aplicar el Marco Teórico es decidir el momento de aparición de un *ciclo de modelación*. En el Marco Teórico este aspecto no es lo bastante claro. A primera vista parecería que un *Ciclo* aflora al momento en que surge una idea “diferente” a las que se han estado utilizando en el proceso de resolución. Ahora bien, esta idea “diferente” puede ser un contenido o un proceso de pensamiento y en consecuencia las posibilidades de ocurrencia pueden ser muy diversas. Naturalmente que interesa propiciar aquellos contenidos y formas de pensamiento que son o relevantes, o típicas, o propias, o características, para abordar la situación problemática; por ejemplo, en nuestro caso sería el momento en que aparece la idea de *ponderar* diversas situaciones.

Relacionada con el punto anterior está la recopilación y tratamiento de información que garantice la identificación de los *ciclos de modelación*. La captura del proceso de resolución deberá ser completa de manera que no ocurra pérdida de información que se traduzca en pérdida de algún *ciclo* que pueda ser relevante. En nuestro caso las fuentes de información fueron el diario de clase, las audiograbaciones y la producción escrita del trabajo en grupos pequeños que, naturalmente, es posible que presenten omisiones del proceso de resolución. El Diario de clase registra observaciones que se juzgaron importantes durante las sesiones en las cuales los alumnos enfrentaron la tarea, pero no están dedicadas por completo a un único grupo pequeño de trabajo. La audiograbación registra, en el mejor de los casos, las participaciones orales cuando se hacen en voz alta. Sin embargo, pueden existir múltiples circunstancias que impidan el registro de aspectos del proceso de resolución del problema, por ejemplo, cuando alguien habló en voz baja y su voz se perdió en el ruido de fondo que se produce en el salón de clase por el hecho de

hablar simultáneamente varias personas. La producción escrita por lo general registra el resultado al que se llega al resolver un problema y es limitada en cuanto a documentar el proceso de resolución del problema.

La redacción de algunos problemas orienta a usar matemáticas en su tratamiento. ¿Qué ocurre si tal indicación no se proporciona? Al demandar de los estudiantes que usen matemáticas, ya se les está llevando a que hagan algo que en otras circunstancias tal vez no se les ocurra hacer. Por tal razón, en tales casos, no se puede decir que el proceso seguido por los estudiantes sea “natural”, ni tampoco se puede afirmar que el procedimiento utilizado sea una herramienta de pensamiento. A pesar de esto último, algunos de los problemas planteados tienen potencial para promover en los estudiantes la construcción de modelos.

## BIBLIOGRAFÍA

- Ainley, J. and Pratt, D. (2001). *Introducing a Special Issue on Constructing Meanings from Data*. Educational Studies in Mathematics. Vol. 45. 1-8.
- American Association for the Advancement of Science (AAAS). (1998). *Benchmarks for Science Literacy*. New York: Oxford University Press.
- Apel, K. O. (1982). *El a priori de la comunicación y la fundamentación de las ciencias del espíritu*. En: J. M. Mardones y N. Ursúa, (Editores). Filosofía de las ciencias humanas y sociales. Materiales para una fundamentación científica Barcelona: Fontamara.
- Artzt, A.F., Newman, C.M. (1990). *How to Use Cooperative Learning in the Mathematics Class*. Reston, Va.: NCTM.
- Badiou, A. (1961). *le concept de modèle. "marque et manque: á propos du zéro"*. Cahiers pour l'analyse, 10. "la subversión infinitesimal". cahiers pour l'analyse, 9. París: armand colin.
- Balacheff, N. (1991). *The benefits and limits of social interaction: The case of mathematical proof*. In A. Bishop, S. van Dormolen, S. Mellin-Olsen (Eds.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 175-192). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.
- Balanced Assessment for the Mathematics Curriculum (1999). *High School Assessment Package 1*. White Plains, NY: Dale Seymour Publications.
- Ball, D. L. (2000). *Working on the Inside: Using Ones' Own Practice as a Site For Study Teaching and Learning*. In: Anthony E. Kelly and Richard A. Lesh. (Editors). *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Barr, G. V. (1980). *Some student ideas on the median and mode*. Teaching Statistics, 2(3), 38-41.
- Barrow, J. D. (1992). *PI IN THE SKY. Counting, Thinking and Being*. Oxford: Oxford University Press.
- Biddle, B. J. (1986). *Theory, Methods, Knowledge and Investigation about Teaching*. In: Merlin C. Wittrock, (Ed.). *Handbook of Research on Teaching*. New York: Macmillan Publishing Company.
- Bishop, A. (1991). *Mathematical Enculturation*. Dordrecht: Kluwer Academic.
- Black, M. (1961). *Models and metaphors*. New York: Cornell University Press.
- Bochner, S. (1966). *The Role of Mathematics in the Rise of Science*. USA: Princeton University Press.
- Boisvert, J. (1999). *La formation de la pensée critique. Théorie et pratique*. France: Éditions du Renouveau Pédagogique Inc.
- Bransford, J. D.; Brown, A. L.; Rodney R. Cocking, R. R., (Eds), (1999). *How People Learn. Brain, Mind, Experience, and School*. Washington, D.C.: NATIONAL ACADEMY PRESS.
- Brousseau, G. (1986). *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques*. Recherches en didactique des mathématiques, 7(2), 33-115.
- Brown, S.I., & Walter, M.I. (1993). *Problem posing: Reflections and applications*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Bunge, M. (s.f.). *La ciencia, su método y su filosofía*. Colombia: Editorial Logos.
- Burgess, R. G. (Ed.). (1985). *Issues in Educational Research-Qualitative Methods*. Londres y Filadelfia: The Falmer Press.
- Cai, J. (1995). *Beyond the computational algorithm: Student's understanding of the arithmetic average concep*. In L. Meira & D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the 19<sup>th</sup> Psychology of Mathematics Education Conference*, (Vol. 3), (pp. 144-151). Sao Paulo, Brazil: PME Committee.
- Campiglio, A.; Eugeni, V. (1990). *Dalle dita al calcolatore*. Milán: Gruppo Editoriale Fabri; Bompiani, Sonzogno, Et as.
- Chalmers, A. F., (1987). *Qu'est-ce que la science?*. París: Éd. De la Découverte.
- Charles, R.I., Silver, E.A. (Editors). (1988). *Resear Agenda for Mathematics Education. The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving*. Vol. 3. Reston Va. Lawrence Erlbaum Associates. NCTM.
- Cobb, P. (1999). *Individual and collective mathematical development: The case of statistical data nalysis*. Mathematical Thinking and Learning 1, 5-43.
- Cobb, P., Yackel, E. & Wood, T. (1992). *Interaction and learning in mathematics classroom situations*. Educational Studies of Mathematics, 23(1), 99-122.
- Cockcroft, W.H. (1982). *Mathematics counts*. London: HMSO.
- Cohen, E.G. (1994). *Restructuring the classroom: Conditions for productive small groups*. Review of Educational Research, 64, 1-35.
- Coulibaly, M. (1987). *Les décimaux en quatrieme: Analyse des conceptions*. Memoire de DEA. Université Joseph Fourier, Grenoble 1, Laboratoire LSD2-IMAG.

- Devlin, K. (1994). *Mathematics. The Science of Patterns*. New York, NY: W. H. Freeman and Company.
- Dewdney, A.K. (1993). *200% of Nothing. From "Percentage Pumping" to "Irrational Ratios". An Eye-Opening Tour through the Twists and Turns of Math Abuse and Innumeracy*. New York: John Wiley & Sons.
- Dilthey, W. (1980). *Introducción a las ciencias del espíritu*. Madrid: Alianza Universidad.
- Doerr, H. M., & English, L. D. (2003). *A Modeling Perspective on Students' Mathematical Reasoning About Data*. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 34, No. 2, 110-136.
- Doerr, H. M.; Tinto, P. P. (2000). *Paradigms for Teacher-Centered Research*. In: Anthony E. Kelly and Richard A. Lesh. (Editors). *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Doran, M. (Ed.). (1980). *Sobre Cézanne*. Barcelona: Editorial Gustavo Gili, S. A.
- Dörfler, W. (1999). *Mathematics Provides Tools for Thinking and Communicating*. In: C. Hoyles, C. Morgan, and G. Woodhouse (Eds.). *Rethinking the Mathematics Curriculum*. Great Britain: Falmer Press & Taylor & Francis Group.
- Dunkels, A. (1989). *Análisis exploratorio de datos en las aulas de la escuela primaria: combinación de trazado de gráficas y de formación de conceptos*. En: R. Morris (Ed.), *Estudios en Educación Matemática. La enseñanza de la estadística*. Montevideo, Uruguay: UNESCO.
- English, L.; Lesh, R. (2003). *Ends-in-View Problems*. In Richard Lesh & Helen M. Doerr. (Eds.). *Beyond Constructivism. Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* Mahwah, NJ. Lawrence Erlbaum Associates.
- English, L.D. (1998). *Children's problem posing within formal and informal context*. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(1), 83-106.
- English, L.D. (2001). *Students' developments in solving data-handling ends-in-view problems*. In Robert Speiser, Carolyn A. Maher & Charles N. Walter (Eds.), *Proceedings of the Twenty-Third Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (Vol. 1), pp. 413-423. Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.
- English, L.D., & Cudmore, D. (2000). *Using extranets in fostering international communities of mathematical inquiry*. In M.J. Burke (Ed.), *Learning mathematics for a new century* (2000 NCTM Yearbook, pp. 82-95). Reston, VA: NCTM.
- Feldman, A.; Minstrell, J. (2000). *Action Research as a Research Methodology for the Study of the Teaching and Learning of Science*. In: Anthony E. Kelly and Richard A. Lesh. (Editors). *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Forman, E. (1989). *The role of peer interaction in the social construction of mathematical knowledge?*. *International Journal of Educational Research* 13, 55-70.
- Fréchet, M. (1985). *Las Matemáticas y lo Concreto*. México: UNAM.
- Gadamer, H. G. (1977). *Verdad y método*. Salamanca: Sígueme.
- Goldenberg, E.P. (1996). *"Habits of mind" as an organizer for the curriculum*. *Boston University Journal of Education*, 178(1), 13-34.
- Good, T.L., Mulryan, C. & McCaslin, M. (1992). *Grouping for Instruction in Mathematics: A Call for Programmatic Research on Small-Group Processes*. In Douglas A. Grouws (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 165-196). New York: MacMillan Pu. Co.
- Goodchild, S. (1988). *School pupils' understanding of average*. *Teaching Statistics*, 10, 77-81.
- Goos, M., Galbraith, P. (1996). *Do it this Way! Metacognitive Strategies in Collaborative Mathematical Problem Solving*. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 30, pp. 229-260.
- Goos, M., Galbraith, P., Renshaw, P. (2002). *Socially Mediated Metacognition: Creating Collaborative Zones of Proximal Development in Small Group Problem Solving*. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 49, pp. 193-223.
- Greenfield, P. M., Bruner, J. S. (1966). *"Cultura and Cognitive Growth"*. *International Journal Of Psychology*. Vol. 1, n.º 2, 89-107.)
- Grevsmühl, U. (1991). *Children's verbal communication in problem solving activities*. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the Fifteenth PME Conference* (Vol. 2), pp. 88-95. Dipartimento di Matematica dell'Università di Genova.
- Grisvard, C., & Leonard, F. (1983) *Comparaison de nombres décimaux*. *Bulletin de l'APMEP* No. 340, September 1983, pp. 450-459.
- Grouws, D. A. (Ed.). (1992). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. USA: Macmillan Publishing Company.

- Gummer, E. & Duncan, H. (2001). *Multiple embodiments in model-eliciting activities*. In Robert Speiser, Carolyn A. Maher & Charles N. Walter (Eds.), *Proceedings of the Twenty-Third Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (Vol. 1), pp. 569-570. Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.
- Habermas, J. (1977). *Conocimiento e interés*. En H. Seiffert (Editor). *Introducción a la teoría de la ciencia*. Barcelona: Herder.
- Hardiman, P. T., Well, A. D., & Pollatsek, A. (1984). *Usefulness of a balance model in understanding the mean*. *Journal of Educational Psychology*, 76(5), 792-801.
- Hayes, J. (1981). *The Complete Problem Solver*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Heller, P. M.; Post, T. R.; Behr, M and Lesh, R. (1990). *Qualitative and Numerical Reasoning About Fractions and Rates by Seventh and Eighth-Grades Students*. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 21, No. 5, 388-402.
- Hiebert, J., Carpenter, T.P., Fennema, E., Fuson, K., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A. & Human, P. (1997). *Making Sense: Teaching and Learning Mathematics with Understanding*, Heinemann, Portsmouth, NH.
- Hjalmarson, M. (2001). *A Modeling Perspective on Metacognition in Everyday Problem-Solving Situations*. In Robert Speiser, Carolyn A. Maher & Charles N. Walter (Eds.), *Proceedings of the Twenty-Third Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (Vol. 1), pp. 177-186. Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.
- Hoyles, C., Healy, L. & Possi, S. (1993). *Telling a story about computers, groups and learning mathematics*. Paper presented at the ESRC InterSeminar, Collaborative Learning. Oxford.
- Hurwicz, L., (1968). *Game Theory and Decisions*. In: *Mathematical Thinking in Behavioral Science*. With Introduction by David M. Messick. EE. UU.: W. H. Freeman and Company.
- Jacobs, H. R. (1970). *Mathematics. A Human Endeavor*. San Francisco: W. H. Freeman and Company.
- Joint Committee on Standards for Educational Evaluation, (1981). *Standards for evaluations of educational programs, projects, and materials*. New York: McGraw-Hill.
- Jay, A. (1967). *Management and Machiavelli*. New York: Holt, Rinehart & Winston, Inc.
- Jurguín, Y.. (1973). *Bueno, ¿Y qué...?*. Moscú: Mir.
- Kast, F. E. y Rosenweing, J. E. (1979). *Administración en las organizaciones: un enfoque de sistemas*. México: McGraw-Hill.
- Kelly, A. E.; Lesh, R. A. (2000). *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Kilpatrick, J. (1992). *A History of Research in Mathematics Education*. In: Douglas A. Grouws, (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. USA: Macmillan Publishing Company.
- Kilpatrick, J. (2001). *Understanding mathematical literacy: The contribution of research*. *Educational Studies in Mathematics*. 47, pp. 101-116.
- Koellner, K.A. & Lesh, R.. (1999). *Using modeling eliciting problems to examine students' understanding of early functional reasoning*. In Fernando Hitt & Manuel Santos (Eds.), *Proceedings of the Twenty-First Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (Vol.2), pp. 593-598). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.
- Koestler, A. (1959). *The Sleepwalkers. A history of man's changing vision of the Universe*. London: Hutchinson & Co., Ltd.
- Kramarski, B., Mevarech, Z.R., Arami, M. (2002). *The effects of metacognitive instruction on solving mathematical authentic tasks*. *Educational Studies in Mathematics*. vol. 49: pp. 225-250.
- Krulik, S., Reys, R.E. (Eds.). (1980). *Problem Solving in School Mathematics*. 1980 Yearbook. Reston Va. NCTM.
- Laborde, C. (1994). *Working in small groups: A learning situation?*. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Sträßer and B. Winkelmann (Eds.). *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp. 147-158). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Lehrer, R. and Romberg, T. (1996). *'Exploren children's data modeling'*. *Cognition and Instruction*, 14, 69-108.
- Leikin, R., Zaslavsky, O. (1997). *Facilitating Student Interactions in Mathematics in a Cooperative Learning Setting*. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 28, No. 3. pp. 331-354.
- Lembke, L. O. and Reys, B. J. (1994). *The Development of, and Interaction Between, Intuitive and School-Taught Ideas About Percent*. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 25, No. 3, 237-259.
- Leon, M. R., & Zawojewski, J. S. (1991). *Use of the arithmetic mean: An investigation of four properties issues and preliminary results*. In D. Vere-Jones (Ed.), *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics: Vol. 1. School and general issues*, (pp. 302-306). Voorburg: International Statistical Institute.

- Lesh, R. & Carmona, G. (2003). *Piagetian Conceptual Systems and Models for Mathematizing Everyday Experiences*. In: R. Lesh, H. Doerr, (Eds.). *Beyond Constructivism. Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and teaching*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Lesh, R. and Doerr, H. M. (Eds.). (2003a). *Beyond Constructivism. Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Lesh, R. & Doerr, H. (2003b). *Foundations of a Models and Modeling Perspective on Mathematics Teaching, Learning, and Problem Solving*. In: R. Lesh, H. Doerr, (Eds.). *Beyond Constructivism. Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and teaching*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Lesh, R. and Lamon, S. J. (1992). *Assessing Authentic Mathematical Performance*. In R. Lesh, S. J. Lamon (Eds.), *Assessment of Authentic Performance in School Mathematics*, (pp. 17- 62). Washington, DC. American Association for the Advancement of Sciences.
- Lesh, R., & Doerr, H. M. (2000). *Symbolizing, communicating, and mathematizing: Key components of models and modeling*. In P. Cobb, E. Yackel, & K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms* (pp. 361-383). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Lesh, R., Cramer, K., Doerr, H. M., Post, T. & Zawojewski, J. S. (2003). *Model Development Sequences*. In: R. Lesh, H. Doerr, (Eds.). *Beyond Constructivism. Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and teaching*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Lester, F. K. JR. 1994. *Musings about Mathematical Problem-Solving Research: 1970-1994*. *Journal for Research in Mathematics Education*, **25**, No. 6, (pp. 660-675).
- Lester, F.K. (1980). *Research on Mathematical Problem Solving*. In Richard J. Shumway (Ed.). *Research in Mathematics Education*. Reston Va. NCTM.
- Lester, F.K., Kehle, P.E. (2003). *From Problem Solving to Modeling: The Evolution of Thinking About Research on Complex Mathematical Activity*. In Richard Lesh & Helen M. Doerr. (Eds.). *Beyond Constructivism. Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* Mahwah, NJ. Lawrence Erlbaum Associates.
- Lincoln, Y. S. & Guba, E. G. (1985). *Naturalistic inquiry*. Beverly Hills CA: Sage.
- Lucas, W. F., (1991). *Social Choice and Decision Making*. In: COMAP, *For All Practical Purposes: Introduction to Contemporary Mathematics*. Second Edition. New York, NY: W. H. Freeman.
- Madaus, G., Scriven, M. & Stufflebeam, D. (1983). *Evaluation models*. Boston: Kluwer-Nijhoff.
- Mardones, J. M. y Ursúa, N. (Editores). (1982). *Filosofía de las ciencias humanas y sociales. Materiales para una fundamentación científica*. Barcelona: Fontamara.
- Margolinas, C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux en mathématiques*. Grenoble: La Pensée suavage.
- Márquez, Diez-Canedo J. (1993). *La investigación de operaciones en la administración. Descripción de un paradigma para ayudar en el proceso decisional, ilustrado con una aplicación al problema de inversiones*. En: *Matemáticas y Ciencias Sociales*. Ignacio Méndez Ramírez y Pablo González Casanova, (Eds.). México: UNAM-Porrúa.
- Mason, J., Burton, L. & Stacy, K. (1982). *Thinking mathematically*. New York: Addison Wesley.
- Mathematical Sciences Education Board. (1998). *High School Mathematics at Work*. Essays and Examples For the Education of all Students. Washington, D. C. National Academic Pres
- McClain, K. (2001). *The role of task-analysis cycles in supporting students' mathematical development*. In Robert Speiser, Carolyn A. Maher & Charles N. Walter (Eds.), *Proceedings of the Twenty-Third Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (Vol. 1), pp. 255-261. Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.
- Meloy, J. M. (1994). *Writing the Qualitative Dissertation. Understanding by Doing*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Middleton, J. A., Lesh, R. & Heger, M. (2003). *Interest, Identity, and Social Functioning: Central Features of Modeling Activity*. In Richard Lesh & Helen M. Doerr. (Eds.). *Beyond Constructivism. Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* Mahwah, NJ. Lawrence Erlbaum Associates.
- Miles, M. B.; Huberman, A. M. (1994). *Qualitative Data Analysis*. (2<sup>nd</sup> ed.) USA: SAGE Publications, Inc.
- Miller, Ch. D. And Heeren, V. E. (1973). *Mathematics Ideas An Introduction*. Glenview, Illinois: Scott, Foresman and Company.
- Mills, F. C. (1955). *Statistical Methods ...* Third Edition. EEUU: Holt, Rinehart and Winston.
- Mokros, J., & Russell, S. J. (1995). *Children's concepts of average and representativeness*. *Journal for Research in mathematics education*, 26(1), 20-39.



- Moore, D. S. (1990). *Uncertainty*. In: Steen, L. A. (Ed.). (1994). *On the Shoulders of Giants. New approaches to Numeracy*. Third Printing. Washington, D. C.: National Academy Press.
- Moore, D. S. (1991). Part II. Statistics: *The Science of Data*. In: L. A Steen, (Coordinating editor), *For All Practical Purposes: Introduction to Contemporary Mathematics*. Second Edition. New York, NY: W. H. Freeman.
- Moschkovich, J. N.; Brenner, M. E. (2000). *Integrating a Naturalistic Paradigm Into Research on Mathematics and Science Cognition and Learning*. In: Anthony E. Kelly and Richard A. Lesh. (Editors). *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Mugny, G. (1985). *Psychologie sociale du développement cognitif*. Bern: Lang.
- NCTM, (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Va.: NCTM.
- Neurath, O. (1973). *Fundamentos de las ciencias sociales*. Madrid: Taller, edit.
- Noddings, N. (1989). *Theoretical and practical concerns about small groups in mathematics*. *Elementary School Journal*, 89, 607-623.
- Nunn, Ch. (2005). *De la Mettrie's Ghost. The Story of Decisions*. N. Y.: Macmillan.
- O'Donoghue, J. (1995). *Numeracy and further education: beyond the millennium*. *INT. J. MATH. EDUC. SCI. TECHNOL.*, vol. 26, no. 3, 389-405.
- Paul, R., Binker, A. J. A., Martin, D. & Adamson, K. (1989), *Critical Thinking: High School. A Guide for Redesigning Instruction*, Sonoma State University, Center for Critical Thinking and Moral Critique, Rohnert Park, California, pp. 265-266.
- Paulos, J.A. (1988). *Innumeracy: Mathematical Illiteracy and its Consequences*. New York, NY: Vintage Books.
- Pollatsek, A., Lima, S., & Well, A. D. (1981). *Concept o computation: Students' understanding of the mean*. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 191-204.
- Quezada, S. A. (Ed.). (2000). *El Almanaque Mexicano. Un compendio exhaustivo sobre México en un lenguaje accesible y claro*. México: Hechos Confiables, S. A. de C. V., Editorial Grijalbo, S. A. de C. V. (Grijalbo-Mondadori) y Comunicación e Información, S. A. de C. V. (Proceso).
- Real Academia Española. (2001). *Diccionario de la Lengua Española*. España: Espasa Calpe, S. A.
- Reys, B. (1988). "Estimation". In *Teaching Mathematics in Grades k-8. Research - Based Methods*. Edited by Thomas R. Post. Massachusetts: Allyn and Bacon.
- Robert, A. & Tenaud, I. (1989). *Une expérience d'enseignement de la géométrie en Terminale C*. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(1), 31-70.
- Romberg, T. A. (1992). *Perspectives on Scholarship and Research Methods*. In: Douglas A. Grouws, (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. USA: Macmillan Publishing Company.
- Sánchez, E. y Santos, M. (Editores). (1994). *Perspectivas en Educación Matemática. México: Departamento de Matemática Educativa*. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN.
- Santos Trigo, Luz Manuel. (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Santos, M. (2000b). *The Use of Representations as a Vehicle to Promote Students' Mathematical Thinking in Problem Solving*. *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*. 7. No. 3. pp. 193-212.
- Santos-Trigo, M. (1998a). *On Implementation of Mathematical Problem Solving Instruction: Qualities of Some Learning Activities*. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education*. III. 71-80. Conference Board of the Mathematical Sciences. Washington, D. C. : American Mathematical Society.
- Santos-Trigo, M. (1998b). *Can Routine Problems be Transformed into Non-routine Problems?*. *Teaching Mathematics and its Applications*, 17, No.3. pp. 132-135.
- Santos-Trigo, M. (1998c). *Instructional qualities of a successful mathematical problem-solving class\**. *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.* 29. no. 5. pp. 631-646.
- Santos-Trigo, M. (2000a). *Enhancing Students' Mathematical Thinking Through the Use of Qualitative Tasks*. *L'educazione Matematica*. 2. N. 2. pp. 78-101.
- Santos-Trigo, M. (2002). Comunicación personal.
- Santos-Trigo, M.; Mojica, D. B. (2003). *Herramientas tecnológicas en el desarrollo de sistemas de representación para la resolución de problemas\**. *Perfiles Educativos*. Tercera Época. Vol. XXV. No. 100. pp. 23-
- Schoenfeld, A. H. (1985) *Mathematical problem solving*. New York, NY: Academic Press.
- Schoenfeld, A. H., (1992). *Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics*. In Douglas. A. Grouws (De.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* .. (pp. 334-370). New York: MacM illan Pu. Co.

- Schroeder, T.L., & Lester, F.K., Jr. (1989). *Developing understanding in mathematics via problem solving*. In P.R: Trafton (De.). *New directions for elementary school mathematics, 1989 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 31-42). Reston, VA: NCTM.
- Schutz, A. (1974). *El problema de la realidad social*. Buenos Aires: Amorrortu.
- Schwanitz, D. A. (2004). *La Cultura. Todo lo que Hay que Saber*. México: Taurus.
- Schwartz, R.H. 1991. *Mathematics and Global Survival*. Needham Heights, MA: Ginn Press.
- Shaughnessy, J. M. (1992). *Research on probability and statistics: Reflections and directions*. In D. Grows (Ed.), *Handbook of Research on the Teaching and Learning of Mathematics*, Macmillan, New York, pp. 465-494.
- Shaughnessy, J. M., Garfield, J., & Greer, B. (1996b). *Data handling*. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, and C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education, Part I*, pp. 205-237. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Shaughnessy, J.M., Garfield, J., & Greer, B. (1996a). *Data handling in the media*. In I. Gal & J.B.Garfield, (Eds.). *The assessment challenge in Statistics education* (pp. 107-121). Amsterdam, The Netherlands: IOS Press.
- Shulman, L. S. (1986). *Paradigms and Programs of Investigation in the Study of the Teaching*. In: Merlin C. Wittrock, (Ed.). *Handbook of Research on Teaching*. New York: Macmillan Publishing Company.
- Shumway, R. J. (Ed.). (1980). *Research in Mathematics Education*. USA: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).
- Sierpinska, A.; Kilpatrick, J. (Editors). (1998). *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity. An ICMI Study*. (Two Volumens). Great Britain: Kluwer Academic Publishers.
- Silver, E.A. (Eds.). (1985). *Taching and Learning Mathematical Problem Solving. Multiple Research Perspectives*. Hillsdale, NJ. Lawrence Erlbaum Associates.
- Silver, E.A., Mamona-Downs, J., Leung, S.S. & Kenny, P.A. (1996). *Posing mathematical problems: An exploratory study*. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(3), 293-309.
- Simon, H. A. (1960). *The New Science of Menagement Decisión*. New York: Harper & Row, Publishers, Incorporated.
- Slavin, R. (1989-1990). *Research on cooperative learning: Consensus and controversy*. *Educational Leadership*, 47, 52-54.
- Slavin, R. (Ed.). (1989b). *School and classroom organization*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Slaving, R. (1989a). *Cooperative learning and student achievement*. In R. Slavin (Ed.), *School and classroom organization*. (pp. 129-156). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Smirnov, A. A., Rubinstein, S. L., Leontiev, A. N. y Tieplov, B. M. (1991). *Psicología*. México: Grijalvo.
- Sowder, J. (1992). *"Estimation and Number Sense"*. In *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* . Edited by Douglas. A. Grouws. (pp. 371-389). New York: MacMillan Pu. Co.
- Steen, L. A. (1990). *On the Shoulders of Giants: New Approaches to Numeracy*. L.S. Steen (Ed.). Washington, DC: National Academic Press.
- Stegmüller, W. (1982). *El llamado método Verstehen*. En: En: J. M. Mardones y N. Ursúa, (Editores). *Filosofía de las ciencias humanas y sociales. Materiales para una fundamentación científica*. Barcelona: Fontamara.
- Strauss, S., & Bichler, E. (1988). *The development of children's concept of the arithmetic average*. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19, 64-80.
- Stufflebeam, D. L. y Shinkfield, A. J. (1985). *Systematic evaluation*. Dordrecht/Boston: Kluwer-Nijhoff Publishing.
- Talízina, N. (1988). *Psicología de la enseñanza*. Moscú: Editorial Progreso.
- Taylor, S. J., & Bogdan, R. (1984). *Introduction to qualitative research methods: The search for meanings* (2<sup>nd</sup> ed.). New York: Wiley.
- Tobin, K. (2000). *Interpretative Research in Science Education*. In: Anthony E. Kelly and Richard A. Lesh. (Editors). *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Tukey, J. (1977). *Exploratory Data Analysis*. Reading, MA.:Addison-Wesley.
- van Oers, B. (2000). *The Appropriation of mathematical Symbols: A Psychosemiotic Approach to Mathematics Learning*. In P. Cobb, E. Yackel, & K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Vygotsky, L. (1985). *Pensée et langage* (Seve, F., Trans.). Paris: Editions Sociales.
- Vygotsky, L.S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Wagemann, E. (1958). *El número, detective*. México: Fondo de Cultura Económica.
- Watson, J. M. (1997). *'Assessing statistical literacy using the media'*, in: Gal I., and Garfield, J. B. (eds.), *The Assessment Challenge in Statistics Education*, Amsterdam, IOS Press and The International Statistical Institute, pp. 107-121.

- Watson, J. M. (1998). *The Role of Statistical Literacy in decisions about Risk: Where to Start*. For the Learning of Mathematics, **18**, 3.
- Watson, J. M., & Moritz, J. B. (1999a). *The Development of Concepts of Average*. Focus on Learning Problems in Mathematics, (21) 4. pp. 15-39.
- Watson, J. M., & Moritz, J. B. (1999b). *The longitudinal development of understanding of average*. Mathematical Thinking and Learning, 2(1&2), 11-50.
- Watson, J. M., Collins, K. F. And Moritz, J. B. (1997). *'The development of chance measurement'*. Mathematics Education Research Journal **9**(1), 60-82.
- Weaver, W. (1952). *Statistics*. In: M. Kline (Ed.), *Mathematics: An Introduction to its Spirit and Use*. San Francisco: W. H. Freeman and Company.
- Weaver, W. (1964). *Lady Luck. The theory of probability*. London: Heinemann.
- Weber, M. (1969). *Economía y sociedad. Esbozo de sociología comprensiva*. México: F. C. E.
- Wells, H. G. (1914). *Making in the Making*. London: Chapman & Hall.
- Wickelgren, W. A. (1974). *How to Solve Problems. Elements of a Theory of Problems and Problem Solving*. USA: W. H. Freeman and Company.
- Williams, S. (2005). *Decisions, Decisions*. Journal for Research in Mathematics Education, 36, 282-283.
- Willoughby, S. S. (1968). *Probability and Statistics*. EEUU: Silver Burdett Company.
- Wittrock, M. C. (Ed.). (1986). *Handbook of Research on Teaching*. New York: Macmillan Publishing Company.
- Wragg, E. C. (1994). *An introduction to classroom observation*. London: Routledge.
- Yackel, E. (1991. ). *The role of peer questioning during class discussion in second grade mathematics*. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the Fifteenth PME Conference (Vol. 3)*, pp. 364-371. Dipartimento di Matematica dell'Universita di Genova.
- Yackel, E. (2000). *Introduction: Perspectives on Semiotics and Instructional Design*. In P. Cobb, E. Yackel, & K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Zawojewski, J.S. & Lesh, R. (2003). *A Models and Modeling Perspective on Problem Solving*. In Richard Lesh & Helen M. Doerr. (Eds.). *Beyond Constructivism. Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* Mahwah, NJ. Lawrence Erlbaum Associates.
- Zawojewski, J.S., Lesh, R., & English, , L. (2003). *A Models and Modeling Perspective on the Role of Small Group Learning Activities*. In Richard Lesh & Helen M. Doerr. (Eds.). *Beyond Constructivism. Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* Mahwah, NJ. Lawrence Erlbaum Associates.

# **ANEXO**

**PROBLEMAS UTILIZADOS EN LA EXPERIENCIA Y FORMATO EN DONDE LOS ALUMNOS REGISTRARON LA SOLUCIÓN A LOS PROBLEMAS**

---

**COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES**  
**PLANTEL SUR**  
**RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**






---

*Problema*






*Los críticos de cine y las películas*

La hoja anexa a la presente, consiste de tres tablas en donde diferentes críticos de cine evalúan (califican) diferentes películas. Tomando en consideración estas tablas:

- ¿Quién es el crítico más “exigente”?
- ¿Quién es el crítico menos “exigente”?
- ¿Cuál es la “mejor” película?
- ¿Cuál es la “peor” película?
- Hagan un listado de críticos ordenados de más “exigente” a “menos” exigente.
- Hagan un listado de películas ordenadas de “mejor” a “peor”.
- ¿Cómo decidieron quiénes eran los críticos más “exigentes” y menos “exigentes”?
- ¿Cómo decidieron cuáles eran la “mejor” y “peor” película?


		Andrés de Luna ¡Por Fin!	José Xavier Nívar Época	Jorge Ayala Blanco El Financiero	Nelson Carro Tiempo Libre	Óscar Uriel 24x segundo	Mario P. Székely EsMas.Com	Eduardo Scheffler Cine Premiere
Hombreros de negro		6	8	6	5	6	7	8
Episodio II: El ataque de los clones		7	8	6	6	8	9	8
Iris - Recuerdos imborrables		9	8	8	7	7	8	7
Lilo y Stitch		8	8	8	7	8	9	8

### LOS EXPERTOS OPINAN

		Gustavo García Radio Red	Nelson Carro Tiempo Libre	Mario P. Skely EsMas.Com	Jorge Ayala Blanco El Financiero	Andrés de Luna ¡Por Fin!
Mejor que el sexo		6	7	9	6	7
La reina de los condenados		5	5	7	6	6
El asalto		8	7	8	7	8
Tiro penal		7	5	8	6	8

\* El crítico se reserva su opinión

### LOS EXPERTOS OPINAN

		Mario P. Székely EsMas.Com	Andrés de Luna ¡Por Fin!	Gustavo García Radio RED	Rafael Aviña Primera Fila	Jorge Ayala Blanco El Financiero	Nelson Carro Tiempo Libre	José Xavier Nívar Época	Óscar Uriel 24x segundo
Nunca más		7	5	7	5	6	5	7	5
Un gran chico		9	9	8	9	7	6	8	9
¡Oye Arnold!		6	7	6	9	6	6	7	6
Frio de perros		6	5	6	6	6	5	7	6

\* El crítico se reserva su opinión

---

## COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

### PLANTEL SUR

### RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

---

#### *Problema*

#### *La familia Zapata cambia de lugar de residencia*

Por razones de trabajo, la familia Zapata, formada de los papás, una hija de 16 años y un niño de 11 años, necesita cambiar de lugar de residencia. Las opciones que les da la empresa en donde trabajan los padres son las siguientes ciudades: Aguascalientes, Tijuana, Ciudad Juárez, Saltillo, Distrito Federal, León, Guadalajara, Morelia, Monterrey, Puebla y Cancún. Actualmente, la familia Zapata vive en la Zona conurbada (Zona limítrofe entre el estado de México y el Distrito Federal). Los Zapata, preocupados principalmente por sus hijos, preferirían establecerse en un lugar “tranquilo”. Para auxiliarse en su selección, se consiguieron la tabla que aparece a continuación, en donde aparecen los principales problemas que registran las ciudades (según sus habitantes) que tienen a su disposición.

#### LOS PRINCIPALES PROBLEMAS PARA HABITANTES DE 12 CIUDADES.

CIUDAD	POBREZA	INSEGURIDAD	DESEMPLEO	DELINCUENCIA	VIOLENCIA	SERVICIOS PÚBLICOS	DROGADICCIÓN	CONTAMINACIÓN
Aguascalientes	8	29	38	10	2	4	7	3
Tijuana	16	29	6	21	10	4	11	2
Ciudad Juárez	15	22	3	18	18	2	21	1
Saltillo	5	29	5	18	13	7	22	1
Distrito Federal	12	32	10	27	8	6	4	1
Zona conurbada	12	20	10	24	10	6	13	3
León	17	12		19	10	4	21	1
Guadalajara	18	34	16	15	9	2	5	5
Morelia	18	21	12	20	12	2	9	2
Monterrey	18	29	18	16	8	7	9	5
Puebla	20	24	9	18	6	11	5	5
Cancún	20	26	10	17	2	19	10	1

(Cada porcentaje corresponde a una ciudad y un problema. El número indica el porcentaje de habitantes que considera que tal problema es el más importante. Así, por ejemplo, para el 8% de los habitantes de Aguascalientes, el principal problema es la pobreza)

Fuente: Fundación Rosenblueth, 2000.

¡Ayúdenlos señalándoles las tres mejores opciones! Escribanles una carta a los Zapata en donde les expliquen detalladamente cómo y por qué escogieron las ciudades que sugieran, ilustrándoles su propuesta por medio de tablas, gráficas o diagramas, pero con razones suficientes para que ellos puedan escoger la mejor opción.

---

**COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES**  
**PLANTEL SUR**  
**RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**

---

*Problema*

**La niñera de *Karem*...una niña  
rubia y traviesa**

La Sra. Elizabeth y su esposo de 28 años de edad, necesitan una persona que cuide y atienda, por las mañanas, a su pequeña Karem que tiene 2 años de edad, es rubia y muy traviesa. La Agencia de Colocaciones “*El Mejor Trabajador*” le ofrece cuatro candidatos con algunas características que se presentan en la siguiente tabla

Persona	Edad (años)	Estudios	Experiencia (años)	Disponibilidad de tiempo	Estado Civil	Presentación	Puntualidad
Alicia	30	Bach.	3	SPH	Casada	E	MB
Betty	20	C. Técnica	1	SPH	Casada	E	E
Carolina	24	Enfermería	2	SPH	Soltera	MB	MB
Dorotea	45	Secretaria	1	Mañanas	Separada	E	R

En donde: Bach.: Bachillerato; C. Técnica: Carrera Técnica. SPH: Sin Problema de Horario. E: Excelente; MB: Muy Bien; R: Regular.

¡Ayúdenlos a elegir!. Envíenles una carta en donde les sugieran cual es, desde su punto de vista, el mejor candidato. Proporcionen suficientes razones que puedan convencerlos de su propuesta.



---

**COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES**  
**PLANTEL SUR**  
**RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**

---

***Problema***

***Gladiadores de Neza vs. Romanos de la Roma***

Faltan 20 minutos para que se termine el partido de fútbol entre los ***Gladiadores de Neza*** contra los ***Romanos de la Roma*** que definirá a uno de los finalistas. Están empatados a un gol y los ***Romanos*** han estado dominando los últimos 15 minutos. El entrenador de los ***Gladiadores*** ha decidido hacer dos cambios. Según él, los mejores candidatos que tiene son los cuatro jugadores que aparecen en la siguiente tabla, junto con algunas de sus características.

<b>Juan:</b>	<b>Walter:</b>	<b>Rafael</b>	<b>José Juan:</b>
<ul style="list-style-type: none"><li>• No jugó los dos últimos partidos.</li><li>• Su promedio de goleo es .22</li><li>• Su condición física es excelente</li><li>• Tiene espíritu de grupo</li><li>• Es un jugador rápido</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Es uno de los rematadores del equipo.</li><li>• Es individualista</li><li>• Su promedio de goleo es .30</li><li>• Tuvo un ligero golpe en el pie derecho en el último partido</li><li>• Su estatura es de 1.82 metros</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Su estatura es de 1.80 metros</li><li>• Es apreciado por sus compañeros</li><li>• El último partido anotó un gol</li><li>• Su promedio de goleo es de .4</li><li>• No es muy rápido</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Es delantero del equipo</li><li>• Su promedio de goleo .29</li><li>• En el último partido lo expulsaron</li><li>• Es un jugador rápido</li><li>• En la temporada no anotó un penalty</li></ul>

Si ustedes fueran ayudantes del entrenador, ¿a quiénes propondrían? ¿Por qué? Expliquen detalladamente su respuesta.

---

**COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES**  
**PLANTEL SUR**  
**RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**

---

***Problema***

**La calificación de las licuadoras**

La tabla que aparece a continuación corresponde a la evaluación (calificación) que hace la PROFECO (Procuraduría Federal del consumidor) a distintas licuadoras de alta potencia

Licuadora	Prueba de licuado	Prueba de molido	Ruido generado	Facilidad de operación	Seguridad	Calificación global de calidad
1	B	E	Medio	B	E	
2	B	B	Bajo	B	E	
3	E	E	Bajo	B	E	
4	B	B	Medio	B	E	
5	B	E	Bajo	B	B	
6	E	E	Medio	B	E	
7	E	B	Medio	B	E	
8	R	E	Bajo	B	B	

En donde: E: Excelente; B: Bueno; R: Regular y D: Deficiente.

Para la Prueba de licuado, Prueba de molido, Ruido generado, Facilidad de operación y Seguridad, la calificación puede ser E (Excelente), B (Bueno), R (Regular) y D (Deficiente). ¿Qué Calificación Global de Desarrollo -en forma numérica- le asignarían a cada una de las licuadoras? Expliquen detalladamente cómo asignan la calificación numérica.

---

**COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES**  
**PLANTEL SUR**  
**RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**

---

*Problema*

***La compra de zapatos deportivos***

El texto anexo a la presente hoja, propone algunos aspectos que se pueden considerar al momento de comprar zapatos para hacer deporte. Utilizando el texto:

- Escriban una lista de los aspectos, cualidades o características, que de acuerdo al texto, deben tener los zapatos para hacer deporte.
  
- Utilizando la lista que formaron, ¿Qué cualidades son más importantes? ¿Cuáles son menos importantes? ¿Qué aspectos tienen más “peso”? ¿Qué aspectos tienen menos “peso”? ¿Hay otras características que no aparecen pero que se deben tener en cuenta? ¿En qué orden de importancia, de acuerdo a su equipo, consideran que se deben tomar en cuenta? *Asígnenles un “peso” a cada aspecto* y expliquen claramente las razones que tuvieron para hacerlo en la forma en que lo hicieron.

## ■ HAY QUE ELEGIR CON LOS PIES NO CON LA VISTA

# El calzado deportivo permite evitar lesiones y obtener un mayor rendimiento

IVONNE VARGAS

Nos transportan de un lugar a otro, soportan nuestro peso durante gran parte del día, y aún así, los pies son una de las partes de nuestro cuerpo a las que menos atención prestamos, inclusive al realizar ejercicio. El calzado deportivo es una herramienta fundamental para cualquier actividad física, pues ayuda a evitar las lesiones por sobrecarga y a obtener un mayor rendimiento.

La función de este tipo de zapatos no es potenciar las características naturales de nuestros pies, sino tener la capacidad de proteger y amortiguar las estructuras del mismo. Por ello, entre las principales características que debe reunir, están la de proteger el pie; tener una buena base anatómica para adaptarse a cada plantilla individual; efecto amortiguador entre el pie y el suelo (en especial el talón), ser transpirables, flexibles, ligeros, cómodos y resistentes.

Sea como actividad recreativa, o a nivel profesional, al realizar un deporte debes contar con el calzado idóneo, y más allá de elegir con la vista, asegúrate que proteja tus pies y te brinde mayor rendimiento. En el mercado existen diversos modelos con lo más reciente en tecnología, por ejemplo, Clima Cool, la nueva creación de Adidas que incorpora una especie de malla con pequeños respiraderos redondos para hacer que el aire circule por el calzado, aumentando el flujo del mismo en proporción a la intensidad y dependiendo de la velocidad y la fuerza ejercida por el deportista.

El sistema de ventilación con que cuenta - llamado 360° - permite tener los pies más frescos y secos, por lo que disminuye la posibilidad de que se formen ampollas, al tiempo que ofrece mayor comodidad.

Fabricar este tipo de calzado implica el uso de tecnologías como el "Climatester", es decir, una máquina cuyos sensores están conectados al atleta y transmiten

los datos directamente a un ordenador para medir la temperatura y el grado de humedad del atleta durante la actividad deportiva. Después se utiliza una cámara de rayos infrarrojos para identificar las áreas del pie que resultan más afectadas por los cambios de temperatura y la acumulación de calor. La colección reúne modelos para carrera, tenis, baloncesto y entrenamiento; las dos primeras están disponibles tanto para mujeres como para hombres.

### El paso ideal

A la hora de elegir un calzado es recomendable adquirirlo después de haber caminado, de esta manera, los pies estén en las mismas condiciones que después de haber realizado una marcha corta. Además, es conveniente probarlo con el mismo calcetín que se vaya a utilizar en la práctica deportiva, fijarse si el talón está bien calzado y los dedos se puedan mover libremente.

---

**COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES**  
**PLANTEL SUR**  
**RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**

---

## La elección de carrera

Alan es un estudiante que tiene 18 años de edad y está iniciando el último año de bachillerato. Alan está bastante confundido en cuanto qué carrera elegirá dentro de algunos meses. ¡Ayúdenlo, por favor! Escribanle una carta en donde le recomienden los aspectos que deberá considerar, la importancia que cada uno de ellos tiene, el mayor o menor peso que podrían tener unos con respecto a otros. Para que el pueda entender bien sus sugerencias, ya que ha sido un buen estudiante de matemáticas, pónganles sus recomendaciones en forma matemática, señalando que peso tiene cada una de las consideraciones que proponen para la correcta elección de su futura carrera. Explíquense con cuidado por qué valoran así lo que sugieren.

---

**COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES**  
PLANTEL SUR  
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

---

*Problema*

*El salón de clases*

El Sr. Judas Fox, Director de la escuela “El Patito Feo”, piensa que sería bueno contar con un procedimiento que le permita evaluar, de manera fácil y periódicamente, el estado en que se encuentran los salones de clase de su escuela. Escribanle una carta en donde le propongan cómo llevar a cabo este procedimiento: qué aspectos hay que tomar en cuenta y cómo se podría calificar cada uno de ellos, así como el peso que tendría cada uno de ellos dentro de algo que se llamaría *Calificación del Estado Global del Salón*. La carta debe contener los argumentos necesarios y suficientes que convencan al Sr. Director de su propuesta.

---

**COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES**  
**PLANTEL SUR**  
**RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**

---

*Problema*

La película *Titanic* se saca un ...

El Sr. Juan desea saber acerca de la calidad de la película *Titanic*. Por favor, escribanle una carta, en donde le expliquen detalladamente su opinión acerca de la película: sus aspectos valiosos, sus características importantes, sus cualidades, sus defectos, y como resultado de todo esto, asígnenle una calificación a la película, explicando claramente el procedimiento que siguieron para otorgar la calificación, los elementos que consideraron y qué peso o valor les dieron a cada uno de ellos.

---

**COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES**  
**PLANTEL SUR**  
**RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**

---

**RESOLUCIÓN**

**Instrucciones para escribir la resolución de los problemas. Por favor:**

1. Explica lo más detalladamente que te sea posible el procedimiento que seguiste para resolver los problemas.
2. Escribe con bolígrafo. Si te equivocas, no importa, sólo encierra con una línea lo que consideres que no sirve.

**Fecha** \_\_\_\_\_ **Integrantes del equipo** \_\_\_\_\_

---