UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

SECRETARÍA ACADÉMICA
CONSEJO DE POSGRADO
DIRECCIÓN DE INVESTIGACIÓN
DOCTORADO EN EDUCACIÓN

La transposición del “saber didáctico”. Un estudio con profesores en formación en el contexto de los números racionales.

Tesis que para obtener el grado de

Doctor en Educación

Presenta

LUIS MANUEL AGUAYO RENDÓN

Directora de Tesis: DRA. ALICIA ÁVILA STORER

México, D.F. Junio del 2005

ÍNDICE

A la Dra. Alicia Ávila
por su dirección firme pero tersa,
por la confianza, por la amistad.

Este trabajo es producto de múltiples voluntades, de la suma de esfuerzos de muchas personas.

Los formadores y los estudiantes que nos permitieron observar la intimidad der sus aulas, sin ello no hubiese sido posible este estudio.

Los doctores Marie-Lise Peltier, David Block, Mariana Saiz, Alicia Ávila, Rosa del Carmen Flores y Rodrigo Cambray, cuyas lecturas agudas y sugerencias atinadas dieron lugar a un mejor trabajo.

La familia, especialmente Leticia y Luisín quienes comprendieron las ausencias y los desvaríos con infinita paciencia.

Jesús Manuel, amigo siempre solidario cuyas conversaciones no sólo son un placer, también una oportunidad de aprender.

INTRODUCCIÓN

El contexto en el que se inscribe el presente estudio es la reforma curricular de 1997 para las escuelas normales de México. Particularmente, se trata de analizar lo que sucede con un fragmento de dicha reforma: la formación de profesores de educación primaria para la enseñanza de las matemáticas. Una característica distintiva de esta reforma es la inclusión de las conceptualizaciones propias de la didáctica de las matemáticas; por esta razón, el objetivo central es analizar la estructura y secuencia de los contenidos de la didáctica de las matemáticas sugeridos en los programas de estudio, las representaciones que los formadores tienen sobre la estructura y secuencia, y la manera en la que estos contenidos son tratados en las aulas de las escuelas normales, además de los saberes que los estudiantes construyen a partir de las actividades que se realizan durante el curso dedicado a los números racionales. En síntesis, el objetivo es analizar el trayecto que sigue el saber didáctico referido a los números racionales de los programas de estudio a las conceptualizaciones de los estudiantes. Para realizar dichos análisis tomamos como sujetos de estudio a formadores y estudiantes de dos escuelas normales del estado de Zacatecas.

La formación de profesores en México ha seguido una trayectoria caracterizada por el constante cambio. Esta dinámica ha definido un estilo que podría identificarse como una *tradición renovadora,* es decir, se ha constituido una forma de ser en la que se impone la necesidad de modificarse lo más rápidamente posible, tradición que se ha materializado en recurrentes reformas curriculares que, en opinión de Figueroa (2000), son una visión simplificada del sistema de formación[1]. Sobre este respecto Ibarrola (1998; 264) ha detectado catorce cambios en los planes de estudios durante el siglo pasado, mientras que Arrieta (1996) señala trece diferentes planes de estudio desde 1887 a 1996.

[1] Una idea similar es expuesta por Chevallard (1999); para él, el problema de la formación no es unipolar, por lo que para analizarlo debe considerarse a la investigación y el desarrollo del sistema.

El currículo de cada reforma intentaba plasmar la imagen social del profesor y de la escuela en cada época. Dichas imágenes eran coherentes también con el proyecto político y social que las contextualizaba. En este sentido, la importancia de las dos reformas curriculares más recientes en las escuelas normales radica en que fueron acompañadas de una transformación en las instituciones. En 1984, por primera vez, las escuelas normales fueron consideradas como instituciones de educación superior; así, los estudios para profesor se elevaron al nivel de licenciatura. La modificación del estatus de estas escuelas y de la carrera de profesor no fueron hechos aislados, sino el producto de la tendencia internacional por formar a los profesores en los espacios universitarios.[2]

En México, con la reforma de 1984 se toma la decisión de conservar la antigua institución formadora de docentes, la Escuela Normal, institución encargada de difundir las "normas" para la enseñanza.[3] Sin embargo, no se conserva intacta: elevar su estatus fue una medida que se acompañó de una reforma curricular materializada en el llamado *Plan 84*.

La estructura del Plan 84 contrasta con los planes de estudio anteriores, ya que en éste se pone un mayor énfasis en los contenidos de tipo sociológico. Mediante cuatro líneas de formación (social, pedagógica, psicológica e instrumental), se buscaba formar un profesional de la docencia que "... a partir de un adecuado balance entre teoría y práctica se desenvolviera con aceptables niveles de calidad..." (Figueroa, 2000, p. 130). La idea central en este Plan era formar un docente-investigador, dando énfasis a la formación científica de los profesores a través del estudio de las técnicas y los elementos teóricos de la etnografía y de la investigación-acción.[4] Se pretendía formar a un sujeto que se aproximara al objeto educativo más como antropólogo que como docente.

---

[2] Aunque la Universidad Pedagógica Nacional desde hace más de 25 años desarrolla también programas de formación para profesores, el estatus universitario de esta institución no ha estado exento de discusiones. (Cfr. Elizondo, 1988)

[3] En congruencia con esta tendencia, en Francia, cuna del modelo de Escuela Normal adoptado en México, las escuelas normales son sustituidas por los Institutos Universitarios de formación de maestros (Kuzniak, 1994). En España, con la ley general de educación (LGE) de 1971, las Escuelas Normales se integran a la Universidad con estatuto de Escuelas Universitarias para la Formación de Docentes. (Sierra y Rico; 1996)

[4] En el Plan 84 "...gran parte de sus contenidos se orientaron al estudio y manejo de técnicas de observación asociadas sobre todo con la investigación-acción, lo que implicó que el estudiante se

En el Plan 84 las matemáticas y la didáctica de las matemáticas tenían un rol secundario. La segunda se incluía como un elemento de la asignatura *contenidos de Aprendizaje* (ubicada en el eje pedagógico); otros contenidos de esta misma asignatura hacían referencia a la lengua escrita, la historia y las ciencias naturales.[5] Por su parte, las asignaturas de matemáticas se incluían en el eje instrumental. El objetivo era que los contenidos estudiados en estas asignaturas se constituyeran como un añadido a la cultura matemática del futuro profesor o bien como herramientas (sobre todo las distribuciones probabilísticas) metodológicas para los proyectos de investigación de los estudiantes.

Por las razones anteriores, puede decirse que dentro del Plan 84 la figura del "profesor enseñante" quedó relegada. Como se buscaba formar un profesor investigador, el profesor que enseña se diluyó y la formación para la enseñanza se consideró como un complemento del investigador. Una consecuencia fue que la didáctica de las matemáticas no tuvo un espacio curricular propio en el que se analizaran sus especificidades, tampoco se consideró la necesidad de formadores especialistas en ese saber; bajo esta lógica, se generó una peculiar distribución de la carga horaria: los profesores especializados en matemáticas impartieron las asignaturas de matemáticas y los especialistas en pedagogía o ciencias de la educación impartieron las asignaturas de *contenidos de aprendizaje.*

En esta recurrente innovación, la reforma más reciente se concretizó en el llamado *Programa para la transformación y el fortalecimiento académicos de las escuelas normales* (mejor conocido como Plan 97) que comenzó a desarrollarse en junio de 1997. En opinión de los diseñadores, la implementación de esta reforma parte del reconocimiento de que "... por lo menos durante los pasados 15 años, las instituciones normalistas han experimentado un proceso de debilitamiento (...) que en algunos casos llega al franco deterioro..." (SEP, 1997, p. 19). En los planes de estudio de esta reforma se privilegia la formación para la

acercara a la escuela no como un maestro en formación, sino como un investigador en ciernes..." (SEP, 1997, p. 16) que además de conocer la realidad tenía la tarea de transformarla, como lo indicaban los postulados de la investigación-acción.

[5] Algo paradójico es que en la misma asignatura se planteaba el diseño y operación de alternativas para que los miembros de la comunidad donde el estudiante realizara sus prácticas profesionales utilizaran de manera "creativa" el tiempo libre, lo que le daba a la asignatura una naturaleza particular.

enseñanza en detrimento del profesor-investigador del plan anterior. De esta manera se configura un profesor cuya función esencial retorna a su espacio natural: el aula.[6] Los materiales de la reforma lo definen como un profesor con *mentalidad didáctica* y lo perfilan como un sujeto capaz de:

a) Conocer con profundidad los propósitos, los contenidos y los enfoques que se establecen para la enseñanza
b) Tener dominio de los campos disciplinarios
c) Reconocer la secuencia lógica de cada línea de asignaturas
d) Establecer una correspondencia adecuada entre la naturaleza de los contenidos y los procesos cognitivos de los alumnos
e) Diseñar y poner en práctica estrategias didácticas adecuadas a la naturaleza del contenido y a los grados de desarrollo de los alumnos
f) Diseñar y aplicar estrategias efectivas de evaluación de los aprendizajes
g) Utilizar creativamente los materiales de enseñanza y los recursos didácticos disponibles en su medio

Cabe destacar que la formación de un profesor con mentalidad didáctica incluye una vertiente relacionada con la enseñanza de las matemáticas. En este plan existen dos puntos esenciales relacionados con esta disciplina: la inclusión formal de la didáctica de las matemáticas y un periodo amplio de prácticas profesionales en la escuela primaria. El primer aspecto se advierte con la presencia de dos espacios curriculares —que se desarrollan durante el segundo y tercer semestre de la carrera—[7] dedicados específicamente al estudio de *la enseñanza de la matemática* y con el señalamiento de la función que cumple la didáctica de las matemáticas en los programas de estudio de estas asignaturas. En ellos se menciona que:

---

[6] Baste decir que once de los 43 espacios curriculares que se incluyen en el plan de estudios son asignaturas donde se estudia la enseñanza de determinada disciplina (matemáticas, español, historia, etc.) y siete corresponden a la observación y trabajo docente.

[7] Actualmente los estudiantes para profesor de educación primaria ingresan luego de haber terminado el bachillerato y estudian la carrera durante ocho semestres.

> La didáctica de las matemáticas estudia los fenómenos relativos a la enseñanza y al aprendizaje de esta disciplina; describe y analiza las dificultades que se identifican en estos procesos, propone recursos para ayudar a los profesores y a los alumnos a superarlas y, especialmente, para hacer del saber que se enseña algo vivo y funcional. La didáctica de las matemáticas nos proporciona herramientas para analizar secuencias de situaciones didácticas, para mejorarlas o incluso para crearlas. (SEP, 1999a, p. 9)

Dicha inclusión es un reconocimiento de que existe un saber específico relacionado con la actividad de enseñar matemáticas y que deben ser profesores especialistas en ese saber quienes formen a los futuros profesores.[8] Esta especificidad también es acotada en los programas cuando se señala que “... el estudio de los problemas relacionados con su aprendizaje (de las matemáticas) y con su enseñanza debe considerar las características específicas. No se puede enseñar o aprender de igual manera historia, matemáticas o educación artística (SEP, 1999a, p. 9)

El segundo punto, que se refiere a las prácticas en la escuela primaria, también presenta diferencias respecto de modelos de formación anteriores. Tradicionalmente la relación entre teoría y práctica se había entendido de dos maneras: desde una perspectiva positivista y desde los supuestos de la investigación-acción. La perspectiva positivista asumida desde los inicios de la escuela normal hasta los planes de 1984 supone que las prácticas de los futuros profesores son el momento “experimental” de su proceso de formación: la escuela normal es un lugar para la teoría y las aulas de las escuelas primarias un laboratorio donde se “experimentan” las teorías pedagógicas. En esta perspectiva el problema fundamental reside en hacer compatibles la teoría y la práctica.

Desde la perspectiva de la investigación-acción (presente en el Plan 84), los futuros profesores realizan prácticas profesionales para transformar una realidad que ha sido observada y problematizada, en estos casos se esperaba que los estudiantes “... desarrollasen una posición científica y crítica de la educación, y

[8] No obstante que en 1997 aparece formalmente la didáctica de las matemáticas en las escuelas normales, los saberes de esta disciplina ocupaban desde años antes un espacio en la formación continua de los profesores de la escuela primaria.

fueran capaces de plantear alternativas de solución a problemas del sistema educativo...” (Figueroa, 2000, p. 130). En ningún caso se piensa que las escuelas y los profesores de educación primaria pueden aportar elementos para la formación de los futuros enseñantes; la escuela y los profesores de primaria no dejan de ser una especie de laboratorio o un objeto de estudio susceptible de transformación.

En contraste con estas ideas, el Plan 97 propone una nueva vinculación entre la teoría y la práctica: se pretende estudiar determinados referentes teóricos como herramientas que posibilitan la explicación de una realidad específica, no como leyes generales del acontecer educativo que han de imponerse en la realidad mecánicamente; la teoría, en tanto modelo que explica algunas dimensiones de la realidad educativa, se asume sólo como guía de la práctica. Por esta razón, el sujeto puede reconstruir esos modelos teóricos a partir de la experiencia reflexionada.

Sobre este respecto, los materiales de la reforma mencionan que los referentes teóricos se reconstruyen cuando el sujeto se sumerge en dicha realidad, esto significa que la teoría y la práctica no tienen una relación de “aplicabilidad”. No se trata de “aplicar” la teoría sino de orientar la práctica mediante los presupuestos del modelo teórico y, una vez que se reflexionan los resultados de la práctica, de poder modificar algunos de esos presupuestos.

Los aportes teóricos incluidos en la asignatura *Matemáticas y su enseñanza* son ejemplo de esta nueva relación. Su estudio se relaciona con la comprensión de los procesos de aprendizaje de las matemáticas y con el análisis de los enfoques que permitirán una enseñanza diferente a la convencional. Desde esta postura, los estudiantes comprenden el sentido de la elaboración teórica porque utilizan los conceptos para organizar y delimitar la realidad educativa, lo que les ofrece la posibilidad de observar, explicar, comprender y mejorar una actividad específica: la enseñanza de las matemáticas.

En el Plan 97 no se concibe a la teoría y a la práctica como elementos separados; tampoco a la escuela normal como espacio en el que los alumnos se forman teóricamente para “experimentar dicha teoría” en un momento posterior. Al contrario de esto, se asume que la escuela primaria es un lugar para la construcción de saberes distintos a los teóricos (por ejemplo, aquellos que surgen sólo con el contacto cotidiano con la práctica), que existen saberes que no están incluidos en el saber didáctico teórico aunque forman parte de los conocimientos necesarios para enseñar. En esta perspectiva se acepta que el contacto con la práctica permite construir esos otros saberes tomando como referencia la teoría, lo que a su vez posibilita la reconstrucción del saber teórico.

En este mismo sentido, el primer acercamiento a la práctica[9] implica que el estudiante tenga acotada la realidad educativa a la que se aproxima, que construya preguntas que le permitan acercarse a ella con posibilidades para interpelarla desde una “mirada informada”.[10] Este primer momento también implica que el estudiante estructure mecanismos metodológicos que faciliten la búsqueda de respuestas congruentes con las preguntas construidas. El primer acercamiento a la práctica renuncia a las intuiciones por medio de la construcción de una “mirada informada” y tiene la intención de posibilitar la teorización sobre ella. Esto significa que el estudiante podrá explicar determinados fragmentos de la realidad utilizando los conceptos que el análisis teórico le proporciona.

En el segundo momento se trata de analizar y desarrollar la práctica desde un lugar diferente: el del sujeto que analiza su propia práctica “...con el propósito de que pongan en juego la formación adquirida en las condiciones y exigencias reales del trabajo docente y reconozcan esta experiencia como parte de su proceso formativo...” (SEP, 1997, p. 61). En este momento, cada estudiante contará con la guía de un tutor (un profesor titular con grupo en educación primaria) cuyo papel central no será el de un adiestrador o un enseñante, sino que “... su función es orientar las actividades del estudiante en el aula, transmitir los saberes que ha construido mediante su experiencia, hacer recomendaciones oportunas y señalar aspectos que conviene reforzar o modificar...” (SEP, 1997, p.

[9] En los programas de estudio del Plan 97 el primer momento de aproximación es similar al de programas anteriores. Sin embargo, en este caso las primeras prácticas en el aula están contextualizadas por un periodo previo de observaciones en las que se plantearon preguntas específicas a la enseñanza de las matemáticas.
[10] La idea de construir una “mirada informada” está presente de manera explícita en los programas de la asignatura *Observación y práctica docente*.

61). El tutor guiará al estudiante para que éste responda a las interrogantes que le plantea su práctica, articulando los referentes teóricos de la didáctica, la experiencia de su propia práctica y las respuestas que en situaciones semejantes de enseñanza ha construido su tutor.[11]

Sin embargo, los presupuestos del Plan 97 aquí expuestos sólo corresponden con un modelo ideal y aunque constituyen un referente para los procesos de formación, es improbable que de manera automática se traduzcan en prácticas. Una de las primeras determinaciones sobre cualquier reforma es el contexto en el que se opera. En ese contexto existen condicionantes que posibilitan o impiden la concreción de la reforma en los salones de clase. En el caso de las escuelas normales de Zacatecas, espacio geográfico-social en el que se enmarca el presente estudio, al momento de ponerse en marcha el Plan 97 existieron determinadas condiciones que caracterizan la actual coyuntura de formación; entre otras, sobresalen las siguientes:

- La envergadura de la reforma. Puesto que se transita de un plan eminentemente sociológico a uno centrado en las didácticas, era necesario redefinir los objetos de trabajo de cada formador.
- La formación de los formadores. Actualmente las escuelas normales no cuentan con profesores especialistas en los diferentes campos didácticos; tampoco los hay que hayan cursado programas relacionados con la didáctica de las matemáticas.
- La debilidad de la formación matemática de los formadores. En su mayoría los formadores que imparten la asignatura de *Enseñanza de las matemáticas* son egresados de la licenciatura del Plan 84 y en general sus estudios de posgrado no tienen relación con la educación matemática. Otros son egresados de una normal superior, un tipo de institución donde la enseñanza de las matemáticas se abordaba desde la perspectiva de la didáctica general, es decir, los cursos en los que se estudiaban contenidos

[11] Una de las modalidades es el trabajo docente con un grupo escolar en el horario regular bajo tutoría del maestro regular.

matemáticos se complementaban con otros en los que se estudiaba a la didáctica como un conjunto de técnicas para la enseñanza.

- La débil relación que los formadores tienen con la escuela primaria. En unos casos, los formadores tienen más de diez años fuera de las escuelas primarias y en otros su experiencia en ese nivel apenas rebasa los dos años.

Como se ha mencionado, las condiciones en las que se opera una reforma influyen en la manera como los profesores dotan de significado a una propuesta curricular. Antes de convertirse en práctica, los postulados de una reforma sufren numerosas resignificaciones; la organización de los saberes para la formación, la interpretación que hacen los formadores, los conocimientos con los que la enfrentan los formados, la organización de la escuela, las condiciones temporales y materiales en las que se opera, etc., son sólo algunos factores que determinan la selección, distribución y secuenciación de los contenidos y actividades que se incluyen en los procesos de formación. De esta manera, los contratos reales nunca son idénticos a los propuestos; en algunos casos se modifican pero conservan su naturaleza, mientras que en otros la propuesta termina por ser “desnaturalizada”. Por esta razón, cuando se desea analizar los procesos que son producto de una nueva propuesta curricular, una pregunta fundamental tiene que ver con la distancia que media entre las propuestas originales y los procesos reales que se generan en los salones de clase.

Las razones para elegir un fragmento de la reforma curricular como objeto de estudio

Al parecer, las recurrentes innovaciones en la formación de profesores no son exclusivas de nuestro país. A decir de Portugais (1995), la lógica de las sucesivas reformas en la formación de profesores[12] se funda sobre una idea simplificada:

[12] Portugais se refiere a las sucesivas reformas en el contexto de Suiza y Québec. Sin embargo, en Kuzniak (1994), Houdement (1995) y Peltier (1995) puede encontrarse la misma idea para el sistema de formación de profesores en Francia. Un proceso de renovación similar puede advertirse en el sistema de formación español a partir del análisis realizado por Sierra y Rico (1996)

cada reforma es una posibilidad de incidir sobre la calidad de los aprendizajes de los alumnos de la educación básica. En su opinión, esta idea descansa sobre el supuesto de que la acción sobre una o algunas variables del sistema de formación, sin analizar antes el funcionamiento de esta formación, produce efectos favorables en el rendimiento académico de los alumnos de los formados.

Este supuesto, señala Portugais, parece estar ligado a la idea de que una modificación en el proceso de formación da lugar a otra en el aprendizaje de los alumnos de la escuela elemental, y está ligado también con una concepción empírica en la formación de maestros, ya que excluye los análisis sobre la "caja negra" de la formación, esto es, de los procesos mediante los cuales un sujeto se forma. Por estas razones señala Portugais, las reformas permanecen siempre insuficientes ya que se inscriben en una perspectiva de innovaciones sucesivas basándose en la idea de que esta acción elevará la calidad de la enseñanza en las escuelas del nivel básico. Sin embargo, este tipo de funcionamiento tampoco parece ser exclusivo del sistema de formación: Chevallard señala la renuncia a todo tipo de análisis del sistema educativo cuando menciona que:

> ... (el sistema educativo) sigue siendo territorio favorito de todos los voluntarismos, (...) Hoy más que ayer, ese sistema debe soportar el peso de las expectativas, los fantasmas, las exigencias de toda una sociedad para la que la educación es la última reserva de sueños a la que desearíamos exigirle todo. Esta actitud es una confesión: el sistema educativo, enteramente colmado de voluntad humana podría moldearse según la forma de nuestros deseos, de los cuales no sería sino una proyección, en la materia inerte de nuestros deseos. Añadiríamos incluso qué es lo qué hemos hecho de él y, al fin de cuentas, encontramos lo que hemos puesto en él. (Chevallard, 1991, p. 13)

El rechazo a este voluntarismo y a la lógica de ciclos reformistas en la formación de profesores requiere materializarse en acciones que valoren a la misma didáctica de las matemáticas y que consideren al profesor en formación como un sujeto que construye sus propias experiencias en materia de enseñanza. Bajo esta perspectiva se supone analizar la manera como el profesor "funciona" dentro del sistema de formación, es decir, requiere que se analice como sujeto que construye los saberes en un contexto con múltiples determinaciones didácticas

En este sentido, las escuelas normales mexicanas también permanecen inmersas en la lógica de la innovación y puede considerárseles como un campo problemático en el que es necesario analizar los procesos de formación de los futuros profesores. Éste es precisamente el propósito que orienta el presente estudio. Para iniciarlo, se plantean interrogantes que permitan problematizar el campo de estudio y describirlo. Así, las cuestiones para estas funciones son las siguientes:

- Desde la perspectiva de la didáctica de las matemáticas, ¿cuáles son los saberes mínimos que requiere un profesor?
- ¿Cuál es la naturaleza de los saberes que requiere un profesor y la manera en que deben articularse?
- ¿Cuáles son los saberes que se proponen en los programas de estudio de las escuelas normales para la enseñanza de las matemáticas?
- ¿Cuáles son las representaciones que los formadores tienen respecto de los saberes propuestos en los programas de estudio?
- ¿Qué características tienen los procesos de formación que se derivan de las propuestas curriculares?
- ¿Cuáles son los saberes que en mayor medida son recuperados por los profesores en formación a partir de los cursos sobre enseñanza de las matemáticas?

Características de la perspectiva teórica elegida

Frecuentemente los estudios sobre formación de profesores se han realizado desde perspectivas sociológicas, pedagógicas, psicológicas, curriculares, etnográficas e incluso psicoanalíticas. Todas estas perspectivas han sido privilegiadas también en los estudios realizados en México.

En el ámbito de la educación matemática, la formación de profesores es un objeto de estudio relativamente nuevo. Los estudios que se han realizado en este ámbito por lo general se inscriben en los llamados estudios sobre el pensamiento del profesor. No obstante la juventud de este objeto de estudio, en la actualidad se cuenta con un buen número de investigaciones sobre la naturaleza de los distintos saberes de formación (Shulman,1986; Fennema y Loef, 1992; Peltier, 1995, y Blanco, 1996, entre otros), sobre el nivel de comprensión que los profesores en formación tienen de los conocimientos matemático, curricular, didáctico, etc. (Carpenter *et al*., 1988; Ball, 1990; Simon, 1990-1993; Flores Martínez, 1995; Llinares y Sánchez, 1996; Guellert, 1999; Castro y Castro, 1996; Rico, 2000, y Ruiz, 2001, entre otros) o sobre el proceso de formación y sus efectos (Blanco, 1994; Kuzniak, 1994; Portugais, 1995; Houdement; 1995; Llinares y Sánchez, 1996, Nesbit y Bright, 1999, Mewborn, 1999; Nicol, 1999, y Ensor, 2001, entre otros).

Sin embargo, este tipo de estudios presenta un desarrollo incipiente en México. De los pocos trabajos sobre formación de profesores que se han realizado en nuestro país se encuentran el de Guzmán (2000), quien analiza los factores asociados a la formación profesional que influyen en la práctica educativa de los profesores de matemáticas de bachillerato, el de Ávalos y Méndez (1997), quienes analizan las transformaciones que sufren las concepciones de los maestros sobre contenidos geométricos durante un curso de actualización, los de Barocio (1988) y Barocio y Breña (1992; citados en Bonilla, 1993), quienes a partir de la formación de grupos control y experimental con profesores de preescolar y de los dos primeros grados de la escuela primaria aplican y evalúan diversos programas de capacitación docente basados en una óptica constructivista; el de Block (1990), quien durante un proceso de formación continua analiza a los profesores frente a la lectura y escritura de textos, los maestros y la organización del trabajo en equipo y sus concepciones sobre la resolución de problemas, y el de Aguayo (2000) quien desde una perspectiva cultural analiza los saberes matemáticos y didácticos de los profesores en formación.

En el caso que nos ocupa, elegimos una perspectiva basada en la didáctica francesa de las matemáticas. A diferencia de las perspectivas psicológicas que ponen el acento en el proceso de construcción de conocimientos por parte de alumnos y profesores o de las perspectivas sociológicas que ponderan las relaciones entre formación y contexto social, la didáctica francesa de didáctica de las matemáticas tiene como objeto de estudio a la actividad matemática, es decir, a la actividad que profesores y estudiantes despliegan para reconstruir uno o varios objetos matemáticos.

Los análisis que en este estudio se presentan adquieren su sentido en la teoría antropológica didáctica (Chevallard, 1994, 1998, 1999, 2000), específicamente las nociones de *transposición didáctica* y *praxeología docente* se utilizan para explicar las deformaciones que sufre un objeto de conocimiento (o praxeología) para convertirse en un objeto "enseñable" y para explicar también las tareas que los formadores cumplen para reconstruir las actividades matemática y didáctica en las aulas. Aunque la noción de transposición didáctica alude específicamente a las transformaciones y adecuaciones de los objetos matemáticos, en este estudio se analiza dicho proceso colocando al "saber didáctico", o mejor dicho, a las *praxeologías docentes,* en el lugar que originalmente se le da en la teoría antropológica didáctica (en adelante TAD) al saber matemático.

Finalmente, en un intento por escapar de los límites que imponen las perspectivas no didácticas y del "autismo temático"[13] que, a decir de Chevallard (2001), ha sido un síntoma de la mayoría de los trabajos de didáctica, se ha optado por analizar dichas adecuaciones en el contexto de un contenido matemático particular: los números racionales.

La transposición didáctica y las *praxeologías*

La noción de transposición didáctica surge del intento que Chevallard hace para delimitar el objeto de estudio de la didáctica de las matemáticas. En su opinión debería ser un objeto "...cuya existencia es independiente de la mirada que lo transformará en un objeto de conocimiento" (Chevallard, 1991, p. 12). Para Chevallard, la búsqueda es necesaria para excluir todo "voluntarismo" del sistema

[13] Con este término Chevallard (2001) se refiere a la tendencia que, en su perspectiva, ha distinguido a los estudios en didáctica de las matemáticas que sólo tocan tangencialmente el contenido matemático.

de enseñanza e intentar que el estudio de este sistema pueda ser una de las tareas propias de los campos científicos.

Contra la idea de estudiar la "relación enseñante-enseñado", que a decir de Chevallard (1991) ha oscurecido el estudio de los hechos didácticos, el didacta puede pensar su objeto basándose en una relación ternaria (docente-alumno-saber) que incluye un elemento olvidado: el saber. Esta inclusión permite formular las siguientes preguntas de interés para la didáctica:

¿Qué es aquello que en el sistema didáctico se coloca bajo el estandarte del saber?

¿Qué relación entabla el "saber enseñado" con el "saber sabio"?

¿Qué diferencia existe entre el "saber enseñado" y el "saber sabio"?

Como se puede ver, estas preguntas también resultan pertinentes si se tratara del sistema de formación En este caso podría plantearse:

¿Qué es aquello que en el sistema de formación[14] se coloca bajo la etiqueta de saber didáctico?

¿Qué relación existe entre el saber didáctico "a enseñar" con el "saber didáctico "enseñado"?

¿Cuál es la distancia separa al saber didáctico "a enseñar" del "saber didáctico "enseñado"?

En el sistema de enseñanza Chevallard asume que el "saber sabio" (*savoir savant*) no puede llegar a las aulas en "estado puro" porque no podría ser enseñable. Así, asume que es necesaria "...una serie de ciertas deformaciones que lo harán apto para ser enseñado..." (Chevallard, 1991, p. 16). Puesto que necesariamente el "saber sabio" es distinto del "saber enseñado", este proceso es acotado de la siguiente manera por Chevallard:

[14] Siguiendo las ideas de Portugais (1995), puede pensarse, en analogía con el sistema de enseñanza y su relación ternaria alumno-profesor-saber matemático, en la existencia de un sistema de formación constituido por la relación entre formado-formador-saber didáctico.

> Un contenido de saber que ha sido designado como saber a enseñar, sufre, a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para ocupar un lugar entre los *objetos de enseñanza.* El "trabajo" que transforma un objeto de saber a enseñar en un objeto de enseñanza, es denominado la *transposición didáctica.* (Chevallard, 1991, p. 45)

En esta perspectiva, la transformación de un contenido de saber (sabio) a una versión didáctica de ese objeto (a enseñar) se define como la transposición didáctica *stricto sensu* y el análisis científico de ese proceso es lo que Chevallard (1991) llama la transposición didáctica *sensu lato,* la cual puede ser representada por el siguiente trayecto:

objeto de saber --- objeto a enseñar --- objeto de enseñanza.

Siguiendo el sentido de estas ideas, la *didactificación de la didáctica* (así llamada por Portugais, 1995) considera que el saber didáctico es aquello que en la formación de maestros se esconde bajo la etiqueta del "saber sabio" y *didactificar* los saberes de la didáctica significa preparar ese saber para que pueda ser enseñado. En otros términos, *didactificar* el saber didáctico (sabio) es transponer dicho saber. En esta analogía también puede suponerse la existencia de los dos niveles de la transposición: el de la preparación del saber (*stricto sensu)* y el del análisis del proceso de preparación *(sensu lato)*. El presente estudio constituye un intento de analizar el proceso de transposición y no de hacer una transposición. Por esta razón, puede decirse que es un trabajo de transposición didáctica *sensu lato.*

Sin embargo, existen varias posturas sobre la idea de que el saber didáctico es un objeto de conocimiento que puede "transponerse".. En una, Kuzniak (1994) niega la posibilidad de que el saber propio de la enseñanza de las matemáticas pueda verse como un caso particular de transposición didáctica. En opinión de Kuzniak, tal posición supondría al menos la existencia de dos condiciones: a) que la didáctica tomara en cuenta todo lo que constituye el acto de enseñanza[15] y b) que su desarrollo permitiera un trabajo de transposición suficientemente rico e indiscutible. En su opinión, estas condiciones no están presentes y además, señala, plantear el problema de esta manera es producto de una óptica reduccionista que olvida la existencia de la pedagogía y los conocimientos empíricos sobre la enseñanza.

En una segunda posición Portugais (1995) afirma que el problema de la incorporación del producto de las investigaciones en didáctica de las matemáticas a la formación de profesores remite a la vieja pregunta sobre la teoría y la práctica y al problema de la transmisión de un conocimiento teórico (el didáctico) con el propósito de mejorar una práctica (la enseñanza). En opinión de Portugais, la didáctica debe tomar a su cargo lo que concierne a su propia enseñanza y ello implica "didactificar" los contenidos didácticos, pensar en un sistema —análogo al sistema de enseñanza— de formación[16] y buscar las determinaciones que le son propias utilizando como herramientas los conceptos propios de la didáctica. En otros términos, incorporar el saber de la didáctica de las matemáticas a la formación de profesores, afirma Portugais, consiste en buscar una transposición adecuada para este tipo de saber y esto requiere que el formador reconozca la existencia de un cuerpo de saberes propios de la enseñanza y reconozca también que es preciso estructurarlo, secuencializarlo y transponerlo considerando su naturaleza.

En congruencia con las ideas de Portugais, Chevallard (2001) menciona que tanto las escuelas para alumnos como las de profesores son escuelas "normales" que crean y difunden normas, esto es, prácticas. Sin embargo, para Chevallard (1997) más que prácticas, las escuelas difunden *praxeologías,*[17]

[15] Para Kuzniak (1994), en la enseñanza no sólo se incluyen relaciones didácticas, sino también pedagógicas. Por ejemplo, las relaciones entre el profesor y el alumno que no están mediadas por un contenido de saber.

[16] El sistema de enseñanza está conformado por el alumno, el profesor y el saber matemático escolar. En analogía y de acuerdo con Portugais, el sistema de formación estaría integrado por el formado, el formador y el saber didáctico.

[17] Chevallard utiliza varios términos para referirse a una praxeología. Por ejemplo, además de este término, utiliza el de "organización praxeológica" o simplemente el de "organización". Por esta razón cuando se refiere a una praxeología matemática generalmente la llama organización matemática (OM). Lo mismo hace para designar a una praxeología didáctica; a ésta se refiere como una organización didáctica (OD)

acciones que permiten gestionar determinada tarea. La diferencia entre una *praxeología* y lo que comúnmente llamamos práctica estriba en que en la primera no sólo se incluye a la acción sino también ciertos saberes que permiten dar sentido a la tarea y a la forma de resolverla. Por esta razón, "...cuando se habla de saber, siempre, se designa ordinariamente, y por metonimia, *toda una praxeología*..." (Chevallard, 1997, p. 6).

Desde esta perspectiva una praxeología debe permitirnos cumplir determinada tarea *t* de un determinado tipo de tareas *T*, procurando una *técnica τ.* Por ejemplo, cuando un profesor se pregunta ¿cómo hacer para evaluar el conocimiento de los alumnos respecto de la división?, se ha planteado la necesidad de resolver una tarea específica *t* (evaluar los conocimientos sobre la división) que pertenece a un cierto tipo de tareas *T* (evaluar los conocimientos matemáticos) mediante una técnica apropiada τ (que podría ser una entrevista). Pero, si para dar respuesta a esa tarea, sólo se considera el tipo de tareas y la técnica, se obtiene un *saber-hacer* [*T/τ*] mediante el que se puede cumplir la tarea sin justificar la técnica empleada, esto es, se tiene una *praxeología* incompleta que excluye al discurso razonado sobre la técnica (la *tecnología* θ) y al discurso teórico (Θ) que da sentido a la tarea planteada. Una *praxeología* completa puede representarse mediante el sistema [*T/τ/*θ*/*Θ] donde el bloque "práctico–técnico" [*T/τ*] alude al *saber-hacer* y el bloque "tecnológico–teórico" [θ/Θ] da cuenta del *saber.* Una praxeología "completa" resulta entonces de la asociación de un "saber-hacer" y de un "saber", de la *praxis* y del *logos.*

Ahora bien, las normas que difunden las escuelas para alumnos toman la forma de *praxeologías matemáticas* y las que difunden las escuelas para profesores son *praxeologías didácticas*. Empero, para realizar la difusión de estas normas, señala Chevallard (1997), la sociedad recurre a diferentes instituciones especializadas política o científicamente; entre otras, la institución didáctica. Por esta razón el buen funcionamiento de ambas escuelas debe correr a cuenta de "la didáctica".

Sin embargo, el análisis del proceso mediante el que se difunden las *praxeologías* rebasa el ámbito de los salones de clase, ya que en la transposición de las *praxeologías didácticas* participan diversas instituciones, unas cuya responsabilidad es sugerir y plantear la naturaleza, la secuencia y el número de *praxeologías* necesarias para la formación, así como las formas didácticas para transponerlas,[18] y otras cuya responsabilidad es reconstruirlas en los salones de clase. Por esta razón, según sea la actividad y la institución, pueden realizarse análisis de las praxeologías simplemente sugeridas o de las que se reconstruyen en las aulas (que sumados constituyen un proceso de transposición didáctica) en diferentes niveles: en el de la sociedad, de las pedagogías, de las disciplinas, de las escuelas, etcétera.

Precisamente, al articular las diferentes dimensiones del proceso de transposición (instituciones, *praxeologías* matemáticas y didácticas), la óptica antropológica nos permite tomarla como una guía para los análisis que dan cuerpo al presente trabajo.

Objetivos

El objetivo central de la investigación llevada a cabo para esta tesis de doctorado fue analizar el trayecto que siguen las praxeologías matemáticas y didácticas referidas a los números racionales. Dicho trayecto va desde los programas de estudio de las escuelas normales hasta la conceptualización que de ellas hacen los estudiantes, pasando por las representaciones sociales de los profesores y su reconstrucción en las aulas de las escuelas normales.

De este objetivo central se desprenden los siguientes objetivos específicos:

- Analizar las *praxeologías didácticas* que sobre los números racionales se plantean en los programas de estudio de las escuelas normales. Se trata de analizar la estructura y secuencia de dichas *praxeologías* en relación con los números racionales.
- Analizar las representaciones que los formadores tienen respecto de la naturaleza del saber didáctico, sobre su enseñanza y su aprendizaje.

[18] En la óptica de Chevallard (1997) transponer una *praxeología* es lo mismo que reconstruirla.

- Analizar las *praxeología matemáticas y didácticas* que los formadores reconstruyen o transponen en los salones de clase.
- Analizar los tipos de *tareas* que plantean así como las *técnicas* que los formadores utilizan en la reconstrucción de las *praxeologías didácticas.*

Este estudio se llevó a cabo en escuelas normales del estado de Zacatecas. Para ello se tomaron datos en tres grupos de dos escuelas normales en los que se desarrolló la asignatura *Enseñanza de las matemáticas II.*

La recuperación y el análisis de los datos

Para decidir la manera en la que se tomaron y analizaron los datos, un primer paso consistió en considerar la existencia de un sistema de formación en el que se relacionan formador-profesor en formación–didáctica de las matemáticas. Una vez hecha esta consideración, “la tríada de la formación” se constituye como sistema en el que se realiza el proceso de transposición interna de un saber, proceso que tiene que ver con las adecuaciones que el saber sufre en el aula. Así, la tríada de formación se constituye como espacio institucional en el que un saber deviene en saber enseñado. Este proceso de preparación del saber es un objeto de estudio que puede analizarse mediante conceptos de la didáctica de las matemáticas. En este caso se utilizaron específicamente conceptos generados en el seno de la teoría antropológica didáctica, complementándose con algunos de la teoría de las situaciones didácticas.

Así, mediante un entramado que se configura a través de conceptos tales como organización matemática, determinación didáctica, organización didáctica, medio, situaciones adidácticas, devolución, contrato y regulación, se analizaron las adecuaciones o deformaciones que el saber didáctico sufre al transitar por varios niveles de determinación didáctica, esto es, se analizaron las *praxeologías* evocadas en el *texto del saber,* las representaciones que los formadores tienen respecto de las distintas *praxeologías* de formación, el “medio” que los formadores estructuran, los contratos que ponen en marcha y las conceptualizaciones que de ellas hacen los estudiantes.

Para tomar y analizar los datos, la aproximación elegida se caracterizó por las siguientes acciones:

- Para dar cuenta de las *praxeologías* que son evocadas en el "texto de saber", esto es, en los programas de estudio de las asignaturas *Matemáticas y su enseñanza I* y *II* que se imparten en la licenciatura en educación primaria de las escuelas normales, se analizaron estos programas mediante las siguientes categorías: el lenguaje formal de la didáctica utilizado, los saberes matemáticos que se incluyen, los tiempos dedicados a cada contenido, los saberes didácticos que se integran, las técnicas y las tecnologías.
- Robert y Robinet (1989) postulan que hay en todo profesor, implícita o explícitamente, concepciones sobre la enseñanza, sobre el significado de la conducta de los alumnos, sobre lo que hay que favorecer u obstaculizar, así como sobre la manera "correcta" de enseñar. Mencionan también que hay una relación entre estas representaciones y las decisiones que los profesores toman durante la enseñanza; por esta razón es relevante explorar dichas representaciones. Para describir las representaciones que seis formadores que imparten la asignatura *Enseñanza de las matemáticas* tienen sobre la naturaleza del saber didáctico y sobre su enseñanza y aprendizaje, se realizaron entrevistas "a profundidad" (véase el Anexo 1). Tal como lo define Díaz Barriga (1995), este tipo de entrevistas parte de un cuestionario estructurado pero, dependiendo de las respuestas del entrevistado, el entrevistador puede modificarlas para buscar que se expresen las concepciones profundas acerca de un tema, objeto de conocimiento o fenómeno. En este caso las entrevistas se orientaron principalmente a explorar dos de las tres dimensiones que a decir de Robert y Robinet tienen las representaciones sociales de los sujetos: la epistemológica, que tiene que ver con la manera como se genera el conocimiento; la pedagógica, que se relaciona con la enseñanza, y la psicológica, que se refiere al modo como se aprende.

- Para analizar las *praxeologías* que se reconstruyeron en las aulas, se realizaron observaciones en tres grupos de dos escuelas normales diferentes.[19] Se registraron todas las clases en las que el contenido matemático de referencia eran los números racionales. En total se realizaron 30 registros de clases (véase el Anexo 2). El tipo de observación elegido fue el de la observación abierta no participativa, ya que nuestro interés no era tomar una postura militante, sino guardar una cierta distancia con el objeto de estudio de manera que permitiera un análisis de tipo científico. En este tipo de observaciones, el propósito es obtener tanta información como sea posible respecto del fenómeno elegido para adquirir una mayor comprensión del mismo. Los datos obtenidos de las observaciones fueron transcritos en un registro anecdótico (Carrol, 1985) cuya característica principal es una narración escrita precisa, clara y completa de lo que se observa. Una vez que se tuvieron los registros, se segmentaron en episodios (un episodio es un fragmento de la clase en el que se realiza una tarea específica) y se analizaron siguiendo el modelo del "análisis recursivo" (Ericson, 1997), que consiste en establecer afirmaciones empíricas sustentadas sobre la revisión de todo el cuerpo de datos para posteriormente tratar de refutar esas afirmaciones, teniendo presente la necesidad de reencuadrar cada afirmación a medida que avanza el análisis. En este modelo los datos recurrentes que se ven unidos por los *vínculos clave* van afianzando la afirmación bajo análisis mientras que una mayor presencia de datos discrepantes obliga a su refutación.
- Para dar cuenta de las *praxeologías* que los profesores en formación reconstruyeron durante el curso, se aplicó un cuestionario a los alumnos de los grupos observados (véase el Anexo 3), en el cuestionario se plantearon

[19] Las características de los formadores que atienden a los grupos observados son las siguientes: uno ha realizado estudios de normal superior (en la especialidad de matemáticas) y de maestría en educación; cuenta con más de 20 años de experiencia como formador y labora en una escuela normal urbana. Los otros dos han realizado estudios de licenciatura en educación básica y de maestría en educación; un dato relevante es que sus tesis de licenciatura y de maestría versan sobre aspectos ligados a la enseñanza de las matemáticas, ambos tienen menos de 5 años como profesores de educación primaria y menos de 5 como formadores de docentes. La diferencia entre estos dos últimos es que uno trabaja en una escuela normal urbana y otro en una rural.

tareas congruentes con las diferentes praxeologías sugeridas en el “texto del saber”. En total fueron 75 estudiantes: 19, 35 y 21 de cada uno de los grupos respectivamente. En los tres grupos, el cuestionario se aplicó luego de que concluyeron el estudio del bloque dedicado a los números racionales.

Los argumentos generados de los análisis descritos son el material principal que da cuerpo al informe del estudio realizado. Dicho informe, que se presenta en este documento, se divide en seis capítulos.

En el primer capítulo se analizan las nociones teóricas que sustentan el estudio, principalmente las posturas sobre los distintos saberes necesarios para la formación y las nociones principales de la teoría antropológica didáctica que se constituyeron como herramientas en los análisis posteriores.

En el segundo capítulo se analizan las representaciones que los formadores tienen respecto de los saberes, incluidos en los nuevos planes de estudio, y sobre la nueva propuesta global de formación.

En el tercer capítulo se analiza la manera en la que las *praxeologías didácticas* son “textualizadas”, esto es, se describe la estructura y secuencia de las *praxeologías matemáticas y didácticas* que se proponen en el programa de estudios.

En el cuarto capítulo se describen las *praxeologías didácticas* reconstruidas en clase, principalmente se da cuenta de los elementos praxeológicos puestos en juego y del tipo de *tareas* planteados.

En el quinto capítulo se analizan las diferentes *técnicas* que los formadores utilizan para reconstruir las *praxeologías didácticas.* En este caso se realiza una búsqueda de las características comunes de las prácticas que despliegan los tres formadores observados.

En el sexto capítulo se analizan los saberes que lograron adquirir los profesores en formación a través del curso; específicamente se analizan sus acciones frente a tareas referidas al contenido matemático.

Finalmente, en el apartado dedicado a las conclusiones se pone énfasis en algunas respuestas para las preguntas inicialmente planteadas y se da cuenta de aquellas que no fue posible contestar. También se plantean algunas otras que quedaron abiertas y por lo mismo pueden servir como guía para futuras investigaciones.

I. TRES PERSPECTIVAS SOBRE LA RELACIÓN ENTRE FORMACIÓN Y DIDÁCTICA

Dada la compleja relación entre saber “didáctico” y formación de profesores, se requiere reconstruir las nociones producidas en el campo de la didáctica para realizar un análisis de esta relación. El presente capítulo tiene por objetivo realizar dicha reconstrucción y, una primera acción en este sentido es la caracterización de ese objeto-campo[20] de estudio llamado didáctica de las matemáticas.

Para comprender la naturaleza de la didáctica de las matemáticas, es necesario separar este término de los significados que tradicionalmente se le han asignado. Como lo señala Artigue (1995), la mayoría de las acepciones con las que se asocia a la didáctica aluden a métodos de enseñanza, técnicas, pedagogías o simplemente al arte de enseñar. A diferencia de estas acepciones, actualmente se piensa a la “didáctica de las matemáticas” como un campo de estudio que en Francia inicia su desarrollo en los años 60’s.[21] Como todo campo de estudio, resulta difícil acotarlo en una definición, sin embargo en lo que sigue hemos de entender que la didáctica de las matemáticas es:

> La ciencia que se interesa por la producción y la comunicación de conocimientos matemáticos (...) estudia la forma en que los conocimientos son creados comunicados y empleados para la satisfacción de las necesidades de los hombres que viven en sociedad, y más particularmente:
>
> Por una parte, de las operaciones esenciales de la difusión de conocimientos, las condiciones de su existencia y su difusión y las transformaciones que esa difusión produce, también sobre los conocimientos que son utilizados y por otra, las instituciones y las actividades que tienen por objeto facilitar esas operaciones (Brousseau cit. por Portugais 1995, p. 28)

---

[20] Lo designamos como objeto-campo en la medida que es en esencia un campo de estudio pero al mismo tiempo es parte del objeto del estudio que aquí se realiza.

[21] En esta tradición didáctica se inscribe nuestro trabajo. La decisión de asumir como referente a la didáctica francesa de las matemáticas no es arbitraria, ya que su influencia es evidente en las propuestas dedicadas a la escuela primaria y a la formación de profesores en México.

En correspondencia con esta definición, los didactas de la escuela francesa han producido nociones en dos vertientes: nociones sobre la enseñanza y el aprendizaje que explican los fenómenos inherentes a la transmisión del saber matemático y, nociones surgidas de la experimentación de dispositivos (ingenierías de ciertos conceptos matemáticos particulares) que buscan el mejoramiento del sistema de enseñanza.[22] A decir de Portugais (1995), la producción de estas nociones se ha sustentado en dos hipótesis fundamentales: la primera (constructivista de origen piagetano) sostiene que los alumnos construyen el conocimiento y la segunda (epistemológica) considera que los problemas y situaciones son los que permiten construir el significado de los conocimientos matemáticos.

Las primeras han sido utilizadas para analizar los procesos de producción, difusión y transmisión del conocimiento matemático, las segundas son un conjunto de ingenierías que intentan articular a la investigación con la enseñanza. En este contexto, el término ingeniería didáctica designa los dispositivos –ya experimentados- para la enseñanza de un concepto matemático preciso y a una metodología de investigación en didáctica de las matemáticas. Sobre ese respecto, Artigue (1995) señala que la ingeniería didáctica es una metodología para la investigación y para la enseñanza.

Sin embargo, a pesar de los saberes producidos en la didáctica de las matemáticas, la relación entre saber didáctico y formación de profesores es todavía un objeto de estudio que precisa de varias preguntas y respuestas. Por ejemplo, la manera en que el saber didáctico debe incluirse en la formación de profesores es una cuestión sin una respuesta clara, sobre el respecto existen varias posturas cuyos principios básicos se analizan en los apartados siguientes.

[22] Sobre este respecto Chevallard (1994, p. 313) señala que "...los didactas de las matemáticas, han elaborado, tratándose de la clase, de lo que se realiza (análisis didáctico), y de lo que se podría realizar (ingeniería didáctica), un cuerpo de conocimientos sólido, fundado sobre un pequeño número de conceptos bien distribuidos...."

1.1. DIDÁCTICA Y FORMACIÓN DE PROFESORES. UNA RELACIÓN PROBLEMÁTICA

El problema de la relación entre didáctica y formación de profesores ha sido subrayada por diferentes autores. Por ejemplo, Brousseau (2000) señala que la profesionalización del profesor ha dependido de numerosos conocimientos venidos de diferentes campos del conocimiento, esto ha generado, señala, una saturación de conocimientos de referencia que terminan por desalentar a los educadores que buscan referentes científicos para su práctica. Ante esta situación, el profesor que busca mejorar la enseñanza necesita articular los diversos conocimientos de referencia, tarea que no es fácil si se piensa en las diferentes posturas epistemológicas desde las cuales se construyeron dichos conocimientos.

Frente a este problema, Brousseau afirma que la didáctica proporciona a los profesores una ciencia integradora que permite la construcción de una cultura común basada en las reflexiones sobre la experiencia adquirida y sobre los resultados en la investigación científica. No obstante ventajas que proporciona la didáctica, en opinión de Brousseau (2000), el problema persiste porque no existe una *transposición didáctica*[23] para al saber didáctico y la dificultad para construirla tiene que ver con el hecho de que se tiene que "transponer" un alto volumen de saberes didácticos relativamente dispersos y fragmentados, y además, señala, los saberes didácticos crecen más rápido que el tiempo que dura la formación y más aprisa que la jerarquización y síntesis que de ellos se puede realizar.

Sin esta transposición, la comprensión y utilización de los resultados de la investigación precisa de conocimientos sobre un gran número de temas y sólo un número reducido de maestros los poseen. Transmitir esos saberes didácticos en los procesos de formación inicial es una tarea que enfrenta múltiples dificultades, por esta razón Brousseau (2000) plantea como alternativa la promoción de una "didáctica para principiante" que garantice un comportamiento profesional mínimo,

[23] Con estos términos Brousseau alude a la ausencia de investigaciones sobre el papel del saber didáctico en la formación, ya que una transposición didáctica pertinente para estos saberes tendría que constituirse con diversos análisis, uno de ellos se relacionaría con las condiciones en que este saber puede "vivir" en las aulas.

pero que a la vez contenga elementos teóricos que preparen a los maestros para la utilización más refinada de los saberes más avanzados de la didáctica.[24] Aunque Brousseau, señala que la selección de estos saberes es un trabajo que concierne a la didáctica, no específica los tipos de saberes que deberían incluirse en la formación.

1.1.1. Los saberes profesionales, transmisión o transposición

A pesar de que la inclusión del saber didáctico ha sido planteada en términos de la transposición, existen posturas que niegan esta posibilidad, por ejemplo Kuzniak (1994) asume que no es posible considerar la transmisión de los saberes ligados a la enseñanza de las matemáticas como un caso particular de la transposición didáctica, en su opinión, la dificultad se manifiesta cuando se pregunta sobre la existencia de un "verdadero" saber profesional de los profesores, para él, existen dos respuestas a esta cuestión que permiten dudar sobre la pertinencia de "transponer" el saber didáctico. La primera corresponde al nivel de la noosfera educativa y se distingue por negar la existencia de dicho saber puesto que en este ámbito se asume que el dominio del saber matemático basta para desarrollar una buena enseñanza. La segunda acepta la existencia del saber profesional de los profesores, pero considera que es un objeto con esencia propia que no se puede reducir a las leyes de la didáctica de las matemáticas.[25]

Por otra parte, señala Kuzniak, si se quisiera ver esta transmisión como un caso más de la transposición didáctica, debería pensarse en un formador que bajo la lógica de la transposición intenta definir lo que hace falta retener del saber sabio (generado en el seno de las diversas escuelas de didáctica) y reflexionar sobre la forma de transponerlo, acción que requiere dos condiciones necesarias pero inexistentes: que la didáctica toma en cuenta todo eso que constituye al acto de

[24] Cabe aclarar que en la perspectiva de Brousseau, éste es apenas uno de los problemas de la relación entre didáctica y formación. Una discusión más amplia sobre esta problemática es abordada por este autor en *La Teoría de las Situaciones Didácticas* (Brousseau, 1998; cap. 6)

[25] En coherencia con la segunda respuesta, Contreras y Carrillo (2000; 1-2) señalan que "...aprender a enseñar matemáticas no es una consecuencia inmediata del estudio del conocimiento propio de la Didáctica de las Matemáticas...", en su perspectiva, al conocimiento sobre la didáctica habría que añadir uno más con su especificidad propia, que ellos distinguen como un conocimiento de *carácter profesional*..

enseñanza y que su desarrollo sea suficiente para permitir un trabajo de transposición rico e indiscutible. Para Kuzniak (1994), éstas son condiciones inexistentes porque olvidan dos elementos consustanciales al acto de enseñar: los saberes “pedagógicos” sobre la práctica y los conocimientos empíricos sobre la enseñanza que han construido los formadores sin considerar los aportes de la didáctica.[26]

Una postura similar a la de Kuzniak es la de Tanguy (1995) quien postula la imposibilidad de una transposición didáctica para los saberes profesionales, en opinión de Tanguy la imposibilidad deriva de la inexistencia de un saber profesional “sabio” y la ausencia de una trascripción de ese saber en el seno de una institución con fines de transmisión. Aunque Tanguy acepta la existencia de un saber “sabio” en las matemáticas, considera los saberes profesionales no tienen un estatus de legitimidad, es decir, no están considerados como saberes escolares.

En este mismo sentido, Tanguy considera que no se puede establecer una relación directa entre los saberes matemáticos y profesionales, porque se omite la especificidad de los saberes profesionales y su irreductibilidad a saberes científicos o técnicos. Para esta autora, los saberes profesionales no se reducen a una simple aplicación de saberes técnicos, ya que configuran un *corpus* más o menos coherente apegado a eso que llamamos disciplina, mientras que los procesos de formación no tienen determinados claramente los saberes “a enseñar” porque los diferentes agentes que intervienen en su selección y organización no comparten puntos de vista para organizar la transformación de saberes profesionales en objetos de enseñanza. Además, señala, la enseñanza profesional olvida algunos eslabones propios de la transposición, por ejemplo, no hay un estado “sabio” del saber profesional, tampoco manuales que objetiven la estandarización de dicho saber o asociaciones que favorezcan su difusión.

Las posturas de Tanguy y Kuzniak sirven como punto de partida para discutir las condiciones necesarias de una posible transposición didáctica del

[26] Esta posición es compartida por Huraux-Masselot (2000), quien considera que los problemas de la formación en didáctica no pueden ser abordados desde un punto de vista estrictamente didáctico.

saber didáctico y a la formación de profesores como un objeto de estudio de la didáctica. Desde las posturas de Tanguy y Kuzniak existen tres cuestiones que impiden asumir esta relación: la inexistencia y legitimidad de un saber didáctico "sabio", la especificidad e irreductibilidad de dichos saberes y, la ausencia de eslabones necesarios para la cadena transpositiva. Para discutir la existencia de tales condiciones, en lo que sigue se analizará la postura de Chevallard sobre la formación de profesores, ésta cobra un especial interés porque es Chevallard quien construyó la noción de transposición didáctica y es también un formador de profesores.

1.1.2. La formación, un objeto de la teoría antropológica didáctica

A decir de Chevallard (2001), las escuelas para alumnos y para profesores son escuelas "normales" porque crean y difunden normas, es decir, modos de pensar y de actuar. En el primer caso, son normas para la vida (entre ellas normas matemáticas), en el segundo son normas para la enseñanza. Empero, las normas no son simplemente prácticas o un "saber hacer", como se incluye lo que comúnmente se conoce como "saber", Chevallard (2001) afirma que lo que difunden estas escuelas son *praxeologías u organizaciones praxeológicas.*

Para ilustrar la relación entre "saber" y "saber hacer" en una praxeología, Chevallard las representa mediante el sistema [T /τ / θ /Θ], los dos primeros símbolos aluden al bloque técnico-práctico o al "saber hacer", éste se compone de un cierto tipo de tareas (*T)* y una técnica *(*τ) que permite resolver ese tipo de tareas. Los dos últimos representan al bloque tecnológico-teórico o al "saber", éste se compone de los discursos tecnológicos (*θ)* que justifican las técnicas utilizadas y los discursos teóricos (*Θ)* que dan sentido a las tareas planteadas. Siguiendo la idea de Chevallard, puede decirse entonces que las escuelas para alumnos crean y difunden *praxeologías matemáticas* (entre otras) mientras que las escuelas para profesores difunden *praxeologías didácticas.*[27]

[27] Para designar a las praxeologías matemáticas, Chevallard utiliza los términos praxeología, organización praxeológica matemática, organización matemática o las siglas OM, lo mismo hace para designar a las praxeologías didácticas. Por esta razón, en lo que sigue se utilizarán las distintas denominaciones para aludir a las praxeologías matemáticas o didácticas.

Ahora bien, cuando la sociedad debe elegir las *praxeologías* que deben difundirse en unas y otras escuelas recurre a instituciones especializadas política o científicamente. La didáctica es una de las instituciones a las que se recurre cuando se trata de praxeologías didácticas relacionadas con una praxeología matemática. Por esta razón, señala Chevallard, el buen funcionamiento de esta configuración institucional debe estar a cargo de "la didáctica", tanto en el terreno del desarrollo como el de la investigación, en otros términos, la didáctica debe enfrentarse con los problemas de la formación de los alumnos y de los profesores[28].

En síntesis, la didáctica debe estudiar los problemas didácticos específicos del campo de las *praxeologías matemáticas* (OM) o del de las *praxeologías didácticas* (OD) porque los dos tipos de *praxeología* están siempre ligadas, es decir porque existe un "isomorfismo" didáctico-matemático, una determinación recíproca entre las praxeologías matemáticas y las didácticas, en otras palabras, una praxeología didáctica no puede elaborarse o difundirse si no se toman en cuenta las restricciones que le impone cierta praxeología matemática. Esta codeterminación es representada por Chevallard (2001, p.3) mediante la siguiente jerarquía de niveles.

Nivel –2	Sociedad
Nivel –1	Escuelas
Nivel 0	Pedagogías
Nivel 1	Disciplinas
Nivel 2	Áreas
Nivel 3	Sectores
Nivel 4	Temas
Nivel 5	Cuestiones

[28] Esta idea es compartida por Portugais (1995, pp. 9-12), para él, los contenidos didácticos también están sujetos a los fenómenos didácticos, por esta razón los estudia desde una perspectiva llamada "Didactificación de la didáctica" cuyo postulado fundamental tiene que ver con pensar que los fenómenos de la formación de profesores pueden y deben ser objetos de estudio de la didáctica.

En este esquema pueden verse diferentes niveles en los que se estructuran las *praxeologías matemáticas.* Para adecuarla y para que su transposición sea didácticamente posible, en cada nivel se introducen restricciones particulares. Así, la transmisión de conocimientos sobre una cuestión matemática específica[29] es el último eslabón de un proceso que inicia en la sociedad, continúa por la escuela, sigue por cierta área dentro de una disciplina, por cierto sector dentro del área y por cierto tema del sector. En cada una de estas etapas se imponen restricciones que definen las tareas necesarias y posibles para estudiar la cuestión considerada, restricciones van conformando las condiciones necesarias para crear y transponer una *praxeología* de la cuestión (matemática o didáctica) específica.

Por otra parte, este proceso transpositivo determina una "ecología" que condiciona lo que podrá producirse en la clase, es decir, condiciona la posibilidad de crear, de ciertas maneras, ciertas respuestas a ciertas cuestiones. No obstante, dicha "ecología" depende también de alumnos y profesores, ya que la construcción de una jerarquía adecuada debe tomar en cuenta lo que los alumnos pueden recibir y lo que los profesores pueden aceptar hacer en un entorno social dado, cuando la construcción de la jerarquía de niveles toma en cuenta las especificidades de profesores y alumnos, el desarrollo de las organizaciones praxeológicas adquiere un sentido específico, "un sentido local" en términos de Chevallard.

Para Chevallard, la formación de profesores es un desarrollo "local" que forma parte del desarrollo global de una praxeología y como su referente es una *praxeología matemática*, está determinado por el "isomorfismo" matemático-didáctico, por esta razón la formación de profesores no puede estudiarse sin tomar en cuenta la OM de referencia ya que reducir la *praxeología* del profesor a un componente pedagógico, significa olvidar los niveles de codeterminación, en otras palabras, implicaría olvidar que:

> Un principio fundador de las didácticas, al menos en el sentido Brousseauniano de la palabra, es que no sólo lo transmitido depende de la herramienta con la que se pretende conseguir su transmisión, sino al revés que las organizaciones "transmisoras", es decir, didácticas, se

[29] La "cuestión" es lo que comúnmente se conoce como un contenido matemático que se incluye en un tema y éste a su vez en un cierto sector de la matemática, etc.

> configuran de una manera estrechamente vinculada a la estructura dada a lo que hay que transmitir. En otros términos, las organizaciones didácticas, las OD, dependen fuertemente de las organizaciones por enseñar las OM, si se trata de organizaciones matemáticas.... (Chevallard, 2001, p. 3)

En síntesis, la formación de profesores, en tanto desarrollo praxeológico "local" es un objeto de estudio de la didáctica de las matemáticas que, según sea el nivel de jerarquía, tendrá diferentes determinaciones, también es un objeto susceptible de analizarse mediante la noción de transposición didáctica ya que el estudio o desarrollo de una organización praxeológica didáctica no puede considerarse como un conjunto de saberes con esencias distintas, ya que cuando se designa a un saber, señala Chevallard (2001), se designa a toda una organización praxeológica y aún cuando los elementos de dicha organización sean de distinta naturaleza, constituyen aquello que se designa como "saber".

En cuanto a la legitimidad del saber didáctico y la existencia de los eslabones necesarios para la cadena transpositiva, es necesario remitirse al postulado fundamental de la teoría antropológica didáctica, en él se dice que:

> .... *toda acción procede de una praxeología* admitiendo que esta praxeología pueda estar en curso de elaboración, o también que su construcción se haya detenido –puede estar definitivamente, a la escala de una vida humana o institucional-, congelada en un estado de incompletud o en un estado de desigual desarrollo, con, por ejemplo, una técnica apenas esbozada, una tecnología incierta, una teoría inexistente (...) si toda acción regularmente cumplida resulta de la puesta en obra de una cierta praxeología [T / τ / θ / Θ], y si es necesario reconocer en esta praxeología la presencia de un "saber" [θ / Θ], entonces, se debe concluir que toda acción procede de un saber... (Chevallard, 1997; 6- 7)

Como se puede observar, la perspectiva antropológica no admite la existencia de acciones totalmente empíricas, "... la «simple práctica» – que no es jamás, como se ha sugerido, simple práctica- no permite aprender todo eso que sería útil..." Chevallard (1997, p. 13), aún los gestos más humildes[30] son acciones que derivan de los saberes incluidos en una praxeología, sin importar que apenas

[30] En estos casos, Chevallard utiliza el término "gesto" en su sentido más amplio, es decir, no como un movimiento corporal o facial sino como toda una acción que se orienta hacia el cumplimiento o hacia la "gestión" de una tarea.

esté en curso de elaboración o en estado de incompletud. En este sentido, las acciones de formación derivan de las organizaciones praxeológicas que se encuentran en desarrollo en el seno de la didáctica de las matemáticas.

De manera que, aún "...si no es posible caracterizar los saberes de una manera intrínseca entre las praxeologías, es posible siempre precisar algunos de los rasgos que se acuerdan para su reconocimiento..." (Chevallard, 1997; 7). Entre esos rasgos, está el hecho de que el bloque tecnológico teórico debe aparecer como poseedor de una *generatividad* que permita estructurar técnicas, justificaciones y explicaciones relativas a un conjunto amplio y diverso de tareas y no como una creación oportunista que justifica tal o cual bloque práctico técnico.

Además, debe considerarse la existencia de una "dignidad epistemológica", esto es, del reconocimiento social y cultural, aunque sea incierto, de que determinada praxeología tiene posibilidades de explicar y desarrollar un dominio específico de la realidad. En este caso, existe la posibilidad de que las praxeologías estudiadas en la didáctica de las matemáticas expliquen la formación de profesores, de ahí que se considere la existencia de un saber que se ha generado en el interior de la didáctica de las matemáticas[31] con cierto *status* de legitimidad o con cierta "dignidad epistemológica". Si se acepta la "dignidad epistemológica", puede aceptarse a la didáctica de las matemáticas como una institución con fines de transmisión, que intenta construir una transposición del saber didáctico y puede aceptarse también que ese saber ha sido objetivado en los manuales que sobre la formación de profesores se han generado en las diferentes instancias de esta institución. Esta última consideración marca la existencia de los eslabones necesarios para la transposición del saber didáctico: un saber con cierta "dignidad epistemológica", una institución con fines de transposición y un saber objetivado a través de un conjunto de operaciones.[32]

[31] La "dignidad epistemológica" a la que hace referencia Chevallard se refiere al estatus *de legitimidad* que social y culturalmente se le reconoce a una praxeología que, en tanto saber, explora y da cuenta de un dominio específico de la realidad. Los saberes didácticos serían un ejemplo de una praxeología que busca desde tiempo atrás el reconocimiento de su "dignidad" epistemológica".

[32] Los numerosos documentos producidos al interior de los Institutos Universitarios de Formación de Maestros (IUFM) en los que se plantean diversas actividades para la formación constituirían la objetivación del saber didáctico –de referencia- para la transposición.

Sin embargo, para esclarecer la trayectoria de dicha transposición, es necesario analizar las formas que toma dicho saber o los tipos de tareas que le son consustanciales, en otras palabras, es necesario analizar los componentes, los diferentes saberes y los tipos de tareas que en opinión de la institución didáctica, constituirían ese saber más general que podríamos llamar "saber didáctico" u organización *praxeológica didáctica* de los profesores. En los siguientes apartados se intentará realizar tal análisis, no sin antes aclarar que al contrario de lo que piensa Tanguy, toda selección de saberes implica una cierta discusión, precisamente las diferentes posturas que se analizarán son un ejemplo de tal discusión, lo que parece ser una condición natural del ámbito noosférico. Específicamente, analizaremos las llamadas por Bosch y Gascón (2002), "aproximación cognitiva" y "aproximación epistemológica". Mediante este análisis se trata de identificar los saberes, conocimientos o *praxeologías*[33] que deben caracterizar a un profesor.

1.2. LOS CONOCIMIENTOS Y EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR. LA "APROXIMACIÓN COGNITIVA"

A decir de Bosch y Gascón (2002), las investigaciones que caracterizan a "la aproximación cognitiva" tuvieron como objeto de estudio en su origen al alumno, a sus conocimientos matemáticos y a la evolución de éstos en el curso de los aprendizajes. En un primer momento, este tipo de estudios ponía énfasis solamente en las concepciones de los alumnos, pero, en un segundo momento se analizaron las concepciones de los profesores y en un tercero las prácticas de enseñanza. No obstante este trayecto, "... la variable a explicar es siempre el *rendimiento o el aprendizaje* de los alumnos, que se supone es determinado directamente por *el comportamiento del alumno en la clase..."* (Bosch y Gascón, 2002; 5), por las actitudes y características personales de los alumnos así como

[33] La distinción entre saber y conocimiento no es un asunto resuelto, de hecho, como se puede ver en Carrillo (et al, 1998), la discusión sobre la distinción entre ambos términos es una polémica viva, y si añadimos a esta dupla, como lo hemos hecho, la noción de praxeología, el asunto se torna más complejo, por esta razón en este capítulo hemos decidido respetar el uso de los términos que hacen los autores aludidos en cada caso.

por tres variables ligadas al comportamiento del profesor: *sus conocimientos, creencias y actitudes*.[34]

Otra opinión sobre las fases del desarrollo de la "aproximación cognitiva" es la de Gómez (2001), quien señala que la investigación sobre el conocimiento del profesor y su relación con la enseñanza de las matemáticas ha pasado por tres fases. En la primera, llamada de la "enseñanza eficiente", se buscó identificar las características de los buenos profesores con base en las concepciones de los alumnos. En una segunda fase se trataron de validar los resultados sobre el aprendizaje por lo que la investigación se orientó hacia el estudio de la enseñanza, para ello se adaptó una estrategia paralela aunque con ciertas variantes, es decir, se siguió privilegiando el estudio de las concepciones pero se estudiaron las concepciones de los profesores acerca de ciertas nociones matemáticas y la relación de éstas con los modelos que desplegaban en la enseñanza de las matemáticas, en la tercera fase, "del pensamiento del profesor", se incorporó el estudio de la enseñanza como una variable más para explicar los conocimientos adquiridos por los alumnos.

Siguiendo la caracterización que hacen estos autores, se podrían sintetizar las tres fases de la siguiente manera:, luego de una primera etapa en la que se buscaban las variables explicativas del aprendizaje del alumno con el alumno mismo, la segunda se distinguió por ampliar el rango de variables explicativas para este mismo fenómeno, bajo esta lógica se incluyeron variables ligadas al profesor: sus concepciones sobre la matemática y las relaciones que éstas tienen con sus prácticas de enseñanza. En esta tercera fase, llamada "del pensamiento del profesor", se asume que lo que el profesor hace en el aula depende de lo que sabe y piensa, y que las modificaciones en las prácticas de enseñanza están determinadas por las transformaciones en las concepciones de los profesores.

[34] En opinión de Bosch y Gascón (2002), aún cuando en esta última etapa el estudio del aprendizaje de los alumnos considera algunos rasgos del profesor, éstos siempre ocupan el lugar de las variables independientes, el aprendizaje de los alumnos es la variable dependiente. Sin embargo, señalan, es importante subrayar que este modelo ha evolucionado, en algunos casos hacia modelos centrados en la caracterización y predicción de las decisiones y acciones de los profesores de matemáticas en clase.

Ahora bien, si el interés de estos estudios es eminentemente cognitivo, una pregunta crucial es ¿cómo integran a la matemática en su modelo de investigación? A decir de Bosch y Gascón (2002) una forma muy esquemática de explicarlo sería la siguiente: de inicio se toman los fenómenos esencialmente cognitivos en el sentido que lo hacen Fennema y Loef (1992) y Thompson, (1992). Enseguida se trata de relacionar esta estructura con las prácticas de enseñanza, lo que añade una dimensión social o pedagógica a los fenómenos cognitivos y finalmente, aparece la necesidad de considerar la especificidad del aprendizaje, lo que aporta una dimensión matemática a esos fenómenos. De esta manera "lo cognitivo" se amplía con la integración de "lo matemático".

En esta vía de integración, una línea de investigación fue la de Shulman (1986), quien al tratar de responder a la pregunta ¿cuál conocimiento es esencial para el profesor?, introduce la noción de *conocimiento de contenido pedagógico*. En opinión de Gómez (2001), el significado de este término es bastante general, por lo que se hizo necesario reflexionar sobre los tipos de conocimiento del profesor y sobre los componentes de cada uno de los conocimientos.

1.2.1. Tipos y componentes del conocimiento del profesor

Carrillo (et al, 1998)[35] analizan el conocimiento de los profesores tomando como referente los *tipos y componentes* del conocimiento.[36] En opinión de estos autores, una de las primeras aproximaciones a los tipos de conocimientos es la de Shulman (1986), quien considera tres tipos de conocimiento: proposicional (de carácter teórico o declarativo), de caso (cuando se conoce una situación en particular) y estratégico (relacionado con las estrategias que pueden desarrollarse en un caso o situación particular). Desde la perspectiva de los conocimientos de Shulman, Borko y Livingston (cit. por Carrillo et al, 1998) caracterizan la

[35] La filiación entre estas posturas y "la aproximación cognitiva", es asumida por los mismos autores cuando señalan "... mencionaremos lo que tienen en común los maestros (...): la actitud hacia su propio trabajo profesional (conocimiento concreto significados personales, creencias matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, imágenes mentales, preferencias, y mucho más). Colocaremos todo esto dentro de la expresión de Thompson (1992): las concepciones de los maestros..." (Carrillo et al, 1998; 3)

[36] Sin embargo, señalan estos autores, esta elección puede estar sujeta a divergencias por parte de los investigadores.

interacción entre tipos y componentes del conocimiento del profesor, dicha caracterización define al enseñante experto mediante la conjunción de cuatro habilidades cognitivas: razonamiento pedagógico, conocimiento del contenido pedagógico, esquema y ejecución improvisada.

Para ellos, el razonamiento pedagógico es el proceso de transformar la materia de conocimiento en formas pedagógicas adaptadas a los antecedentes del estudiante; el conocimiento del contenido pedagógico -a la manera de Shulman- es la mezcla de contenidos y pedagogía en una forma comprensible; el esquema es un conocimiento abstracto que reúne información de muchos casos particulares y de su relación con ellos; y la ejecución improvisada es la acción que se desarrolla bajo un guión pero que incluye acciones que "el actor" improvisa durante la enseñanza.

En esta primera aproximación, señalan Carrillo (et al, 1998) destacan las tipologías de Simon (1994), quien sostiene que la formación de los maestros debe incluir el conocimiento *de* (sustantivo) y *sobre* (sintáctico) las matemáticas;[37] la de Farbham-Doiggory (1994), quien describe tres modelos que buscan transformar el conocimiento "novato" en "experto" en los que se permite la adquisición de cinco tipos de conocimiento: declarativo, procesual, conceptual, analógico y lógico; y la de Elstgeest, Goffre y Harlen (1993), quienes distinguen cinco nociones unidas al conocimiento del profesor[38]: conocimiento social (el conocimiento en general), físico (de la experiencia directa), lógico (relaciones entre conceptos), técnico (precede a las habilidades y destrezas) y profesional (que permite emprender nuevas situaciones y dar autonomía). En esta misma línea, Fennema y Loef (1992) identifican cuatro componentes del conocimiento del profesor: sobre el

---

[37] La clasificación de Simon, se basa en la definición que Ball había realizado desde 1988, en la cual se define al conocimiento *de* las matemáticas como conceptual y procedimental y al conocimiento *sobre* las matemáticas como la comprensión sobre la naturaleza de la disciplina. El conocimiento conceptual señala Ball, es una especie de tejido o red de conocimientos interconectados mientras que el conocimiento procesual, de acuerdo con Hiebert y Lefevre (en Simon 1993; 234) "... consiste en el lenguaje formal o sistema de representación simbólica de las matemáticas y los algoritmos o reglas para completar ciertas tareas..." Desde esta perspectiva, el conocimiento de las matemáticas incluye lo que significa saber y hacer matemáticas.

[38] Aunque cabe mencionar que en la óptica de estos autores, dichas nociones no son tipos ni niveles.

contenido, sobre el aprendizaje, sobre la manera de representar un concepto matemático y el pedagógico.

En una segunda aproximación, mencionan Carrillo et al (1998), Wilson, Shulman y Ritcher (1987) proporcionan un modelo teórico que sintetiza las posturas presentadas, en éste se establecen tres componentes del conocimiento del profesor:

- La materia del conocimiento. El qué y el por qué de los contenidos.
- El conocimiento del contenido pedagógico: En el que se incluyen elementos que caracterizan el estilo del maestro como el conocimiento de la materia, las creencias, el conocimiento pedagógico general y el conocimiento acerca de las metas y los objetivos educativos.[39]
- El conocimiento curricular. En el que se incluye el conocimiento acerca de los materiales alternativos para la enseñanza de una noción específica, acerca de otras materias relacionadas con matemáticas y el conocimiento curricular acerca de las matemáticas en cursos anteriores.

En opinión de Carrillo (et al, 1998), las preocupaciones acerca de los diferentes tipos de conocimientos que debe adquirir un futuro profesor pueden reflejarse en los tres componentes del modelo anterior, con excepción de una serie de preocupaciones que se expresan sobre el conocimiento de *él mismo,* esto es, además de los conocimientos incluidos en el modelo, consideran que los maestros también deben adquirir un conocimiento sobre *ellos mismos,* sobre sus propias habilidades para hacer matemáticas y sobre la confianza en sus propias habilidades.

No obstante la síntesis, analizar la formación de profesores desde esta perspectiva implica una doble problemática, por un lado existe el problema del cómo, esto es, en tanto que, los tipos de conocimiento no son pocos y los componentes de cada tipo son aún más numerosos, existe una pregunta que no

[39] Tomando como referencia el modelo anterior, Bromme (1988, cit. por Carrillo et al, 1998; 19), establece los siguientes elementos para caracterizar el conocimiento del contenido pedagógico: conocimiento matemático, curricular, del aula, acerca de lo que aprenden los estudiantes, metaconocimiento (matemáticas y creencias) acerca de la educación matemática (teórico y práctico) y pedagógico (de carácter general).

se ha respondido, si de formar a un futuro profesor se trata, ¿cómo se ha de transmitir o "transponer" cada uno de esos tipos y componentes del conocimiento del profesor?[40] Por otra parte, aún considerando que los tipos y los componentes están en una relación de conjunción, no se esclarece la manera en que se articulan, señalar la experiencia como elemento integrador, como lo hacen estos autores, es trivial por obvio y asumir la conversión del futuro profesor en un "… solucionador de problemas en muchas direcciones…" (Carrillo, et al, 1998, p. 37), es otra respuesta tan general que termina por no decir nada. Sin embargo, es comprensible que un texto de síntesis como el que elaboran estos autores, presente huecos sobre la manera de formar o de la manera en que deberían integrarse los diferentes tipos y componentes del conocimiento del profesor, por esta razón, en lo que sigue se analiza una propuesta para la formación en la que se plantea la integración de estos elementos. Cabe mencionar que esta propuesta no representa la diversidad de posturas sobre la formación que coexisten dentro de "la aproximación cognitiva"[41], pero es la que en mayor medida se ajusta al modelo de tipos y componentes del conocimiento del profesor.

1.2.2. Lo estático y lo dinámico. Una visión alternativa sobre la teoría y la práctica

A decir de Blanco (1995), la formación de profesores se ha sustentado sobre los conocimientos de la materia, sobre la psico-pedagogía y sobre las prácticas docentes, tripleta que en su opinión se sustenta sobre una noción "aplicativa" de la relación entre teoría y práctica. En este modelo "aplicativo", los dos primeros elementos actúan como componentes teóricos que habrán de integrarse, adaptarse y aplicarse en las prácticas. En este sentido, señala este autor, la Didáctica de las Matemáticas no es un elemento que pueda sustituir a esta tripleta, pero sí una referencia básica que debe incorporarse al currículo de los futuros

[40] Aunque, en las conclusiones de este evento se dice que dichos componentes del conocimiento deberán adquirirse mediante la investigación acción, el aprendizaje situado y las narrativas, el carácter general de esta propuesta termina por ser una respuesta ambigua.

[41] Otros planteamientos para la formación de profesores que, en esta aproximación coexisten con éste, están centrados en la investigación acción, en el profesor como solucionador de problemas y en la construcción de *trayectorias hipotéticas de aprendizaje.* Sobre el respecto puede consultarse Contreras y Carrillo (2000); Gómez (2001) y Contreras (2001).

profesores de matemáticas para modificar la relación entre los elementos tradicionales de la formación. Esta inclusión complementa una nueva trilogía formada por un conocimiento sobre el contenido matemático, uno específico sobre el proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y uno más que él llama conocimiento didáctico del contenido matemático.

1.2.2.1. El conocimiento sobre el contenido matemático

Para Blanco (1995), todo profesor debe tener un conocimiento de las matemáticas que debe enseñar, por ello sugiere que los temas matemáticos para el proceso de formación deben ser los que aparecen en el currículo de la escuela elemental, sólo que enseñados,

> ... desde una nueva perspectiva que considere la estructura de la disciplina, la relación con otras materias, la estructura básica, naturaleza e historia de las matemáticas, etc., todo ello ligado a una nueva cultura que aparece en las perspectivas renovadoras de la educación matemática y, específicamente, en las nuevas propuestas curriculares... (Blanco, 1995, p. 209)

Como se puede ver, lo que propone es el conocimiento *de* y *sobre* las matemáticas de Simon (1993), aunque en la perspectiva de Blanco este conocimiento debe tener ciertas relaciones con el conocimiento curricular. Además, en congruencia con “la aproximación cognitiva”, incluir al conocimiento matemático tiene como objetivo que las concepciones de los profesores en formación se aproximen a las nuevas propuestas sobre la enseñanza.

1.2.2.2. El conocimiento específico sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas

Desde la perspectiva de Blanco, el conocimiento específico sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas son saberes producidos en el campo de la didáctica y en su opinión, deben incluirse en la formación porque la didáctica de las matemáticas constituye un referente obligado para los futuros profesores, específicamente señala la pertinencia de incluir los siguientes aspectos:

- Análisis de conceptos y procesos matemáticos y de sus relaciones.
- La reflexión sobre la articulación de las matemáticas con otras asignaturas.

- Análisis de los usos de las matemáticas en tanto objeto social.
- La reflexión sobre la resolución de problemas y la comunicación matemática.
- Conocimiento para usar y evaluar materiales y recursos educativos.
- Conocimiento sobre los diversos significados y las diferentes formas de representar los conceptos matemáticos.
- Propuestas para la enseñanza de conceptos matemáticos específicos.
- Las diferentes formas de relacionar al saber con los alumnos.
- Etc.

Dentro del conocimiento específico de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se incluyen los conocimientos generados en el seno de la didáctica de las matemáticas, lo que permite pensar que hasta aquí, Blanco ha incluido todos los tipos y componentes del conocimiento propios de la tipología de Shulman, es decir, dentro del conocimiento de la materia y del conocimiento de la enseñanza y el aprendizaje, ha incluido el conocimiento de la materia, el conocimiento del contenido pedagógico y el conocimiento curricular, por lo que cabe preguntarse sobre la naturaleza del tercer tipo de conocimiento.

1.2.2.3. Conocimiento didáctico del contenido matemático.

Una vez construidos los dos primeros tipos de conocimiento, Blanco señala que es necesario enlazar la enseñanza con la realidad escolar, para ello plantea la noción de "conocimiento didáctico del contenido matemático", desde su perspectiva éste es de distinta naturaleza porque tiene un mayor grado de interdependencia. El conocimiento del contenido matemático (CM) es independiente de los otros dos, lo que le permite existir también fuera de los procesos de formación de profesores[42]; el conocimiento específico del proceso de enseñanza/aprendizaje de las matemáticas (CEA), es más complejo porque se construye integrando el (CM). Algo similar ocurre con "el conocimiento didáctico del contenido matemático"

[42] El conocimiento sobre el contenido matemático por ejemplo, es un referente necesario para formar a los ingenieros, a los economistas, etc., por eso se dice que puede "vivir" fuera de los procesos de formación de profesores, esto es, no es exclusivo de la formación de profesores.

(CDCM), mientras que su complejidad es mayor, su independencia de los otros se desvanece, para construirse se requiere el (CM) y el (CEA), en palabras de Blanco, el conocimiento didáctico del contenido matemático es diferente de los otros dos porque los engloba.

Sin embargo, la inclusión de los dos primeros tipos de conocimiento en el CDCM no es lineal, para pensar en una integración adecuada debe considerarse la existencia de una componente *estática* y una *dinámica*. La componente estática se constituye por una serie de aspectos que existen independientemente de la persona y del contexto específico donde enseña, es impersonal ya que su contenido puede encontrarse objetivado en materiales escritos o audiovisuales, existiendo al margen de los sujetos y los contextos, por esta razón, la componente estática es susceptible de ser enseñada y aprendida sin ir a la práctica, puede "transmitirse" en las instituciones formadoras.[43] La componente estática se forma con los siguientes elementos:

1. Los conocimientos sobre las disciplinas curriculares:
   - De las matemáticas (conceptos, procesos, metodología, relación con otras áreas, etc.)
   - Psicopedagógicos (aspectos generales del proceso enseñanza-aprendizaje, de los alumnos, de la gestión de la clase, del currículo general, del contexto, etc.)
   - Sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (estrategias de enseñanza-aprendizaje de tópicos concretos, materiales curriculares y didácticos, etc.)

2. Los conocimientos sobre los profesores:
   - Sobre las matemáticas y su enseñanza-aprendizaje

[43] Como puede observarse, la componente estática no es sino el conocimiento "proposicional" de Shulman (1986) o el "declarativo" de Farbham-Doiggory (1994), en los tres casos, cada término designa a un conocimiento de carácter "teórico", es decir, a un "saber" como contraparte de un "saber –hacer".

- Sobre el sistema de creencias de los profesores acerca de las matemáticas, de su enseñanza y de su aprendizaje
- Sobre las actitudes de los profesores acerca de las matemáticas, de su enseñanza y su de su aprendizaje

Por su parte, la componente dinámica es la parte del CDCM que el profesor en formación construye a partir de sus conocimientos (componente estática), de sus creencias, de sus actitudes y de una implicación personal en la enseñanza. Lo "dinámico" tiene que ver con el hecho de que se construye a través de un proceso dialéctico entre teoría (componente estática) y práctica. Esta dialéctica permite al profesor en formación construir una parte del CDCM y reconstruir la componente estática del mismo. Esto significa que la reflexión-acción modifica al sujeto pero permite modificaciones también de los conocimientos de referencia.

En síntesis, el CDCM se construye mediante un proceso de reflexión personal que toma como referencia al conocimiento del contenido matemático y al específico de la enseñanza-aprendizaje. En este sentido, la enseñanza desarrollada por los profesores expertos (plasmada en documentos o videos), la propia práctica docente del profesor en formación y el análisis que de ellas se realiza, constituirían los elementos de referencia que posibilitan el proceso dialéctico entre teoría y práctica, en otras palabras, la componente dinámica se objetiva en la práctica. Hasta aquí, dos reflexiones parecen necesarias, la primera tiene que ver con la intención de modificar la tripleta tradicional de formación mediante la inclusión del saber didáctico, en este sentido, el cambio de modelo parecía expresarse mediante el siguiente esquema:

	Formación tradicional	**Formación con la inclusión del saber didáctico**
Componentes	Conocimiento sobre las matemáticas	Conocimientos sobre las matemáticas
	Conocimientos psicopedagógicos	Conocimientos específicos del la enseñanza- aprendizaje (saber didáctico)
	Práctica "aplicativa"	Práctica reflexiva (componente dinámica)

Como se puede observar, los cambios más significativos se encuentran en la sustitución del saber psicopedagógico por el saber didáctico, lo que representa un intento por situar al saber didáctico como referencia obligada en los procesos de formación, otro cambio es el de una práctica "aplicativa" por una reflexiva, modificación que obedecía al intento de abandonar la noción "aplicativa" entre teoría y práctica. Sin embargo y no obstante estos cambios, lo que se puede ver es que este autor hace ajustes mínimos al modelo de los tipos y componentes de Wilson, Shulman y Ritcher, por ejemplo, cuando se describen los elementos de la componente estática se pueden ver todos los tipos de conocimiento de este modelo, incluso cuando Blanco ubica los conocimientos psicopedagógicos como parte de la componente estática, rompe de alguna manera con su idea de ubicar sólo los conocimientos del contenido y didáctico (sobre la enseñanza-aprendizaje) como referentes de la componente dinámica, aunque con esta inclusión, se ajusta a la idea de conocimiento pedagógico del contenido de Shulman.

Por otra parte, y en congruencia con "la aproximación cognitiva", se incluyen dimensiones de los conocimientos sobre el profesor, de sus creencias y de sus actitudes, como elementos que explican los modelos de enseñanza existentes e influyen sobre la práctica de los profesores en formación, en este caso, al igual que en el anterior, su inclusión se ajusta perfectamente con el modelo básico de la aproximación cognitiva, ya que la necesidad de considerar el conocimiento sobre los profesores (sobre *él mismo*) había sido advertida también por Carrillo et al (1998), de manera que, a pesar de buscar una cierta distinción, la propuesta de Blanco se ajusta de manera integra con el modelo mencionado.

Sobre la componente dinámica, puede decirse que también es una idea cercana a las propuestas de "la aproximación cognitiva", la referencia de Carrillo et al, (1998) sobre la necesidad de los aprendizajes situados en la formación o la de considerar la formación de un profesor reflexivo (a la manera de Schön, 1995), son ideas que designan aquello que Blanco llama la componente dinámica. Sobre esta última puede decirse también que, aún cuando el proceso práctico reflexivo sea una herramienta didáctica para construir la componente dinámica del CDCM, es necesario interrogarse sobre las formas de transmitir los otros tipos de conocimiento, es decir, preguntarse sobre otros “medios” didácticos mediante los que pueden transmitirse los componentes del conocimiento del profesor.

Sobre este respecto, Blanco (1995) menciona que la construcción de formas metodológicas para la formación debe tomar en cuenta la naturaleza de cada uno de los saberes puestos en juego y las fuentes “reales” para el aprendizaje de los profesores en formación. En congruencia con esta idea, propone considerar primero la “transmisión” de los CM y de los CEA, ya que estos tipos de conocimiento proveen una nueva información a los profesores en formación que les permite analizar y modificar sus concepciones sobre la naturaleza y la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas; analizar los contenidos propios del currículo escolar y les proporciona un nuevo contenido sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. En otras palabras, debe transmitirse primero la teoría (componente estática) para después ir a la práctica (componente dinámica), secuencia que es la propuesta de la llamada (por él) tripleta tradicional.

Sobre las formas de transmitir dichos conocimientos, asume que para construir el CM deben desplegarse formas de enseñanza similares a las que se desarrollan en las escuelas elementales, sobre el respecto menciona:

> ... tendríamos que considerar una metodología activa, en cierto sentido isomorfa a la metodología que nosotros deseamos sea desarrollada en el futuro por profesores en formación en la escuela. La información aportada debe serlo dentro de unos esquemas metodológicos que rompan la contradicción (...) y acorde con las propuestas renovadoras para la educación matemática (Blanco; 1995, p. 214)

Como puede inferirse, este isomorfismo es útil para transmitir el conocimiento matemático y algunos elementos generales del conocimiento sobre la enseñanza, sin embargo, difícilmente podrían utilizarse para transmitir conocimientos sobre el aprendizaje, sobre el curriculum y sobre los profesores, por esta razón, para transmitir el CEA propone una metodología ligada con la observación del medio en el que el futuro profesor se desarrollará profesionalmente, sobre este respecto menciona,

> ... se hace necesario introducir estudios de casos de profesores expertos donde se pueda observar la enseñanza desarrollada y analizar los diferentes componentes señalados por el Conocimiento Didáctico del Contenido.... (Blanco; 1995, pp. 214-215)

Como se puede apreciar, hasta aquí sólo ha sugerido estrategias para la componente estática, aunque, como se ha señalado, la construcción de los conocimientos integrados en la componente dinámica deriva de la reflexión-acción sobre la práctica, por esta razón menciona:

> ... A este respecto [la construcción de su propio CDCM], la combinación de la metodología cualitativa [entrevistas, observaciones de su clase, diarios, etc.,] y técnicas de cambio conceptual, en referencia a los propios profesores en formación durante el período de prácticas, son un instrumento adecuado que les ayuda a profundizar en «sus» pensamientos y «sus» acciones docentes, permitiéndoles un cambio en sus creencias, actitudes, y conocimiento sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. (Blanco, 1995, p. 216)

En síntesis, la propuesta de Blanco es un ejemplo de como "la aproximación cognitiva" se concretiza en una propuesta de formación, en ésta puede verse la inclusión de conocimientos sobre la materia, del conocimiento pedagógico del contenido, del conocimiento curricular y del conocimiento sobre los profesores. Frente a las cuestiones sobre la articulación y la transmisión de esos saberes, la propuesta establece a la práctica reflexiva como herramienta articuladora privilegiada y a las estrategias "isomorfas" y de observación como medios para la transmisión de saberes "estáticos". No obstante estas propuestas, son notables ciertas ausencias, ¿cómo transmitir los conocimientos curriculares?, ¿cómo los referidos a los materiales curriculares? ¿cómo los referidos a las nociones de la didáctica? ¿cómo las referidas a las estrategias de enseñanza para un tópico específico?...

1.3. SABERES O PRAXEOLOGÍAS. "LA APROXIMACIÓN EPISTEMOLÓGICA"

A decir de Bosch y Gascón (2002) la diferencia fundamental entre "la aproximación cognitiva" y "la epistemológica", radica en que esta última tuvo como primer objeto de estudio no al alumno ni al maestro, sino al saber, a la actividad matemática, su construcción, su desarrollo y su difusión. Al tomar este objeto de estudio se asumía que,

> ...los conocimientos del alumno, sus actividades de aprendizaje, la práctica enseñante del profesor, los procesos cognitivos que acompañan esas actividades y sus prácticas, e incluso los procesos de enseñanza-aprendizaje en toda su complejidad, deben ser considerados como

> objetos de estudio “secundarios” (lo que no significa que sean menos importantes), y construidos a partir de la noción primitiva de actividad matemática... (Bosch y Gascón, 2002, p. 6)

Por esta razón, en sus inicios, algunas teorías incluidas en “la aproximación epistemológica” [44] no estudiaron -al menos explícitamente- el comportamiento del alumno o el del profesor. Sin embargo, una vez que la enseñanza se comenzó a estudiar –aunque de manera tardía-, la brecha entre “la aproximación epistemológica” y la “cognitiva” se profundizó, ya que uno de los primeros aportes de la teoría antropológica didáctica (la noción de transposición didáctica) puso en evidencia la imposibilidad de interpretar adecuadamente los fenómenos didácticos, sin tomar en cuenta las diferentes formas de manipulación social de un saber (matemático), por esta razón, desde “la aproximación epistemológica”, el estudio de la actividad matemática escolar se integra en una problemática mucho más amplia: en el análisis de las prácticas matemáticas institucionales.

En este sentido, el saber se constituye como eje rector de esta aproximación ya que considera que bajo una forma u otra, el modelo epistemológico de las matemáticas incluye un modelo de la construcción, de la evolución y de la difusión de esta actividad y en particular, incluye un modelo de su enseñanza para las instituciones escolares. Este postulado “.... consiste en considerar que lo didáctico, entendido como eso que es relativo a la enseñanza y el aprendizaje escolar de las matemáticas, integra lo matemático y debe ser cuestionado y modelado a partir de ello...” (Bosch y Gascón, 1998; 9) y permite considerar que las formas de transmisión y difusión escolar de las matemáticas son un objeto que debe estudiarse y modelarse con el fin de abordar los problemas relativos al “problema del profesor de matemáticas”[45], pero el abordaje de los problemas del profesor, lo matemático (la difusión) y lo didáctico (la transmisión) deben ser objetos que se estudien de manera conjunta.

---

[44] En opinión de estos autores, la teoría de las situaciones didácticas, la de los campos conceptuales, la de la dialéctica herramienta-objeto y la antropológica didáctica pueden tomarse como “teorías epistemológicas” en tanto que proponen modelos (definiciones, descripciones, etc.) de eso que es la actividad matemática o de los conocimientos que se construyen cuando se hace matemáticas.

[45] Este problema no es otro que el de enseñar matemáticas o el de reconstruir las *praxeologías matemáticas* en el aula.

No obstante este postulado, dentro de esta aproximación existen varias formas de pensar la relación entre lo didáctico y la formación; una que analiza la articulación entre lo matemático, lo pedagógico y lo didáctico, otra desde la que se asume a la Teoría de las Situaciones Didácticas como referente principal y una más basada en la Teoría Antropológica Didáctica que articula lo matemático y lo didáctico (en la formación) a través de la noción de *praxeología.* En lo que sigue se analizarán las ideas principales de unas y otras con el objetivo de construir algunos referentes que permitan analizar los procesos de formación de los sujetos de este estudio.

1.3.1. La formación, entre la pedagogía y la didáctica. Primeras aproximaciones "epistemológicas"

De acuerdo con Butlen y Peltier (1994), una de las primeras aproximaciones a la formación de profesores puede caracterizarse como una postura que "... no comparte del todo el análisis que consiste en unir matemática y didáctica de las matemáticas en la formación de maestros de escuela..." Butlen y Peltier (1994, p. 6). Dicha aproximación está representada por los trabajos de Kuzniak (1994), Houdement (1995) y Peltier (1995), los que, a pesar de perseguir objetivos distintos,[46] toman un punto de partida común, la existencia de tres saberes para la formación profesional de los enseñantes.

- El saber teórico
- El saber práctico
- El saber en uso o pedagógico

A decir de Kuzniak (1994, p. 3), el objetivo de la enseñanza en los centros de formación es transmitir en dos fases un conjunto de saberes y competencias: la primera se relaciona con la teorización de la transmisión de contenidos matemáticos a los alumnos (la didáctica de las matemáticas) y la segunda incluye

[46] Mientras Kuzniak (1994) explora las estrategias de formación que utilizan los formadores de profesores, Houdement (1995) intenta construir lo que ella denomina un proyecto global de formación y Peltier (1995) analiza la evolución de las tareas planteadas en los exámenes de reclutamiento de los Institutos Universitarios de Formación de Maestros (IUFM).

todos los conocimientos útiles al enseñante.[47] De ahí que en su opinión, una pregunta central sea ¿cuáles son los conocimientos mínimos que deben incluirse en la formación? Para este autor, un futuro profesor debe conocer lo que aprenden los niños, cómo lo aprenden y cómo hacer para que aprenda un niño. No obstante, esta respuesta es genera más interrogantes: ¿cuál es la naturaleza de los conocimientos sobre la práctica de enseñanza de las matemáticas que deben poseer los profesores en formación?, ¿puede decirse que ese es en efecto "un saber profesional"?

Por su parte, Houdement (1995, p. 11) señala que "...una enseñanza destinada a los adultos, en vista de enriquecer sus saberes profesionales comporta saberes de diferentes naturalezas que administran la acción profesional y la acción profesional los estructura..." Siguiendo el análisis de los saberes ligados a la formación de adultos de G. Malglaive[48], en una primera clasificación Houdement (1995) distingue dos tipos de saberes: unos del lado de la teoría y otros del lado de la práctica. En su opinión, la teoría busca precisar todos los elementos de la racionalidad y de la conceptualización, permiten conocer al objeto y sus modalidades de transformación y aunque no están ligados operatoriamente con la práctica, permiten ajustar las intervenciones sobre la realidad, prever sus efectos y fijar las condiciones y los límites de la validez. El efecto de un saber teórico, menciona Houdement es "hacer conocer" y no el de "hacer-hacer", no dice lo que se debe hacer, pero conduce a hacerlo con discernimiento.

En un análisis más fino, Houdement caracteriza a los saberes que deberían ser parte de la práctica profesional según las relaciones que éstos tienen con la práctica, de dicha caracterización, distingue los siguientes saberes:

- Los saberes teóricos que permiten conocer al objeto y, aunque no están en relación directa con la práctica, permiten ajustar las intervenciones sobre la realidad. Es el fundamento indispensable de la eficacia de los saberes que regulan la acción (los saberes procedimentales)

---

[47] Esta posición es compartida por Houdement (1995; 11), para quien, los futuros formados deben adquirir, conocimientos sobre la matemática y sobre la transmisión de un saber matemático a los niños.

[48] La autora se refiere aquí a la obra de G. Malglaive (1990) *Enseigner á des adultes.* Ed. PUF, París.

- Los saberes procedimentales están del lado de la práctica y suponen un conocimiento de la realidad sobre la que opera la acción. Este tipo de saberes representan los enlaces de operaciones, las reglas y las condiciones que deben respetarse para obtener los efectos deseados en la práctica, se organizan en procedimientos o planes de acción, son abstraídos de la acción y aparecen de forma escrita en los manuales.
- Los saberes prácticos representan la parte complementaria de los procedimentales, están directamente ligados a la acción y apuntan hacia la eficacia. Por ello no se encuentran en textos.
- Los “saber-hacer” están constituidos por hábitos o rutinas y pueden resumirse en el “oficio” de un experto profesional.
- El saber en uso. Los saberes anteriores se alimentan unos a otros y son elementos del saber en uso, que ésta ligado a la maestría en un oficio o del experto profesional.

En opinión de Houdement, la noción de *saber en uso* puede importarse al campo de la formación de enseñantes, donde puede nutrirse de los saberes disciplinarios (matemáticos), didácticos y pedagógicos. En su perspectiva, didáctica y pedagogía no se oponen, se complementan, por ejemplo la didáctica permite ciertas especializaciones disciplinarias porque se relaciona con los saberes mientras que la pedagogía guarda un carácter más general, esto es,

> Como existe una didáctica, campo de la estructuración, de la organización, de la gestión de los contenidos, sería también bueno crear una pedagogía, corpus de saberes pedagógicos, de conocimientos profesionales surgidos de investigaciones en ciencias de la educación sobre la gestión de flujos interactivos de información, de la relación interactiva, de las condiciones de aprendizaje, de la situación pedagógica puesta en obra por el enseñante en clase. Se trataría de desarrollar unos *saberes de la práctica.* (Altet, 1994 cit. por Houdement, 1995, p. 15)[49]

[49] La obra a la que se hace referencia en esta cita es M. Altet (1994) *La formation professionelle des enseignants.* Collection Pédagogie d’aujourdhui, Editions PUF, París.

No obstante esta diferencia, Houdement señala que pueden existir elementos teóricos para cada una.[50] Una vez importada la noción de *saber en uso* y acotadas las diferencias entre didáctica y pedagogía, ¿cómo identificar los saberes necesarios para la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria?, esto es, ¿cuáles son los saberes necesarios para la formación de los profesores?

Houdement ubica del lado de los saberes procedimentales a los que tienen a su cargo la organización de las condiciones de aprendizaje y de la situación pedagógica, es decir, ubica a los saberes prácticos y pedagógicos como procedimentales. Esos saberes señala, se enriquecen con la experiencia adquirida en el ejercicio del oficio y algunos son explicitables e incluso generalizables mientras que los saberes matemáticos son una parte de los saberes teóricos.[51] Finalmente, menciona Houdement (1995), los saberes didácticos son más bien saberes procedimentales porque requieren del conocimiento de la realidad y se fundan sobre el conocimiento de ella.

Desde una postura similar, Kuzniak (1994) afirma que los conocimientos que deben adquirir los profesores en formación son: los teóricos (matemáticos y didácticos), los marcados por el saber-hacer y un tercero que sólo la experiencia puede dar (el pedagógico). En su opinión, los dos primeros son saberes teóricos reconocidos de manera institucional y la diferencia fundamental entre el didáctico y el pedagógico es que el sello distintivo del saber didáctico es su esfuerzo por la teorización mientras que el saber pedagógico es la reunión compleja y a veces contradictoria de:

- Un saber procedimental abstraído de la observación de una práctica y objetivado en los manuales, obras que no son teóricas, y

[50] Aunque en opinión de Malglaive, por el momento no existe una teoría pedagógica

[51] Sin embargo, considera que las matemáticas del profesor deben estar "más arriba" que los contenidos de los programas de la escuela elemental, advierte que debe considerarse también aquello que la investigación en didáctica ha esclarecido; como el lugar de ciertos conocimientos tradicionales. En su proyecto global de formación Houdement, incluye como saberes matemáticos de formación a la geometría plana, los enteros y aproximaciones sobre la adición, geometría en el espacio, números no enteros, magnitudes y medidas de magnitudes, funciones numéricas, estructuras aditivas incluyendo la sustracción, multiplicación y estructuras multiplicativas, de la geometría plana, espacio y transformación

- Un saber proposicional (o declarativo), presentado como el saber dispensado en la escuela, que no es teórico pero está constituido de proposiciones lógicamente conectadas entre sí y se satisface con enunciar unos contenidos.

El saber pedagógico se caracteriza por su oscilación entre un polo teórico y otro cercano a la práctica y al sentido común, pero privado de la adaptabilidad de un modelo teórico. En el contexto de la formación de profesores los saberes proposicionales serían los ejemplos de actividades de clase, es decir, de ingenierías prestas a ser efectuadas, los saberes procedimentales serían las sugerencias sobre la enseñanza que aparecen en los manuales escolares (Kuzniak; 1994; 13). Una postura similar a la de Kuzniak es la de Peltier (1995) quien, citando a Altet (1994)[52] señala que junto a los saberes prácticos o de la experiencia, deben elaborarse ciertos saberes teóricos sobre:

- La disciplina
- La cultura enseñante y el sistema educativo
- Los saberes didácticos surgidos de la investigación en los diferentes campos didácticos
- Los saberes pedagógicos sobre gestión interactiva en clase, surgidos de investigaciones sobre los diferentes parámetros del proceso enseñanza-aprendizaje.

En un intento por sintetizar las posturas anteriores, puede decirse con Houdement y Kuzniak (1996) que existen "... tres niveles de saber, ligados a las matemáticas y que remiten a diferentes aspectos del oficio de profesor que se alejan progresivamente de los conocimientos puramente disciplinarios (...): el saber matemático, el saber didáctico y eso que llamaremos provisionalmente «el tercer saber»..." (p. 296)[53]. De la síntesis que estos autores realizan pueden

[52] La obra de Altet citada en este caso es la misma que cita Houdement.
[53] El "tercer saber" en este caso no es otro que el saber pedagógico.

extraerse los tipos de saberes para la formación y la naturaleza de cada uno de ellos. En su perspectiva, los saberes de formación deben ser los siguientes:

- Un saber disciplinario matemático (del lado de la teoría). Anclado sobre la enseñanza elemental o que plantee problemas ligados a su enseñanza,[54] en éste debe integrarse la reflexión heurística y la reflexión sobre la didáctica de las nociones a transmitir.
- Un saber didáctico (del lado de la teoría) constituido por los conceptos generados en el seno de la didáctica de las matemáticas.
- Un saber pedagógico o "tercer saber". Constituido por un saber procedimental que establece las reglas de acción, uno proposicional (ejemplos de ingenierías)[55] y uno más que sólo la experiencia parece dar. Este "tercer saber" tiene un cuerpo de referencia heterogéneo que integra elementos de diversas disciplinas objetivados en los libros del maestro y de los alumnos.

No obstante esta clasificación, existen saberes cuya pertenencia al saber pedagógico resulta discutible, por ejemplo el diseño y la experimentación de ingenierías es un trabajo que se realiza al interior de la didáctica de las matemáticas, algo similar ocurre con el proceso interactivo que permite gestionar las condiciones de aprendizaje, esto es, si hablamos del aprendizaje (y de la enseñanza) de un saber matemático y si consideramos que al interior de la didáctica de las matemáticas existen por lo menos tres *corpus* teóricos desde los que se ha explicado la gestión de este proceso,[56] es discutible la idea de ubicarlos fuera de los saberes didácticos. Lo mismo puede decirse del estudio de los errores

---

[54] Sobre esta idea puede confrontarse Butlen (1994, p. 7), Kuzniak (1994, p. 27) y Houdement (1995, p. 15)

[55] Luego de explorar las estrategias de formación Kuzniak (1994, p. 265), señala que más recientemente los estudios sobre los errores de los alumnos y la estructuración de escenas de clase se han integrado como componentes del saber pedagógico.

[56] En este caso nos referimos al proceso interactivo basado en la distinción de diferentes situaciones (o dialécticas) didácticas de la TSD, al proceso para dirigir el estudio que desde la TAD propone seis diferentes momentos y a la dialéctica herramienta objeto propuesta por Duoady.

(en tareas matemáticas) o de la estructuración de escenas de clase para la enseñanza de las matemáticas.[57]

Como se puede apreciar, es discutible la existencia de unos saberes didácticos solamente teóricos, incluso existirían dificultades para definir aquello que contendría el saber pedagógico y fundamentalmente se debilitaría la óptica desde la que se asume la formación de profesores como objeto de estudio que no pertenece "naturalmente" a la didáctica de las matemáticas.

1.3.1.1. Las estrategias de formación

Si bien hasta aquí se han caracterizado los saberes para la formación, una segunda tarea consiste en identificar las formas en las que se pueden "transmitir". Un aporte valioso en este sentido es la tipología de estrategias de formación, para Kuzniak (1994), existen dos grupos de estrategias mediante las que los formadores intentan transmitir los saberes de formación; las estrategias profesionales, que conciben a la formación como una preparación profesional para el oficio de profesor y las no profesionales que no comparten este principio.[58] Entre estas últimas se pueden enunciar las siguientes:

- Las estrategias culturales. Se caracterizan por dar prioridad a la transmisión de un saber matemático sin referencia pedagógica alguna. [59]
- Las estrategias de investigación aplicativa. Apuntan hacia la formación para la investigación.
- Las estrategias basadas sobre la autonomía. Brindan total autonomía al estudiante para que busque el conocimiento por diferentes vías, ya sea

[57] Sobre este respecto, Brousseau (1994; 56-57) señala que una función social de la didáctica de las matemáticas es la formación y que la enseñanza de la didáctica de las matemáticas a los profesores debe ayudar a adquirir conocimientos matemáticos particulares, presentaciones específicas de las matemáticas que deben enseñar y también conocimientos de las condiciones didácticas para esas enseñanzas. De manera que, para Brousseau, estos dos últimos tipos de conocimientos son más bien didácticos y no pedagógicos.

[58] La descripción de las estrategias que aquí se realiza es por demás sintética, sin embargo, en tanto herramientas de análisis para las prácticas de formación, en capítulos posteriores se analizarán con mayor detalle.

[59] Para Houdement (1995), las estrategias culturales también pueden considerarse profesionales ya que en ocasiones permiten transmitir algunos saberes pedagógicos ligados a la enseñanza de contenidos matemáticos, esto sucede, señala, cuando durante el despliegue de esta estrategia los formadores se dedican a dar consejos "pedagógicos" sobre la enseñanza de los contenidos matemáticos.

realizando exposiciones o tratando los temas del programa con la ayuda de algunas pistas bibliográficas.[60]

Entre las estrategias profesionales Kuzniak (1994) distingue tres diferentes tipos:

- Las estrategias basadas en el mostrar. Mediante la observación, ponen en contacto al estudiante con su futuro medio de trabajo, mostrándoles la práctica que deberán imitar. A decir del autor, esta es la forma más natural y antigua de iniciación a las prácticas profesionales y la lección modelo su ejemplo más claro.
- Las estrategias basadas en la homología. Se fundan también sobre un modelo de imitación, pero más complejo, se caracterizan por el hecho de que los formadores enseñan de la misma forma que desean el estudiante lo haga.
- Las estrategias basadas en la transposición. Se oponen a las precedentes porque ponen el acento en el saber didáctico como saber de referencia, en este caso los formadores reflexionan sobre las nociones didácticas que deben transponer.

De acuerdo con Houdement y Kuzniak (1996), las estrategias más apropiadas para la formación profesional de los profesores son las basadas en el mostrar, en la homología y en la transposición.

1.3.2. Aproximación basada en la Teoría de las Situaciones Didácticas

El ejemplo más ilustrativo de este tipo de aproximación[61] es la obra de Portugais (1995), quien basa su estudio en ciertas analogías entre el sistema didáctico (M-

[60] En la óptica de Houdement y Kuzniak (1996), las estrategias de investigación aplicativa y las basadas en la autonomía son marginales en la formación de profesores.

[61] En la perspectiva de Houdement y Kuzniak (1996), el trabajo de Portugais se distingue por su polarización sobre la tripleta didáctica de formación, también señalan otras aproximaciones que se polarizan sobre algún tipo de saber, por ejemplo las tesis de Pezard (1985) y Neyret (1995) se polarizan sobre el saber matemático, aunque existen otras que se polarizan sobre algunos componentes del "tercer saber", sin embargo, en su opinión, éstas últimas se han realizado (al igual que en México) desde perspectivas psicológicas y sociológicas. Una excepción en esta última

A-S) y el sistema de formación. Portugais considera un sistema de formación constituido por el formado, el formador y el saber didáctico como un caso particular del sistema didáctico, en su opinión, el sistema de formación está sujeto a los mismos fenómenos, regularidades y funcionamientos que la teoría didáctica ha encontrado en el sistema didáctico ya que "...el sistema didáctico *stricto sensu* (maestro/alumno/saber) no difiere fundamentalmente de un sistema de formación teniendo entre otras finalidades la enseñanza de la didáctica de las matemáticas..." (Portugais, 1995, p. 64)

Bajo esta consideración, asume que la didáctica debe tomar a su cargo lo que concierne a su propia enseñanza, por esa razón, analiza las cuestiones relativas a la formación inicial en la didáctica de las matemáticas tomando como referente algunos conceptos que la teoría didáctica ha pensado para el sistema didáctico en el sentido estricto. La enseñanza a partir de problemas, de situaciones, de contratos, de transposiciones, de esquemas, etc., constituyen el entramado conceptual para su estudio. No obstante las similitudes supuestas entre los dos sistemas, lo relevante son algunos aspectos particulares del sistema de formación que este autor plantea respecto de los tipos de conocimientos.

1.3.2.1. Un doble sistema y una posición dual para el formado

A decir de Portugais (1995), el formado ocupa una doble posición en el sistema de formación, la de futuro profesor y la de alumno. Cuando ocupa el lugar del alumno, la relación con el formador está mediada por la intención de aprender a enseñar, pero cuando juega el rol de enseñante, la relación está mediada por su intención de enseñar matemáticas. El formado ocupa estas dos posiciones en un mismo tiempo, es por ello que se habla de la dualidad del profesor en formación.

Como señala Portugais (1995), esta dualidad tiene sus efectos en el proceso de formación, ya que lo que le dice o transmite el formador será reflexionado y representado por el formado a partir de su posición de *futuro enseñante* pero sin poder sustraerse a su posición de *enseñado*. Eso implica que

---

categoría sería la tesis de Huraux-Masselot (2000), quien analiza los efectos de una formación didáctica en las prácticas de los profesores en formación.

el análisis y desarrollo de cualquier proceso de formación debe tomar en cuenta los dos sistemas donde se ubica el formado, el *sistema didáctico (stricto sensu)* y el *sistema de formación*.[62]

1.3.2.2. Dos sistemas y tres saberes puestos en juego

La aceptación de un doble sistema implica aceptar también que existen dos saberes distintos en la formación, Portugais señala que el saber que se pone en juego dentro del sistema de formación no es el saber matemático y que cuando se requiere especificar cierto saber didáctico sobre las matemáticas, se adquiere la obligación de especificar también un determinado saber matemático, ya que no se puede analizar, transmitir o aprender un saber didáctico sin referencia específica a saber matemático.

Para poner en marcha el sistema de formación, se debe incorporar un contenido matemático (saber 1)[63] y un saber didáctico (saber 2), sin embargo, la inclusión de estos saberes sólo toma en cuenta una de las posiciones del formado, la de alumno. Para tomar en cuenta la posición de *futuro profesor* que no es abarcada por los saberes 1 y 2, es necesario hablar de otro saber (de nivel 3) que alude a los conocimientos que el formado construye a partir de su experiencia, éstos son distintos a los saberes matemático y didáctico, son un saber de la experiencia que concierne al trabajo didáctico y que integra a los saberes matemático y didáctico en una situación de enseñanza.

Un ejemplo de esta estructura –establecida por Portugais– sería el trabajo didáctico sobre los errores (saber 2) que los alumnos cometen en los algoritmos básicos de cálculo (saber 1), éste es un trabajo didáctico que el formado debe realizar para identificar y tratar didácticamente los errores en una situación real de enseñanza y que precisa tomar como referencia los saberes matemático y didáctico. Existe una relación de "inclusión" entre los saberes matemáticos,

[62] Cuando Portugais menciona al sistema de formación, no se refiere con este término al contexto global en el que el conjunto de actores desarrollan la formación de profesores sino a las relaciones entre el formador y el formado que son mediadas por un determinado saber didáctico, en este caso la referencia es el saber de la didáctica de las matemáticas.

[63] Un ejemplo de este saber se puede ver en el estudio de Portugais, en éste, "el saber 1" son las operaciones aritméticas básicas con sus respectivos algoritmos. El "saber 2" en el mismo estudio son los errores de los alumnos de escuela elemental.

didácticos y de la experiencia, ya que para efectuar la enseñanza de las matemáticas debe seleccionarse el saber matemático, luego el saber didáctico ligado al saber matemático y posteriormente, a partir de su experiencia, el formado debe construir un saber para trabajar adecuadamente el contenido matemático.

Como se ha podido apreciar, existen similitudes entre Portugais, Kuzniak y Houdement, sobre todo la aceptación de tres tipos de saberes para la formación: los saberes teóricos (matemáticos y didácticos) y los de la experiencia. Respecto de estos saberes, su posición es clara, los conocimientos que se ponen en juego en el proceso de formación son tres:

- El saber matemático (saber 1)
- El saber didáctico (saber 2), y
- El saber de la experiencia (saber 3)

No obstante las similitudes, es necesario puntualizar dos características esenciales de la postura de Portugais, la primera tiene que ver con el campo en el que se circunscriben los tres tipos de saberes. A pesar de las diferencias entre estos saberes, todos confluyen en el campo de lo didáctico, es decir, la incorporación de unos y otros es orientada por un objetivo didáctico, gestionar de manera adecuada la enseñanza, en este sentido puede decirse que, cuando se busca gestionar una tarea didáctica (como el tratamiento de los errores que cometen los alumnos), el saber matemático y de la experiencia no tienen existencia significativa si no se ponen en relación con un concepto u objetivo didáctico, esto significa que el formado adquiere el saber matemático y de la experiencia guiado por las exigencias que impone el saber didáctico, por esta razón, consideramos que dichos saberes se articulan en el campo de lo didáctico.

Por otra parte, la relación entre un tema matemático, un concepto de la didáctica y un saber de la experiencia, plantea una articulación diferente entre teoría y práctica que se caracteriza por una relación de “inclusión”, es decir, el saber matemático se incluye dentro de un saber didáctico y a su vez, ambos se incluyen en la práctica de enseñanza para generar un saber distinto basado en la experiencia. Este modelo permite pensar a la práctica como un segundo momento para la articulación; el primero estaría dado por el encuentro entre los saberes matemático y didáctico, el segundo por el encuentro de éstos con el saber de la experiencia.

1.3.2.3. La didactificación de la didáctica.

Para Portugais (1995), aceptar la existencia de dos sistemas[64] implica aceptar que existen dos contratos didácticos[65] distintos; un contrato didáctico y un contrato de formación, se puede suponer que existe un contrato didáctico funcionando en el sistema didáctico *stricto sensu*, en el que el formado ocupa la posición de alumno y se puede suponer que existe un contrato de formación donde el formado ocupa la posición de eventual profesor. Ahora bien, conforme a la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau (1998) y la hipótesis constructivista de la didáctica de las matemáticas, se dice que:

> La concepción moderna de la enseñanza demanda al maestro provocar en el alumno las adaptaciones [a la manera constructivista] por una elección juiciosa de «problemas» que él le propone. Esos problemas son elegidos de forma que el alumno pueda aceptarlos y deben hacerle tratar, reflexionar, hablar y evaluar su propio movimiento. Entre el momento en que el alumno acepta el problema como suyo y el que produce su respuesta, el maestro se resiste a intervenir como proveedor de los conocimientos que desea ver aparecer. El alumno sabe bien que el problema ha sido escogido para hacerle adquirir un conocimiento nuevo, pero debe saber también que ese conocimiento está enteramente justificado por la lógica interna de la situación, que puede construir sin llamar a unas razones didácticas. No solamente puede sino debe también, porque no habrá adquirido verdaderamente este conocimiento hasta que sea capaz de ponerlo en obra en situaciones que encontrará fuera de todo contexto de enseñanza y en la ausencia de toda indicación intencional. [Esta] cierta situación es llamada *situación adidáctica* (Brousseau, 1998, p. 59)

Tomando como referencia la noción de situación adidáctica, Portugais construye un dispositivo de formación que crea una situación que plantea al formado un problema a resolver. El problema depende de las obligaciones

[64] Cabe mencionar que en su estudio, este autor tiene por objetivo experimentar un dispositivo de formación que puede tomarse como una estrategia adecuada para la formación de profesores.
[65] Para Brousseau (1998; 60) “El contrato didáctico es la regla del juego y la estrategia de la situación didáctica. Es el medio que tiene el maestro para ponerla en escena. Pero la evolución de la situación modifica el contrato que permite entonces la obtención de situaciones nuevas...”

impuestas por la situación, en particular, de la dinámica o de la fase en el plano de la ingeniería[66] y del contenido del seminario[67]. Ese problema deriva también de la no explicación del saber de la experiencia y concretamente se va a traducir por la ausencia completa de consignas para todo lo que concierne a la forma de administrar los errores de los alumnos en situación didáctica.

En su rechazo a explicar el saber de la experiencia, el formador induce intencionalmente un elemento perturbador en la situación. "La formación parte entonces de una súbita *ruptura de contrato,* ruptura constitutiva de la situación a-didáctica de formación..." (Portugais; 1995; 67) necesaria en el funcionamiento (problemático) del formado. Esta ruptura es peculiar porque el saber de la experiencia debe ser construido por el formado basándose en los saberes matemático y didáctico que han sido explicados durante el seminario. En resumen, lo que Portugais plantea es la transmisión de estos tres saberes a través de lo que él denomina *ingeniería de formación.*[68].

La pregunta ahora es ¿cómo tipificar esta estrategia que contiene en sí misma varias dimensiones? En primer lugar, dentro de su situación de acción –el seminario– pueden observarse estrategias basadas en el mostrar (análisis de protocolos de clase, de tareas y manuales), sin embargo, éstas sólo corresponden a los saberes matemático y didáctico, no pueden verse como la estrategia fundamental. En segundo lugar, debe considerarse que la Teoría de las Situaciones Didácticas es una teoría que explica y orienta la transmisión del saber matemático y cuando se utiliza como referente para la transmisión del saber didáctico, se "enseña" de la misma manera que en la escuela elemental, por lo que sería una estrategia de homología. Finalmente, debe considerarse que el

---

[66] En la didáctica francesa de las matemáticas, el término ingeniería didáctica tienen varios significados; con él se designa tanto a una metodología de investigación que se distingue por "poner a prueba" ciertas situaciones didácticas, al producto surgido de tal experimentación como y a una disciplina.

[67] En analogía con la teoría de las situaciones didácticas, el seminario es la situación de acción porque parte de los análisis sobre el funcionamiento y la significación del error de los alumnos. Entre las diversas actividades del seminario se encuentran, análisis de tareas, de pruebas, de protocolos y de manuales escolares.

[68] Básicamente una Ingeniería didáctica tiene cuatro fases: a) los análisis previos, b) el diseño de las situaciones, c) la realización didáctica y d) los análisis posteriores. En el estudio de Portugais se puede ver el desarrollo de estas cuatro fases, lo que significa una toma de postura en total correspondencia con la Ingeniería Didáctica.

formador tiene conciencia de la existencia de un saber didáctico (tratamiento de los errores) que es adaptado para su transmisión, en este sentido se utiliza una estrategia de transposición. De manera entonces que, si se acepta la presencia de prácticamente todas las estrategias mencionadas por Kuzniak (1995), sólo faltaría tipificar de manera general la estrategia que Portugais sugiere.

Al margen de las estrategias utilizadas en el seminario, se puede decir que lo que sugiere Portugais es una TRANSPOSICIÓN posible para el saber didáctico o en sus propios términos, se trata de *didactificar la didáctica,* aunque como él mismo advierte

> ... debe tenerse conciencia de que el saber 2 no está totalmente explorado y que no existe todavía la tradición de enseñanza de la didáctica, lo que implica la imposibilidad, por el momento, de ejercer un control sobre el proceso transpositivo que le concierne.... (Portugais; 1995; 66)

Puede decirse que en un proceso global de transposición del saber didáctico, como el que analiza Portugais, es necesario desarrollar estrategias basadas en el mostrar, en la homología, y en la transposición. Mediante esta ingeniería, Portugais muestra que su dispositivo puede preparar a los profesores en formación para construir saberes de la experiencia, puesto que en su opinión, las intervenciones de los profesores en formación (saber de la experiencia) evolucionan mediante el trabajo con su dispositivo. [69]

1.3.3. Las praxeologías del profesor

Otra perspectiva desde la que se asume a la formación de profesores como objeto de la didáctica de las matemáticas está representada por la teoría antropológica didáctica (TAD). En el seno de ésta Chevallard (1994) asume que la "clase" ha sido el objeto de estudio privilegiado por la didáctica de las matemáticas pero que el conjunto de instituciones donde aparece una intención didáctica relativa a lo matemático debe ser también un objeto de estudio de esta disciplina. A decir de

[69] No obstante esta conclusión, Houdement y Kuzniak (1996; 299) mencionan que "... esta aproximación, que utiliza, sin discutir los resultados de la didáctica de las matemáticas, no parece tomar en cuenta ni la complejidad de los saberes didácticos (...) ni la globalidad de los saberes cuya transmisión está a cargo de los formadores..." En su opinión, la propuesta de Portugais sólo muestra un dispositivo para transmitir el saber didáctico, no así el saber de la experiencia.

Chevallard (1994), la formación ha sido un objeto olvidado por los didactas, entre otras razones porque se ha pensado que la relación entre formado y matemáticas no es lo fundamental en la formación de profesores, sin embargo, afirma, cuando surge un sistema didáctico en la formación sus relaciones deben ser estudiadas para establecer leyes de funcionamiento o para crear sistemas didácticos nuevos.

Bajo esta lógica puede admitirse que en las instituciones donde se forma a los profesores se instala un sistema didáctico susceptible de ser estudiado por la didáctica de las matemáticas. Aunque, como veremos enseguida, el "estudio" es una noción que en la TAD, cobra un sentido particular.

1.3.3.1. El "estudio" como objeto de la didáctica

Si se considera que una institución es formadora por su intencionalidad didáctica, es necesario precisar que desde la TAD, lo didáctico siempre remite al estudio, esto es, "... lo *didáctico* se identifica con el simple hecho de que *alguien (x) estudie alguna cosa (o).* En otros términos, lo didáctico es consustancial al estudio. Existe *lo didáctico* porque existe el estudio..." (Chevallard, 1998a; 19), un contrato didáctico por ejemplo, es un contrato relativo al estudio de un objeto que se realiza a través de diferentes tipos de situaciones didácticas, es por ello que puede considerarse a la didáctica como la ciencia del estudio del objeto.

Si al estudio del objeto (o) se añade un estudiante (x) que puede ser un alumno de cualquier nivel escolar o un investigador, se forma el sistema didáctico S(x;o) en el que caben por lo menos dos posibilidades: cuando X es un investigador por lo general su objeto de su estudio es una pregunta abierta en la comunidad "sabia" donde él se sitúa. Una segunda posibilidad es que X sea un alumno de cualquier nivel escolar, en este caso el objeto de estudio tiende a presentarse *a priori* como una "respuesta" previamente elaborada para una cierta tarea problemática (Chevallard, 1998b; 1). En este segundo caso puede aparecer otro elemento del sistema didáctico, el director de la investigación o el profesor (y). Con la inclusión de este elemento se forma un sistema didáctico *de ayuda,* S(x; y; o) en el que Y, en tanto profesor de matemáticas, ayuda al alumno a estudiar el objeto.

En su función de *director de estudio,* un profesor podrá revelarse "adecuado", "eficaz" o puede parecer "disfuncional", no por sus características individuales, sino por la formación objetiva que ha recibido, esto significa que desde la TAD los profesores no son sujetos de estudio como personas, sino como representantes de las prácticas institucionales que desarrollan. Puede decirse entonces que "... hay un *proceso didáctico (relativo a las matemáticas)* cada vez que alguien *estudia matemáticas* o cada vez que alguien *ayuda a otro u otros a estudiar matemáticas*..." (Chevallard et al, 1998, p. 57) y cuando surge un sistema didáctico en el que se incluye un sujeto, un profesor y un objeto matemático, el didacta puede y debe estudiarlo para establecer sus leyes de funcionamiento o para crear sistemas didácticos nuevos.

Sin embargo, es necesario aclarar que tanto en el caso de un alumno como en el de investigador, la palabra "estudio" se utiliza en un sentido muy amplio, engloba las nociones de enseñanza y aprendizaje, es decir, aquí la enseñanza aparece más bien como un medio, como una ayuda para el estudio de un determinado objeto matemático. En términos más generales, el "estudio" se refiere a todo lo que se hace en una institución para resolver las tareas matemáticas problemáticas que se plantean, sin importar que el estudio se desarrolle en el ámbito escolar o en cualquier otra institución social, ya que como lo señala Bosch (et al, 2003, p. 84)"... hay estudio en todas las instituciones de la sociedad cuando se manipula un saber establecido o en vías de establecerse..."

En el caso de los alumnos, el estudio alude a todas las acciones que hacen para cumplir con las tareas matemáticas que se les plantean, mientras que en el caso del investigador, es todo aquello que hace para aportar respuestas a las preguntas que se plantean en el campo científico donde se ubica. De la misma manera, un profesor en formación estudia un objeto didáctico cuando intenta establecer respuestas para ciertas tareas didácticas que se le plantean, mientras que el investigador en didáctica estudia dicho objeto cuando realiza acciones que le permitan responder a cuestiones didácticas para las que no hay una respuesta disponible. En otros términos, las investigaciones que se hacen en el seno de la didáctica son procesos de estudio que realizan los investigadores sobre un objeto didáctico y la formación de profesores es un proceso de ayuda al estudio de dicho objeto didáctico.

Por otra parte, en el caso de la enseñanza de las matemáticas el estudio aparece como una noción integradora que permite analizar bajo una misma mirada tanto el trabajo del profesor cuando enseña matemáticas como el del alumno cuando las aprende,[70] ya que por lo general en la escuela (aunque también en la investigación) el estudio casi siempre es una actividad colectiva que precisa la ayuda de uno o varios *directores* –el profesor- y de un programa de estudio. Si se acepta que la formación de profesores está sujeta también al proceso de estudio, el formador se convierte en un director dentro de un sistema en el que el objeto es el saber didáctico referido a las matemáticas, el formado por su parte tiende a estudiar las respuestas previamente elaboradas a la pregunta: ¿cómo enseñar matemáticas? Sin embargo y no obstante la relación entre el estudio y la formación, queda una pregunta crucial para responder: si en el caso del sistema didáctico la naturaleza del objeto es poco discutible puesto que se refiere al saber matemático, en el sistema de formación ¿cuál es la naturaleza del objeto a estudiar?

1.3.3.2. La formación, entre los saberes y las praxeologías

Como se ha mencionado en apartados anteriores, para Chevallard (2001), las escuelas para alumnos y para profesores tienen algo en común; son escuelas que crean y difunden normas para la vida (incluyendo las matemáticas) en el primer caso y normas didácticas en el segundo caso. Estas normas, se dice, toman la forma de praxeologías, de organizaciones praxeológicas o simplemente de organizaciones (matemáticas y didácticas según sea el caso). Tomar a las normas como praxeologías y no como saberes, tiene que ver con la idea asumida en la TAD de que no es posible decidir *a priori* lo que sería un saber, ya que el

[70] En esta perspectiva también se piensa que con la noción de "estudio" se produce un cambio fundamental en la visión sobre los roles del alumno y el profesor, ya que no se considera al profesor sólo como el enseñante ni a los alumnos como meros sujetos de un proceso de aprendizaje. La actividad matemática, que adquiere una importancia relevante, ya no aparece como dependiente de la voluntad del profesor, sino que su desarrollo adquiere condicionantes independientes de los actores. (Chevallard et al, 1998, p. 202)

proceso de canonización de los saberes es desigual y prolongado en el tiempo, de ahí que desde un punto de vista antropológico, más que describir los saberes lo importante es describir las invariantes de las prácticas humanas (praxeologías) que se realizan en distintas instituciones, sin analizar las características individuales de los sujetos, esta idea reposa sobre un postulado fundamental de esta teoría:

> ...*toda acción humana procede de una praxeología*, admitiendo que esta praxeología pueda estar en curso de elaboración, o también, que su construcción se haya detenido –puede estar a la escala de una vida humana o institucional, en un estado de incompletud o de desigual desarrollo.... (Chevallard, 1997, p. 6),

Dicho postulado subraya la relación entre las prácticas humanas (praxeologías) y el saber, ya que, si aún la más sencilla acción es cumplida, es porque se ha puesto en marcha una praxeología y si en ésta se reconoce aunque sea mínimamente la presencia de un saber, puede concluirse que toda acción procede de un saber, lo que nos lleva a concluir que los saberes, en tanto praxeologías, estarían siempre guiando y dando forma a todos los actos de los individuos. Ahora bien, para reconocer la presencia de un saber en una praxeología debe considerarse que en el origen de ésta, siempre se encuentra una o varias preguntas que son su razón de ser, esto es, toda organización praxeológica es la respuesta que se despliega frente a una pregunta que por lo general se expresa mediante formulaciones del tipo: ¿cómo hacer para...?

Siguiendo el sentido de esta idea, puede decirse que cuando un profesor selecciona y realiza una actividad que le permita responder a la pregunta ¿cómo hacer para enseñar un contenido matemático?, ha puesto en marcha una praxeología didáctica y cuando esta acción ha sido cumplida podemos presumir que el sujeto tiene un saber. En otras palabras, una "... praxeología debe permitirnos cumplir cierta tarea *t* de un cierto tipo de tareas *T*, procurando una *técnica τ..."* (Chevallard, 1997, p. 5) que es una "manera de hacer" idónea, que podrá variar en el tiempo, de país en país y más particularmente, de institución en institución. Por ejemplo, cuando un profesor en formación se pregunta ¿cómo identificar los saberes que tiene un alumno sobre las fracciones?, se ha planteado una razón de ser para una praxeología didáctica y lo que se observa en dicha pregunta es la necesidad de resolver una tarea específica (*t)* que pertenece a un cierto tipo de tareas *T* (identificar los saberes matemáticos de los alumnos) mediante una técnica apropiada τ, que puede ser por ejemplo una entrevista de tipo clínico o el análisis de las tareas que los alumnos han realizado.

Pero, si para dar respuesta a esa tarea sólo se considera el tipo de tareas y la técnica, [*T/ τ*]*,* se obtiene un *saber-hacer* mediante el que se puede cumplir la tarea pero no justificar la técnica empleada ni interpretarla a la luz del problema que intenta resolver, en este caso el *saber-hacer* es una organización praxeológica incompleta ya que si hay una presunción de saber, debe aceptarse que toda técnica utilizada debe aparecer como resultado de una cierta *tecnología,* (θ), es decir, de un discurso razonado, de un conjunto de descripciones y explicaciones que se elaboran para hacer inteligibles y justificar las técnicas. Además, debe aparecer otro elemento, la *teoría* que da sentido a los problemas planteados, que permite interpretar las técnicas y fundamentar, esclarecer y justificar el discurso tecnológico. En el sentido del ejemplo anterior, una tecnología debería justificar la realización de la entrevista, se diría que una entrevista es una técnica apropiada porque los saberes pueden observarse en la acción cognitiva de los sujetos o más específicamente en los esquemas que utiliza para resolver la tarea propuesta, mientras que la teoría podría darle sentido al problema de la "identificación" de los saberes de un alumno y justificar el discurso tecnológico.

Con la unión de los cuatro elementos se forma una organización praxeológica "completa" que puede expresarse formalmente mediante el sistema [*T /τ /* θ/ Θ] donde puede observarse un "bloque" práctico –técnico [*T /*τ] que responde a la presunción del *saber-hacer* y uno tecnológico-teórico [θ / Θ] que responde a la presunción del *saber.* Una organización praxeológica "completa" resulta entonces de la asociación de un "saber-hacer" y de un "saber", de la asociación de la *praxis* y el *logos,* lo que permite asumir, como lo hace Chevallard (1997), que siempre que presumimos la presencia de un saber, se alude ordinariamente y por metonimia a una *organización praxeológica* "completa", a pesar de que comúnmente y por un reduccionismo cultural, cuando se habla del saber, se alude solamente al *saber* olvidando el *saber-hacer*.

Hasta aquí se ha analizado la relación entre el saber -o los saberes- y la organización praxeológica, también se han observado los constitutivos de estas organizaciones y el papel que cada uno juega en el cumplimiento y comprensión de un cierto tipo de tareas, sin embargo, no se ha analizado la naturaleza específica de las organizaciones que son propias del rol del profesor, a este objetivo dedicaremos los siguientes apartados.

1.3.3.3. Organizaciones matemáticas y organizaciones didácticas

Un principio básico de la TAD sostiene la dualidad del conocimiento matemático, esto es, el saber matemático se construye (o se estudia) para dar respuesta a ciertas cuestiones problemáticas,[71] pero también es el producto del proceso de estudio que forma parte de la actividad matemática, de manera que existe una estrecha relación entre la actividad matemática (proceso de estudio) y el saber matemático (producto). Por esta razón, desde la TAD se asume que las matemáticas son al mismo tiempo una actividad y un producto de dicha actividad, esto es, son objetos construidos y actividades institucionales de manipulación de dichos objetos.

Ahora bien, cuando se considera a las matemáticas como producto, frecuentemente se piensa que la construcción del conocimiento matemático sólo se realiza mediante el *estudio* o solución de ciertos tipos de problemas, sin embargo,

> ... el matemático no aspira únicamente a plantearse buenos problemas y resolverlos, sino que pretende, además, caracterizarlos, delimitar y clasificar los problemas en "tipos de problemas", entender, describir y caracterizar las *técnicas* que utiliza para resolverlos hasta el punto de controlarlas y normalizar su uso, se propone establecer las condiciones bajo las cuales éstas funcionan o dejan de ser aplicables y, en última instancia, aspira a construir argumentos sólidos y eficaces que sostengan la validez de sus maneras de proceder... (Bosch, et al, 2003, p. 85)

[71] Cabe aclarar que desde esta postura se considera que hacer matemáticas no siempre es resolver problemas, por ejemplo "... se pueden usar matemáticas de manera rutinaria sin que aparezca problematicidad o estudio..." (Bosch et al, 2003, p. 84)

Así, cuando el trabajo del investigador ha concluido, el conocimiento matemático es un producto estructurado en un doble nivel: el de la *praxis* que incluye los diferentes tipos de *tareas problemáticas* y las *técnicas* que permiten resolverlas; y el del *logos* que incluye los argumentos (tecnologías) que justifican la validez de las técnicas sugeridas y los elementos *teóricos* que dan sentido a las tareas planteadas.

Estos dos niveles forman lo que Chevallard (2000) llama *praxeología, organización praxeológica* o simplemente *organización matemática* (OM) y como se ha señalado, su diferencia respecto de la "simple" práctica estriba en que la praxeología integra al "saber hacer" (*praxis)* con el "saber" (*logos)*, por esta razón, señala este autor, lo que comúnmente se designa como "saber matemático" no es otra cosa que una praxeología o una organización matemática.

Considerando la noción de praxeología, podemos decir que *hacer matemáticas* consiste en utilizar una praxeología matemática para resolver ciertas tareas y *estudiar matemáticas* consiste en construir (en el caso del matemático) o reconstruir (en el caso del alumno) ciertos elementos de una praxeología matemática que permitan dar respuesta a una tarea para la que no existe o no está disponible una praxeología. Empero, una organización matemática no surge de manera instantánea ni acabada de una vez y para siempre, es el resultado de un largo y complejo proceso en el que se incluyen dos aspectos del trabajo matemático; el proceso de estudio y la praxeología matemática. Ambos son inseparables porque una OM no puede existir sin un proceso de estudio que la genere, pero el proceso de estudio tampoco puede existir sin una OM en construcción y lo más importante de este proceso es que en su dinámica de funcionamiento, existen acciones que permanecen más allá de factores temporales, culturales, sociales, o individuales.

Estas acciones invariantes permiten construir un modelo del proceso de estudio que se basa en la noción de *momento didáctico,* ésta no tiene una connotación cronológica, alude más bien a las dimensiones del proceso ya que dichos momentos no configuran una secuencia fija ni se desarrollan de manera aislada, cada uno puede ser planteado en distintas intensidades, tiempos, ocasiones o de manera simultánea. En la perspectiva de Chevallard (1999b), existen seis *momentos didácticos* que modelizan todo proceso de estudio, a saber:

- *El momento del estudio,* es el primer encuentro (o rencuentro) con la organización O que está en juego. Puede tener varias maneras, una consiste en encontrar O a través de al menos uno de los tipos de tareas *Ti,* constitutivas de O.
- *El momento de la exploración* de tipos de tareas *Ti* y de la elaboración de una técnica τ*i* relativa a este tipo de tareas.
- *El momento de la constitución del entorno tecnológico-teórico* relativo a τ*i.* Este momento está en relación estrecha con cada uno de los otros, por ejemplo desde el primer encuentro se establece una relación con este entorno ya elaborado aunque en las estrategias tradicionales se le ubica como primer momento.
- *El trabajo de la técnica,* debe mejorar la técnica volviéndola más eficaz y fiable y acrecentar la maestría que se tiene de ella.
- *Momento de la institucionalización,* tiene por objeto precisar lo que es "exactamente" la OM elaborada, distinguiendo los elementos que no le hayan sido integrados y aquellos que entran definitivamente en la OM considerada.
- *Momento de la evaluación,* se articula con el de institucionalización y en él se verifica lo que *vale,* lo que se ha aprendido (Chevallard, 1998, pp. 48-50)

El *estudio* puede ser redefinido a partir de la noción de *momento didáctico*. *Estudiar matemáticas* consistiría en "vivir" los diferentes *momentos didácticos* o ayudar a los alumnos (en el caso del profesor) a "vivir" esos momentos. Ahora bien, si tomamos en cuenta que desde la TAD,

> .... *toda acción procede de una praxeología* admitiendo que esta praxeología pueda estar en curso de elaboración, o que su construcción se haya detenido (…), en un estado de incompletud o de desigual desarrollo, con una técnica apenas esbozada, una tecnología incierta, una teoría inexistente… (Chevallard, 1997, pp. 6- 7)

Podemos decir que en el proceso de construcción matemática, aparecen dos prácticas humanas o dos praxeologías, una matemática (hacer matemáticas) y una praxeología de estudio o didáctica (estudiar matemáticas). Así, cuando un investigador o un alumno estudian una praxeología matemática, o cuando un profesor ayuda a otra persona a estudiarla, utilizan una praxeología didáctica, la del alumno será una praxeología didáctica "discente" y la del profesor una praxeología didáctica "docente".[72]

Como toda praxeología, las organizaciones didácticas (OD) se estructuran en dos niveles: el técnico-práctico formado por los tipos de *tareas* y *técnicas* (didácticas); y el tecnológico-teórico formado por las *tecnologías* y *teorías* (didácticas). Sin embargo, las OD no tienen una existencia independiente puesto que toda praxeología didáctica contiene al menos una OM, y a su vez, toda praxeología matemática está contenida en al menos una OD, esta codeterminación entre ambas praxeologías es acotada de la siguiente manera:

> …las organizaciones "transmisoras", es decir, didácticas, se configuran de una manera vinculada a la estructura que hay que transmitir. En otros términos, las organizaciones didácticas dependen fuertemente de las OM por enseñar, por esta razón, la enseñanza de las OD debe tomar en cuenta su relación con las organizaciones matemáticas… (Chevallard, 2001, p. 3)

En términos de las praxeologías, podemos decir que una praxeología didáctica puede construirse (en el caso del investigador) o reconstruirse (en el caso de un alumno que estudia didáctica) y siguiendo la misma idea, podemos decir que en este proceso aparecen dos aspectos de la actividad didáctica, un proceso de estudio y un producto de dicho proceso, *hacer didáctica* consistiría en utilizar una praxeología didáctica para dar respuesta a una cuestión (didáctica) y *estudiar didáctica* consistiría en reconstruir uno o varios elementos de una praxeología didáctica con el fin de resolver una tarea que resulta importante para una institución determinada.

---

[72] Las praxeologías didácticas "docentes" son las relevantes para este trabajo, por esta razón en lo sucesivo mencionaremos praxeologías (u organizaciones) didácticas, para referirnos a las "docentes"

De lo anterior podemos deducir que las praxeologías didácticas del profesor (docentes) son el “saber didáctico” principal en la formación de profesores, también que el estudiante *hace didáctica* cuando utiliza una OD ya elaborada y *estudia didáctica* cuando reconstruye una OD bajo la dirección del formador. Pero si se advierte que en el sistema de formación el director de estudio no hace las veces de profesor de matemáticas sino de director del estudio de praxeologías didácticas, tenemos una práctica humana (la del formador) que en términos de las praxeologías podemos llamar *praxeología de formación,* ésta también se estructura mediante el bloque técnico-práctico, donde se incluyen las *tareas* y las *técnicas* (de formación)*,* y el tecnológico- teórico con sus discursos tecnológicos y teóricos (de formación).

1.3.3.4. Las praxeologías docentes o los diferentes tipos de tareas para el profesor

Al igual que en toda institución, señala Chevallard (1999), las praxeologías de la profesión de enseñante son construcciones históricas y el producto de normatividades institucionales *múltiples.* Una primera fuente de praxeologías para el enseñante es el proceso *normalizador* que se ejerce desde el sistema escolar, las escuelas normales son otra fuente praxeológica ya que es en esta institución donde se enseña “a enseñar” y donde se reinterpretan las praxeologías de la profesión que ha puesto a circular el sistema escolar. Una tercera fuente de praxeologías se puede ubicar en la actividad de los profesores *innovadores,* quienes existen para tratar de imponer normas opuestas a las del sistema escolar y a las de las escuelas normales.

Finalmente, una cuarta fuente de praxeologías para el enseñante está constituida por la investigación educativa o particularmente en didáctica.[73] Las normas o praxeologías que surgen de esta última fuente son las que particularmente nos interesan, de ahí que una pregunta esencial sea ¿cuáles son los tipos de tareas que desde la institución didáctica definen la praxeología del profesor?

[73] A decir de Chevallard (1999; 5), en la investigación comúnmente se refugian los transfugos de la enseñanza, por esta razón, señala, es usual observar en los investigadores una actitud poco crítica respecto de las praxeologías que surgen de otras fuentes.

Sobre este respecto, Chevallard (1994a) señala que la presión de los cambios políticos, económicos, sociales, culturales, epistemológicos, formativos y didácticos ha obligado a que el sistema de tareas del profesor esté en constante evolución, de ahí que en su opinión, deba ser reinventado periódicamente. No obstante estos cambios, considera que en una primera aproximación puede verse que el sistema de tareas del profesor se organiza en torno de dos categorías dependientes una de la otra.

En la primera categoría se contemplan los siguientes tipos de tareas:

- Tareas relativas a la *concepción de los dispositivos de estudio*
- Tareas relativas *a la organización de los dispositivos de estudio*[74] y,
- Tareas relativas a la *gestión* de sus respectivos *entornos*.

En la segunda categoría se incluyen:

- Tareas de *ayuda al estudio* y,
- Tareas de *dirección de estudio* y de *enseñanza.*[75]

En correspondencia con estas categorías, la primera tarea que debe cumplir el profesor, consiste en determinar las *praxeologías matemáticas escolares* a partir de las indicaciones del programa de estudios oficial, precisando el contenido y el conjunto de tipos de tareas matemáticas que contiene cada una así como la profundidad que debe darse a los componentes técnico, tecnológico y teórico. La segunda tarea consiste en dirigir el estudio de una praxeología matemática determinada, es decir, conducir la reconstrucción o transposición de esta praxeología en una clase concreta gestionando los seis momentos didácticos que constituyen un proceso de estudio.

Sin embargo, los tipos de tareas descritos caracterizan la praxeología de un profesor, pero no necesariamente son idénticos a los que debe resolver un profesor en formación ya que en este caso se busca que el futuro enseñante

[74] En esta perspectiva se toma como dispositivo a la componente material de una técnica por oposición a su componente *práctica.* (Chevallard, 1994; 42)

[75] En la perspectiva de la TAD, estos dos tipos de tareas deben cruzarse con la estructura tricotómica del *territorio del profesor,* tríada formada por el *territorio* (sistema escolar), *terreno (*escuela) y el *terruño (*la clase).

construya técnicas adecuadas que le permitan resolver dichos tipos de tareas durante el ejercicio de su profesión, en este sentido, Butlen y Peltier (1994, p. 15) sugieren que los tipos de tareas propios de la formación deben ser los siguientes:[76]

1. Las reorganizaciones de conocimientos matemáticos, eventualmente el aprendizaje de nuevos saberes y la reflexión epistemológica sobre esos conocimientos y su funcionamiento.
2. Las comparaciones entre diferentes formas de enseñanza de la escuela elemental, las presentaciones de ingenierías, las explicaciones de los obstáculos encontradas en la enseñanza de un campo conceptual y el estudio de las regularidades que conciernen a los aprendizajes.
3. Los análisis de documentos pedagógicos y de los materiales escolares.
4. Los análisis más puntuales de secuencias de enseñanza y los estudios *a priori* de situaciones
5. Los análisis de prácticas profesionales basadas sobre la observación directa de clases, y
6. El diseño y construcción de secuencias de clase en el contexto de la práctica profesional dirigida por el tutor o bajo la guía de "autobservaciones" o "autoanálisis".

Ahora bien, la especificidad y generalidad de estos tipos de tareas deben ser comprendidas a la luz de los últimos desarrollos de la TAD (Chevallard 2002ª y 2002b) en los que se postula que las praxeologías didácticas comportan diferentes niveles de especificación, por ejemplo hay praxeologías didácticas en un nivel muy general (*pedagógico*) que responden a la pregunta ¿cómo enseñar? Pero también las hay en el nivel *disciplinar (matemático)* cuya razón de ser es la pregunta ¿cómo enseñar matemáticas? Otro nivel es el de las áreas (la aritmética), los sectores (los números racionales), los temas (las fracciones) y las cuestiones puntuales (la fracción como cociente).[77]

---

[76] En Artigue (1995) pueden observarse también ciertos tipos de tareas similares que se desarrollan en la formación de profesores de secundaria.

[77] En cada uno de los niveles descritos, además de existir praxeologías didácticas, también existen praxeologías matemáticas. Es por esta dualidad de cada nivel que se habla de la codeterminación

1.3.3.5. Praxeologías docentes, formación y transposición

Como se ha señalado en los primeros apartados de este capítulo, en opinión de Brousseau (2000) el problema de la relación entre didáctica y formación tiene que ver con la dificultad de seleccionar los saberes que pudieran constituir una "didáctica para principiante", esta idea es también sostenida por la aproximación "cognitiva" y por la mayoría de las posturas al interior de la "aproximación antropológica", en esta última por ejemplo son claros los esfuerzos de Kuzniak y Houdement por analizar los saberes pertinentes para la formación. En estas perspectivas prevalece una idea fundamental, primero es necesario detectar los saberes o conocimientos que requiere un profesor y sólo después debe pensarse en la manera como se han de transmitir, también en estas posturas se puede advertir una dificultad para la transmisión de esos saberes: la dicotomía entre los saberes teóricos y prácticos o de la experiencia. De esta dicotomía surge la discusión respecto de tomar o no la formación de profesores como un objeto de estudio de la didáctica de las matemáticas.

En contraste con estas posturas, Chevallard toma el objeto original de la "aproximación epistemológica" (la actividad matemática) para construir la noción de praxeología, lo que le permite modificar la pregunta fundamental sobre la formación de profesores. Desde la perspectiva de este autor, cuando se habla de lo matemático, se alude a una actividad y a un producto de la actividad, esto es, a un saber estructurado que es resultado de dicha actividad. De manera que la unión de la actividad con el producto resultante forma una praxeología, una práctica humana que incluye un *logos* que la torna comprensible y justificable. Por esta razón, las escuelas no deben transmitir –del modo que sea- sólo el saber matemático ya estructurado, deben enseñar -si eso es posible- las prácticas humanas (praxeologías) ligadas históricamente a la producción de ese saber.

---

de las OD y las OM, y es también por esta razón que para Chevallard resulta imposible la reconstrucción de praxeologías didácticas sin referencia a las praxeologías matemáticas, en otros términos, para este autor no es posible encontrar tipos de tareas del profesor que no contengan una referencia a lo matemático. De ahí su idea de que la formación de profesores de matemáticas, en tanto reconstrucción de OD, debe ser un objeto de estudio de la Didáctica de las Matemáticas.

Siguiendo esta misma idea, respecto de la formación de profesores puede decirse que existe un número importante de saberes sobre la enseñanza de las matemáticas que ha sido construido dentro del campo de la didáctica de las matemáticas y en este caso también, lo importante no es enseñar o transmitir dichos saberes, lo fundamental es enseñar a los futuros profesores a realizar las prácticas humanas que han permitido la generación de dichos saberes, en otros términos, la pregunta: ¿qué saberes o conocimientos es necesario transmitir a los profesores en formación? es sustituida por la pregunta sobre las prácticas, o en su sentido más profundo, sobre las praxeologías que un profesor en formación debe reconstruir.

Así, en lugar de preguntarse sobre los conocimientos ideales y sobre las estrategias adecuadas para su transmisión, la TAD se pregunta ¿cuáles son las praxeologías que han permitido generar tal o cual saber sobre la enseñanza de las matemáticas, sobre la enseñanza de determinada área, tema o cuestión puntual? Si son identificadas estas praxeologías, serán al mismo tiempo la estrategia de formación y el “saber a enseñar”, en otros términos, en determinada praxeología seleccionada se incluirán al mismo tiempo los componentes práctico-técnicos y los relativos al *logos*. De este modo, la actividad que permitió generar un determinado saber y el saber mismo son partes de una misma práctica razonada y comprensible, es decir, de una praxeología.

Por esta conjunción entre la actividad y el saber estructurado, se puede hablar de una codeterminación entre lo didáctico (el proceso de estudio) y lo matemático (el saber estructurado), codeterminación que plantea la necesidad de seleccionar ciertas praxeologías para la formación que sean coherentes con las praxeologías didácticas y matemáticas ya elaboradas, esto es, las praxeologías de formación seleccionadas deben tener una relación estrecha con el objeto matemático que se desea reconstruir, esta misma necesidad se ve reflejada en el nivel de especificidad, si lo que se desea es reconstruir una cuestión matemática puntual, la praxeología didáctica seleccionada deberá tener un mayor nivel de especificidad que si se desea reconstruir un tema matemático o un área de la matemática.

En síntesis, la perspectiva que toma a las praxeologías como elementos para la formación de profesores no remite a una propuesta simple, por un lado es necesario que las praxeologías que se incluyen en la formación sean prácticas humanas ligadas a la actividad matemática, también es necesario que su especificidad sea coherente con el objeto matemático al que se refieren y fundamentalmente, en el caso de las praxeologías docentes es necesario que se considere la naturaleza de la praxeologías de estudio y la naturaleza y especificidad del objeto matemático al que se refieren.

Una vez subrayada la diferencia entre la perspectiva de Chevallard y aquella que priorizan las nociones de saberes o conocimientos, sólo resta contestar una pregunta ¿en tanto prácticas, las praxeologías son susceptibles de transmitirse, de enseñarse o de transponerse?, en otros términos, ¿existe alguna relación entre las nociones de praxeología y transposición didáctica?

Si hay una postura contraria a la idea de transposición didáctica, señala Chevallard (1997), es la que postula el problema de la formación como una simple transmisión de saberes ya que cuando se habla de la transmisión, se piensa que un saber es un objeto enteramente material o simbólico que puede ser "transportado" de un lugar a otro.[78] Contra esta idea de transmisión, la transposición niega la posibilidad de transmitir una praxeología y al contrario de esto, designa la reconstrucción, la recreación de una praxeología en un ambiente nuevo en el que la ecología puede ser muy diferente. La reconstrucción y recreación de las *praxeologías docentes* es el problema fundamental de la transposición del saber didáctico o de la transposición de las *praxeológicas didácticas* en la formación de profesores.

Cuando se habla de la transposición de una praxeología docente se alude a la reconstrucción de dicha praxeología en las diferentes instituciones formadoras, por ejemplo, en la esfera "sabia" se trataría de generar praxeologías que permitan producir un saber estructurado sobre la enseñanza de las matemáticas; la modelación del rol del profesor y los estudios que exploran las praxeologías

[78] Este supuesto, afirma Chevallard (1997) es el síntoma por excelencia de la reducción pedagógica de lo didáctico, puesto que desde la perspectiva pedagógica, el destino del saber no es más que una preocupación tangencial.

espontáneas de los profesores serían ejemplos de dichas praxeologías. En el ámbito noosférico se trataría de seleccionar las praxeologías más adecuadas para un momento histórico particular y para las condiciones institucionales, políticas, económicas, etc., existentes. En el ámbito de los formadores la función transpositiva consistiría en reconstruir dentro del salón de clases, las praxeologías propuestas en el "texto del saber", para ello el formador debe considerar las condiciones de sus alumnos y la naturaleza de los objetos matemáticos de referencia.

Finalmente, en correspondencia con los argumentos expresados, puede decirse que la pregunta sobre la formación de los profesores es una cuestión que se convierte en una razón de ser para una organización praxeológica didáctica, ya que en ésta se puede incluir la pregunta ¿cómo enseñar a "hacer" matemáticas? o ¿cómo dirigir un proceso de estudio relativo a las matemáticas?, que tiene relación directa con los objetivos que persigue la didáctica de las matemáticas, a saber, la comprensión y el mejoramiento de los procesos de difusión de las organizaciones matemáticas. En consecuencia, la organización praxeológica de formación es también un objeto –de investigación y desarrollo- que debe estar a cargo de una disciplina con fines científicos, la didáctica de las matemáticas.

Por otro lado, tampoco resulta posible olvidar la codeterminación entre organizaciones matemáticas (OM) y didácticas (OD). Considerar la unidad epistemológica entre las componentes de las organizaciones praxeológicas es una respuesta a las posturas de Kuzniak y Tanguy sobre las supuestas diferencias entre el saber profesional y los otros saberes de la profesión del profesor, diferencias que en su perspectiva impiden ver el problema de la transmisión de los saberes de enseñanza como un objeto de la didáctica. Contra esta idea, siguiendo a Chevallard (1997, p. 9) puede decirse que "...la didáctica es la ciencia de la *difusión* de los saberes (y más generalmente, de las organizaciones praxeológicas) en el seno de las sociedades..." y por ello la formación de profesores, en tanto institución donde se difunden y crean praxeologías docentes respecto de las OM, es un objeto que debe ser estudiado en el seno de la didáctica de las matemáticas y desde la perspectiva de las organizaciones praxeológicas.

1.4. CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

El objetivo de este capítulo consistió en explorar la relación entre didáctica y formación de profesores, específicamente se trató de identificar los saberes propios de la didáctica que se sugiere incluir en los procesos de formación. Sobre este respecto, como se ha visto, existen dos posturas fundamentales que se articulan en torno de la discusión sobre la pertinencia de transmitir o transponer dichos saberes, una corresponde a la llamada "aproximación cognitiva" y otra a la "aproximación antropológica".

En su origen, la "aproximación cognitiva" tuvo como objeto de estudio al alumno, es decir a sus conocimientos matemáticos y a la evolución de éstos en el curso de los aprendizajes, no obstante, su trayecto se caracteriza por tres fases. En la primera se buscaban las variables del aprendizaje en el alumno mismo, en la segunda se amplió el número de variables que explicaban los resultados de los aprendizajes, así se introdujo el estudio de las concepciones que sobre la matemática tiene el profesor y las relaciones que dichas concepciones tenían con las prácticas de enseñanza. En la tercera fase conocida como "del pensamiento del profesor" se pensó que lo que el profesor hace en el aula depende de lo que sabe y piensa y que, cuando se presentan modificaciones en las prácticas de enseñanza éstas son precedidas por transformaciones en las concepciones de los profesores.

En lo que corresponde a la formación de profesores, desde la "aproximación cognitiva" se piensa que los saberes que deben transmitirse en estos procesos son los tipos y componentes del conocimiento del profesor, a saber: a) la materia del conocimiento, el qué y el por qué de los contenidos; b) el conocimiento del contenido pedagógico donde se incluye el estilo del maestro, las creencias, el conocimiento de la materia, el pedagógico en general y aquel sobre las metas y los objetivos educativos; c) el conocimiento curricular donde se incluye el conocimiento acerca de los materiales para la enseñanza y sobre los currícula de los diferentes cursos de matemáticas y; d) el conocimiento de sí mismo, esto es, sobre las habilidades de los profesores para hacer matemáticas y sobre la confianza en sus propias habilidades.

No obstante lo exhaustivo de tal clasificación, la debilidad de la "aproximación cognitiva" reside en la articulación de estos tipos y componentes del conocimiento y en las formas que se propone transmitirlos. Sobre la articulación simplemente se dice que éstos están en una relación de conjunción y sobre la transmisión lo que se propone es una solución por demás general, que el estudiante se convierta en un solucionador de problemas en muchas direcciones.

En contraste con esta postura, la "aproximación antropológica" tiene como origen el intento por estudiar la actividad matemática, su construcción y su difusión, es por ello que en esta aproximación el saber se constituye como un eje fundamental al considerar que en el modelo epistemológico de las matemáticas se encuentra implicado un modelo para su construcción, evolución y difusión y en particular, incluye también un modelo para su enseñanza.

Ahora bien, no obstante este principio compartido, al interior de esta aproximación existen posturas diferentes sobre la relación entre didáctica y formación de profesores, en una de ellas, sostenida por Kuzniak (1994), Houdement (1995) y Peltier (1995), se asume que el "saber profesional" de los profesores de matemáticas se compone de ciertos saberes propios de la didáctica pero también de otros que no corresponden a este campo, como el pedagógico. Por esta razón, se asume que la formación de profesores no puede ser un proceso que pueda explicarse sólo desde la didáctica y por lo tanto tampoco puede ser un fenómeno susceptible de estudiarse utilizando el concepto de transposición didáctica.

Una postura contraria a la anterior es sostenida por Portugais, este autor establece una analogía entre el sistema didáctico (profesor-saber matemático-alumno) y lo que el llama sistema de formación (formador-saber didáctico-profesor en formación), para demostrar a través de los conceptos de la teoría de las situaciones didácticas la pertinencia de la transposición didáctica en la formación de profesores, en su perspectiva, como estos dos sistemas no difieren fundamentalmente, los conceptos acuñados en el seno de la didáctica son herramientas útiles para estudiar y mejorar los procesos de formación, para este autor existe la posibilidad de "transponer" el saber didáctico en dichos procesos.

Finalmente, otra postura que postula la pertinencia de la transposición en la formación de profesores está representada por la Teoría Antropológica Didáctica, en ésta existen dos dimensiones de la matemática desde las que se argumenta la pertinencia de la transposición. En esta perspectiva la matemática es vista como una actividad y como un producto, esto es, cuando un matemático resuelve o clasifica problemas se dice que realiza una actividad matemática, que estudia matemáticas y el producto que construye con dicha actividad también es matemática, para realizar esta actividad el matemático pone en práctica lo que Chevallard llama una praxeología de estudio o didáctica que es la misma que pone en práctica un alumno cuando estudia matemáticas, empero cuando el producto matemático ha sido construido o reconstruido, éste también se estructura a la manera de una praxeología, como un sistema compuesto por cierto tipo de tareas, de técnicas que resuelven esas tareas, de discursos tecnológicos que justifican esas técnicas y de discursos teóricos que dan sentido a las tareas.

En otros términos, la matemática en esta perspectiva puede verse como un objeto bidimensional, como praxeologías matemáticas (el producto) y como praxeologías de estudio o didácticas (la actividad), siempre que un sujeto estudia un objeto matemático pone en marcha una praxeología didáctica o de estudio, por esta razón se dice que el estudio siempre está ligado a lo didáctico. Empero, el estudio no sólo lo realiza un sujeto que construye o reconstruye una praxeología matemática, también lo hace aquel que ayuda a otro a estudiar esa praxeología o quien dirige un proceso de estudio, en otros términos, el profesor en tanto director de estudio también es un sujeto que utiliza una praxeología didáctica docente y como el estudio siempre remite a lo didáctico la reconstrucción de praxeologías docentes en el proceso de formación es un objeto propio de la didáctica.

De esta manera, señala Chevallard, cuando se habla de formación de profesores, la cuestión fundamental no se relaciona con identificar los saberes que deben transmitirse, sino las praxeologías de ayuda al estudio (docentes) que deben reconstruirse en las aulas de las instituciones formadoras de maestros, en opinión de este autor, estas praxeologías, que también contienen tareas, técnicas, discursos tecnológicos y discursos teóricos no son susceptibles de transmitirse como si fuesen un objeto material ya que deben adaptarse a diferentes condiciones, por lo que la única manera de que los futuros profesores se apropien de ellas es mediante un proceso de reconstrucción o recreación, es decir, mediante un proceso de transposición didáctica de las praxeologías didácticas (docentes). Esta perspectiva es la que orienta el presente estudio cuyo objetivo es analizar la manera en la que los formadores reconstruyen estas praxeologías en las aulas de las escuelas normales.

II. EL PROGRAMA DE ESTUDIOS.
LAS PRAXEOLOGÍAS “A ENSEÑAR”

Aunque las conceptualizaciones de la didáctica de las matemáticas empezaron a construirse desde hace treinta años, la inclusión de estos saberes en los programas de las escuelas normales en México es un hecho reciente, apenas en el Plan 1997 el saber didáctico aparece de manera explícita en la formación de maestros para las escuelas primarias. En éste, que pretende “... concentrar la formación en la enseñanza, a través de la incorporación de una línea de formación sobre los «contenidos y su enseñanza»...” (Mercado et al, 2000, 11), se incluyen las “didácticas específicas”[79] junto con asignaturas sobre historia, pedagogía, desarrollo evolutivo del niño y las funciones sociales de la escuela.

En los planes anteriores, la articulación entre contenidos matemáticos y conceptos sobre la enseñanza y el aprendizaje había sido diferente, desde 1972 hasta 1984[80] se desarrolló una doble formación, la de bachiller y la de profesor, en este período los estudiantes ingresaban a las escuelas normales con estudios de secundaria, por lo que los contenidos matemáticos de formación eran similares a los de bachillerato.[81] En 1984, cuando se elevan los estudios de normal al grado de licenciatura, la relación entre matemáticas y saberes sobre la enseñanza cambió. En este Plan, los saberes sobre la enseñanza de la matemática se ubicaban en dos espacios curriculares; uno en el que se estudiaban los contenidos matemáticos y en otro los contenidos matemáticos de la escuela primaria y los enfoques para su enseñanza, sin embargo, los enfoques eran vistos como las propuestas oficiales para la enseñanza, lo que los despojaba de la especificidad

---

[79] La didáctica de las matemáticas se incluye en las asignaturas *Matemáticas y su Enseñanza I y II* que se desarrollan durante el segundo y tercer semestre.

[80] En México, todas las escuelas normales desarrollan la formación a través de los mismos programas de estudio, por lo que se puede decir que el Plan de Estudios es la fuente principal, al menos en lo formal, de praxeologías docentes para la formación

[81] Durante la vigencia de estos planes los egresados de las escuelas normales obtenían al mismo tiempo el título de profesor de educación primaria y el certificado de estudios de bachillerato.

teórica de cada campo didáctico específico. Dicha pérdida se reflejó entre otros rasgos, en,

> ...una atención limitada al estudio del curriculum de la educación primaria y a los conocimientos científicos y pedagógicos necesarios para su enseñanza, en especial de las asignaturas de carácter básico (...) existía una escasa vinculación entre los contenidos de las asignaturas pedagógicas y didácticas, y su aplicación en el desempeño del maestro (...) gran parte de los contenidos se orientaron al estudio y manejo de técnicas de observación asociadas sobre todo con la investigación-acción... (SEP, 1997a, p. 18)

En síntesis, a pesar de que los conceptos de la didáctica de las matemáticas circularon en nuestro país desde hace más de 10 años[82], fueron estudiados en las escuelas normales como ideas aisladas que formaban parte de los enfoques para la enseñanza.

Ahora bien, integrar los saberes de la didáctica a la formación no es una tarea sencilla, no se trata simplemente de colocar “toda” la didáctica en un programa de estudios, ya que, como menciona Chevallard (1991; 45) “... todo proyecto social de enseñanza y de aprendizaje se constituye dialécticamente con la identificación y la designación de contenidos de saberes, como contenidos a enseñar...”, esto significa que es necesario seleccionar ciertos saberes (praxeologías) didácticos y modificarlos para que puedan ser enseñados. En otros términos, todo proyecto social de formación requiere de un proceso de transposición didáctica “externa” que se caracteriza por la selección y adecuación de ciertas praxeologías docentes para “textualizarlas”, esto es, la transposición didáctica “externa”, en tanto “preparación didáctica” culmina cuando los programas de estudio son preparados, conformados y adquieren fuerza de ley, en ese momento puede comenzar el proceso de transposición didáctica “interna” que se refiere al trabajo que se hace en las aulas con dichas praxeologías.

En el caso que nos ocupa, la complejidad de este proceso se ve afectada tanto por la “juventud” de los saberes didácticos como por la inexistencia de

[82] Un ejemplo de esa circulación son los programas de la Licenciatura en Educación Básica que se desarrollaba en los últimos años de la década de los ochentas en la Universidad Pedagógica Nacional, en ellos ya se integraban conceptos específicos de la didáctica de las matemáticas como el de “contrato didáctico”, modelización, reproductibilidad e “ingeniería didáctica”.

intentos anteriores al Plan 97 por articular los distintos saberes profesionales de la enseñanza de las matemáticas en una misma asignatura del programa de formación de profesores. Sobre la “juventud” de los saberes didácticos, Kuzniak (1995) afirma que se encuentran en constante fluctuación y por lo mismo no son siempre identificados por los formadores.

En este sentido, los programas de estudio de las asignaturas *Matemáticas y su Enseñanza I y II,* pueden tomarse como “texto del saber” en el que se articulan las praxeologías docentes que sugiere el sistema escolar y la institución didáctica.[83] Pensarlos desde esta perspectiva, nos permite preguntar ¿qué tipos de tareas se incluyen en la formación? ¿cuáles son las técnicas matemáticas y didácticas que se intenta reconstruir? ¿cuáles los discursos que justifican esas técnicas y las teorías que dan sentido a las tareas planteadas?

Dar respuesta a esas preguntas es el objetivo que se persigue en este capítulo, para cumplirlo, en un primer momento se analizarán los tipos de tareas relativas a las organizaciones matemáticas que propone el programa, en un segundo, los tipos de tareas relativas a las organizaciones didácticas, posteriormente se analizaran los tipos de tareas, las técnicas, los discursos tecnológicos y eventualmente, los discursos teóricos que se incluyen en el bloque sobre los números racionales.

2.1. LOS NIVELES DE CODETERMINACIÓN MATEMÁTICA-DIDÁCTICA

Un primer elemento que permite clasificar los tipos de tareas sugeridos para la formación son los propósitos de los programas de estudio, en éstos se dice que los cursos de *Matemáticas y su enseñanza* buscan que los estudiantes:

> Consoliden el conocimiento de los contenidos matemáticos fundamentales que se enseñan en la escuela primaria y comprendan los distintos significados que adquieren al aplicarlos en distintas situaciones y en la resolución de problemas.
> Conozcan las características del enfoque didáctico para la enseñanza de las matemáticas que enfatiza la construcción de significados a partir de la resolución de situaciones problemáticas.

[83] Si bien el programa de estudios es un texto preparado por “el sistema escolar”, es evidente que dicha preparación no puede ser efectuada sin considerar las “normas” o praxeologías que se han construido en la institución didáctica

> Conozcan y apliquen elementos de didáctica de las matemáticas para analizar situaciones de enseñanza y su relación con los procesos de aprendizaje de conocimientos matemáticos en los niños... (SEP, 1999a, p. 16)

Como se puede observar, en estos propósitos se incluyen tres tipos de tareas: las relacionadas con la reorganización de las praxeologías matemáticas, las que se relacionan con los momentos didácticos de un proceso de "estudio" y las tareas sobre la gestión de un proceso de "estudio". Por otro lado, también puede verse que estos tipos de tareas corresponden a dos organizaciones praxeológicas que se codeterminan en todo proceso de estudio, las praxeologías matemáticas (primer propósito) y las praxeologías didácticas (segundo y tercer propósito).

2.1.1. Sectores, temas y tiempo "legal"

Como hemos mencionado, la formación para la enseñanza de las matemáticas se incluye en las asignaturas *Matemáticas y su Enseñanza I y II*[84] que se imparten durante el segundo y tercer semestres de la carrera. Dichos programas están divididos en "bloques", el nombre de cada bloque y alguna de sus características pueden verse en el siguiente cuadro.

En el cuadro 1 puede observarse la manera en que la disciplina matemática, en tanto organización praxeológica global, es dividida en sectores, en áreas y temas. Un dato que llama la atención es la cantidad de temas matemáticos incluidos en cada bloque,[85] como se puede ver en el cuadro 1, sólo 7 de 19 temas del primer curso son matemáticos. Al parecer, la cantidad de temas en cada bloque está relacionado con la complejidad de las nociones incluidas, ya

[84] Existen dos versiones del programa de estudios para esta asignatura, con diferencias significativas uno publicado en 1998 y otro en 1999, para efectos de el presente análisis hemos tomado en consideración la segunda edición puesto que consideramos que es una versión corregida del primero. Una de las diferencias más significativas es que en la segunda versión se sugieren actividades al formador, lo que no aparecía en la primera, también la distribución de temas es diferente en ambas versiones del programa.

[85] La naturaleza de los temas se ha tomado de los programas de estudio, por ejemplo en el programa del primer curso, en el apartado de "temas" el programa enuncia: 2. Conozcan los diversos significados de cada una de las operaciones; 4. Conozcan, adapten o propongan situaciones didácticas relativas al aprendizaje de las operaciones básicas con números naturales. Como se puede ver, el primer tema es de naturaleza matemática mientras que el segundo es de naturaleza didáctica. Para caracterizar los temas se ha seguido en general esta estrategia.

que el número de temas matemáticos en cada bloque aumenta en la medida que su complejidad lo hace también, un ejemplo de esta tendencia se puede apreciar en los dos últimos bloques donde se incluyen 7 y 9 temas matemáticos respectivamente, número que representa más de las dos terceras partes del total de temas de cada bloque.

Cuadro 1. Programa de estudios

MATEMÁTICAS Y SU ENSEÑANZA I	**Tiempo legal (horas)**	**Temas Matemáticos**	**Total de temas**
Bloque I. Aprender matemáticas al resolver problemas	18 (8.3%)	0	5
Bloque II. Los números naturales y el sistema decimal de numeración	24 (11.1%)	2	5
Bloque III. Las cuatro operaciones básicas con números naturales	46 (21.2%)	2	4
Bloque IV. La geometría	20 (9.2%)	3	5
Subtotal	**108**	**7**	**19**
MATEMÁTICAS Y SU ENSEÑANZA II			
Bloque V. La medición	28 (12.9%)	4	7
Bloque VI. Los números racionales	34 (15.7%)	4	8
Bloque VII. Procesos de cambio	22 (10.1%)	7	10
Bloque VIII. Tratamiento de la información, predicción y azar	24 (11.1%)	9	12
Subtotal	**108**	**24**	**37**
TOTALES	**216**	**31**	**56**

En el siguiente cuadro puede verse la manera en que se estructuran los diferentes niveles de determinación didáctica de las praxeologías matemáticas. Esta estructuración es importante en la medida que tiene una determinación sobre las praxeologías didácticas, por ejemplo, el lugar que cada área ocupe en la secuencia del curso (último o primero), tendrá ciertas repercusiones sobre las organizaciones didácticas que se puedan desarrollar, otro tanto puede decirse de la sectorización y la estructuración de áreas, la presencia de ciertas áreas y temas permite plantear tipos de tareas de mayor especificidad, por ejemplo si existe el área “procesos de cambio”[86] se pueden plantear tareas que se relacionan estrechamente con ésta.

Cuadro 2. Sectores y áreas

DISCIPLINA	SECTORES	ÁREAS
Matemáticas	Aritmética	Números naturales y sistema decimal
		Operaciones básicas con números naturales
		Los números racionales
		Procesos de cambio (proporcionalidad)
	Geometría	La geometría
		La medición
	Probabilidad y estadística	Tratamiento de la información
		Predicción y azar

Respecto del tiempo “legal”, lo significativo es la cantidad de horas asignada a las cuatro operaciones básicas con números naturales y a los números racionales (bloques III y VI), más de una tercera parte del tiempo total de los cursos está dedicado a estos dos bloques. Esta distribución parece ser un indicador de las preocupaciones de la noosfera respecto de la escuela primaria que se ven reflejadas en la formación de profesores, en ambos casos, dominar o consolidar los conocimientos sobre las cuatro operaciones fundamentales y sobre los racionales parece ser uno de los objetivos principales de la enseñanza de las matemáticas. En coherencia con esta preocupación, al área de geometría se le asigna sólo 9.2% del tiempo total, menos de la mitad del asignado a las cuatro operaciones básicas y menos de las dos terceras partes del asignado a los racionales.

No obstante, al igual que el número de temas matemáticos, la distribución del tiempo puede estar basada en la complejidad de las nociones incluidas, si esto fuera así, puede comprenderse que a los números racionales se les asigne una cantidad de tiempo considerable, pero no sería coherente con el tiempo asignado a cada uno de los dos últimos bloques en los que se incluyen nociones de

[86] Las áreas que se estructuran en estos programas de estudio se corresponden con la que se presenta en los programas para la educación básica.

considerable complejidad. Lo que parece claro entonces es que la asignación del tiempo está basada en un doble criterio, la cantidad de nociones matemáticas incluidas y la complejidad de las mismas. En un intento por profundizar sobre este doble criterio, enseguida se analizan las cuestiones matemáticas puntuales incluidas en los programas.

2.2. TIPOS DE TAREAS Y CUESTIONES MATEMÁTICAS PUNTUALES.

Para dar cuenta de la relación entre el tiempo, la cantidad y la complejidad de las nociones matemáticas incluidas, es necesario hacer un doble análisis: de las cuestiones matemáticas puntuales y del tipo de tareas que se relacionan con cada una, en otras palabras, se trata de analizar el conocimiento matemático (producto) y el tipo de tareas (actividad) que caracterizan el proceso de "estudio" para esas cuestiones puntuales.

Antes de realizar el análisis es necesario aclarar que cuando el programa sugiere actividades de formación se remite el texto *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*.[87] Este texto, está estructurado en temas, que se dividen en actividades, pequeñas secuencias en las que se articula el estudio de una noción matemática con su dimensión didáctica, dichas secuencias incluyen también algunas explicaciones sobre el concepto estudiado que responden a la idea original de estos textos, permitir que los profesores en servicio estudien estos tópicos de manera autodidacta.

Para realizar el análisis hubieron de desagregarse dichas actividades en tareas o mejor dicho en tipos de tareas. Un ejemplo de tal desglose se puede ilustrar con la actividad No. 1 del Tema 2, "La división" (pp. 122-124), del texto citado. En dicha actividad se pide que los estudiantes: a) resuelvan seis problemas en los que está implicada la operación de división; b) identifiquen sus semejanzas y diferencias, y expliquen los dos tipos de relación presentes entre los datos de los problemas (reparto y agrupamiento); c) a partir de tres datos dados, planteen dos

[87] Este texto fue editado por la Secretaría de Educación Pública en 1996 para los profesores en servicio, pero también ha sido distribuido entre los estudiantes de las escuelas normales. En él, para cada cuestión matemática, se incluyen más tareas que las que el programa de estudio de la normal sugiere.

problemas de división (uno de reparto y uno de agrupamiento) y d) planteen 10 problemas de división (5 de reparto y 5 de agrupamiento).

Aunque el texto ubica estas tareas dentro de una misma actividad, su desglose nos permite observar la existencia de tres tipos de tarea principales: resolver, clasificar y plantear problemas.[88] Este tipo de desglose se realizó en todos los casos en los que las actividades sugeridas en los programas se remitían a alguna lección o actividad del texto citado. Por otra parte, las explicaciones que sobre el contenido se dan en dicho texto[89] no fueron tomadas en cuenta para este análisis porque consideramos que en un proceso escolarizado, estas institucionalizaciones son responsabilidad del formador. En el siguiente cuadro se puede observar el número de "tareas" matemáticas incluidas en cada bloque.[90]

Cuadro 3. Tareas matemáticas

Bloque	No. de tareas para la reconstrucción de las OM	Porcentaje
I. Aprender matemáticas al resolver problemas	1	0.03%
II. Los números naturales y el sistema decimal de numeración	16	5.2%
III. Las cuatro operaciones básicas con números naturales	43	14%
IV. La geometría	4	1.3%
V. La medición	107	34.8%
VI. Los números racionales	99	32.2%
VII. Procesos de cambio	18	5.8%
VIII. Tratamiento de la información, predicción y azar	19	6.1%
TOTAL	**307**	**100%**

Como se puede observar, la mayoría de las tareas relativas a las OM se ubica en los bloques de medición y números racionales, entre ambos suman 67% del total de las tareas. Otro hecho destacable es el escaso número de tareas en el bloque de geometría, apenas 1.3 %. Al parecer, estas cifras se corresponden con

[88] En el tipo de tarea "plantear problemas", se observan dos subtipos de tareas: plantear problemas con datos determinados y plantear problemas sin datos determinados.
[89] Por lo general, luego de una actividad, en el texto se incluye una breve explicación sobre la relación entre la actividad y concepto matemático abordado.
[90] Para contabilizar el número de tareas se consideró que en ocasiones enfatizan en mayor medida cierta noción, por ejemplo, algunas tareas del bloque II privilegian más la noción de suma que las propiedades del sistema de numeración y en algunas se incluyen varias nociones, por ejemplo cuando se pide calcular el perímetro y el área de cierta figura. En el primer caso la tarea se ubicó en la noción correspondiente y en el segundo caso se consideró que había dos tareas por contabilizar.

la cantidad de nociones matemáticas incluidas en cada bloque y con la diversidad de tareas que se pueden plantear para cada una de las cuestiones matemáticas, otra posible explicación tiene que ver con la dialéctica herramienta-objeto, ya que algunas nociones de geometría aparecen implicadas (como herramientas) en las tareas donde se busca reconstruir una cuestión puntual, lo mismo puede ocurrir con las cuatro operaciones básicas y otras cuestiones matemáticas.

Para dilucidar estas inferencias, en lo que sigue se analizan las cuestiones matemáticas de cada bloque y los tipos de tareas que se plantean para su estudio. Para ello, omitimos el bloque I por su naturaleza eminentemente didáctica y agrupamos los bloques II y III por su ubicación dentro del sector de la aritmética, por otra parte el análisis del bloque VI se incluye en la última parte de este capítulo, la razón es que el análisis de éste se realiza con mayor profundidad dado que esta OM es la referencia para este trabajo.

2.2.1. Sistema decimal de numeración y operaciones básicas con números naturales

En estas áreas, se incluyen cuestiones matemáticas similares a las de la escuela primaria. El sistema de numeración y las cuatro operaciones fundamentales con números naturales constituyen las nociones matemáticas principales. En el siguiente cuadro pueden observarse las cuestiones incluidas, así como el número de tareas que se sugieren para cada cuestión.

Cuadro 4. Tareas por cuestión

Cuestión matemática	No. de tareas	Porcentaje del total de tareas
Numeración	12	20%
Suma	14	23.3%
Resta	14	23.3%
Multiplicación	6	10%
División	8	13.3%
Múltiplos y divisores	5	8.3%
Números primos	1	1.6%
TOTAL	**60**	**100%**

Como se puede observar, la mayoría de tareas corresponde a las estructuras aditivas (suma y resta), el dato es contrastante si se le compara con las cuestiones sobre la división, cuestión que reviste mayor complejidad y que representa mayores dificultades para los profesores de las escuelas primarias, a la división se le dedica poco más de la mitad del número de tareas asignadas a las estructuras aditivas y menos que al sistema de numeración. El escaso número de tareas dedicadas a los números primos es comprensible si se considera que este concepto se verá consolidado en niveles escolares superiores al de la escuela primaria, este criterio parece también justificar el número de tareas en las que se incluyen las nociones de múltiplos y divisores.

Respecto de los tipos de tareas, un primer aspecto destacable es la secuencia que siguen, en congruencia con los principios de la enseñanza de las matemáticas basada en la resolución de problemas, es común que primero se plantean tareas en las que se utilizan estrategias informales, luego aquellas en las que se pide reconocer los diversos significados y representaciones de los conceptos matemáticos para posteriormente, volver a la resolución de problemas utilizando formas convencionales de resolución.

Una primera característica es que en su totalidad los tipos de tareas son similares a las que se sugieren para los alumnos de la escuela primaria, sólo en algunos casos se introducen modificaciones para reflexionar sobre la tecnología que justifica ciertas técnicas matemáticas; las tareas sobre el sistema de numeración en base 6, con nombres y signos diferentes a los del sistema de numeración decimal o resolver problemas aditivos en base 4, son algunas de estas modificaciones. En estos casos, lo que puede verse es una especie de homología indirecta, es decir, se estudia la noción matemática que corresponde al nivel de la escuela primaria en un contexto diferente (base 6 o con nombres de los números diferentes al sistema decimal), para reflexionar sobre la dimensión epistemológica de ciertos objetos matemáticos. Los distintos tipos de tareas que pudieron encontrase en estas áreas se analizan a continuación.

T1: Resolución de problemas

Este tipo de tareas se caracteriza por solicitar a los formados que resuelvan problemas, un ejemplo de este tipo de tareas es el siguiente: [91]

1. Resuelva los siguientes problemas
   a) ¿Cuál es el área de un rectángulo que mide 5 cm de ancho por 7 cm de largo?
   b) Si una muñeca cuesta 5 pesos, ¿cuál es el precio de 7 muñecas?
   c) Ana tiene 5 blusas distintas y 7 faldas distintas. ¿De cuántas maneras distintas puede vestirse?
   d) Cada caja contiene 12 lápices. ¿Cuántos lápices hay en tres cajas

Regularmente, este tipo de tareas se plantea para que el estudiante identifique las técnicas con las que se les puede solucionar, aunque también se utilizan para comparar las diferentes relaciones implicadas en los problemas. Según sea el lugar que ocupe el tipo de tareas *T1* dentro del proceso de "estudio", su objetivo puede variar, si se plantean antes del momento de la institucionalización se utilizan como momento para la exploración, si se plantean después de ésta corresponden al momento de la evaluación o al del trabajo con la técnica. En este tipo de tareas pueden encontrase ciertos subgrupos, por ejemplo en algunos casos no se especifica la técnica para resolverlos, en otros se sugieren técnicas no convencionales y en otros –aunque en menor número- se pide resolverlos mediante la técnica convencional.

T2: Reflexión epistemológica

A diferencia de las anteriores, en las tareas *T2* no existe un problema contextualizado que resolver, en estos casos el formado opera sobre el modelo aritmético dado, que puede ser una serie numérica o un algoritmo convencional. Este tipo de tareas se plantea como posibilidad de reflexionar sobre el proceso de construcción del objeto matemático, lo que le permite producir y comprender un discurso tecnológico sobre la técnica que se utiliza. Un ejemplo de las tareas *T2* es el siguiente:

[91] Esta tarea es parte de la Actividad 2 del "Tema 1. La multiplicación pp. 109 de *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria, Taller para Maestros. Primera parte*

(si el sistema de numeración tiene los siguientes símbolos ┤ (la), ├ (le), ┬ (li), ┴ (lo), ┐ (lu) y ┤ (lan))

7. Escriba con símbolos LALILANESES los siguientes números[92]

lanla__________________ **linlu** ___________________________
tanlu __________________ **tenlo** ___________________________
lanlo __________________ **lenla** ____________________________

Como se puede ver, lo fundamental es la reflexión sobre el proceso de construcción del objeto matemático (en este caso el sistema de numeración), dicha reflexión permitirá comprender las propiedades multiplicativa, aditiva y posicional del sistema de numeración decimal, comprensión que se objetiva en un discurso que puede justificar las técnicas adecuadas para escribir cantidades, es en este sentido que las tareas T_2, se distinguen por el énfasis en la generación del discurso tecnológico.

T_3: Clasificación de problemas

Las tareas T_3 se caracterizan por demandar la clasificación de distintas clases de problemas, su diferencia respecto de las tareas T_1 tiene que ver con que en éstas no se precisa resolver los problemas, por esta razón se orientan más a la construcción de un discurso tecnológico que a la creación de una técnica. Un ejemplo de las tareas T_1 se muestra a continuación.

1. Lea los siguientes problemas:[93]
    a) Es el cumpleaños de Ana. Su mamá tenía 88 dulces para repartirlos entre 7 niños, cuidando que a todos les toque lo mismo. ¿Cuántos dulces le tocan a cada uno?
    b) El general ordena a 55 soldados que se formen en filas de 5. ¿Cuántas filas de soldados se hacen?

¿Qué diferencia hay entre la estructura de estos problemas?

El ejemplo está referido a la praxeología matemática, ya que aunque preceda a otras que tienen como referencia a la organización didáctica relativa a la

---

[92] Esta tarea es parte de la actividad 2, se ubica en la página 41 de *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria, Taller para Maestros. Primera parte*

[93] Op. Cit. P. 127

división, la acción que se demanda tiene que ver con cuestiones matemáticas puntuales, en otras palabras, la clasificación de problemas es una actividad propia de la actividad del matemático, aunque tenga una determinación sobre las tareas didácticas. Por ejemplo, una tarea didáctica relacionada con la clasificación de problemas tendría como objetivo jerarquizarlos para construir una secuencia de enseñanza.

T_4: Planteamiento de problemas

En el caso de las tareas *T_4* se pueden encontrar también ciertos subtipos de tareas, por ejemplo hay algunas en las que se da un problema y se pide plantear otro con características similares, en otros casos se dan los datos y se pide plantear problemas, en unos más sólo se pide plantear cierto tipo de problemas sin datos o modelo determinados. Un ejemplo de este tipo de tareas es el siguiente:

> Cada uno de los tres datos que se dan a continuación se pueden calcular a partir de los otros dos. Redacte tres problemas cambiando el dato que se debe calcular. Uno será de multiplicación, otro de división tipo tasativo y otro de división tipo reparto.[94]

Dato 1	**Dato 2**	**Dato 3**
Hay 600 litros de agua	Se consumen diariamente 40 litros de agua	El agua alcanza para 15 días

Este tipo de tarea se incluye con propósitos distintos: para que el estudiante sustituya el operador semántico del problema (el verbo “quitar” por “perder”), para que modifique la estructura del problema (cambiar el lugar de la incógnita) o para que establezca determinadas relaciones entre los datos (reparto o tasativo).

T_5: Análisis de la técnica convencional

Finalmente, otro tipo de tareas se relaciona con el análisis de la técnica (algoritmos) convencional que es útil para resolver cierta clase de problemas, en estas tareas también se observa la utilización de modelos aritméticos que sin ser

[94] Op cit p. 123

objetos de enseñanza en la escuela primaria, permiten la reflexión sobre los mecanismos propios de dicha técnica, lo que permitirá justificarla y darle sentido. Por esta razón, puede decirse que están más ligadas al bloque tecnológico-teórico que al técnico-práctico. Un ejemplo de este tipo de tareas se muestra enseguida.

9. Una maestra planteó el siguiente problema:[95]
Al señor Velásquez le regalaron una caja con 148 mangos. Quiso repartirlos entre sus 6 hermanos, de tal manera que a todos les tocara lo mismo, pero si los repartía de uno en uno se iba a tardar mucho. Entonces decidió repartirlos poco a poco...
Los alumnos propusieron que primero se repartieran 10 mangos a cada hermano, después 8, 5 y 1 mango.
En cada reparto, la maestra pedía que calcularan cuántos mangos se habían repartido en total, y cuántos les quedaban para seguir repartiendo.
Una forma de expresar este problema es la siguiente:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 10 + +8 +5 +1 = 24 \\ \hline
6 & 148 \\
- & \underline{60} \\
 & 88 \\
- & \underline{48} \\
 & 40 \\
- & \underline{30} \\
 & 10 \\
- & \underline{6} \\
 & 4
\end{array}
$$

¿Qué significa el 148?
¿Qué significa el 10?
¿Qué significa el 1?
¿Qué significa el 4?

Otra característica de este tipo de tareas es que por lo general, el análisis se hace sobre técnicas que se ubican entre informales y convencionales.

2.2.2. La naturaleza de las tareas

En el siguiente cuadro se puede observar el número de tareas para el sistema de numeración y las cuatro operaciones básicas, además de su naturaleza y la

[95] Op cit p. 133

noción matemática a la que hacen referencia. En él se puede apreciar que las tareas de resolución de problemas (***T1***) son más numerosas, seguidas por las tareas de reflexión epistemológica (***T2***).

Cuadro 5. Tareas y cuestiones matemáticas

Cuestiones matemáticas	**Tipos de tareas**					
	T1	***T2***	***T3***	***T4***	***T5***	**Total**
Sistema de numeración	3	8	-	-	1	**12**
Suma	6	2	4	1	1	**14**
Resta	3	3	4	-	4	**14**
Multiplicación	2	1	1	2	-	**6**
División	3	1	1	2	1	**8**
Múltiplos y divisores	5	-	-	-	-	**5**
Números primos	-	1	-	-	-	**1**
Total	**22 36.6%**	**16 26.6%**	**10 16.6%**	**5 8.3%**	**7 11.6%**	**60**

Al parecer la preeminencia de tareas de resolución de problemas muestra una tendencia que privilegia las tareas ligadas al momento de exploración. Otro indicador es que el tipo de tareas *T1* (resolución de problemas) tiene mayor presencia en las estructuras multiplicativas, mientras que las de reflexión (*T2)* lo hacen en el sistema de numeración. Esta misma tendencia puede advertirse en el escaso número de tareas ***T4*** (planteamiento de problemas) y ***T5*** (Análisis de la técnica convencional), las primeras se encuentran casi exclusivamente en las estructuras multiplicativas, mientras que las ***T5*** se plantean sólo en una ocasión para la división y en ninguna para la multiplicación.[96] Lo que estos datos nos indican es que al parecer, el programa de estudios parte de un principio: los profesores en formación tienen un dominio aceptable de las técnicas convencionales, por lo que su utilización en las tareas ***T1*** o la reflexión epistemológica de los objetos matemáticos ***T2***, es lo que se requiere trabajar en mayor medida.

Otros datos que dan cuenta del tipo de técnica que con mayor frecuencia se sugiere utilizar son los siguientes: ocho tareas ***T1*** se plantean con sistemas de

[96] Debe hacerse notar que el texto al que remite el programa de estudios no tiene esta característica ya que en éste sí existen múltiples actividades dedicadas al análisis de los diferentes algoritmos.

numeración no decimal, en tres se pide resolverlas para encontrar semejanzas y diferencias, en dos para reconocer los diversos procedimientos de solución y el resto, donde no se evidencian objetivos de este tipo, al parecer son tareas propias del "momento" para el trabajo con la técnica.

En lo que se refiere a las situaciones de reflexión epistemológica (T_2), se observa que en 12 de 16 tareas se utiliza un sistema de numeración no decimal, lo mismo ocurre en el análisis de la técnica (T_5), en este caso, en 3 de las 7 tareas se sugiere utilizar modelos aritméticos de distinta base. Finalmente, en lo que respecta al planteamiento de problemas se observa que tres tienen por objetivo plantear problemas con diferente significado, en una el objetivo es cambiar la estructura y en uno más es cambiar el operador.

2.2.3. La geometría

En contraste con otras áreas, en geometría sólo se plantean unas cuantas tareas aunque se sugiere a los formadores complementarlas con las incluidas en un texto[97] que contiene actividades relativas a cuestiones geométricas de diversa naturaleza. Todas las tareas sugeridas en el programa corresponden a la *Actividad 2. ¿Qué será? del Tema 4. Los poliedros* (p. 194 del *Taller para maestros)*. En ésta se sugiere la construcción de un poliedro poco conocido, que se oculte y posteriormente que se den instrucciones para que los compañeros lo construyan. Una vez hecha la construcción, el grupo comparará el cuerpo construido con el cuerpo oculto y analizará las características de este último, también se sugiere que antes de realizar esta actividad se realice un juego idéntico utilizando una figura irregular de cinco lados.

Como se puede ver, en esta actividad se incluyen tres tipos de tareas; construir, describir y comparar. Si tomamos en cuenta que se sugiere realizar el mismo juego dos veces, tenemos tres tipos de tareas contextualizadas en dos objetos geométricos diferentes, los polígonos y los poliedros. Las tareas relacionadas con la orientación, organización y estructuración del espacio (plano

[97] El texto al que se hace referencia es Martínez, A. y F. J. Rivaya (Coords.) "Una metodología activa y lúdica para la enseñanza de la geometría" , en *Matemáticas, cultura y aprendizaje, T*omo XVI, Síntesis, Madrid, pp. 67-105.

cartesiano), así como el dibujo y los trazos geométricos (con regla y compás), que son cuestiones sugeridas en el programa, deberán seleccionarse del texto de Martínez y Rivaya.

Lo contradictorio en este caso no es el hecho que se pida a los formadores complementar las tareas sugeridas, ya que ésta es una de las responsabilidades del formador, el hecho es significativo porque en las otras áreas del programa se sugieren todas las tareas que se desarrollarán en clase. La falta de especificación de tareas en este bloque parece corresponder también al escaso número de horas asignado (20), por estas razones podría decirse que la geometría es vista como preocupación menor en el ámbito noosférico.

2.2.4. La medición

Algunas tareas relacionadas con la geometría, como construir, demostrar, trazar y describir, se incluyen en la medición y con excepción de una, todas son similares a las sugeridas en los libros de texto para la escuela primaria. Los tipos de tareas incluidos en esta área se contextualizan fundamentalmente en cinco diferentes magnitudes: longitudes, superficies, capacidad, los ángulos y de masa. En el cuadro siguiente se pueden observar tanto el número de tareas como la noción en la que se ubican.

Cuadro 6. Nociones y tareas

Porcentaje	24.2 %	32.7 %	27.1 %	13.0 %	2.8 %
No. De tareas	26	35	29	14	3
Noción	**Longitud**	**Área**	**Volumen**	**Ángulos**	**Masa**

Como se puede observar, el número de tareas asignado a la longitud, superficie y volumen está equilibrado, por esta razón puede decirse que las tres tienen una importancia similar desde el punto de vista del programa, sin embargo, esto no se presenta en el caso de los ángulos y la masa. Al parecer, el escaso número de tareas asignado a estas magnitudes responde al hecho de que son nociones que ocupan un espacio importante en los programas de la educación secundaria. En esta área se sugieren siete tipos de tareas, a saber:

T_1: Calculo (perímetros, áreas, volúmenes)
T_2: Construcción (figuras, cuerpos o modelos de cuerpos)
T_3: Medición para la comparación (longitudes, superficies y volúmenes)
T_4: Descripción (figuras o cuerpos)
T_5: Transformación de figuras
T_6: Conversión de unidades de medida
T_7:Verificación

Las tareas de cálculo incluyen varios subtipos, se pide calcular el área, perímetro o volumen a partir de medidas determinadas, de trayectorias (en longitudes y ángulos) dadas, de dibujos dados sobre una cuadrícula o de cuerpos (dibujados) formados por cubos. En otros casos se pide calcular el volumen a partir del modelo (en perspectiva Cavalieri) o a partir del dibujo de cierto cuerpo geométrico, la “conversión” de medidas, aunque es una tarea relacionada con el cálculo, por lo general se le plantea de manera aislada.

En lo que concierne a las tareas de medición y comparación (T_3) también hay varios subtipos, en algunos casos (los más numerosos) se pide medir y comparar longitudes, superficies o volúmenes utilizando medidas no convencionales, en otros se sugiere utilizar unidades de medida convencionales. Por su parte los subtipos de las tareas de descripción (T_4) tienen que ver con: dar instrucciones (en ángulos y longitudes) para trazar una trayectoria o una figura o describir los procedimientos necesarios para calcular determinada medida. En el tipo de tareas de construcción (T_2), por lo general se pide construir figuras geométricas con forma y medidas determinadas, aunque en el caso del volumen se plantean varios subtipos: la construcción de un cuerpo siguiendo un modelo determinado, dibujar el modelo del cuerpo dadas sus medidas; dibujar un cuerpo con volumen y una de sus medidas determinados. Las tareas de transformación de figuras (T_5) generalmente tienen el objetivo de deducir la técnica adecuada (formula) para calcular el área.

Finalmente, en las tareas de verificación (T_7) no se requiere desplegar una demostración en el estricto sentido matemático o el conocimiento sobre algún teorema para resolverlas, de lo que se trata es verificar mediante cálculos que dos figuras tienen la misma área o que pueden tener el mismo perímetro y diferente área. En el cuadro siguiente se muestran los diferentes tipos de tareas y la cuestión matemática para la que se sugieren.

Cuadro 7. Tareas por cuestión

Cuestiones	Tipos de tareas							
	T1	***T2***	***T3***	***T4***	***T5***	***T6***	***T7***	**Total**
Longitud	12	6	5	2	-	-	1	**26**
Área	24	1	6	-	4	-	-	**35**
Volumen	13	9	1	1	-	4	1	**29**
Ángulos	3	5	3	2	-	-	1	**14**
Peso	1	-	2	-	-	-	-	**3**
Total	**53** **49.5%**	**21** **19.6%**	**17** **15.8%**	**5** **4.6%**	**4** **3.7%**	**4** **3.7%**	**3** **2.8%**	**107**

Al igual que en las áreas de sistema de numeración y cuatro operaciones básicas, los tipos de tareas dan mayor énfasis a la funcionalidad de las técnicas (cálculo) que la reflexión (transformación y verificación), baste un dato para ilustrar esta tendencia, casi la mitad de las tareas (49.5%) son de cálculo, 24 de las 53 tareas de este tipo (*T1)* se refieren a la superficie. En contraste con este dominio, sólo una quinta parte (19.6%) se refieren a la construcción (*T2*) y 3.7% a la transformación de figuras (*T5*). Estos datos parecen confirmar el énfasis se da en los programas de estudio a los tipos de tareas ligados al “momento” de la exploración.

En lo que concierne a las técnicas, 14 de las 24 tareas de cálculo de superficie, demandan una técnica no convencional, en 7 no se sugiere técnica alguna, en 4 se calcula la superficie de una figura dibujada sobre una cuadrícula y en 3 se pide que se utilice el procedimiento de triangulación. Las figuras en las que se pide calcular el área son: triángulos, cuadriláteros, polígonos regulares y polígonos irregulares pero no el círculo. El dato es relevante si se considera que entre las tareas relacionadas con el volumen se pide comparar los volúmenes de un prisma y un cilindro. Otro ejemplo del dominio de las técnicas no convencionales son las tareas (*T3*) de medición, en 7 de 9 se sugiere utilizar unidades de medida no convencionales. Por otra parte, en tres tareas de descripción se solicita describir trayectorias utilizando medidas de longitud y de ángulos.

2.2.5. Procesos de cambio

A decir de los programas, la proporcionalidad comienza a estudiarse con las cuatro operaciones básicas con números naturales y continúa con los racionales, por tal razón, en este bloque se estudian solamente situaciones sobre magnitudes proporcionales y algunas nociones como: razón, porcentaje, escala y la representación de la función en el plano cartesiano.

Cuadro 8. Tareas por cuestión

Cuestión	No. de tareas	Porcentaje
Proporcionalidad directa	1	5.5.%
Proporcionalidad inversa	2	11.1. %
Proporcionalidad Múltiple	1	5.5.%
Razón	3	16.6%
Porcentaje	10	55.5%
Gráfica de la función	1	5.5.%
Total	**18**	

En el cuadro anterior puede verse el número de tareas que corresponde a cada noción matemática y como se puede apreciar, más de la mitad de las tareas corresponde a la noción de porcentaje, lo que indica la importancia que se le da a esta noción, otro dato que justifica esta afirmación es que en las demás nociones el número de tareas no presenta diferencias significativas. El total de tareas ligadas a la noción de razón se refieren a una razón fraccionaria, una se contextualiza en la escala y dos más en las funciones numéricas. Sobre la naturaleza de las actividades propuestas, lo que se puede apreciar son cinco diferentes tipos de tareas:

T1: Resolución de problemas
T2: Clasificación de problemas
T3: Análisis de resultados
T4: Representación de funciones numéricas
T5: Reflexión epistemológica o sobre el proceso de construcción del objeto matemático

En el siguiente cuadro se observa la naturaleza de las tareas así como su distribución respecto de cada noción, en él puede verse la misma tendencia de áreas anteriores, es decir, la mayoría de las tareas se relaciona con la resolución de problemas (T_1) que también se plantean con diversos propósitos: para explorar diferentes técnicas de solución o para aplicar una técnica dada. Otro dato que confirma esta tendencia es que el segundo tipo de tareas más numerosos es el tipo T_2, en estos casos, por lo general se requiere identificar el tipo de variación proporcional (directa o inversa) implicado en los problemas.

Cuadro 9. Tareas por cuestión

Cuestiones matemáticas	**Tipos de tareas**					
	T1	***T2***	***T3***	***T4***	***T5***	**Total**
Proporcionalidad directa	1					**1**
Proporcionalidad inversa	1	1				**2**
Proporcionalidad Múltiple		1				**1**
Razón	2		1			**3**
Porcentaje	6	1		2	1	**10**
Gráfica de la función				1		**1**
Total	**10 55.5%**	**3 16.6%**	**1 5.5%**	**3 16.6%**	**1 5.5%**	**18**

Finalmente, otro dato significativo es el escaso número de tareas para el estudio de las funciones numéricas en el plano y la ausencia de tareas en las que el estudiante plantee problemas. Respecto del primero puede decirse que su número corresponde a la idea de que dicha noción es un contenido central en niveles educativos superiores y en el segundo caso se aprecia la tendencia de los planes por ubicar al planteamiento de problemas como un tipo de tareas de menor importancia.

2.2.6. Tratamiento de la información, predicción y azar

En el siguiente cuadro se pueden observar los contenidos matemáticos que el programa sugiere para esta área.

En lo que respecta a los tipos de tareas para esta área, el programa de estudios remite a dos fuentes distintas: al *Taller para Maestros* y al *Libro para el maestro. Matemáticas. Educación Secundaria (1997).* Este hecho imposibilita un análisis que considere las tareas sobre cada noción ya que a diferencia del *Taller para maestros*, el *Libro para el Maestro. Educación Secundaria* no tiene la estructura de “taller”, es más bien un texto de consulta para los profesores. Este texto se divide en temas como: *Tablas y gráficas, Cantidades absolutas y* *relativas, La noción frecuencial de la probabilidad*[98]*, La formula clásica de probabilidad*[99]*, etc.*, y por lo general siguen una secuencia que va de la explicación de las nociones, los procedimientos y las formulas a la solución de ejemplos que se resuelven utilizando dichas formulas. Posteriormente se explican nuevamente los procedimientos de solución y se describen algunas situaciones para la enseñanza, en otras palabras, mientras que el primer texto plantea tareas problemáticas para el profesor en formación, el segundo sólo institucionaliza aquellos saberes que requiere el formador.

Cuadro 10. Contenidos del bloque

Tratamiento de la información, predicción y azar	
Estadística	Nociones para el tratamiento de la información (Tasa, Porcentaje y otros índices)
	Medidas de tendencia central (Promedio, Mediana y Moda)
Probabilidad	Simulación de experimentos de azar
	Noción frecuencial de probabilidad
	Noción de muestra
	Formula clásica de la probabilidad
	Diagramas y representaciones intuitivas en el análisis de experimentos de azar
	Tratamiento estadístico de los resultados en experimentos de probabilidad por simulación
	Tablas de contingencia
	Producto de probabilidades

En síntesis, las dos fuentes a las que se remite el programa presentan diferentes planteamientos sobre el estudio de los contenidos matemáticos, si bien en el *Taller para Maestros* puede advertirse la intención de incluir los diferentes momentos didácticos enfatizando el momento de exploración como momento inicial, en el caso del *Libro para el maestro. Matemáticas. Educación Secundaria* se enfatiza como momento inicial a la institucionalización, de manera que es el formador quien a través de estas dos fuentes deberá organizar el estudio de esta área estableciendo una secuencia para los momentos y las tareas sugeridas sin

[98] La definición frecuencial de la probabilidad está dada por la formula: probabilidad = número de veces que se repite el evento / número total de observaciones realizadas

[99] La formula clásica de probabilidad que en este texto se presenta es la siguiente: P(A) = Número de casos favorables/ Número de casos posibles que se represente mediante la formula P(A) = n/N en donde todos los resultados son igualmente posibles.

tener un referente único como en las otras áreas. Este rasgo impide realizar un análisis de las tareas como el que se ha realizado hasta aquí, por esta razón sólo hemos señalado los contenidos sugeridos.

2.3. LOS TIPOS DE TAREAS Y LAS ORGANIZACIONES DIDÁCTICAS

El objetivo del presente apartado puede expresarse mediante la clásica pregunta de Chevallard (1991), ¿qué es lo que se esconde bajo la etiqueta del "saber didáctico" en los programas para las escuelas normales"? ¿Son organizaciones didácticas articuladas en torno a una cierta tradición teórica o son saberes tomados de distintas corrientes teóricas? En correspondencia con esta idea, cabe preguntarse también sobre las cuestiones didácticas a las que se da mayor énfasis, sobre los tipos de tareas que se proponen para aprehenderlas y transmitirlas y sobre los discursos tecnológicos y teóricos que justifican y dan sentido a las técnicas didácticas sugeridas. Éstas son interrogantes que servirán de guía para el análisis que a continuación nos proponemos realizar, una primera acción en ese sentido consiste en dilucidar cuál es la naturaleza y filiación epistemológica de dichas cuestiones, para ello, en el apartado siguiente se analiza el lenguaje con el que se designa a eso que en los programas de estudio identificamos como organizaciones didácticas.

2.3.1. El lenguaje que designa a "lo didáctico"

Un primer hecho destacable es que los programas plantean como referencia básica la existencia de un campo particular en el que se inscriben las organizaciones didácticas sugeridas, sobre este respecto se dice que:

> La didáctica de las matemáticas estudia los fenómenos relativos a la enseñanza y al aprendizaje de esta disciplina; describe y analiza las dificultades que se identifican en estos procesos, propone recursos para ayudar a los profesores y a los alumnos a superarlas y, especialmente, para hacer del saber que se enseña algo vivo y funcional. La didáctica de las matemáticas nos proporciona herramientas para analizar secuencias de situaciones didácticas, para mejorarlas e incluso para crearlas (...) El estudio de este sistema de relaciones integra aportes de otros campos del saber como la psicología del aprendizaje, los estudios sobre la práctica docente y, por supuesto, las matemáticas mismas (...) Más de 30 años de investigación en didáctica de las matemáticas, realizada en diferentes países, permiten ofrecer explicaciones y formas

> de análisis de los fenómenos de enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, sumamente útiles para la formación de los futuros maestros... (S.E.P. 1999a; 9)

Como se puede ver, hay un reconocimiento explícito de la existencia de un campo de estudio con una tradición de por lo menos 30 años en el que se han producido los saberes que se incluyen en los programas. Específicamente se puede ver una correspondencia entre las cuestiones didácticas incluidas en los programas y aquellas que se han construido en el seno de la escuela francesa de didáctica de las matemáticas, sobre este punto se dice que "...para ser enseñados estos conocimientos teóricos y descontextualizados deben seguirse transformando a lo largo de un proceso (...) Este proceso ha sido llamado *transposición didáctica* por el educador francés Y. Chevallard... " (SEP, 1999a, p. 10)

Otras huellas que nos permiten identificar la filiación de los programas con la escuela francesa de didáctica de las matemáticas son las referencias a las "situaciones didácticas", al "contrato didáctico", a las "variables didácticas" , a los "obstáculos epistemológicos" y a la noción de "permeabilidad didáctica" sobre la que se señala:

> Al estudiar los contenidos y al realizar las actividades que se proponen, es necesario que el profesor y los estudiantes eviten un fenómeno muy común, conocido como *permeabilidad didáctica*, que consiste en transferir hacia los alumnos de primaria información o actividades que son exclusivamente para la formación del maestro (términos formales, términos de didáctica o algunos problemas)... (SEP,1999a, p. 12)

A propósito de esta última noción, en los programas de estudio se puede observar que los términos "técnicos" de la didáctica de las matemáticas se manejan en el ámbito del formador, pero no en el ámbito de los formados, es decir, en los diferentes tipos de tareas que se proponen a los formados no aparecen estos términos "técnicos", lo que nos permite advertir que el componente teórico de las organizaciones didácticas es un elemento ausente en los programas, en otras palabras, en correspondencia con la "topogénesis" de Chevallard (1991), la reconstrucción de las praxeologías didácticas se estructura en dos niveles: un “topos” para el formador más ligado a lo teórico y un “topos” para el alumno centrado fundamentalmente en la dimensión técnica.[100]

La existencia de estos dos niveles parece ser compartida por Artigue (1995; 20), quien afirma que en un primer momento de la formación debe darse énfasis a una didáctica en acción, sólo más tarde, señala esta autora, debe profundizarse sobre la reflexión para entrar a una didáctica más explícita. Los temas tratados de modo empírico y pragmático en la primera fase, se tornan objetos de trabajo didáctico en la segunda, y por ende se desarrollan herramientas más complejas para el análisis de las situaciones didácticas. A esta profundización, nos dice Artigue, contribuye mucho el trabajo de investigación (memoire) que deben realizar los profesores en formación.

Siguiendo los señalamientos de esta autora, podría comprenderse que las nociones teóricas de la didáctica serán estudiadas por los formados cuando requieran análisis más profundos sobre la enseñanza. En las escuelas normales de México, al igual que en el proceso de formación que describe Artigue, dicho momento no es otro que la elaboración de un pequeño trabajo de investigación que deben realizar durante el cuarto año de formación. No obstante esta idea, sin la posibilidad de construir el componente teórico de una praxeología, el formado corre el riesgo de no encontrar el sentido de los problemas didácticos que se le plantean o la justificación para las técnicas didácticas empleadas. Por esta razón, en correspondencia con los principios de la teoría antropológica didáctica, debe pensarse que una praxeología didáctica debe reconstruirse tomando en cuenta todos sus componentes, ya que para que una tarea didáctica tenga sentido se requiere movilizar un discurso tecnológico y ciertos saberes teóricos.

2.3.2. La naturaleza de los saberes didácticos

Siguiendo las ideas de Chevallard (1998a) y Butlen y Peltier (1994), en el capítulo anterior se han señalado los tipos de tareas relativos a las praxeologías docentes, éstas pueden categorizarse de dos maneras que no son excluyentes entre sí. Por

[100] Entre los tipos de tareas incluidos, están algunos en los que se propone la lectura de resultados de investigación, en algunos de éstos sí se utilizan estos términos “técnicos” pero salvo en éstas, no se hace una referencia explícita a dichas nociones.

un lado pueden dividirse utilizando el criterio de la especificidad, esto es, existen tareas que remiten al conocimiento del proceso de "estudio" en general o a una situación para la enseñanza de un contenido preciso. Otra categorización tiene que ver con la dualidad enseñanza– aprendizaje, bajo este criterio, los tipos de tareas pueden ubicarse como tareas para la enseñanza (gestión del proceso de estudio) o para conocer las regularidades, dificultades u obstáculos del aprendizaje, siguiendo esta segunda categorización en el siguiente cuadro puede observarse la distribución de tareas en cada bloque del programa.

Cuadro 11. Tareas por bloque

Bloque temático	Tareas de Enseñanza	Tareas de Aprendizaje	Total	Porcentaje
I. Aprender matemáticas al resolver problemas	6	4	10	**6.4%**
II. Los números naturales y el sistema decimal de numeración	7	3	10	**6.4%**
III. Las cuatro operaciones básicas con números naturales	23	11	34	**21.9%**
IV. La geometría	4	-	4	**2.5%**
V. La medición	19	5	24	**15.4%**
VI. Los números racionales	27	13	40	**25.8%**
VII. Procesos de cambio	5	10	15	**9.6%**
VIII. Tratamiento de la información, predicción y azar	13	5	18	**11.6%**
Total	**104** **67%**	**51** **32.9%**	**155**	**100%**

Como se puede ver, más de la mitad de las tareas ponen el énfasis en la gestión del proceso de "estudio" y al igual que en las tareas de reconstrucción de las organizaciones matemáticas, en la geometría se observa el menor número de tareas, este rasgo parece ser una tendencia general puesto que los bloques con mayor número de tareas matemáticas (números racionales y cuatro operaciones básicas) también tiene los mayores porcentajes de tareas didácticas.

Otros datos que complementan la información de este cuadro dan cuenta del equilibrio entre las tareas didácticas sugeridas para el sistema de numeración y las cuatro operaciones básicas con números naturales, 11 tareas se refieren al sistema de numeración, 16 a las estructuras aditivas y 13 a las estructuras multiplicativas (5 a la multiplicación y 9 a la división). En lo que se refiere a la geometría, lo destacable es que al igual que en las tareas de naturaleza matemática se sugieren sólo unas cuantas; 3 que se refieren a la ubicación espacial y una a contenidos diversos, otro hecho destacable es que no se sugieren tareas sobre el aprendizaje. En el bloque dedicado a la medición lo significativo es el énfasis que se da a los volúmenes, 9 de las 16 tareas sugeridas para este bloque se contextualizan en esta magnitud mientras que 2 corresponden a los sistemas de medición en general y 5 a la medición de longitudes.

En el bloque dedicado a los racionales lo primero que llama la atención es el escaso énfasis que tienen los decimales, sólo 7 de las 40 tareas se refieren a estos números mientras que las otras 33 aluden a las fracciones comunes. En el contexto de las fracciones comunes lo que resulta significativo es el énfasis sobre la suma con fracciones, 14 de las 33 tareas ligadas a las fracciones corresponden a esta operación mientras que sólo 8 corresponden a las fracciones equivalentes y 4, 5 y 3 tareas respectivamente implican a la resta, multiplicación y división con fracciones.

En lo que respecta al bloque dedicado a los "procesos de cambio", lo significativo es que, al contrario de lo que ocurre con las tareas matemáticas, el porcentaje no es la noción más estudiada, en el caso de las tareas didácticas el énfasis mayor se le da a la variación proporcional (funciones numéricas), 14 de las 15 tareas sugeridas en este bloque corresponden a esta noción y sólo una a la noción de porcentaje. Finalmente, en el bloque dedicado al tratamiento de la información lo que se observa es un equilibrio adecuado entre el número de tareas dedicado a la estadística y a la probabilidad, 8 tareas se refieren a la estadística (tratamiento de la información) y 10 a nociones de la probabilidad.

2.3.3. Tareas para la enseñanza. Entre la planeación y la evaluación

Los datos anteriores muestran que los programas dan énfasis en los procesos de enseñanza, sin embargo, una cuestión importante tiene que ver con el momento en el que se sugiere estudiar dichos procesos, esto es, dependiendo del momento en que se analice la enseñanza, antes o después de realizarse, puede decirse que la tarea pone el énfasis en la planeación o en la evaluación. Para analizar esta cuestión, en el cuadro siguiente se muestra la distribución de las tareas centradas en la enseñanza considerando el momento en el que se pone el énfasis.

Cuadro12. Tareas centradas en la enseñanza

	Naturaleza de las tareas	No.	Ptje.
P L A N E A C	Identificar la noción implicada en una situación didáctica	47	45.1%
	Sugerir procedimientos para la enseñanza	10	9.6%
	Identificar situaciones para enseñar una determinada noción	5	4.8%
	Analizar las variables de una situación	15	14.4%
	Estructurar situaciones para brindar ayuda a los alumnos	6	5.7%
	Complejizar situaciones dadas tomando en cuenta el grado escolar	6	5.7%
	Analizar procesos didácticos sugeridos	4	3.8%
	Subtotal	**93**	**89.4%**
E V A L	Analizar procesos de enseñanza (en textos)	4	3.8%
	Analizar una clase	4	3.8%
	Analizar las dificultades de su propia práctica	3	2.8%
	Subtotal	**11**	**10.5%**
	TOTAL	**104**	**100%**

Como se puede observar, los programas tienen una fuerte tendencia hacia la planeación, casi 90% de las tareas se relacionan con un proceso didáctico por realizarse, destacan las tareas cuyo propósito es identificar las nociones matemáticas implícitas en los dispositivos de enseñanza, al parecer este objetivo se relaciona con la preocupación por el dominio de los contenidos matemáticos que deberán tener los profesores en formación, esta tendencia se hace más evidente si se observa que las tareas más ligadas a las organizaciones didácticas, como el diseño de situaciones, apenas alcanza 5.7 %.

Este cuadro muestra que las preocupaciones sobre la formación ponen el énfasis en el conocimiento de los dispositivos para la enseñanza, un dato que justifica tal afirmación es el siguiente: en términos agregados, identificar la correspondencia entre situación y noción, complejizar situaciones sugeridas y analizar las variables de una situación, son tareas que representan 50.8% de las tareas sobre la enseñanza. En contraste, las tareas sobre el proceso de "estudio" (el procedimiento para la enseñanza) -en el nivel de la planeación- sólo representan 9.6%, este mismo tipo de tareas sólo ocupa 2.8% entre las tareas orientadas hacia la evaluación. Lo que puede verse es que los programas enfatizan el estudio de los dispositivos por encima del proceso de “estudio” y de la enseñanza realizada (en el plano de la evaluación), es decir, sólo hay tres tareas en las que se requiere analizar sesiones de clase y no hay una sola donde se requiera analizar las concepciones de los profesores.

Otro dato significativo es que no se sugieren tareas en las que se incluya el componente teórico de las praxeologías didácticas, aunque la mayoría se centra en la noción de situación didáctica no se incluye como noción teórica, tampoco lo hacen conceptos como variable didáctica, contrato didáctico u obstáculo epistemológico, sino que las tareas se remiten únicamente al bloque técnico práctico de una organización y sólo eventualmente al discurso tecnológico. La inclusión de reportes de investigación en los que se muestran trabajos de los niños, por lo general sólo ponen el acento en el dispositivo empleado y en la técnica para identificar las dificultades de los niños.

Cuadro 13. Tareas centradas en el aprendizaje

	Naturaleza de las tareas	No.	Ptje.
PLANEAC	Analizar los modelos de aprendizaje (en textos)	3	5.8 %
	Predecir los procedimientos para una situación dada	14	27.4 %
	Identificar los aprendizajes que puede generar una situación	3	5.8 %
	Predecir los errores de los alumnos en una situación	4	7.8%
	Completar procedimientos inconclusos	3	5.8.%
	Subtotal	**27**	**52.9%**
EVAL	Identificar y explicar la naturaleza de los errores	7	13.7%
	Analizar procedimientos de solución	17	33.3%
	Subtotal	**24**	**47%**
	TOTAL	**51**	**100 %**

Este énfasis sobre la planeación, que parece ser un obstáculo para la reflexión sobre las organizaciones didácticas porque los discursos tecnológicos se quedan en el nivel de la sugerencia, no parece ser tan fuerte en lo que respecta a las tareas centradas en el aprendizaje, en éstas, como se puede ver en el cuadro anterior, existe un equilibrio entre los momentos de planeación y evaluación, la diferencia entre el número de unas y otras es por demás pequeña.

Como se puede observar también, el mayor número de tareas se dedica al estudio de las dificultades de los niños frente a determinada tarea, ya que la predicción o el análisis de las técnicas y la identificación de errores están relacionadas con el análisis de las dificultades que el alumno podría tener, o ha tenido en la resolución de una tarea. Sin embargo, al igual que en las tareas centradas en la enseñanza, se hace mayor énfasis sobre los dispositivos, en parte porque en el caso del aprendizaje difícilmente podrían plantearse tareas que no tuvieran esta característica. La preeminencia de las situaciones por encima del proceso de "estudio" resulta evidente si se observan los documentos que se utilizan para plantear las tareas, como se muestra en el siguiente cuadro, la mayoría de las tareas es planteada mediante el libro de texto de la escuela primaria, los ficheros y enunciados de problema, lo que nos habla de la importancia que los dispositivos tienen en estos programas.

Cuadro14. Documentos que se sugieren en los programas de estudio

Documento	Enseñanza	Aprendizaje	Total	Ptje.
Problema planteado por escrito	10	12	22	14.4%
Libro del maestro	4	1	5	3.2%
Videoconferencia	3	-	3	1.9%
Registro de clase	8	5	13	8.5%
Investigación	5	2	7	4.6%
Investigación con trabajo de niños	11	15	26	17.1%
Fichero	6	3	9	5.9%
Libro de texto	42	16	58	38%
Procedimientos dados	8	-	8	5.2%
Ninguno	1	-	1	0.5%
Total	**98**	**54**	**152**	

Finalmente, otro dato que corrobora el escaso interés por el proceso de "estudio" es el número de tareas en las que se utilizan registros de clase (8.5%) o el libro del maestro (3.2%). Otro tanto puede decirse de las representaciones de los profesores, no se sugieren documentos en los que se puedan analizar las concepciones que sobre la enseñanza y el aprendizaje tienen los profesores. Ahora bien, estas son tendencias generales que se observan en los programas de estudio, posiblemente sean también las que se observen en el contexto específico de los números racionales, sin embargo puede suceder lo contrario, para contrastar la tendencia observada, en lo que sigue habremos de analizar los tipos de tareas que se proponen en el bloque de los números racionales con el fin de identificar las técnicas (sobre todo didácticas) y los discursos tecnológicos que las justifican, de igual manera se intentará dar cuenta de los discursos teóricos sugeridos.

2.4. PRAXEOLOGÍAS MATEMÁTICAS SOBRE LOS NÚMEROS RACIONALES

A partir de la década de los setentas el concepto de número racional fue objeto de diversos análisis didácticos para identificar las formas que toma este concepto en situaciones prácticas, nociones como fenomenologías o subconstructos de una fracción fueron resultados de dichos análisis. Entre los más importantes se ubica al de Freudenthal (1983) y el de Kieren, en el primero se identifican tres significados básicos de la fracción: como “fracturador”, como “operador” y como “comparador”, en el segundo los subconstructos parte todo, medida, cociente, razón y operador y aunque todos están en estrecha relación, Kieren señala que el subconstructo parte-todo es fundamental, ya que junto con los mecanismos constructivos de partición y equivalencia son la base de la estructura que permite desarrollar conocimientos puntuales y construir un lenguaje fraccionario para expresar los resultados relacionados con cualquiera de sus diferentes interpretaciones. Desde estas perspectivas, puede decirse que “...(la fracción) es un megaconcepto (refiriéndose al número racional como sintetizador de todas las interpretaciones descritas) constituido (construido) por diferentes subconceptos...” Llinares (1997, p. 75)

Al tomar en cuenta los diferentes significados en la estructuración de la organización matemática relativa a la fracción (que en opinión de Freudenthal es la fuente fenomenológica de los números racionales), se generaron determinaciones didácticas que han tenido su mayor influencia en los currícula de las escuelas elementales, fundamentalmente se observó la necesidad de “... poner menos énfasis en la memorización de reglas y la mecanización sin entendimiento de los algoritmos para dar cabida al desarrollo de los conceptos e ideas fundamentales que rodean a la fracción...” (Mochón, (s/f), p. 25).

En correspondencia con esta idea, los programas de estudio para las escuelas normales también han incluido los significados de la fracción como un saber "a enseñar". Uno de los propósitos de los programas es "... que los estudiantes conozcan los diferentes significados que puede tener una fracción y los problemas que se generan con ellos..."[101] (SEP, 1999b, p.20). No obstante la estrecha relación entre los significados de la fracción, en opinión de Mochón, no existe una secuencia única para la enseñanza de las fracciones en la escuela, de lo que se trata, señala, es de una enseñanza "en espiral", esto es, estudiar primero las ideas básicas de cada subconstructo y trabajar "hacia "arriba", de esta manera, los mecanismos constructivos se pueden desarrollar al mismo tiempo que los subconstructos.

La inexistencia de una secuencia única para la enseñanza de este concepto se puede ver incluso en los programas de estudio para las escuelas normales, en éstos se plantea un orden diferente al que se sugiere en el texto que es su referencia básica (*Taller para maestros),* como se puede ver en el cuadro siguiente, las diferencias entre ambos aluden lo mismo a la secuencia que a la distribución de las tareas relativas a las OM y a las OD.

Cuadro 15. Secuencia para la enseñanza de las fracciones

Programa de estudios (temas)	Taller para maestros (temas)
1. Las fracciones como expresiones de una cantidad y como medidas	1. Las fracciones en el reparto
2. Los decimales como expresiones de medidas	2. Las fracciones en la medición
3. Las fracciones como resultado de una división	3. Las fracciones decimales y la medición
4. Fracciones y decimales como operadores multiplicativos	4. Las fracciones como operadores multiplicativos
5. Los contenidos de fracciones y decimales a lo largo de la escuela primaria	5. Las fracciones como resultado de una división
6. Dificultades, procesos y errores frecuentes; noción de obstáculo epistemológico	
7. Análisis de situaciones didácticas. Conocimientos implícitos y explícitos	
8. Sesión de observación y práctica	

[101] Otros propósitos planteados que tienen relación con las organizaciones matemáticas son: a) que utilicen adecuadamente las fracciones y los números decimales al comunicar, interpretar u operar con ellos y, b) que reflexionen sobre la estructura algebraica de los números racionales

La diferencia principal respecto de las OM, estriba en que en el texto de referencia, el subconstructo cociente se ubica al final de la secuencia, mientras que en el programa se ubica antes del subconstructo operador multiplicativo y después de los subconstructos parte todo y medida. Otra diferencia es que en el texto de referencia las tareas didácticas se incluyen junto con las tareas matemáticas de cada subconstructo, mientras que en el programa se plantean de forma separada, en los primeros cinco temas se incluyen tareas relativas a la reconstrucción de las OM, en el sexto tareas sobre al aprendizaje y los dos últimos tareas ligadas a la enseñanza. Esta diferencia es importante en la medida que muestra las dificultades del programa de estudios para articular las tareas matemáticas y didácticas dentro de los temas que corresponden a cada subconstructo.

2.4.1. Los subconstructos parte-todo y medida

Aunque en el programa de estudios se plantean los subconstructos parte-todo y medida de manera conjunta, algunos autores los analizan de manera separada, con base en esto y en un intento por analizar de manera más profunda las diferencias entre uno y otro, en lo que sigue se revisarán por separado los tipos de tareas incluidos en los temas dedicados a estos subconstructos.

2.4.1.1. El subconstructo parte- todo

Ésta es la interpretación escolar más usual de la fracción, en éste, un todo (continuo o discreto) es dividido en partes equivalentes que pueden ser o no una cantidad finita y la fracción que resulta de tomar cierta cantidad de partes representa la relación entre el número de partes tomado y el número total (que recibe el nombre de unidad) de partes en las que se dividió el todo, por esta razón, en estos casos la fracción es siempre una “fracción” de un objeto o de una cantidad.

Para comprender la relación parte- todo se requieren ciertas habilidades intelectuales como la capacidad para dividir exhaustivamente un todo en partes equivalentes, reconocer el todo y las partes del todo. Dicha comprensión deriva entre otras cosas de la identificación de los contextos en los que se sitúa dicha relación, un contexto puede estar dado por un “todo” continuo cuyas representaciones más frecuentes pueden ser diagramas circulares o rectangulares. Si en este contexto se estandariza la relación parte-todo junto con las características del sistema decimal de numeración, se pueden introducir las fracciones decimales, esto es, si determinado diagrama, que es tomado como unidad, se divide en 10 partes iguales, cada una es $\frac{1}{10}$ (una de las diez, una décima) del todo (unidad). Si cada décima parte se divide en diez partes, se obtiene “una de diez de una de diez”, es decir, $\frac{1}{10}$ de $\frac{1}{10}$, un centésimo de la unidad. Introducir de esta manera los decimales, afirma Llinares (1997), tiene una ventaja, se les puede ver como una extensión natural de los números naturales.

Otro contexto en el que se puede presentar la relación parte-todo es el discreto, en éste se trata de dividir un conjunto de objetos en subconjuntos que tengan el mismo número de elementos, por ejemplo si un conjunto de 20 objetos se divide en 5 partes iguales, cada parte será un subconjunto de 4 elementos, ahora bien si se “toman 2 de esas partes”, la fracción $\frac{2}{5}$ representa el número de partes o subconjuntos que se “tomó” en relación al conjunto original o al total de partes en las que se dividió dicho subconjunto.

Los puntos en la recta numérica también pueden considerarse como un contexto para la relación parte todo si se asocia la fracción $\frac{a}{b}$ con un punto en la recta en la que cada segmento unidad se ha dividido en *b* partes (o en un múltiplo de *b)* y se toman *a* de esas partes. En este caso puede pensarse que la fracción no se asocia a una parte de una figura o a un subconjunto de objetos, sino que se reduce a un número abstracto, por ejemplo el $\frac{3}{5}$ sería un número (abstracto) que se ubica entre el cero y el 1. Sobre la relación parte-todo en la recta numérica, Dickson (1984) señala que:

> ... aunque esta forma de representar las fracciones provoca algunas dificultades a algunos niños (8-12 años), también presenta ventajas: hace que las fracciones impropias aparezcan de forma más natural (...);

> hace hincapié en el hecho de que el conjunto de las fracciones forma una extensión de los naturales (...); tiene conexiones con la idea de medida (uso de escalas) ... (en Llinares; 1997; 60).

No obstante, señala este autor, el desarrollo de las relaciones parte-todo en contextos continuos y discretos son requisitos previos para el trabajo con la recta numérica. Otra ventaja de la relación parte todo, señala Mochón, es que mediante ésta pueden representarse las fracciones equivalentes (siempre y cuando se mantenga una unidad fija de referencia) y la multiplicación de fracciones como “partes de partes”, por ejemplo la multiplicación $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$, podría representarse como la mitad de tres cuartas partes.

Para el estudio de los subconstructos parte-todo y medida, el programa de estudios se remite a las actividades incluidas en los temas 1. *Las fracciones en el reparto y 2. Las fracciones en la medición* del *Taller para maestros*, de manera que puede pensarse, los tipos de tareas para el subconstructo parte-todo se ubican en el tema 1. En la introducción de dicho tema se dice que “...el reparto equitativo y exhaustivo (en partes iguales y sin que sobre nada), es una de las actividades fundamentales que llevan a fraccionar una o varias unidades...” (SEP, 1996c, p. 18), en correspondencia con esta idea las tareas sugeridas para este tema se relacionan con problemas de reparto en los que el resultado es una fracción. Los tipos de tareas que se sugieren para este tema así como aquellas en las que se sugiere una técnica determinada se pueden ver en el siguiente cuadro:

Cuadro16. Tipos y frecuencia de tareas

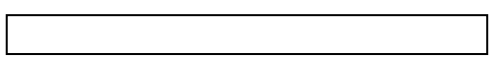
Tipos de Tareas	No. de tareas	Porcentaje
T1: Resolución de problemas	**8**	**40%**
T2: Comparación	**4**	**20%**
T3: Completar una técnica	**4**	**20%**
T4: Representación del producto repartos por medio de escrituras aditivas	**1**	**5%**
T5: Identificar el error en una técnica	**3**	**15%**
Total	**20**	**100%**

T_1: Resolución de problemas.

Como se puede ver en el cuadro anterior, las de tareas de resolución de problemas (*T_1*) son las más numerosas, principalmente se plantean como momentos del primer encuentro para identificar la OM en un cierto tipo de tarea. En este caso se plantean problemas de reparto que en ocasiones ubican a la incógnita en el resultado o en el dividendo, en otras se pide determinar el "todo" y la cantidad de partes a partir de un resultado dado. También se plantean como momentos de exploración cuando no se sugiere la técnica para resolverlos o como momento para el trabajo de la técnica cuando se sugiere la técnica que debe utilizarse.

Otra característica de este tipo de tareas es que también se pide que justifiquen el resultado o que lo comprueben mediante una técnica determinada. Como se puede inferir, estas interrogantes se plantean con el fin de constituir un entorno tecnológico teórico, en otros términos, preguntar por las razones de ese resultado significa pedir que justifiquen la pertinencia de la técnica utilizada, esto es, que enuncien un discurso tecnológico que justifique la técnica empleada. Un ejemplo del tipo de tareas *T_1,* es el siguiente:

Resuelva el siguiente problema[102]
Cuatro niños se repartieron tres barritas iguales de chocolate. A cada uno le tocó lo mismo y no sobró nada.
La parte que le tocó a cada niño es del tamaño de la que se muestra a continuación:



a) Cree usted que el tamaño de cada barrita entera de chocolate, era más grande o más chica que la parte que le tocó a cada niño ____ ¿Por qué?_________________
b) Averigüe de qué tamaño eran las barritas de chocolate que se repartieron los niños y dibuje (...) una de las barritas enteras. Le puede ser útil copiar y recortar varias partes como las que le tocaron a cada niño.
c) Para verificar su respuesta anterior, construya tres tiras de cartoncillo del tamaño de la que dibujó y repártalas entre cuatro.

Como se puede ver, esta tarea corresponde a la resolución de problemas, está planteada en un contexto continuo (longitud) y la incógnita se ubica en la longitud de las partes del "todo", la técnica para resolverlo es sugerida, puede

[102] Tomada de S.E.P. (1996c, p. 22)

verse también que al solicitarse la verificación del resultado es necesario considerar al discurso tecnológico que justifica la técnica utilizada.

T2: Comparación

En este tipo de tareas se trata de establecer la relación entre el número de objetos (todo) y el número de partes en que se dividió, específicamente se trata de comparar los "divisores indicados" en una relación de reparto antes de que su cociente se exprese como una fracción.

Observe los datos de la tabla y determine a qué niños, de los repartos que se comparan a continuación, les tocará más pastel.[103]

Reparto	No. de pasteles	No. de niños
1	2	3
2	2	4
3	3	2
4	4	6
5	2	5
6	4	3
7	6	9
8	4	4

a) ¿A los niños del reparto 1 o a los del reparto 2? ¿Por qué?
b) ¿A los niños del reparto 1 a los del reparto 6? ¿Por qué?
c) ¿A los niños del reparto1 a los del reparto 3? ¿Por qué?
d) ¿A los niños del reparto1 a los del reparto 4 ¿Por qué?

Puede decirse que este tipo de tareas corresponde al momento de la constitución del entorno tecnológico-teórico, ya que el propósito no es utilizar una técnica matemática sino justificar las relaciones matemáticas que dicha técnica articula. Un ejemplo de este tipo de tareas se puede ver en el planteamiento anterior.

Como se puede ver, lo importante en esta tarea es justificar el resultado, comprender las relaciones que hay entre la parte y el todo y entre el dividendo y el divisor, también puede verse que en esta tarea se enfatiza (repartos 1 y 4) una idea de equivalencia previa a fracciones más ligadas a la división que a la relación

[103] Tomada de SEP (1996c, p. 22)

parte-todo. Otro dato significativo es que este tipo de tareas tiene la segunda mayor frecuencia, lo que nos permite inferir un equilibrio entre los momentos de exploración, de trabajo con la técnica y de constitución del entorno tecnológico teórico para el subconstructo parte-todo.

T_3: Completar una técnica

Las tareas de este tipo consisten en completar una técnica inconclusa, por esta razón, podría decirse que corresponden al momento del trabajo con la técnica, ya que para completar una técnica es necesario comprender cada uno de sus pasos y la correspondencia con la tarea planteada. El uso de dichas habilidades no hace sino acrecentar el dominio de la técnica y su eficacia sobre los tipos de problemas a los que se les aplica, por esta razón consideramos a las tareas T_3 como momentos del trabajo de la técnica. Un ejemplo de ellas es el siguiente:

A continuación se da el inicio de una resolución para el problema anterior. Intente terminarla.[104]

Problema: Tres niños se repartieron en partes iguales cuatro barritas de chocolate y no sobró nada. La parte que le tocó a cada niño es del tamaño que se muestra a continuación:

Procedimiento: “Yo pensé: como el reparto fue cuatro chocolates entre tres niños, tiene que haber tres porciones iguales. Entonces, junté las tres porciones:

Pedazo 1 pedazo 2 pedazo 3

Y pensé, ahí está todo el chocolate que se repartieron, entonces...”

Como se puede inferir para cumplir con esta tarea, el formado debe reconstruir la técnica[105] a partir de las ideas planteadas, debe encontrar la lógica que guía el inicio de esta técnica para posteriormente reconstruir la parte que no

[104] Tomada de SEP (1996c, p. 24)

[105] Para encontrar la longitud original de cada uno de los chocolates, la técnica que deberá desplegar el alumno consiste en dividir en cuatro partes iguales la longitud total de las tres partes de chocolate repartidas.

se muestra. De lo que se trata entonces es de resolver una tarea ligada con la comprensión y el dominio de la técnica. Como se puede ver en el cuadro 16, este tipo de tareas tiene la misma frecuencia que las T_2, lo que indica un equilibrio entre los momentos para la constitución del entorno tecnológico (T_2) y del trabajo de la técnica (T_3). Sin embargo la relación entre las tareas y momentos de estudio no es tan mecánica, cabe recordar que en uno y otro tipo se entrecruzan en los diferentes momentos de estudio pero lo que sí puede decirse es que cada tipo de tareas enfatiza en mayor medida un cierto momento didáctico.

T_4: Representación del producto de repartos por medio de escrituras aditivas

La representación de la suma de fracciones mediante la relación parte-todo, señala Mochón, provoca muchas dificultades, quizás porque la suma está más vinculada al subconstructo medida (producto del reparto) que al subconstructo parte-todo, no obstante, en el tema que aquí se analiza existe un tipo de tareas relacionados con la suma de fracciones, específicamente con la escritura aditiva, en ellas se trata de representar el resultado de un reparto mediante escrituras aditivas, es decir, de representar las partes que resultan de un reparto mediante la suma. Un ejemplo de este tipo de tareas es el siguiente:

Use sumas de fracciones para expresar la parte que le toca a cada niño con cada forma de reparto.[106]

Forma 1: A cada niño le tocó: 1 pastel + $\frac{1}{4}$ de pastel + _____

Forma 2: A cada niño le tocó: $\frac{1}{5}$ de pastel + _____________

Como se puede ver, no se trata de resolver la tarea mediante diagramas en los que se exprese la relación parte-todo, lo que generaría varias dificultades, se trata simplemente de representar el agrupamiento de partes mediante una suma de fracciones, en este sentido puede decirse que este tipo de tareas está centrado en la técnica que permite representar mediante escrituras aditivas el resultado del reparto, puesto que para cumplirla no se requiere de realizar el reparto ni justificar la técnica.

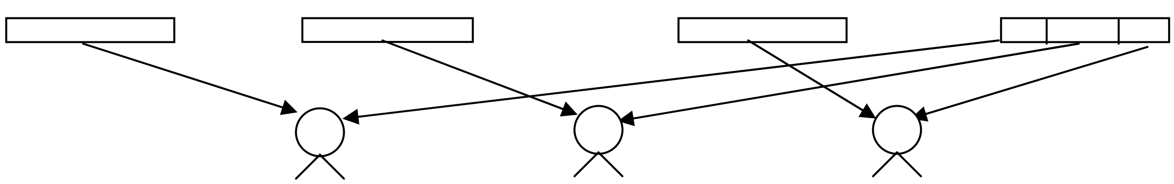
[106] Tomada de SEP (1996c, p. 20)

T_5: Identificar el error en una técnica

A pesar de que el programa de estudios separa los tipos de tareas matemáticos y didácticos, se puede observar que las tareas del tipo T_5 tienden hacia el estudio de organizaciones didácticas. Encontrar el error en una técnica determinada que los alumnos utilizan cuando resuelven problemas de reparto, es una tarea que se inscribe en praxeologías que responden más bien a una pregunta (que es su razón de ser) del tipo, ¿cuáles son las dificultades a las que se enfrentan los sujetos cuando resuelven problemas de reparto? Como se puede inferir, es una pregunta sobre los aprendizajes, por lo tanto remite a una praxeología didáctica. No obstante su "descontextualización", en este tema hay más tareas de este tipo que T_4 y casi el mismo número que T_2 y T_3.

La "descontextualización" de este tipo de tareas es relevante si se piensa que al plantearse como tareas relativas a las OM, no se asume la necesidad de generar y dominar una técnica didáctica, mucho menos en construir un discurso tecnológico que justifique dichas técnicas. Esta necesidad se haría más evidente si se ubicaran explícitamente como tareas relativas a la reconstrucción de las organizaciones didácticas. Un ejemplo de este tipo de tareas es el siguiente:

En la siguiente resolución del problema anterior (cuatro barras de chocolate entre 3 niños) hay un error. Trate de encontrarlo.[107]
"se repartieron 4 barritas entre tres niños. Dibujé primero las barritas enteras, de cualquier tamaño, sólo para ayudarme a pensar y las repartí.



Vi que cada niño le tocan una barrita y $\frac{1}{3}$ de otra. Entonces pensé: el pedazo que está dibujado tiene 1 barrita y $\frac{1}{3}$ de otra...

[107] Tomada de SEP (1996c, p. 24)

Descubrí que bastaba con quitarle ese tercio a la parte que le tocó a un niño:”

----Esta es la barrita entera------

Porción ------------------------

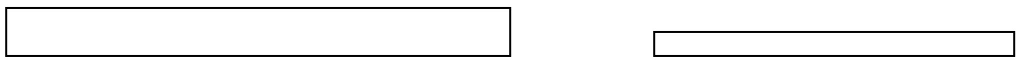
¿Cuál fue el error?_____________

Como se puede observar, el error tiene que ver con la modificación de la unidad de referencia, con la relatividad de la unidad, dificultad que se presenta de manera recurrente entre los niños, por esta razón consideramos que este tipo de tareas se relaciona con la organización didáctica. El hecho es significativo porque este tipo de tareas no se presenta como una actividad del profesor, sino como una actividad ligada al sujeto que estudia matemáticas.

En síntesis, entre los tipos de tareas para la reconstrucción del subconstructo parte-todo, se ha podido apreciar que las que se sugieren en mayor número enfatizan los momentos del primer encuentro y de exploración, aunque también las hay centradas en los momentos tecnológico y del trabajo de la técnica, sin embargo, las ausencias más notables tienen que ver con el contexto discreto, la recta numérica y la inclusión del número decimal. Por otra parte, se incluyen tareas centradas en el aprendizaje (identificación de errores) que se ubican solamente en los momentos de estudio y exploratorio, el trabajo de la técnica así como los discursos tecnológico y teórico (la noción de obstáculo epistemológico) tampoco se incluyen en estas tareas didácticos, una razón puede ser el hecho de que se incluyan en los temas “didácticos” del programa, otra, la no correspondencia entre el tiempo legal de la enseñanza y el número de tareas incluido.

2.4.1.2. La fracción como medida

En las situaciones donde la fracción adquiere el significado de medida, generalmente se tiene una cantidad medible, una unidad y se quiere determinar cuántas veces cabe la unidad en la cantidad que se va a medir. El caso más simple se presenta cuando la unidad cabe un número exacto de veces en la cantidad que se va a medir, si esto no sucede es necesario dividir la unidad en partes iguales para formar subunidades determinadas arbitrariamente por el sistema de medidas, por ejemplo. Un ejemplo es el siguiente, se trata de saber cuántas veces cabe la unidad en la longitud determinada.



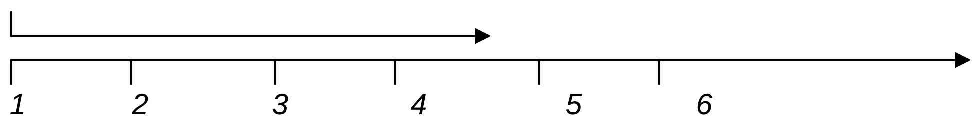
Unidad *longitud*

Como la unidad no cabe en la longitud, es necesario dividirla -por ejemplo- en cuatro partes iguales para ver cuántas veces cabe esta subunidad ("el cuarto") en la longitud. Posteriormente, podría dividirse cada cuarto en cuatro partes iguales para medir la cantidad sobrante, así sucesivamente buscando que la subunidad quepa exactamente aunque esto no pudiera ocurrir. Al final podría concluirse que la longitud mide "dos cuartos" más "dos cuartos de un cuarto" más "dos cuartos de un cuarto de un cuarto", esta acción se realiza cuando se mide con el sistema métrico decimal. Por esta razón, las experiencias concretas con la medición son un contexto en el que aparece la fracción bajo su forma de medida de forma natural.

Desde una perspectiva más general, el contexto de medida se caracteriza por la elección de una unidad arbitraria y sus subdivisiones, sin variar la unidad de referencia, para medir algo o una "región" mediante la asignación de un número a una "región". Como se puede observar, en estas situaciones el subconstructo medida se fundamenta en el parte–todo (tanto en su representación continua como discreta), ya que para formar subunidades se requiere comprender la relación entre las partes y el todo, entre las subunidades y la unidad.

Otro contexto en el que puede aparecer la fracción como medida es la recta numérica, por ejemplo, si se determina cada segmento de la recta como unidad de medida y se quiere medir cierta longitud, debe reconocerse que cada segmento admite subdivisiones en subsegmentos iguales y que "... el número de «adiciones iterativas» de la parte resultante de la subdivisión que «cubren» el objeto, indica la medida del objeto..." (Llinares, 1997; 61), en otros términos, si se suman sucesivamente las diferentes subunidades que se requieren para "cubrir" el objeto, el resultado de esa suma es la medida del objeto[108]. Esta idea puede ilustrarse mediante el siguiente ejemplo:

"Cuánto mide esta cuerda"



En este caso se requieren 4 unidades completas (segmentos de la recta) para "cubrir" parcialmente al objeto, luego se requiere "cubrir" la parte restante con un cierto número de subunidades, por ejemplo con $\frac{3}{5}$ de la unidad, entonces los primeros elementos de la adición iterativa son 4 unidades + $\frac{3}{5}$ de la unidad, pero, si aun quedara cierta parte del objeto por cubrir sería necesario subdividir los quintos en partes más pequeñas, cada quinto podría dividirse en dos. Se tiene así una nueva subunidad ($\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{5}$, es decir decimos), si para cubrir la parte restante del objeto se requiriera un décimo entonces la adición iterada sería $4 + \frac{3}{5} + \frac{1}{10}$ .., y el resultado es la medida del objeto.

Las situaciones de medida en la recta numérica son importantes puesto que permiten comprender la relaciones parte-todo en un contexto específico y reconocer contextos equivalentes que proceden de nuevas divisiones de la unidad, es decir, el manejo de la medida en la recta numérica puede ser una buena introducción a la noción de equivalencia, ya que a través de ésta última se puede comprender que la misma parte de la unidad recibe nombres diferentes en función del número de divisiones.

Por otra parte, las situaciones de medida, en opinión de Kieren (en Llinares, 1997), proporcionan un contexto natural para la "suma" (unión de dos medidas) y

---

[108] No obstante esta idea de Llinares, para Kieren (cit. por Dávila 2002, p. 43), el desarrollo de la interpretación de fracción como medida permite interpretar a las longitudes como puntos en la recta numérica.

para la introducción de los decimales, particularmente por la inclusión de la notación decimal. No obstante esta idea Mochón señala que la pregunta clásica de la medición, ¿cuantas veces cabe algo en algo?, está asociada con la operación de dividir, por ejemplo 15 ÷ 3 se puede interpretar como "cuántas veces cabe el 3 en el 15", de la misma manera, una división de fracciones como $\frac{2}{7} \div \frac{8}{3}$ puede interpretarse como "cuántas veces cabe $\frac{2}{7}$ en $\frac{3}{8}$" o "qué fracción es $\frac{2}{7}$ de $\frac{3}{8}$".

En síntesis, el subconstructo de medida se basa el de parte-todo, sus situaciones naturales son las experiencias de medir y éstas son un contexto favorable para la introducción de los números decimales, del orden, de la equivalencia, de la suma y la división de fracciones. En opinión de Kieren, también permiten introducir de manera natural la noción de orden y sus propiedades (tricotomía, antisimetría, transitividad), asimismo señala, las situaciones de partición de cantidades continuas son fundamentales para el desarrollo de la noción de fracción como medida, ya que favorecen el desarrollo de la conservación de longitudes, sustancia, superficies, volumen y la noción de equivalencia de fracciones. En correspondencia con estas ideas, las tareas que sobre el subconstructo medida se incluyen en los temas del programa de estudios (ver siguiente cuadro) se refieren principalmente a medir, ordenar y obtener fracciones equivalentes.[109]

Cuadro 17. Tipos de tareas

Tipos de tareas	Fracciones	Decimales	Total
T1:Determinar la medida de "algo"	6	3	**9**
T2: Comparar y ordenar fracciones	6	2	**8**
T3: Obtener fracciones equivalentes	6	1	**7**
T4: Sumar o restar fracciones	5	1	**6**
T5: Ubicar puntos en la recta	1	2	**3**
T6: Identificar partes de partes o "cuantas veces cabe"	2	2	**4**
T7: Analizar situaciones didácticas	2	--	**2**
T8: Identificar el error en técnicas dadas	1	--	**1**
Total	29	11	**40**

[109] Cabe aclarar que las tareas relacionadas con el subconstructo medida se incluyen en dos de los seis temas del programa de estudios, en el *1. Las fracciones como expresiones de una cantidad y como medidas* y en el 2. *Los decimales como expresiones de medidas*.

Como se puede ver en el cuadro no. 17, existe un desequilibrio entre las tareas que incluyen los números decimales y las fracciones comunes, sólo 11 de 40 tareas se refieren a los números decimales, proporción que muestra la tendencia de todos los temas, es decir, 2 de cada 3 tareas se enmarcan en las fracciones. En las relativas a los decimales[110] se reconstruye el sistema decimal a partir de unidades de medida arbitrarias, el objetivo es reflexionar sobre las características del sistema métrico decimal, por esta razón puede decirse que enfatizan el momento tecnológico de la praxeología, ya que intentan construir un discurso que justifique la manera como se escriben los números decimales. Este rasgo contrasta con las tareas relativas a las fracciones comunes, en éstas la tarea funciona más como momento del primer encuentro y exploración, aunque en la mayoría de las tareas sobre la medición, se solicita el resultado pero también la explicación de la técnica utilizada, en otras palabras, la mayoría de las tareas T_1, demanda la construcción de una técnica y el discurso que la justifica.

Por otra parte, mediante varios subtipos de las tareas T_2 se introducen las nociones de orden y equivalencia, por ejemplo en algunas se pide ordenar fracciones con una técnica dada, en otras se ordenan en la recta numérica y unas más tienen que ver con la "descomposición" de números decimales. Sin embargo, lo notable en este tema es el escaso número de tareas relativas a la transformación de fracciones comunes a decimales, lo que permitiría estudiar con mayor profundidad la equivalencia.

Las tareas T_2 están ligadas con las T_3 *y* T_5, ya que las que preceden a la comparación y ordenamiento de fracciones en la recta numérica, por lo general demandan la ubicación de puntos en la recta, sin embargo dicha ubicación parece estar más ligada al subconstructo parte-todo que a la medición, ya que no existen tareas en la que se solicite medir una "región" utilizando los segmentos de la recta. Otro rasgo destacable es que en las tareas T_5 no se incluyen momentos del primer encuentro y de exploración, es común que la *institucionalización* se realice antes

[110] Las tareas de medición relativas a los decimales representan el momento y la forma cómo en este curso se introducen los decimales.

de plantear cada tarea, por lo que funcionan como momento para el trabajo de la técnica.

Las tareas T_4 se plantean para trabajar diferentes momentos didácticos, por ejemplo hay tareas para el primer encuentro estudio y la exploración en las que se pide sumar o restar fracciones sin determinar una técnica adecuada, también hay para el momento tecnológico en las que se pide justificar el resultado y la técnica utilizada, en otras ligadas al momento de la institucionalización se explica la técnica convencional y finalmente, también pueden encontrarse tareas para el trabajo de la técnica, en éstas se pide resolver problemas de suma y resta de magnitudes mediante la técnica convencional.

Las tareas T_6 se utilizan también para introducir las estructuras multiplicativas, las que piden identificar la parte de una parte y las relativas a la fracción como operador introducen la técnica para multiplicar fracciones, mientras que las que piden encontrar “cuántas veces cabe” lo hacen a la división, este tipo de tareas se contextualiza lo mismo en las fracciones que en los decimales. En correspondencia con la idea de “introducir” las estructuras multiplicativas, las tareas T_6 sólo se plantean como momentos del primer encuentro y de exploración, no se plantean momentos tecnológicos, para la institucionalización o para el trabajo con la técnica.

Finalmente, aunque la naturaleza de los tipos T_7 *y* T_8 es más bien didáctica, al parecer se plantean sólo para enfatizar algunos rasgos de la organización matemática, en las T_7 se pide identificar la noción matemática implicada en las situaciones y la única tarea T_8 parece seguir la misma lógica, dar cuenta de las características de las OM más que de los procesos de aprendizaje, por estas razones, es comprensible el escaso número de estas tareas y la naturaleza de los momentos de estudio que privilegian.

2.4.2. La fracción como cociente

Este subconstructo se relaciona con la operación de dividir dos números naturales (que se indica como a ÷ b = $\frac{a}{b}$), esto es, está asociada con la acción de dividir una cantidad en un número de partes dadas. En esta interpretación se considera que las fracciones tienen un doble aspecto, como una división indicada y como elementos de una estructura algebraica.

La interpretación de la fracción como división indicada puede aparecer en un contexto de reparto, por ejemplo el problema *tenemos tres barras de chocolate y hay que repartirlas de forma equitativa entre cinco niños, ¿cuánto le tocará a cada uno?* la fracción $\frac{3}{5}$ indica una división de dos números naturales, sin embargo, también puede indicar el resultado de tal división, esta doble representación genera ciertas dificultades para la comprensión, ya que en este caso la fracción $\frac{3}{5}$ indica una operación con números naturales (cociente) el resultado $\frac{3}{5}$ (parte todo) de tal división. La diferencia entre ambas representaciones puede comprenderse mejor si se advierte que el resultado $\frac{3}{5}$ no siempre corresponde a la división indicada $\frac{3}{5}$, puede corresponder también a la división $6 \div 10$. Ahora bien, en las situaciones de reparto donde una cantidad se divide en un número de partes dadas, se pueden distinguir dos tipos de problemas:

- Los que indican la cantidad y el número de partes en las que hay que dividirla y piden lo que vale cada parte (reparto), por ejemplo *tres galletas entre cinco niños.*
- Los que indican la cantidad y lo que vale cada parte y solicitan el número de partes (medida), por ejemplo *tenemos tres galletas y a cada niño le ha tocado* $\frac{3}{5}$ *de una galleta. ¿A cuántos niños hemos podido dar galleta?*

Ambos tipos de problemas se refieren al subconstructo cociente, por ejemplo en el primero se trata de representar el resultado de un reparto mediante un cociente indicado mientras que en el segundo se trata de encontrar el divisor tomando en cuenta el cociente indicado que se da en el planteamiento.

Por otra parte, cuando se consideran las fracciones (números racionales) como elementos de una estructura algebraica, como elementos de un conjunto numérico en el que se ha definido una relación de equivalencia y unas operaciones (suma y multiplicación) que cumplen ciertas propiedades y dotan de una estructura algebraica de cuerpo conmutativo a dicho conjunto, las fracciones se conciben como elementos de la forma $\frac{a}{b}$ (donde *a* y *b* son naturales para Q+ y *b* es diferente de cero) que representa la solución de la ecuación b x = a. En este caso, señala Kieren (en Dávila, 2002), las fracciones se relacionan con sistemas algebraicos abstractos por lo que el manejo de las propiedades de los racionales y de sus operaciones se desarrolla de forma deductiva y requiere del dominio de teoremas algebraicos como el de la relación de equivalencia, los de la suma y multiplicación de racionales, el del inverso aditivo y el del inverso multiplicativo. Por esta razón, señala Llinares (1997), esta interpretación debe tener un carácter globalizador y ser posterior en la secuencia de enseñanza a las demás interpretaciones.[111]

Sin embargo, en opinión de Block y Solares (2001), los problemas de reparto pueden ser útiles para establecer un vínculo entre los subconstructos parte-todo y cociente, en su opinión, aún cuando los alumnos de primaria no conozcan la fracción "como cociente", es posible que resuelvan un problema de reparto (como *3 pasteles entre 4 niños)* y encuentren el cociente ($\frac{3}{4}$ de unidad) aunque esta fracción (que llaman "cociente calculado") para los alumnos sea un "quebrado" (la parte de un todo) y no un número que al multiplicarse por 4 da 3 (cociente por definición). Lo que estos autores enfatizan es que aquello que se estudia en la escuela primaria son los "cocientes calculados" y no los cocientes por definición.

La idea de vincular los subconstructos parte-todo y cociente mediante el trabajo con los "cocientes calculados", al parecer tiene un peso importante en los programas de estudio ya que, como se puede ver en el siguiente cuadro, las tareas T_1 son las más numerosas y la única tarea en la que pide completar un técnica se refiere a este tipo de problemas.

[111] Sin embargo, una posibilidad menos abstracta que la que plantea Llenares tiene que ver con definir a a/b como cociente. Esta posibilidad rompería con la idea de este autor respecto de la secuencia en la que él plantea la enseñanza del subconstructo cociente, es decir, desde esta perspectiva menos abstracta no resultaría obligado enseñar el subconstructo cociente después de las demás interpretaciones de la fracción.

Cuadro18. Tipos de tareas

	T1: Resolver problemas de reparto	*T2*: Representar una fracción en notación decimal	*T3*: Completar una técnica	*T4*: Leer y comentar un texto
Área	4	1		
Longitud	3	1		1
Recta numérica	2			
Numérico	2		1	
Total	**11**	**2**	**1**	**1**

Otro rasgo que distingue a las tareas *T1* es que a diferencia de las tareas planteadas en otros subconstructos, se plantean como trabajo dirigido por el formador, al parecer, esta característica tiene que ver con la dificultad de identificar la diferencia entre los subconstructos parte-todo y cociente. Un ejemplo de la forma en la que se plantean puede verse en el siguiente ejemplo.

En el reparto de tres pasteles entre cuatro niños, imagine que se reparte cada pastel por separado entre los cuatro niños.[112]
Cuando reparte el primer pastel, ¿qué parte de ese pastel le toca a cada niño?
Cuando reparte el segundo pastel , ¿qué parte de ese pastel le toca a cada niño?
Cuando reparte el tercer pastel , ¿qué parte de ese pastel le toca a cada niño?
Entonces, en total, a cada niño le toca 3 veces $\frac{1}{4}$ de pastel, es decir, $\frac{3}{4}$ de pastel.
Si hubieran sido cinco pasteles, ¿cuánto le hubiera tocado a cada niño?
¿Si hubieran sido nueve pasteles?
Si hubieran sido tres pasteles y cinco niños?
Si hubieran sido tres pasteles y trece niños?
Se ve claro entonces que si se reparte un número **n** de pasteles entre un número **m** de niños, a cada niño le tocarán **n** pedazos de $\frac{1}{m}$ de pastel, es decir, $\frac{n}{m}$ de pastel.
Por lo tanto, el resultado de la división **n** pasteles entre **m** niños es igual a la fracción $\frac{n}{m}$ de pastel.

Como se puede observar, la tarea original fue dividida en pequeños problemas que buscan relacionar los subconstructos parte-todo (cuánto pastel les tocó) y cociente (la división **n** entre **m**), sin embargo, esta tarea es más una institucionalización que un momento de exploración, ya que las respuestas solicitadas tienen como objetivo identificar una posible explicación al por qué cuando se divide **a** unidades entre **b** el resultado es $\frac{a}{b}$ de unidad. La forma de

[112] Tomada de SEP (1996c, pp. 90-91)

plantear las tareas *T1* es significativa, sobre todo si se aclara que ocho de las once tareas de este tipo se plantean de manera similar, dirigen las respuestas de los estudiantes para “explicar” la diferencia entre los significados de la fracción. Esta institucionalización que inicia el tema, se da en el contexto de las superficies, en la recta numérica y en el contexto numérico y lo que se puede ver en tareas posteriores es el trabajo de la técnica (3 tareas) que permite diferenciar el “cociente calculado” y el “cociente por definición”.

En las tareas *T2,* el objetivo es señalar un caso en el que se recurre al significado de división como técnica para convertir fracciones a decimales, en el primer caso se pide escribir una aproximación en notación decimal de la fracción $\frac{2}{7}$ (fue el resultado de un problema de reparto) sin determinar la técnica a utilizar, por esta razón puede verse como un momento exploratorio. En el segundo caso se pide escribir en notación decimal las fracciones $\frac{14}{1000}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{12}{125}$ y $\frac{2}{3}$ sin dividir el numerador entre el numerador mediante una técnica dada (encontrar fracciones equivalentes con denominador múltiplo de 10), por lo que, puede decirse que es una tarea para el momento de la institucionalizción. En este mismo contexto se ubica la tarea en la que se pide completar una técnica, dicha técnica es la identificación de fracciones decimales, puede decirse entonces que es un momento para el trabajo de la técnica. Por otra parte, resulta destacable que en este tema se incluya por primera vez una tarea (*T4)* en la que se requiera de leer un reporte de investigación lo que permitiría pensar en un momento tecnológico teórico, sin embargo, lo paradójico es que en el texto incluido se analiza principalmente el subconstructo operador y no el de cociente.[113]

Finalmente, puede decirse que la mayoría de las tareas incluidas en este tema son momentos para la institucionalización del subconstructo cociente, ya que se plantean luego de que se han determinado las diferentes técnicas o bien para identificar la diferencia entre los significados parte-todo y cociente. Esta característica impide la presencia de momentos del primer encuentro y de

[113] El texto en cuestión es *¿Qué significa multiplicar por* $\frac{7}{4}$*?* de Hugo Balbuena, que se incluye en SEP, 1996a.

exploración, incluso las tareas que pudieran ubicarse en el momento para el trabajo de la técnica son por demás escasos. El aspecto algebraico de este subconstructo es también una ausencia notable, no se incluyen tareas en las que se trabajen los distintos teoremas (de equivalencia, de suma y multiplicación, etc.) que son rasgos propios del número racional como estructura algebraica. Al parecer dichas ausencias tienen que ver con la complejidad de dicho subconstructo y con las dificultades para su enseñanza, sobre este respecto el texto de referencia de los programas de estudio señala:

> Los estudios en didáctica de las matemáticas aún no han encontrado caminos suficientemente viables para introducir el significado de las fracciones como división de enteros en el nivel básico. No obstante, debido a su importancia para el nivel medio básico, el significado de la fracción como cociente, se puede empezar a trabajar con los alumnos a partir de experiencias didácticas como las que aquí se han visto, cuando los alumnos tengan ya cierto dominio sobre el significado de la fracción como "partes de unidades" en situaciones de medición, y también sobre la división... (S.E.P. 1996b; 97)

2.4.3. La fracción como operador

En el subconstructo operador las fracciones son vistas como transformaciones, como "algo" que actúa sobre una situación, un conjunto o un estado inicial y lo modifica, ya sea que la transformación sea una amplificación o una reducción de los valores de un conjunto. En este contexto la fracción puede verse como una sucesión de divisiones y multiplicaciones o a la inversa, por ejemplo cuando se le aplica el operador $\frac{3}{5}$ a la magnitud 25 puede verse como dividir 25 entre 5 y multiplicar el resultado por 3[114]. Bajo esta interpretación las fracciones se utilizan para describir una orden, una acción a realizar (operador) y para describir un estado de cosas.

Un operador también tiene dos propiedades fundamentales: la de composición, que se refiere a la posibilidad de aplicar un operador a un conjunto ya operado y la de inverso, en la que se garantiza que, dado un operador puede encontrarse otro (inverso) que actúa sobre el conjunto operado para regresarlo a

[114] "... hay que insistir en que el operador lleva implícito un convenio: primero actúa la división y luego la multiplicación, identificándose así con la interpretación parte-todo..." Llinares (1997, p. 73)

su estado inicial. La propiedad de composición se relaciona con la multiplicación, puesto que componer operadores equivale a multiplicar las fracciones respectivas. Por su parte, la propiedad del inverso se relaciona con la división, lo que se hace evidente cuando se sabe que un conjunto ha sido transformado por un operador y se desea invertir la transformación, un ejemplo puede ser el siguiente problema: *si se sabe que un almacén ha disminuido todos su precios en $\frac{2}{5}$ partes del valor original, y si el precio reducido de un abrigo es de 450, ¿cuál sería su precio original?* Esta situación puede plantearse mediante una multiplicación con un factor desconocido ($X \times \frac{3}{5} = 450$) cuya solución está dada por la operación $450 \div \frac{3}{5} = X$.

La propiedad del inverso justifica la técnica convencional para la división de fracciones, además enfatiza el papel del álgebra de funciones (transformaciones) en este significado y conduce a la idea de que los números racionales forman un grupo (estructura algebraica) con la multiplicación. Así, las situaciones donde la fracción adquiere el significado operador pueden ser un contexto natural para la composición de transformaciones (funciones, operador), para la idea de inverso (el operador que reconstruye el estado inicial) y para la de identidad (el operador “1” que no modifica el estado inicial). Por su parte, la equivalencia tiene un contexto natural en las situaciones donde operadores fraccionarios diferentes (por ejemplo $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{6}$) actúan sobre un mismo estado inicial y dan el mismo estado final o cuando estados iniciales diferentes (por ejemplo 15 y 20) son transformados por un mismo operador (por ejemplo $\frac{2}{5}$) y la razón de proporción entre los estados iniciales permanece invariable. En este último caso la fracción operador implica a la noción de proporcionalidad, ya que establece la comparación de dos estados iniciales con sus estados finales.

Al igual que los subconstructos parte-todo y cociente, los significados razón y operador están separados por una diferencia muy fina, por ejemplo en una situación puede aplicarse un operador $\frac{3}{4}$ al estado inicial 28 y obtener un estado final 18. En este caso la fracción $\frac{3}{4}$ puede representar al operador, pero utilizado como indicador numérico de la relación entre los dos estados adquiere el significado de razón puesto que una razón no es sino un “índice comparativo” entre dos cantidades de una magnitud (Llinares, 1997; 67). Sobre este respecto Kieren (cit. por Dávila, 2002, p. 42) señala que la noción de proporcionalidad es fundamental para la comprensión de la fracción como razón ya que exige la capacidad para ver una transformación seguida de otra como una sola, la de reemplazar –conceptualmente- esas transformaciones por un producto y la capacidad para utilizar la reversibilidad de pensamiento en situaciones de identidad.

En lo que corresponde a los tipos de tareas sugeridos en el programa de estudios, puede decirse que están estrechamente ligados a la fracción como operador y a las propiedades de esta interpretación, por ejemplo hay tareas ligadas a la noción de operador, a la propiedad de composición, a la comparación (en las que se implica la noción de razón) y otras más que enfatizan la propiedad de inverso y demandan la justificación de la técnica para dividir fracciones, el tipo de tarea y la noción o propiedad implicada se pueden ver en el siguiente cuadro.

Cuadro 19. Tipos de tareas

	***T1:* Completar funciones**	***T2:* Realizar transformaciones**	***T3:* Comparación de cantidades**	***T4:* Resolución de problemas**	***T5:* Completar una técnica**	**Total**
Operador	3	2		2	2	**9**
Composición		3				**3**
Inverso	2			2	2	**6**
Razón			3	3		**6**
Total	**5**	**5**	**3**	**7**	**4**	**24**

En las tareas *T1* está implicada la noción de función y principalmente corresponden al momento del primer encuentro ya que por lo general se trata de que el estudiante encuentre el objeto matemático (fracción operador) en al menos uno de los tipos de tareas en las que está implicada. Un ejemplo de este tipo de tareas es el siguiente:

1. Resuelva el siguiente problema:[115]

Un trenecito recorre un circuito de 12 kilómetros. Complete los datos que faltan en la tabla

Número de vueltas	Total de kilómetros
1	12 km
3	
6	
$\frac{6}{2}$	
2 y $\frac{1}{4}$	
$\frac{3}{4}$	
$\frac{5}{6}$	
0.75	

¿Qué operación utilizó para calcular el total de kilómetros del tercer renglón?
¿Qué operación utilizó en el sexto renglón?

Como se puede ver, la tarea se contextualiza en la noción de función, aunque también se incluyen las de razón y proporcionalidad ya que se trata solamente de resolver la tarea y de enunciar la técnica utilizada en algunos casos (tercer y sexto renglón). Sin embargo, cuando se encuentra la técnica adecuada se encuentra también al operador ($\frac{12}{1}$) y se trabaja de manera implícita con la razón de proporción que permite comparar la relación entre las vueltas y los kilómetros recorridos. Existe también un subtipo de tareas T_1 en las que se incluye el inverso multiplicativo, en éstas se plantea un cuadro similar al anterior, se determinan los kilómetros recorridos y se pide encontrar el número de vueltas que dio el “trenecito”. Como se puede inferir, en esos casos se trata de dividir la cantidad de

[115] Tomada de SEP (1996c, p. 68)

kilómetros entre el operador, lo que es igual a multiplicar el total de kilómetros por el inverso ($\frac{1}{12}$) de la fracción ($\frac{12}{1}$) que actúo como operador.

En síntesis, las tareas T_1 enfatizan el momento del primer encuentro porque su objetivo es identificar las situaciones en las que aparece la noción de operador y aluden lo mismo a la multiplicación que a la división de fracciones. Sin embargo, cabe aclarar que la técnica convencional no es un objeto matemático que se reconstruya en estas tareas, a pesar de que dos tareas del tipo T_5 se contextualizen en este significado la técnica analizada no es la convencional.

Por su parte la propiedad de composición se incluye en las tareas T_2, éstas se plantean principalmente en el contexto de la escala y su objetivo es comprender que una fracción puede funcionar como operador en una figura ya operada. Este tipo de tareas se plantea lo mismo antes que después de explicar la técnica adecuada, por esta razón se puede decir que están centradas en lo momentos del primer encuentro, de la institucionalización y del trabajo con la técnica. Sin embargo, al igual que en las tareas T_1 resulta difícil determinar si el número de tareas incluido (5) es suficiente para lograr una "maestría" en la técnica convencional. Un ejemplo de este tipo de tareas es el siguiente:

(Luego de presentar un dibujo de una casita **A** con las medidas de sus lados determinadas)[116]

Aplique a la casita **A** el operador (x $\frac{3}{2}$) y después el operador (x $\frac{3}{4}$) para obtener la casita **J.**

Escriba las medidas que obtiene:

¿Qué operador permite pasar directamente de **A** a **J**?

Verifique su respuesta aplicando el operador

Como se puede observar, se trata de aplicar un operador a una figura ya operada además de comprender que la composición de operadores puede indicarse mediante una sola fracción, de este modo la propiedad de composición se relaciona con la multiplicación de fracciones, ya que el operador que indica la doble transformación puede obtenerse de la multiplicación de los dos operadores que representan a cada transformación.

[116] Tomada de SEP (1996c, p. 76)

Por su parte las tareas *T3* se relacionan con la noción de razón, aunque no se menciona explícitamente se dice que las actividades están relacionadas con el significado operador multiplicativo, esto es, con la fracción como expresión de una relación entre dos cantidades. Una tarea típica que se plantea dentro de este tipo es la siguiente:

2. Se van a comparar las cantidades de personas que asistieron a la primera función de distintas obras presentadas en un teatro:[117]

Obra 1:	**200**	**personas**
Obra 2:	100	personas
Obra 3:	125	personas
Obra 4:	350	personas
Obra 5:	400	personas
Obra 6:	600	personas

La comparación se va a hacer con respecto a la cantidad de personas que asistieron a la obra 1.

Así, en la obra 3 asistieron $\frac{5}{8}$ de los que asistieron a la obra 1.

Establezca la comparación del número de asistentes a las demás obras con respecto a los asistentes a la obra 1:

a) En la obra 2, asistieron...
b) En la obra 4, asistieron ...
c) En la obra 5, asistieron ...
d) En la obra 6, asistieron ....

Como se puede observar, la noción de razón se plantea junto con el mecanismo de equivalencia, es decir, junto a la comparación de cantidades se incluye una notación ($\frac{5}{8}$) que precisa la utilización del teorema de las fracciones equivalentes, para llegar a esa notación es preciso dar como respuesta la fracción $\frac{125}{200}$ y "simplificarla" mediante dicho teorema. Además, las tareas ligadas a la noción de razón se ven enriquecidas por aquellas (*T4*) que piden resolver un problema de proporcionalidad. En este sentido, las tareas *T4*, representan momentos para el trabajo con la técnica.

Hasta aquí se ha visto que los diferentes tipos de tareas corresponden a la naturaleza de los subconstructos de la fracción, también se ha podido observar

[117] Tomada de SEP (1996c, p. 78)

que en diferentes momentos se articulan tareas para la comprensión de los significados con las operaciones que pueden ser contextualizadas en dicho subconstructo, en este sentido destaca el hecho que tanto la multiplicación como la división de fracciones tienen un carácter introductoria puesto que son pocas las tareas que hacen énfasis en el trabajo con la técnica convencional, algo similar se presenta en las tareas centradas sobre el trabajo de la técnica para la suma y la resta, en este caso lo que se ha podido ver es que fundamentalmente se sugieren tareas para la comprensión del significado en detrimento del el trabajo con la técnica.

Por otra parte, el subconstructo cociente no es abordado desde su aspecto algebraico, las tareas sugeridas sólo ponen el énfasis en la diferencia entre el "cociente calculado" y el "cociente por definición", los teoremas que configuran a este subconstructo como grupo algebraico no se plantean como objeto de reconstrucción. Esta característica impide la aparición del discurso teórico sobre el objeto matemático esto es, impiden el estudio del cociente por definición y de las propiedades que le son consustanciales. Otro tanto puede decirse de los números decimales, en términos generales sólo aparecen como un añadido de las fracciones, por esta misma razón pocas tareas son las que se contextualizan en los decimales, casi no se encuentran tareas en los contextos naturales para los decimales o aquellas en las que las técnicas convencionales resultaran privilegiadas. Un dato que ilustra esta tendencia es el siguiente: salvo una (que hace énfasis en la división con fracciones), no hay tareas para el momento del trabajo con la técnica de los números decimales.

No obstante, estas ausencias pudieran explicarse por la relación entre el número de tareas y el tiempo que se destina para cumplirlas, sobre este respecto puede verse que 99 tareas deben resolverse en 34 horas, lo que nos muestra una relación desigual entre el número de tareas y el tiempo destinado para cumplirlas ya que cada una de las tareas debería resolverse en aproximadamente 20 minutos, tiempo que resulta insuficiente si se considera que en cada una de las tareas podrán desplegarse diferentes momentos didácticos.

2.5. PRAXEOLOGÍAS DIDÁCTICAS SOBRE LOS NÚMEROS RACIONALES

Antes de analizar las tareas didácticas incluidas en los programas es necesario recordar con Chevallard (1994) que el sistema de tareas del profesor se organiza en torno de dos categorías dependientes una de la otra. En la primera se contemplan las tareas relativas a la *concepción y organización de los dispositivos de estudio* y a la *gestión* de sus respectivos *entornos.* La segunda está formada por las tareas de *ayuda al estudio,* específicamente por las tareas de *dirección del estudio y de la enseñanza.*

Tomando en cuenta esta clasificación, puede decirse que en el programa se incluyen principalmente tareas que corresponden a la organización de los dispositivos de estudio o más específicamente a la manera en que dichos dispositivos se han organizado. Un primer dato que nos permite justificar esta afirmación son los temas en los que se incluyen las praxeologías docentes, en el bloque de los racionales se proponen cuatro temas de naturaleza didáctica, a saber:

1. *Los contenidos de fracciones y decimales a lo largo de la escuela primaria*
2. *Dificultades, procesos y errores frecuentes; noción de obstáculo epistemológico*
3. *Análisis de situaciones didácticas. Conocimientos implícitos y explícitos*
4. *Sesión de observación y práctica*

En una primera aproximación puede advertirse que los temas se orientan hacía la organización de los dispositivos de estudio, por ejemplo el objetivo del primer tema consiste en identificar los contenidos de los racionales en diferentes grados escolares por lo que representa la posibilidad de que el formado reconozca el objeto matemático en dispositivos de diferente complejidad. Otro tanto puede decirse del tema número 2, ya que el conocimiento sobre los errores de los alumnos permite organizar los dispositivos para *ayudar al estudio,* aunque también puede orientarse hacia la gestión de los entornos.

Por su parte, el tema número tres se refiere específicamente a la concepción y organización de los dispositivos (situaciones didácticas), puesto que el reconocimiento de las nociones implicadas en los dispositivos y de las variables que se introducen en éstos son elementos que permiten su organización.

Finalmente, el tema número cuatro está orientado hacía las tareas de dirección *del estudio,* las tareas de este bloque son las únicas que se ubican en el “terreno” de la práctica de la enseñanza.

No obstante estas consideraciones, las diferentes tareas que se proponen en el programa no siguen la secuencia que marcan los temas sino la lógica que imponen los significados de la fracción, por ejemplo, en el tema 1 se incluyen tareas relacionadas con los subconstructos parte-todo, medida y operador, en el tema 2 con el subconstructo parte todo y la noción de equivalencia, mientras que en el tema 3 están relacionadas con el significado cociente. En cada tema se sugieren tareas de diversa índole, en lo que respecta al significado cociente se plantean tareas relacionadas con la noción de obstáculo epistemológico, la de variable didáctica, etc., lo mismo sucede en cada tema. Los tipos de tareas así como su frecuencia se pueden observar en el siguiente cuadro:

Cuadro 20. Tipo y número de tareas

Tipo de tareas	No. de tareas
T1: Tareas sobre la relación entre objeto matemático y situación didáctica	13
T2: Tareas relativas a las variables didácticas	11
T3: Tareas relativas a las técnicas matemáticas	8
T4: Tareas referidas a las dificultades de los alumnos	5
T5: Tareas relativas a la dirección del proceso de estudio	3
Total	**40**

Como se puede observar, la mayoría de las tareas (*T1* y *T2)* están centradas en los dispositivos de estudio y representan un poco más de la mitad del total de tareas didácticas. Principalmente se centran en la identificación del objeto matemático implicado en un dispositivo y en el reconocimiento de las variables didácticas que los hacen más o menos complejos. Como se puede apreciar también, las tareas *T3* y *T4,* hacen referencia a aspectos ligados con el aprendizaje, en el primer caso se pide identificar la técnica que corresponden a una situación y en el segundo se trata de inferir las dificultades de los niños en determinadas situaciones.

Otro dato que resulta significativo es el escaso número de tareas sobre la generación de técnicas para la dirección del estudio, sólo hay una (T_5) en la que se requiere reflexionar sobre los diferentes momentos del proceso de estudio, este dato puede explicarse con base en la presencia del primer bloque del programa, en éste, el objetivo principal es que los alumnos conozcan el denominado “enfoque para la enseñanza de las matemáticas basado en la resolución de problemas”, dicho conocimiento implica que el profesor en formación reconstruya las diferentes fases o momentos de todo proceso de estudio de las matemáticas. No obstante estas afirmaciones, en cada tipo de tareas existen especificidades que permiten comprender la orientación de las praxeologías docentes incluidas, por esta razón en lo que sigue se analizarán cada tipo de tareas con mayor profundidad.

T_1: Tareas sobre la relación entre OM y dispositivo

Este tipo de tareas se plantean con un doble objetivo: identificar la noción implicada en un dispositivo o identificar el grado escolar en el que se incluyen estas nociones. En congruencia con estos objetivos se pide resolver la situación antes de identificar la noción, aunque también se plantean tareas donde sólo se requiere identificar la noción o donde además de tal identificación se pide establecer el nivel de complejidad de los dispositivos (variable didáctica) y las posibles dificultades que su solución entrañaría. Un ejemplo de este tipo de tareas es el siguiente:

Resuelva la lección “La casa suiza”, pág. 84 del L. T. M. 4° (libro de texto de matemáticas de cuarto grado)

¿Qué número se utiliza como operador al dibujar la casa grande?

¿Qué número se utiliza como operador al dibujar la ventana de la casa original?[118]

Como se puede observar, en esta tarea el significado implicado en la lección se indica previamente, por esta razón puede decirse se incluye una especie de institucionalización del significado implicado, con ello más que representar un momento de exploración la tarea se relaciona más con el momento

[118] Tomada de SEP (1996c, p. 85)

de la técnica puesto que el alumnos sólo requiere de utilizar una técnica que le permita encontrar el operador utilizado pero no requiere de analizar el significado implicado en la tarea. Esta característica también puede verse en el siguiente ejemplo:

Resuelva el ejercicio de la página 125 del L.T.M. 5° y después conteste las siguientes preguntas.[119]
En esa página se recurre al significado de la fracción como división de enteros.
Proporcione un ejemplo:
En esa página aparece también otra manera de abordar la equivalencia entre dos fracciones (entre $\frac{2}{4}$ y $\frac{1}{2}$).
¿En qué consiste esa manera?

En esta tarea, la técnica consiste en enunciar un problema similar al planteado. En otros términos, se trata de identificar la noción implicada y la "actividad matemática" que se requiere desplegar en la situación, lo que significa identificar la técnica necesaria para resolver la situación. Respecto de las nociones a las que se aluden, como puede observarse en el siguiente cuadro, en su mayoría, las tareas están centradas en la suma y se contextualizan en las fracciones comunes, sólo hay 3 tareas sobre los números decimales; en dos se pide identificar lecciones en las que se trabajen estos números y en una se trata de identificar al operador decimal. Por lo general las tareas plantean la búsqueda de nociones matemáticas en las lecciones incluidas en los libros de texto, el objetivo consiste en establecer su nivel de complejidad y el grado escolar en el que se plantean.

Cuadro 21. Tipo de tareas *T1*

Noción	Número de tareas		Total
	fracción	Decimal	
Suma	4		**4**
Operador	2	1	**3**
Cociente	2		**2**
Decimales		2	**2**
Equivalencia	1		**1**
Comparación	1		**1**
Total	**8**	**3**	**13**

[119] Tomada de SEP (1996c, p. 96)

También puede apreciarse que las tareas *T1* están centradas fundamentalmente en el bloque técnico práctico, es decir, dan énfasis a la creación de una técnica para una tarea determinada, sin embargo no incluyen consignas o preguntas que permitan la generación de un entorno tecnológico-teórico. Un ejemplo de esto es que no hay interrogantes que demanden la justificación de la técnica, tampoco los hay que den cuenta de la presencia del discurso teórico, que en este caso aludiría a la noción de situación didáctica.[120]

Con la inclusión del discurso teórico la tarea problemática cobraría otro sentido, se trataría de identificar el objeto matemático implicado en un dispositivo de estudio, lo que permitiría comprender las formas en las que se expone dicho saber en la situación, es decir, se podría comprender si el saber está incluido en un momento del primer encuentro, en uno de institucionalización, de evaluación o del trabajo con la técnica. Asimismo, el discurso teórico proveería de una justificación para la técnica con la que se cumple la tarea, es decir, permitiría generar un discurso tecnológico sobre la técnica utilizada. Sin estas posibilidades, las tareas *T1* se reducen a una *praxis* sin *logos* donde las técnicas son simplemente acciones sin relación con los conceptos de la didáctica.

T2: Tareas relativas a las variables didácticas

La noción de variable didáctica surgida en el seno de la teoría de las situaciones didácticas, está estrechamente ligada a la de situación didáctica, ya que si bien esta última es una noción cuyo objetivo es explicar el conjunto de condiciones y relaciones de un conocimiento bien determinado, algunas de estas condiciones pueden variar a voluntad del docente y constituyen una variable didáctica cuando dicha modificación cambia las estrategias y el conocimiento necesarios para resolver la situación. En términos de Brousseau:

> (El docente) puede utilizar valores que permiten al alumno comprender y resolver la situación con sus conocimientos previos, y luego hacerle

[120] Respecto de la noción de situación didáctica, Brousseau (2000, p. 10) señala: Hemos llamado “situación” a un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio que determina a un conocimiento dado como el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable. Algunas de estas situaciones requieren de la adquisición “anterior” de todos los conocimientos y esquemas necesarios, pero hay otras que ofrecen una posibilidad al sujeto para construir por sí mismo un conocimiento nuevo en un proceso “genético”...”

> afrontar la construcción de un conocimiento nuevo fijando un nuevo valor de una variable. La modificación de los valores de esas variables permite entonces engendrar, a partir de una situación, ya sea un campo de problemas correspondientes a un mismo conocimiento, ya sea un abanico de problemas que corresponden a conocimientos diferentes... (en Bartolomé y Fregona, 2003, p. 156)

No obstante los significados de esta noción, las tareas T_2 se plantean con el objetivo de determinar el nivel de complejidad de la situación sin reparar en las condiciones específicas que la hacen más o menos compleja. Si bien se plantean tareas en las que se pide identificar una variable específica de la situación, esta acción no se articula con la idea de complejidad y por consecuencia no se hace referencia tampoco a la noción de variable didáctica. Un ejemplo del primer subtipo de estas tareas es el siguiente:

En la lección “Las recetas de la tía” pág. 56 del L.T.M. 6° hay una situación en la que se comparan los resultados de dos repartos.[121]

¿Qué diferencia hay, en cuánto al nivel de dificultad entre esta situación y las que se plantean en el libro de 4° grado?

En la misma página 56 del libro de texto de sexto, hay una situación de reparto diferente a todas las que se han resuelto anteriormente. ¿En qué radica esa diferencia?

Para cumplir con esta tarea se requiere identificar las variables didácticas de una y otra situación, sin embargo no se plantean interrogantes que justifiquen dicha técnica, tampoco se pregunta por las modificaciones en las estrategias y los conocimientos que generan las diferencias entre una y otra, es decir, si se comprende que la complejidad de una situación está dada por la naturaleza de los elementos que en ella se incluyen así como por la estructura en la que se proponen, se podría justificar la técnica mediante la que se resuelve este tipo de tareas. De igual manera no hay huellas de la presencia del discurso teórico didáctico, la noción de variable didáctica no se hace explícita en esta tarea, aunque pudiera aparecer en el proceso de estudio que dirige el formador, no obstante esta idea, debe reconocerse que al menos en las tarea del ejemplo no se percibe la necesidad de incluir a esta noción de manera explícita. Dicha ausencia

[121] Tomada de SEP (1996c, p. 29)

puede verse también en tareas como la que se presenta a continuación en las que se sugiere identificar una variable didáctica específica.

En la lección "Quesos y crema", pág. 86 del L.T.M 3°, la magnitud a la que se refieren las fracciones es a veces continua (superficie, peso, capacidad, etcétera) y a veces discreta (por ejemplo, una cantidad de personas, de sillas, de dinero)[122]
Dé un ejemplo de cada tipo de magnitud:

Para resolver esta tarea, al igual que en la anterior, se requiere encontrar una variable didáctica (el tipo de magnitud) implicada en la situación y aunque los tipos de magnitudes se determinan previamente, lo que permitiría pensar en una tarea ubicada en el momento del trabajo de la técnica, ésta no requiere de justificarse o de aludir a la relación entre variable didáctica y nivel de complejidad de la situación planteada. En otros términos, no se pide justificar la técnica ni se justifica en alguna parte de la actividad, tampoco se observa la presencia de un discurso teórico, se trata simplemente de dar ejemplos de magnitudes sin asumir que dichas variables se relacionan con las estrategias y los conocimientos necesarios para cumplirla. Con la inclusión de los dos bloques (técnico práctico y tecnológico teórico) de la praxeología podría dotarse de sentido a esta tarea, es decir, si se identificaran los elementos (variables) y la relación entre éstos y su complejidad, la tarea tendría más sentido, sin embargo, en ausencia de uno de estos bloques (el tecnológico teórico) la tarea carece de sentido o al menos tiene uno muy restringido; identificar las magnitudes discretas y continuas en una situación dada.

Otro dato interesante es que, nueve de las once tareas T_2 son similares a "las recetas de la tía", es decir, son tareas en la que simplemente se determina la situación que es más o menos compleja sin determinar las variables que dan lugar a dicha complejidad. Al parecer, este dato significa que la noción de variable didáctica sólo se incluye como un elemento que permite identificar los significados de la fracción en los diversos grados escolares de la escuela primaria y no como elemento que permite concebir dispositivos para el estudio que requieren de distintas estrategias y conocimientos para resolverlas. Esta afirmación cobra

[122] Tomada de SEP (1996c, pp. 52-53)

mayor sentido si se advierte que en las tareas *T1* y *T2* no se sugiere diseñar o plantear situaciones.

T3: Tareas sobre la técnica

Como se ha señalado en capítulos anteriores, una praxeología tiene su génesis y su razón de ser en la pregunta ¿cómo hacer para...? cuando dicha interrogante se dirige a un objeto matemático, el sujeto debe realizar un proceso de estudio para resolverla, debe desplegar una actividad matemática. En términos de las praxeologías, una parte de la actividad matemática consiste en utilizar una técnica adecuada para un determinado tipo de tareas y bajo esta lógica, cuando se plantean tareas en las que debe identificarse la actividad matemática que se requiere para resolver una situación, se le plantea una tarea relativa a la técnica, una tarea del tipo *T3*.

Las tareas del tipo *T3* tienen cierta relación con las *T1,* si en estas últimas se trata de identificar la noción incluida en una situación en las *T3* se trata de identificar la técnica que debe utilizar el niño para resolver una tarea. No obstante, existen ciertas diferencias entre las tareas *T3* que permiten pensar en dos subtipos diferentes: en unas se tata de identificar la técnica apropiada para una situación y en otras se pide analizar la pertinencia de la técnica tomando en cuenta las características de sus eventuales alumnos. Un ejemplo en el que se combinan ambos subtipos es el siguiente:

En la lección “La paloma de la paz”, pág. 118 del L.T.M 4°, se trabaja con el contenido de equivalencia de fracciones. ¿En qué consiste ese trabajo?[123]

En la página 125 del L.T. M. 5°, aparece otra manera de abordar la equivalencia entre dos fracciones, en este caso, entre $\frac{2}{4}$ y $\frac{1}{2}$ ¿En qué consiste esa manera?

¿Por qué no es conveniente dar esa explicación a los niños en los grados anteriores?

En las dos primeras interrogantes se trata de encontrar la actividad matemática que debe realizar el alumno, esto es, la técnica para solucionarla. En

[123] Tomada de SEP (1996c, p. 53)

la primera, la situación exige utilizar tiras de papel en las que se indican diferentes fracciones, con este material el alumno deberá determinar qué fracciones son equivalentes a través de la comparación concreta de longitudes, si en una tira se tiene una longitud de $\frac{2}{3}$ de la unidad, se deberá buscar en otra tira una longitud idéntica pero indicada con otra fracción, por ejemplo con $\frac{4}{6}$. En la segunda se trata de identificar la equivalencia entre fracciones (cuartos y medios) mediante la comprobación del resultado de una suma ($\frac{9}{2}$), es decir, se trata de determinar cuáles de varias fracciones dadas pueden sumarse para que el resultado sea $\frac{9}{2}$.[124]

En síntesis, en las dos primeras tareas se trata de identificar la técnica que debe utilizarse y el discurso tecnológico que justifica esa técnica, en la primera el discurso tecnológico está ligado a la comparación de longitudes, se puede utilizar esta técnica de comparación porque existen magnitudes iguales que se pueden expresar con diferentes fracciones. En la segunda el discurso tecnológico es más abstracto, la justificación de la técnica se basa en la coherencia entre las fracciones incluidas en el "cuadrado mágico" y el resultado buscado ($\frac{9}{2}$), esta justificación hace referencia –implícita- a los teoremas de equivalencia y de la suma de racionales ya que de lo que se trata es de que el alumno comprenda que $^9/_2$ puede ser el resultado de la suma de diferentes fracciones equivalentes, por ejemplo de $\frac{5}{2} + \frac{4}{2}$ y de $\frac{15}{6} + \frac{8}{4}$ entre otras, sin embargo, tampoco en esta tarea se incluye el componente teórico de la praxeología.

La tercera tarea corresponde al segundo subtipo de tareas *T3*, en ésta se trata de establecer las relaciones entre la técnica y las características de los niños, en este ejemplo la actividad didáctica que el formado debe desplegar consiste en determinar si la técnica sugerida para la segunda tarea es adecuada para los

[124] Dicha suma se requiere para llenar un "cuadro mágico", una rejilla de tres por tres, en el que, las sumas en cualquier sentido deben dar como resultado $\frac{9}{2}$

niños de los primeros grados escolares, sin embargo, la pregunta está centrada más en el discurso tecnológico que en la técnica adecuada, es decir, más que preguntar sobre lo conveniente de la técnica, lo que se cuestiona es la razón de la inconveniencia o la justificación para sugerir o no tal técnica en estos grados escolares. Siguiendo esta misma idea el ejemplo siguiente ilustra una tarea cuyo objetivo es identificar la técnica que podrían desplegar los niños.

Revise las lecciones que se mencionan a continuación y después conteste las preguntas.[125]
"El productor agrícola", pág. 89, en L.T.M. 6°.
¿Qué recursos considera que podrían utilizar los niños para calcular $\frac{3}{4}$ de 10 000 metros?

Como se puede ver, el formado debe inferir las técnicas que podrían utilizar los niños, para ello deberá identificar la actividad matemática propuesta y las características de sus eventuales alumnos. Un dato significativo es que sólo hay tres tareas didácticas de este subtipo, dos hacen referencia a la equivalencia y una al significado operador. Por otra parte, la mayoría de las tareas T_3 (5 de 7) aluden a la noción de equivalencia, una al significado de operador y una más a la relación parte-todo. Otro dato significativo es que en su totalidad, este tipo de tareas hace énfasis en la actividad de planeación, en ningún caso se analizan técnicas realmente utilizadas por los niños ni las justificaciones que éstos pudieran dar. En otros términos, la ausencia más notable en las tareas T_3 tienen que ver con el análisis de la actividad matemática realizada por los niños.

T_4: Tareas relativas a las dificultades de los alumnos

En opinión de Brousseau (1998), para que una actividad (matemática) tenga sentido es necesaria una interacción constante entre el alumno y las situaciones problemáticas, una interacción didáctica, señala, en la que el alumno somete a revisión sus conocimientos anteriores, los modifica, completa o los rechaza para formar concepciones nuevas. En este sentido advierte Brousseau, el objeto

[125] Tomada de SEP (1996c, pp. 84-85). En esta actividad se mencionan otras lecciones y se plantean diferentes preguntas, sin embargo, la pregunta y lección indicadas son las que están referidas a una tarea relativa a la técnica.

principal de la didáctica es estudiar las condiciones que deben cumplir las situaciones planteadas al alumno para favorecer la aparición, el funcionamiento y el rechazo de esas concepciones sucesivas.

En síntesis, al identificar las dificultades y los errores que tiene o comete un alumno al resolver una tarea es posible reconocer los conocimientos que pone en juego en tanto concepciones –viejas- que pueden funcionar como dificultad en dicha tarea. En este sentido, las tareas *T4* tienen por objetivo que los profesores en formación reconozcan las dificultades de sus eventuales alumnos.

Podría pensarse por su naturaleza que este tipo de tareas enfatizarían el momento de la evaluación, es decir, que las tareas *T4* incluirían análisis de trabajos de los niños, sin embargo no es así, la técnica didáctica más solicitada consiste en inferir las dificultades que los niños podrían tener en determinadas tareas, lo significativo es que se sugiere realizar esta tarea sin incluir documentos en los que se observen trabajos de los niños. En dos de las cinco tareas de este tipo se trata simplemente de describir las dificultades que el formado tuvo para resolver una situación, en otras dos se pide inferir las posibles dificultades que tendrían los alumnos. En el siguiente ejemplo se puede ver la manera en la que ambos planteamientos se articulan.

Resuelva la lección “Animales que saltan”, en el L.T.M. 4°, pág. 134 y después conteste las siguientes preguntas:[126]
¿Qué dificultades encontró al resolver la lección?
¿Qué dificultades piensa que pueden encontrar los niños?

Como se puede observar, se trata de inferir las dificultades que tendrían los niños tomando como referencia las dificultades del formado en la solución de la tarea. La ausencia de trabajos de los niños que ayudarían a confirmar dichas dificultades es un indicio de que la tarea está anclada en el bloque práctico-técnico. Sin posibilidades de conocer realmente las dificultades de los niños, existen dificultades evidentes para gestionar un momento tecnológico, la única oportunidad para justificar la técnica que utiliza el formado consiste en remitirse a las dificultades que él tuvo, sin embargo, esta justificación no derivaría de un discurso tecnológico o teórico, sino de su experiencia básica.

[126] Tomada de SEP (1996c, p. 60)

La quinta tarea relativa de este tipo presenta dos características significativas: es la única en la que se pide escribir un texto y es la única también en la que se incluye un reporte de investigación con trabajos de los niños. La tarea en cuestión es la siguiente: [127]

Lea el artículo "El reparto y las fracciones" (Lecturas, págs. 159 a 175) y escriba un breve texto con su punto de vista sobre los siguientes aspectos: Es una verdad matemática indiscutible que $\frac{2}{3}$, $\frac{6}{4}$ ó $1\frac{1}{2}$ son fracciones que valen lo mismo.

¿Qué opinan sobre esto los niños de 1° y 2°?
¿Porqué para ellos este dato sí es discutible?
¿Tiene algún valor didáctico la discusión entre los niños?
¿Mostrándoles esas fracciones de "pastel" dibujadas en el pizarrón, se podría corregir su error? ¿Porqué?

Como se puede ver, la primera interrogante intenta fijar un punto de referencia para el análisis (la equivalencia de las fracciones), mientras que la segunda aborda el análisis de las concepciones de los niños. Por su parte, las dos últimas se refieren a las técnicas didácticas necesarias para gestionar las dificultades de los niños, esto es, se orientan hacia la exploración de las posibilidades para superar las dificultades a través de la validación semántica (la discusión) o la empírica (la acción de mostrar las partes en el pizarrón). También puede considerarse que escribir un texto es un intento por plantear una tarea en la que se incluirían todos los componentes de una praxeología: identificar las concepciones de los niños (la técnica); la pregunta sobre los recursos para modificarlas serían interrogantes que remiten a un discurso tecnológico en el que de manera implícita se incluye el discurso teórico. Otro dato significativo es que tres de las cinco tareas T_4 se contextualizan en los decimales, una en el significado operador y otra en el significado parte todo y la noción de equivalencia. En el marco de las tareas T_4, los programas sugieren observar, planear y experimentar una clase en la que se trabajen los racionales.

[127] Tomada de SEP (1996c, p. 30). El texto en cuestión es *El reparto y las fracciones* de Martha Dávila, en él se analizan las dificultades que los niños de 1° y 2° grados tienen para comprender la equitatividad y la exhaustividad de repartos de "pasteles" (partes de cartulina) y la noción de equivalencia.

2.6. CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

Una de las cuestiones interesantes del análisis presentado en este capítulo es que a través de los programas de estudio se puede ver la imagen del profesor que se desea formar y al mismo tiempo se perfila la figura deseada del formado en tanto estudiante, en otras palabras, el programa plantea las representaciones sociales acerca del futuro profesor y del estudiante que circulan en la institución y se intentan estructurar a través del proceso de formación.

Sobre estas representaciones, lo primero que hemos podido ver es que el lenguaje teórico específico de la didáctica de las matemáticas está dirigido solamente a los formadores, los formados no tienen contacto con éste, por esta razón podríamos inferir que su formación está orientada hacía la construcción de una didáctica para la acción, este rasgo genera tanto efectos positivos como negativos. Por un lado es positivo que el formado no vea a la didáctica solamente como una serie de conceptos o definiciones “demasiado teóricos” que difícilmente tienen utilidad para la práctica, sin embargo, esta misma ausencia puede generar que el formado no reconstruya nociones teóricas que resultan fundamentales para dar sentido a las tareas problemáticas que enfrenta o para justificar las técnicas didácticas que utiliza.

Cuadro 22. Naturaleza de las tareas incluidas en los programas de estudio

Bloque temático	Matemáticas	Enseñanza	Aprendizaje	Total
Aprender matemáticas al resolver problemas	1	6	4	**11**
Los números naturales y el sistema decimal de numeración	16	7	3	**26**
Las cuatro operaciones básicas con números naturales	43	23	11	**77**
La geometría	4	4	-	**8**
La medición	107	19	5	**131**
Los números racionales	99	27	13	**139**
Procesos de cambio	18	5	10	**33**
Tratamiento de la información, predicción y azar	19	13	5	**37**
Total	**307** **66.4%**	**104** **22.5%**	**51** **11%**	**462**

Por otra parte, con respecto a las tareas que se sugieren en los programas de estudio, como puede observarse en el cuadro anterior, se da mayor énfasis a las tareas matemáticas, 66.4% del total son de esta índole, esta característica se observa en términos generales y específicamente en el tema de los números racionales.

Al parecer, este énfasis se sustenta en la consideración de que una parte importante de la formación tiene que ver con el dominio de los contenidos matemáticos. No obstante, en general dichos contenidos son similares a los que se enseñan en la escuela primaria, esto significa que en el ámbito "noosférico" se piensa que es suficiente el dominio de los contenidos de este nivel para devenir en profesor de escuelas primarias. Otro aspecto que corrobora esta afirmación es que la mayor cantidad de tiempo y de tareas se concentran en los bloques dedicados a las cuatro operaciones básicas con números naturales, a la medición (donde fundamentalmente se estudian los procedimientos para calcular áreas y perímetros) y a los números racionales, contenidos a los que también se les da más importancia en la escuela primaria.

En este mismo sentido es destacable que en el bloque dedicado a los números racionales las fracciones ocupen la mayoría del tiempo destinado a la formación, las tareas centradas en el significado medida en las que también resultan implicadas las operaciones de suma y resta de fracciones son las que se plantean en mayor número. Los números decimales apenas se incluyen en un reducido número de tareas.

Respecto de las tareas matemáticas resulta significativo el escaso número de tareas en las que se sugiera el uso de la técnica convencional (los algoritmos) o en las que se trate de analizar los mecanismos de los algoritmos. Frente a esta situación, lo que se puede observar es que las tareas están centradas fundamentalmente en la construcción del significado de los conceptos matemáticos, lo que proporciona también una visión sobre los profesores en formación. Al parecer se piensa que éstos tienen dominio de los algoritmos básicos que se trabajan en la escuela primaria y que son los significados o más concretamente las situaciones en las que deben utilizarse dichos algoritmos lo que representa una dificultad para los futuros profesores. Por otra parte, respecto del rol que juega el futuro enseñante dentro de su proceso de formación, puede advertirse que la mayoría de tareas lo ubica en el rol de alumno, es decir, la mayoría de tareas relacionadas con el contenido matemático consisten en resolver problemas, por lo que el formado adopta la lógica de alumno y no de profesor.

Respecto de las tareas didácticas, se ha podido observar un doble énfasis, esto es, fundamentalmente las tareas de este tipo privilegian la enseñanza sobre el aprendizaje y el momento de la planeación sobre el de la evaluación. Sobre el primer rasgo, 2 de cada 3 tareas didácticas están centradas sobre la enseñanza, en éstas, principalmente se pide identificar el concepto matemático implicado en un dispositivo y las variables didácticas que le subyacen. Como se puede inferir, estas tareas están más ligadas al objeto matemático que al proceso de estudio, lo que consolida el énfasis en la reconstrucción de las organizaciones matemáticas.

Por otra parte, en las tareas referidas a la enseñanza es destacable también la intención de formar más para la planeación que para la evaluación, la mayoría de estas tareas demandan realizar análisis *a priori,* es decir, análisis sobre una práctica sugerida, probable o posible, sin embargo y no obstante este énfasis, por lo general se sugiere que las tareas se realicen sobre situaciones ya determinadas, en muy pocos casos se pide que el profesor en formación conciba o diseñe dichas situaciones o dispositivos para el estudio. Un dato que muestra la tendencia hacia la planeación es que del total de tareas referidas a la enseñanza, sólo 10.5% están centradas en el momento de la evaluación, es decir, sólo en una de cada 10 tareas de esta naturaleza se incluyen escenas o registros en los que se muestre la manera como un profesor dirige el proceso de estudio o en los que se observe la manera en la que los alumnos interaccionen con una situación.

Esta tendencia puede verse también entre las tareas relacionadas con el aprendizaje, en este caso también existe un número mayor de tareas en las que sólo se trata de inferir las dificultades o las técnicas que podrían utilizar los niños sin analizar los trabajos realizados por ellos, esta característica es notable en el bloque de los números racionales donde sólo se plantea una tarea en la que se muestran las técnicas. Otro rasgo relevante en las tareas de naturaleza didáctica es la ausencia de los discursos teóricos propios de la didáctica de las matemáticas, conceptos como “transposición”, “contrato” y “variable” didácticas, sólo forman parte del *topos* del formador, el *topos* del formado permanece como una “didáctica para la acción”

Otro aspecto importante que permanece desplazado tiene que ver con el “medio” en el que el profesor en formación se desarrollará profesionalmente, el análisis de la práctica, ya sea la propia o la práctica de los profesores “expertos” está relegada a unas cuantas tareas y se les dedica sólo un poco de tiempo, es cierto que durante el cuarto año de formación se asigna una gran cantidad de tiempo para esta actividad, sin embargo debe considerarse que entre el último curso sobre la enseñanza de las matemáticas y la práctica profesional del cuarto grado media todo un año, por lo tanto, la reflexión que permitiría al formado articular los saberes sobre la codeterminación matemático-didáctica no se presenta en los tiempos adecuados, esto es, de manera simultánea al curso en el que él reflexiona y actúa sobre estos diferentes saberes.

Finalmente, es necesario considerar la doble “juventud” que influye sobre los planteamientos del programa, por un lado y como lo menciona Kuzniak, los saberes didácticos son un cuerpo teórico demasiado joven, rasgo que dificulta la selección, clasificación y organización de saberes didácticos que deben guiar la formación de profesores. La segunda “juventud” tiene que ver con nuestro país, es decir, los programas del Plan 97 para las escuelas normales apenas representan el primer intento por articular los saberes matemáticos y didácticos en una misma asignatura, sin duda esta novedad es una de las causas de los desequilibrios y olvidos que se observan en los programas, sin embargo, esta novedad representa al mismo tiempo el inicio de un largo y complejo proceso de adecuación de saberes para la formación.

III. REPRESENTACIONES SOCIALES SOBRE EL "SABER DIDÁCTICO". LA VISIÓN DE LOS FORMADORES

El análisis de las praxeologías sugeridas en los programas de estudio que precede a este capítulo, representa una revisión del trabajo de preparación didáctica llamada la *puesta en texto del saber,* sin embargo, señala Chevallard (1991), ésta es una primera parte del proceso de transposición didáctica. Cuando el *texto del saber* adquiere fuerza de ley por efectos de esta preparación, inicia el proceso de transposición didáctica *interna,* la reconstrucción de las praxeologías en las aulas*.* Empero, entre la *puesta en texto del saber* y el funcionamiento didáctico del proyecto de enseñanza, existe un elemento que funciona como mediador y su participación determina la distancia final entre el *saber a enseñar* –puesto en texto- *y el saber enseñado* –en las aulas-.

Las ideas, creencias o concepciones del profesor, se constituyen como herramientas que orientan al profesor en su intento por reconstruir ciertas praxeologías que garanticen la coherencia entre las condiciones que fija el *texto de saber* y las características del funcionamiento real de la enseñanza. Éstas han sido analizadas en numerosas investigaciones que se ubican en lo que se ha denominado, estudios sobre *el pensamiento del profesor,* en ellos, a pesar de la diversidad terminológica (se han utilizado términos como creencias, teorías implícitas, concepciones, etc.),[128] existe un consenso respecto del papel que estos constructos juegan en la enseñanza, se dice que:

> Después de todo, es el conocimiento subjetivo del profesor relacionado con la escuela lo que determina en gran medida lo que sucede en el aula; *tanto si el profesor puede articular su conocimiento o no.* En vez de reducir la complejidad de las situaciones de enseñanza-aprendizaje a unas cuantas variables de investigación manejables, se intenta averiguar cómo los profesores hacen frente a esta complejidad... (Olson; 1984 en Pope;, 1991, p. 54)[129]

---

[128] Para un análisis más exhaustivo de esta terminología puede consultarse a Pope (1991) y Contreras (1998).

[129] Las cursivas corresponden al texto original

En opinión de Contreras (1998), la diversidad de términos en este tipo de estudios es un problema semántico más que terminológico, ya que cada término fue acuñado con un fin específico, identificar los elementos del conocimiento profesional de los profesores, por esta razón, la utilización de uno u otro término ha obedecido a dicha asociación.

Considerando que la elección del término para definir estas construcciones de los profesores implica tomar una postura teórica para analizar el conocimiento subjetivo con el que los formadores se enfrentan al *texto del saber* y al acto de enseñar, hemos seleccionado la noción de *representación social,* ya que como Clark (en Pope, 1991, p. 81) señala, "...cualesquiera que sean los constructos que utilicemos en estas construcciones, *si nos centramos en el pensamiento del profesor, es necesario reflexionar la historia de acuerdo con el profesor...*"[130]

3.1. REPRESENTACIÓN SOCIALES Y DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

Robert y Robinet (1989) observaron que las secuencias de enseñanza que se transmitían a los profesores en diversos cursos o proyectos de investigación, frecuentemente eran modificadas –de buena fe-, incluso era común que las "desnaturalizaran". A partir de estos hechos, dedujeron que en todo profesor había –implícita o explícitamente- ciertas concepciones sobre la enseñanza ligadas a sus conductas sobre lo que debe hacerse o no en clases, sobre lo que quiere decir tal o cual indicador en la conducta de los alumnos o sobre lo que hay que favorecer u obstaculizar en ellos. En síntesis, encontraron que todo profesor tiene una concepción sobre la manera "correcta" de enseñar las matemáticas.

En su opinión, esas concepciones eran en parte responsables de las respuestas que los profesores daban en circunstancias específicas y condicionaban su interpretación de las secuencias de enseñanza que les proporcionaban, es decir, sus concepciones tienen una relación directa con las elecciones que hacen en el salón de clases. Sin embargo, señalan, aunque estas ideas tienen una gran estabilidad, no son del mismo tipo ni se encuentran en el mismo nivel, puede haber varios sistemas de ideas que se alternan durante la

[130] Las cursivas corresponden al texto original

clase: un sistema global, explícito que puede explicar un cierto número de decisiones ligadas entre sí; y un sistema ligado a componentes personales que no siempre son explicitables.

En su opinión, la estabilidad de estas concepciones tiene que ver con razones de equilibrio personal y con las convicciones, esto es, cuando un formador ha construido una serie de ideas o concepciones sobre qué enseñar y cómo enseñar, le proporcionan cierta estabilidad profesional y/o personal, por lo que resulta difícil que las modifique ya que modificarlas implica abandonar una serie de concepciones son eficaces para la acción, además, cambiar las representaciones es una acción en la que no resultan claros los beneficios porque se requiere buscar un nuevo equilibrio.

Por otra parte, cuando las concepciones corresponden a las convicciones, su estabilidad puede ser mayor, ya que la convicción es admitida sin que haya conciencia y no es susceptible de argumentarse. Cuando una concepción sobre la manera "correcta" de formar se instala en los formadores sin que medie conocimiento alguno sobre ella, no puede argumentarse, tampoco acepta argumentos contra su instalación y sin posibilidades de reflexionar sobre ellas, las convicciones se constituyen como la parte más estable de las concepciones. No obstante lo anterior, para Robert y Robinet (1989) las concepciones de los profesores no son necesariamente coherentes ni definitivas para un mismo individuo, pueden variar de un individuo a otro, lo que es convicción para uno puede ser "representación" argumentada para otro. La representación es entonces la parte de las concepciones que permanece en el nivel de lo explícito, de lo que se puede argumentar.

Para explicar la estabilidad y la transformación de estas concepciones, estas autoras introducen la noción de representación social al campo de la didáctica de las matemáticas y en correspondencia con las ideas expresadas, puede decirse que una parte de las modificaciones que los formadores hacen al *texto del saber* parece ubicarse en el nivel de las representaciones sociales, especialmente, en aquellas que se refieren a la naturaleza del saber didáctico, a la manera como se enseña y a la manera como se aprende. Si aceptamos esta idea podríamos decir que la resistencia a modificar la formación de los futuros profesores puede explicarse mediante la noción de representación social. Por esta razón, antes de analizar las representaciones sociales que los formadores tienen sobre el saber didáctico "textualizado" es necesario revisar los supuestos que subyacen a este concepto.

3.1.1. Las representaciones sociales

En 1961 Moscovici publica *La Psychanalyse: son image et son public,* obra con la que en Francia inicia el estudio empírico de las representaciones sociales. En este trabajo, Moscovici considera a Durkheim como su antecesor, particularmente por la noción de "representación colectiva". El objetivo de Moscovici era establecer una nueva teoría del comportamiento humano analizando la manera como el conocimiento científico se transforma en conocimiento corriente o espontáneo.[131] Debido a la aceptación diferenciada de las ideas sobre el psicoanálisis, Moscovici pensó que el adjetivo "social" era una mejor manera de calificar a las representaciones que el adjetivo "colectivas", ya que en realidad las representaciones sobre el psicoanálisis no eran compartidas por toda la sociedad. Al analizar las representaciones sobre el psicoanálisis en la prensa católica y la marxista, encontró concepciones diversas en estos dos sectores, lo que confirmó su idea de que las representaciones eran más sociales que colectivas ya que no eran compartidas por toda una sociedad sino diferentes según el sector social que se analizara.

Farr (2003) considera que al transformar el concepto original de Durkheim, Moscovici moderniza el concepto de representaciones colectivas en dos sentidos: en el primero y más general, se deja de hablar de representaciones colectivas para hablar de representaciones sociales porque creía que en el mundo moderno existían pocas representaciones colectivas. Si bien consideraba que el concepto de representación colectiva podría explicar el pensamiento de las personas en el

[131] En este sentido, Moscovici (en Marková, 2003, p. 137) señala que Piaget ya había tomado de Durkheim, la noción de representación, sobre todo en su libro sobre el juicio moral. En la perspectiva de Moscovici, Piaget no estudió tanto la mente del individuo sino el conocimiento popular que tenían los niños respecto de varias cuestiones como el soñar.

mundo premoderno, no lo era para explicar el del mundo moderno, ya que en éste las representaciones son más dinámicas, cambian todo el tiempo y no son compartidas por todos los sujetos sociales.

La segunda tiene que ver con la introducción de la ciencia dentro del conjunto de las representaciones colectivas, es decir, los estudios de Durkheim sobre las representaciones se habían orientado principalmente hacia un conjunto de objetos sociales "premodernos": el lenguaje, la religión, las costumbres, los ritos, los mitos, la magia y otros fenómenos afines. Pero el objetivo de Moscovici era analizar los cambios que sufría la relación entre la ciencia y el sentido común.[132]

Desde esta perspectiva, las representaciones sociales constituyen una suerte de modalidad particular del conocimiento del "sentido común", su especificidad reside en el carácter social de los procesos que lo producen. Se trata entonces de un conjunto de conocimientos, creencias u opiniones compartidas por un grupo respecto de un objeto social dado,

> ... que se inscriben necesariamente en unos "cuadros de pensamiento preexistentes", tributarios de sistemas de creencias ancladas en unos valores, tradiciones e imágenes del mundo y del ser. Son sobretodo, el producto de un trabajo permanente de lo social, por los discursos y en los discursos, cuyo fin es reincorporar todo fenómeno nuevo en los modos explicativos o legitimantes, familiares y por lo mismo aceptables. Procesos de intercambio y de composición de ideas, necesarios para responder a la doble exigencia de las individualidades y las colectividades: por una parte construir sistemas de pensamiento y de conocimiento y por la otra, adoptar visiones consensuales del actuar, que les permiten mantener una liga social e incluso la continuidad de la comunicación de la noción... (Moscovici y Vignaux, 1994, p.26)

De la definición anterior pueden derivarse varias consideraciones. En primer lugar las representaciones sociales aluden a las estructuras construidas socialmente y al proceso mediante el que se construyen y transforman, en este sentido, una representación social es un proceso y una estructura construida, por

[132] Sobre el respecto, Duveen y Lloyd (2003, p. 30) señalan que "...la conceptualización que hace Moscovici del proceso de representación social guarda relación con la distinción que establece entre el universo consensual de las representaciones sociales y el universo reificado del discurso científico, que respeta las leyes de la lógica..." El estudio de las representaciones sociales del psicoanálisis es un ejemplo de la manera en que el universo reificado de la ciencia se representa en el mundo consensual del conocimiento cotidiano.

esta razón toda representación mantiene una doble relación con el objeto social al cual se refieren: relaciones de simbolización que se caracterizan por “nombrar” de cierta manera al objeto y relaciones de interpretación que son las significaciones que se otorgan a las simbolizaciones. Por ejemplo, un formador “nombra” de algún modo y a través de cierto lenguaje al saber didáctico, esto es, lo simboliza, pero además, el lenguaje utilizado le permite dotar de significado a dicho saber y compartir dicho significado con los sujetos de su mismo grupo social.

Este conjunto de simbolizaciones y significaciones resulta de una actividad mental que conduce al sujeto a una construcción específica del objeto, cuando el sujeto es confrontado con lo real, realiza un proceso de reconstrucción de lo real para producir una “remodelización” mental del objeto al que fue confrontado. De esta manera las informaciones que provienen del objeto son categorizadas, transformadas y corregidas por el sujeto bajo la influencia de sus conocimientos, valores y concepciones preexistentes. Un ejemplo de ello es que cuando el formador es confrontado con una nueva realidad (la formación a través de la Didáctica de las Matemáticas), toma las informaciones que provienen de esta nueva realidad y las transforma para que adquieran un significado concreto, comprensible y coherente con sus ideas preexistentes, en un momento, lugar y grupo social determinados.

Sin embargo, este proceso de construcción está socialmente determinado, la construcción de la representación no es una acción que pueda realizarse con independencia del campo social en el cual se está inserto, las representaciones son sistemas de pensamiento que sirven para comprenderse colectivamente y determinan la significación que el sujeto da a los nuevos objetos sociales. En este sentido, las representaciones son doblemente sociales, en primer lugar porque el proceso de su constitución está socialmente determinado y en segundo, porque una vez que la representación es construida y se torna una estructura, es compartida por todos los miembros de un grupo social determinado. Un ejemplo de la determinación social en la constitución de la representación sería la representación sobre la Didáctica de las Matemáticas, en este caso es posible que sujetos de diferente grupo social construyan diferentes representaciones sobre dicho objeto, por ejemplo un investigador en didáctica podría darle significados diferentes a los que le diera un formador de profesores.

Con base en los argumentos anteriores puede decirse que una representación es esencialmente social, el resultado de un conjunto de interacciones sociales al interior de un grupo, es decir, las comunicaciones internas entre los miembros de un grupo sobre sus modelos, creencias y valores, permiten orientar y modificar la actividad de producción simbólica de los individuos. Para decirlo de otra manera, una representación es generada colectivamente a través de las interacciones lingüísticas que dan contenido a la comunicación con sus pares en un grupo social determinado. Las representaciones sobre el rol de la didáctica de las matemáticas en la formación, son construidas mediante un proceso de comunicación entre los formadores, en él se hace referencia a los modelos, creencias y los valores que dan identidad al grupo, de esta manera las representaciones son construidas colectivamente a través de los discursos.

En segundo término, la representación es social porque es compartida por los individuos de un mismo grupo y marca la especificidad de ese grupo diferenciándolos de otros, esto es, de la misma manera que el grupo confiere ciertos significados al objeto, los significados le otorgan identidad al grupo social. Así, cuando a través de su discurso un sujeto muestra sus representaciones sobre un objeto, se sabe a que grupo social pertenece porque las ideas o creencias que expresa son dominantes y circulan sin dificultades en un grupo social particular. No obstante, el proceso constitutivo de la representación,

> ... no está limitada por las reglas del discurso lógico ni está reglamentada por los procesos de verificación empírica y falsación. Más bien se concibe como una entidad configurada por dos funciones complementarias: el anclaje (mediante el cual lo no familiar o remoto es asimilado dentro de las categorías conocidas de la cognición cotidiana) y la objetivación (que hace que las representaciones se proyecten en el mundo, de modo tal que lo abstracto se convierte en concreto)... (Duveen y Lloyd, 2003, p. 30)

La objetivación es un proceso mediante el cual se "concretizan" las nociones propias del objeto social, haciendo que se correspondan con ciertas palabras, por ejemplo cuando la noción de "devolución" propia de la didáctica de las matemáticas ha sido "concretizada" mediante la objetivación, podría expresarse con la expresión "se trata de plantear problemas a los alumnos". Pero sobre todo, la objetivación permite sintetizar, simplificar y remodelar las nociones propias del objeto -a partir de la lógica y coherencia internas del grupo- para convertirla en una información consensual, comunicable y útil en la orientación de las conductas. Mediante esta acción, la información es seleccionada, simplificada y esquematizada para formar lo que Moscovici llama "el nudo figurativo", constituido por un conjunto coherente de ideas que torna "concreto" lo que el objeto presentaba abstracto. Cuando el "nudo figurativo" se torna evidente, deviene "indiscutible" y es integrado en una realidad del sentido común, en una representación social.

El anclaje está relacionado con la raíz social de la representación, es decir, la construcción de la representación de un objeto nuevo toma como referencia las creencias, valores y saberes que preexisten en el sujeto y que son dominantes en su grupo, en ese sentido las informaciones del objeto nuevo se "anclan" en las preexistentes y se torna familiar lo extraño, así, el sujeto puede dotar de sentido al objeto nuevo porque lo integra en una red de significación formada por los valores indiscutibles en los grupos sociales o en la sociedad. El anclaje permite "enganchar" una cosa que es nueva con una "vieja" que es compartida por los individuos de un mismo grupo. Por ejemplo las informaciones nuevas que provienen del objeto que denominamos didáctica de las matemáticas, son dotadas de sentido si se les "engancha" con los sistemas de pensamiento que ya poseen los formadores.

Como lo señalan Moscovici y Vignaux (1994), las representaciones sociales juegan un triple rol: de esclarecimiento, cuando se dota de sentido a las realidades a las que es confrontado el sujeto; de integración, cuando se incorporan las nociones o los hechos nuevos a los cuadros familiares; y de compartición, cuando la representación social permite asegurar significaciones consensuadas para reconocer la colectividad determinada. En tanto sistemas de interpretación, son vectores esenciales de las opiniones, juicios y creencias y tienden a asegurar la pertinencia de nuestras conductas en colectividad, representar es al mismo tiempo presentarse cosas ausentes de forma tal que satisfagan condiciones de coherencia argumentativa, de racionalidad y de integridad normativa del grupo. En otros términos, las representaciones sociales se manifiestan a través de los juicios y creencias y aseguran nuestra pertenencia a un grupo social, ajustando nuestras ideas, discursos y conductas a aquello que es pertinente y válido en el grupo donde actuamos.

Por esta razón, para comunicar y difundir una representación no existe otro medio que los discursos y las significaciones que ella transmite, al reconocerse y apropiarse de ellas, los individuos comparten una misma representación social. Al significarla a través de los discursos, se comunica y expande su dominio, es por ello que, "... los fenómenos de representación social tienen un *status* simbólico: establecer una relación, formar una imagen, evocar, decir y hacer decir, compartir un sentido (...) y en el mejor de los casos, resumir en un cliché algo que será etiquetado..." (Moscovici y Vignaux, 1994, p. 27)

Esencialmente, las representaciones son saberes -espontáneos o del sentido común- que reconstruyen permanentemente los discursos de la élite, los expertos y los poseedores del conocimiento sabio o científico. Se trata de "contenidos de pensamiento" dados en lo social que se constituyen como proceso en el que se encuentra un origen siempre inacabado porque otros hechos o discursos vendrán a alimentarlos o alterarlos. Cuando se intenta estudiar las representaciones sociales, lo importante es especificar la manera como esos procesos se desarrollan socialmente y la forma como se organizan cognitivamente en términos de apropiamiento de significaciones y de trabajo sobre las ideas preexistentes, para ello, señalan Moscovici y Vignaux (1994), la reflexión sobre los hechos de la lengua y de la imagen son primordiales.

Esos procesos son el producto de sujetos que actúan a través de sus representaciones de lo real y reconstruyen permanentemente sus propias representaciones. Eso implica comprender la manera cómo los sujetos actúan para definirse y para actuar en lo social. Toda representación social cumple así diferentes tipos de funciones: unas cognitivas que permiten "anclar" unos referentes y estabilizar o desestabilizar unas situaciones evocadas; otras propiamente sociales cuyo fin es mantener o crear identidades y equilibrios colectivos.

En síntesis, cuando se alude a las representaciones sociales desde el punto de vista epistemológico, lo que está en juego es el análisis de los modos de pensamiento que lo cotidiano genera y lo histórico retiene; modos de pensamiento aplicados a unos “objetos” socializados que cognitiva y discursivamente, los grupos sociales se esfuerzan por reconstruir a través de las relaciones de sentido que dan a lo real y a ellos mismos. Desde este punto de vista es evidente que la cognición organiza y rige a lo social, puesto que lo simbólico modula nuestras aventuras humanas bajo esa forma superior que es el lenguaje, en otros términos, no hay representación social sin lenguaje como sin él no habría sociedad.

A partir de estas ideas se han desarrollado constructos teóricos que las han profundizado y ampliado, en lo que sigue se analizarán los presupuestos de uno de los desarrollos más conocidos; la teoría del nudo central.[133]

3.1.2. La teoría del nudo central

Esta teoría, desarrollada por Abric (1994) a partir de la noción de “nudo figurativo” de Moscovici, parte de una idea esencial: en toda representación se puede observar un “nudo central” y unos elementos periféricos relacionados directamente con éste, es decir, el valor y las funciones de los elementos periféricos están determinados por el nudo central. No obstante esta dependencia, juegan un rol esencial en el funcionamiento y la dinámica de las representaciones puesto que en la perspectiva de Abric (1994), los elementos periféricos pueden considerarse como una suerte de esquemas. Por su parte el nudo central es importante porque toda representación está organizada en torno suyo y es él quien determina la significación y la organización interna de la representación. En este sentido, siguiendo a Abric (1994) puede decirse que el nudo central es sólo un subconjunto de la representación, pero la ausencia de alguno de sus elementos

[133] Entre los constructos teóricos sobre representaciones sociales que se desarrollaron a partir de las ideas de Moscovici se encuentra la teoría de los *Themata*, la Teoría del Nudo Central y la Teoría de los Esquemas Cognitivos de Base.

desestructuraría la representación y le daría una significación completamente diferente.

El nudo central señala Abric (1994), se caracteriza por dos funciones y una propiedad esenciales. Una es la función *generatriz*, es decir, el nudo central es el elemento por el cual se crea o se transforma la significación de los otros elementos de la representación, en ese sentido el nudo central permite que los elementos de una representación tomen sentido o lo transformen. También tiene una función *organizadora* mediante la que determina las ligas entre los elementos de la representación, es decir, funciona como elemento que unifica y estabiliza la representación. Igualmente tiene una propiedad esencial, la *estabilidad*, es decir, está constituido por los elementos más estables de la representación, los que resisten con más fuerza las posibles transformaciones.

En contraste con esta propiedad, los elementos periféricos son menos estables y más flexibles, también menos resistentes a los cambios. A decir de Abric (1994), la importancia de los elementos periféricos puede comprenderse si se observan tres características de su funcionamiento. Primero, autorizan "las modulaciones individualistas", es decir, permiten que cada sujeto tome ciertas posturas individuales sin afectar al nudo central. En segundo lugar, en tanto esquemas, funcionan como *preescriptores* de los comportamientos que un sujeto despliega respecto de un objeto social y constituyen la parte operatoria de la representación. En tercer lugar, intervienen en los procesos de defensa para la transformación de la representación, ya que

> ...uno de los procesos de defensa y de conservación de la representación frente unas informaciones contradictorias va a consistir en la transformación, no de la representación, pero sí de los elementos periféricos. En una cierta situación, la transformación de los elementos periféricos presenta una doble ventaja: de una parte, permite a la significación central de la representación (al nudo central) mantenerse; y de otra parte autoriza la integración de nuevas informaciones en las representaciones sin que aparezcan trastornos importantes en la organización del campo... (Abric, 1994, p. 76)

Esto significa que una representación no se transforma si los elementos del nudo central no han sido modificados, una manera de defender la estabilidad del nudo central es modificando los elementos periféricos sin transformar al nudo central. Por la existencia de este mecanismo es posible observar representaciones con elementos periféricos diferentes pero que conservan una misma significación global, esto es, representaciones similares con diferentes elementos periféricos. Las diferencias estructurales y funcionales ente los elementos de una representación le dan ciertas características que reflejan contradicciones aparentes, esto es, "...las representaciones sociales son a la vez estables e inestables, rígidas y flexibles (...) y son a la vez consensuales pero marcadas por fuertes diferencias interindividuales..." (Abric, 1994, pp. 77-78).

Las representaciones sociales funcionan como una entidad, cada parte tiene un rol específico pero complementario, es decir, su organización y funcionamiento se rigen por un doble sistema: el *sistema central* y el *sistema periférico.* El sistema central, señala Abric (1994), está constituido por el nudo central y está directamente ligado y determinado por las condiciones históricas, sociológicas e ideológicas, también está marcado por la memoria colectiva y el sistema de normas a las cuales se refiere, es por ello que constituye la base común de las representaciones sociales y su función es consensual, es decir, mediante éste se realiza y define la homogeneidad de un grupo social. Además, es estable, coherente y se resiste a los cambios para asegurar una segunda función, la continuidad y permanencia de la representación. Finalmente, es relativamente independiente del contexto social y material inmediato.

Por su parte, el sistema periférico es el complemento indispensable del sistema central, si este último es esencialmente *normativo*, el sistema periférico es *funcional*, gracias a él, la representación se "ancla" en la realidad y el sujeto puede orientar sus conductas. Su primera función es la concretización del sistema central en términos de toma de posiciones o de conductas y al contrario del sistema central, es más sensible y está mayormente determinado por las características del contexto inmediato, es por ello que constituye la fase intermedia entre la realidad concreta y el sistema central.

Como el sistema periférico está determinado por las condiciones del entorno inmediato es más flexible que el sistema central, lo que le asegura una segunda función, la *regulación* y *adaptación* del sistema central a las características de la situación concreta a la cual el grupo es confrontado, en este sentido es un elemento esencial en los mecanismos de defensa para la transformación de la representación, ya que protege la significación central cuando es contradictoria con las ideas o acciones que circulan en el contexto. Cuando esto último sucede, el sistema periférico absorbe las informaciones o los eventos que pondrían en crisis al nudo central y como señala Flament (en Abric, 1994), funciona como el parachoques de un automóvil que evita los daños en los elementos centrales. Cuando por efectos de este mecanismo de defensa los elementos del sistema periférico se transforman, permiten al menos que durante algún tiempo los elementos del sistema central no sufran modificaciones.

Una tercera función del sistema periférico consiste en aceptar una cierta "modulación individual" de la representación. Con base en su flexibilidad, permite que se integren ciertas variaciones individuales ligadas a la historia propia del sujeto y a sus experiencias personales, de esta manera se acepta la permanencia de representaciones sociales individualizadas que son diferentes en lo periférico, pero que se organizan en torno a un mismo nudo central. En otros términos, las representaciones sociales pueden ser consensuales por su nudo central, pero también admiten diferencias interindividuales en su sistema periférico.

Ahora bien, en opinión de Abric (1994), es posible comprender los procesos de evolución y transformación de las representaciones si se considera la organización interna de la representación y las relaciones entre prácticas sociales y representaciones. Dicha consideración es formulada por Abric (1994) mediante la siguiente cuestión: ¿qué pasa cuando ciertos sujetos son comprometidos a desarrollar prácticas sociales contradictorias con su sistema de representación? Tomando como base la *reversibilidad de la situación* de Flament (en Abric, 1994), Abric señala que en algunos casos los sujetos pueden pensar que dichas prácticas son una situación irreversible y que el regreso a sus antiguas prácticas sería imposible. Otros por el contrario pensarían que esta situación es reversible, que es temporal y excepcional y que por lo tanto es posible regresar a sus antiguas prácticas.

En los casos que la situación se percibe como reversible, las prácticas contradictorias entrañaran modificaciones de la representación, los elementos discordantes se integraran a la representación mediante una transformación del sistema periférico, así, el nudo central y la representación permanecen insensibles a dicha modificación, en este caso la transformación es real pero superficial. Por su parte, cuando la situación es percibida como irreversible, las prácticas contradictorias tienen consecuencias sobre la transformación de la representación, específicamente habrá posibilidades que se presenten tres tipos mayores de transformación:

- *La transformación "resistente"*

En este caso las prácticas contradictorias pueden ser controladas por el sistema periférico mediante mecanismos como: interpretar y justificar *ad hoc* dichas prácticas; racionalizarlas; la referencia a normas externas a la representación, etc. Por estos mecanismos de defensa, en el sistema periférico aparecen "esquemas extraños" que se forman con el recuerdo de aquello que debería ser normal, con la interpretación del elemento extraño, con la justificación de la contradicción y con una racionalización que permita soportar la contradicción. Esos esquemas permiten durante un tiempo evitar la fractura del nudo central y una transformación que rebase los límites del sistema periférico. Sin embargo, la multiplicación de los "esquemas extraños" devendrá una fractura y la transformación del nudo central y de la representación.

- *La transformación progresiva*

Cuando las prácticas no son totalmente contradictorias con el nudo central, se da una transformación sin ruptura, los esquemas activados por las prácticas nuevas se integran progresivamente a los del nudo central para constituir un nuevo nudo y una nueva representación.

- *La transformación brutal*

Cuando las nuevas prácticas ponen en crisis al sistema central y no permiten la aparición de mecanismos de defensa, existe la necesidad de una transformación completa del nudo central y de la representación.

En correspondencia con la idea de que la representación se difunde y se recrea en el lenguaje, el objetivo en este capítulo es analizar las representaciones sociales que los formadores tienen sobre la naturaleza de los saberes o praxeologías didácticas incluidas en los programas de estudio. Siguiendo la idea de Moscovici, se trata de analizar la manera en que dichas praxeologías son representadas en el lenguaje espontáneo de los formadores. Para cumplir con dicho objetivo, como se mencionó en la introducción, hubieron de entrevistarse a seis formadores de docentes (para de conservar su anonimato los llamaremos F1, F2, F3, F4, F5 Y F6), en todos los casos los entrevistados son profesores de escuelas normales del estado de Zacatecas que imparten la asignatura *Matemáticas y su enseñanza*[134].

Las entrevistas "a profundidad" cuyo objetivo era que los formadores "expresaran" sus representaciones sobre las praxeologías docentes, se realizaron utilizando un guión preestructurado que a la vez permitiera modificar las preguntas preestablecidas o incorporar otras durante el curso de la entrevista. Como se puede observar en el anexo 1, las interrogantes planteadas exploran dos de las tres salidas que Robert y Robinet estudiaron:[135] la salida epistemológica relacionada con la naturaleza del saber incluido, la pedagógica con las formas en que se pueden "enseñar" dichas praxeologías y la cognitiva que alude a la manera

[134] De los seis formadores, 4 tienen una formación específica para la enseñanza de las matemáticas, 5 han culminado una maestría y uno más la cursa actualmente (aunque ninguno en Educación Matemática), el formador con mayor experiencia tiene más de 20 años de servicio y los de menor experiencia (2) tienen menos de 5 años de servicio. Aunque existen otros profesores que imparten esta asignatura en las escuelas normales, éstos no fueron entrevistados porque ellos mismos no consideran a esta asignatura como su materia específica de trabajo, es decir, su formación e interés se dirige a otros tópicos sobre educación. No obstante, imparten dicha asignatura por necesidades de carga horaria.

[135] Estas autoras estudiaron las representaciones utilizando lo que ellas llaman, *una clasificación semántica empírica* con diversas "entradas" sin ninguna jerarquía entre ellas. Las entradas que utilizaron para su estudios son la epistemológica, la pedagógica, la psicológica, la psico-afectiva, la cognitiva y la social.

en la que los formados las construyen. En los apartados siguientes se presentan los argumentos derivados de estos análisis.

3.2. LA DIDÁCTICA Y LA NUEVA PROPUESTA DE FORMACIÓN

Como hemos señalado, cuando se trata de analizar un elemento de la representación debe tomarse en cuenta su ubicación dentro de la estructura general y las relaciones que guarda con otros elementos constitutivos de ésta, por esta razón, para dar cuenta de las representaciones que los formadores tienen respecto de la naturaleza de la didáctica incluida en la nueva propuesta de formación, en lo que sigue analizamos la representación de la propuesta de formación general y la del saber didáctico misma.

3.2.1. La distinción de la nueva "realidad". Entre la resistencia y la transformación "brutal"

Si consideramos que toda transformación de las representaciones está precedida por la modificación de uno de los elementos de la relación sujeto-contexto, puede decirse que el cambio de planes y programas para la formación de docentes es una modificación (aunque sólo formal) de la realidad que el sujeto debe representarse, por ello debe generar la transformación de las representaciones del sujeto, ya que con el planteamiento de una nueva realidad para la formación es necesario restituir el equilibrio perdido por la modificación de la realidad, dicha transformación es necesaria por motivos de equilibrio personal, para que el sujeto interprete y comprenda esa nueva realidad y oriente sus prácticas sociales.

En el caso que nos ocupa es importante revisar si esa modificación ha sido percibida por el sujeto, si esto fuera así, generaría la necesidad de que el formador transformara los elementos periféricos de sus representaciones. Respecto de la naturaleza de la antigua y nueva realidad para la formación, los materiales curriculares señalan que:

> El plan 1984 (...) tuvo el sano propósito de dotar a los estudiantes de elementos que les permitieran incorporar la práctica y los resultados de la investigación a la actividad docente. Sin embargo (...) no se resolvió adecuadamente la forma de aprendizaje de la teoría y su relación con el ejercicio de la profesión (...) al proponer un número excesivo de

> objetivos formativos (...) se debilitó el cumplimiento de la función central y distintiva de las escuelas normales: formar para la enseñanza y el trabajo en la escuela. (SEP., 1997a, p. 17)

Como se puede ver, la diferencia estriba en que en el Plan 97 se pretende dar un mayor énfasis a la formación para la enseñanza, por lo que puede decirse que las modificaciones a la realidad no entrañan la necesidad de una *transformación brutal,* ya que los postulados básicos de la nueva propuesta establecen una ruptura con el nudo central. En otras palabras, si la nueva propuesta plantea una modificación secundaria, se trata de generar una *transformación progresiva,* ya que las nuevas prácticas no son totalmente contradictorias con los elementos centrales de la antigua propuesta. En este contexto la inclusión de la didáctica de las matemáticas en el nuevo Plan no es una modificación estructural, sino un elemento que pone el énfasis sobre la enseñanza. Por otra parte, debe considerarse que la nueva propuesta de formación es una situación irreversible ya que su modificación difícilmente implicaría un regreso a las prácticas anteriores. No obstante, para tener posibilidades de una transformación progresiva, el sujeto deber reconocer las modificaciones propuestas y la relación contradictoria que ésta guarda con la antigua propuesta.

Respecto de tal reconocimiento, aunque la diferencia es percibida por los formadores, existen ciertos matices en la manera como la enuncian. Un ejemplo de ello es que algunos formadores expresan tal distinción oponiendo la investigación a la práctica docente:

- ...con el anterior se trataba de formar un espíritu de investigación pero dejaba de lado aspectos sobre la didáctica, el actual tiene un mayor acercamiento a la práctica docente.....(F1)
- ... en el plan 84 se hacía mucho énfasis en la investigación pero no tenía uso en la práctica... (F3)
- ... ahora se centra más en la parte pedagógica, en la parte docente... (F5)

Otros expresan la distinción con base en los contenidos que se incluyen en la nueva propuesta, si para los primeros la didáctica permite diferenciar la investigación y la docencia, para éstos, la inclusión de la didáctica es la diferencia principal, en este caso se dice que:

- ...la diferencia es que el plan actual establece una relación estrecha entre el conocimiento básico de la escuela primaria y la didáctica de la disciplina, mientras que el plan 84 se centraba en el conocimiento disciplinario y no tocaba de manera específica los aspectos que tienen que ver con didáctica de las matemáticas...(F2)

Otra forma en la que se percibe tal distinción tiene que ver con la manera en que dichos saberes deben transmitirse, en estos casos la investigación como forma de adquisición de conocimientos es percibida como lo opuesto al "constructivismo" del nuevo Plan, sobre el respecto señalan:

- ...el plan 84 pretendía que los alumnos se volvieran investigadores, la diferencia está en la metodología constructivista del actual Plan, que pretende que los muchachos salgan más empapados de la cuestión académica, pedagógica ... (F6)

Oponer la teoría a la práctica, la investigación a la enseñanza y el estudio de la disciplina al estudio de la didáctica, como lo hacen los formadores, es una prueba de que perciben la naturaleza de la nueva propuesta, salvo la percepción del constructivismo como diferencia entre las dos "realidades", los formadores perciben de manera relativamente clara la naturaleza de la nueva propuesta que ha sido "anclada" de manera pertinente en las representaciones preexistentes de los formadores.

Ahora bien, el reconocimiento de tal distinción implica aceptar que la nueva propuesta no representa una ruptura con el sistema central de sus representaciones, por esta razón la distinción opera como un elemento que pondera positivamente al nuevo Plan, este hecho es evidente si se señala que casi en su totalidad los formadores expresan la aceptación de la nueva propuesta. Sin embargo, el grado de aceptación y las razones mediante las que la justifican son diferentes, por ejemplo entre los formadores que aceptan sin restricciones la nueva propuestas pueden apreciarse tres tipos de justificaciones:

<u>Las referidas a aspectos administrativos</u>

- ... porque sobre todo nos han dotado más de materiales y ya los programas vienen completos... (F6).

<u>Las que aluden al nivel de las matemáticas</u>

- ... hace que se pueda tener mayor conocimiento sobre lo que se va a hacer en la escuela primaria.... (F1),
- ... porque los jóvenes se van apropiando de los contenidos de educación primaria y esto permite que cuando van a las prácticas hagan algo similar... (F5)

Las referidas a la didáctica

- ... es que el trabajo con las matemáticas tiene que tener un gran componente didáctico...(F2),
- ... el curso específico ahora si es matemáticas (...), entonces de manera simultánea uno ve el contenido y el enfoque de enseñanza...” (F3)

Como puede observarse, la mayoría de los formadores aceptan la nueva propuesta porque se incluye el estudio de contenidos matemáticos de la educación primaria o porque distinguen la presencia de un saber (didáctico) que no estaba presente en la propuesta anterior. Sin embargo, estas razones coherentes con lo que se enuncia en el Plan 97 coexisten con otro tipo de aceptación, es decir, junto con la aceptación entusiasta puede verse la aceptación resignada, en este caso el formador acepta lo nuevo porque no pudo haber otra cosa mejor, es decir, se acepta porque

- ...la modificación me pareció correcta pero no suficiente, tanto en el anterior como en este Plan, la fundamentación teórica es muy pobre en términos de aprendizaje significativo y en este plan de estudios todavía viene más pobre en términos de elementos teóricos... (F4).

En este último caso, el formador presenta ciertos “esquemas extraños” en su sistema periférico que al parecer funcionan como mecanismos de defensa para no transformar la representación. Lo “extraño” de su esquema se hace evidente si se recuerda que tanto los materiales de la reforma como la mayoría de los formadores entrevistados coinciden en señalar al énfasis en lo teórico como rasgo negativo del antiguo Plan, aunque es de destacar que F4 no habla de una perspectiva teórica en general sino del “aprendizaje significativo”[136] que en su opinión, ha estado ausente inexplicablemente en las diferentes propuestas de formación. Esta justificación nos muestra que la representación sobre lo que debería ser “normal” en la formación (la teoría del aprendizaje significativo), ha permanecido como mecanismo eficaz que permite la estabilidad de su representación.

Sin embargo, la aceptación relativa de la propuesta no alude únicamente a la ausencia del “aprendizaje significativo”, tampoco a un sólo formador. El

[136] F4 hace referencia específicamente a la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel

acercamiento a la escuela primaria y a la práctica de enseñanza, que en el Plan 97 tienen su máxima expresión en el trabajo de tutoría,[137] se constituyen como factor de aceptación pero también como el elemento menos aceptado por los formadores. No obstante, en el caso de las tutorías la resistencia no opera contra la propuesta formal del nuevo Plan, sino contra las condiciones en que ésta se ha desarrollado, es decir, cuando se cuestiona a los formadores si hay algo que un formado pudiera aprender de un tutor, la respuesta es un sí acompañado de una lista de elementos que el tutor podría enseñar. Una respuesta que ilustra la importancia que los formadores dan a la tutoría es la siguiente:

- ... el estudiante en formación tendrá mucho que aprender de un buen maestro, la cuestión didáctica, la forma como el maestro se conduce, el trato, las estrategias que implementa para cuestionar al alumno, en qué momento plantear una cuestión problemática productiva, cómo afrontar alguna situación imprevista que se de con los niños, qué tipo de actividades se pueden dejar como tareas, otra cuestión de valores que puede aprender es la puntualidad, la responsabilidad, la forma de cómo el maestro les hable por su nombre, incluso el saludo, la presencia, y uno muy importante que es la preparación que el maestro puede denotar ante grupo, la seguridad con la cual expresa las ideas, la organización de los materiales, si lleva al corriente, si registra los avances de sus alumnos, si utiliza algún instrumento de registro, ya sea algún diario de campo del grupo.... (F3)

No obstante, cuando responden acerca de sus experiencias sobre la tutoría aparecen los primeros desacuerdos, esto es, percepciones sobre lo contradictorio de las prácticas (nuevas) sugeridas. Sin embargo, tampoco estos desequilibrios o resistencias se dan de manera homogénea, los formadores han construido tres clases de representaciones sobre el trabajo de tutoría y sus aportes a la formación. La primera se distingue por la aceptación de la tutoría como eje de la práctica, en estos casos la experiencia del tutor es un criterio suficiente para ponderar sus bondades,

- ... la tutoría es una buena ventaja ya que aunque el tutor no esté muy preparado, tiene lo que al muchacho le falta y mucho, que es la experiencia,...(F6).

[137] El tutor, señalan los materiales del nuevo Plan, es un profesor de escuela primaria que durante los semestres VII y VIII, deberá acordar con el estudiante, en cada período de trabajo docente (en la escuela primaria), los contenidos de enseñanza o el tipo de actividades que se desarrollarán (...) hará las recomendaciones oportunas al estudiante sobre los aspectos de su desempeño en que se presenten dificultades o limitaciones... (Cf. SEP, 1998, PP 54-56)

Para los formadores que perciben la tutoría de esta manera, la dicotomía entre teoría y práctica encuentra su correspondencia entre formador y tutor, en opinión de estos formadores,

- ... aquí en la escuela pudiéramos retomar lo que son los elementos teóricos y allá, las personas que han tenido más contacto con esa forma de trabajo les pueden dar mejores alternativas para desempeñar su trabajo.... (F1).

Siguiendo el sentido de la respuesta anterior, puede decirse que la teoría y la práctica son cosas distintas y pertenecen a lugares diferentes, por esta razón la experiencia siempre tiene algo que "sumar" a la teoría, aunque paradójicamente también se piensa que quien posea la experiencia puede ser alguien que no está bien preparado. Sin embargo, lo más importante es que los formadores que perciben la tutoría de esta manera reconocen que las prácticas sugeridas en el nuevo Plan no ponen en crisis su representación global, porque en su opinión, la teoría de la escuela normal puede complementarse con la experiencia del tutor, lo que significa que reconocen la posibilidad de una transformación progresiva en su representación.

Un segundo tipo de representaciones sobre la tutoría se caracteriza por la aceptación entusiasta, en ésta los formadores perciben las bondades y la coherencia en los planteamientos formales del Plan, aunque también las condiciones de posibilidad para que dichas acciones otorguen ventajas. En su opinión la experiencia de los tutores no puede aislarse de las condiciones o la historia personal del tutor, sobre esta doble cara de la tutoría se dice que,

- ... es valiosísima para los futuros docentes porque ahí está la orientación, el apoyo, la guía de tantos años de experiencia, no vamos a criticar si manejan enfoques o no, pero yo apuesto a la buena voluntad de varios de los tutores, no de todos, vamos a dejar de lado a quienes tomaron la tutoría como un periodo de vacaciones ... (F5)

En la visión de este formador la voluntad es el detonante de una buena tutoría, frente a ella el manejo de los enfoques no es determinante, la complejidad se reduce entonces a los "buenos" y "malos" tutores, es decir,

- ...hay maestros que tienen disponibilidad de involucrarse en el seguimiento con los jóvenes y hay quienes la aceptan nada más por la comodidad de tener un alumno que pueda auxiliar en el trabajo...(F3).

La aceptación basada en la buena voluntad parece ser un síntoma de la *transformación resistente,* ya que rechazar o aceptar las prácticas de formación a través del tutor es una decisión que tiene que ver con la opinión del formador, por esta razón estas expresiones funcionan como una justificación *ad hoc* que permite resistirse a la transformación de la representación aunque los elementos periféricos se hayan modificado. Sin embargo, las justificaciones que aluden a las características del tutor no son las únicas en esta segunda categoría, otros formadores justifican su resistencia señalando las características del estudiante, en estos casos el formador afirma que la tutoría representa ventajas que dependen de la actitud el estudiante, en su opinión,

- ... lo que sucede es que hay un fuerte de choque de concepciones, porque en su gran mayoría los maestros tienen la visión con la que fueron formados, entonces cuando los jóvenes llegan con un planteamiento diferente al de ellos, hay un primer choque, esa es una dificultad que hay en el trabajo de tutoría, lleva un riesgo inherente, que se aprendan prácticas incongruentes con los enfoques, pero habría que asumirlo como tal y hay que apoyar a los jóvenes estudiantes para que ellos reconozcan ese riesgo, que reconozcan las diferencias y asuman un discurso más congruente con el plan de estudios...(F2)

La aceptación tácita y la transformación resistente tienen un rasgo en común, ambas representaciones aceptan que el Plan tiene posibilidades de funcionar aún sin transformar a los posibles tutores. Desde la aceptación tácita se acepta la tutoría porque se piensa en la experiencia como complemento de la teoría. Desde la transformación resistente se acepta bajo dos condiciones: que los tutores tengan “buena voluntad” o esquemas congruentes con los de los formados o; que el alumno seleccione los elementos de la experiencia favorables para su práctica. Sobre este mismo elemento hay una tercera representación desde la que se asume que la única posibilidad de establecer una formación práctica adecuada tiene que ver con formar a los tutores desde la escuela normal, este tipo de representaciones se expresa de la siguiente manera:

- ... me parece muy acertada siempre y cuando la escuela normal diseñe varios espacios para actualizar a los profesores de la escuela primaria ya que seleccionar como tutor a un maestro que es destacado en su trabajo académico, no es criterio suficiente que satisfaga las necesidades de formación del estudiante, del plan de estudios y de nosotros como maestros de la escuela normal, que el tutor se desempeñe de manera excelente no garantiza que esté actualizado en los enfoques de enseñanza... (F4)

Si bien en la transformación resistente se deja abierta la posibilidad para aceptar la tutoría, la única posibilidad de aceptarla tiene que ver con una condición necesaria, modificar las representaciones de los tutores. Esta condición es evidencia de que la inclusión de la tutoría es un elemento que pone en crisis la representación de este formador, significa también que ha racionalizado la contradicción, por esta razón la condición –ineludible- funciona como un mecanismo de defensa contra la transformación del nudo central, es decir, este formador podría negarse a transformar sus prácticas argumentando el incumplimiento de la condición estipulada. Como puede advertirse, en el lenguaje de esta representación la "excelencia" de un tutor debe garantizarse mediante el dominio del lenguaje que circula en la escuela normal, lo que resulta paradójico si se advierte que el enfoque "de la resolución de problemas" aparece en los programas de actualización de profesores de educación antes que en las escuelas normales.

No obstante, cuando las nuevas prácticas ponen en crisis al nudo central estas justificaciones sólo pueden soportar un tiempo el embate de las contradicciones, por esta razón puede suponerse que en el caso de F4 la única posibilidad de cambiar sus representaciones está dada por la *transformación brutal.*

Las representaciones analizadas hasta aquí nos muestran que los formadores entrevistados perciben la diferencia principal entre los planes de formación, también que este reconocimiento no se convierte en criterio de aceptación automática. Si bien aceptan de manera general la propuesta, esta aceptación se vuelve relativa cuando se aluden a elementos específicos como la tutoría. En términos de las representaciones, significa que es más fácil construir una justificación para la significación global que para un elemento periférico y es más difícil todavía evitar las contradicciones entre las significaciones dadas a varios elementos periféricos y la estructura general. Por esta razón, creemos necesario relacionar la significación global sobre el nuevo Plan con la que dan a algunos elementos específicos de la nueva propuesta, la idea es analizar la manera en la que los formadores estructuran y organizan esa realidad compleja, representada por una nueva propuesta de formación. Tomando en cuenta esta necesidad, hemos planteado los siguientes apartados.

3.2.2. La objetivación del saber didáctico

La importancia de las distinciones entre ambas propuestas de formación tiene que ver con el reconocimiento que los formadores hacen acerca de la modificación de los elementos periféricos para garantizar la coherencia con su estructura general. Una manera de analizar cómo se mantiene o se fractura esa coherencia, consiste en explorar las percepciones de los formadores sobre otros elementos del nuevo Plan y la forma en que dichas percepciones se relacionan entre sí. Por ejemplo, los formadores distinguen la diferencia entre ambos planes, pero cuando se expresan sobre elementos específicos -como la tutoría-, la coherencia no está plenamente garantizada. Otro elemento que nos permite analizar la manera en la que el formador construye sus representaciones es la formación para la enseñanza de las matemáticas que propone cada Plan. Sobre esta cuestión los materiales del nuevo plan señalan que:

> Hasta hace poco tiempo los problemas relacionados con la enseñanza de las matemáticas se estudiaban separando el contenido (...) del método de enseñanza (...). Se consideraba además que el conocimiento que debía tener el maestro acerca de la disciplina y sobre la aplicación de métodos generales de enseñanza sustentados en determinada teoría del aprendizaje le permitirían un buen dominio del conocimiento matemático y sobre las formas de enseñarlo. Los avances en el conocimiento sobre los procesos de aprendizaje (...) nos indican que la forma en que nos apropiamos de un saber determinado depende en gran medida de la naturaleza misma de ese saber y que, por lo tanto, el estudio de los problemas relacionados con su aprendizaje y con su enseñanza debe considerar las características específicas... (SEP.; 1999a, 9)

Suponiendo que la separación de los contenidos matemáticos y los procesos de enseñanza y aprendizaje fuese la diferencia principal entre ambos planes, en el plan 84 se estudiaban las teorías del aprendizaje, los contenidos matemáticos y los enfoques para su enseñanza por separado, en el Plan 97 la didáctica de las matemáticas es un espacio que articula contenidos matemáticos, procesos de aprendizaje y formas de enseñanza. Los formadores objetivan esta diferencia de cuatro formas distintas:

- Con base en criterios generales.
- Basándose en el nivel de los contenidos matemáticos.
- Sobre la base de la resolución de problemas como elemento distintivo, y
- Basándose en la distinción de un nuevo saber (el de la didáctica).

Para los formadores ubicados en la primera categoría, la dicotomía entre teoría y práctica es una objetivación de la diferencia global y de la formación para la enseñanza de las matemáticas, esta objetivación se expresa de la siguiente manera:

- ... la diferencia radica en que este otro (Plan 84) es un poquito más teórico y el plan 97 tiene mayor acercamiento con la práctica... (F1).

Por su parte, los formadores ubicados en la segunda categoría objetivan la presencia de la didáctica mediante la percepción de los contenidos matemáticos propios de la escuela primaria, para éstos,

- ... el plan de estudios 84 no traía contenidos matemáticos de la escuela primaria que nuestros estudiantes necesitan. Con los años los agregamos y aunque estos contenidos de matemáticas deberían verse en una asignatura llamada *Contenidos de la Escuela Primaria*, considerábamos que era necesario que un profesor con el conocimiento y la experiencia del área de matemáticas y de la escuela primaria abundara al respecto.... (F4)

Una percepción diferente se encuentra en la tercera categoría, en ésta suponen que la diferencia estriba en la incorporación de una forma distinta de “hacer matemáticas”, este “descubrimiento” es relevante si se piensa que esta idea ya circulaba en las escuelas normales, aunque no se explicitaba en los programas de estudio estaba presente en los programas de la asignatura “Contenidos de Aprendizaje”. Las distinciones basadas en este criterio señalan que:

- ... en el anterior el objetivo era llegar a las mecanizaciones y en el plan actual se propone trabajar más sobre procesos de construcción... (F2),
- ... en el Plan actual se propone una forma más amena, más dinámica y más razonada (...) que le permite a los jóvenes resolver problemas cotidianos... (F3).

Como se puede ver, estos formadores consideran que la “construcción” de los contenidos matemáticos es lo que distingue al nuevo Plan, sin ser inadecuada, esta percepción deja fuera la articulación entre una forma diferente de construir el conocimiento matemático y el saber didáctico. Objetivar de estas formas la presencia de la didáctica en el nuevo Plan, significa que a través de su sistema periférico los formadores ha convertido en algo “concreto” lo que para ellos era abstracto, esta objetivación orienta las prácticas que desarrollarán en el contexto del nuevo Plan, hacer más práctica la formación, trabajar más los procesos de construcción o desarrollar clases amenas o dinámicas, son percepciones que se instalan en su sistema periférico para prescribir las prácticas o para permitir que dicho sistema cumpla su función operativa.

Finalmente, en la cuarta categoría se ubican los formadores cuyas ideas y valores preexistentes les permiten distinguir la presencia de la didáctica en los programas de la asignatura. No obstante, tal percepción es expresada mediante lenguajes distintos, en un caso no se reconoce explícitamente, se le ubica simplemente como una preparación para la enseñanza, como una metodología,

- ... su nombre lo dice, Matemáticas y su Enseñanza, porque pretende que los muchachos salgan preparados con la metodología apropiada para enseñar las matemáticas... (F6).

Por su parte el formador que lo distingue de manera explícita señala que,

- ... en el Plan 97 además de los saberes que contempla la disciplina, también se ve por el lado de la didáctica, por el lado de la enseñanza....(F5)

Como se ha podido observar, la diferencia respecto de la formación para la enseñanza de las matemáticas no se percibe claramente, sólo dos formadores han advertido la presencia del saber didáctico. La inclusión de los contenidos matemáticos de la escuela primaria, una nueva forma de “hacer matemáticas” o un mayor énfasis en la práctica docente, son interpretaciones que no garantizan la coherencia entre las representaciones de los formadores y el nuevo Plan, esto significa que la objetivación que se hace, sólo defiende una posible crisis del sistema central.

No obstante, las modificaciones en sus representaciones son el producto de la historia personal del sujeto y de los procesos de formación que ha seguido, es decir, comprender porqué el saber didáctico no es percibido de manera clara, es una acción que precisa analizar la eficacia de los procesos mediante los cuales los formadores se han aproximado a este saber. Sobre este punto, lo primero que llama la atención es que la articulación entre contenidos matemáticos y saberes para la enseñanza y el aprendizaje es un elemento nuevo para ellos, sobre el respecto señalan,

- ... lo conocí cuando se nos hace saber el Plan de Educación Primaria 97....” (F3) (F1).

Estos casos corresponden con la no percepción de la didáctica en el nuevo Plan y como puede inferirse, en las representaciones de estos formadores no existían ideas, valores o creencias que permitieran un “anclaje” coherente con las ideas nuevas (la presencia de la didáctica), por esta razón lo único que puede hacer el sistema periférico es anclarlas de forma poco coherente, puesto que cuando los formadores no tienen ideas anteriores sobre este objeto social, sólo puede “anclarse” sobre creencias acerca de la teoría y la práctica, de las matemáticas de la escuela primaria o de las clases dinámicas y amenas. Sin embargo, también hay otras formas en las que los formadores se aproximaron a este objeto social (la didáctica), algunos declaran haber tenido un conocimiento parcial a través del contacto con algún texto que no formaba parte de la literatura para su trabajo, en estos casos señalan:

- ... Había oído hablar un poco, conocía un capítulo del libro de Ausubel sobre “aprendizaje y resolución de problemas” y lo que me quedaba claro es que si una persona no sabe conceptos no puede resolver problemas....(F4)
- .... tuve contacto con un texto de un autor español relacionado con ese nuevo enfoque, entonces empecé a tener un poco de contacto antes de asistir a los cursos de este nuevo plan...(F6)

Un formador afirma que su conocimiento parcial deviene del trabajo que se realizaba en el antiguo Plan, en este caso la percepción tiene un fundamento correcto puesto que el enfoque “basado en la resolución de problemas” se incluía en la asignatura *Contenidos de Aprendizaje,* sin embargo, para este formador existe un componente novedoso en el nuevo Plan, para él este enfoque

- ... sí estaba, pero como que no se daba tan claro como ahora, se daba desde el planteamiento de una situación problemática y la resolución pero se hacía énfasis en los procedimientos formales ...(F5).

Para este formador, el énfasis sobre los procedimientos informales es el conocimiento nuevo. Por último, hay formadores que dicen haber tenido un conocimiento completo de lo que esta nueva perspectiva significaba, en este caso manifiesta:

- ... sí, teníamos algunos referentes de lectura sobre todo de didáctica de las matemáticas, toda la corriente francesa...(F2).

Lo destacable en esta cuestión es que aun cuando cuatro formadores dicen haber tenido conocimiento -aunque parcial- de la didáctica, sólo F5 percibe su presencia dice haberla estudiado en sus cursos de maestría, es decir, de manera institucional. El resto (F2, F4 y F6), a pesar de que también cuentan con estudios de maestría, manifiestan que su conocimiento es producto de un esfuerzo personal, los textos donde se incluyen estos saberes eran parte de la elaboración de una tesis de grado. Lo que esto significa es que en opinión de los formadores, no son los programas de formación los que han permitido construir ideas respecto de la didáctica, éstas son producto de esfuerzos personales.

Siguiendo esta idea puede decirse que la capacitación dada a los formadores es un esfuerzo institucional que intenta modificar sus representaciones sobre el saber didáctico y sobre las maneras de "transponerlo", de manera que la significación que dan a esta capacitación es importante para comprender las dificultades manifiestas en la distinción del saber didáctico. Sobre ese respecto, dos formadores no asistieron a los cursos capacitación[138] y entre los cuatro restantes pueden observarse dos tipos de percepciones: las que consideran buena la capacitación y las que consideran positivo el propósito de la capacitación pero no el desarrollo de ésta. Sobre el aspecto positivo de la capacitación señalan:

- ...me pareció muy adecuada, tuvo elementos valiosos... (F5), (F6)
- ... siento que había buenos propósitos... (F3),

Sobre los aspectos negativos declaran:

- ... faltó más tiempo... (F5)

[138] Debido a su reciente ingreso como profesores de las escuelas normales, dos de los formadores entrevistados no tuvieron capacitación alguna para trabajar este programa de estudios, estos formadores son también los que menor antigüedad tienen en el servicio educativo.

- ... el tiempo tan escaso sólo alcanzó para que uno vaya y se empape un poco de teoría… (F6)
- ... el tiempo y el número de participantes no permitía que se resolvieran todas las dudas, además, hubo quienes estaban dispuestos a cambiar de su actitud, pero hubo otros que, a lo mejor por los años, tal vez no ... (F3).

En términos de las representaciones, estas respuestas indican que las ideas desarrolladas en el curso de capacitación no pusieron en crisis al sistema central, al parecer, fueron congruentes con las ideas preexistentes, por esta razón señalan que el curso “fue adecuado, valioso y con buenos propósitos”. Sin embargo, mediante la percepción de inconvenientes como el tiempo o la actitud de algunos participantes justifican la imposibilidad de una transformación abrupta de la representación, es decir, en opinión de estos formadores, si se consideran cambios en el tiempo y las actitudes sería posible una *transformación progresiva* porque los objetivos y contenidos del curso están en sintonía con su sistema central. Un caso diferente es F4 quien al igual que en los aspectos anteriores, considera que el curso de capacitación no fue coherente con los elementos de sus sistema central, en su opinión,

> ... la actualización fue pésima en todos los sentidos, lo que nos ponían a hacer era resolver problemas de libros de la escuela primaria, yo me sentía mal y me indignaba que la Secretaría estuviera gastando tanto dinero para estarme dando unos cursos de contenidos tan tontos, porque si es una capacitación para profesores de educación superior, cómo me llaman para que resuelva problemas del libro de texto, que son problemas para niños de nivel primaria... (F4)

Esta última respuesta[139] no es representativa de la percepción de todos los formadores, sin embargo en ella se puede apreciar de manera más clara la resistencia a modificar la significación global de la representación. F4 percibe las contradicciones entre la actualización y su representación, las racionaliza y construye una justificación –la capacitación no es apropiada para profesores del nivel superior- que le permite hacer frente a tal contradicción. De esta manera establece un mecanismo de defensa que permite a su sistema central permanecer sin modificaciones, al menos por un tiempo.

---

[139] En correspondencia con la idea de la estabilidad de las representaciones esta respuesta corresponde al formador con mayor antigüedad en el servicio educativo en general y con el mayor número de años como formador de profesores.

Finalmente, puede decirse que las dificultades para distinguir la naturaleza de la formación para la enseñanza de las matemáticas y para modificar la significación global de sus representaciones, son producto de ideas o creencias preexistentes que poco o nada tienen que ver con los esfuerzos institucionales por modificarlas, pero tienen su mayor fundamento en la historia personal del sujeto.

3.2.3. La naturaleza del "saber a enseñar"

En capítulos precedentes hemos mencionado los saberes o las praxeologías que en opinión de algunos autores darían contenido a la relación entre didáctica y formación. En dichas posturas resulta clara la distinción entre el saber didáctico, el pedagógico y entre la didáctica como "arte para enseñar" y como campo de investigación. Para conocer la visión de los formadores respecto de los tipos de tareas que caracterizarían una formación en didáctica, les preguntamos *¿Cuáles son los saberes que requiere un profesor para enseñar matemáticas?* Para el análisis de las respuestas obtenidas nos apoyaremos sobre las distinciones entre los tipos de tareas que caracterizan a las praxeologías docentes.

Un elemento común en todas las respuestas es la referencia a las tareas relativas a la reconstrucción de las organizaciones matemáticas. Para los formadores, este tipo de tareas es una necesidad ineludible en la formación, no obstante, la extensión y profundidad que dichas organizaciones deben tener no son percibidas de manera homogénea, las distinciones que realizan nos permiten clasificar sus respuestas en tres categorías. Por un lado están aquellos para los que el conocimiento de los contenidos matemáticos de la escuela primaria es suficiente para una formación inicial, en opinión de éstos,

- ... los conocimientos necesarios son básicamente el significado de los diferentes conceptos matemáticos que se están abordando… (F1)
- ... es necesario que tengan un nivel de conceptualización de todo lo que van a manejar en primaria para enseñar matemáticas... (F6).
- ... para ser profesor el estudiante debe conocer los contenidos que se les marcan en el plan y programa... (F3).

En otro tipo de percepción, aunque se enfatiza la importancia de los contenidos de la escuela primaria, se piensa que no basta el conocimiento aislado de estos contenidos, por esta razón señalan la necesidad de estudiar también las relaciones entre las diferentes organizaciones matemáticas de este nivel escolar, ya que

- ... el maestro necesita conocer a profundidad la lógica de construcción de los conocimientos que van a ser su materia de objeto de estudio, cómo se van articulando entre sí cada uno de los diferentes conocimientos, la medición con fracciones, las fracciones con números decimales, etc....” (F2).

Finalmente, en otra categoría podemos encontrar a los que piensan que es insuficiente el dominio de los contenidos de la escuela primaria, para éstos es necesario dominar “algo más” de contenidos, para unos la insuficiencia tiene que ver con los niveles escolares, de ahí que se diga,

- ... el profesor debe tener el dominio de contenidos básicos, los que se dan en la primaria y en la secundaria... (F5)

Otros perciben tal insuficiencia en términos de profundización, para ellos,

- ... para ser un profesor de matemáticas el estudiante está obligado a dominar los conceptos matemáticos que va a enseñar en la escuela primaria, algo más de aritmética y de sistemas de numeración...(F4).

Sin embargo, es necesario aclarar que para todos los formadores entrevistados, la reconstrucción de las organizaciones matemáticas es sólo uno de los tipos de tareas que debe cumplir un profesor en formación, en su opinión hay otros que constituirían el componente didáctico. Sobre este saber se presentan distintas percepciones, por ejemplo hay formadores (2) que perciben la necesidad de incluir un saber didáctico, aunque como se puede ver en los siguientes fragmentos, el término es utilizado con diferente sentido.

- ... también debe tener el conocimiento didáctico, en sí, cómo se van a enseñar esos conceptos... (F1)
- ... es necesario que conozcan cómo se van articulando los contenidos matemáticos y qué dificultades conlleva su tratamiento didáctico... (F2)

En el primer caso lo didáctico es reducido a un mero conocimiento proposicional tal como lo define Kuzniak (1994) o a las tareas ligadas con el conocimiento de los dispositivos de estudio tal como las definiría Chevallard (1998), es decir, se piensa en este saber como un conjunto de formas específicas (ingenierías) para enseñar un determinado concepto. En esta visión lo didáctico se percibe como disciplina prescriptiva o aplicativa, su función sería solamente proporcionar las “formas” para enseñar un concepto que el profesor en formación podría aplicar. En el segundo caso lo didáctico se percibe como una acción que requiere una perspectiva de indagación y de análisis, en esta percepción el sentido de lo didáctico está ligado con la idea de campo de investigación. Si ponemos en relación ambos sentidos se tendría que, para el primer formador el estudiante requiere conocer los conceptos matemáticos y una serie de propuestas para enseñarlos, para el segundo, el estudiante requiere conocimientos sobre los conceptos matemáticos y sobre aquellos que derivan de la experiencia.

Estos dos sentidos de lo didáctico orientan también las percepciones de los demás formadores, aunque a diferencia de las respuestas anteriores lo didáctico no es enunciado de manera explícita, sino por referencia a ciertos materiales o a términos propios del lenguaje escolar. Una percepción con un sentido restringido está centrada en la descripción de la forma en la que el profesor debe actuar para suscitar los aprendizajes de los alumnos, en este caso se dice que

- ... el profesor debe saber ser un buen planteador de problemas para lograr que sus alumnos lleguen al conocimiento a través de la resolución de problemas... (F6).

Por su parte los formadores cuyas percepciones están basadas en un sentido más amplio de lo didáctico advierten la necesidad de que el profesor en formación pueda cumplir con tareas ligadas a los dispositivos y la gestión del proceso de estudio (aunque no los explicitan, hacen referencia a materiales en los que se objetivan unas y otras). Sobre las tareas ligadas a los dispositivos de estudio, los formadores señalan la necesidad de que el profesor en formación,

- ... conozca estrategias de enseñanza (F4) (F5), los ficheros[140] y libros como *Juega y aprende matemáticas..."* (F5) (F3)

Algo similar ocurre con las tareas relativas a la gestión del proceso de estudio relacionadas al procedimiento general para enseñar matemáticas, en este

[140] Los ficheros son materiales que se distribuyen a todos los profesores y en ellos se incluye una variedad de situaciones didácticas para aplicar en el aula, esa es la misma naturaleza del libro *Juega y aprende matemáticas*. Por su parte las estrategias de enseñanza, en la jerga escolar no son otra cosa que las situaciones didácticas –o ingenierías- que Chevallard (1998) llama “dispositivos de estudio”.

caso los formadores reconocen su naturaleza orientándose por los materiales en los que se objetivan, sobre el respecto señalan:

- ... es muy importante también que conozcan el libro para el maestro…[141] (F3)
- …requieren dominar en un primer momento, de manera teórica, el enfoque de enseñanza... (F4).

Las tareas para la dirección del estudio de una cuestión matemática puntual también son percibidas aunque no de forma mayoritaria, sobre el respecto señalan la necesidad de:

- ... que él (el profesor en formación) vea que el trabajo de las matemáticas se da a partir de los conocimientos de los alumnos (F5) y conforme vaya a las escuelas primarias (...)
- …. que adquiera experiencias para enseñar mejor las matemáticas ... (F4).

Como hemos podido ver, la mayoría de los formadores (4 de 6) supone que la didáctica es algo más que el arte de enseñar, al parecer esto es un indicio de que al modificarse el medio (la propuesta para transponer las praxeologías docentes) las representaciones de los formadores han comenzado a transformarse también, ya que se advierte una coherencia entre los componentes de la didáctica y las necesidades percibidas por los formadores. No obstante, en términos generales los formadores no perciben a la didáctica como un campo de estudio sobre los fenómenos de la transmisión del conocimiento matemático o como la teorización de dichos fenómenos. Fundamentalmente la ven como una disciplina prescriptiva cuya función se limita a ofrecer conocimientos sobre la manera de enseñar (proceso de estudio) y sobre las estrategias para la enseñanza (dispositivos de estudio). Las visiones reducidas y las que hacen referencia al saber práctico son apenas una minoría. Finalmente, una percepción que sintetiza el tipo de saberes que los formadores consideran necesario para sus estudiantes es la respuesta de F4 para quien además de dominar los contenidos matemáticos, el formado debe:

- ... dominar técnicas, métodos e incluso hasta teoría... (F4)

[141] El llamado enfoque para la enseñanza de las matemáticas no representa sino el saber procedimental y éste se encuentra explicitado en los libros para el maestro, particularmente en el apartado de “sugerencias didácticas”.

3.3. INTERPRETACIONES E INTERACCIONES CON EL TEXTO DEL SABER

Como hemos mencionado, uno de los elementos de la representación es el sistema periférico mediante el cual el sujeto atribuye significados a las informaciones, expectativas y anticipaciones y "filtra" las informaciones que recibe para darles un significado coherente con la significación global de la representación. También el sujeto "concretiza" la complejidad de la realidad construyendo una serie de categorías ordenadas y jerarquizadas que se acomodan coherentemente con su representación. Por otra parte hemos señalado con Chevallard (1991, pp. 41-42) que el *texto del saber* es la herramienta esencial para el enseñante, es lo que lo hace existir, gracias a él y sólo través de él modifica los efectos de la enseñanza o enfrenta lo que permanece siendo patológico a pesar de la enseñanza dada.

De las ideas anteriores se desprende el objetivo de los siguientes apartados, en éstos pretendemos conocer los significados que los formadores asignan al *texto del saber* y las formas mediante las que relacionan con él.

3.3.1. Interpretaciones sobre los saberes "textualizados"

Una vez que hemos visto que los formadores reconocen la diferencia entre ambas propuestas de formación y la necesidad de plantear varios tipos de tareas, es necesario preguntarnos si en su opinión, dichas tareas se incluyen de manera adecuada en el *texto de saber*, es decir, es necesario analizar la manera como los formadores significan las tareas sugeridas en los programas de estudio. Para ello se les planteó la siguiente pregunta *¿Le parece que los conocimientos necesarios para ser profesor están incluidos en los programas de estudio de la asignatura?*

Las respuestas obtenidas pueden clasificarse en cuatro categorías, en la primera se consideran adecuados los saberes incluidos en los programas, en la segunda se percibe un énfasis excesivo en las organizaciones didácticas, en la tercera se percibe un escaso énfasis sobre las OD y finalmente, las que señalan una insuficiencia tanto en lo didáctico como lo matemático.

En la primera categoría, los formadores (2) opinan que los saberes necesarios para la formación están incluidos en el texto del saber, además de ser suficientes, perciben un buen equilibrio entre ellos, un fragmento que ilustra esta primera categoría es el siguiente:

- Sí están, y yo creo que se da el equilibrio entre ellos, porque vienen momentos prácticos como teóricos, momentos para la planeación, para la acción, para la reflexión (...), sólo que nosotros los vamos modificando y adaptando de acuerdo a las condiciones, porque es el maestro quien puede cargarlos hacia un lado, si se centra únicamente en ver los contenidos matemáticos, a lo mejor estaría regresando a lo que manejaba el 84, lo mismo si se va por el lado de las estrategias a la mejor no le va a permitir al joven que se de cuenta de los niveles de conocimientos que debe manejarse en cada uno de los grados de la primaria ... (F5)

En estos casos la aceptación del texto del saber no es una subordinación irreflexiva, se acepta porque el sujeto asume que la información que proporciona el texto del saber es coherente con su representación. Las justificaciones aluden a la presencia de los saberes prácticos y teóricos y son categorías de estructuración que permiten reducir el ambiente (la propuesta de formación) para comprenderlo mejor y como son coherentes con sus ideas, la identificación entre *texto de saber* y representación resulta natural. Por ejemplo, el énfasis sobre los contenidos es una categoría ligada al viejo Plan, mientras que el énfasis en las estrategias es una categoría que deja de lado los contenidos, así, las categorías que encuentran su lugar en la representación tienen que ver con los contenidos matemáticos –de la escuela primaria- y las estrategias para enseñarlos.

Sin embargo, no en todos existe una coherencia entre su representación y el *texto del saber*, en una segunda categoría se encuentran aquellos (2) cuya interpretación de la nueva propuesta no encuentra categorías coherentes en el *texto del saber*, por esta razón los saberes que se incluyen no se ajustan a sus ideas, es decir, para estos formadores no es posible aceptar el texto por el excesivo énfasis en las organizaciones didácticas, sobre respecto señalan que:

- ...en lo que se refiere a la conceptualización (contenidos), se aborda de manera muy general, da la impresión que quedan huecos (...) se le da más importancia al planteamiento de problemas y a la aplicación con los niños en la primaria...” (F6)
- ... está cargado mucho al aspecto didáctico, ha habido quejas hacia ese punto, sobre todo quienes están formados en una lógica más disciplinaria, de que hace falta la disciplina...(F2)

Estas percepciones son significativas si se piensa que la mayoría de tareas incluidas son de naturaleza matemática y por el reclamo sobre la ausencia de “verdaderas” matemáticas, al parecer los formadores que perciben al texto de saber de esta manera exigen la presencia de contenidos más formalizados, cuando hacen referencia a una formación en una lógica más disciplinaria así parecen mostrarlo. El extremo de estas percepciones se encuentra en la tercera categoría, en ésta los formadores (1) muestran su desacuerdo con el *texto del saber* por el excesivo énfasis sobre las OM, subrayar la escasez de “dispositivos para el estudio”, que al parecer es coherente con la estructura del texto del saber, se expresa de la siguiente manera:

- ... sí están, pero el de didáctica en menor medida porque se enfoca (el programa) un poquito más a lo que son los contenidos y se deja de lado la propuesta de nuevas actividades que se pudieran implementar en la escuela primaria... (F1).

Finalmente, en la cuarta categoría podemos ver a los formadores (1 de 6) que cuestionan la insuficiencia de los saberes matemáticos y didácticos, en este caso el formador expresa su desacuerdo de la siguiente manera:

- En mi opinión el programa se carga más a formar para una docencia para la que no llevan suficientes elementos ni teóricos y muy pocos de dominio de contenidos, se dice que (el programa) se orienta al dominio de la asignatura y su enfoque para la enseñanza pero tiene muy pocos elementos teóricos en términos de la teoría pertinente para la enseñanza y el aprendizaje de contenidos, de la ciencia dentro del aula. Se ve un poquito de Piaget y de algunos otros teóricos que han hecho aportaciones al aprendizaje o a la educación, pero una cosa es la teoría de Piaget que sí habla del desarrollo de la inteligencia pero dice, sin información no hay inteligencia, y entonces de qué le sirve a cualquiera de nuestros muchachos hablarle que la inteligencia se desarrolla así, si no tiene el conocimiento en términos de concepto y de ciencia básica, si nuestros alumnos no van bien formados en el dominio de la ciencia que van a enseñar, cómo se espera que desarrollen la inteligencia en sus alumnos.... (F4)

Dos hechos destacan en esta representación, F4 es el de mayor experiencia y también quien presenta el mayor número de contradicciones entre su representación y la nueva propuesta de formación, puede decirse que su respuesta evidencia la estabilidad de sus representaciones, es decir, en tanto que ha mantenido por más tiempo sus ideas sobre “la ciencia del aula” (la teoría de Ausubel) y la importancia de los contenidos matemáticos, una modificación de su representación que sea coherente con el nuevo Plan parece operar más lentamente. Es por esto que interpreta al *texto del saber* desde un sistema de categorías que le han dado estabilidad, la teoría del aprendizaje significativo como categoría de lo didáctico y la presencia de contenidos matemáticos formalizados, son categorías desde las que se establece un desacuerdo con el texto.

Como se ha visto, sólo dos formadores consideran adecuados los programas de estudio, la mitad de los cuatro considera que tienen demasiado énfasis en lo didáctico. Lo otros dos dividen sus opiniones, para uno existe demasiado énfasis en lo matemático y el otro opina que los saberes matemático y didáctico aparecen de manera insuficiente. Proporciones similares aparecen cuando se les cuestiona sobre los contenidos matemáticos, en este caso tres formadores opinan que:

- … son suficientes… (F1),
- …son congruentes con lo que requiere un profesor de educación primaria… (F2)
- …son suficientes porque aunque se ven de manera general son los básicos… (F6).

Por su parte los formadores que consideran insuficientes los contenidos matemáticos en los programas argumentan que:

- … los estudiantes no dominan con precisión los conceptos (F4)
- … son apenas mínimos (F3)
- … tendrían que complementarse con otros (F5)

Sin embargo, a pesar de que la mitad de los formadores considera que los saberes matemáticos son insuficientes, cuando se les pregunta por los contenidos que deberían incluirse, generalmente hacen alusión a los que ya se encuentran en los programas, ellos consideran la necesidad de,

- ... ampliar un poco los que tienen que ver con procesos de cambio, probabilidad ... (F5)
- ... incluir la historia de algunos conceptos para darle carácter más humano a la disciplina ... (F2)
- ... incluir los que tienen que ver con conjuntos, algunas cosillas como aritmética (F3)
- ... una introducción a la teoría de la aritmética que incluya sistemas de numeraciones básicas (F4)
- .... más conceptos sobre geometría (F4)
- ... una introducción más sólida sobre la matemática de la escuela primaria (F4)

O bien mencionan contenidos cuya exclusión es parte de la naturaleza de la nueva propuesta, en este caso y contra la aceptación de la inclusión de los contenidos de la escuela primaria, los formadores sugieren la inclusión de:

- ... la cuestión de la raíz cuadrada... (F3)
- ... los métodos estadísticos o sea la probabilidad y azar, pero más allá de lo que un profesor de la escuela primaria va a enseñar en una aula (F4)

Como se ha podido observar, cuando se pide justificar los desacuerdos con el programa de estudios, los argumentos parecen ubicarse del lado de las convicciones, algunos -como la inclusión de los contenidos de la escuela primaria- también se utilizan para aceptar la nueva propuesta. Al parecer, estas respuestas son una muestra de que la construcción de sistemas de categorías coherentes con la estructura general de la representación ha modificado los elementos periféricos sin trastocar el nudo central, es decir, las aparentes contradicciones parecen ser un intento por ajustar los elementos periféricos al nudo central de la representación sin pretender una transformación global. No obstante, la representación no es solamente una interpretación u ordenamiento de la realidad, también es una guía para la acción, de manera que en correspondencia con las representaciones de los formadores acerca de la naturaleza del saber didáctico, de la forma de "enseñarlo" y del *texto del saber*, puede inferirse que sus acciones son coherentes con el sistema periférico de sus representaciones. En el siguiente apartado, precisamente analizaremos las acciones que los formadores han realizado frente al *texto del saber.*

3.3.2. Las interacciones con el texto del saber

La puesta en texto del saber señala Chevallard (1991), engendra ciertos efectos, la desincretización y la despersonalización del saber[142] y al mismo tiempo posibilita una relación con *el tiempo didáctico,* la programabilidad de la adquisición del saber. La relación entre el saber y la duración es un elemento fundamental del proceso didáctico, ya que la puesta en texto permite el establecimiento de dicha relación, incluso es el "texto" quien entabla una relación particular con la duración y el tiempo didácticos, una imposición de un modelo legalista de la duración

[142] Para este autor, el saber nace de manera sincrética por lo que, para convertirse en un saber a enseñar debe ser separado en diferentes categorías, esto es, desincretizado, algo similar significa la despersonalización, para Chevallard (1991), esta acción significa separar al saber de su productor para que pueda devenir en saber a enseñar.

progresiva, acumulativa e irreversible del tiempo de la enseñanza y el del aprendizaje.

Este modelo "legal" tiene "... como efecto fundamental el de *interpelar a cada «enseñado concreto» como «sujeto didáctico»*..." (Chevallard, 1991, p. 80), frente al tiempo legal impuesto, el sujeto didáctico postula la subjetividad y su historia personal, esto es, el sujeto interpelado debe responder de acuerdo a la temporalidad que le es propia y se define en el proceso marcado por el tiempo de enseñanza, aunque nunca se identifique plenamente con éste. Siguiendo esta idea, el formador es interpelado por el modelo legal de la duración y le opone su modelo particular de temporalidad, con ello se generan ciertas "negociaciones" entre la duración propuesta en el texto y el modelo de temporalidad del formador.

Respecto del enfrentamiento entre el modelo legal de duración y la temporalidad del formador, puede observarse un desacuerdo respecto de la duración, en su mayoría los formadores perciben una contradicción entre la duración del "texto" y las condiciones específicas del proyecto de enseñanza que se expresa mediante de la manera siguiente:

- ... el tiempo y las condiciones de la escuela normal no nos permiten agotar el programa… (F2).
- … por el tiempo no se abarcan todos los contenidos…*(F1)*
- *…*no nos alcanza el tiempo porque siempre se atraviesa una serie de cosas, porque hay un juego, porque salió el ballet, por esto, por lo otro y se recorta mucho el tiempo de clases... (F6)

Como se puede observar, la fractura se produce por que el "texto del saber" no toma en cuenta las condiciones de vida de las escuelas normales, en este sentido el texto se torna simplemente un modelo legalista imposible de cumplir, la ambivalencia entre seguir la duración del texto o dejarse llevar por la dinámica institucional, como se muestra en el siguiente fragmento, parece tener una solución.

- Hay dos razones, por un lado la dinámica de la escuela tiene mucho que ver, y por el otro lado, cuando nosotros vemos nuestro plan nos damos cuenta de que están bien contaditos (los contenidos), o sea, sí tenemos el tiempo necesario para cubrir todos los temas, pero luego vemos que viene lo otro, de que por una u otra razón, que tiene que ver con la escuela o con el mismo sistema, perdemos una sesión y a partir de ahí nos pasamos, o sea, como que no hay un colchón, yo creo que debería haber un colchón por todas esas sesiones que perdemos.... (F5)

Para este formador, en el texto del saber no se considera la existencia de factores institucionales que rompen con el modelo legal de temporalidad, por esta razón, señala, una posibilidad de ajustar la duración del tiempo legal a las condiciones de las instituciones, consiste en incluir tiempos "excedentes" que pudieran utilizarse para "recuperar" las sesiones pérdidas. Si bien, cinco formadores entrevistados expresan dificultades para ajustar el proyecto de enseñanza a la duración legal texto, uno expresa su acuerdo con el modelo legal, sin embargo, en este caso la identidad entre ambos modelos de temporalidad no es total, ya que señala,

- ... sí me ha alcanzado el tiempo, pero aún así siempre se quedan detalles pendientes... (F4)

Por el desacuerdo entre los modelos de temporalidad del texto y los formadores, es relevante conocer las negociaciones que se dan entre ellos, ya que es de suponerse que la exclusión de algunos saberes del proyecto de enseñanza es una de las negociaciones que se orientan por las representaciones de los formadores. Respecto de las modificaciones que los formadores han hecho al proyecto planteado en el texto, se ha podido observar que todos los formadores entrevistados siguen la secuencia sugerida por el texto y en lo que respecta a las estrategias de enseñanza, sólo uno manifiesta haberlas modificado.

No obstante el acuerdo entre las representaciones de los formadores, la secuencia y las estrategias de formación, la cantidad de contenidos es la que genera mayores desajustes entre la temporalidad legal y las representaciones de los formadores. Interrogados sobre los contenidos que por efectos de este desajuste se han excluido, los formadores manifiestan la existencia de dos efectos generadas por las interacciones con el texto; la exclusión y el tratamiento "suavizado" de los contenidos. Entre los contenidos[143] que regularmente se excluyen del proyecto de enseñanza tenemos a los siguientes:

- El bloque de Geometría (F1), (F6)

[143] Las situaciones sugeridas en el texto de saber incluyen tareas relacionadas tanto con las praxeologías matemáticas como didácticas, por esta razón, cuando los formadores señalan la exclusión de un contenido matemático, significa que también han excluido las tareas didácticas ligadas a dicho contenido.

- El bloque de Procesos de cambio (F1), (F2)
- El bloque de Tratamiento de la información, predicción y azar (F2), (F3), (F5), (F6)

Cabe aclarar que el tratamiento “suavizado” aparece cuando un contenido es trabajado con menor profundidad o amplitud de la que se sugiere en el programa, en este caso los formadores señalan a los números racionales como un contenido susceptible de trabajarse “suavemente”. Sobre la manera como han trabajado el bloque de los racionales señalan:

- ... aunque no se han dejado de trabajar, no se ha profundizado totalmente sobre los significados de las fracciones... (F1)
- ... por su extensión los números racionales casi nunca se ha cubierto en su totalidad... (F3)[144]

Ahora bien, el lugar que guardan ciertos contenidos dentro del proyecto de enseñanza (exclusión o tratamiento suavizado), es producto del tipo de interacción ente formador y programa, de la manera como los formadores interpelan al modelo legal de temporalidad, en este caso, se han observado cuatro tipos de interacciones. La más común es aquella en la que los formadores (3) se ajustan al modelo propuesto por el texto y enseñan los contenidos “que el tiempo permite”, en estos casos el último bloque de cada programa es excluido.

Un segundo tipo de interacción se caracteriza por establecer una temporalidad que toma como referencia los bloques de ambos semestres, la naturaleza de dicha modificación es expresada en los siguientes términos.

- ... yo he observado que hay una secuencia entre los contenidos los dos programas, entonces en *Matemáticas y su enseñanza 1* el tiempo nunca nos permite agotar el programa, de manera que cuando trabajo *Matemáticas y su enseñanza II*, he comentado a los alumnos la importancia que tiene recuperar un bloque que se nos queda pendiente, sin embargo otra vez por falta de tiempo no se pueden trabajar los últimos bloques del semestre II... (F2)

En este caso, el formador toma las dos asignaturas como un sólo periodo de formación y modifica la duración evitando la exclusión de contenidos del primer semestre, sin embargo, como sólo ha trasladado el problema hacia el futuro, éste se presenta al final de los dos semestres, momento en el que los dos últimos

[144] Aunque son los números racionales los que explícitamente se reconocen como contenidos con tratamiento “suavizado”, a través de las interacciones que los formadores establecen con el texto de saber, puede inferirse que éstos no son los únicos.

bloques tendrán que ser excluidos. Este tipo de interacción es similar al anterior, en ambos el ajuste temporal excluye los últimos contenidos del programa, en el primer caso se podría pensar que se excluye un bloque en cada semestre y en el segundo, que es acumulativo, se excluyen los dos últimos bloques del segundo semestre.

Otro intento por evitar la exclusión de contenidos es una modificación basada en la complementariedad, el formador observa la incompatibilidad temporal y realiza ajustes antes de que su proyecto se encuentre en la parte final, esta forma de interactuar con el texto se explica de la siguiente manera:

- .... por lo general manejamos el Bloque I más o menos como lo programamos, entramos al Bloque II y ya el tiempo se nos empieza a reducir, por eso empezamos a quitar algunos de los temas y a complementarlos con los contenidos que consideramos más necesarios de los otros bloques, ya de ahí en adelante uno rescata los que considera más importantes... (F5)

En este tipo de interacción, por lo menos dos bloques[145] son susceptibles de recibir un "tratamiento suavizado", es decir, al establecer una dinámica de complementariedad entre diferentes saberes textualizados, conforme avanza su proyecto de enseñanza el formador decide que contenidos se excluyen y la extensión y profundidad con la que serán trabajados.

Finalmente el último tipo de interacción tiene que ver con la aceptación del modelo legal de duración, en el caso de este formador la interacción con el texto parte de una aceptación del modelo de temporalidad que permite el trabajo con todos los contenidos pero, como se puede ver en el siguiente fragmento, modifica el tratamiento sugerido.

- ... no precisamente he dejado de trabajar algunos (contenidos), en ocasiones lo único que he cambiado es alguna actividad, hemos dejado de contestar algunas páginas del libro de la *Matemática y su Enseñanza en la Escuela Primaria*, y cuando me veo muy apurada, siempre trato de al menos dar un panorama general de aquello, elaboro materiales adicionales, fichas de trabajo, algún resumen, alguna exposición muy breve de mi parte, pero sí una panorámica de lo que se quedó sin ver, a veces trato de preparar una clase magistral para que les quede claro qué es lo que les falta por ver... (F4)

[145] Al observar los contenidos excluidos del proyecto de formación se podrá ver que aún con este tipo de interacción el formador declara que frecuentemente no es posible trabajar el bloque dedicado al Tratamiento de la información, predicción y azar.

En este tipo de interacción, la clase magistral o el "panorama general" como vías alternativas para el tratamiento de algunos contenidos representan una negociación con la manera en que éstos han de ponerse en juego. Este tipo de interacción es posible sólo si se tiene una representación clara sobre los límites del texto del saber, como F4 lo señala,

- ... quien diseñó el programa no me marca que yo tenga que trabajar única y exclusivamente lo que el programa me dice sino también lo que mis alumnos necesitan...

Al parecer, por el conocimiento de los límites de todo texto de saber, sólo este formador manifiesta haber incluido contenidos que no se sugerían en el programa, sobre el respecto menciona:

- ... sí he incluido otros contenidos, en el sistema de numeración, hago todo un planteamiento del sistema de los números reales y amplío las cuestiones que sí vienen en el programa (...) ya que así como viene en el libro, al estudiante le parece demasiado simple y muchas actividades le parecen sin sentido cuando no han establecido la comparación entre la construcción de los conceptos y un sistema de numeración diferente al decimal...(F4)

Como hemos podido ver, la relación entre saberes y duración es elemento del texto del saber que produce los desajustes mayores entre formadores y programas de estudio.

Cuadro 23. Bloques excluidos

Formadores / Bloques temáticos	F1	F2	F3	F4	F5	F6
I. Aprender matemáticas al resolver problemas						
II. Los números naturales y el sistema decimal de numeración						
III. Las cuatro operaciones básicas con números naturales						
IV. La geometría	X					X
V. La medición						
VI. Los números racionales						
VII. Procesos de cambio	X	X				
VIII. Tratamiento de la información, predicción y azar		X	X		X	X

Como puede observarse en el anterior cuadro, dicho desajuste ha generado que en 5 de los 6 casos explorados, sea común la exclusión de por lo menos un bloque temático, como puede verse también lo más común es que se excluyan dos bloques, por lo general, los que se ubican al final de cada uno de los programas. Sin embargo, lo más significativo puede verse en una lectura horizontal, si observamos el número de formadores que manifiesta haber excluido al bloque VIII, podemos deducir que la mayoría de los formados no reconstruyen las praxeologías matemáticas y didácticas correspondientes a la probabilidad y estadística.

No obstante, la exclusión no es el único efecto del desajuste temporal, el tratamiento “suavizado” (que frecuentemente se combina con la exclusión) es también una negociación con el modelo legal de duración. En este caso, los números racionales son el contenido que recibe este tratamiento con mayor frecuencia, sin embargo, por el tipo de interacciones que los formadores dicen establecer con el programa puede inferirse que otros contenidos reciben también un tratamiento de este tipo. Así, la programabilidad del saber es uno de los elementos del texto del saber que genera el mayor número de negociaciones entre formadores y texto, su objetivo fundamental es modificar la cantidad, la extensión y la profundidad de los contenidos a enseñar.

3.4. LAS EXPERIENCIAS CON LA NUEVA PROPUESTA O LA (DES) ESTRUCTURACIÓN DE LAS REPRESENTACIONES

En el apartado anterior hemos visto la manera como los formadores incorporan la nueva propuesta a sus representaciones y cómo negocian con el texto del saber, sin embargo, es necesario analizar también sus experiencias con el proceso de formación, ya que como se ha mencionado las representaciones orientan las acciones y también las acciones determinan la estructuración o reestructuración de las representaciones existentes. Ponderar las experiencias que se han tenido en la formación es un síntoma del curso que tomarán las representaciones, esto es, ponderar positivamente las nuevas prácticas permite consolidar las representaciones existentes, aunque lo contrario también es posible, es decir, valorar negativamente las nuevas prácticas permite desestructurar las representaciones que prexistentes y reiniciar la búsqueda del equilibrio.

En este apartado el propósito es precisamente analizar las experiencias que los formadores han tenido con la nueva propuesta de formación, para ello haremos énfasis en tres aspectos: las dificultades que han tenido con la asignatura; el accionar de los alumnos en la perspectiva de los formadores y; las experiencias de mayor impacto en el trabajo de formación.

3.4.1. Enseñar a enseñar matemáticas. Las dificultades de los formadores

Cuando un sujeto supone que las nuevas prácticas que son parte de una situación *irreversible* no producen resultados favorables, la coherencia entre las modificaciones en el sistema periférico y la representación no está garantizada, puesto que las acciones proveen de un sustrato empírico a dicho equilibrio y cuando éste no es garantizado, la *transformación resistente* encuentra justificaciones y la *transformación progresiva* es más difícil. Por estas razones es importante analizar la manera como los formadores perciben sus experiencias con la nueva propuesta.

Sobre este respecto, resulta significativo que sólo dos formadores perciban que sus dificultades en el trabajo con esta asignatura se relacionan con su capacidad de organización o bien con su dominio de los contenidos.

- "... al principio tuve dificultades para tener los materiales requeridos para las clases... (F3)
- "...hay ocasiones en que algún concepto matemático no lo tengo muy claro, entonces se me dificulta conocer la esencia, la naturaleza de ese contenido y saber cómo poder enseñarlo... (F1).

Para los formadores restantes, sus dificultades nada tienen que ver con su accionar en el aula, tampoco con su capacidad de organización o con su dominio de contenidos, aunque sí con los estudiantes o más específicamente con el débil domino de contenidos matemáticos que poseen, al respecto mencionan:

- ... las dificultades más fuertes que he tenido tienen que ver con el bajo nivel con el que llegan los alumnos… (F3, F6)
- … con los vacíos con los que llegan los alumnos… (F4, F5)
- … con las dificultades que tienen para leer... (F4)

Como se puede ver, el dominio del contenido matemático de los alumnos o de los formadores es la dificultad principal en el desarrollo del programa, cinco formadores entrevistados así lo perciben. La cuestión resulta importante si se considera que la estructura del programa pone el énfasis en la reconstrucción de las praxeologías matemáticas y que, en opinión de los formadores, dicha reconstrucción resulta esencial para poder enseñar matemáticas. Esto significa que los obstáculos principales se ubican en aquello que el texto del saber intenta destacar (las praxeologías matemáticas), no obstante puede pensarse que la intención del texto del saber es congruente con el dominio de los contenidos matemáticos de los formados. Otra cuestión interesante es que el formador que afirma tener dificultades con el dominio del contenido matemático es también quien tiene menos experiencia, al parecer debido a la estructura del programa de la antigua propuesta de formación, tanto estudiantes como formadores se enfrentan con la misma dificultad, el dominio del contenido matemático.

3.4.1.1. Los contenidos

Ahora bien, si los contenidos matemáticos son el obstáculo principal para el desarrollo de la asignatura, debe considerarse que según el contenido del que se trate la dificultad que los formadores tienen para trabajarlos deber ser diferente, interrogados sobre el contenido en el que han tenido las mayores dificultades, los formadores presentan las siguientes opiniones:

Cuadro 24. Contenidos con dificultad

Contenido donde han tenido mayores dificultades	Formadores
Estadística y probabilidad	F4, F6
Sistemas de medición	F5
Los contenidos matemáticos en general	F2
Fracciones	F1,F3,F6

En los tres primeros casos las justificaciones se centran en los formados, en su opinión lo que hace más difícil a esos contenidos no es tanto la complejidad de los conceptos mismos sino que lo son porque,

- ....es donde más vacío conceptual traen los alumnos... (F4)

Sin embargo, estas justificaciones muestran que los vacíos no son una condición implícita a los estudiantes sino que, como se puede ver en la siguiente frase, son una cuestión escolar,

- ...en la secundaria y en la preparatoria estos contenidos se encuentran al final de los programas por eso pienso que casi nunca se alcanzan a ver... (F4).

No obstante estas opiniones, lo significativo es que la mitad de los formadores señalan a las fracciones como el contenido donde tienen mayores dificultades, otro rasgo interesante es que los tres hacen referencia a aspectos diferentes de las fracciones como motivo de las dificultades, por ejemplo:

- ... lo más difícil son los diferentes significados de las fracciones… (F1)
- ... sobretodo, he tenido dificultades en algunos términos, por ejemplo el término equitativo y exhaustivo ¿cómo entenderlo?... (F3)
- ... los contenidos más difíciles han sido lo que es la multiplicación, la suma y la resta de fracciones… (F6)

La justificación basada en los alumnos no parece operar en este caso, salvo las operaciones con números fraccionarios, los diversos significados y el sentido de la equitatividad y exhaustividad no son aspectos del contenido matemático que se hayan explicitado en otro nivel escolar, son propios de la formación donde se incluyen como un análisis didáctico del contenido, como un elemento que permitiría al futuro profesor comprender de mejor manera el concepto de fracción y adaptar situaciones de enseñanza adecuadas. Por esta razón, puede decirse que estas dificultades son generadas por el trabajo específico con estos programas y que difícilmente pueden adjudicarse al nivel conceptual con el que llegan los alumnos, en otras palabras, parecen ubicarse como dificultades para adaptar las estrategias de formación a estas nociones, lo que representaría una dificultad propia del formador y no del estudiante.

Esta preeminencia del contenido en las dificultades de los formadores puede observarse también cuando mencionan los contenidos de menor dificultad, en opinión de los formadores la facilidad de trabajar ciertos contenidos (veáse el siguiente cuadro) tiene que ver con las condiciones conceptuales de los formados.

Cuadro 25. Contenidos con mayor y menor dificultad

Contenido de mayor dificultad		Contenido de menor dificultad	
Las fracciones	F1,F3, F6	Sistema decimal de numeración	F3, F4
Probabilidad	F4, F6	Operaciones básicas	F4, F6
Disciplinario en general	F2	Disciplinario en general	F2
Medición	F5	Medición	F1
Estadística	F4	Geometría	F5

Cuando se pregunta a los formadores por qué esos contenidos son más fáciles de enseñar, invariablemente hacen alusión a las condiciones de los estudiantes, aunque en esas respuestas puede inferirse que la menor dificultad se relaciona con el formador, ya que señalan:

- ... la suma, la resta porque todavía el otro, el del sistema de numeración, aunque parece muy sencillo, ha tenido su grado de dificultad… (F1)
- ... medición, porque hay más actividades vivenciales, las fracciones resultan un poquito más abstractas que la medición, la medición la vemos como más real… (F2)
- ... porque se presta para meter un determinado número de actividades con coros, por medio de papiroflexia, por medio de actividades como la del país lalilan… (F3)
- ... porque los que manejamos más a nivel de ellos, hay cierta dificultad pero también cierto conocimiento que ya manejan… (F5)
- ... porque en fracciones los alumnos ya tienen referentes sobre lo propio… (F2)
- ... es lo más familiar para los muchachos… (F4)

Aunque la referencia a los estudiantes es frecuente, se observa que los contenidos pueden ser “fáciles” por la complejidad del objeto matemático (F6), porque el contenido es susceptible de trabajarse mediante situaciones cotidianas (F1) o divertidas (F3) pero también por el conocimiento que tengan los estudiantes (F5, F2, F4). Como se ha mencionado, en opinión de los formadores la dificultad para estudiar algunos contenidos está ligada al nivel conceptual de los estudiantes, sin embargo, al parecer también tiene relación con la dificultad de los formadores para desarrollar estrategias que les permitan manejar cierta complejidad del contenido, las respuestas de F1 y F3 enfatizan esta idea ya que no hacen alusión a la escuelas primaria sino a la facilidad que estos contenidos tienen en las aulas de las escuelas normales. En el apartado siguiente se intenta profundizar sobre las dificultades en las estrategias de los formadores.

3.4.1.2. Las estrategias

Interrogados sobre las estrategias menos favorables, las respuestas de los formadores pueden clasificarse en dos categorías: aquellas relacionadas con tareas específicas sobre los racionales y; las que se relacionan con otros contenidos. Sobre las estrategias para trabajar los racionales, los formadores (3) opinan que:

- ... hay ejercicios un poquito abstractos que no permiten alcanzar el nivel de conocimiento…(F1)
- ... la conversión de un número decimal a una fracción común o comparar dos fracciones son situaciones que poco les interesan a los alumnos… (F3)
- ... cuando se pide que los estudiantes planteen un problema, no creo que cumpla alguna función ya que cuando les pido que hagan eso a lo más que llegan es a cambiar Juan por Pedro… (F4)

Como se puede ver, sus dificultades tienen que ver con la reconstrucción de las praxeologías matemáticas y como se puede inferir, con la capacidad de los alumnos para cumplir con las tareas propuestas, es decir, desde estos supuestos no se cuestiona a la estrategia sino su complejidad en relación con los conocimientos de los alumnos.

En la segunda categoría, las estrategias con menos resultados favorables se relacionan con las tareas sobre el proceso de estudio. En este sentido señalan:

- ... escuchar una grabación o ver un video han dado poco resultado son estrategias que rechazan los alumnos porque ellos esperan otro tipo de imagen, incluso proponen porque no traemos películas que tengan que ver con el proceso de los niños, con los problemas que tienen los profesores... (F5, F6)[146]

En estos casos hay dos niveles de rechazo, uno tiene que ver con la estrategia en sí misma, esperar otro tipo de imagen es muestra de que las estrategias resultan poco atractivas, proponer estos materiales pero con diferentes temáticas[147] representa el rechazo al tipo de documento (videoconferencia) utilizado, es decir, se rechaza la videoconferencia y se propone la inclusión de documentos en los que se puedan ver las estrategias que utilizan los niños o los problemas que un profesor tiene para gestionar el proceso de estudio.

---

[146] Sólo un formador, F2, considera que no ha tenido dificultades con las estrategias que le sugieren en el programa.

[147] Por lo general los materiales audiograbados o videograbados que se les sugieren a los formadores incluyen conferencias o discusiones respecto de la forma en que, siguiendo al nuevo enfoque, deben enseñarse las matemáticas en la escuela.

Ahora bien, frente a este tipo de dificultades ¿qué hacen los formadores para enfrentar el fracaso de estas estrategias o las dificultades con estos contenidos?, para identificar este tipo de acciones "terapéuticas" en el sentido de Chevallard (1991), se preguntó si habían incorporado estrategias no sugeridas en el programa. De las respuestas obtenidas se pudo saber que dos formadores no han incorporado estrategias diferentes y los cuatro restantes dicen haber incorporado las estrategias siguientes:

- …realizamos mediciones de diversos objetos de manera no convencional que no venían sugeridas en el programa… (F1)
- …yo los remito a los cuadernos "Alfa"[148] para que estudien y tengan con toda precisión y claridad el dominio de conceptos… (F4)
- …hemos invitado a dos maestros para que vinieran a trabajar un concepto, como él lo maneja en escuela, posteriormente contrastamos la forma de trabajo de cada uno de ellos… (F5)
- …yo me he encontrado con que los muchachos como que no quieren leer, entonces a veces lo que he hecho es fragmentar la lectura y hacerla en clase… (F6)

Como hemos podido observar, las dificultades de los formadores están ligadas con el dominio de contenidos, específicamente con el de los racionales, esto resulta significativo si recordamos que la reconstrucción de las OM es sólo un tipo de tareas para la formación. Otro rasgo que llama la atención es que sólo un formador (F4) ha desplegado estrategias no sugeridas, es relevante también que F5 sea el único que ha incluido estrategias ligadas a las praxeologías didácticas (analizar la dirección de estudio de los profesores "expertos"). Por otro lado, cuando se habla de las estrategias con resultados favorables, el dominio del contenido matemático sigue ocupando un lugar central, en opinión de los formadores una estrategia que ha producido resultados favorables consiste en:

- ... aprender conceptos a partir de la resolución de problemas... (F1), (F4), (F6)

Otras que combinan el trabajo de reconstrucción de las praxeologías matemáticas con tareas relativas al proceso de estudio, son las siguientes:

[148] Los cuadernos "Alfa" son libros comerciales dedicados a los niños de la escuela primaria, en ellos se incluye un gran número de ejercicios matemáticos para los diferentes grados de la escuela primaria.

- ... reconocer los tipos de problemas y diferenciar las dificultades de aplicar unos u otros con los niños… (F2)
- ... cuando los jóvenes pasan al pizarrón a explicar un procedimiento pero alguien lo hace de una forma más apegada a una cuestión algebraica y que ellos van viendo… (F3)

En éstas últimas, puede observarse un mayor énfasis en el trabajo con las OM, aunque también se mencionan estrategias ligadas a los dispositivos (reconocer las dificultades en una situación de enseñanza) y al proceso de estudio (la confrontación de estrategias). No obstante, un número mayor de formadores menciona las estrategias ligadas a las OM, lo que nos permite pensar que sobre éstas descansa el proceso de estudio y que las estrategias para el estudio de los dispositivos y el proceso de estudio tienen menor énfasis en los procesos de formación, sólo dos formadores (F5 y F6) las ubican como estrategias con resultados favorables.

En síntesis, las cuestiones que los formadores consideran con mayor o menor dificultad están ligadas a las praxeologías matemáticas, hemos observado que la mitad de los formadores señala a los números racionales como el contenido con mayores dificultades, también que las dificultades no están ligadas con las características de los formadores, a decir de los formadores las condiciones escolares de los alumnos son un elemento que obstaculiza la buena marcha de su proyecto de enseñanza.

3.4.2. Los alumnos. Una preocupación por lo didáctico

En los apartados anteriores hemos observado que las preocupaciones fundamentales de los formadores giran en torno de la reconstrucción de las OM, sin embargo, cuando se les interroga sobre las cuestiones del curso más significativas para los estudiantes la situación es diferente. Algunos formadores (F4 y F5) perciben que son cuestiones ligadas a las OM, ellos lo expresan de la siguiente manera:

- ... lo que más les ha interesado es cuando les doy el panorama de la estructura conceptual de todos los grados y les digo, bueno si no te lo sabes esta es tu tarea y aquí está todo este altero de libros de texto y sobre todo de cuadernos “Alfa”, entonces si yo no te puedo enseñar todo esto porque el tiempo no nos alcanza y además tú necesitas mucho para la escuela primaria aquí está y búscalo (F4)

No obstante, las respuestas más frecuentes (3 de 6) indican que lo más significativo para los estudiantes son las tareas relacionadas con las OD, aunque cada una de estas respuestas hace referencia a diferentes elementos de estas organizaciones. Por ejemplo el interés por las tareas ligadas a los dispositivos de estudio es expresado por F1 quien señala

- ... los estudiantes se interesan más sobre cómo enseñar tal o cual contenido...

Por su parte, en opinión de F2, las tareas ligadas al aprendizaje de los niños son las que más han interesado a los estudiantes:

- ... lo que más les ha interesado es la resolución de problemas porque ahí se dan cuenta de la forma en que los niños van construyendo, por ejemplo, el sistema de numeración...

Finalmente, la percepción de F3 es que las tareas relacionadas con la dirección del proceso de estudio y con la enseñanza son las que más les han interesado,

- ... la elaboración de diferentes materiales y recursos didácticos que apoyan el trabajo con los niños son las que más les han gustado.... (F3) [149]

En la visión de los formadores, la reconstrucción de las OM es una preocupación que comparten sólo algunos alumnos, la mayoría se preocupa más por la reconstrucción de praxeologías didácticas. En el contexto de estas respuestas lo que puede verse es que las tareas relativas a la dirección del proceso de estudio no ocupan un lugar central en las representaciones de formadores y estudiantes, esta apreciación parece consolidarse cuando se interroga a los formadores por los elementos del curso que han interesado menos a los estudiantes. En este caso resulta significativo el rechazo que los estudiantes manifiestan frente a las tareas relativas a la dirección del proceso de estudio, a decir de los formadores los elementos que se presentan enseguida, son los más rechazados por los estudiantes.

- ... lo teórico del enfoque… (F1) y,
- …la resistencia por la lectura*...* (F2, F5, F6*)*

[149] F6 contestó que no tenía claro aquello que más había interesado a los estudiantes

Como se puede apreciar, son tareas sobre el proceso de estudio o bien, que buscan construir un entorno tecnológico teórico. Lo que estas respuestas nos dicen es que los estudiantes prefieren las tareas referidas a los dispositivos de estudio o donde no se analicen los discursos tecnológicos y teóricos, con base en esto puede decirse que los estudiantes prefieren estudiar una didáctica “práctica” en el sentido que Artigue (1995) le da al término. Otros aspectos que en opinión de algunos formadores no despiertan gran interés entre los estudiantes son las tareas que se relacionan con el aprendizaje de los niños (F3) y aquellas sobre la dirección de un proceso de estudio concreto (F4), sobre este respecto señalan:

- ... lo que menos les ha interesado es salir a las escuelas a corroborar la adquisición de una noción*...*.(F3)
- ... motivar a los niños a partir de la resolución de problemas es la cuestión que menos ha interesado a los estudiantes... (F4)

Resulta interesante observar que en opinión de los formadores, lo que más interesa a los estudiantes son las tareas relativas a las OD, por esta razón es importante conocer su opinión respecto de las dificultades que los estudiantes tienen para cumplir con estas tareas. Sobre este respecto llama la atención que la totalidad de los formadores entrevistados consideran que las dificultades principales tienen que ver con el diseño de una secuencia de clase, específicamente con la dificultad para diseñar o seleccionar dispositivos de estudio que correspondan a una cuestión matemática puntual, esta idea es expresada en los siguientes términos:

- La dificultad principal que tienen es la de encontrar las estrategias adecuadas para enseñar tal o cual contenido, pero me parece que esas dificultades se relacionan con la falta de dominio del contenido porque los estudiantes francamente no tienen un dominio adecuado, resulta que cuando van a practicar todavía no vemos ese contenido en las clases y por eso creo que se les dificulta encontrar las estrategias adecuadas (F2)

Como lo señalan los formadores, la causa de esta dificultad es el escaso dominio del objeto matemático, lo que significa que la preocupación por la reconstrucción de las OM no se circunscribe al simple hecho de conocer matemáticas, también determina las dificultades para el cumplimiento de tareas didácticas, en otros términos, estas preocupaciones nos hablan de la codeterminación matemática-didáctica. No obstante esta apreciación, cuando los formadores se refieren a los procesos de estudio que han dirigido advierten otro tipo de dificultades que se presentan a pesar de que los estudiantes seleccionan un dispositivo de estudio adecuado. Entre éstas, los formadores perciben dificultades para estructurar el proceso de estudio,

- ... en sus prácticas, los estudiantes tienen dificultad para desarrollar una secuencia de actividades coherente... (F3)

Dichas dificultades, en opinión de F3, derivan también de un escaso dominio del contenido matemático, aunque al parecer están más ligadas al proceso de estudio y al significado de cada uno los momentos didácticos, tal vez estas dificultades devienen de la codeterminación matemática-didáctica. Entre las dificultades no didácticas los formadores señalan a la disciplina como problema principal de los estudiantes.

Ahora bien, a pesar de que en la opinión de los formadores la disciplina y la capacidad para dirigir un proceso de estudio son las dificultades fundamentales en la práctica de los estudiantes, cuando se les cuestiona sobre las tareas que han incluido en su proyecto de enseñanza para superar tales dificultades sólo algunos señalan tareas relacionadas con dicha problemática, los tipos de tareas que dicen haber incluido son los siguientes:

- ...insistir mucho en que el enfoque para la enseñanza de las matemáticas prioriza el trabajo de equipo… (F5)
- ....exposición de los materiales escolares (libros y ficheros)… (F3)
- ...elaboración de un diagnóstico para conocer el nivel cognitivo de los alumnos… (F1, F2 , F6)
- ... observaciones de la enseñanza que realizan los profesores de educación primaria… (F2, F4, F6)

Como se puede observar, sólo el último tipo de tarea se relaciona directamente con la dirección de un proceso de estudio, observar a los profesores con experiencia puede ayudar a comprender la manera en la que gestionan dicho proceso, sin embargo, el segundo y tercer tipo de tareas tienen más relación con los dispositivos de estudio, elaborar un diagnóstico permitiría seleccionar los dispositivos coherentes con el nivel de los aprendizajes de los niños, de igual manera, analizar los libros de texto y los ficheros es una actividad que posibilita dicha selección, por su parte el primer tipo de tareas que se presenta está más bien ligado a las interacciones que podrían establecerse eventualmente en un proceso de estudio.

La capacidad para dirigir el estudio de una cuestión matemática puntual, que es el objetivo de la formación, parece ser una preocupación menor que los formadores expresan a través de sus representaciones, en éstas el dominio del contenido matemático representa la preocupación principal. Para intentar confirmar dicha interpretación, en lo que sigue analizaremos las experiencias que en opinión de los formadores han sido más positivas.

3.4.3. Las experiencias de formación. Entre la homología y lo práctico

Como hemos mencionado, las representaciones orientan las prácticas de los sujetos pero las prácticas también consolidan la estructuración de la representación, específicamente las acciones más eficaces permiten que el sujeto reencuentre el equilibrio entre su representación y la realidad en la que interactúa, dicho equilibrio es un elemento que permite la aceptación del nuevo medio, por esta razón, en el presente apartado analizaremos las que en opinión de los formadores han sido las experiencias más o menos favorables durante el proceso de formación, se trata de identificar las experiencias (elementos de la representación) que les permiten "ajustar" o no su representación a la nueva propuesta de formación.

Entre las experiencias positivas pueden apreciarse dos prácticas destacables por su eficacia y significatividad, por un lado las experiencias relacionadas con la homología y por el otro las relacionadas con la práctica de los formados[150]. Para algunos formadores (3), las mejores experiencias se refieren a la eficacia de la homología, en su perspectiva se manifiestan cuando los formados comprenden la manera como tendrán que enseñar, una experiencia de este tipo es acotada de la siguiente manera:

[150] Como hemos mencionado, la homología es una estrategia en la que el formador enseña a los futuros estudiantes de la misma manera que desea que ellos enseñen.

- ... en una clase de medición se trataba de medir las circunferencia de unos círculos en cartón y hubo quienes trataban inmediatamente de buscar la fórmula, algunos se acordaban de ella otros no, al pedirles que no usaran fórmulas empezaron a medir la circunferencia con estambres y empezaron a deducir de dónde provenía el “pi”, primero decían, yo no sé, es que toda mi vida me han dicho que es “pi” pero no sé porqué se utiliza esa fórmula y después al hacerlo durante la clase se dieron cuenta de dónde provenía y vieron la vida misma del enfoque, no lo vieron tan teórico, sino vieron la construcción de ese saber matemático y también que ya no era ese enfoque tradicional sino que ahora había otras cosas que las hacía más comprensibles... (F1)

Que los futuros profesores vean “la vida misma del enfoque”, como lo señala este formador, significa que se reconoce la eficacia de la homología. Cuando F1 señala que ésta es una de sus mejores experiencias, acepta que la estrategia sugerida para la formación es una herramienta eficaz que permite a los estudiantes conocer una nueva manera de hacer y enseñar matemáticas. Otra experiencia de este tipo es la que se presenta enseguida.

- ... una experiencia que me gustó mucho trata sobre los números, en el juego del país de los “lalilaneses”[151] los alumnos van construyendo y entendiendo la dificultad para construir el sistema decimal de numeración, esa experiencia me gustó mucho porque los alumnos se dan cuenta de que es un proceso muy complejo que el niño comprenda el sistema decimal de numeración y esto contribuye a decirles, hay que tener cuidado, no hay que exigirle a los niños más de lo que su propias capacidades les van dando...(F2)

Como se puede observar, en el caso de F1 y F2 la aceptación de la nueva propuesta de formación es posible gracias a la eficacia de su práctica formativa, es decir, aceptan la homología como causa de esas experiencias positivas. En ese sentido el formador pondera positivamente las acciones mediante las que “enseña” el saber didáctico en una institución de formación, en otras palabras, las experiencias positivas están ligadas con el accionar del formador y podría inferirse que esa forma de actuar ha comenzado a modificar algunos elementos de su representación.

No obstante, también existen formadores (F4, F5 y F6) cuyas experiencias positivas se relacionan con lo práctico. En estos casos lo positivo no está ligado directamente con la acción del formador, sino con la manera en la que el formado

---

[151] El juego al que se hace referencia tiene que ver con desarrollar actividades de conteo, comparación, suma y resolver problemas aditivos con un sistema de numeración (el de los lalinaneses) de base 6. Dicho sistema utiliza etiquetas orales y grafías no convencionales.

utiliza las praxeologías didácticas reconstruidas en la formación. Estas praxeologías muestran su eficacia en una acción específica, la dirección de un proceso de estudio concreto, por esta razón algunos formadores señalan la presencia de una dirección adecuada como la experiencia de mayor significatividad:

- ... cuando veo a un alumno en la práctica con una estrategia que responde a un propósito establecido, cuando se ve que su estrategia está impactando en los niños, y éstos están motivados, o sea cuando están haciendo matemáticas, ahí es donde uno se siente satisfecho...(F5)

A diferencia de los formadores que señalan a la homología como su mejor experiencia, en estos casos las experiencias positivas trascienden las aulas de la escuela normal y les permiten observar las bondades de la nueva propuesta en el terreno de la enseñanza. Estos formadores han encontrado elementos que les permiten aceptar una transformación progresiva de su representación, lo que les garantiza un equilibrio con la nueva propuesta de formación, estas afirmaciones parecen confirmarse cuando los formadores señalan sus experiencias negativas, la mayoría (4) expresa situaciones ligadas a la práctica de los formados, sobre el respecto mencionan:

- ...cuando los alumnos no han sabido aplicar en la práctica cuestiones muy elementales... (F3),
- …cuando el alumno no alcanza los niveles adecuados sobre su desempeño como profesor... (F4)
- …cuando el alumno tenía un buen plan para su práctica y no encuentra cómo desarrollarlo... (F5)
- … cuando el alumno ya está en cuarto grado y dice que se le ha olvidado como planear y trabajar con matemáticas... (F6)

No obstante, también existen formadores que señalan a la homología como algo negativo, al parecer éstos no dan una significatividad especial a la práctica de los formados puesto que su mejor y peor experiencia tiene que ver con su propio desempeño en el aula. Otro hecho destacable, como se puede apreciar en los siguientes fragmentos, es que en ambos casos la experiencia menos positiva se refiere al trabajo con las fracciones.

- ...una mala experiencia fue precisamente con las fracciones, habíamos trabajado bastante tiempo con los cuatro significados y en un planteamiento donde tenían que identificar el significado que estaba implícito en los problemas, existió mucha confusión, llegó un momento en que se desesperaron e incluso dijeron, de que me va a servir conocer los significados de las fracciones yo llego y trabajo con las fracciones pero ni modo que les vaya a decir a los niños para qué son o que las fracciones tienen cuatro significados...(F1)

- ... el asunto de las fracciones es un tema que se dificulta mucho, los alumnos tienen ideas muy arraigadas, conceptos muy formales sobre ese tema y tienen dificultad para plantear estrategias no formales para el tratamiento de las fracciones, por ejemplo hay ejercicios que les parecen muy obvios, dicen ese no tiene caso, lo podemos brincar y después se generan complejidades en términos del proceso y quieren resolver los problemas de fracciones inmediatamente de una manera muy convencional...(F2)

No obstante que, por las experiencias señaladas puede decirse que el interés principal de los formadores está ligado con la práctica de los estudiantes, también hay formadores cuyas preocupaciones se centran más en la reconstrucción de las praxeologías matemáticas, dicha afirmación se sustenta en las respuestas de F1 y F2, quienes han ubicado sus experiencias de mayor significatividad en la eficacia o dificultades en esta actividad. Otro rasgo notable es que en ambos casos las dificultades están ligadas con las fracciones, lo que parece confirmar que este contenido es uno de los que mayores dificultades tienen en la formación.

3.5. CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

A manera de síntesis puede decirse que el equilibrio entre las representaciones de los formadores y el nuevo ambiente de formación está apenas en construcción, si bien es cierto que los formadores reconocen las diferencias entre la nueva y la antigua propuesta de formación, no lo es menos que existen elementos que no son del todo coherentes con su visión, quizás el de mayor significatividad tiene que ver con la práctica, particularmente con el papel que se da a los tutores. Para la mayoría de los formadores las tutorías no son coherentes del todo con la nueva propuesta porque los tutores no asumen su papel o porque no disponen de una “preparación” adecuada para cumplir con esta tarea.

Por otra parte es destacable el hecho de que los formadores perciban la naturaleza de la nueva propuesta así como la presencia de la didáctica, no obstante, en relación con este último aspecto los formadores no realizan señalamientos explícitos sobre su presencia, la perciben sólo a través de ciertos materiales. La mayoría percibe al saber didáctico como algo que trasciende la idea de metodología de enseñanza, es decir, aunque no lo expliciten los formadores perciben que la didáctica de las matemáticas es un campo de investigación.

Por lo que toca a las negociaciones entre formadores y texto del saber, hemos podido apreciar tres cosas destacables, en primer lugar lo desconocida que resultaba la nueva propuesta y los saldos desfavorables de la capacitación. En segundo, la división de opiniones respecto del énfasis que perciben en el texto del saber, mientras que para unos se da demasiado énfasis en el aspecto didáctico, otros opinan que se acentúa lo matemático. Por otra parte, ha podido observarse que la mayoría de los formadores desarrollan los procesos de formación siguiendo los lineamientos del texto de saber, esto es, no han modificado los contenidos ni la secuencia sugerida, aunque han negociado con la programabilidad del saber ya que en su opinión el tiempo "legal" no es coherente con el tiempo del aprendizaje ni con el de las instituciones. Un efecto pernicioso de esta negociación ha sido la exclusión y el "tratamiento suavizado" de algunos contenidos.

Respecto de las experiencias de formación lo destacable es que en opinión de los formadores las principales dificultades no han surgido del texto del saber ni de la propia formación de los formadores, son las condiciones de los alumnos las que se constituyen como obstáculos, particularmente el escaso dominio de contenidos matemáticos básicos. En correspondencia con esta idea señalan a los números racionales como uno de los contenidos con mayores dificultades, otro generalmente excluido es la probabilidad.

En contraste con la preocupación por el contenido matemático, los formadores señalan que los alumnos tienen mayor interés por las tareas relacionadas con la selección y el diseño de dispositivos para el estudio, es decir, se preocupan más por las estrategias específicas para enseñar. Dicho interés parece ser justificable porque en la perspectiva de los formadores, sus propias experiencias negativas se relacionan con la práctica de los estudiantes, en su decir, éstos tienen muchas dificultades para dirigir un proceso de estudio concreto.

No obstante las afirmaciones anteriores, debe recordarse que el análisis de las representaciones a través de una entrevista, como lo señalan Robert y Robinet

(1989), sólo genera un conocimiento relativo sobre lo que sucede en las aulas toda vez que las acciones descritas son el punto de vista de los entrevistados, por esta razón, para conocer la manera en la que las representaciones orientan las prácticas, es necesario analizar las praxeologías que los formadores despliegan en los salones de clases. Sin embargo, antes de abordar este objetivo en el próximo capítulo, en los siguientes apartados habremos de hacer una caracterización de las representaciones de los formadores que fueron sujetos de la observación en el aula.

3.5.1. La crisis del sistema central. Las representaciones de F4

Uno de los formadores que fueron observados es F4, profesor con 28 años de experiencia, 12 como profesor de educación primaria y 16 años como formador de docentes. Entre los formadores entrevistados F4 es el de mayor experiencia como profesor y como formador de docentes, dicha experiencia le ha permitido trabajar con dos planes de formación, el llamado Plan 84 y el 97. En lo que respecta a sus estudios, F4 cursó la Normal Básica, la Normal Superior (especialidad de enseñanza de las matemáticas) y una Maestría en Educación.

En opinión de F4, la diferencia entre el viejo y el nuevo plan de formación estriba en que el Plan 97 incluye un mismo espacio curricular para el estudio de los contenidos matemáticos y los enfoques para su enseñanza. No obstante este reconocimiento, para F4 los contenidos matemáticos y didácticos incluidos son insuficientes, sobre esto últimos señala: "…el Plan 97 carece de una buena fundamentación teórica en términos de una teoría para la enseñanza y aunque se modificó, sigue siendo muy pobre…". Otra contradicción entre los presupuestos de este Plan y la representación de F4 se ubica en el trabajo de tutoría. A decir de F4, ese es un aspecto que poco puede enseñar a los futuros profesores ya que, "… en realidad son pocos los profesores de educación primaria que trabajan con el enfoque basado en la resolución de problemas, por esta razón, las escuelas normales deben desarrollar cursos de actualización para los profesores que se convertirán en tutores…"

Los contenidos matemáticos, didácticos y sobre la tutoría, aunque son elementos distintivos del nuevo Plan, la manera como son planteados no corresponde con su visión sobre la formación, por lo que existe un desequilibrio entre su representación y la nueva propuesta de formación. Dicho desequilibrio es una razón para que el sistema central de su representación pueda entrar en crisis, a menos que, como se ha señalado, las modificaciones en su sistema periférico le garanticen la estabilidad de su representación al menos por un tiempo.

Al analizar la propuesta de formación para la enseñanza de las matemáticas, F4 considera que los programas de estudio de las asignaturas *Matemáticas y su enseñanza I y II* son un espacio en el que los estudiantes deben conocer "…los contenidos matemáticos, las metodologías para la enseñanza y hasta teoría, pero antes que todo los contenidos matemáticos …", sin embargo señala que dichos conocimientos no se articulan de manera adecuada en el programa de estudios porque no hay elementos teóricos que permitan conocer la manera de desarrollar un aprendizaje significativo ni existen contenidos matemáticos suficientes para una formación adecuada. En correspondencia con estas ideas, señala, este programa da énfasis a, "…una formación para la docencia pero sin los fundamentos matemáticos suficientes ni los elementos teóricos adecuados respecto de una teoría del aprendizaje significativo…"

Como puede apreciase, para F4 las contradicciones entre su representación y el Plan son similares a las que se presentan en las asignaturas sobre la enseñanza de las matemáticas, de manera que la crisis de su sistema central puede ser generada por los planteamientos generales del Plan o por los incluidos en los programas de las asignaturas en cuestión. Para analizar la manera en la que F4 enfrenta dichas contradicciones analicemos la manera en la que ha negociado con el texto del saber.

Respecto de sus prácticas, existen dos elementos sin contradicción con sus ideas: el tiempo legal de la enseñanza y la secuencia de los contenidos. Sobre el tiempo legal F4 señala que es adecuado porque le ha permitido trabajar todos los contenidos propuestos, aunque en ocasiones "…cuando me siento apurada utilizó la clase magistral o doy sólo un panorama general del tema que se debía trabajar…” Respecto de la secuencia de contenidos admite que es adecuada. No obstante estos dos elementos de equilibrio, los contenidos y las estrategias sugeridas son las contradicciones mayores, en correspondencia con su percepción acerca de la insuficiencia de los contenidos matemáticos señala que no ha trabajado todos los contenidos sugeridos y ha incluido otros más, “…generalmente doy una introducción amplia al sistema de números reales…” Respecto de las estrategias, su opinión es ambivalente, por un lado señala que la resolución de problemas le ha dado buenos resultados pero no en aquellas donde el formado debe plantear problemas. En su opinión, éstas últimas requieren de un dominio del contenido matemático que los estudiantes no tienen.

Como hemos podido apreciar, F4 ha negociado ciertas contradicciones pero otras permanecen presentes, la secuencia de los contenidos y el tiempo legal son elementos coherentes con su sistema periférico. Empero hay una contradicción en lo que se refiere a la cantidad de contenidos matemáticos, la insuficiencia que percibe F4 ha generado una negociación con el texto del saber (incluir una introducción a los números reales) que le permite estabilizar su representación global. En lo que se refiere a las estrategias, la resolución de problemas se ha “anclado” de manera adecuada en sus ideas preexistentes, no así el planteamiento de problemas, estrategia considerada poco favorable que no ha sido “anclada” de manera adecuada, razón por lo que sigue siendo un elemento de desequilibrio.

La coherencia o contradicción de estos elementos tiene que ver con la posibilidad de que puedan “anclarse” en las ideas preexistentes en el sujeto, en este sentido la constitución de la representación a través de la memoria histórica es un aspecto central para poder comprender las ideas que el formador había construido acerca de este objeto social. Sobre este respecto, cuestionado sobre su conocimiento previo acerca de esta propuesta de formación, F4 señala, “…había oído hablar un poco, pero más que conocer el enfoque, lo que sí conocía es un capítulo del libro de Ausubel, precisamente el de *Aprendizaje y resolución de problemas,* y lo que me quedaba claro es que, si una persona no sabe conceptos, no puede resolver problemas…”

Las ideas que le proporcionan este libro así como la experiencia que F4 menciona con los mapas conceptuales constituyen la significación global de su representación y como se ha visto, resulta difícil que estas ideas preexistentes sean modificadas. Por esta razón F4 considera que el Plan y las asignaturas en particular no incluyen suficientes elementos teóricos sobre el aprendizaje significativo, tampoco, señala, son suficientes los contenidos matemáticos. La preocupación central por los contenidos matemáticos, se junta en su sistema central con los contenidos de la teoría del aprendizaje significativo, que en su opinión, "… es una teoría que habla de los problemas del aprendizaje, de los contenidos matemáticos…" y por ello debe incluirse en los procesos de formación.

Como se ha visto, la experiencia con dicha teoría ha permitido que F4 construya su representación en torno de estos dos elementos, el equilibrio que le brindan en su práctica garantiza una estabilidad, por esta razón pocas modificaciones pueden obtenerse de un breve curso de capacitación, que en su opinión "…fue realmente pésima porque sólo se nos ponía a resolver problemas propios de la escuela primaria (…) fue una pérdida total de tiempo…". Lo que su percepción sobre la capacitación indica es que, frente al equilibrio garantizado por su experiencia con la teoría del aprendizaje significativo, aunque el curso puso en crisis su sistema central, no representó ninguna modificación en su representación. Las primeras experiencias con el texto del saber, como se ha visto, aunque pueden generar modificaciones en su sistema periférico no tocan la significación global. Dicha significación también se expresa mediante los elementos que en su opinión más han interesado a sus estudiantes, sobre este respecto menciona que "…el momento en el que les planteó la estructura conceptual del tema matemático…" es lo que más ha interesado a los formados y lo que menos interés despierta en ellos, señala, es el momento en el que tienen que enseñar cierto tema matemático.

En síntesis, puede decirse que en la representación de F4 el dominio de los contenidos matemáticos es el elemento con mayor peso, así parece indicarlo su visión sobre la estructura del curso, la capacitación y sobre las cuestiones más significativas para los estudiantes. En este sentido los elementos de la nueva propuesta que han sido “anclados” por F4 tienen que ver con el tiempo legal, la secuencia en la que se presentan los contenidos matemáticos y la resolución de problemas, mientras que los que permanecen como una contradicción son los relacionados con la insuficiencia de los contenidos matemáticos, la “pobre” fundamentación teórica sobre el aprendizaje significativo y con las posibilidades formativas de las tutorías.

3.5.2. Una transformación progresiva posible. Las representaciones de F2

Uno de los formadores observados con una experiencia regular es F2, profesor con 8 años de experiencia, 5 como profesor de educación primaria y 3 como formador de profesores. Este formador también ha tenido experiencia con dos planes de formación (84 y 97) sólo que mientras que en el Plan 84 su rol fue de estudiante, en el Plan 97 es el de formador. Además de la Licenciatura en Educación Básica, F2 ha realizado estudios de Maestría en Educación con especialidad en Formación de Docentes, en ésta obtuvo su grado mediante una tesis inscrita en el campo de la didáctica de las matemáticas.

También percibe de manera clara la diferencia entre ambos planes de formación, al respecto menciona, “… la diferencia es que en el nuevo Plan hay una relación entre los contenidos de la escuela primaria y las didácticas específicas de las disciplinas…” En su percepción, esta diferencia es un elemento positivo puesto que, refiriéndose a la correspondencia entre los presupuestos de cada Plan y sus ideas sobre la formación menciona, “…este nuevo Plan es más coherente con mis ideas porque tiene un gran componente didáctico…”

Sobre las tutorías, F2 considera que tienen sus dificultades ya que hay un número importante de tutores que no trabajan bajo los lineamientos del enfoque basado en la resolución de problemas, no obstante, considera que a pesar de esta condición hay varios aprendizajes que el alumno puede adquirir bajo la guía de un tutor, incluso menciona, al observar prácticas que no corresponden con el citado enfoque, el estudiante corre el riesgo de imitarlas, pero “…si se les apoya, pueden identificar los elementos que pueden modificar en su propia práctica...”

Como se puede observar, no existen contradicciones fundamentales entre los elementos del Plan 97 y la significación global que F2 otorga a la formación de profesores, la diferencia entre los planes de formación es percibida y ponderada positivamente, esto significa que no existen elementos en la nueva propuesta que puedan poner en crisis su sistema central y aunque percibe ciertas dificultades en el trabajo de tutoría, no son tomadas como una contradicción total, ya que señala, a pesar de estas dificultades, la tutoría puede coadyuvar al desarrollo de ciertos elementos de la formación. Lo que estas opiniones indican es que los planteamientos del nuevo Plan han podido "anclarse" sin grandes dificultades en las ideas y valores preexistentes en F2, por esta razón podría pensarse que es un sujeto que realizará una "transformación progresiva" de su representación, al menos en lo que se refiere a los postulados generales de la nueva realidad de formación, sin embargo, para analizar la significación que otorga a las asignaturas relativas a *Matemáticas y su Enseñanza I y II,* en lo que sigue se analizarán sus opiniones sobre los elementos que se plantean en los programas de estudio.

Para F2, estas asignaturas son espacios curriculares en los que el estudiante debe conocer los contenidos matemáticos de la escuela primaria, las relaciones que se establecen entre estos diversos contenidos, la lógica mediante la cual se construyen tales contenidos y el trabajo didáctico en el aula que se requiere para enseñarlos, sin embargo, al igual que F4 considera que dichos aspectos no se encuentran articulados de manera adecuada en los programas de estudios, en su opinión "…el programa está más cargado al aspecto didáctico y se le da poco énfasis al aspecto disciplinario en sí mismo…", una manera de garantizar dicho equilibrio señala, consistiría en incluir "…la historia de algunos conceptos, la lógica de su construcción para hacerlos un poco más humanos…" Aunque comparte la opinión de F4, su visión sobre los contenidos matemáticos es diferente, mientras que para F4 la cantidad de contenidos es insuficiente, para F2 es más bien un asunto de profundidad ya que opina que la selección de contenidos es adecuada aunque no la profundidad. En lo que toca a la secuencia de los contenidos y las estrategias de trabajo, F2 señala que ambas le parecen adecuadas.

Como se ha podio observar, la relación entre los planteamientos del programa y la representación de F2 parece no tener grandes contradicciones, si bien no está de acuerdo con el énfasis sobre lo didáctico, dicho desacuerdo no representa una crisis para su sistema central ya que los diferentes elementos que plantea el programa (presencia de lo didáctico, secuencia de contenidos y estrategias de formación) han sido "anclados" sin dificultades en sus ideas preexistentes. Las afirmaciones anteriores parecen indicar que la transformación progresiva de la representación de F2 resulta posible en términos del Plan en general y de las asignaturas en particular, no obstante el análisis de su experiencia podrá ilustrar mejor tal posibilidad.

En lo que toca a su experiencia, la mayor contradicción que F2 ha percibido tiene que ver con el tiempo legal de la enseñanza, en su opinión el tiempo programado no permite trabajar el último bloque del primer curso, aunque como considera que éste debe articularse con primer bloque del segundo curso, lo incluye al inicio del segundo curso, por esta razón, señala, los dos últimos bloques del segundo curso (Tratamiento de la Información y Procesos de cambio) no se han podido trabajar. También por la brevedad del tiempo legal no ha incluido contenidos diferentes a los sugeridos en el programa.

Por su parte la secuencia de contenidos y las estrategias que sugieren en el programa no han representado contradicción alguna, sobre ese respecto F2 dice no haber cambiado la secuencia ni utilizado estrategias diferentes a las sugeridas. Sobre éstas últimas opina que no ha habido estrategias con resultados desfavorables y entre las más favorables menciona aquellas en las que el estudiante debe reconocer el tipo de problemas planteado e inferir las dificultades que los niños tendrían para solucionarlos. Estas experiencias muestran una coherencia entre los elementos del texto del saber[152] y la representación de F2 que al parecer, ha sido facilitada por sus ideas prexistentes sobre la didáctica y, aunque F2 no recibió capacitación alguna antes de trabajar con este programa,

[152] Si bien existe una contradicción importante con el tiempo legal de la enseñanza, es evidente que no es un elemento significativo del objeto social llamado Didáctica de las Matemáticas, su estructuración corresponde más bien al ámbito de la noosfera, particularmente, a los especialistas en diseño curricular.

menciona que “… sí conocía este planteamiento de formación, tenía algunos referentes de lectura sobre todo de didáctica de las matemáticas, de toda la corriente francesa…”

No obstante estas afirmaciones pueden matizarse con base en las opiniones sobre los estudiantes y sus propias dificultades. Respecto de éstas últimas, F2 considera que las dificultades principales para el desarrollo del curso tienen que ver con la comprensión –de de los estudiantes- de la lógica de construcción de los conceptos matemáticos y su articulación, sin embargo considera que éstas no tienen su origen en los conocimientos de los formados sino en las condiciones institucionales de la formación, es decir, en lo “intermitente” que resulta el proceso de formación debido a las múltiples actividades extraula que alteran la secuencia del curso. En este sentido, señala, una de las experiencias menos positivas tiene que ver con “… las fracciones, aunque los alumnos ya tienen referentes sobre ellas, hemos encontrado grandes lagunas en comprensión…”. Sin embargo, estas dificultades no representan una preferencia por lo didáctico o lo matemático porque también sus experiencias positivas se relacionan con el contenido matemático, sobre ese respecto menciona que el trabajo con el sistema de numeración es una de sus experiencias más positivas.

Como hemos podido observar, las experiencias de F2 posibilitan la transformación de su representación, en términos generales puede decirse que no ha tenido experiencias que pongan en crisis su ideas sobre la formación, si bien el trabajo con las fracciones le ha planteado dificultades no son un rechazo al texto de saber, son desajustes propios de una transformación paulatina de sus representaciones, ya que también en lo relativo al contenido matemático ubica sus experiencia positivas. Esta afirmación puede justificarse si se menciona que para F2 lo que más ha interesado a los estudiantes es la resolución de problemas y las que menos les han interesado son actividades en las que tienen que leer.

En síntesis, puede decirse que F2 percibe las diferencias entre el viejo y el nuevo plan de formación y los planteamientos de este último corresponden en mayor medida a sus ideas preexistentes. En lo que respecta a las asignaturas donde se incluye la didáctica de las matemáticas, no existen elementos que puedan generar una crisis en el sistema central de su representación, al parecer por esta razón las modificaciones de sus representaciones son parte de una transformación “progresiva”.

3.5.3. La construcción de una nueva significación. Las representaciones de F1

Este formador es el de menor experiencia, apenas tres años como profesor de educación primaria y uno como formador de docentes, el dato es relevante si recordamos que la significación global de una representación está determinada por la memoria histórica, es decir, la estabilidad del sistema central se debe principalmente al tiempo que los elementos de ese sistema han permanecido estables. Siguiendo esta idea puede inferirse que la representación de F1 -sobre la formación de profesores- no tiene una gran estabilidad. Por otra parte, al igual que F2 este formador cursó sus estudios de profesor de educación primaria a través del Plan 84 y también ha terminado una Maestría en Ciencias de la Educación.

Respecto de su percepción sobre los elementos distintivos entre ambos planes, F1 señala que “…el nuevo Plan tiene un mayor acercamiento a la práctica docente y se ha alejado del espíritu de investigación del Plan 84…” En su opinión, esta distinción es un elemento que corresponde a sus ideas prexistentes ya que señala, “…el Plan 97 se ajusta más con mi visión sobre la formación, precisamente porque maneja este nuevo enfoque sobre la didáctica que hace que se pueda tener mayor conocimiento sobre lo que realmente se va a hacer en la escuela primaria...” Un tercer elemento que también se ajusta a sus valores preexistentes es el trabajo de tutoría, sobre ésta señala que “… en la tutoría, los alumnos aprenden más elementos porque tienen la oportunidad de acercarse con las personas que de una forma u otra, les dan los elementos de la experiencia, aquí en la escuela pudiéramos retomar los elementos teóricos y allá, las personas que han vivido más de cerca el grupo les pueden dar mejores alternativas para desempeñar su trabajo...”

Como se puede apreciar, en opinión de F1 no existen elementos del nuevo Plan que desequilibren sus ideas prexistentes sobre la formación, la diferencia ente ambos planes es objetivada a través de un mayor acercamiento a la práctica docente o como él lo señala, por la presencia de la didáctica. Lo mismo puede decirse del trabajo de tutoría, si en el caso de los formadores anteriores había generado desequilibrios de diferente magnitud, para F1 no es así, puesto que con base en su objetivación, a partir de la dicotomía entre teoría (en la escuela normal) y práctica (del tutor) logra "anclar" este elemento en la significación global de su representación. Al igual que F2, en F1 las características del nuevo Plan no suponen desajustes con su sistema central, por ello también podría esperarse una transformación "progresiva". Para intentar consolidar esta afirmación veamos sus opiniones sobre el programa de estudios de las asignaturas en cuestión.

De entrada, F1 considera que los conocimientos que debe construir un futuro profesor son "…los conocimientos sobre los diferentes conceptos matemáticos y el conocimiento didáctico, en sí, cómo se van a enseñar esos conceptos..." sin embargo, señala, estos conocimientos no tienen un equilibrio adecuado en los programas de estudio, éstos "…se enfocan un poquito más a lo que son los contenidos, pero se deja de lado la propuesta de nuevas actividades que se pudieran implementar en la escuela primaria, se manejan algunas situaciones como ver el libro de texto, estudiar el plan y programas de estudio, pero faltan algunas opciones sobre cuál sería la mejor forma de enseñar matemáticas …" Además considera que el programa debería incluir un mayor número de sesiones de práctica puesto que no le parecen suficientes las que se sugieren. Sobre la cantidad de contenidos matemáticos, la secuencia en la que se presentan y las estrategias sugeridas declara que son adecuadas.

Respecto del Plan en general no existen mayores contradicciones, si bien F1 percibe ligeros desajustes, sobre todo en el énfasis del programa sobre lo matemático y el número de sesiones de práctica, no representan una ruptura con la significación global que otorga a la formación, es decir, aunque lo didáctico y la práctica no aparecen con el énfasis o la cantidad deseada, son elementos que forman parte de su sistema central. En otros términos, ajustar su práctica como formador para compensar el énfasis sobre lo matemático o para aumentar las sesiones de práctica, son modificaciones que no representan una transformación de su nudo central. La naturaleza de dichas modificaciones, al parecer, puede advertirse en sus opiniones sobre la experiencia vivida.

Respecto de sus experiencias llama la atención que, al igual que F2, percibe una fractura entre el tiempo legal y el proyecto de enseñanza, ya que señala, "… son muchos contenidos y poco tiempo, por eso los significados de las fracciones no se han dejado de trabajar pero no se ha profundizado totalmente sobre ellos, otros que no se han trabajado bien son los de geometría y procesos de cambio, como son los últimos, no se abarcan…." Otra contradicción tiene que ver con el desajuste temporal entre contenidos y prácticas, en su decir, "…cuando van los alumnos a practicar, digamos que nada más hemos trabajado los números su relación y sus operaciones y hay quienes empiezan a practicar con fracciones o con otro contenido que no se han podido abordar, entonces, tengo que abrir un espacio para esos contenidos aunque cambie la secuencia …" Por otra parte, aunque F1 considera adecuadas las estrategias sugeridas, declara haber incluido algunas diferentes en los casos donde se requieren experiencias informales para comprender mejor un concepto matemático.

Lo destacable de los aspectos anteriores es que en correspondencia con su percepción sobre las prácticas, F1 no ha modificado el número de sesiones de práctica pero sí la secuencia de contenidos con el fin de ajustar el momento de la práctica con el estudio de éstos. Por su parte, la preocupación sobre el acento en lo matemático no ha sido objeto de acciones de este tipo, en su decir, la inclusión de estrategias no sugeridas sólo ha tenido como objetivo consolidar la comprensión de los conceptos matemáticos.

No obstante, su percepción sobre el desequilibrio entre lo matemático y lo didáctico parece verse reflejada en las cuestiones que interesan a los estudiantes y las dificultades para desarrollar el curso. Sobre las primeras menciona que entre las cosas que más han interesado a los estudiantes "… están precisamente, cómo voy a enseñar tal o cual contenido, ya que ellos manifiestan, es una de las principales dificultades, entonces se ha tratado de ver la manera en que se pudiesen manejar con los niños…" De igual manera, las cuestiones que en su opinión les han interesado menos tienen que ver con lo didáctico, sobre el respecto menciona "…cuando se trabaja lo teórico de este nuevo enfoque, sus orígenes, surge un poquito de apatía…" Estas percepciones contrastan con las dificultades que ha tenido para trabajar el curso, sobre éstas menciona, "…hay ocasiones en que no tengo muy claro algún concepto matemático, entonces se me dificulta conocer la naturaleza de ese contenido y cómo poder enseñarlo, específicamente, el de las fracciones, los diferentes significados…"

Como se puede apreciar, mientras que las tareas didácticas son una preocupación fundamental para los estudiantes, las de naturaleza matemática lo son para él, incluso sus experiencias positiva y negativa en el curso se refieren a la reconstrucción de las OM, en el primer caso, señala, se da cuando los alumnos logran comprender el significado del concepto, en el segundo, cuando la confusión ocupa el lugar de la comprensión.

Finalmente, F1 no participó en la capacitación previa ni en cursos formales donde se estudie la didáctica de las matemáticas, de manera que su experiencia como estudiante en el Plan 84 y como formador en el Plan 97 son los únicos momentos mediante los que ha estructurado su representación, por esta razón podemos decir que los elementos constitutivos de su representación no tienen aún una gran estabilidad, lo que le permite modificarlos sin grandes posibilidades de generarle un desequilibrio significativo.

IV. ORGANIZACIONES DOCENTES Y DINÁMICA DE LOS PROCESOS DE ESTUDIO

En este capítulo abordamos el “problema praxeológico del profesor” o mejor dicho del formador: dirigir la reconstrucción de una praxeología docente relativa a los números racionales. Para ello, es necesario partir del sistema de tipos de tareas que se plantean en las aulas para reconstruir un conjunto de *organizaciones matemáticas* y sus correspondientes praxeologías didácticas. Sobre el respecto hemos mencionado ya el sistema de tareas *profesorales* que se sugieren en los programas de estudio.

Para realizar esas tareas, el formador utiliza una serie de técnicas de formación que si bien son propuestas por los programas escolares, pueden aparecer en el salón de clases en número diferente o con características distintas a las que se proponen. Es decir, de las técnicas sugeridas, el formador selecciona y reelabora aquellas que en su opinión le garantizan cierto grado de efectividad. Sin embargo, dicha selección y reelaboración no son arbitrarias, en ocasiones de manera explícita y en otras implícitamente, estas acciones se relacionan con los sistemas mediante los que el formador las argumenta, justifica e interpreta, esto es, están relacionadas con las representaciones sociales de los formadores. Con esta suerte de discursos tecnológicos y teóricos, el formador orienta sus prácticas en las aulas.

Estos discursos son importantes en la medida que permiten al formador adjudicar ciertos beneficios (supuestos o reales) a cierta técnica, a su pertinencia y a su adecuación a las condiciones y particularidades de la situación considerada. Empero, éstas no son una creación sólo individual, su génesis, desarrollo y puesta en marcha, están condicionadas por la institución donde tiene lugar la enseñanza, por la formación del profesor, por sus conocimientos, etc. En síntesis, los discursos tecnológico y teórico que guían la actividad de un formador son generados y determinados por el conjunto de sujeciones que le imponen las diferentes instituciones escolares, científicas y culturales. Por esta razón puede decirse que la actividad del formador es una práctica institucional y como toda práctica social, se estructura mediante un bloque "práctico" (la acción de formar) y un discurso ("logos") que permite justificar, interpretar, guiar y modificar dicha práctica.

En coherencia con estas ideas, en este trabajo se asume que la *praxeología de formación* está constituida por un sistema -relativamente estructurado- de tipos de tareas *T,* de técnicas didácticas τ que permiten realizar esas tareas y del bloque tecnológico-teórico [θ /Θ] que justifica dichas técnicas. También se asume que si bien las prácticas son institucionales, para analizarlas es necesario observar ciertas praxeologías concretas. En este sentido y siguiendo las ideas de Bosch y Gascón (2002), puede decirse que una "praxeología concreta" posee tres características importantes:

a). En primer lugar, se trata de una praxeología *empírica,* existiendo en una institución concreta, en un momento histórico determinado y con unas características y limitaciones particulares. Este carácter contingente de la praxeología, señalan estos autores, permite comprender que contenga elementos históricos y que presente lagunas y redundancias al punto tal que ciertas de sus componentes pueden parecer incoherentes y contradictorias para el observador.

b). En segundo término se trata de una praxeología *espontánea,* de una "ethnopraxeología", ya que las técnicas que la engendran no son necesariamente organizadas a partir de un discurso tecnológico-teórico establecido y sistematizado, que responda a las exigencias de justificación y validación empíricas. Además, puede ser que ciertos elementos de esas prácticas se improvisen y que en ocasiones las justificaciones permanezcan implícitas, especialmente aquellas relacionadas con el nivel tecnológico-teórico.

c). Se trata finalmente de la praxeología *del formador*, porque en ella se incluye el conjunto de tareas en las que él es el principal protagonista, aunque eso no signifique que intente hacerlas de manera autónoma. Esta "personalización" de la praxeología hace que los elementos históricos, las faltas y las contradicciones aparentes que contiene toda praxeología empírica, sean más susceptibles de ser observadas como idiosincrasias (personalidad, carisma, etc.) del actor principal, sin embargo, debe recordarse que la *praxeología didáctica espontánea* de un profesor depende de las sujeciones que éste tiene con las diversas instituciones que ha recorrido, lo que le confiere una individualidad o una unidad particular, sin perder por ello su carácter institucional.

En una primera instancia, las *praxeologías de formación espontáneas* se tomarán como objeto de estudio empírico. Para ello, como se ha mencionado, fue necesario observar todas las sesiones en las que tres formadores intentan reconstruir las praxeologías docentes relativas a los números racionales. Una vez transcritos los videos de cada observación se procedió a dividir cada sesión en episodios, éstos, como lo señalan Bosch, Espinoza y Gascón (2003), permiten realizar una descomposición "intuitiva" del proceso de estudio. Con los registros divididos en episodios, se analizó cada uno de ellos intentando dar cuenta de los tipos de tareas y las técnicas que más frecuentemente se ponen en juego, así como las rutinas invariantes y regulaciones que realizan en el salón de clases. Siguiendo el sentido de tales análisis, en este capítulo analizaremos principalmente la manera en la que los componentes praxelógicos toman su lugar en la *dinámica interna* de cada uno de los procesos de estudio. Las rutinas invariantes y las regulaciones que despliegan los formadores serán el objeto de análisis del siguiente capítulo.

4.1. LA NATURALEZA DE LAS PRAXEOLOGÍAS RECONSTRUIDAS

Mientras que las praxeologías docentes "a enseñar" se encuentran reconstruidas en los programas de estudio, en los materiales escolares y en el texto que sirve como referencia básica para estudiantes y formadores,[153] las praxeologías "efectivamente enseñadas" son reconstruidas en el trabajo que realizan los alumnos y en las prácticas que el formador lleva a cabo en el aula. No obstante lo anterior, las praxeologías "efectivamente enseñadas" dependen de aquellas "a

[153] Nos referimos a *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Taller para maestros*

enseñar", empero, habida cuenta de que el formador selecciona y reelabora las tareas y las técnicas sugeridas en el programa de estudios, las praxeologías "efectivamente enseñadas" no necesariamente coinciden con las primeras, pueden variar tanto en su número, en su naturaleza o en la secuencia con la que son reconstruidas.

4.1.1. Las tareas matemáticas

Recordemos con Chevallard (1998) que las tareas profesorales pueden dividirse en dos categorías dependientes una de la otra. En la primera se contempla *la concepción y organización de los dispositivos de estudio* y la *gestión* de sus respectivos *entornos.* En la segunda se encuentran las tareas de *ayuda al estudio y* en particular, de *dirección de estudio y de enseñanza.* Como parte de estas categorías, señala Chevallard (1998), una de las primeras tareas que debe cumplir el profesor es *reconstruir las organizaciones matemáticas escolares* que aparecen propuestas en los programas oficiales y analizar el grado de profundidad que es pertinente dar a los discursos tecnológico y teórico en una situación de enseñanza.

En correspondencia con las ideas anteriores, una de las primeras tareas del formador es dirigir la reconstrucción de las praxeologías matemáticas incluidas en los programas escolares del nivel en el que se desarrollará profesionalmente el formado. Respecto de dicha reconstrucción, en los procesos de estudio observados hemos podido apreciar 23 tipos de tareas matemáticas diferentes que los formadores utilizan para la reconstrucción de las OM relativas a los números racionales. Los tipos de tareas observados son los siguientes:[154]

T1. Estudio del campo de los números reales (F4)
T2. Estudio de los significados de las fracciones (F1, F3 F4)
T3. Identificar el significado parte-todo en problemas de reparto (F1, F3, F4)
T4. Determinar la relación entre los datos, en los problemas de reparto (F1, F3, F4)
T5. Identificar la fracción como representación de una medida (F1, F3)
T6. Identificar el significado cociente en problemas de reparto (F1, F3, F4)
T7. Ubicar fracciones en la recta numérica (F1, F3, F4)

[154] La clave dentro del paréntesis indica el formador que planteó el tipo de tareas. En los casos que denominamos a la tarea como "el estudio de…", nos referimos a la institucionalización que el formador hace de cierto objeto matemático, por ejemplo en la tarea No. 1 el formador explica lo que son los números reales.

T8. Comparar fracciones (F1, F3)
T9. Determinar los mecanismos del algoritmo de la suma y resta (F1)
T10. Ordenar fracciones (F1)
T11. Comparar problemas (suma, multiplicación y división) (F1)
T12. Calcular la suma de fracciones (F1, F3, F4)
T13. Calcular la diferencia entre dos fracciones (F4)
T14. Estudio de la razón (F4)
T15. Identificar problemas donde la fracción es un operador multiplicativo (F1, F3)
T16. Calcular el producto de dos fracciones (F4)
T17. Calcular el cociente entre dos fracciones (F4)
T18. Plantear problemas donde la fracción funcione como operador multiplicativo (F1)
T19. Resolver problemas utilizando las diferentes operaciones con fracciones (F1, F3, F4)
T20. Identificar los diferentes usos de los decimales (F1, F3)
T21. Determinar las regularidades de un sistema de numeración posicional (F1, F3)
T22. Convertir fracciones comunes a decimales (F1, F3)
T23. Estudio de la equivalencia entre fracciones comunes y decimales (F4)

Aunque estos tipos de tareas se plantean también para reconstruir ciertas praxeologías didácticas, sólo consideraremos su naturaleza matemática ya que como hemos señalado, una de las tareas fundamentales del futuro profesor consiste en reconstruir las OM incluidas en el programa de estudios del nivel donde se desarrollará profesionalmente. En este sentido, recordemos que las OM incluidas en los programas para las escuelas normales son similares en su nivel de complejidad a las que se incluyen en los de la escuela primaria.

Ahora bien, de todos los tipos de tareas observados sólo un número reducido fue planteado en los procesos de estudio de los tres formadores (T2, T3, T4, T6, T7, T12 y T19). Estas tareas que aparecen en los tres procesos de estudio representan una invariante de las praxeologías “efectivamente enseñadas” y como se puede apreciar, principalmente enfatizan tres aspectos de los números racionales: los significados de la fracción, la técnica algebraica (algorítmica) y la aplicación de conocimientos. Por ejemplo las tareas T2[155] enfatizan la reconstrucción de los significados en su conjunto, mientras que la reconstrucción específica de los significados parte todo, medida y cociente se incluye en las

[155] En los tres procesos de estudio observados, las tareas T2 toman la forma de una explicación por parte del formador acerca de los diferentes significados de la fracción. Esta tarea supone una especie de “primer encuentro” con la OM y por lo general, los formadores la plantean antes que cualquier otra.

tareas T_3, T_4, T_5, T_6 y T_7 respectivamente. Las tareas T_{12} enfatizan el trabajo de la técnica para la suma de fracciones y las tareas T_{19} tienen por objetivo evaluar los conocimientos adquiridos a través de la resolución de problemas,

Como puede observarse también, las tareas “comunes” dan mayor énfasis a ciertos momentos didácticos, por ejemplo las tareas ligadas a la reconstrucción de los significados al parecer se corresponden con los momentos del “primer encuentro” y el “exploratorio”, mientras que las tareas referidas a la técnica para la suma de dos fracciones se corresponden con el momento del “trabajo con la técnica”, con este mismo momento se identifican las tareas de resolución de problemas, aunque en este caso también pueden corresponderse con el momento de la evaluación.

En tanto invariantes, las tareas “comunes” nos permiten identificar las cuestiones que resultan fundamentales para los formadores, puede decirse que existen tres cuestiones a las que dan mayor importancia: la reconstrucción de los significados de la fracción; el estudio de la técnica para la suma de fracciones y los problemas para la aplicación de los conocimientos adquiridos.

Sin embargo, es necesario aclarar que cada formador da un peso específico diferente a cada uno de estos aspectos, por ejemplo reconocer los significados de la fracción en diferentes situaciones es una tarea que aparece en las praxeología de los tres formadores, aunque no todos plantean tareas para estudiar el significado operador multiplicativo. Esto significa que si bien los tres formadores consideran el reconocimiento de los significados como un aspecto fundamental del proceso de estudio, es más fuerte la presencia de tareas ligadas a los significados parte todo y medida.

Algo similar ocurre con el trabajo de la técnica, aunque los tres formadores plantean tareas para el estudio de la técnica (algorítmica) para la suma de fracciones, no hacen lo mismo con las técnicas para la multiplicación y la división de fracciones, éstas no son planteadas por los tres formadores, tampoco aquellas que permiten estudiar los decimales. Finalmente, el último aspecto al que remiten los tipos de tareas comunes se relaciona con la utilización de los algoritmos en la resolución de problemas, en este caso los tres formadores parecen dar el mismo énfasis, plantean tareas cuyo objetivo es "aplicar" los conocimientos adquiridos.

En síntesis, las preocupaciones principales que comparten los formadores están relacionadas con el reconocimiento de las situaciones en las que la fracción toma sus significados, con la técnica algorítmica para la suma y resta de fracciones y con la aplicación de los conocimientos adquiridos. Por otra parte, también puede observarse cierta coherencia entre las OM "a enseñar" y las "efectivamente enseñadas" ya que, como se ha visto en capítulos precedentes, los tipos de tareas que se sugieren en los programas de estudio también dan mayor importancia al estudio de los significados de la fracción.

4.1.2. Las tareas didácticas

Debemos recordar que el formador no sólo debe ayudar a reconstruir ciertas praxeologías matemáticas, también debe reconstruir las prácticas didácticas que permitan a los formados aprender a dirigir un proceso. Por esta razón, en lo que sigue presentamos los tipos de tareas didácticas que los tres formadores plantearon en los procesos de estudio que dirigieron.

TD1. Analiza los momentos posibles de un proceso de estudio (F1)
TD2. Identificar la OM de referencia en los dispositivos de estudio (F1, F4)
TD3. Analizar como se dirige un proceso de estudio (F1, F3, F4)
TD4. Identificar las OM en el programa de estudio de la escuela primaria (F1, F3, F4)
TD5. Reconocer las dificultades inherentes a un dispositivo de estudio (F1, F3, F4)
TD6. Analizar las dificultades de los niños cuando utilizan técnicas algorítmicas (F1)

Como se puede observar, sólo dos tipos de tareas (TD3 y TD5) fueron planteadas en los tres procesos de estudio, en el caso de las praxeologías matemáticas la variedad de tareas fue mayor. Sin embargo, recordemos que esta diferencia también se observa entre las praxeologías "a enseñar", por esta razón existe coherencia entre los tipos de tareas que plantearon los tres formadores y las que se sugieren en el "texto de saber", en ambos casos se plantea mayor diversidad en las tareas matemáticas que didácticas

Otro punto destacable son las tareas “comunes” (TD3 y TD5), si las consideramos como un elemento invariante en la práctica de los tres formadores, puede decirse que sus preocupaciones sobre las praxeología didácticas giran en torno a dos aspectos: reconocer las dificultades que pueden generar ciertos dispositivos de estudio y conocer el proceso de ayuda al estudio. Dichas preocupaciones también son coherentes con las praxeologías didácticas “a enseñar”, las dificultades de los niños en tareas referidas a los racionales y el desarrollo y análisis de un proceso de estudio concreto, son temáticas que se plantean en los programas de estudio de la asignatura. En este mismo sentido es destacable que el reconocimiento de las OM incluidas en los programas de la escuela primaria no sea una tarea “común” aun cuando en los programas para la formación se haga énfasis en este tipo de tareas.

Si analizamos los tipos de tareas “comunes” (matemáticas y didácticas) se puede observar la relatividad de la praxeología docente “efectivamente enseñada”, es decir, si ponemos en relación las tareas matemáticas y didácticas “comunes” tendríamos un proceso de estudio con ausencias notables. Por ejemplo las tareas “comunes” no contemplan las tareas para identificar el significado operador multiplicativo, tampoco para la concepción y selección de dispositivos de estudio, para reconocer las organizaciones matemáticas en los programas de la escuela primaria, para la planeación de un proceso de dirección del estudio y además, este proceso de estudio reduciría el trabajo de la técnica sólo al algoritmo de la suma. Lo que estas ausencias nos dicen es que entre los formadores observados, por lo menos existe uno que ha reconstruido una praxeología docente incompleta

No obstante, estas ausencias son producto de la relación entre las decisiones de cada formador y las restricciones generadas en los distintos niveles de la jerarquía de codeterminación didáctica, por esta razón, las selecciones que realizan los formadores sólo pueden comprenderse si se analizan también dichas restricciones. Además, el conjunto de tareas “comunes” sólo puede considerarse como la parte invariante de las prácticas de estos tres formadores, cuestión que nos obliga a recordar que todo proceso de estudio también adquiere cierta singularidad determinada por la manera en la que las sujeciones institucionales influyen en los sujetos de la formación.

Respecto de las particularidades, hemos podido observar que cada uno de los formadores, además de los tipos de tareas enunciados, añade otros que no son sugeridos en los programas y además, las tareas "comunes" cobran cierta singularidad, es decir, aunque todos los formadores planteen un mismo tipo de tarea, cada uno lo hace en un momento específico del proceso de estudio, dándole un matiz particular, incluyéndolo en un lugar diferente de la secuencia de tareas, en una cantidad diferente de ocasiones o trabajándolo mediante distintos momentos didácticos.

En síntesis, entre las tareas "comunes" y la particularidad de cada proceso de estudio existe un sinfín de decisiones y técnicas didácticas que confieren su particularidad a cada uno de los procesos de estudio observados, aunque como se ha señalado, estas diferencias no representan la idiosincrasia del formador o su personalidad como individuo, son prácticas (o praxeologías) sedimentadas históricamente moldeadas por la determinaciones institucionales, por esta razón, más que representar prácticas individuales, son praxeologías en las que lo individual se articula con las determinaciones institucionales. Precisamente, para analizar dicha articulación, en lo que sigue analizaremos las dinámicas que cada formador establece en cada uno de los procesos de estudio.

4.2. LA DINÁMICA DE F4. BAJO LA INFLUENCIA DEL MODELO CLÁSICO

Antes de analizar el proceso de estudio que dirige F4, es necesario identificar los tipos de tareas que plantea para reconstruir las praxeologías docentes relativas a los números racionales, estos tipos de tareas nos muestran la praxeología "efectivamente enseñada".

4.2.1. La praxeología "efectivamente enseñada". La ruptura con los mandatos curriculares.

En correspondencia con las orientaciones curriculares, como se puede ver en el siguiente enlistado, F4 plantea tareas de naturaleza matemática y didáctica[156].

- T1. Estudio del campo de los números reales
- T2. Estudio de los significados de las fracciones
- T3. Identificar el significado parte-todo en problemas de reparto
- T4. Determinar la relación entre los datos, en los problemas de reparto
- T6. Identificar el significado cociente en problemas de reparto
- T7. Ubicar fracciones en la recta numérica
- T12. Calcular la suma de fracciones
- T13. Calcular la diferencia entre dos fracciones
- T14. Estudio de la razón
- T16. Calcular el producto de dos fracciones
- T17. Calcular el cociente entre dos fracciones
- T19. Resolver problemas utilizando las diferentes operaciones con fracciones
- T23. Estudio de la equivalencia entre fracciones comunes y decimales
- TD2. Identificar la OM de referencia en los dispositivos de estudio
- TD3. Analizar un proceso de dirección de estudio
- TD4. Identificar las OM incluidas en el programa de estudio de la escuela primaria
- TD5. Reconocer las eventuales dificultades que plantea un dispositivo de estudio

Existe cierta coherencia entre la OM "a enseñar" y la "efectivamente enseñada", en ambas se incluye el estudio de los significados de la fracción el de las estructuras algebraicas y de la utilización de las fracciones y decimales. Para identificar los significados de la fracción, F4 plantea tareas T2, T3, T4, T6 y T7.

El objetivo de las tareas T2 es identificar globalmente los diferentes significados de la fracción, mientras que el objetivo de las T3, T4, T5 y T6 es reconocer significados particulares de la fracción (parte-todo, medida y cociente). Empero, no se plantean tareas para estudiar el significado operador multiplicativo, por esta razón la praxeología reconstruida por F4 queda incompleta, aunque al parecer, mediante el tipo de tareas T14 se intenta paliar esta omisión. Otro hecho destacable tiene que ver con los decimales, su estudio se reduce a una sola tarea (T23), algo similar ocurre con el significado medida que se reconstruye sólo mediante la tarea T7.

[156] Como se ha señalado, la naturaleza matemática de un tipo de tareas, no significa que sólo se planteen con el objetivo de reconstruir las praxeologías matemáticas, también pueden ser tareas para el estudio de cuestiones didácticas. Este doble objetivo será analizado cuando se describa la dinámica del proceso de estudio.

Más que una praxeología incompleta lo que parece haberse reconstruido es una OM reducida[157], si bien en términos generales F4 plantea los tipos de tareas sugeridos en los materiales curriculares, en algunos casos el estudio de cierto elemento se desarrolla solamente mediante una tarea. Un ejemplo de tal reducción es la sustitución del estudio del significado operador multiplicativo por el de razón, otro es la reducción del estudio del significado medida a la ubicación de puntos en la recta numérica y finalmente, desarrollar el estudio de los decimales mediante la equivalencia entre fracciones comunes y decimales, al parecer también es una reducción de las orientaciones curriculares.[158]

De entrada podría considerarse que esta reducción es un efecto de las restricciones que impone el tiempo legal de la enseñanza, sin embargo, al analizar la estructura general de la OM "efectivamente enseñada", pueden observarse rasgos que permiten pensar la reducción como un efecto de las restricciones que impone la *ideología escolar dominante*. Frente a un proceso de estudio -sugerido por los materiales curriculares- que enfatiza los momentos exploratorios para identificar los significados de la fracción, F4 plantea un proceso de estudio -común en la cultura escolar- que da mayor importancia a las estructuras algebraicas de la fracción y a las operaciones con ellas. Esta restricción parece operar en este caso, puesto que la reducción de las tareas sobre los significados de la fracción se acompaña con un número importante de tareas para el estudio de la estructura algebraica y las operaciones (T_{12}, T_{13}, T_{16} y T_{17}).

En este contexto resultan relevantes las tareas T_{19} que permiten "aplicar" los conocimientos "algorítmicos" en la resolución de problemas, a pesar de que los discursos que justifican las técnicas para operar con los algoritmos se encuentren ausentes. De manera que aún con la importancia que se le da a las tareas "algorítmicas", éstas se plantean sólo en el nivel de lo práctico.

Finalmente, otras tareas –no sugeridas en el programa- que permiten comprender las elecciones de F4 son las T_1. Mediante éstas, F4 intenta plantear

[157] Hablamos de una praxeología incompleta cuando no se plantean tareas referidas a alguno de sus elementos, y de "reducida" cuando el estudio de un elemento se realiza con una sola tarea.
[158] Este tipo de tareas relativas a los decimales es sugerido en el propósito número 5 del programa de estudios.

una “razón de ser” para la praxeología estudiada, esto es, generar un discurso que ayude a comprender el sentido de dicha praxeología. No obstante, el intento fracasa porque pasa por alto un aspecto importante, la naturaleza de la praxeología “a enseñar” es docente y sus “razones de ser” más que matemáticas deben ser didácticas. El planteamiento de este tipo de tareas, al parecer es un intento por reconstruir lo que en opinión de F4, es “verdaderamente” matemático: la pertenencia de los racionales a los reales.

Respecto de las tareas didácticas, puede observarse que existen grandes similitudes entre las praxeologías “efectivamente enseñada” y “a enseñar”, las tareas que se proponen en los materiales curriculares son las mismas que plantea F4. Sin embargo, la comprensión, detección y prevención de los errores que cometen los alumnos es una tarea que F4 mantiene en el nivel de la planeación, los estudiantes analizan los eventuales errores de los niños, pero no las tareas realizadas por éstos.

En síntesis, la OD “efectivamente enseñada” se caracteriza por dos tipos de restricciones, se plantean tareas que corresponden a las orientaciones curriculares pero se da mayor énfasis (no sugerido) al trabajo con las estructuras algebraicas y, en lo que corresponde a las tareas didácticas, F4 cumple los mandatos curriculares aunque privilegia sólo el momento de la planeación. Por estas razones la praxeología docente “efectivamente enseñada” no incluye todos los elementos que se plantean en la OD “a enseñar”, puesto que se da un énfasis no sugerido a los procesos algebraicos y se plantea el análisis de las dificultades de los niños, revisar tareas realizadas por éstos.

4.2.2. La *dinámica interna* del proceso de estudio. La institucionalización como momento privilegiado

Analicemos ahora el proceso de estudio dirigido por F4, el objetivo es comparar las relaciones que se establecen entre los diferentes momentos didácticos de un proceso de estudio, esto es, a relación entre *la dinámica interna de los* momentos didácticos y el proceso efectivamente vivido.

Desde la perspectiva de la TAD, al iniciar cualquier proceso de estudio se requiere un *primer encuentro con la organización praxeológica* que está en juego. En este caso, dicha praxeología se delimita claramente en los materiales curriculares, la OD "a enseñar" se constituye mediante tres elementos fundamentales: los significados de la fracción, su estructura algebraica, sus diferentes usos y lo errores que cometen los niños al trabajar con los racionales. F4 gestiona un primer encuentro con la OD mediante una técnica basada en "la presentación del curso", en ésta, como puede verse en el siguiente fragmento, presenta los propósitos del curso y busca integrar los elementos que se incluirán en el estudio de esta praxeología.

> M: Bien comencemos entonces con lo que es el bloque II en el libro "Las matemáticas en la escuela primaria", ahí vemos el nombre de nuestro curso que es..., ¿Cómo se llama? (silencio), las matemáticas y su enseñanza. Vamos a ver el tema de las fracciones (escribe en el pizarrón "los números racionales"), ¿Qué recuerdan sobre los números racionales? ¿Cuáles son? (silencio) ¿Con qué otro nombre conocemos a los racionales?
> As: Fraccioneees (a coro)
> M: Entonces escribimos "números racionales o fracciones". ¿Qué recuerdan sobre eso?
> A: Son los números donde se encuentra uno sobre otro
> M: Que se encuentra uno sobre otro, ¿Qué mas?
> A: Son los números de la forma A sobre B (leyendo)
> M: Vamos a puntualizar algunas cosas, el programa marca cinco propósitos. El primero,
> *1. Conozcan los diferentes significados que puede tener una fracción y los problemas que se generan con ellos*
> M: ¿Recuerdan ustedes algún significado de las fracciones?
> A: El reparto
> A: Como parte de un entero (leyendo)
> M: Propósito No. 2 (escribe)
> *2. Utilicen adecuadamente las fracciones y los números decimales, al comunicar o interpretar cantidades o al operar con ellos.*
> M: La idea básica de este propósito ¿Cuál es? (silencio) si en el primero eran los significados, ¿Éste a qué se refiere?
> As: Saber utilizarlos (a coro)
> M: Sí, la utilización, una vez que queden claros…
> As: Los diferentes significados (a coro)
> M: Siguiente propósito (escribe)
> *3. Reflexionen sobre la estructura algebraica de los números racionales*
> M: Son las estructuras simbólicas del lenguaje matemático. Bien, el siguiente (escribe)
> *4. Conozcan los aspectos relativos a las fracciones y los decimales que se estudian en cada grado de la escuela primaria*
> M: ¿Qué es lo que se destaca en este propósito? (silencio)
> A: La relación que existe entre las fracciones y los decimales

M: Correcto, esta es una idea y todo esto relativo a ¿qué?
A: A la escuela primaria
M: Bien entonces acá estamos estudiando las cuestiones propias de los significados de las fracciones (señala el propósito 1) como escuela superior para la formación de maestros y acá (señala el propósito 4) necesitamos revisar los materiales de la escuela primaria, ¿si? El quinto y último propósito (escribe en el pizarrón)
5. Conozcan, prevean y comprendan algunos errores frecuentes que cometen los niños al trabajar con las fracciones
M: ¿Qué es lo destacado ahí? (silencio)
A: Encontrar las dificultades ¿no?
M: Identificar los errores en el proceso de aprender las fracciones, acuérdense, aprendan a distinguir (escribe “error”) errores por descuido a diferencia de ¿Cuál será el otro error?
A: De cálculo
M: El cálculo y el procedimiento, si les faltan alguna de estas dos cosas yo lo definiría como error por diferencia conceptual, en pocas palabras sería un error conceptual, puede ser que lo esté entendiendo diferente o que simplemente no lo entiende y si no entiende como se hace la operación de dividir el niño con toda seguridad tendrá...
A: Errores
M: Un error conceptual, por eso es necesario distinguir los tipos de errores. No es lo mismo si nada más se le pasó escribir un número o un símbolo por otro.

Como se puede observar, este primer encuentro no se propone reconocer la organización praxeológica de referencia en al menos uno de los tipos de tareas en los que se le puede encontrar, busca más bien precisar lo que es la praxeología docente “a enseñar” y los elementos que serán integrados en su estudio. Más que un momento del primer encuentro o exploratorio, F4 plantea una institucionalización.

Aunque en el sentido estricto la institucionalización debería precisar lo que es la praxeología reconstruida, como ésta no existe todavía, puede decirse que es un momento de institucionalización *a priori*. Esta pretensión institucionalizadora puede advertirse cuando luego de enunciar cada propósito, F4 pide a los alumnos que recuerden algunos elementos de esta praxeología, en el caso de los significados de la fracción precisa la relación parte-todo y en el de los errores de los alumnos una tipología de errores (de procedimiento, de cálculo y conceptuales), a decir de F4 ambos son elementos que deberán ser estudiados durante el proceso.

Otro objetivo que al parecer persigue este primer encuentro es el reconocimiento de las “razones de ser” de esta praxeología, encontrar una razón que justifique el estudio de la OD puesta en juego. Lo anterior puede observarse cuando F4 menciona el propósito ligado al análisis de los programas de la escuela primaria, en este momento F4 señala que los propósitos 1, 2 y 3 consideran a los profesores en formación como alumnos y el propósito No. 4 como eventuales profesores, con esto, el formado tendrá una “razón de ser”, una justificación para estudiar las OD relativas a los números racionales.

Sin embargo, ¿Por qué F4 ha seleccionado esta técnica para gestionar el primer encuentro con la OD? o, ¿Cuál es el discurso tecnológico y/o teórico (implícito) que justifica tal elección? De entrada, recordemos que las técnicas de formación no son elecciones arbitrarias, están orientadas por su experiencia y por una serie de restricciones surgidas de los diferentes niveles de la jerarquía de codeterminación didáctica.

Sobre la manera de gestionar el primer encuentro, al parecer operan restricciones del nivel pedagógico que surgen “…de la aceptación, por parte de la cultura escolar, de determinados *mitos o prejuicios pedagógicos*. El principal de ellos es el que da por supuesto que existe un ámbito de lo “pedagógico” *independiente* de lo “matemático”…” (Chevallard, 2001). Bajo esta lógica, la elección de F4 parece orientarse por la cultura escolar, específicamente por la creencia de que “antes de comenzar un curso los estudiantes deberán saber qué es lo que estudiarán y para qué lo estudiarán”. Sin embargo, aún aceptando esta justificación queda todavía una decisión sin comprenderse, si la intención de F4 era determinar la OD a estudiar e integrar ciertos elementos a esta OD, ¿Por qué no tomar a su cargo toda la responsabilidad de la institucionalización? ¿Por qué apelar para ello al recuerdo de los estudiantes? y ¿Por qué dejar de integrar algunos elementos de la OD?

Esta decisión también parece ser objeto de una restricción propia del nivel pedagógico, en la cultura escolar dominante circula un discurso “constructivista” que enfatiza la importancia de tomar en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes antes de iniciar un proceso de estudio. En correspondencia con este mito, una técnica que -supuestamente- permite identificarlos, tiene que ver con establecer contratos didácticos donde el *topos* del profesor exige interrogar a los alumnos sobre aquello que conocen de la praxeología puesta en juego. Así, la institucionalización *a priori* en tanto primer encuentro con la OD, es una estrategia que –supuestamente- despliega su efectividad en tres sentidos: se precisa la OD "a estudiar" integrando sus elementos consustanciales; se otorgan las "razones de ser" de la OD y; se identifican los conocimientos previos de los estudiantes sobre la OD "a estudiar".

No obstante estos supuestos, la institucionalización *a priori* no ha demostrado su efectividad, por un lado no se han integrado todos los significados de la fracción dada la complejidad de la OD, por otro, como los estudiantes responden consultando su libro de texto poco puede saberse acerca de sus conocimientos previos y finalmente, las "razones de ser" sólo enfatizan la naturaleza didáctica de la OD, nada dicen sobre la "razón de ser" matemática que justificaría su estudio.

Al parecer la última dificultad da pie para plantear la siguiente tarea (T_1) que se gestiona nuevamente a través de un momento de institucionalización, en este momento se "muestra" la definición de los números reales y algunas de sus propiedades. Esta institucionalización es un intento por romper con el "autismo temático"[159] inscribiendo el tema de los racionales en sector de los campos numéricos.[160] Hasta aquí F4 no ha gestionado momentos del primer encuentro porque el proceso de estudio no se ha iniciado como tal, sólo se ha presentado el curso.

Para iniciar el estudio de uno de los elementos de la OD (los significados de la fracción), F4 plantea una tarea T_2 que gestiona mediante una estrategia cultural,

[159] A decir de Chevallard (2001), en términos generales puede observarse un « abandono » por parte del profesor de los niveles superiores de la OD, lo que provoca un retraimiento de su acción al nivel de los temas. Este encierro constituye un fenómeno didáctico, el "autismo temático" del profesor que se relaciona con el estatuto del profesor y su consideración cultural como oficio de "bajo nivel".

[160] No obstante que las tareas T1 tienen por objetivo romper con el "autismo temático", en el proceso dirigido por F4 éstas se orientan hacia la explicación de que la división de un entero entre cero tiende al infinito, dicha explicación se hace en el contexto de la trigonometría y en el de la aritmética.

en ésta, como se puede observar en el siguiente fragmento, también se privilegia el momento de la institucionalización.

> M: Bien tenemos entonces la definición de números racionales, algo que necesitan para resolver los problemas, lo vamos a puntualizar ahora, son los conceptos (escribe) de los *significados de las fracciones*, son varios libros y los manejan de distintas maneras, yo los he resumido en varios (escribe 1. *Como parte de un entero*)
> Esto es lo que más comúnmente se maneja en la escuela primaria no se manejaba, y así representamos la fracción $^{2}/_{3}$ y entonces lo más común era esto, una figura dividida en ¿cuántas partes? (dibuja un diagrama circular dividido en tres partes iguales e ilumina 2 partes)
> As. En 3
> M: Otro de los significados es (escribe 2. *Como parte de un conjunto*). Entonces tomaremos un conjunto de 2 elementos, tomamos la tercera parte de 12 , háganlo, $\frac{1}{3}$ de 12, ¿a cuánto equivale?
> As: A 4
> M: Equivale a 4. Otro de los significados como…
> As: Un número decimal (leyendo)
> M: Como un número decimal, tenemos ½ que equivale a dividir 1 entre 2 igual a punto…
> As: Cinco
> M: Otro significado, bueno los libros varían en la categorización de estos temas, lo otro que tenemos es…
> As: Como una razón (leyendo)
> M: Como una razón. Aquí en matemáticas ¿cómo entendemos una razón?
> As: Cociente de dos números (leyendo)
> M: Como la comparación, en el libro vamos a encontrar de distintas maneras según el contexto en el que están planteados los problemas, por ejemplo como comparaciones de segmentos. Definimos, la razón, es la comparación de segmentos, por ejemplo, comparar el 4 con el 2, ¿cuánto es el 4 comparado con el 2 y a la inversa?
> As: Dos, el doble
> M: ¿Y el dos comparado con el 4?
> As: La mitad
> M: Sí es la mitad, ese sería el otro significado de las fracciones, nos faltarían dos aunque el último que les voy a mencionar se usa muy poco. Otro es como porcentaje, por ejemplo el 15%, si lo representamos como una fracción es…
> As: 15 sobre cien
> M: 15 sobre 100, un significado más que solamente aparece en las calculadoras, lo maneja Peterson como un signo matemático para representar el inverso multiplicativo. Este no viene en sus libros pero hay que tenerlo en cuenta, entonces, como hemos usado a y b para la expresión de los racionales tenemos entonces que bx = a, despejamos la x y tenemos
> As: a sobre b
> M: Sí, a eso el autor de este libro lo define como simbología matemática de los racionales
> As: Es el despeje ¿no?
> M: Sí es el despeje y es propiamente una simbología matemática que se ve en distintos cursos de matemáticas pero no para la escuela primaria.

Sustituir los momentos del primer encuentro y exploratorio por la institucionalización es una acción orientada por un discurso tecnológico (implícito). Como los materiales curriculares sugieren reconstruir la praxeología a través de la resolución de problemas, F4 supone que "los estudiantes necesitan conocer ciertos elementos antes de iniciar la resolución": la definición de números reales y los significados de la fracción. Esta selección opera bajo una restricción de la disciplina, es decir, existe un modelo epistemológico para las matemáticas (ligado al "Euclidianismo") desde el cual se asume que la actividad matemática se construye otorgando definiciones, axiomas, principios y teoremas para que el resto fluya "fácilmente" (Bosch y Gascón, 2002). Bajo este modelo el papel del profesor consiste en dirigir el trabajo de construcción teórica (fundado sobre el momento tecnológico-teórico) y dejar al alumno la responsabilidad de los otros momentos.

Otro aspecto relevante es que mediante la tarea T_2 se realiza una modificación a la OD "a enseñar", en lugar de institucionalizar los significados parte-todo, medida, cociente y operador multiplicativo, F4 integra los significados parte-todo, parte de un conjunto, número decimal, razón, porcentaje y representación simbólica para el inverso multiplicativo. En correspondencia con las restricciones observadas, la siguiente tarea (T_3) se gestiona mediante la homología y en ella se desarrollan momentos de exploración (cuando los estudiantes intentan resolver el problema) y tecnológicos-teóricos (cuando se explican las razones por las que dos fracciones son equivalentes).

No obstante, la homología queda incompleta, aunque F4 institucionaliza la técnica para resolver el problema, no precisa el elemento de la OD implicado en la tarea, es decir, el significado parte todo. Al parecer, esta ausencia debe cubrirse con la institucionalización *a priori* y, como sólo han surgido esbozos de una técnica efectiva, las siguientes tareas (T_3 y T_4) enfatizan el momento del trabajo con la técnica[161]. En el momento de la evaluación de estas tareas F4 constata una alta tasa de fracaso, por lo que decide tomar a su cargo su resolución.

[161] Las tareas T3 y T4 son planteadas para trabajar en casa, por esta razón, en la escena pública de la clase sólo se gestiona la evaluación.

No obstante el fracaso en las tareas T3 y T4 (Identificar el significado parte-todo en problemas de reparto y determinar la relación entre los datos, en los problemas de reparto) y que el significado parte todo no ha sido precisado, F4 continúa con el estudio de otro elemento. Para ello plantea una tarea T23 (Estudio de la equivalencia entre fracciones comunes y decimales) y gestiona un solo momento didáctico; la institucionalización.

En el momento de la institucionalización F4 explica la técnica para convertir fracciones a decimales y la diferencia entre los decimales periódicos y no periódicos[162], con esto cierra el estudio de los decimales y enseguida plantea tareas (T6) para el estudio del significado cociente. Esta decisión es significativa si advertimos que en los dos momentos de institucionalización el significado no ha sido precisado. Otro dato relevante es que la tarea T6 es gestionada mediante un momento exploratorio y uno de institucionalización, en éste último se precisa la técnica (reparto mediante la división) pero no el significado estudiado, esto es, no se precisa que en este tipo de tareas la fracción puede tener un doble significado, parte-todo o cociente. Hasta este momento algunos significados han sido institucionalizados (parte de un conjunto, razón, porcentaje y representación del inverso multiplicativo) sin encontrarlos en las tareas planteadas, sin embargo, las T6 representan el final del estudio de los significados de la fracción.

Para gestionar un momento de evaluación acerca de los significados, F4 establece un contrato basado en la mayéutica socrática[163], interroga a los estudiantes sobre los significados estudiados. Sin embargo ante la alta tasa de fracaso gestiona un nuevo momento de institucionalización, en éste sólo aparecen los significados parte-todo y parte de un conjunto[164]. Así, los significados del número decimal, la razón, el porcentaje y la representación simbólica del inverso

[162] En momentos ulteriores del proceso de estudio, F4 plantea problemas en los que se incluyen números decimales, sin embargo, éstos se plantean como momentos con el trabajo de la técnica (no explorada) y de evaluación

[163] "Conforme a este contrato, el profesor escoge preguntas de las cuales el alumno pueda encontrar las respuestas con sus propios recursos. Las preguntas se modifican en función de las respuestas del alumno…" (Ávila, 2001, p. 34)

[164] Aunque hasta este momento no se han planteado repartos con colecciones discretas, lo que implicaría al significado parte de un conjunto, F4 señala que, "…en el problema 3 galletas entre 5 niños, estamos repartiendo conjuntos, entonces hemos trabajado aquí el significado, como parte de un conjunto…" (Registro correspondiente a la tercera sesión)

multiplicativo o los de cociente, medida y operador multiplicativo, quedan fuera del proceso de estudio al menos hasta esta fase.

Una vez que los significados de la fracción han sido estudiados, se inicia el estudio de una OD, la relación entre noción matemática y dispositivos de estudio. Para ello F4 plantea tareas TD2 que gestiona ocupando un doble *topos*: interroga a los estudiantes acerca de los elementos de la OM incluidos en dichos dispositivos y justifica las respuestas de los formados. Más que de exploración o del primer encuentro, este momento corresponde a la evaluación, ya que en este momento se comprueba la capacidad de los estudiantes para identificar los significados de la fracción.

Siguiendo con el estudio de elementos didácticos, en la cuarta sesión F4 plantea una tarea TD3 para analizar la dirección de un proceso de estudio, sin embargo la gestión fracasa por dos razones: la mayoría de los procesos de estudio que dirigieron los formados no tienen relación con los números racionales y el único proceso de dirección analizado enfatiza sólo aspectos relativos a la disciplina de los niños. Por estas razones no se analizan los dispositivos utilizados ni la gestión didáctica de sus entornos, F4 saca la tarea de la escena pública y la deja como trabajo para casa, en lo sucesivo no sería analizada en la escena pública de la clase.

Para continuar con el estudio de lo didáctico F4 plantea tareas TD4 que gestiona mediante un momento de exploración-evaluación, esto es, plantea un esquema donde registra los elementos de la OM de referencia (noción de fracción, comparación de fracciones, equivalencia de fracciones, etc.) y pide a los formados ubicar en él cada uno de los temas que se incluyen en el programa de la escuela primaria. Podría decirse que éste es un momento exploratorio, sin embargo como la tarea se cumple colectivamente y la actividad es dirigida por F4, funciona más bien como momento de evaluación en el que se verifica lo que se ha aprendido. Lo significativo en este momento es la inclusión del libro “Alfa” [165] para integrar

[165] Este texto es un libro comercial que la casa editorial recomienda como complemento didáctico para los alumnos de la escuela primaria, generalmente es utilizado en las escuelas privadas.

elementos de la OD que no habían sido institucionalizados, entre otros, los significados razón, porcentaje[166] y el tema de razones y proporciones.

Así, el rompimiento con la OM "a enseñar" se ha consumado por una doble vía, se abandonan los significados medida, cociente y operador multiplicativo para dar su lugar a los de razón y proporción, y por el otro, se abandonan las tareas sugeridas en el programa para dar lugar a las que propone el libro "Alfa". Esta ruptura se concretiza en la quinta sesión donde todo el tiempo se destina a resolver los "ejercicios" del libro "Alfa", éstos corresponden a las tareas T_7, T_{12}, T_{13}, T_{16}, T_{17} y T_{19}. En correspondencia con el modelo epistemológico basado en el "Euclidianismo", los ejercicios del libro "Alfa" siguen siempre una misma secuencia: 1). Se dan las definiciones correspondientes al tema; b). Se explica la manera en la que funciona la técnica; c). se presenta un problema resuelto mediante la técnica explicitada; d). Se plantean "ejercicios" para que los resuelvan los estudiantes y, e) se plantean problemas para resolver.[167]

Por el lugar que ocupan los ejercicios del libro "Alfa" dentro del proceso de estudio, podemos decir que con su inclusión F4 busca cumplir tres objetivos: estudiar la estructura algebraica de los racionales; establecer un momento para el trabajo con las técnicas e; integrar los elementos de la organización matemática que no se han estudiado por las diferentes restricciones

Ahora bien, en tanto "ejercicios", podría pensarse que las tareas del libro "Alfa" son también un momento de evaluación, sin embargo, a pesar de que en el libro se explica la técnica para resolver cada tipo de problemas, cuando F4 percibe que los formados tienen dificultades para resolver alguna tarea, toma a su cargo la explicación de la técnica y del discurso tecnológico que la justifica. Bajo esta lógica, la evaluación se articula con momentos de institucionalización en los que aparecen por primera vez las tareas T_{14}, el porcentaje y las técnicas para operar con fracciones y decimales.

---

[166] No obstante que la razón y el porcentaje son señalados por F4 como significados de la fracción, en el libro "Alfa´" sólo aparecen como temas de los números racionales.
[167] Durante esta sesión y las posteriores, los alumnos resolverán más de cien ejercicios de este libro, entre los cuales se destacan: la ubicación de puntos en la recta, la identificación de la parte sombreada en ciertas figuras, la identificación de fracciones equivalentes, la suma, resta, multiplicación y división de fracciones, etc.

En síntesis, todo este trabajo con la técnica se gestiona mediante explicaciones “a la medida”, es decir, F4 institucionaliza la técnica o el discurso tecnológico cuando los alumnos la solicitan o cuando observa una alta tasa de fracaso en un ejercicio. Por esta razón, es difícil dilucidar el momento didáctico al que se da más énfasis en este caso, ya que estas tareas se utilizan para la evaluación, para la constitución del entorno tecnológico y para la institucionalización. Sin embargo, el objetivo de F4 resulta claro; cubrir las ausencias del proceso de estudio permitiendo que los formados resuelvan problemas donde estén involucradas las fracciones y los decimales.

Si lo vemos de esta manera, sólo restaría que F4 cumpliera con uno de los propósitos del curso, analizar las dificultades que los niños tienen al utilizar los racionales. Para estudiar este elemento, en la sexta sesión F4 plantea una tarea TD5 en la que ocupa el *topos* que lo ha caracterizado, es él quien valida las respuestas de los estudiantes mientras éstos revisan algunas lecciones del libro y enuncian las dificultades que tendrían los niños para resolverlas. Finalmente, en la séptima sesión F4 gestiona un momento para la evaluación de la OD “efectivamente enseñada”, solicita a los formados la elaboración de un escrito donde enuncien todo lo aprendido durante el curso, la tarea no se cumple durante la sesión, se deja como trabajo para casa pero en lo sucesivo no aparece en la escena pública de la clase. Con ello el proceso de estudio de la OD relativa a los racionales ha concluido.

4.2.3. Las restricciones en el proceso de estudio.

Una de las restricciones que determinan la dinámica del proceso dirigido por F4, tiene que ver con el “autismo temático”, éste se manifiesta cuando “… las cuestiones matemáticas que se proponen para ser estudiadas en la escuela, nacen y mueren únicamente en el nivel *temático* y sólo se conectan nominalmente a los niveles superiores de organización (sectores, áreas y disciplina)…” (Bosch, Espinoza y Gascón, 2003, p. 117).

Cuando opera esta restricción se piensa que es importante estudiar una praxeología porque resulta relevante sólo en el contexto escolar, con esto, las razones que sostiene la sociedad o la pedagogía no son percibidas, esto es, las “razones de ser” que se construyen en los niveles superiores de la OD son abandonadas por el formador para “encerrarse” solamente en el nivel temático. Esta restricción permea todo el proceso de estudio dirigido por F4, un ejemplo de ello es que no se plantearon tareas para planear o evaluar la dirección de proceso de estudio e incluso hubo significados que sólo aparecieron en momentos de institucionalización.

A pesar de que F4 intenta escapar de esta restricción mediante el estudio de los números reales, los diversos elementos estudiados no se conectaron entre sí o con otros elementos de la OM estudiada, se estudiaron sólo como cuestiones puntuales sin relación con la praxeología global. La reducción del estudio de los decimales a la equivalencia con las fracciones comunes es un ejemplo de ello, otro, las tareas didácticas no incluyeron un discurso que justificara las técnicas empleadas, tampoco lo hubo para conectar estas tareas con la “razón de ser” de esta praxeología. Sin estos discursos, estudiar los elementos de las OM incluidas en los programas de estudio de la escuela primaria o los eventuales errores que cometen los niños en determinadas tareas, son acciones que responden a una cuestión puntual pero dejan de lado la “razón de ser” de esta praxeología, es por ello que en este proceso de estudio pudimos observar los siguientes efectos

- La imposibilidad para dar respuesta a cuestiones tecnológicas que surgen a lo largo de la actividad, en particular de justificar los significados de la fracción que no aparecen en la OM “a enseñar”.
- El carácter auto tecnológico que se adjudica a la mayoría de las técnica utilizadas, esto es, plantearlas como si fueran transparentes y no requirieran ningún tipo de justificación, excepto que funcionan.
- La imposibilidad de integrar el trabajo realizado con la OM a las tareas de naturaleza didáctica.
- La imposibilidad de articular las tareas de naturaleza didáctica con un discurso tecnológico y con la dirección de un proceso de estudio concreto.
- La imposibilidad para institucionalizar y evaluar de manera global la OD reconstruida.

Las restricciones del nivel de la pedagogía también influyen en la praxeología espontánea del formador a través de ciertos mitos pedagógicos que refuerzan el “autismo temático”. Entre los prejuicios que han orientado este proceso de estudio se encuentran los siguientes:

- La resolución de problemas es una vía adecuada para reconstruir las OM, sin embargo, antes de que los estudiantes se enfrenten a los problemas deberán conocer ciertos elementos de la OM que les permitan comprenderlos y resolverlos.
- Los conocimientos previos de los estudiantes son elementos que deben tomarse en cuenta, para identificarlos sólo basta con interrogar a los formados antes de gestionar un momento del primer encuentro.

Finalmente, las restricciones del nivel de la disciplina dependen del *modelo epistemológico dominante* en la institución. En correspondencia con la manera de concebir “la actividad matemática”, se establecen OD que dan mayor énfasis a ciertos momentos didácticos. En su proceso de estudio, F4 da mayor énfasis a los momentos tecnológico teórico y del trabajo con la técnica. Utiliza los primeros para presentar las propiedades y/o los axiomas que caracterizan a una praxeología, y para su estudio despliega técnicas que a decir de Bosch y Gascón, (2002) podrían considerarse “teoricistas”, para los momentos del trabajo con la técnica utiliza técnicas basadas en el “tecnicismo”.

Ahora bien, cuando un proceso de estudio reposa fundamentalmente sobre estos dos momentos, en opinión de Bosch y Gascón (2002), el discurso tecnológico está orientado por un modelo epistemológico *Clásico* asociado con el “Euclidianismo” que supone que la actividad matemática se construye dando definiciones, axiomas, principios y teoremas, para que el resto “fluya fácilmente”. En correspondencia con este modelo epistemológico, F4 asume el trabajo de construcción teórica y deja a los formados la responsabilidad de los otros momentos. Bajo estas restricciones la OD estudiada es incompleta y sesgada porque el proceso didáctico se concentra en el momento tecnológico teórico (aunque reducido a la función descriptiva de la técnica) y en el del trabajo con la técnica, la gestión de otros momentos no forma parte del *topos* del formador.

4.3. LA DINÁMICA DE F2. LA LÓGICA DEL CONSTRUCTIVISMO.

Al igual que en el análisis anterior, antes de dar cuenta de la dinámica interna del proceso de estudio dirigido por F2, es necesario analizar el tipo de tareas que se plantearon, lo que nos permitirá tener un esbozo acerca de la naturaleza de la organización praxeológica reconstruida en este proceso.

4.3.1. La praxeología "efectivamente enseñada". Siguiendo los mandatos curriculares

Los tipos de tarea que F3 planteó durante su proceso de estudio son las siguientes:

T2. Estudiar los significados de las fracciones
T3. Identificar el significado parte-todo en problemas de reparto
T4. Determinar la relación entre los datos, en los problemas de reparto
T5. Identificar la fracción como representación de una medida
T6. Identificar el significado cociente en problemas de reparto
T7. Ubicar fracciones en la recta numérica
T8. Comparar fracciones
T12. Calcular la suma de fracciones
T15. Identificar problemas donde la fracción es un operador multiplicativo
T19. Resolver problemas utilizando las diferentes operaciones con fracciones
T20. Identificar los diferentes usos de los decimales
T21. Determinar las regularidades de un sistema de numeración posicional
T22. Convertir fracciones comunes a decimales
TD3. Analizar cómo se dirige un proceso de estudio
TD4. Identificar las OM incluidas en el programa de estudio de la escuela primaria
TD5. Reconocer las dificultades inherentes a un dispositivo de estudio

Como se puede observar, la praxeología matemática "efectivamente enseñada" es similar a la que se plantea en los materiales curriculares, como se ha señalado ésta integra fundamentalmente tres elementos: los significados de la fracción; el análisis de la estructura algebraica y la utilización de las fracciones y los decimales. En correspondencia con dicha estructura, F2 plantea tareas en las que se estudian de manera los significados de la fracción (T2) y otras cuyo objetivo es identificar cada uno de los significados. El significado parte-todo, por ejemplo se incluye en las tareas T_3, el de medida en las tareas T_5 y T_7, el significado cociente en las tareas T_4 y T_6 y el de operador multiplicativo en las tareas T_{15}.

En lo que respecta a la estructura algebraica, a diferencia del proceso de estudio de F4, en éste se incluyen tareas (T_8) para la constitución de un entorno tecnológico teórico para la técnica de suma de fracciones, esta técnica se incluye en las tareas T_{12}. Sin embargo, la constitución de este entorno también parece incluirse en tareas T_7. Generar la constitución de un entorno tecnológico teórico, es una función que se cumple también con las tareas T_{21} y T_{22}, aunque en estos casos dicho entorno justifique las técnicas para el trabajo con los decimales. Analizar el valor posicional de los decimales y la equivalencia entre las fracciones comunes y los decimales, como se hace en este proceso, son acciones que permiten generar un discurso tecnológico teórico sobre los decimales, en este mismo sentido, las tareas T_{19} y T_{20} corresponden a la utilización de los decimales y las fracciones.

Como se puede inferir, la organización matemática "efectivamente enseñada" integra los elementos sugeridos por los materiales curriculares y existe un equilibrio entre las tareas que dan énfasis a los momentos exploratorios (identificar significados, ubicar puntos en la recta, comparar fracciones), las que buscan constituir un entorno tecnológico teórico (la construcción de la noción de equivalencia, el estudio de los significados), las que enfatizan el momento de la evaluación (resolución de problemas que impliquen las distintas operaciones con fracciones) y las que se promueven momentos para el trabajo con la técnica.

Sin embargo, es en el trabajo con la técnica donde pueden observarse las ausencias más significativas. Si bien se plantean tareas para la técnica sobre la suma de fracciones, no se hace lo mismo con la técnica para la multiplicación o la división, tampoco se les incluye para afinar la técnica que permite operar con números decimales.

Estas ausencias pueden explicarse con base en dos hipótesis no excluyentes entre sí, una está ligada a las restricciones propias del tiempo legal de la enseñanza, es decir, ante la imposibilidad de "negociar" un equilibrio adecuado entre los elementos de la praxeología "a enseñar" y el tiempo destinado para el proceso de estudio, al parecer, F3 deja de lado ciertas tareas que en su proyecto de enseñanza no resultan fundamentales. La segunda hipótesis tiene que ver con la "transparencia" de las técnicas no estudiadas, esto es, omitir el estudio de las técnicas mencionadas es una acción que se justifica por el bajo nivel de dificultad que tienen, en otros términos, se omiten porque no representan un alto grado de dificultad, toda vez que su funcionamiento resulta "transparente" para los estudiantes porque ha sido estudiado en otros niveles escolares,

Por otra parte, en lo relativo a las tareas de naturaleza didáctica también puede observarse una proximidad con los mandatos curriculares. Se plantean tareas para el reconocimiento de las OM incluidas en el programa de la escuela primaria (T_{D4}), para analizar la gestión de un proceso de estudio (T_{D3}) y para identificar los errores que cometen los niños al resolver tareas relativas a los racionales. No obstante la cercanía con la praxeología "a enseñar", la ausencia más notable tiene que ver con la concepción, el diseño o la selección de dispositivos de estudio y con planear y dirigir un proceso de estudio concreto. En ambos casos la omisión parece estar ligada con las restricciones que impone el tiempo legal de la enseñanza.

En síntesis, considerando los tipos de tareas planteados, puede decirse que la organización praxeológica que F3 ha reconstruido se caracteriza por su coherencia con los mandatos curriculares, es evidente en la reconstrucción de la organización matemática y de la praxeología docente. Si bien en esta última se aprecian las ausencias más notables, al parecer tienen que ver con el tiempo legal de la enseñanza y no con un "recorte" intencional de dicha organización. En lo que sigue se analizará la manera en la que F3 gestiona los diferentes momentos del proceso de estudio y la forma como articula los elementos de la praxeología docente "efectivamente enseñada".

4.3.2. La *dinámica interna* del proceso de estudio. La disolución de lo didáctico.

Como se ha señalado, todo proceso de estudio requiere de un primer encuentro con la organización "a enseñar", en este caso el primer encuentro con la OD se gestiona a través de una situación “recordatorio”[168] (ver Douady, 1995), esto es, se solicita a los estudiantes recordar ¿qué son los racionales?, ¿cómo estudiaron los racionales en la escuela primaria? y sugerir una manera pertinente de enseñarlos.

En este primer encuentro se establece un contrato didáctico basado en la mayéutica socrática y funciona como un momento de exploración colectiva, se trata gestionar un primer encuentro con la praxeología a estudiar. Sin embargo, por las cuestiones que se plantean, la mayéutica se orienta más hacia el encuentro con los elementos didácticos de la praxeología que hacia los matemáticos, esta orientación se evidencia en la síntesis final que realiza el formador. En ésta, mediante el señalamiento de dos modelos de un proceso de estudio, F2 institucionaliza los elementos que deseaba integrar.

	Modelo 1	**Modelo 2**
1.	Explicar los conceptos	Utilizar material concreto
2.	Dar ejemplos	Plantear problemas
3.	Plantear problemas	Apoyo auxiliar con cuestionamientos
4.		Conclusión grupal

A decir de F2, estos modelos requieren de analizarse bajo la guía de dos interrogantes: ¿cuál es el modelo dominante en la escuela? y ¿es posible una articulación entre ambos? Sobre este respecto, añade, *de lo que aquí se trata (en el curso), es de saber cuál modelo se utiliza más en las escuelas y si es posible que ambos se puedan combinar.*

Como se puede ver, la síntesis y las cuestiones planteadas permiten dilucidar el objetivo de esta primera tarea, identificar una “razón de ser” para la praxeología “a estudiar”. Dicha razón deberá justificar la importancia de estudiar la organización praxeológica y, si se consideran los niveles jerarquía de codeterminación didáctica, esta “razón de ser” corresponde al nivel de la sociedad y la escuela, esto es, se debe estudiar la praxeología docente relativa a los

[168] Douady (1995, pp. 94-95), llama situaciones recordatorio al comienzo de una sesión donde el profesor pide a los estudiantes *acordarse* de los puntos esenciales de las sesiones anteriores sobre un tema determinado que aún está en curso. Para esta autora, ésta es una fase clave en la selección y memorización de los eventos importantes, pues establece la relación con las clases anteriores, se comienza a descontextualizar y a despersonalizar aquellas cosas que el profesor institucionalizará posteriormente.

racionales porque, en tanto escuela formadora de docentes, los alumnos de esta institución deberán dirigir procesos de estudio concretos con esta OM de referencia. No obstante, debe advertirse también que al fijar una “razón de ser” eminentemente didáctica, las “razones de ser” para el estudio de la organización matemática (los racionales) permanecen en un segundo término.

Una vez gestionado el primer encuentro con la OD, F2 plantea tareas para la reconstrucción de la OM, la primera (T_3) se gestiona mediante una técnica basada en la homología y da énfasis al momento de exploración[169]. No obstante la presencia de los momentos exploratorio y tecnológico, en la institucionalización no se precisa el elemento de la OM (significado parte-todo) que ha sido integrado. Al contrario de esto, F2 utiliza el momento de la institucionalización para subrayar la importancia de los procedimientos que utilizan los niños, esta acción significa que más que reconstruir un elemento de la OM, el objetivo es reconstruir las praxeologías didácticas (la importancia de las representaciones informales) incluidas en la OD “a enseñar”, objetivo que resulta coherente con las elecciones de F2, ya que desde el primer encuentro, ha privilegiado el estudio de las praxeologías docentes.

Siguiendo con este mismo objetivo, F2 plantea tareas T_3 y T_4 que representan un momento para el trabajo con la técnica, para perfeccionar la técnica institucionalizada (encontrar diversos procedimientos para un mismo problema), este objetivo se hace evidente en la consigna que precede a estas tareas, en ella F2 señala, *van a encontrar varias formas de resolver el mismo problema (…) más que de resolverlo, se trata de enunciar, por lo menos, dos procedimientos diferentes para resolverlos.*

Luego de este momento para el trabajo con la técnica, F2 gestiona un momento tecnológico en el que se justifica más la diversidad de técnicas utilizadas

[169] En estos casos hablaremos de una estrategia basada en la homología cuando el formador gestione por lo menos una situación adidáctica que “…constituye el proceso por el cual el alumno va a fabricar unas estrategias, es decir, “se aprende” un método de resolución de su problema…” Brousseau, 1998; 33) y una situación de validación o prueba que “… motive a los alumnos a discutir una situación y favorece la formulación de sus validaciones implícitas, pero, a menudo sus razonamientos son todavía insuficientes e incorrectos…” (Brousseau, 1998, p. 41). En nuestra opinión, estos dos tipos de situaciones forman parte de lo que Chevallard (1991) llama los momentos del primer encuentro y de exploración.

por los formados que lo adecuado de éstas y de los resultados. También representa un momento tecnológico en el que se justifica la búsqueda de diferentes técnicas, en opinión de F2, ésta es importante porque los procedimientos informales de los niños son una evidencia de su proceso constructivo y su aparición debe favorecerse mediante una adecuada dirección del proceso de estudio. Lo significativo en este caso es que en congruencia con la gestión de F2, el discurso didáctico es lo que justifica la técnica utilizada por los estudiantes, aunque como podrá inferirse, esta justificación no se realizó en la gestión de las tareas T_4. Ahora bien, no obstante que en las tareas planteadas hasta aquí se han incluido los significados parte-todo y cociente, estos elementos no han sido precisados.

En la tercera sesión F2 plantea una tarea T_5 articulada con una T_{21}, luego de un momento exploratorio justifica el sentido de la tarea mediante un discurso tecnológico didáctico que pondera las dificultades de trabajar con este sistema de escritura y aquellas que los niños tendrán cuando resuelvan tareas con los decimales. Es decir, nuevamente el discurso tecnológico se orienta hacia lo didáctico, lo matemático se precisa sólo mediante la institucionalización de la técnica para convertir fracciones a decimales. Por esta razón, el objetivo principal de esta tarea tiene que ver con la constitución de un entorno tecnológico didáctico relativo a los decimales.[170]

Una vez realizada la institucionalización, se plantean tareas del mismo tipo como momento para el trabajo con la técnica, en éstas se destaca la noción de densidad, la equivalencia y los problemas aditivos. Al final de la sesión, F2 plantea una tarea T_{D3} para analizar la manera de dirigir un proceso de estudio, sin embargo, pocos estudiantes habían dirigido un proceso de estudio relativo a las

[170] No obstante, el discurso tecnológico no integra elementos teóricos, esto es, no hace referencia a alguna noción teórica (como la de obstáculo epistemológico) que justifique las dificultades de los niños con tareas de esta índole, en este sentido, aún cuando integra un discurso tecnológico no lo hace con el teórico. En este momento tampoco se incluyen justificaciones sobre la técnica para convertir fracciones a decimales por lo que, puede decirse que es una institucionalización que no integra un discurso tecnológico.

matemáticas, razón por la que F2 decide dejar esta tarea para el trabajo en casa.[171]

Para la cuarta sesión, F2 plantea una tarea T_5 que gestiona mediante la homología, la técnica requerida por los estudiantes consiste en medir (utilizando una unidad arbitraria) y comparar la longitud de varios objetos. Durante el momento tecnológico, F2 despliega un discurso tecnológico que subraya el papel del numerador y el denominador en la comparación de fracciones. Enseguida se gestiona un momento para trabajo con la técnica mediante varias T_7 que son evaluadas colectivamente. Lo significativo de la evaluación es que en este momento F2 integra el estudio de cuestiones didácticas, junto con la evaluación se analizan los errores (relacionados con la equitatividad y la unidad de referencia) que podrían cometer los niños al resolver este tipo de tareas. En correspondencia con esta inclusión, el momento de la institucionalización enfatiza la importancia de la recta numérica como dispositivo de estudio, aunque no se precisan los elementos de la organización matemática incluidos (equivalencia, densidad y medida).

Otro aspecto significativo es que en la gestión de estas tareas puede observarse la técnica de formación que utiliza con mayor frecuencia F2, por lo general plantea una tarea que se gestiona mediante una la homología, inicialmente se incluyen momentos de exploración y del primer encuentro, posteriormente se añade el momento tecnológico y el de evaluación colectiva donde se incluye un discurso tecnológico didáctico, finalmente se realiza la institucionalización. Otro ejemplo es la tarea T_{12} ("carrera a cinco") que consiste en sumar $\frac{1}{2}$ o $\frac{1}{4}$ hasta llegar a cinco, ésta parece un momento para el trabajo con la técnica, ya que el primer encuentro con la suma de fracciones se había realizado ya. Sin embargo, en coherencia con la tendencia observada, la tarea también enfatiza aspectos ligados con lo didáctico, luego de la exploración, el discurso tecnológico se relaciona con nociones didácticas implícitas, es decir,

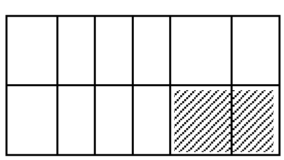
[171] En lo sucesivo, el resultado de esta tarea no apareció en la escena pública de la clase.

cuando F2 hace énfasis en las diferentes versiones que pueden desarrollarse de la “carrera a cinco”, introduce la noción de variable didáctica y cuando explica las funciones (evaluación, exploración) que podría tener “la carrera a cinco”, lo que hace es relacionar el dispositivo con la estructura general del proceso de estudio.

Como se ha podido observar, los discursos tecnológicos que ha desplegado F2 muestran que, más allá de precisar los elementos de la organización matemática estudiada, el proceso está guiado por una preocupación principal: articular las tareas de naturaleza matemática con algunos aspectos didácticos. El efecto de esta tendencia es la imprecisión y desarticulación de los elementos integrados en el estudio de la OM, en otros términos, se ha dejado de lado el momento tecnológico estrictamente matemático, para poner el énfasis solamente en los aspectos ligados con la eventual dirección de un proceso de estudio. Este énfasis es por demás evidente en la tarea que plantea enseguida, en ella, como se puede observar en el siguiente fragmento, el objetivo parece ser la gestión de un primer encuentro con el significado operador multiplicativo, sin embargo, esto no sucede.

> M: Anoten por favor el siguiente problema; se usó $\frac{1}{4}$ de pliego de cartoncillo para hacer una bandera. La tercera parte de ese cuarto se pintó de rojo, ¿qué fracción de pliego de cartoncillo se pintó de rojo?
> (Algunos resultados fueron los siguientes)

A1

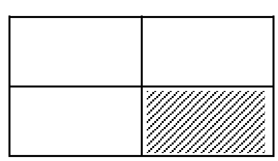


$\frac{1}{12}$

R

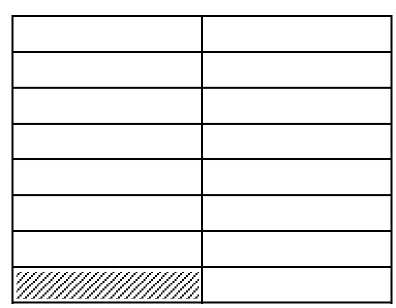
A2

$\frac{1}{12}$



A3

$\frac{1}{12}$



> M: Una reflexión sobre los dibujos, ¿alguien les dijo cómo hacer los dibujos?, porque cada quien los hizo diferentes ¿qué problemas pueden tener los niños cuando les presentamos un dibujo como éste y les decimos colorea $\frac{1}{4}$, qué pasaría?
> A: Se les hace más difícil

A2: ¿No sería más fácil que ellos mismos lo dibujaran y lo dividieran, así ellos sabrían mejor dónde es $\frac{1}{4}$?

M: Sin embargo en los libros de texto no siempre viene la misma figura y puede existir alguna confusión

A3: Se acostumbran por decir a un cuadrado y cuando les pone otra figura por ejemplo una circular, no pueden identificar dónde es $\frac{1}{4}$

M: ¿Creen que sea más fácil para el niño ya repartir o colorear en un entero que ya está divido en medios, cuartos, sextos?

As: Si

Lo significativo es la técnica reiterada de F2, esto es, la gestión de una homología en la que se integra un momento exploratorio, uno de justificación o evaluación y un momento final en el que, por lo regular, se opta sólo por la segunda. Frente a la necesidad de realizar una doble institucionalización (matemática y didáctica), esta elección produce una reconstrucción matemática incompleta, no se precisa el elemento estudiado ni sus relaciones con otros elementos de la OM.

Aún cuando la tarea incluye a la fracción como operador multiplicativo, se convierte en una técnica para el estudio de los errores de los niños respecto de la relatividad de la unidad, estos errores ligados al significado parte todo, tampoco aparecen en el discurso tecnológico teórico. Así, en coherencia las preocupaciones por lo didáctico de F2, esta tarea ha modificado su naturaleza, ahora se trata de identificar los errores que cometen los niños, aunque no se haya gestionado mediante un momento exploratorio. En cuanto a lo matemático, la tarea representa un retorno a la equivalencia de fracciones, esto se hace evidente al advertir que la tarea que se plantea enseguida (comparar fracciones e identificar fracciones equivalentes), es gestionada nuevamente a través de la homología, en ésta el momento tecnológico se fusiona con la institucionalización de la técnica para construir fracciones equivalentes: multiplicar por un mismo número el numerador y el denominador.

Si se analiza la secuencia que sigue el formador podrá entenderse que la siguiente tarea (T_8) representa un momento para el trabajo con la técnica, pero como también incluye un elemento no institucionalizado (la suma de fracciones con diferente denominador), es una tarea con doble objetivo afinar la técnica y explorar el elemento no institucionalizado. Así, la dialéctica entre lo *antiguo y lo nuevo* tiene su más clara manifestación en el tipo y la gestión de estas tareas: un momento de evaluación colectiva para la comparación de fracciones y un momento de institucionalización para la suma.[172]

Continuando con esta dinámica, F2 plantea tareas para hacer en casa, en éstas los estudiantes deberán identificar la representación fraccionaria de un número decimal; identificar números decimales equivalentes; identificar un número decimal intermedio a otros dos y; ubicar números decimales en la recta numérica.

Como puede inferirse, en tanto que las técnicas para comparar fracciones y para convertir fracciones comunes a decimales han sido institucionalizadas, estas tareas representan un momento para el trabajo con la técnica, su objetivo es permitir que la técnica se refine y se haga más efectiva. Para evaluar si esto ha sucedido, durante la séptima sesión F2 gestiona la evaluación colectiva de estas tareas, como no encuentra dificultades mayores, el momento tecnológico que le procede tiende nuevamente hacia lo didáctico, hacia la justificación de los errores de los niños. A decir de F2, estos errores se justifican porque *quieren trasladar las reglas operatorias de los números naturales a las fracciones.* En esta misma sesión se plantea el estudio del significado cociente mediante, una estrategia cultural F2 explica la diferencia entre los significados parte todo y cociente, además, plantea problemas para "aplicar" este conocimiento.

En la octava sesión F2 precisa los elementos de la OM que se han estudiado y los que se habrán de integrar, este momento de institucionalización puede observarse en el siguiente fragmento.

> Recapitulando entonces, el tema de los racionales o de las fracciones tenía varios significados, hemos revisado algunos, el concepto más importante es el reparto, hicimos varios ejercicios de reparto y luego trabajamos el reparto a través de la medición. Algo que trabajamos también fueron las fracciones decimales y hacíamos el cuestionamiento ¿qué características debe de tener una fracción para que sea considerada como una fracción decimal? Después vimos otro concepto (escribe), la fracción como cociente, que nos remite una división indicada.

[172] Es en esta parte del proceso donde F3 institucionaliza los mecanismos del algoritmo de la suma de fracciones con diferente denominador.

FRACCIONES
Reparto
Medición
Decimales
Cociente
Operador multiplicativo

Hoy vamos a ver otro concepto, la fracción como operador multiplicativo.

Algunos aspectos significativos que pueden observarse en esta "recapitulación" y que explican en parte la dinámica interna del proceso de estudio o la ausencia recurrente de institucionalización matemática son los siguientes: en este momento, por primera vez se precisan los significados de la fracción, hecho que es relevante para los significados parte-todo y medida, ya que los estudiantes habían resuelto tareas en las que estos significados se podían encontrar. Por otro lado, puede verse una confusión respecto del significado parte-todo, en este caso F2 ha sustituido el elemento matemático de la OM por la situación, es decir, ha tomado las situaciones de reparto como un elemento a reconstruir en lugar del significado parte-todo. Esta sustitución tiene efectos importantes en la dinámica interna del proceso de estudio, ya que esta institucionalización "tardía" al parecer ha sido generada por la "transparencia" de estos dos significados. En tanto que se han planteado tareas de reparto y de medición, en la óptica de F2 resulta evidente que cada uno de estos tipos de tareas corresponde a un significado de la fracción. Así, las tareas de reparto habrían permitido estudiar el "significado" reparto y las tareas de medición habrían permitido hacer lo mismo con el significado medida.

Otro aspecto significativo tiene que ver con la inclusión de los decimales como elemento estudiado, como se incluye como elemento independiente, las relaciones entre los decimales y los significados de la fracción quedan fuera de esta praxeología, lo mismo sucede con las relaciones ente los diferentes significados.

Ahora bien, en coherencia con el elemento "nuevo" que ha precisado F2, la siguiente acción es plantear una tarea T_{15}, una vez más se gestiona mediante una homología que integra un momento de exploración (para el significado operador multiplicativo) y uno tecnológico. En el momento de la institucionalización se precisa la naturaleza de dicho significado, las diferentes representaciones (fracción o decimal) y la técnica para multiplicar fracciones, sin embargo no se precisa la técnica para operar con decimales.

En la novena sesión, F2 utiliza la misma estrategia, gestiona un momento para el trabajo con la técnica, esto es, plantea problemas en los que se requiere aplicar un operador multiplicativo, luego se analizan ciertos aspectos didácticos ligados a este significado como la pertinencia de plantear este tipo de problemas en la escuela primaria y la importancia de favorecer la aparición de procedimientos informales[173]. Con esta tarea se concluye el estudio de los significados de la fracción.

En la décima sesión F2 plantea dos tareas T20, una para identificar el contexto (masa, peso, tiempo, etc.) en el que se utilizan los decimales y la otra para identificar fracciones decimales. En ambas se da énfasis a los momentos de exploración y tecnológico, en el segundo F2 justifica la diferencia entre fracción y notación decimal. Con estas tareas la reconstrucción de la OM ha sido concluida, el tiempo de la sesión No. 11 se utiliza para precisar los elementos de la OM que han sido integrados en el proceso de estudio, esto es, para institucionalizar la praxeología matemática relativa a los racionales. En lo siguientes fragmentos se pueden observar las precisiones que realizó F2.

LAS FRACCIONES

1º. <u>Reparto.</u> El reparto equitativo y exhaustivo es una de las actividades fundamentales que llevan a fraccionar una o varias unidades, situaciones:

a) Es mayor lo que se reparte
b) Es mayor el número de individuos
c) Se reparten varios elementos (colecciones, superficies, longitudes)

2º. <u>Medición.</u>

a) Comparación de fracciones
b) Fracción en la recta
c) Equivalencia de fracciones
d) Suma y resta

3º. <u>Fracciones decimales y medición.</u> Constituyen un subconjunto de las fracciones.

[173] En todos los casos en los que F2 ha incluido análisis de naturaleza didáctica, éstos han sido gestionados a través de un contrato basado en la mayéutica socrática.

a) Son aquellas que se generan al dividir sucesivamente en 10 a la unidad. Ejemplo $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{1000}$
b) También aquellas que no teniendo denominador decimal (10, 100), se puede obtener equivalencia decimal ejemplo, $\frac{7}{125} = \frac{56}{1000}$
c) En el conjunto de fracciones, entre dos números siempre hay otra, entre $\frac{1}{10}$ y $\frac{2}{10}$
d) Notación decimal es la representación de las fracciones decimales, con el sistema decimal de numeración ejemplo, $8 + \frac{3}{10} + \frac{4}{100} = 8.34$

4º. La fracción como cociente. Es el resultado de una división de números enteros (una fracción indicada)

a) Cualquier fracción $\frac{a}{b}$, es el resultado de a÷b, es decir, el número que multiplicado por "b" da "a".
b) $\frac{3}{4}$ de la unidad significa una unidad, partida en 4, de la que se toman tres partes $\frac{3}{4}$, como cociente significa tres unidades divididas entre 4
c) Se usa implícitamente la idea de fracción como cociente al comparar dos fracciones dividiendo el numerador entre el denominador

5º. La fracción como operador multiplicativo. Indica el número de veces que se considera una medida

a) Problemas en los que se multiplican dos medidas
b) Problemas en los que se establece una relación proporcional entre dos medidas
   - Fracción por entero, nos lleva a una suma de fracciones
   - Entero por fracción, aplicar un operador multiplicativo fraccionario a una cantidad equivale a dividir y multiplicar, (o viceversa) sucesivamente esta cantidad
   - Fracción por fracción, nos lleva directamente a la multiplicación de fracciones
   - La fracción como una relación entre dos cantidades por ejemplo, ¾ de una población de 60,000 habitantes

En ellas se puede ver nuevamente la confusión entre los significados parte-todo, medida y las situaciones, éste se hace evidente en la definición del significado "reparto" y por la falta de definición para el significado medida. Al parecer, esta confusión es la causa de las dificultadas para relacionar los distintos elementos de la OM, por ejemplo en el punto tres intenta romper con el "autismo temático" de los decimales al relacionarlos con el significado medida, sin embargo el intento fracasa porque sólo se enuncian algunas propiedades (densidad) y nociones (equivalencia, fracción decimal) de los decimales, sin precisar que un número decimal puede funcionar o tomar el significado de medida. Como se ha señalado, a pesar de los intentos de F2, esta confusión no permite establecer las relaciones adecuadas entre los diferentes elementos de la OM.

Un rasgo significativo es que si bien se han incluido discursos tecnológicos didácticos en las diferentes tareas, éstas han sido fundamentalmente de naturaleza matemática. Con excepción del análisis (fallido) de un proceso de dirección de estudio no se han planteado tareas para la concepción y el diseño de los dispositivos de estudio, para la gestión de los entornos, para el diseño de un proceso de estudio concreto o para identificar los errores más frecuentes de los niños. Si bien los errores de los niños, los racionales en la escuela primaria y las situaciones para su enseñanza son aspectos incluidos en cada una de las series de tareas, no se ha hecho mediante tareas específicas, es decir, no se han gestionado momentos de exploración o para el trabajo con la técnica relativos a estos elementos de la OD.

En este sentido, la única tarea específica (TD5) para un elemento didáctico[174] se planteó hasta la doceava sesión y se contextualiza en el trabajo con los decimales, en ella se privilegia la exploración colectiva mediante un contrato basado en la mayéutica socrática, las interrogantes giran en torno a dos situaciones: los errores de los niños que los estudiantes detectaron durante su práctica[175] y los errores que comete un niño al plantear la equivalencia $^{2}/_{5} = 2.5$[176]. En sus experiencias, los estudiantes logran identificar errores relacionados con la equitatividad y la exhaustividad. En la equivalencia planteada, identifican la falsa igualdad entre el punto decimal y la línea que divide al numerador y el denominador.

Una vez que concluye la exploración colectiva, F2 gestiona un momento tecnológico en el que plantea que, el trabajo con objetos concretos y con la equivalencia son técnicas didácticas que permiten a los niños superar estos

---

[174] Al final de esta sesión, F3 señaló que en la siguiente clase identificarían los contenidos de los racionales en los programas de la escuela primaria, sin embargo, por razones de la organización escolar la sesión No. 13 no tuvo lugar, ante ello, F3 decidió terminar el estudio de los decimales en la sesión No. 12.

[175] Las prácticas profesionales que desarrollaron los estudiantes fueron desarrolladas antes de iniciar con el estudio de los racionales.

[176] El error en esta equivalencia es analizado a partir de un registro de clase que F3 proporciona a los estudiantes.

errores, la exhaustividad y la equitatividad en tanto elementos cuya deficiente comprensión genera ciertos errores no son precisados en este momento. Con esta institucionalización se concluye la reconstrucción de la praxeología docente referida a los decimales.

4.3.3. Las restricciones del proceso. La influencia del tiempo legal de la enseñanza

En el proceso de estudio que F2 ha dirigido, operan principalmente tres tipos de restricciones: el "autismo temático**"**, restricciones ligadas con el tiempo legal de la enseñanza y aquellas que derivan del modelo epistemológico asumido implícitamente por el formador.

Respecto de las primeras, lo que se ha podido ver es que a pesar de los esfuerzos de F2 por encontrar una "razón de ser" en los niveles superiores de codeterminación didáctica, el proceso de estudio sigue casi fielmente los mandatos curriculares y permanece encerrado en el nivel de lo temático, es decir, a pesar de que al inicio del proceso F2 plantea como "razón de ser" el estudio de los modelos para la dirección del estudio, la reconstrucción realizada se enfoca principalmente al tema de los racionales, por lo que fundamentalmente plantea tareas de naturaleza matemática.

No obstante el encierro en lo matemático, también en este ámbito se advierten restricciones ligadas al "autismo temático", sin una "razón de ser" que provenga de los niveles superiores de la jerarquía, las dificultades para relacionar los diferentes elementos estudiados son generados por la ausencia de una "razón de ser" que rebase el nivel de lo puntual, esto es, las dificultades para ligar los significados de la fracción entre sí y con los números decimales evidencian que el encierro temático permanece durante todo el proceso de estudio. Al final del proceso, lo que se reconstruye es una praxeología que agrupa ciertos elementos pertinentes de la OM, pero no se articula en torno del objetivo originalmente planteado; analizar los diferentes modelos de dirección del estudio.

Por otra parte, este encierro en lo matemático genera un doble rol para lo didáctico, uno se puede ver en los frecuentes "análisis didácticos" que realiza el formador como una extensión de las tareas matemáticas, en estos casos lo didáctico es una especie de complemento para estas tareas, sin embargo como se ha podido observar, dichas extensiones se ubican en los momentos tecnológicos y no se acompañan de institucionalizaciones sistemáticas que hagan referencia a la relación entre el elemento estudiado y la dirección de un proceso de estudio, al contrario de esto, son sólo una especie de "consejos didácticos" más propios de las estrategias culturales.

El otro rol de lo didáctico tiene que ver con las tareas específicamente didácticas, no obstante su importancia en una praxeología docente, éstas se ven determinadas significativamente por las restricciones del tiempo legal, es decir, en tanto que se ubican en la última parte del proceso de estudio, su realización depende del tiempo que resta luego de reconstruir la praxeología matemática y como se pudo observar, el tiempo no ha sido suficiente para plantear tareas profesorales diferentes a las de reconstrucción de la OM. Luego del intento fallido por analizar la dirección de un proceso de estudio concreto, el análisis de los errores de los niños es la única tarea de esta índole.

Finalmente, aunque se han planteado momentos para el trabajo con la técnica, el proceso de estudio ha girado principalmente en torno a dos momentos didácticos: el momento de la exploración y el tecnológico teórico. Esto nos indica que las elecciones de F2 han estado guiadas por un modelo epistemológico que "…se caracteriza por el hecho de contextualizar la actividad de resolución de problemas situándolos en una actividad más larga de construcción de conocimientos lo mismo que el hecho de considerar que el aprendizaje es un proceso activo de construcción a partir de adquisiciones anteriores y bajo unos contratos determinados…" (Bosch y Gascón, 2002, 11). Es decir, han sido guiadas por un modelo "constructivista" que también se sugiere implícitamente en los materiales curriculares, en este modelo, el trabajo con las técnicas didácticas es el momento que más se destaca por su ausencia.

4.4. LA DINÁMICA DE F1. EL DOMINIO DE LA HOMOLOGÍA

Como se ha visto, uno de los procesos de estudio anteriores establece una ruptura con los mandatos curriculares mientras que el otro se ajusta a éstos. Veamos ahora el tercero de los procesos observados.

4.4.1. La praxeología "efectivamente enseñada". Más allá de los límites curriculares

Los tipos de tareas propuestos por F1 para la reconstrucción de la praxeología docente referida a los racionales son los siguientes:

T2. Estudio de los significados de las fracciones
T3. Identificar el significado parte-todo en problemas de reparto
T4. Determinar la relación entre los datos, en los problemas de reparto
T5. Identificar la fracción como representación de una medida
T6. Identificar el significado cociente en problemas de reparto
T7. Ubicar fracciones en la recta numérica
T8. Comparar fracciones
T9. Determinar los mecanismos del algoritmo de la suma y resta
T10. Ordenar fracciones
T11. Comparar problemas (suma, multiplicación y división)
T12. Calcular la suma de fracciones
T15. Identificar problemas donde la fracción es un operador multiplicativo
T18. Plantear problemas donde la fracción funcione como operador multiplicativo
T19. Resolver problemas utilizando las diferentes operaciones con fracciones
T20. Identificar los diferentes usos de los decimales
T21. Determinar las regularidades de un sistema de numeración posicional
T22. Convertir fracciones comunes a decimales
TD1. Analizar los momentos posibles de un proceso de estudio
TD2. Identificar la OM de referencia en los dispositivos de estudio
TD3. Analiza un proceso de dirección de estudio
TD4. Identificar las OM incluidas en el programa de estudio de la escuela primaria
TD5. Reconocer las eventuales dificultades que plantea un dispositivo de estudio
TD6. Analizar las dificultades de los niños en la utilización de las técnicas algorítmicas

Un primer rasgo que llama la atención tiene que ver con la diversidad de las tareas planteadas, comparado con los procesos anteriores, en éste se plantea una mayor diversidad de tareas, aunque también puede observarse que en términos generales corresponden a las sugerencias curriculares. Por ejemplo, se plantean tareas para la identificación de los significados de la fracción (T2, T3, T5, T6, T15), para estudiar la noción de equivalencia (T8, T10), para analizar la estructura algebraica de los racionales (T9, T12), para identificar los usos de los decimales

(T20, T21), para “utilizar” los racionales (T19, T22) y tareas de naturaleza didáctica para analizar los momentos didácticos de un proceso de estudio (TD1), la dirección de un proceso de estudio concreto (TD3), los dispositivos de estudio (TD4) y con el análisis de los errores más frecuentes que cometen los niños al trabajar con los racionales (TD6).

No obstante la similitud entre las praxeologías “a enseñar” y efectivamente enseñada”, en el proceso de estudio de F1 se incluyen tareas no sugeridas en los materiales curriculares, es el caso de las tareas del tipo T11, T18 y TD1. Lo significativo de esta inclusión es que nos muestran que F1 cruza los límites impuestos por los mandatos curriculares, esto es, de las tres praxeologías efectivamente enseñadas, ésta se significa por incluir tareas no sugeridas en el programa sin modificar el significado global de la OD “a enseñar”. Por otro lado, resulta significativo que los tipos de tareas incluidas están orientados hacia el trabajo didáctico, las tareas T11 requieren de una técnica matemática (clasificar problemas) pero se constituye al mismo tiempo como una tarea didáctica (clasificar los dispositivos de estudio). Algo similar ocurre con las tareas T18, éstas hacen referencia a una técnica matemática (plantear nuevos problemas) pero también forman parte de las tareas didácticas (concebir dispositivos de estudio).

Finalmente, en lo que respecta a las tareas TD1, lo significativo es que a pesar de que los diferentes momentos didácticos han sido estudiados en el primer bloque del programa, F1 decide estudiarlos nuevamente pero haciendo referencia específica a los números racionales.[177] Para analizar la manera en la que F1 articula los diferentes momentos de un proceso de estudio, en lo que sigue se analizará la dinámica interna del proceso que él ha dirigido.

[177] Si bien el análisis de los momentos de un proceso de estudio es un tema que se estudia en el Bloque I. *Aprender matemáticas al resolver problemas* se realiza sin una cuestión matemática específica, es decir, en este bloque se estudia el proceso de estudio para las matemáticas en general.

4.4.2. La *dinámica interna* del proceso de estudio. Bajo la lógica de la homología.

Como en todo proceso de estudio, la tarea inicialmente planteada tiene que ver con un primer encuentro con la praxeología "a enseñar" que es gestionado mediante la "presentación del curso", en ella, F1 enuncia los propósitos y los temas a estudiar pero no institucionaliza los significados de la fracción, tampoco los tipos de errores que cometen los niños o las características de las estructuras algebraicas.

Luego de la presentación se inicia el estudio de los significados de la fracción, para ello plantea una tarea T_3 que se gestiona mediante una estrategia basada en la homología que inicia con momentos exploratorio y tecnológico, durante este último se institucionaliza el significado parte-todo. No obstante, señala F1, *éste es sólo uno de los significados, otros más los encontrarán en la lectura que será su tarea.*[178] Esta lectura representa la gestión de un momento exploratorio de la organización matemática global y el momento de la evaluación (colectiva) se gestiona en la segunda sesión mediante un contrato basado en la mayéutica, este contrato permite generar un momento de institucionalización en el que se precisan los significados parte-todo, medida, cociente, operador multiplicativo y las relaciones entre éstos, los números decimales y las magnitudes continuas y discretas.

Hasta aquí lo que se ha gestionado es el primer encuentro con la OM mediante dos momentos, uno de exploración (T_3) en el que se ha encontrado un elemento (el significado parte-todo) de la OM y uno tecnológico en el que se han justificado las técnicas utilizadas. Sin embargo, el momento exploratorio al parecer sólo tiene un objetivo, gestionar un encuentro con el significado parte-todo como ejemplo específico de los significados de la fracción, este objetivo se comprende mejor si se observa que en el segundo momento (tecnológico teórico) se institucionalizan los otros significados de la fracción, las relaciones entre éstos y otros elementos de la OM (las estructuras algebraicas, los contextos y los

[178] El texto al que se refiere F1 es el de Llinares y Sánchez (1997), específicamente al capítulo 3. *Las fracciones; diferentes interpretaciones.* Este texto aparece en la bibliografía complementaria del programa de estudios.

decimales), sin haber gestionado momentos del primer encuentro con estos elementos.

Otro rasgo significativo de este primer encuentro tiene que ver con el momento tecnológico teórico, en éste se incluye un discurso teórico que proporciona el texto de referencia y que justifica la naturaleza de la organización matemática “a enseñar” y las relaciones entre sus elementos. De esta manera, el momento tecnológico provee de una “razón de ser” que surge del nivel de la disciplina. En términos de la dinámica interna del proceso de estudio, este primer encuentro se constituye como una institucionalización global, es decir, como se han precisado ya todos los elementos de la praxeología matemática y las relaciones entre sus elementos, lo que resta del proceso de estudio no son sino una serie de momentos en los que estos elementos y relaciones serán mostrados o ejemplificados a los estudiantes.

En coherencia con la idea de “mostrar” los diferentes elementos de la praxeología institucionalizada, F1 señala ¡*continuemos trabajando entonces el significado parte todo!* , por esta razón, en lo que sigue se plantean nuevamente tareas T_3 que son gestionadas mediante una homología, sin embargo luego del momento exploratorio, la institucionalización se reduce a la precisión de la técnica que permite resolver repartos, esto es, se precisa la técnica basada en las representaciones gráficas y las relaciones entre los datos y el resultado de los problemas de reparto (T_4). Para finalizar esta sesión, al igual que en la anterior, F1 plantea una tarea T_{D5} para resolver en caso: la lectura de un texto en el que se analizan los errores de los niños al resolver tareas en las que está implicado el significado parte-todo.[179]

Como en la ocasión anterior, F1 evalúa la lectura del texto mediante un contrato basado en la mayéutica socrática y una vez más institucionaliza las nociones centrales del texto, entre otras, la relación entre las dificultades de los niños en tareas donde se incluye el significado parte todo, la defectuosa comprensión de la exhaustividad y la equitatividad y los dispositivos didácticos

[179] El texto referido es el de Dávila (1992) *El reparto y las fracciones,* cuya lectura es sugerida en los programas de estudio como una actividad que se corresponde al análisis de las dificultades de los niños.

(tareas de reparto con material concreto) que permitirían salvar estas dificultades. Así concluye el estudio del significado parte-todo.

Examinemos ahora la secuencia mediante la que F1 ha estudiado este significado. En primer lugar gestiona un momento exploratorio que permite a los estudiantes tener un primer encuentro con el elemento de la OM, luego, en el momento tecnológico teórico justifica las técnicas utilizadas e introduce algunos elementos de la praxeología docente, esto es, justifica la importancia de introducir la fracción en la escuela primaria mediante este tipo de problemas. Posteriormente, en el momento de la institucionalización, precisa la noción implicada en los problemas de reparto, aunque dicha precisión tiene un alcance global, es decir, precisa todos los elementos de la OM. Enseguida plantea tareas T_3 que representan un momento para el trabajo con la técnica puesto que el significado a estudiar ha sido institucionalizado. Finalmente, plantea una tarea de naturaleza didáctica (T_{D5}) referida a los errores más frecuentes de los niños. Así, en el estudio de este primer elemento de la OD se ha podido ver la articulación entre un elemento específico de la OM (el significado parte-todo) y un elemento didáctico (los errores de los niños). Veamos en lo que sigue si la estructura de esta secuencia en tanto técnica de F1, se conserva o sufre modificaciones.

Una vez concluido el estudio del significado parte-todo, en congruencia con los mandatos curriculares se inicia el estudio del significado medida, para ello F1 plantea una tarea T_5 (hacer cinco listones de la misma medida con tres metros de listón) que se gestiona mediante una homología sin institucionalización,[180] la precisión de este significado se incluye en una segunda tarea T_5 y puede observarse en el siguiente fragmento

> M: Muy bien, ahora vamos a trabajar con un problema que se relaciona con el significado parte-todo, van a resolver el siguiente problema: *En un viaje interplanetario la nave azul sale del planeta azul con rumbo al planeta rojo, al mismo tiempo la nave roja un poco más lenta que la nave azul sale del planeta rojo rumbo al planeta azul, cuando se cruzan en el camino la nave azul ha recorrido* $\frac{1}{5}$ *más de la distancia entre los dos planetas que la nave roja, después*

[180] Aunque en este problema los estudiantes dan respuestas expresadas en decimales, F1 no precisa que los decimales son también un racional que expresa una medida, solamente se limita a justificar las técnicas utilizadas por los estudiantes.

de ese punto la nave azul tarda ocho días más en llegar a su destino. ¿Cuánto tiempo duró el viaje de cada nave?

(Luego de que los estudiantes resolvieron el problema y confrontaron sus resultados se da el siguiente diálogo)

M: Aquí hay que, la unidad conforma al trayecto, si se fijan ¿en qué nos apoyamos para resolver este problema?
A: En una recta
M: En una recta, no hicimos círculos o cuadrados para fragmentarlos y encontrarlos sino que todos nos fuimos con una recta, de los problemas que analizamos anteriormente en ¿cuáles es útil usar una recta?
As: En el de los listones
M: En este problema ¿qué significado o contexto de la fracción podemos encontrar?
As: Contexto de medición
M: Contexto de medición, muy bien, y ¿qué significado?
A: Parte-todo
M: Partes de una unidad, parte-todo, recuerden que es un significado y que puede estar relacionado con la medición, entonces ¿qué podemos deducir de este problema? Aquí no podemos agarrar el número de partes y repartirlo.
A: Maestra, ¿Cuáles son los significados entonces?
M: A ver acuérdense ¿cuáles son los significados de las fracciones?
As: Reparto, razón
M: Razón
A: Operador, parte-todo
A2: Cociente y medida
M: Operador, parte-todo y medida y ¿cuál otro?
A: Cociente
M: Razón, operador, parte-todo, medida y cociente
A: ¿Parte y medida son uno solo?
M: Acuérdense la relación parte-todo va a estar implícita en todos los significados pero se puede considerar como un significado específico.
A: O sea la medida lleva incluida la relación parte-todo
M: Sí, y acuérdense que también aquí estaremos hablando del contexto de medición, habíamos manejado dos contextos ¿qué eran…?
As: Reparto y medición
M: Y situaciones discretas y continuas.

De entrada, observemos que como la técnica ha sido justificada en el momento tecnológico, en éste el objetivo es precisar el elemento de la OM que se encuentra en la situación, sin embargo para que dicho objeto no sea completamente nuevo, F1 pone en marcha la dialéctica entre lo antiguo y lo nuevo cuando señala que éste será un problema relacionado con el significado parte-todo. Esta misma dialéctica le sirve para determinar lo nuevo que hay en la situación, como en este problema no se pueden fraccionar rectángulos o círculos, F1 señala que es parecido al de los listones, es un problema en el que la fracción toma el sentido de medida o como lo señala F1, es un problema en el contexto de la medición. Así, la parte “antigua” del problema” permite también dilucidar lo “nuevo” que hay en él, esta dialéctica permite articular dos elementos de la OM, el significado parte todo y el contexto de medida.

No obstante el funcionamiento de la dialéctica entre lo antiguo y lo nuevo, la relación entre ambos significados es un saber que permanece demasiado “nuevo” para los estudiantes, de ahí su confusión respecto de los significados y los contextos, por esta razón, F1 se ve obligado a precisar nuevamente los significados de la fracción, los contextos y las situaciones. Otro elemento susceptible de esta dialéctica es la recta numérica, puesto que para F1 la recta numérica es el referente básico que permite identificar el contexto medida, como lo señala, en los problemas de medición no es posible fraccionar las unidades de referencia, por esta razón, indica, es muy útil trabajar con la recta numérica.

En correspondencia con la inclusión de la recta como referencia para el contexto de medida, F1 continúa con la dialéctica entre lo antiguo y lo nuevo, es decir, si bien los problemas donde la fracción adquiere el significado de medida son un objeto de saber antiguo, la recta en tanto referencia básica de este significado se incluye como un objeto nuevo. Por esta razón enseguida plantea tareas (T_7) en las que se requiere ubicar fracciones en la recta numérica, son gestionadas nuevamente mediante una homología y, en el momento tecnológico teórico, además de justificar la técnica adecuada, F1 incluye cuestionamientos acerca de las dificultades de los niños en este tipo de tareas.

Con esto, el estudio del significado medida ha sido concluido y como se puede observar, F1 intenta repetir la técnica utilizada para el estudio del significado parte-todo, es decir, primero plantea un momento exploratorio, un momento para la justificación de la técnica, un momento para la institucionalización del significado, un momento para el trabajo con la técnica (las tareas T_7) y un momento en el que se articula la reconstrucción del elemento de la OM con tareas de naturaleza didáctica (la discusión sobre los errores eventuales de los niños). No obstante la similitud de ambas secuencias, en esta última destaca la dialéctica entre lo antiguo y lo nuevo como técnica mediante la que intenta articular los diferentes elementos de la organización matemática.

En la cuarta sesión F1 establece una ruptura con la secuencia planteada en el programa de estudios, en lugar del significado operador multiplicativo inicia el estudio de la técnica convencional para sumar fracciones. Para ello plantea una tarea T_{11} en la que los estudiantes deben resolver tres problemas[181] mediante representaciones gráficas primero y mediante la técnica algorítmica después. Esta tarea representa un momento de primer encuentro y exploratorio respecto del algoritmo de la suma, cuestión que se hace evidente si se advierte que este momento es guiado por las interrogantes ¿qué problema es más fácil de resolver gráficamente?, ¿cuál es más difícil? ¿cuál es más fácil de resolver con el algoritmo?, ¿cuál más difícil? ¿qué ventajas da la utilización del algoritmo en cada problema?

Para culminar el momento exploratorio, F1 precisa que el algoritmo es una técnica más eficaz (por su rapidez y exactitud) que los procedimientos informales, además, que el algoritmo para sumar fracciones con diferente denominador es una técnica más difícil que el de la multiplicación[182] o el de la suma de fracciones con igual denominador, porque implica la construcción de fracciones equivalentes.

En términos de la dinámica interna del proceso de estudio, esta tarea funciona como un primer encuentro o como un momento exploratorio mediante el que se pretende encontrar una “razón de ser” para el estudio de un elemento de la OM. La precisión que hace F1 al final de la tarea, nos deja ver que una razón válida para estudiar el algoritmo tiene que ver con su eficacia, sin embargo dicha eficacia está ligada a otro elemento de la OM, la noción de equivalencia. Así, ambos elementos encuentran su “razón de ser” en este momento exploratorio, esto es, se debe estudiar el algoritmo porque es una herramienta eficaz y también la noción de equivalencia porque está ligada con el algoritmo.

---

[181] Uno de los problemas requiere de una suma de fracciones con denominadores diferentes, otros una suma con fracciones de igual denominador y el tercero una multiplicación y fracciones. En este momento, F1 señala que en el tercero la fracción funciona como operador multiplicativo, sin embargo, señala, ese es un significado que estudiaremos después.

[182] Durante la resolución de los problemas, F1 institucionaliza el algoritmo para multiplicar fracciones.

En congruencia con el establecimiento de estas razones, enseguida se plantean tareas T_8 y T_{10}, ambas sirven como momentos exploratorios respecto de la noción de equivalencia, luego se plantea una tarea T_9 que representa el momento tecnológico teórico. En el momento de la institucionalización se precisan las técnicas para construir fracciones equivalentes, para determinar si dos fracciones son equivalentes y para resolver el algoritmo para la suma de fracciones con diferente denominador. En coherencia con la dinámica interna que ha establecido F1, en lo que sigue plantea varias tareas T_{12} (resolver sumas de fracciones con diferente denominador), en otros términos, luego de la institucionalización del objeto "a estudiar" (el algoritmo para la suma), F1 gestiona varios momentos[183] para el trabajo con la técnica.

Al igual que en el estudio de los otros elementos de la OM, éste también se concluye planteando una tarea de naturaleza didáctica (T_{D6}) y nuevamente está relacionada con los errores de los niños al trabajar la equivalencia y el algoritmo de la suma. El momento exploratorio de esta tarea tiene que ver con encontrar los errores en los cálculos que a continuación se presentan y señalar las posibles acciones que permitirían superarlos.

a) $3 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

b) $\frac{2}{5} = \frac{8}{11} = \frac{14}{17}$

c) $\frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

d) $\frac{4}{5} - \frac{3}{4} = \frac{4}{20} - \frac{3}{20} = \frac{1}{20}$

e) $\frac{1}{4} + \frac{2}{5} = \frac{10}{9} + \frac{4}{9} = \frac{14}{9}$

f) $\frac{4}{9} = \frac{2}{3}$

g) $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6}$

h) $6 - 3\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$

Una vez que los estudiantes han confrontado sus respuestas, se institucionaliza el papel de los errores en el proceso de estudio y los momentos que, en la perspectiva de F1, permiten salvar los errores de los niños, en su

[183] En este caso, F1 plantea algunas variantes para las tareas T12, una se plantea como una competencia (los alumnos resuelven algoritmos en el pizarrón), otra como un juego en el que se trata de encontrar dos fracciones que sumen uno y una más se plantea como trabajo para casa, en este último caso es donde se gestiona un momento para la evaluación, momento que se gestiona a través de una evaluación colectiva.

opinión, los errores son un elemento que permite conocer lo que saben niños acerca de esos algoritmos o equivalencias y muestran también la necesidad de gestionar más momentos exploratorios en los que el niño realice acciones sobre objetos concretos.

Una vez reconstruidos estos tres elementos, F1 plantea una tarea T_{D2} que cumple un doble objetivo, por un lado se intenta precisar la presencia de ciertos elementos de la OM en los dispositivos de estudio incluidos en los libros de texto de la escuela primaria y por el otro, se constituye como un momento del primer encuentro con un elemento no estudiado todavía.

Para cumplir el primer objetivo se establece un contrato basado en la mayéutica socrática, las interrogantes centrales aluden al significado, al contexto, a la “operación” y al tipo de magnitud (variable o discreta) implicados en las lecciones analizadas. Por otra parte, la tarea funciona como momento para el primer encuentro, ya que cuando los estudiantes identifican la presencia de los números decimales en una lección, la mayéutica desplegada por F1 cambia su sentido, las preguntas no se dirigen hacia la búsqueda de significados o magnitudes, sino hacia los números decimales, la pregunta sobre la diferencia entre una fracción y un número decimal marca la ruptura con el primer objetivo de esta tarea. Una vez encauzada la mayéutica sobre las fracciones y los números decimales, se precisa que ambas son representaciones de un número racional, pero que los decimales son más útiles y eficaces para resolver cálculos.

Como se puede inferir, esta tarea ha renovado la dialéctica entre lo antiguo y lo nuevo, lo antiguo (los significados y contextos de la fracción) da pie a la aparición de un elemento nuevo de los racionales: los números decimales. Con esto, la tarea T_{D2} ha funcionado como un nuevo momento para institucionalizar los elementos estudiados y como tarea didáctica, sin embargo también ha permitido gestionar un primer encuentro con los números decimales. Las tareas siguientes (T_7, T_8, T_{20}, T_{21}, T_{22}) representan la gestión de momentos de exploración y tecnológico teórico para los decimales, aunque en este caso las tareas se gestionan mediante una técnica dirigida, es decir, se plantean las tareas y en la medida que F1 percibe dificultades, da explicaciones “a la medida” (justificaciones o precisiones de la técnica) que permiten a los estudiantes cumplir con cada una de ellas.

Para culminar el estudio de los decimales, en coherencia con las anteriores elecciones de F1, nuevamente se plantea una tarea de naturaleza didáctica (T_{D2}) que se gestiona mediante una estrategia de homología, luego de los momentos exploratorio y tecnológico, se precisa que los decimales son un subconjunto de los racionales.[184]

En la séptima sesión se reanuda el estudio de los significados de la fracción, específicamente el de operador multiplicativo. Para ello se plantea una tarea T_{15} cuya gestión incluye un momento exploratorio y uno tecnológico teórico, en éste último, además de institucionalizar el significado implicado y la técnica convencional para multiplicar dos fracciones, se precisan también los elementos que componen la estructura de este tipo de tareas, esto es, el estado inicial, el operador y el estado final. Luego de estos momentos se plantean varias tareas T_{15} y T_{18} que representan momentos para el trabajo con la técnica. Lo significativo en este caso es que a pesar de que en el momento tecnológico teórico se hace referencia a la pertinencia de plantear este tipo de situaciones en la escuela primaria, no se plantea ninguna tarea de naturaleza didáctica como se había hecho en el proceso.

En la novena sesión se inicia el estudio del significado cociente planteando los problemas siguientes, la consigna es resolverlos con el algoritmo correspondiente.

> 1. Alicia da un paseo de $\frac{3}{4}$ de kilómetro, cada octavo de km se detuvo a descansar. ¿Cuántas veces se detuvo a descansar?
>
> 2. María observó que al pasar a máquina cada página que escribe a mano sólo ocupa $\frac{2}{3}$ de página, cuando María terminó su trabajo le quedó un texto de 12 páginas. ¿Cuántas páginas escribió a mano?

Luego de los momentos de exploración y validación se institucionaliza la técnica convencional para resolver divisiones entre fracciones, sin embargo, no se

[184] En este caso, durante el momento tecnológico teórico, F1 no hace referencia a los significados de los decimales, simplemente hace referencia a los distintos tipos de tareas en los que se les plantean (ubicación de puntos en la recta, conversión de fracciones a decimales, etc.)

precisa la relación entre el significado operador multiplicativo y la estructura de los problemas de división, tampoco el significado cociente. Por esta razón, en lo que sigue se plantean otros problemas en los que la consigna es resolverlos e identificar sus diferencias.

> Cinco pedazos de listón del mismo tamaño unidos cabo a cabo miden 3 varas. ¿Cuánto mide un solo pedazo de listón?
>
> Un segmento tiene en el extremo izquierdo el número 0 y en el derecho el número 1, el segmento ha sido dividido en cinco partes iguales. ¿Qué número corresponde a la tercera marca de la división?

Luego del momento exploratorio, F1 precisa que la diferencia estriba en el significado parte-todo implicado en el primer problema y el de cociente implicado en el segundo, así, mediante este momento tecnológico, el significado cociente es institucionalizado. Mediante esta tarea F1 ha incluido tres elementos nuevos de la OM, las estructura de los problemas de división, el algoritmo correspondiente y el significado cociente, por esta razón, en lo que sigue plantea una tarea T19 que representa el momento para el trabajo con la técnica, en ésta se plantean problemas cuya resolución implica el uso del algoritmo de la división o el significado cociente.

En correspondencia con la técnica más utilizada, para cerrar el estudio del significado cociente en la décima sesión, se plantea una tarea TD4. A través de los momentos exploratorio y tecnológico, se trata de identificar las lecciones del libro de texto para la escuela primaria en las que se incluya el significado cociente. Finalmente, para cerrar con el estudio de este significado se gestiona un momento para el trabajo con la técnica: resolver problemas en los que está implicado el significado cociente.

Una vez concluido el estudio de los diferentes elementos de la OD, sólo resta articular estos elementos con la dirección de un proceso de estudio concreto, para ello, en la sesión 11 se plantea una tarea TD3, los estudiantes que han dirigido un proceso de estudio relativo a los racionales tienen cuatro consignas: identificar la noción para la cual fue planeada la clase; justificar la planeación; analizar la manera en la que desarrollaron los diferentes momentos didácticos y; enunciar las dificultades que los niños tuvieron para resolver las tareas propuestas. Gestionada a través de un contrato basado en la mayéutica socrática, los estudiantes que no han dirigido un proceso de estudio relativo a los decimales deberán sugerir explicaciones plausibles para los fenómenos observados por sus compañeros.

Este contrato permite que en el interjuego de preguntas y respuestas, F1 incorpore algunos elementos de la praxeología docente estudiada, por ejemplo, precisa las nociones matemáticas incluidas en las tareas que planearon los estudiantes, la necesidad de plantear tareas en las que los niños puedan manipular el material y la necesidad de favorecer la evolución de las representaciones de los niños. Para finalizar, F1 institucionaliza nuevamente los significados de la fracción, los contextos en los que se encuentran (reparto y medición) y los tipos de magnitudes que pueden representarse mediante fracciones (discretas y continuas).

4.4.3. Las restricciones. El énfasis en el constructivismo

Una de las restricciones con mayor peso en el proceso de estudio de F1, tiene que ver con el modelo epistemológico que guía sus elecciones, en este proceso existe un domino claro de la homología en tanto técnica del formador, es decir, todos los elementos de la OM han sido reconstruidos gestionando los momentos didácticos que se desea estructuren los estudiantes con sus eventuales alumnos. Por lo general, dicha homología sigue una secuencia que inicia con el momento de exploración, sigue con el momento tecnológico teórico (en el que se incluye la institucionalización) y el momento para el trabajo de la técnica, para finalizar -casi invariablemente- con una tarea de naturaleza didáctica ligada al elemento de la OM.

Si se toma esta secuencia como una técnica de formación, da cuenta de un discurso teórico –ligado al constructivismo- que justifica las acciones de F1, este discurso parece estar sustentado en un modelo epistemológico constructivista en el que se toman en cuenta de manera simultánea los momentos exploratorio y tecnológico teórico. En otros términos, este modelo,

> … se caracteriza por el hecho de contextualizar la actividad de resolución de problemas en situación, en una actividad más larga de

> construcción de conocimientos y por el hecho de considerar que el aprendizaje es un proceso activo de construcción a partir de las adquisiciones anteriores y bajo contratos determinados…. (Bosch y Gascón, 2002, p. 11)

Empero, lo más importante es que este modelo orienta también las acciones de reconstrucción de los elementos didácticos de la praxeología estudiada, es decir, a diferencia de los dos procesos anteriores, en éste también el modelo constructivista provee de un discurso tecnológico para la gestión de las tareas didácticas y los diferentes momentos exploratorios y tecnológico teóricos. Sin embargo, debe advertirse que los momentos tecnológicos gestionados para las tareas didácticas, por lo general no incluyen al componente teórico que permite dar sentido a las tareas planteadas, por esta razón es común que permanezcan simplemente en el nivel de lo tecnológico.

En este mismo tipo de tareas es destacable la ausencia de momentos para el trabajo con la técnica, dicha ausencia es evidente si se advierte que las tareas de naturaleza didáctica sólo se plantean una ocasión, como una especie de institucionalización didáctica del elemento matemático reconstruido. Por esta razón, puede inferirse que al final del proceso de estudio los estudiantes difícilmente habrán construido una técnica eficaz, que les permita cumplir con las diferentes tareas didácticas. No obstante estas características, lo sobresaliente en la dinámica interna de este proceso es el intento de F1 por articular los diferentes elementos de la organización matemática entre sí y con los elementos didácticos de la praxeología docente.

Este intento articulador nos lleva a analizar el segundo tipo de restricciones sobre el proceso, éstas tienen que ver con el “autismo temático” y se manifiestan en los intentos de F1 por articular los elementos de la organización matemática, es decir, un intento por romper con el “autismo temático” desde el nivel de la disciplina se manifiesta a través del intento por establecer una relación entre los significados parte-todo, medida y los errores de los niños. Sin embargo, estos esfuerzos desaparecen en los casos de los significados cociente y operador multiplicativo y sobre todo en el caso de los números decimales. En éste último, si bien F1 precisa que estos números son una representación más de los racionales, no precisa su relación con los otros elementos estudiados, por esta razón, al igual que en los anteriores procesos, los números decimales permanecen como un elemento casi aislado de los números racionales, hecho que resulta significativo si se piensa que en las sugerencias curriculares éstos números están ligados con los significados medida, operador multiplicativo y con las nociones de equivalencia y orden. Finalmente, como en los otros procesos sucede, los algoritmos para operar con los números decimales no fueron integrados en el estudio de esta praxeología.

4.5. CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

En este capítulo hemos visto cómo los formadores dirigen la reconstrucción de las praxeologías docentes relativas a los números racionales, específicamente hemos analizado la estructura de la praxeología reconstruida y la dinámica que cada uno de los formadores observados imponen en el proceso de estudio.

En este sentido resulta significativo observar cierta coherencia entre las praxeologías matemáticas sugeridas en los programas de estudio y aquellas que fueron reconstruidas por los tres formadores, al analizar las tareas matemáticas que plantearon los tres formadores, esto es, en las tareas matemáticas presentes en los tres procesos de estudio, se ha observado que éstas reflejan las preocupaciones fundamentales de los formadores, a saber: identificar situaciones en las que la fracción adquiere sus diferentes significados; dominar la técnica algorítmica para la adición y sustracción de fracciones y aplicar los conocimientos que sobre los números racionales se estudiaron. Estas preocupaciones también se hayan presentes en los materiales curriculares.

En lo que respecta a las tareas didácticas, lo sobresaliente es el escaso número de tareas que se plantean en los tres procesos de estudio observados, sólo dos tipos de tareas didácticas fueron planteadas por los tres formadores: análisis de la dirección de un proceso de estudio e identificación de las dificultades inherentes a un dispositivo de estudio. Estos tipos de tareas reflejan también las preocupaciones didácticas de los tres formadores, preocupaciones que también pueden encontrarse en los programas de la asignatura.

Si consideramos las tareas matemáticas y didácticas comunes a los tres procesos de estudio analizados, podríamos decir que en términos generales se reconstruye una praxeología docente incompleta, ya que no se plantean tareas para identificar el significado de operador multiplicativo, para la concepción y selección de dispositivos de estudio, para identificar las organizaciones matemáticas en los programas de estudio o para la planeación de un proceso de dirección del estudio.

Por otra parte, en lo que corresponde a las particularidades, en el caso de F4 hemos observado que reconstruye una praxeología incompleta en la que el trabajo con la técnica es un momento privilegiado, aunque otros elementos praxeológicos son estudiados a través de una sola tarea, es el caso del significado operador multiplicativo. Estas características nos permiten decir que la praxeología reconstruida en este proceso no es del todo coherente con los planteamientos curriculares.

En lo que respecta a la dinámica interna del proceso de estudio puede decirse que ésta se orienta por un modelo epistemológico *Clásico* asociado al “Euclidianismo”, ya que F4 gestiona fundamentalmente dos momentos didácticos, el tecnológico teórico y el del trabajo con la técnica. Guiado por este modelo, el proceso de estudio que dirige F4 da un énfasis excesivo a la explicitación de las definiciones, principios y teoremas y deja a la responsabilidad de los formados los otros momentos didácticos.

En el proceso dirigido por F2, lo que se ha visto es la coherencia entre la praxeología reconstruida y los mandatos curriculares, en lo que se refiere a la dinámica interna es observable la impronta del autismo temático, del tiempo legal de la enseñanza y de un modelo epistemológico “constructivista”.

El autismo temático se refleja en la imposibilidad de F2 para encontrar una “razón de ser” en los niveles superiores de la codeterminación didáctica y para articular los diferentes elementos estudiados. Este autismo provoca un encierro en lo matemático que provoca dos roles para el estudio de lo didáctico, uno funciona como una especie de extensión para las tareas matemáticas y el otro tiene que ver con tareas dirigidas al estudio de un elemento didáctico específico, en estas últimas es donde se reflejan con mayor fuerza las restricciones del tiempo legal, es decir, no obstante la importancia de este tipo de tareas, al parecer por restricciones de tiempo sólo aparecen en un número muy reducido.

En lo que respecta al modelo epistemológico que sirve a F2 como referencia, lo que se puede ver en la dinámica interna es que el proceso de estudio reposa fundamentalmente sobre los momentos de exploración y el tecnológico teórico, esto significa que privilegia la resolución de tareas y la justificación de las técnicas pero no da mucha importancia a la gestión de momentos para el trabajo con la técnica.

En el caso de F1 lo destacable es la inclusión de tareas no sugeridas en los programas, lo significativo es que éstas son de índole didáctico y además no fracturan la coherencia entre la praxeologías sugerida y reconstruida. En lo que concierne a la dinámica interna del proceso de estudio lo significativo en este caso es la influencia del modelo constructivista en la gestión de tareas matemáticas y didácticas, esto es, sin importar la naturaleza de la tarea planteada, F1 privilegia el momento exploratorio y tecnológico teórico por encima del momento para el trabajo con la técnica.

V. TÉCNICAS O REGULACIONES PARA LA RECONSTRUCCIÓN DE PRAXEOLOGÍAS DOCENTES

Como las praxeologías que los formadores observados han reconstruido son espontáneas, las técnicas de formación que utilizan para dirigir el proceso de estudio no se apoyan en saberes sistematizados *a priori* o totalmente explícitos, se apoyan en una integración de saberes venidos de distintos campos: del disciplinario, de la didáctica o de la comunidad de la cual forman parte. Estos saberes, señala Coope (et al, 2002), tienen una ecología, es decir, viven en ciertos lugares, algunos son explícitos y se transmiten por medio de escritos, otros compartidos por la comunidad de formadores permanecen implícitos y se pueden transmitir oralmente. Los hay también de carácter público o privado, esto es, se les puede encontrar en textos para la formación o como parte de las representaciones de los formadores.

En correspondencia con esta idea, el objetivo de este capítulo es analizar la manera en la que estos saberes se expresan en la práctica efectiva de los formadores, en otros términos, se trata de analizar las técnicas que los formadores utilizan para gestionar las diferentes tareas de formación y eventualmente, los elementos tecnológicos que las justifican. Para ello interpretaremos dichas técnicas como regulaciones en el sentido de Brousseau, en la medida que su objetivo es mantener o restablecer un equilibrio en la relación didáctica, las técnicas que utilizan los formadores pueden ser consideradas como regulaciones. En este sentido, cabe recordar que para Brousseau,

> …en la relación didáctica, el profesor se manifiesta por la elección, la ruptura y la sustitución de contratos siguiendo índices de regulación que condicionan la evolución del sistema (didáctico) y permiten mantenerlo en un ámbito de eficacia aceptable. Las regulaciones son inherentes a la acción y hay índices sobre los cuales se apoyan para traer nuevamente el resultado de la acción a una zona de aceptación cuando ésta se ha distanciado de ella. La regulación conduce al uso de diversas técnicas y, eventualmente, a la celebración de un nuevo contrato... (Brousseau, 1995, p. 17)

De manera general puede decirse que un sistema (didáctico) recibe informaciones del entorno en el que actúa y dispone de un regulador que distingue niveles de adaptación y de corrección que determina las condiciones de su funcionamiento. Sin embargo, hay límites más allá de los cuales las correcciones no serán ya posibles en el propio sistema, lo que determinará los fracasos y comprometerá un nuevo proyecto, otro funcionamiento. Es decir, habrá rupturas del equilibrio en el funcionamiento de la relación didáctica que podrán ser resueltas al interior de las condiciones contractuales prevalecientes (regulaciones intra-contrato), otras conducirán a cambios de sujeción, a la sustitución del contrato (regulaciones inter-contrato). (Brousseau, 1995)

5.1. LA HOMOLOGÍA O LA TRANSPARENCIA DEL SABER DIDÁCTICO

Con el surgimiento de una ideología "constructivista" en educación, las estrategias basadas en la homología han cobrado auge en las instituciones formadoras de docentes, una de sus características fundamentales tiene que ver con gestionar un proceso de estudio análogo al que se desea que gestionen los profesores en formación cuando enseñen en las escuelas primarias, es decir, a través de las técnicas[185] basadas en la homología, el saber didáctico deviene "transparente", no se hace explícito porque se supone que el estudiante puede aprenderlo sólo mediante el contacto con él.

No obstante que las estrategias de homología permiten "…confrontar al estudiante con las dificultades que encuentra todo aprendiente…" (Kuzniak, 1994, p. 151), parten del supuesto que el nivel de matemáticas de los estudiantes es pobre, por lo que su objetivo no es modificar estos saberes sino adaptarse a ellos, por esta razón, las tareas que se plantean en una homología son las mismas que se plantean en la escuela primaria o en el mejor de los casos son un poco más complejas. A pesar de estos inconvenientes, Kuzniak (1994) señala que la mayor riqueza de este tipo de estrategias estriba en que las situaciones propuestas en la homología pueden servir como situaciones de referencia para introducir un

[185] Aunque Kuzniak (1994) las denomina estrategias, en el contexto de la TAD puede decirse que son *técnicas de formación* puesto que es través de ellas que el formador puede cumplir una tarea específica ligada con la formación.

discurso teórico más acabado, lo que implicaría establecer una relación entre la estrategias de homología y aquellas que parten del supuesto de la existencia de un saber didáctico que es necesario reconstruir o transponer. Sobre la base de estas consideraciones, en lo que sigue analizaremos la manera en la que los formadores utilizan la homología como técnica para reconstruir el saber didáctico.

5.1.1. La homología directa. Al interior de los límites del sistema didáctico.

Las estrategias de homología directa, señala Kuzniak (1994; 126) parten de una situación simple que permite la toma de conciencia sobre el proceso pedagógico seguido, pero en contraparte, afirma, se corre el riesgo de infantilizar al estudiante o de provocar que se resista a ellas por la trivialidad del conocimiento matemático puesto en juego.[186] Este tipo de estrategias intenta transmitir el saber didáctico poniendo en contacto a los estudiantes con un medio de enseñanza similar al que se desea que ellos gestionen y se caracteriza por olvidar toda aproximación a la transposición, es decir, por la ausencia de la institucionalización de los saberes didácticos puestos en juego.

Por otra parte, es necesario recordar que, para Portugais (1995), la actividad del formador puede desarrollarse en dos niveles distintos, dentro del sistema didáctico *stricto sensu,* cuando el formado juega el rol de alumno que estudia una praxeología matemática y dentro del sistema de formación, cuando el formado es interpelado por las situaciones de formación como un eventual profesor. Así, cuando se utiliza la homología como técnica de formación, el formador gestiona los diferentes momentos didácticos sin otorgar al estudiante el rol de eventual profesor, por esta razón, en estos casos la técnica utilizada se ubica al interior de los límites del sistema didáctico *stricto sensu.* En los siguientes apartados se analizará la manera en la que se despliega esta estrategia.

[186] Por su parte las estrategias de homología indirecta parten de una situación más compleja para transmitir un saber matemático no trivial a los estudiantes, pero la novedad de ese saber puede ocultar el proceso seguido (Kuzniak, 1994, p. 126)

5.1.1.1. La institucionalización a priori o la paradoja de la "devolución"

Antes de iniciar la gestión de esta estrategia, el formador (F4) había institucionalizado los diferentes significados de la fracción. Como se puede apreciar en el siguiente fragmento, esta institucionalización *a priori* es evocada por el formador cuando señala que se han estudiado ya los diferentes significados de las fracciones, sin embargo, a pesar de que esta acción revierte la naturaleza de la homología, inicia el despliegue de esta técnica como si no hubiese existido este momento, es decir, plantea la tarea a la manera de un primer encuentro o un momento exploratorio.

> M: Hemos visto los diferentes significados de las fracciones, en el entendido de que ustedes habían visto ya muchos cursos de matemáticas, aunque eso no quiere decir que ustedes deban empezar todas las clases con los niños por las definiciones a la hora de desarrollar una clase, ya veremos las distintas formas de abordar un tema. Bien, vamos a resolver un problema (reparte siete tarjetas a cada uno), si quieren hacer dibujitos en su libreta está bien. "Cinco niños se van a repartir 7 pasteles, se trata de que a cada quien le toque lo mismo y no sobre pastel, entonces ¿cuánto le toca a cada quien? (...) por parejas van a usar las siete tarjetas como pasteles ¿cómo reparten los pasteles?
> As: Uno a cada uno
> M: Pero no debe sobrar nada
> As: Le damos uno a cada niño y los otros los partimos a la mitad
> M: Ustedes piénsenle (los demás discuten entre ellos)

La institucionalización *a priori* le confiere a la tarea una naturaleza particular, la devolución[187] del problema más que un primer encuentro representa el inicio de una ostensión,[188] es decir, como el formador ha precisado los significados de la fracción sin haber planteado problemas, la tarea parece perseguir un objetivo: "mostrar" uno de los significados de la fracción ya precisados.

La modificación en el orden de los momentos didácticos resulta paradójica, puesto que si en una homología el momento inicial es el del primer encuentro, en este caso ha sido la institucionalización. Sin embargo, esta paradoja no pasa desapercibida para el formador, a pesar de la institucionalización *a priori* advierte

[187] "La devolución es el acto por el cual el enseñante hace aceptar al alumno la responsabilidad de una situación de aprendizaje (a-didáctica) o de un problema y acepta él mismo las consecuencias de esta transferencia…" Brousseau cit, por Panizza; 2003, p. 65)
[188] En las estrategias de ostensión, el profesor muestra un objeto y se supone que el alumno ve en él las nociones, los conceptos y las propiedades. (Cf. Ávila, 2001, p. 35)

que ésta no debe ser gestionada como momento inicial por los profesores en formación, esto es, en la perspectiva de F4 el primer encuentro parece ser un momento adecuado para los niños pero no para los profesores en formación.[189] No obstante los señalamientos sobre el orden de la institucionalización y el primer encuentro, F4 “devuelve” la responsabilidad a los alumnos para que encuentren y exploren un elemento de la OM a través del problema, momento que como se ha señalado ha sido desnaturalizado por la institucionalización previa.

5.1.1.2. La validación. La detención de la progresión didáctica

En correspondencia con la naturaleza de la homología, luego del momento del primer encuentro F4 gestiona un momento tecnológico en el que los formados deben justificar las técnicas que utilizaron para resolver el problema. Para gestionar este momento, como se puede apreciar en el siguiente fragmento, F4 establece un contrato en el que ocupa el rol central en la justificación de las técnicas, es decir, a pesar de que el *medio* le provee de una posible justificación empírica (los rectángulos de papel) o la posibilidad de que sean los mismos alumnos quienes las justifiquen, es él quien justifica tanto la técnica adecuada (repartir un pastel a cada niño y dividir los dos restantes en quintos) como aquella que no fue útil (dividir los pasteles restantes en medios).

> M: ¿Ya está? No debe sobrar nada
> As: Sí (unos), no (otros)
> As: Un entero y dos quintos (luego de tres minutos)
> M: ¿Un entero y dos quintos? Bien, ¿cómo lo resolvieron? A ver aquél equipo
> As: Le repartimos uno a cada niño y sobraron dos pasteles que dividimos en 5 partes cada uno y le dimos dos partes a cada niño
> M: Bien, entonces pastel completo para cada niño y otras partes. ¿Hubo quien hizo dibujitos? (señala a otro equipo) ¿qué dibujaron?
> A1: Los pasteles y los niños
> M: Un pastel para cada niño y ¿qué hicieron enseguida?
> A1: Los que sobraban los repartimos
> M: ¿Partieron por mitad cada pastel?
> As: Sí
> M: ¿Por qué no resultó?
> A1: Porque faltaban mitades para ajustar a cada niño

[189] Este mecanismo que hemos llamado “la paradoja de la homología” no es exclusivo de la gestión de F4 ya que, también F1 ha gestionado la institucionalización de los diferentes significados de la fracción antes del primer encuentro o del momento exploratorio.

M: A ver, en lugar de dividir estos pasteles en quintos ¿cuál sería otra alternativa? Piensen, rayen las tarjetas hasta que logren repartir todo el pastel, recuerden que cada parte debe ser del mismo tamaño. A ver en el primer procedimiento habíamos dicho que a cada niño le tocaba un entero $\frac{2}{5}$, ahora lo van a repartir de otra forma pero ¿a cada niño le puede tocar más de 1 $\frac{2}{5}$?

As: No

M: Entonces será otra expresión equivalente y es lo que están tratando de encontrar.

Sin embargo, el intento por gestionar el momento tecnológico fracasa, al parecer porque la tarea ha incluido un objeto de saber demasiado “antiguo”, es decir, la tarea no representa dificultades significativas para los estudiantes. Esta característica agota rápidamente el momento tecnológico y la progresión didáctica se detiene cuando los estudiantes no presentan dudas sobre el resultado o la técnica expuesta. Empero, el formador no reconoce estos índices de deterioro en la relación didáctica o considera importante que los estudiantes “vivan” la gestión de un momento tecnológico,[190] por esta razón, en lugar de gestionar la institucionalización, establece un mecanismo didáctico cuyo objetivo es reeditar la justificación. Este mecanismo consiste en plantear la búsqueda de otras técnicas para resolver la tarea.

Para generar este momento, que es crucial si de poner a los estudiantes en contacto con la técnica didáctica para gestionar el momento tecnológico se trata, F4 negocia “a la baja” las condiciones que permitan una búsqueda menos difícil (*Entonces será otra expresión equivalente y es lo que están tratando de encontrar),* es decir ofrece indicadores que le permiten asegurar una menor tasa de fracaso y orientar la búsqueda hacia técnicas algebraicas, cuando señala que los resultados deben ser fracciones equivalentes a 1 $\frac{2}{5}$ ofrece un indicador que permite a los estudiantes justificar por sí mismos sus respuestas y resolver la tarea en el plano de las representaciones convencionales, esto es, sin manipular los pasteles (los rectángulos de papel).

[190] Aunque otra motivación del formador puede haber sido que los estudiantes conozcan diferentes formas de resolverlo.

Así, la negociación "a la baja" ha modificado la tarea original, en lugar de repartir siete pasteles entre cinco niños la nueva tarea exige simplemente encontrar una fracción equivalente a $1\frac{2}{5}$, sin embargo, esta negociación al parecer no es percibida por el formador, ya que aunque menciona la condición de equivalencia, orienta a los estudiantes hacia el uso de estrategias menos sofisticadas, *rayen las tarjetas.* No obstante lo contradictorio de los señalamientos, resulta evidente la presencia de indicadores que buscan prevenir el fracaso o cambiar la naturaleza de la tarea.

Al parecer, las regulaciones que pone en marcha el formador tienen que ver con la importancia que da al momento tecnológico dentro de la homología, por esta razón, sin importar los índices de deterioro en la relación didáctica, se empeña en gestionar el momento de la constitución del entorno tecnológico teórico, tal vez porque siguiendo lo que marcan los materiales escolares, asume que:

> Es formativo, para clarificar la naturaleza del error, que el alumno sepa por qué con determinados procedimientos no es posible resolver el problema. Esto se puede lograr si el maestro propicia un clima para que los niños expliquen la lógica de sus estrategias, identifiquen sus errores y los corrijan. (SEP; 1994, p. 17)

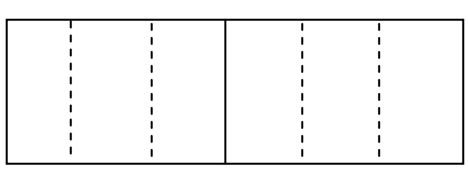
Siguiendo esta idea puede decirse que justificar las técnicas utilizadas para resolver un problema es una acción importante en todo proceso de estudio, ya sea para diferenciar las técnicas útiles de las que no lo son o para reconocer los errores en dicha técnica. Al parecer, este es el discurso tecnológico que guía las acciones de F4, quien ha intentado gestionar un momento justificatorio en la idea que la discusión entre los estudiantes les permitiría dilucidar las técnicas adecuadas y las que no resultan útiles para esta tarea. Sin embargo, ante la imposibilidad de confrontar diferentes técnicas en el momento de la exploración, este momento es desnaturalizado ya que la exigencia de buscar una técnica (personal) para resolver la tarea es sustituida por la búsqueda de diferentes técnicas, exigencia que no procede de una condición de la situación.

5.1.1.3. La validación reiterada.

El momento tecnológico es importante porque en él se observan las técnicas como despliegue de un conocimiento personal, pero si la justificación de las técnicas se efectúa luego de que una se ha aceptado, las circunstancias se modifican radicalmente porque la situación se ubica en un plano irreal, esto es, las técnicas no reflejan el conocimiento personal ligado a una tarea. Por esta razón, hemos denominado a este segundo momento como "validación reiterada", ya que cumple fines didácticos que no han surgido de las exigencias de la situación sino del contrato que ha establecido el formador. Veamos ahora en este segundo momento tecnológico la manera en la que el formador gestiona las justificaciones de los estudiantes

Como se puede observar en el siguiente fragmento, el error que aparece en primer lugar tiene que ver con la relatividad de la unidad, esto es, al considerar los dos pasteles como unidad los estudiantes llegan a un resultado incorrecto ($\frac{1}{5}$), como se puede apreciar también, este error es detectado por un estudiante (A2) lo que podría haber dado pie al inicio de la discusión, sin embargo esto no sucede, el formador no delega la responsabilidad a A2 para que éste justifique las razones de su desacuerdo, tampoco pone a consideración de los otros estudiantes la pertinencia de la respuesta, lo que hace es asumir un papel central en la escena de la clase, se constituye como el centro de las justificaciones y es quien determina la validez de la respuesta a partir de la reconstrucción de la técnica empleada.

> (Antes de estas justificaciones, los estudiantes han explicado cómo, a partir de la subdivisión de los pasteles en décimos, veinteavos y cuarentavos, se puede resolver el problema, en estos casos el formador las ha validado como adecuadas)
> M: Otro equipo más, alguien que quiera pasar
> A1: Tenemos los dos enteros que faltan por repartir, lo que hicimos fue juntar los dos pasteles y dividirlos así



El tercer pedacito del primer pastel se complementa con el primero del segundo y así les toca una parte igual a cada uno, o sea, teníamos dos pasteles, pero si los juntamos representan un solo entero, entonces los dividimos pero eso no representa una fracción, simplemente es un pedazo que va a representar una fracción, pero en los pasteles juntos a cada niño le tocaría un pastel entero y $\frac{1}{5}$

A2: Sería lo de un pastel, porque es sólo $\frac{1}{5}$

A1: No, porque cuando dividimos el pastel, esa parte no significa una fracción

A2: Lo que pasa es que no lo que hiciste con la misma medida como los casos anteriores

M: Para que lo entiendan mejor, lo que hicieron fue juntar los dos pasteles, ya que estaban juntos, los dividieron en partes iguales

A1: Esto (se refiere a una parte de los dos pasteles) formaría una fracción

M: Ahora si, la respuesta con números sería

A2: Un entero mas $\frac{1}{5}$

M: Un entero más $\frac{1}{5}$, ¿es correcta?

As: Sí (unos) no (otros). Si lo dejan así se va a pensar que es $\frac{1}{5}$ de un pastel

M: Sí, pero lo que ustedes quieren representar es $\frac{1}{5}$ pero, ¿de cuántas unidades?

As: De dos (tímidamente)

M: Y la quinta parte de dos enteros ¿a cuánto equivale? (silencio) pues junten $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{5}$

As: Dos décimos (tímidamente)

A: No, $\frac{2}{5}$

M: $^1/_5$ de aquí y $\frac{1}{5}$ de allá, lo que ya teníamos

As: $\frac{2}{5}$

M: $\frac{2}{5}$, un quinto de dos enteros, separen un quinto de un entero, un quinto de otro entero ¿Qué es lo que hicieron con ellos? Hagan de cuenta que aquí al niño le tocó su ración sin partir, aquí también, pero aquí le tocaron dos pedacitos que son iguales a una misma ración, esta partecita equivale entonces a $\frac{1}{5}$ de un entero, o bien si tomamos toda esta parte (sombrea la parte correspondiente a $\frac{2}{5}$), corresponde a $\frac{2}{5}$ aunque no tengamos la rayita aquí, es por la unidad que tenemos, ¿qué falta expresar ahí?

As: Más otro quinto

M: Bien escríbelo (el alumno completa $1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$)

El mecanismo didáctico que utiliza F4 para cumplir con su papel de justificador, consiste en tomar el argumento de A2 (*lo que pasa es que no lo* *hiciste con la misma medida, como en los otros casos)* y antes de confrontar este señalamiento con el resto del grupo, sustituye la reflexión que la clase podría hacer por su propia reconstrucción de la técnica. Una vez reconstruida, para justificarla sólo le concede un papel limitado al grupo: preguntar si la respuesta es correcta sin solicitar argumentos a pesar de las opiniones divergentes (unos alumnos dicen sí otros dicen no). En el lugar de los argumentos de los estudiantes, la justificación se apoya en una nueva reconstrucción de la técnica, sólo que ahora F4 orienta sus preguntas hacia el resultado adecuado, *ustedes quieren representar* $\frac{1}{5}$ *pero ¿de cuántas unidades? ¿y la quinta parte de dos enteros a cuánto equivale?*

Estas interrogantes, como se puede ver, han bajado el nivel de dificultad de la tarea, en lugar de que los alumnos reflexionen sobre la técnica inadecuada, lo que hubiera constituido un momento tecnológico real, sólo se limitan a responder a las preguntas orientadas del formador, con esto, el significado global del objeto de saber se ha perdido, responder a dichas cuestiones no permite reflexionar globalmente sobre la técnica empleada, así, lo que se establece es un contrato didáctico en el que aparece el efecto Topaze[191], como F4 supone que los estudiantes solos no podrán justificar los argumentos, mediante el efecto Topaze crea la ficción de que son ellos los que detectan y justifican el error[192].

No obstante, la justificación colectiva[193] no se sostiene durante todo el episodio, como se puede ver en el siguiente fragmento, cuando el colectivo no puede detectar el error, el formador pone en marcha regulaciones que le permiten

[191] El efecto Topaze, llamado así por Brousseau en referencia a la celebre obra de Pagnol, es un efecto cuya recurrencia excesiva es indeseable en ciertos contratos didácticos y se caracteriza, como lo señala Brousseau (1998; 52), porque la respuesta que debe dar el alumno es determinada previamente por el profesor, por esta razón, elige las preguntas a las cuales esta respuesta pueda ser dada, aunque los conocimientos necesarios para producir esas respuestas cambian su significación. Tomando unas preguntas cada vez más fáciles, el profesor intenta obtener la significación máxima por el máximo de alumnos y, si el conocimiento previsto desaparece completamente se está en presencia del "efecto Topaze"

[192] La identificación y gestión de los errores, es una acción consustancial al momento tecnológico, ya que éstos son índices de la ineficacia de las técnicas empleadas y por ello son parte de la justificación.

[193] Decimos que hay una justificación colectiva cuando el formador plantea preguntas al grupo sin considerar los argumentos o las respuestas individuales. En estos casos, el formador toma las respuestas colectivas como índices de un equilibrio didáctico adecuado aunque, en muchos casos dicho equilibrio puede ser sólo una ficción.

sostener el contrato establecido. Un ejemplo de estas regulaciones puede verse en el siguiente fragmento, específicamente en el momento en que a pesar de los indicadores que da sobre la presencia de un error (*¿correcto? ¿coinciden?),* los estudiantes son incapaces de reconocer la ineficacia de la técnica $\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{80}=\frac{10}{80}$ Ante esa imposibilidad, el reloj didáctico corre el riesgo de detenerse, para reactivarlo F4 introduce un indicador dado anteriormente: la condición de que todos los resultados deben ser fracciones equivalentes. Con ello, la relación didáctica se reestablece de manera relativa, a pesar del indicador dado sólo se detecta un error ($\frac{8}{40}$).

> M: Otro procedimiento más
> A: Primero dividimos un pastel por la mitad hasta que nos dio cuatro partes, como eran 5 niños no se ajustaba, entonces lo dividimos otra vez por la mitad y vimos que sí se ajustaba, les toca un octavo y quedan $\frac{3}{8}$, entonces dividimos el otro pastel en octavos, como los $\frac{5}{8}$ ya estaban repartidos no se toman en cuenta, los tres octavos restantes son $\frac{6}{16}$, uno para cada niño, llevamos $\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$ y nos queda $\frac{1}{16}$, éste lo dividimos en 5 pedazos que serían 80avos, entonces les tocaría $\frac{1}{80}$ a cada niño y ya está todo repartido $\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{80}=\frac{10}{80}+\frac{5}{80}+\frac{1}{80}=\frac{16}{80}$
> As: ¡Ah! (aplausos)
> M: ¿Correcto?, (silencio) bien precisen entonces su resultado de acuerdo a este, ¿coinciden?
> As: Sí (tímidamente)
> M: A ver, tenemos 1 $\frac{2}{5}$, 1 $\frac{4}{10}$, 1 $\frac{4}{80}$, 1 $\frac{16}{80}$ y 1 $\frac{32}{160}$ ¿son equivalentes?
> A: Algunos están mal
> A: ¿Por qué?
> A: El tercero (1$\frac{4}{80}$) está mal porque sólo dio el resultado de un pastel, fraccionaron sólo uno de los dos pasteles
> M: ¿Es el único que está mal?
> As: También el equipo de César sólo repartió un pastel (se refieren a 1 entero $^{2}/_{5}$)
> M: O sea que les faltó repartir el segundo pastel, ¿los demás son correctos? La expresión racional entonces es diferente, ¿qué pueden decir de eso? Es decir, tenemos en la parte racional 1 $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{10}$, $\frac{4}{80}$, $\frac{16}{80}$, $\frac{32}{160}$, ¿alguna observación sobre esas fracciones?
> A: Que son equivalentes

M: ¿Todas son equivalentes? ¿cómo sabemos que $\frac{2}{5}$ y $\frac{4}{10}$ son equivalentes? (silencio) ya lo saben trabajaron mucho tiempo con fracciones.
A: Por que si las multiplicamos en forma cruzada, nos da el mismo resultado
M: O sea que equivaldría a multiplicar 2x10 y 5x4, entonces ¿2x10 y 5x4 da cuánto?
As: 20
M: Los dos que siguen ¿son equivalentes?
As: Sí
M: ¿Las dos que siguen?
A: Sí
M: ¿Las que siguen?
As: ¡Ahh!
M: Éstas (señala $\frac{8}{40}$, $\frac{16}{80}$ y $\frac{32}{160}$)
A: Están mal
M: ¿Porqué? Vuelvan a revisar su procedimiento, planteen su suma y la operación con las fracciones que le hayan tocado a cada niño y comparamos el resultado ya que algunas no son equivalentes entre sí y eso significa que no son correctas, ¡busquen el error!

Como existen errores no detectados, F4 da otros indicadores que evidencien su presencia, *¿es el único que está mal? ¿todas son equivalentes?,* sin embargo, a pesar de las muestras de adhesión que F4 ha demandado la progresión didáctica no marcha, al parecer porque los estudiantes no disponen de un elemento tecnológico que les permita la detección de la técnica para identificar fracciones equivalentes, ausencia que es subsanada por F4 mediante el recuerdo.

Una vez consumado el encuentro con los errores, F4 solicita la búsqueda de la naturaleza del error, lo notable en este caso, como se puede observar en el siguiente fragmento, es que por primera vez el centro de la justificación no es ocupado por el formador, los argumentos de los estudiantes ocupan ese lugar. Cumpliendo con la responsabilidad asignada, A1 y A3 identifican el error y su naturaleza: un empleo inadecuado de la técnica para sumar fracciones. A pesar de la resistencia de A2 para aceptar los argumentos en contra, A3 y A4 van consolidando las justificaciones de A1, por esta razón, a partir del consenso sobre el error, F4 acepta su presencia y al parecer, también su naturaleza, por lo que decide tomar a su cargo la precisión de la técnica adecuada.

M: ¿Cuál no está bien?
As: La de $\frac{8}{40}$

A1: Yo digo que son $\frac{4}{20}$

A2: No

M: A ver pasa

A1: En este paso $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$ eran $\frac{1}{5}$, en éste eran $\frac{4}{20}+\frac{4}{20}$ porque son 20 de uno y 20 de otro entonces le tocan $\frac{8}{20}$

As: Nooo

A2: Por ejemplo los dividí en 40 (señala el dibujo de los dos pasteles) y son 20 y 20, pero estamos tomando en general 40

A1: Toma los 40 y es como si estuvieras tomando sólo un pastel, cada uno no está dividido en 40 partes

A2: Pero es que les toca de a $\frac{8}{40}$

A1: No porque los estás juntando

A2: Por eso, pero les tocan de 40, o sea $\frac{8}{40}$

A1: No, es lo mismo que César, los juntó y se hizo un solo pastel en 40 partes

A2: Pero es que sí te sale, si los juntas les toca $\frac{8}{40}$

A1: No, los estas juntando, es como si dividieras un solo pastel en todas estas partes

As: Nooo (risas)

A2: Pero se juntan y ya son 4, entonces son $\frac{8}{40}$

A3: Pero en las fracciones no puedes sumar los denominadores más que el numerador

A2: No entiendo (se sienta)

A4: Lo que pasa es que tenemos una confusión (risas), la regla de las fracciones dice $\frac{4}{20}+\frac{4}{20}$ es $\frac{8}{20}$, entonces, cuando una compañera nos dice que $\frac{4}{20}+\frac{4}{20}$ son $\frac{8}{40}$ estamos dejando fuera esta regla, esa es la confusión,

M: En la suma de fracciones se opera con los numeradores pero los denominadores se pasan igual. A ver, les pedí que continuaran el procedimiento a partir de fraccionar los dos pasteles, veamos, Omar ustedes lo tenían así (dos pasteles divididos en medios) ¿Podemos repartir a cada niño? No porque son 5 niños, no nos alcanza, alguien quiere pasar?

A: Como no podemos repartir, tenemos que volver a dividir (divide cada pastel en cuartos) tenemos 8 pedazos, repartimos uno a cada niño (sombrea $\frac{5}{4}$)

M: Hasta ahí, la parte que le tocó a cada niño es $\frac{1}{8}$, como ya repartimos un pastel, tenemos un entero y $\frac{1}{8}$, eh no, no, ¿es un octavo?

As: Sí, sí, no,

M: ¿Es un octavo? Aquí a cada niño ¿cuánto se le repartió

A: $\frac{1}{8}$

As: Es un cuarto

M: ¿Ya entendieron dónde entró la confusión? dos enteros se consideraban…

A: Como uno
M: Síguele (el alumno retoma su explicación)
A: Entonces es $\frac{1}{4}$, más $\frac{1}{8}$ más (ha dividido en octavos los tres cuartos restantes)
M: Sí, un octavo, todavía queda un cachito
A: (Escribe $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$)
M: El octavo restante se divide en 5, pero cada pedazo es ahora…
As: Un cuarentavo
M: Sí un cuarentavo (el alumno completa $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{40}$) ahora hay que hacer esa suma, mínimo común 40 igual a 10+5+1 = 16 pero falta
As: El entero ($1\frac{16}{40}$) ¿ya está bien? ¿sí verdad? Ahora si, a contestar el libro

No obstante la aparente aceptación de la naturaleza del error, cuando F4 reconstruye la técnica comete el mismo error[194] que A1, al parecer esta acción fija un rumbo definitivo para la clase, a partir de este momento F4 comienza a cerrar el episodio mediante la institucionalización de la técnica. Sin embargo, lo destacable en este momento es la manera en la que F4 se ha desplazado del rol de justificador para ceder esta responsabilidad a los argumentos de los estudiantes. Si bien los argumentos hubiesen podido validarse con base en un elemento de la misma situación o un elemento tecnológico (las reglas para operar con fracciones), este momento de la clase se distingue por la gestión que realiza el formador, en otros términos, en este momento F4 puede poner en contacto a los estudiantes con un medio de enseñanza similar al que se propone en los materiales curriculares.

Finalmente, es necesario enfatizar varios puntos sobre la técnica utilizada por F4. En primer lugar, a pesar de basarse en la homología directa F4 rompe con la naturaleza de esta técnica, la institucionalización como momento inicial rompe con el modelo (al menos formal) para la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Esto representa una primera dificultad para la homología, puesto que si consideramos que el supuesto básico sobre el que reposa esta estrategia tiene que ver con que el estudiante aprenda a ejercer una práctica tomando contacto con ella, esta fractura ha tenido repercusiones importantes en la

[194] Aunque cabe observar que, si bien F4 cometió un error relacionado con la relatividad de la unidad, el error que había sido detectado y justificado tenía que ver más bien con una técnica defectuosa para sumar fracciones

constitución de un medio didáctico como el que la homología intenta mostrar. Por otra parte, aún cuando la institucionalización se había realizado previamente se había dado en términos generales, si en la tarea analizada la intención del formador era provocar un primer encuentro y una exploración con un elemento específico de la OM (el significado parte-todo), este elemento ha permanecido implícito en la gestión de los diferentes momentos, esto es, no ha sido precisado.

Ahora bien, la ausencia de institucionalización matemática, es producto de la intención de F4 por sostener su contrato al interior de los límites del sistema didáctico *stricto sensu*, es decir, plantear la tarea como un primer encuentro con el significado parte-todo, implicaba otorgar al formado el rol de profesor, por esta razón es comprensible también la ausencia de institucionalización didáctica.

A pesar de que en los diferentes momentos se han incluido objetos didácticos como el dispositivo en el que aparece el significado parte-todo, los diferentes momentos didácticos para dirigir un proceso de estudio, la importancia de la diversidad de técnicas y de su justificación y la gestión del error, todos sin excepción son objetos que han quedado "transparentes", es decir, en el ámbito de lo implícito. En otros términos, en una homología dentro de los límites del sistema didáctico *stricto sensu*, como la que se ha analizado, los objetos de saber didácticos no aparecen de forma explícita, por esa razón puede decirse que se supone que son "transparentes" y que deberán aprenderse solamente a través del contacto con el medio que el formador estructura en su clase, medio que es similar al que debe gestionarse en la escuela primaria.[195]

5.1.2. La institucionalización matemática. Cruzando los límites del sistema didáctico

Recordemos siguiendo a Kuzniak (1994; 153-155), que las estrategias basadas en la transposición parten de un supuesto, los elementos constitutivos del saber sobre la práctica de enseñanza existen y son susceptibles de ser enseñados. De manera que este tipo de estrategias se fundan sobre la existencia de ese saber

[195] La tarea analizada es la única que F4, el formador con mayor experiencia, ha gestionado mediante una homología. Las estrategias basadas en la transposición tampoco aparecen en el proceso que ha dirigido F4.

teórico que organiza y estructura la práctica de la enseñanza. Su diferencia respecto de las estrategias de homología reside en que, en estas últimas, los formadores desconocen la necesidad de transferir dichos saberes. Sin embargo, cuando se utilizan técnicas basadas en la transposición, una primera dificultad tiene que ver con la selección de los contenidos que deben reconstruir en el cuadro de la formación.

En ese sentido, una primera aproximación a la transposición, que se observa en los procesos de estudio, tiene que ver con la institucionalización matemática, en estos casos los formadores seleccionan un objeto matemático cuyo conocimiento no resulta esencial para los alumnos del nivel básico pero sí para los profesores en formación. Por lo regular, el objeto matemático seleccionado es alguno de los significados de la fracción y el hecho de que el formador lo institucionalice tiene que ver con su intención de "transponer" un elemento de la OM que es propio de las tareas profesorales.

No obstante que, en esta primera aproximación a la transposición, el saber didáctico permanece como un objeto de saber "transparente", sin precisarse, consideramos que esta técnica se basa en la transposición porque a través de ésta los estudiantes tienen la posibilidad de ocupar el rol del eventual profesor, en otras palabras, en estos casos presumimos la presencia de una técnica basada en la transposición porque la actividad del formador y los formados no permanece al interior del sistema didáctico *stricto sensu,* sino que, al poner en juego un saber matemático exclusivo de los profesores, la acción se ubica en el sistema de formación. Ahora bien, respecto de esta técnica lo que se ha podido observar es la presencia de dos variantes que en los siguientes apartados se analizarán

5.1.2.1. La mayéutica socrática como posibilidad del encuentro con la OM

Una de las técnicas que los formadores utilizan como primera aproximación a la transposición consiste en establecer un contrato basado en la mayéutica socrática para gestionar un momento del primer encuentro. En estos casos, como se puede observar en el siguiente fragmento, la consigna (encontrar semejanzas y diferencias entre los problemas) no corresponde a una tarea que resolverían los niños, lo que constituiría el inicio de una homología, al contrario de esto, la consigna corresponde a una tarea profesoral, analizar dos dispositivos de estudio en los que está implícita la función operador (entero o fraccionario).

> M:[196] Bueno hemos trabajado ya con las fracciones, ahora vamos a analizar dos problemas que están planteados aquí en el pizarrón *1) Un lado A de una figura mide $\frac{3}{4}$ de cm. Si se hace una copia cuyos lados sean 5 veces los de la original. ¿Cuánto medirá el lado A de la copia? 2) El lado de una figura mide 5cm. Si se hace una copia cuyos lados sean $\frac{3}{4}$ de los de la original ¿cuánto medirá ese lado?*
> M: Por equipo vamos a ver en qué se parecen y en qué son diferentes, mientras los equipos los revisan ¿alguien quiere pasar a resolverlos? (pasan dos alumnos)
> M: Resuélvanlos como ustedes puedan, si quieren no usen el algoritmo
> A1: (Resolviendo el problema 1) $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{15}{4} = 3\ \frac{3}{4}$, son 3 enteros $\frac{3}{4}$
> A2: (Resolviendo el problema 2) Son 3 enteros 3 cuartos
> M: ¿Cómo le hiciste?
> A2: Multipliqué $\frac{3}{4}$ por 5
> M: Pero ¿por qué ese resultado o por qué haces una multiplicación?
> A2: Se convierte en una fracción mmmm...
> M: Está bien pero ¿por qué hiciste eso?
> A2: Porque los $\frac{3}{4}$ son más grandes, entonces los voy a multiplicar por...
> M: ¿ $\frac{3}{4}$ es más grande? Pero si el resultado es 3 $\frac{3}{4}$ ¿quiere decir que es menor que 5?
> A2: No, no sé
> M: ¿Por qué lo hiciste? (silencio) Bien, enseguida lo comentaremos

Antes de establecer la mayéutica, el formador (F1) pone en marcha un mecanismo didáctico que consiste en “devolver” las situaciones problema a dos alumnos. Este mecanismo tiene un objetivo, “mostrar” a los demás estudiantes la función que cumple la fracción en cada uno de los problemas, mediante esta acción se prepara el medio para la gestión de la mayéutica, es decir, en tanto que el significado operador multiplicativo está implícito en las técnicas para resolver los problemas, mostrar estas técnicas es un intento por establecer ciertos elementos que permitan clarificar la búsqueda. Sin embargo, a pesar de que los estudiantes han utilizado técnicas adecuadas para resolver los problemas (multiplicar ¾ por 5),

[196] Los fragmentos que sobre esta tarea se presentan corresponden a la séptima sesión del proceso de estudio dirigido por F1

no logran justificarlas y el equilibrio didáctico se encuentra en riesgo, conciente de los índices de deterioro en la relación el formador culmina este momento y como se puede observar en el siguiente fragmento, termina por establecer un nuevo contrato: la mayéutica socrática.

M: Ya tenemos los resultados ¿en qué se parecen estos problemas?
As: En el resultado (algunos)
M: ¿Y en qué más?
A: En la estructura
As: En el contexto
M: ¿Y en qué son distintos? ¿por qué la mayoría tuvo problemas para resolver el 2?
A: Porque el 2 es de división y el uno se puede hacer con sumas o multiplicación
M: ¿Y cómo sabemos eso? Si es la misma estructura, lo acabamos de decir
As: Es que el 2 está un poco más complicado
M: ¿Por qué?
A: Porque en el 2 se da lo que mide la figura y en el 1 no. Entonces en el 2 tenemos que convertir los $\frac{3}{4}$ de 5
M: ¿Los $\frac{3}{4}$ de 5? ¿ y en el 1?
A: Acá (el 1) nada más dice el lado "a"
A2: Sí en el 2 nada más da la medida del lado
M: Pero entonces ¿la diferencia radica en el orden?
As: No (tímidamente), en el significado
M: ¿En el significado?
A: Sí, usted una vez nos había puesto que ax=y y esta vez lo que piden es a=xy como que la cambian ¿no? no puedo explicarlo
A2: Pero es el mismo resultado
As: Sí
M: A ver Cristina
Cr: Es que en el 1 nada más se da una medida y en el 2 nos dan las dos
M: En el 2 también se dan dos medidas
As: Sííí (a coro)
A2: Es que en el 2 no están las veces que vamos a sumar
A: ¿Y acá?
As: Nooo
A2: Es que en el 1 nos dice las veces que vamos a sumar y en el 2 no, está al contrario, está, está, ay es que no se cómo decirlo
M: Sí, esa es la idea
A2: Es que en el 1 nos dan la cantidad y las veces que la tenemos que reproducir
M: A ver, ¿cuántas veces la fracción?
As: Cinco (a coro)
M: (Escribe) Cinco veces la fracción $\frac{3}{4}$ ¿y en el 2?
A2: Es lo contrario, pide cuántas, ¿cómo se dice? el número de, ay es que no sé
A3: Acá cuántas veces aumentamos
M: (Escribe) $\frac{3}{4}$ de...
A: De 5

M: De 5 ¿sí?. Aquí en el 1, a ver en los dos se está trabajando...
As: Multiplicación
M: Multiplicación, Miguel dice que en el 2 es división, ¿será división?
As: No
M: ¿Estamos dividiendo entre $\frac{3}{4}$?
Mig: Pero puede ser división maestra
As: Nooo
A: Con división no sale Miguel
Mig: Si dividimos las 5 veces en 4 partes sale lo mismo porque lo vamos sumando
M: A ver pasa y hazlo con división (pasa)
Mig: Me refiero a división como fragmentación (dibuja cinco círculos divididos en cuartos). Son $\frac{3}{4}$ ¿Verdad? (Sombrea ¾ de cada círculo) entonces $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}$
A: Pero eso sería suma
M: ¿Qué es lo que te plantea el problema "el lado de una figura de 5 cm...." de entrada, con la fracción vemos que la figura va a ser más pequeña porque son $\frac{3}{4}$
Mig: Entonces se puede reducir, sí se pide reducir (silencio)
M: A ver, ¿tienes idea de lo que en el contexto del problema se está pidiendo?
Mig: El círculo no tiene lados
M: Vamos a partir de este ejemplo

Una vez conocidas las técnicas con las que se resuelven los problemas, en este segundo momento se restituye la función de la consigna original, es decir, se gestiona un momento de exploración cuyo objetivo consiste en encontrar las semejanzas y diferencias entre los problemas. Como se puede observar también, en este contrato el formador plantea interrogantes que, supone, los estudiantes pueden responder con los conocimientos de los que disponen y en correspondencia con este tipo de contrato, ante una respuesta de los estudiantes el formador plantea nuevas preguntas.

No obstante que mediante esta gestión los estudiantes han reconocido la técnica adecuada para ambos problemas (la multiplicación), el formador no justifica esa respuesta de inmediato, sino que pone en el centro de la discusión el argumento de un estudiante (Miguel), sin embargo Miguel no puede justificar su técnica, razón por la que, sin más argumentos en contra y sin posibilidades de que los estudiantes reconozcan el significado puesto en juego, como se puede observar en el siguiente fragmento, el formador inicia el momento de la institucionalización.[197]

> A: A ver, si yo necesito el doble de 5, voy a multiplicar el 5x2 y en este caso necesito $\frac{3}{4}$ de 5 entonces voy a multiplicar $\frac{3}{4}$ por 5
> A2: Sí, también puedes dividir 5 entre 4 y lo que te sale lo multiplicas por 3
> M: A ver, pasa, nada más fíjense en la lógica del problema
> A2: Bueno viene siendo multiplicación pero por ejemplo si nos están pidiendo $\frac{3}{4}$ de 5, cinco viene siendo el entero, si nos está pidiendo $\frac{3}{4}$ se puede dividir el 5 entre 4 y lo que salga multiplicarlo por 3, o sea 1.5 por 3 y nos sale 3.75 que es igual a 3 $\frac{3}{4}$ (aplausos)
> M: Bien, aquí vemos las cosas que hay que resolver pero vemos también el significado que está inmerso en estos problemas, en el 1 no nos conflictuamos ¿por qué Enrique?
> E: Por la forma en que está planteado el problema
> M: Y por qué podemos interpretar que se trata de 5 veces $\frac{3}{4}$ y lo asociamos con una suma repetida o con la multiplicación 5 x $\frac{3}{4}$, entonces aquí el 5 aparece como el multiplicador o como el operador porque es el que va a multiplicar, es el número de veces de $\frac{3}{4}$, pero en el 2 es un poco más complejo porque aquí es una fracción la que está actuando como…
> A: Multiplicador
> M: Sí, como multiplicador u operador, aquí ya estamos hablando de $\frac{3}{4}$ de 5 y allá hablábamos de 5 veces $\frac{3}{4}$, lo que comentaba Maribel, si quiero el doble de 5 multiplico 5x2, si digo $\frac{3}{4}$ de 5, multiplicamos, lo que pasa es que todos consideramos que la multiplicación es para agrandar
> A: Pero eso nada más cuando se realiza con números naturales, al momento de realizarlo con fracciones o punto decimal ya no necesariamente agranda
> M: Exactamente, entonces aquí vamos a entrar con otro significado de las fracciones, se acuerdan que lo habíamos comentado al inicio del bloque, las fracciones como operadores multiplicativos, entonces, cuando aparecen multiplicando a una cantidad, en este caso se maneja como una especie de transformación donde tenemos un estado inicial, si aparece una orden o una situación o un operador, que sería lo que dijo Cristina, en este caso dividir entre 4 y multiplicar por 3, ahí está implícito el operador multiplicativo. Bien, ese es un primer acercamiento, entonces para diferenciar en qué momento aparece este significado vemos que en el problema 1 el entero es el operador pero en el 2 es la fracción la que funge como operador multiplicativo. Vamos a anotar otros dos problemas

[197] No obstante la naturaleza de esta técnica es necesario aclarar que en el proceso de estudio dirigido por este formador (F1), los significados de la fracción ya habían sido institucionalizados en las primeras sesiones.

Cuando el formador establece la analogía entre el doble y los $\frac{3}{4}$ de 5, intenta sostener la mayéutica, sin embargo, ésta se rompe porque la analogía funciona como un mecanismo de negociación a “la baja”, es decir, mediante ella el formador intenta provocar una respuesta que sea una prueba del aprendizaje, aunque la respuesta sigue sin aparecer. Mencionar la técnica para multiplicar un entero por una fracción como lo hace A2, es una muestra del fracaso de la negociación, por esta razón el formador se ve obligado a dar otro indicador que provoque la respuesta esperada, señalar que lo que indica A2 es lo que se tiene que hacer y dónde se puede observar el significado implícito en los problemas, este indicador fracasa también porque para el alumno interpelado, la diferencia entre los problemas no va más allá de la naturaleza del planteamiento.

Ante este nuevo fracaso, el formador toma a su cargo la solución de la tarea, ante la imposibilidad de provocar la respuesta esperada, es él quien señala la diferencia (la función de operador multiplicativo que cumple el 5 en el problema no. 1), finalmente, una respuesta que es muestra de adhesión a su proyecto de enseñanza tiene que ver la identificación –inducida- del significado operador multiplicativo de la fracción $\frac{3}{4}$. Cuando la respuesta aparece, F1 cierra el episodio con una síntesis de las respuestas inducidas, esto es, termina señalando el papel de la fracción en cada uno de los problemas y planteando una tarea similar que representa un momento para el trabajo con la técnica.[198]

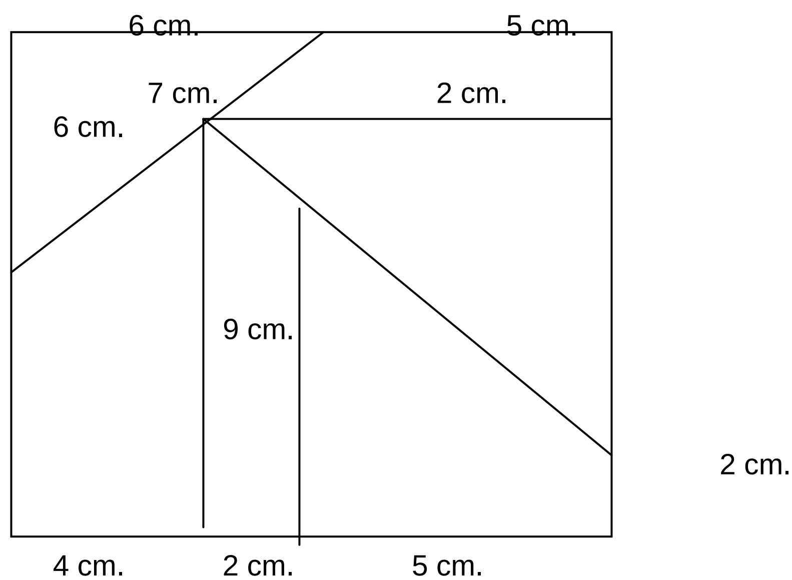
Como se ha podido observar, lo significativo de esta técnica es la institucionalización de un objeto matemático (el significado operador multiplicativo) que forma parte de los saberes para los profesores en formación, aunque no para los niños de la escuela primaria. Otro aspecto relevante es que, al igual que en la técnica anterior (la homología), el saber didáctico no se articula con la tarea propiamente matemática, sino que permanece como un saber implícito en la acción, sin embargo, como se ha señalado, en tanto que aparece un objeto de saber exclusivo de los profesores esta técnica es una aproximación a la transposición.

---

[198] Esta misma técnica es utilizada por F1 y F2 para institucionalizar el significado cociente de la fracción.

5.1.2.2. La homología. Una referencia para la institucionalización matemática

Otra aproximación a la transposición, que también se distingue por la institucionalización matemática, es gestionada por los formadores cuando utilizan la homología para precisar un elemento de la OM no necesario para los niños pero sí para los profesores en formación. Al institucionalizar un elemento de esta índole se introduce un elemento extraño al sistema didáctico *stricto sensu* y la actividad se desplaza hacía el sistema de formación. Por otra parte, esta técnica es diferente a la homología analizada en los párrafos anteriores, no sólo porque se gestiona la institucionalización matemática, sino también porque se incluye como un momento inédito, es decir, sin haber realizado una institucionalización previa del elemento matemático puesto en juego.



En el anterior fragmento se puede observar que, para iniciar esta técnica, el formador plantea una tarea que le permita gestionar momentos del primer encuentro y de exploración, como se puede observar también, establece un contrato “constructivista”[199] en el que desaparece la intención explícita de enseñar,

[199] A decir de Brousseau (1995), en los contratos constructivistas las situaciones que conducen al aprendizaje no son “naturales”. El profesor debe organizar el *medio.* La organización deriva esencialmente del saber previsto y del conocimiento de los procesos de adquisición de los alumnos, a quienes se les delega la responsabilidad de la adquisición. Los saberes previos se

esto es, el formador deja a cargo de los estudiantes la responsabilidad de su aprendizaje mediante la “devolución” de la tarea.

> M:[200] Hoy vamos a hacer equipos de 6 personas. Esto es un rompecabezas se trata de que construyan otro, cada uno de los integrantes construirá una de las partes, la idea es que el lado que mide 4 cm en el rompecabezas original, mida 7cm en el que ustedes hagan. ¿Cuánto medirá cada una de las medidas? ¿Si entendieron?

As: Sí Una vez culminados estos momentos y siguiendo la lógica de la homología, F2 gestiona el momento para la justificación de las técnicas, sin embargo resulta significativo que F2 sólo demande la explicación de las dificultades que se presentaron. Al parecer, este mecanismo tiene que ver con la imposibilidad de que en un homología directa se establezca una discusión relevante sobre las técnicas, esto es, en tanto que las tareas propias de este tipo de homología se ubican en un nivel propio de los niños, los formados no tienen dificultades significativas para resolverlos, este bajo nivel de dificultad provoca lo que Kuzniak (1994) llama “la infantilización del estudiante”, fenómeno que se presenta cuando las tareas que se le plantean al estudiante resultan triviales desde el punto de vista matemático. Por esta razón, como se puede observar en el siguiente fragmento, la discusión sobre las técnicas no aporta elementos para detectar errores en éstas.

> (Luego de algunos minutos)
> M: Bien ¿ya terminaron? va a pasar un miembro por cada equipo y va a explicar cada una de las dificultades con que se enfrentaron.
> A: Bueno primero vimos que la escala era 4 a 7, entonces buscamos un número que multiplicado por 4 nos diera 7
> M: ¿Habrá algún número así?
> As: Sí
> A: Sí, el 1.75 y había que multiplicar cada cantidad por 1.75 la única dificultad fue que a algunos muchos no les salía la multiplicación.
> M: ¿Cómo le hicieron para llegar a este 1.75?
> A: Sabíamos que tenía que ser un número mayor que 1 y menor que 2, entonces fue 1.75
> M: ¿Fueron multiplicando al tanteo?
> A: Pues sí
> M: ¿Alguien lo hizo de una manera diferente?
> A2: Nosotros dividimos 7 entre 4 = 1.75
> A3: Nosotros sacamos la fracción de 3 ÷ 4, es igual a 0.75, son $\frac{3}{4}$ de la cantidad real, entonces sumamos a cada medida $\frac{3}{4}$ de la cantidad por ejemplo, $\frac{3}{4}$ de 2 + 2

---

manifiestan como prerrequisitos, es decir, como medios que permiten formular las condiciones iniciales de la situación.

[200] El fragmento corresponde a la octava sesión del proceso dirigido por F2

M: En este caso, también es válida la suma de los $\frac{3}{4}$

A4: Nosotros utilizamos la regla de 3

M: Regla de 3 muy bien ¿alguna otra forma? ¿qué pasó donde no embonaron las piezas?

As: Es que algunas de las medidas no fueron las correctas

M: Algunos aumentaron sólo 3 cm a cada una de las medidas y a la hora de embonar las piezas no coincidieron las medidas. Bien, aquí tenemos varios procedimientos, ¿habrá algún número que de manera directa obtengamos todas las cantidades?

A: Podría ser sacando primero el área de toda la figura y luego multiplicado por 1.75

M: Bueno aquí ya estaríamos hablando del caso contrario, cuando su compañera dijo, tenemos qué buscar un número que multiplicado por 4 dé 7, convirtió a decimales, trabajando en el campo de las fracciones ¿cuál número multiplicado por 4 da 7?

A: Un entero $\frac{3}{4}$

La dificultad para gestionar una discusión relevante sobre las técnicas, como se puede observar en el fragmento anterior, es efecto de la facilidad con la que los estudiantes han resuelto la tarea, buscar un número que multiplicado por 4 dé 7 o sumar $\frac{3}{4}$ de unidad a cada magnitud original, son básicamente las técnicas que utilizaron los estudiantes y en ambos casos resultaron eficaces para cumplir con la tarea. Sin más dificultades que las relacionadas con la operación de las cantidades, F2 incluye la estrategia aditiva (sumar 3 a cada cantidad) como una de las dificultades posibles, sin embargo, como ésta no ha sido presentada por los estudiantes, tampoco se convierte en objeto de la justificación.

Sin otro elemento que sostenga la discusión, el momento de la validación se agota y con ello la progresión didáctica corre el riesgo de detenerse, sensible a estos índices de deterioro en la relación didáctica, F2 modifica la situación mediante una nueva consigna: encontrar un número fraccionario que multiplicado por 4 dé 7. Sin embargo, esta nueva tarea tampoco representa dificultades para los estudiantes aunque, como se puede observar en el siguiente fragmento, es un elemento necesario para precisar el significado (operador multiplicativo) implícito en la tarea.

M: Convirtiendo $1\frac{3}{4}$ a fracción sería $\frac{7}{4}$, entonces ¿qué papel juega aquí el $\frac{7}{4}$?, es el operador multiplicativo, es el número que multiplicado por 4 da 7 ¿creen que ese $\frac{7}{4}$ nos permita obtener todas las medidas? Por ejemplo 2 x $\frac{7}{4}$ =

A: Sí porque $\frac{2}{1}$ x $\frac{7}{4}$ = $\frac{14}{4}$ = 3.5

M: Bueno aquí se cumple lo que dijimos, un número multiplicado por cada una de las cantidades que es $\frac{7}{4}$ nos dará la cantidad a escala; podemos decir pues que el $\frac{7}{4}$ nos puede servir como…

A: Como operador multiplicativo

M. ¿Cómo operador multiplicativo para sacar las diferentes cantidades?

As: Sí

M: Bueno, ahora tenemos otro rompecabezas con otras medidas y otra relación diferente…

Luego de esta institucionalización, las acciones finales del formador tienen como propósito demostrar que el operador multiplicativo permite resolver adecuadamente la tarea. Con ello F2 ha terminado de utilizar esta técnica, si bien ha precisado un objeto matemático exclusivo de las tareas profesorales, los saberes didácticos no han sido articulados explícitamente con la homología. La ausencia de esta articulación resulta significativa porque, como hemos observado, el momento tecnológico ha sido deformado por la naturaleza de la homología directa, esto es, por la trivialidad matemática de las tareas. Finalmente, es necesario advertir que la institucionalización matemática sin precisiones didácticas es una técnica que utilizan sólo ocasionalmente F2 y F1.

5.2. EL SABER DIDÁCTICO COMO OBJETO DE LA TRANSPOSICIÓN

Cuando se relacionan las estrategias de homología y de transposición, se genera una dialéctica entre el sistema didáctico s*tricto sensu* y el sistema de formación (Portugais, 1995). En esta dialéctica, los momentos exploratorio y del primer encuentro son clave para la homología porque, a través de ellos se ubica a los formados dentro del sistema didáctico *stricto sensu* como alumnos que estudian una praxeología matemática. Durante los momentos tecnológico teórico y de institucionalización podría establecerse la relación entre la homología y la transposición, esto es, a través de una doble institucionalización (matemática y didáctica),[201] el formador puede desplazar la actividad hacia el sistema de formación, con ello otorgaría al estudiante el papel de eventual profesor.

La dialéctica entre ambos sistemas también provoca el interjuego entre dos contratos didácticos articulados entre sí, el primero (contrato didáctico) otorga al profesor en formación el papel de alumno que se relaciona con el objeto matemático y el formador. En el segundo (contrato de formación), el estudiante ocupa el lugar del eventual profesor y se relaciona con los objetos didácticos de saber (incluidos los matemáticos) y unos eventuales alumnos.

Si bien la homología se ciñe a los límites del contrato y del sistema didáctico, cuando se relaciona con la transposición se cruzan estos límites para entrar en el territorio del sistema de formación. Debido a la naturaleza de esta relación, los momentos y saberes didácticos que permanecen implícitos en la homología pierden su "invisibilidad" a través de una triple institucionalización: la precisión del objeto matemático puesto en juego; la explicitación del proceso de estudio gestionado y la precisión de los saberes didácticos ligados con la tarea. Sin embargo, la triple institucionalización no aparece siempre en las técnicas que utilizan los formadores observados, aun cuando en ciertos casos el saber didáctico es incluido explícitamente se le incluye de diferentes maneras. En lo que sigue se analizarán las técnicas mediante las que los formadores incluyen el saber didáctico de manera explícita.

5.2.1. El deslizamiento didáctico. Sin *praxis* y sin logos

Una de las técnicas en las que se incluyen saberes didácticos de manera explícita, es la que, en analogía con el deslizamiento cognitivo, hemos denominado "deslizamiento didáctico",[202] si en el primero el verdadero objeto de saber es sustituido por los medios y las heurísticas, en el deslizamiento didáctico sucede

[201] Esta doble institucionalización, sugerida por Pézard (1985) es solamente una de las formas en las que se pueden relacionar las estrategias de homología y transposición, otra, señala Kuzniak (1994), puede ser el diseño o análisis de una secuencia didáctica, tarea en la que el saber didáctico puede ser una herramienta.

[202] A decir de Brousseau (1998, p. 53) el deslizamiento cognitivo se caracteriza porque cuando una actividad de enseñanza ha fracasado, el profesor puede ser conducido a justificarse y para continuar su acción, a tomar sus propias explicaciones y sus medios heurísticos como objetos de estudio en lugar del verdadero conocimiento matemático.

algo similar, el estudio del objeto matemático se desliza para dar lugar al estudio de cuestiones didácticas. Mediante esta técnica, el estudio del objeto matemático es sustituido por un objeto didáctico o es complementado por una especie de consejos didácticos.

Sin embargo, el deslizamiento didáctico no deriva del planteamiento de una tarea de naturaleza didáctica, no forma parte de una acción planteada para estudiar un objeto didáctico, es provocada por las regulaciones que establece el formador durante la gestión del momento de la exploración o del trabajo con la técnica. Por lo general, los deslizamientos didácticos toman dos formas, la primera se presenta cuando, por efecto de las regulaciones, se genera un cambio del contrato didáctico establecido y se instaura uno nuevo en el que el objeto de estudio es un elemento didáctico. Otra, que es la más frecuente, ocurre cuando el momento del trabajo con la técnica es complementado con una especie de consejos didácticos acerca de la dirección del estudio o sobre las características de un dispositivo, en estos casos podría decirse que el objeto didáctico no sustituye del todo al objeto matemático, sino que lo complementa, sin embargo consideramos que es un deslizamiento didáctico, en la medida que aparecen comentarios asistemáticos sobre una tarea de índole matemática.

Es de aclararse también que los deslizamientos didácticos son las técnicas mediante las que fundamentalmente, los formadores articulan lo matemático con lo didáctico. En el caso de F2 es la única técnica que utiliza para cumplir con estas tareas, en el proceso que dirige F4 no aparece y en el caso de F1 se utiliza sólo ocasionalmente.[203]

5.2.1.1. El deslizamiento didáctico con cambio de contrato

Un deslizamiento didáctico que se caracteriza por un cambio del contrato establecido y por la sustitución total del objeto matemático, puede observarse en el siguiente fragmento, en éste, como se puede observar, el formador inicia el episodio gestionando dos momentos propios de la homología, el de exploración,

[203] Este hecho resulta relevante si se recuerda que F4 es el formador con mayor experiencia y también quien más rechazo presenta respecto de los planes de estudio.

que se evidencia con la "devolución" de la tarea a los estudiantes y el de la constitución del entorno tecnológico teórico, cuyo objetivo es gestionar la justificación de las diferentes técnicas empleadas por los estudiantes.

> M: Anoten el siguiente problema: Tres amigos entran a un restaurante, piden dos pizzas que se reparten equitativamente entre los tres. ¿Cuánto le toca a cada uno? Poco después llega otro amigo, ¿Cuánto debe darle cada uno para que cada uno tenga la misma cantidad? ¡Resuélvanlo como puedan¡
>
> (Después de unos minutos)
> A1: A cada uno de los tres le toca $\frac{2}{3}$
> A2: A cada uno de los cuatro le toca $\frac{1}{2}$
> A3: Se van a repartir en sextos, cada uno de los tres tendría $\frac{4}{6}$ y le va a dar $\frac{1}{6}$ al que llegó o sea $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $\frac{4}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$
> M: En el último caso observamos algo interesante, a cada amigo le toca $\frac{2}{3}$ de pizza que es equivalente a $\frac{4}{6}$, si cada uno le da $\frac{1}{6}$ al amigo que llegó, a cada uno le va a tocar $\frac{3}{6}$ de pizza, esto equivale $\frac{1}{2}$, ¿Está claro? Aquí lo importante es que podemos representar la misma cantidad de formas diferentes. ¿Alguien lo resolvió de una forma diferente?
> A5: Bueno yo lo hice casi igual, partiendo de $\frac{1}{3}$ de pizza, a cada uno le toca $\frac{2}{3}$ o lo que es igual $\frac{4}{6}$
> M: Bueno las maneras que han utilizado para resolver este ejercicio están bien en cierta forma, pero, al resolver un ejercicio ustedes dejan de lado muchos procedimientos que hacen de manera mental, con los niños sería importante que llevaran a cabo el procedimiento, porque operan un poco más lo concreto, nosotros podemos comprender lo que quiere decir nuestro compañero con algunas de las operaciones que están allí, pero para los niños no es fácil comprender esa manera, por eso sería necesario partir de una estructura

La tarea inicial está relacionada con el significado parte todo y aunque es un poco más compleja que las sugeridas para los alumnos de la escuela primaria, los formados la resuelven con relativa facilidad, esto provoca que durante el momento tecnológico se presenten pocas oportunidades para que el formador gestione la discusión sobre las técnicas, como sería deseable en una homología.

Ante el fracaso de este momento, F2 se ve obligado a señalar que han dejado muchos procedimientos sin explicar, esto es, a subrayar un incumplimiento de las obligaciones estipuladas en el contrato establecido, este señalamiento representa también el momento en que inicia el deslizamiento didáctico, ya que la justificación de tal reclamo intenta prevenir las dificultades que tendrían los estudiantes para gestionar un momento similar. Por otra parte, este mecanismo provoca la pérdida de la transparencia de la homología, como el formador hace pública la similitud entre el momento que gestionó y las tareas profesorales, la homología se torna explícita. En otros términos, F2 ha experimentado la "infantilización" del estudiante, puesto que, sin la presentación de los procedimientos que, en opinión de F2, hicieron mentalmente, la homología no puede funcionar como un medio similar al que se establece con los niños.

Empero, lo más importante, como se puede observar en el siguiente fragmento, es que la acción del formador ha generado un deslizamiento didáctico, el estudio del objeto matemático (el significado parte todo),[204] ha cedido su lugar a un objeto didáctico: la manera en la que debe gestionarse el momento de la constitución del entorno tecnológico.

> A1: Profe, usted dice que con los niños hay que utilizar los procedimientos, ¿pero sólo uno o todos?, porque si los enseñamos todos no van a saber ni qué
> M: Bien yo voy a cambiar la pregunta, ¿vamos a enseñarles y a propiciar que los niños encuentren diferentes métodos y luego nos digan cuáles fueron los que utilizaron?
> A2: ¿No sería más viable enseñarles los procedimientos que nosotros conozcamos y así ellos se identifican con el que más puedan? Porque hay muchos que pueden hacer una división de una forma y otros de otra, entonces ¿Cómo le vamos a hacer? Enfocarnos a un procedimiento, si lo entienden de otra forma entonces hay que darle variedad
> A3: Pues es lo que se hizo aquí, aquí se utilizaron diferentes procedimientos, confrontarlos y el que se facilite más para los niños es el que se podría adoptar
> M: Es lo que ustedes acaban de hacer, a ver ¿se trata de decirle al niño, que lo pueden resolver de esta forma y de esta otra?, o se trata de propiciar, por ejemplo, yo les pongo el problema ¿Cómo lo resuelvo? Resuélvanlo como puedan, ahora sí, a ver Juanito, a ver Panchito, a ver María, pásenle, así como ustedes pasaron ahorita, allí es cuando encontramos diversidad de procedimientos
> A3: Creo que algo importante sería precisar las equivalencias, porque sino se les haría muy difícil resolver el problema
> M: La consigna es que ustedes van a encontrar varias formas de resolver el mismo problema acuérdense. Vamos con otro ejemplo

[204] Una muestra de que el deslizamiento ha sido efectivo es que el significado parte-todo no aparece en los siguientes episodio de la misma clase.

Si bien el deslizamiento ha sido provocado por el formador, éste es aceptado por los estudiantes, quienes lo fortalecen a través de sus interrogantes. Así, cuando A1 pregunta sobre los procedimientos deseables, el contrato didáctico ha cambiado definitivamente y el objeto de estudio ha sido sustituido, a partir de ese momento, el objetivo es estudiar la gestión del momento tecnológico mediante un contrato basado en la mayéutica socrática. No obstante el deslizamiento didáctico, puede observarse que la discusión sobre lo didáctico permanece sólo en el nivel de la técnica, es decir, no aparece un discurso que justifique la técnica didáctica sugerida (confrontar los diferentes procedimientos que utilizan los niños), tampoco un discurso teórico que de sentido a esta técnica.

Este mecanismo introduce el estudio de la técnica didáctica como un elemento aislado de los otros componentes de la praxeología y se le da mayor énfasis con el "descubrimiento" de la homología, cuando A3 dice, *pues es lo que se hizo aquí,* descubre que la técnica que desea "transponer" el formador ha estado presente en sus acciones, con este comentario A3 introduce un elemento extraño a la praxeología (la gestión que el formador realizó mediante esa técnica) que justifica la técnica didáctica. Finalmente, la preeminencia de la técnica didáctica sobre cualquier elemento praxeológico se subraya cuando F2 señala: *la consigna es que ustedes van a encontrar diferentes formas de resolver el mismo problema,* mediante esta frase, F2 renuncia a la reconstrucción del discurso tecnológico y precisa la técnica didáctica como el único objeto del deslizamiento.

5.2.1.2. El deslizamiento como estudio complementario

Sin embargo, como se ha señalado, no todos los deslizamientos provocan un cambio de contrato, los más frecuentes son una especie de consejos o técnicas didácticas sugeridas, que por lo general se introducen para complementar una tarea matemática por lo que no rompen con el contrato establecido, sólo lo modifican. Es común que este tipo de deslizamiento aparezca durante el momento del trabajo con la técnica y que se gestione con el propósito de sugerir diferentes técnicas didácticas. Algunos deslizamientos de este tipo aluden a la gestión de los momentos didácticos, otros a las características de un dispositivo de estudio, a la predicción de las técnicas que utilizarían los niños y a las dificultades inherentes a un dispositivo de estudio. Un ejemplo de este tipo de deslizamientos, en el que se incluyen cuestiones relativas a la dirección de un proceso de estudio, se puede observar en el siguiente fragmento.

> (En este episodio de la clase F2 gestiona un momento para el trabajo con la técnica, para ello plantea el siguiente problema: "Un lado de un terreno rectangular ocupa $\frac{3}{4}$ de una manzana, otro lado ocupa $\frac{2}{3}$ de la manzana. ¿Qué fracción de la manzana ocupa el terreno?)[205]
> M: ¿Cuál es el resultado?
> A: La mitad
> M: La mitad, vamos a ver como lo resolvieron
> A2: Multiplicando $\frac{3}{4}$ por $\frac{2}{3}$ que es igual a $\frac{6}{12}$ o sea un medio
> M: ¿Creen que se pueda resolver con una suma de fracciones? En este problema estamos buscando una tercera medida, entonces se resuelve directamente con una multiplicación. Otra forma es dividiendo en tercios y en cuartos. ¿En cuantas partes quedaría dividido?
> A3: En 12
> M: ¿Y de esas 12 cuántas corresponden al terreno? (Realiza las divisiones de un rectángulo en el pizarrón)
> A3: Seis
> M: Bien pues este ejemplo sí implica una multiplicación directa, pero desde el enfoque[206] ¿cuál es la sugerencia? ¿Cuándo planteamos un problema de este tipo es recomendable enseñarles a los niños la multiplicación? Desde el enfoque es más fácil trabajarlo de manera gráfica, para que ellos vayan viendo la idea como se van hilando las fracciones. Bien, otro problema.

Como se puede observar, F2 gestiona dos momentos didácticos a la vez, como se había institucionalizado anteriormente el significado operador multiplicativo de la fracción y la técnica para resolver multiplicaciones de fracciones, éste es un momento para el trabajo con la técnica, pero también un momento de evaluación, ya que el objetivo es dar cuenta también de la capacidad de los estudiantes para utilizar el conocimiento adquirido. Como se ver, al parecer los estudiantes han afinado la técnica para resolver este tipo de problemas, la rapidez con la que lo resuelven el problema y lo adecuado del resultado así parecen indicarlo

---

[205] El fragmento corresponde a la sesión número nueve del proceso de estudio dirigido por F2

[206] Cuando el formador menciona al enfoque se refiere a la propuesta para la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Esta propuesta, como se ha señalado en capítulos anteriores es el objeto de estudio del primer bloque de este curso.

La técnica utilizada y el resultado que presenta A2 son justificados de manera implícita, esto es, como el formador no plantea más interrogantes sobre el resultado o la técnica, ni explora las respuestas de otros estudiantes, da a entender que las respuestas de A2 son adecuadas, pero lo más importante es que, luego de la aceptación de los resultados, establece una regulación didáctica que provoca el deslizamiento didáctico. Cuando cuestiona sobre la posibilidad de resolver el problema con una suma de fracciones y muestra la técnica basada en la partición del rectángulo, lo que hace es cambiar el objeto de estudio original, a partir de ese momento no se trata de evaluar los resultados sino de gestionar el estudio de las diferentes técnicas para resolverlo[207].

Como se puede observar en la última parte del fragmento, este mecanismo tiene una intención, poner el énfasis sobre la importancia de que los niños utilicen sus conocimientos personales para resolver el problema, esta intención se hace evidente cuando F2 pregunta sobre la pertinencia de enseñar la multiplicación antes de resolver este problema. Desde el enfoque, contesta el mismo F2, es recomendable iniciar con la solución gráfica para que vean como se van hilando (dándoles sentido) las fracciones. Este señalamiento es una muestra clara de que el deslizamiento ha sido operado, si la tarea inició como un momento de evaluación, ha terminado con un consejo o con una técnica didáctica sugerida, que no es totalmente adecuada porque supone la existencia de un trayecto que va de lo gráfico a lo simbólico, pero evidencia la inclusión del estudio del saber didáctico.

Lo significativo en este caso es que lo didáctico no se incluye como praxeología docente completa, aparece como una técnica didáctica sugerida (comenzar por la solución gráfica) sin un discurso tecnológico que la justifique (salvo su referencia a lo que dice el enfoque). De esta manera, al igual que en el deslizamiento con cambio de contrato, lo didáctico no se incluye como actividad ni como discurso teórico ligado al objeto que se estudia, el énfasis sobre la importancia de los procedimientos no convencionales representa la inclusión de lo

[207] Aunque la técnica basada en la suma es en esencia inadecuada porque no podría calcularse el área mediante dicha suma, lo que aquí nos interesa es la manera en la que introduce una actividad ligada a lo didáctico.

didáctico como discurso válido para cualquier objeto matemático, que no requiere justificación o discurso teórico que le de sentido. En otros términos, en los deslizamientos lo didáctico aparece como un saber diluido, alejado de la *praxis* y del *logos*.

Algo similar puede observarse en el siguiente fragmento, en él se observa un deslizamiento didáctico ligado a las dificultades eventuales de los niños. Al igual que en el caso anterior, este episodio corresponde a un momento para el trabajo con la técnica toda vez que, en episodios anteriores, el formador había precisado la relación entre el numerador, el denominador y la técnica para ordenar fracciones.

> M: Bien se trata de esto, el primer jugador va a tomar una tarjeta (en una cara, cada tarjeta tiene una fracción escrita y en la otra, la representación gráfica de dicha fracción) y su compañero va a buscar otra tarjeta con una fracción mayor, si es mayor se queda con ambas tarjetas, así hasta que uno de los dos se quede sin tarjetas. Para saber cuál es mayor le dan la vuelta a la tarjeta y hacen la comparación. Bien empieza el juego (los alumnos empiezan a jugar)
> M: (luego de unos minutos). Bien vamos a dejar el juego (escribe)
>
> Ejemplo: $\frac{5}{8} \quad \frac{7}{12} \quad \frac{3}{10} \quad \frac{3}{6} \quad \frac{2}{5}$
>
> Ahora viendo nada más la representación simbólica, vamos a establecer un orden, Víctor pasa y ordénalas de menor a mayor, escribe sólo la primera.
> V: (Escribe $\frac{7}{12}$, posteriormente van pasando otros estudiantes hasta ordenarlas todas)
> M: Ahora busquen las tarjetas que corresponden a esas fracciones. Bien el orden quedó así
>
> $\frac{3}{10} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{3}{6} \quad \frac{7}{12} \quad \frac{5}{8}$
>
> A1: Maestra, ¿primero es $\frac{3}{10}$ o $\frac{3}{6}$?
> M: Busquen estas cinco tarjetas y compárenlas. ¿Ya hicieron la verificación?
> As: Sí
> M: Bien ahora díganme, si pusiéramos esta actividad en la escuela primaria pero sin las tarjetas ¿Qué creen que harían los niños?
> A2: Se irían con el tamaño del numerador
> A3: Se irían con el tamaño de los de abajo
> A4: Por ejemplo pondrían $\frac{7}{12}$ primero y luego $\frac{3}{10}$
> M: Ellos se guiarían por el denominador, y si no tuviéramos oportunidad de hacer la verificación con la representación gráfica, ¿De qué manera podríamos corroborar nuestros resultados?
> A5: Con dibujos
> A2: Con fracciones equivalentes

> M: Buscando fracciones equivalentes de todas y a partir de ahí establecer la comparación
> A1: ¿Una fracción equivalente de todas o cómo?
> M: Que todas tengan el mismo denominador, lo que vamos a trabajar enseguida es la equivalencia…

En este fragmento se pueden apreciar dos hechos que permiten comprender la manera como el deslizamiento didáctico se adapta al contrato puesto en marcha. El primero, cuando Víctor escribe una primera fracción ($\frac{7}{12}$) que no es la mayor ni la menor de la serie, no obstante lo inadecuado de la respuesta, F1 no solicita la justificación de la técnica ni gestiona su justificación, este hecho nos permite comprender que, en tanto momento de evaluación, el formador no busca que los estudiantes desplieguen un discurso tecnológico, solamente espera las respuestas que son prueba del aprendizaje. El segundo hecho tiene que ver con la manera como gestiona la pregunta de A1, en este caso tampoco gestiona la justificación de la pregunta sino que, en correspondencia con el momento de evaluación, sólo intenta evaluar la capacidad de los estudiantes para utilizar las técnicas estudiadas en episodios anteriores.

Lo relevante de estos dos hechos reside en que, una vez que inicia el deslizamiento didáctico, cuando el formador pregunta por las posibles acciones de los niños, el momento para el estudio de lo didáctico se gestiona de la misma manera que la evaluación de la tarea matemática, es decir, en el caso de las respuestas sobre las acciones de los niños, F1 busca sólo respuestas que sean prueba del aprendizaje didáctico sin gestionar justificaciones para estas respuestas. Un ejemplo de la ausencia de las justificaciones es que, a pesar de recibir dos respuestas diferentes posibles y correctas (A2 dice que los niños se irían con el numerador mientras que A3 señala que se guiarían con el denominador), no solicita la justificación, tampoco incluye un discurso tecnológico, lo que constituiría una especie de institucionalización didáctica. Lo mismo pasa cuando pregunta por los elementos del “medio” (los materiales para la verificación) que permitirían justificar la acción de los niños, en este caso también solicita las respuestas pero no su justificación.

El carácter evaluativo de esta técnica de formación nos permite plantear lo común y lo diferente entre los tres deslizamientos analizados. Lo común es que el estudio de lo didáctico se caracteriza por la ausencia de un discurso tecnológico que justifique las técnicas sugeridas. Otro rasgo en común es la ausencia de un discurso teórico que explicite los conceptos didácticos puestos en juego y dé sentido a las interrogantes planteadas. Lo que puede apreciarse es que lo didáctico no se incluye como una praxeología completa porque no se plantea un tipo de tarea específico en el que los estudiantes pudieran tener momentos del primer encuentro y exploratorio con el objeto didáctico. Debido a la ausencia de estos momentos resulta difícil gestionar la constitución del entorno tecnológico teórico y por esta razón la parte de la praxeología que aparece es una especie de institucionalización-evaluación que no tiene posibilidades de tener como referente otros momentos didácticos, sólo puede tomar la forma de consejos didácticos o de técnicas didácticas sugeridas.

En otros términos, en los deslizamientos lo didáctico permanece solamente como un discurso acerca de la enseñanza, sin referentes teóricos ni posibilidades de que los estudiantes utilicen las técnicas didácticas sugeridas. Un factor que al parecer provoca este fenómeno, tiene que ver con la pobreza del medio en el que se plantea su estudio, esto es, los deslizamientos se gestionan en un medio sin elementos que provean de discursos tecnológicos o teóricos o de la *praxis*, un ejemplo es que para gestionar deslizamientos no se utilizan documentos en los que se incluyan tareas resueltas por los niños, registros de clase o saberes teóricos sobre la didáctica, tampoco se plantean tareas en las que se haga necesario utilizar las técnicas sugeridas. Es por esta razón que el estudio de lo didáctico se diluye, aparece sólo como un consejo dado por la autoridad en el aula (el formador) o como un discurso surgido de la especulación colectiva.

Lo diferente en los deslizamientos tiene que ver con los actores, como se ha podido ver, en el segundo deslizamiento el formador es quien sugiere la técnica didáctica mientras que en el primero y el tercero son los alumnos quienes a través de una especie de mayéutica socrática, identifican los elementos didácticos solicitados por el formador. Lo relevante en estos casos es que los formadores plantean preguntas que, suponen, pueden ser contestadas con los conocimientos que ya poseen los estudiantes, esto nos hace preguntarnos ¿Si esos objetos didácticos no han sido estudiados, por qué los formadores suponen que los estudiantes los conocen? La respuesta parece estar ligada con una confianza excesiva sobre la homología, es decir, al parecer, los formadores suponen que los estudiantes pueden extraer dichos conocimientos del contacto que han tenido con un medio similar al que se desea ellos gestionen, sin embargo, es una confianza excesiva porque, como se ha visto, las estrategias de homología directa por lo general generan conocimientos matemáticos triviales para los estudiantes y por lo mismo existen dificultades para gestionar de manera adecuada los momentos tecnológicos teóricos. También es una confianza excesiva en la homología porque, a partir de esta técnica, difícilmente pueden extraerse elementos tecnológicos y teóricos que den sentido y justifiquen sus ideas sobre lo didáctico.

Finalmente, respecto de esta técnica para la formación, puede decirse que las dificultades que lo didáctico tiene para "vivir naturalmente" en los deslizamientos es relevante en la medida que esta técnica es la estrategia principal mediante la que F2 gestiona el estudio de lo didáctico[208], de hecho casi en la totalidad de momentos para el trabajo con la técnica (matemática) que gestiona este formador pueden apreciarse deslizamientos didácticos.

5.2.2. Las tareas de naturaleza didáctica. La descontextualización del saber didáctico

Otra técnica que utilizan los formadores para estudiar el saber didáctico tiene que ver con plantear tareas de naturaleza didáctica. En los materiales curriculares, estas tareas se plantean como una extensión didáctica de los temas matemáticos, por ejemplo una vez que se estudia el significado operador multiplicativo de la fracción, los materiales sugieren tareas didácticas que toman como referente a este significado, frecuentemente se trata de analizar las características de las

[208] Como se ha señalado, F4 gestiona el estudio de lo didáctico a través de la homología directa y de las tareas específicamente didácticas (que se analizan en el siguiente apartado), F1 utiliza los deslizamientos ocasionalmente y en el caso de F2, esta técnica es la herramienta principal para gestionar el estudio (explícito) de los saberes didácticos.

lecciones de los libros de texto o las dificultades que los niños podrían tener con esos dispositivos. No obstante la relación sugerida, en los procesos dirigidos por F2 y F4 hemos podido observar que este tipo de tareas se plantean desligadas del objeto matemático de referencia, es por ello que en estos casos el saber didáctico es descontextualizado y no se relaciona con el estudio del objeto matemático de referencia.

Un caso en el que se utiliza esta técnica para gestionar el estudio de lo didáctico se puede observar en el siguiente fragmento. Una evidencia de su descontextualización es que las sesiones anterior y posterior a ésta, los estudiantes habían resuelto diversos problemas que implicaban utilizar las diferentes operaciones con fracciones, mientras que las tareas que se observan en el fragmento, son sugeridas en los materiales curriculares como una "extensión" didáctica para el tema "Las fracciones decimales y la medición". Por otra parte, puede decirse que esta actividad corresponde a un momento de la evaluación porque se incluyen tareas didácticas como identificar el objeto matemático en los dispositivos de estudio, predecir las dificultades que los niños tendrían con éstos, etc.

> M[209]: Sacan su libro de taller página 60, revisemos algunas lecciones de los libros de texto relacionadas con los racionales, alguien lea
> A1: Yo, (leyendo) "Actividad 2. Nuestros materiales de trabajo. En esta actividad analizará algunas lecciones sobre las fracciones decimales en los libros de texto de matemáticas. En el libro de 4º resuelva la lección "Adornos para el festival" Después conteste las siguientes preguntas:
> M: Vamos a resolver esa lección, como son muy sencillas las contestan entre todos, y después vamos a trabajar con estas preguntas (luego de que las lecciones son resueltas bajo la dirección del formador se da el siguiente diálogo)
> M: Siga leyendo por favor
> A1: (Leyendo) ¿Qué dificultades encontró al resolver la lección?
> A2: Los colores (risas)
> M: ¿Conceptualmente? ¿Ninguna? ¿se le hizo difícil?
> As: No
> M: Bueno si a alguien se le hizo difícil escriba ahí.
> M: (Leyendo) ¿Cuál es la unidad a la que se refieren las fracciones decimales en esta lección? (silencio). Pues están en décimos y centésimos ¿no? porque el concepto o conceptos de esta lección son ¿qué?
> As: Fracciones decimales
> M: Fracciones decimales expresadas en denominador 10 o 100,

[209] El fragmento corresponde a la sexta (penúltima) sesión del proceso de F4.

Un factor que determina el desarrollo de esta tarea es el tipo de contrato que pone en marcha F4, cuando dirige colectivamente la solución de la tarea impide la reconstrucción del elemento matemático implícito en la lección[210] y evita que los estudiantes analicen las posibles dificultades que tendrían los niños, por esta razón, cuando pregunta por las dificultades, resulta evidente que los estudiantes no las perciben porque se han evitado el cumplimiento de la tarea, por esta razón también, no identifican el elemento matemático (la unidad) que se incluía en ésta. Sin posibilidades de que los estudiantes lo identifiquen y fiel al contrato establecido, F4 es quien da esta respuesta. Al parecer, este contrato deriva de un supuesto acerca de la facilidad de la tarea, esto es, como F4 considera que la tarea tiene un bajo nivel de dificultad, sólo busca una respuesta que represente un índice del aprendizaje logrado, sin importar que, como se puede observar, la respuesta sea emitida por él mismo.

No obstante las dificultades, como se puede observar en el siguiente fragmento, el contrato se sostiene a pesar de los índices de fracaso que se han presentado. En este episodio la tarea también alude a las posibles dificultades de los niños, sin embargo, a diferencia de la anterior, en este momento los estudiantes logran inferir algunas de estas dificultades, aunque no sucede lo mismo con el tratamiento didáctico que seleccionan para ellas.

> M: Vamos a continuar con la correspondiente a la lección “Animales que saltan” (lee) ¿Qué dificultades encontró al resolver la lección?
> As: Ninguna
> M: ¿Ninguna? Ya decía yo que mis alumnos eran buenos (lee) ¿qué dificultades piensa que pueden encontrar los niños?
> A: Convertir la equivalencia de las fracciones
> M: ¿Qué más?
> A: Podrían confundir décimos con centésimos
> M: ¿Ustedes creen que esas pueden ser las dificultades de los niños? ¿Por qué a ustedes les pareció más difícil? Para ti César
> C: Pues sí, puede que sí sean esas las dificultades
> M: Bueno, y si creen que en eso es donde pudieran confundirse, ¿qué tendrían que hacer?
> C: Ser muy explícitos al explicarlos
> M: Bien, ser más precisos, más claros en esas explicaciones.
> M: La pregunta 3, es sobre el libro de 4º, (lee) anote el nombre de la lección en la que se continúa el estudio de los decimales, ¿ya lo tienen?

[210] En esta lección, básicamente se trata de expresar medidas de longitud considerando al décimo y al centésimo como unidades.

As: Sííí particiones decimales
M: (Leyendo) ¿Qué aspectos relacionados con los decimales se trabajan en esta lección?
As: Décimos y centésimos
M: Bien (lee) en la página 140 de esta lección hay un error en uno de los dibujos. ¿A qué dibujo nos referimos?
As: A la cinta de medir
M: ¿A la cinta? Coincidimos ¿verdad?
A: Sí porque marca 4 metros
M: Bien el punto límite que marca la cinta no coincide con el dato numérico que dan en las preguntas.

Ser muy explícitos al explicarlos es una respuesta inadecuada, pero significativa por descontextualizada, es decir, si esta tarea didáctica se hubiera ligado a los decimales y la medición quizás los estudiantes hubiesen tenido una referencia para sugerir un dispositivo que tratase didácticamente las posibles dificultades. Sin esta relación, aparece una respuesta sobre el saber didáctico que no se articula con las justificaciones sobre los errores, aunque sí con las representaciones de los estudiantes y del formador, quien la justifica.

Salvo la respuesta sobre el tratamiento didáctico de las dificultades de los niños, lo único que muestra el fragmento es la manera como F4 sostiene su contrato, esto es, a través de una gestión colectiva se cierran los espacios para la justificación y la inclusión de un discurso teórico. No obstante, los índices más claros del fracaso de la descontextualización del saber didáctico se pueden observar en el siguiente fragmento, en éste, la lección del libro a la que se hace referencia plantea la solución de varios cuadros mágicos,[211] unos con números enteros y otros con racionales, se trata de que el niño adquiera habilidad para sumar y restar fracciones.

M: Bien en relación al libro de 5º ¡resuelve los pasatiempos! (lee) ¿qué habilidades pueden desarrollar los niños al resolver este tipo de situaciones?
A: Yo le puse repartir cantidades inferiores o superiores
M: ¿Qué más?
A: Conocer los diferentes procedimientos para llegar al resultado
M: Bien, o sea habilidades para resolver problemas por distintos métodos, ¿qué más?
A: Razonamiento
M: ¿Qué más?

[211] Los cuadros mágicos son cuadrados que se subdividen en nueve cuadrados más pequeños, en cada uno de estos últimos se trata de escribir un número de manera tal que la suma vertical, horizontal o diagonal de tres cantidades registradas den el mismo resultado.

A: Cálculo mental
M: Y de esas respuestas que dan ahí los niños ¿todas son correctas?
As: No
M: No ¿verdad? Pero aquí la pregunta es sobre la habilidad de los niños ¿alguna observación?

No obstante la naturaleza de la tarea planteada en la lección, los estudiantes no han podido ligarla con los números racionales, por esta razón sus respuestas podrían ajustarse a cualquier dispositivo y a cualquier tarea matemática. Como se ha señalado, en este caso parece operar con mayor fuerza la descontextualización de la tarea, puesto que, sin un objeto matemático de referencia, los estudiantes se conforman con emitir respuestas coherentes con el contrato establecido (una respuesta que sea prueba de su aprendizaje), pero no con las razones epistemológicas.

Empero lo más importante en este fragmento es la forma que toma el saber didáctico puesto en juego, sobre este respecto resulta significativo observar que, aunque las tareas son de naturaleza didáctica, los objetos de saber (tratamiento de los errores, la identificación de un objeto matemático en un dispositivo de estudio, etc.) aparecen sólo como requisitos para responder a las preguntas del libro, esto es, en tanto que son producto de una técnica (identificar las posibles dificultades de los niños), las respuestas no se justifican ni se relacionan con un discurso teórico que dé sentido a la técnica utilizada o a la gestión de un proceso de estudio.

Un caso similar por la descontextualización pero diferente en la manera como se gestiona, es la técnica que analizaremos enseguida, en ésta se puede observar la forma como F2 gestiona una tarea didáctica también separada del objeto matemático de referencia. Esta descontextualización se hace evidente si se aclara que este episodio corresponde a la última sesión del proceso de estudio y que, en la sesión anterior, F2 había institucionalizado todos los significados de la fracción. En el siguiente fragmento se observa un intento de devolución por parte del formador, el "medio", cuyo elemento principal es el registro de observación, debería provocar el primer encuentro con el objeto de saber: los errores de los niños y su tratamiento didáctico. Sin embargo, la devolución es parcial porque F2 "muestra" el único error presente en el registro y deja a cargo de los estudiantes los tratamientos sobre este error. Luego del primer encuentro, F2 intenta gestionar un momento de exploración a través de un contrato basado en la mayéutica socrática, éste se hace evidente en el interjuego de preguntas y respuestas.

> M: En una observación encontré a uno de mis asesorados trabajando equivalencia de fracciones, van a leer el registro de la observación de esa clase y después hacer algunos comentarios. Desde mi punto de vista trata puntos muy interesantes, es un grupo de 5º grado y un niño utilizó un procedimiento que a grandes rasgos, decía $2.5 = \frac{2}{5}$, esto es algo de lo que viene en el texto pero coméntenlo. (Luego de algunos minutos). Vamos a comentarlo, al final del texto se plantean algunas preguntas, ¿qué hubieran hecho respecto a esa problemática?
> A1: Yo creo que el practicante se equivocó al hacer que los niños creyeran que el punto era igual que la línea, yo pienso que debió haber hablado con el maestro y poner un límite, porque eso se prestó a que los niños se confundieran, que hubiera más confusión
> M: Con eso ¿usted cree que se solucionaría el problema?
> A1: No
> A2: A lo mejor presentándoles soluciones problemáticas donde no se relacionara tanto, sino que hubiera una gran diferencia entre lo que es el punto decimal y lo que son las fracciones, porque por ejemplo, en el primero se parecía mucho el resultado y ya después se fue agrandando el problema, entonces poner problemas donde las soluciones no tuvieran que ver tanto.

No obstante la mayéutica fracasa porque A1 y A2 no proponen un tratamiento adecuado, señalar al maestro titular, la confusión que ha provocado el profesor en formación o cambiar las variables de la tarea (las cantidades que generan la confusión), no son tratamientos adecuados para ese error sino mecanismos cuya intención es evitar su aparición mediante el abandono de la tarea que los ha generado. Conciente de este fracaso, como se puede apreciar en el siguiente fragmento, F2 decide tomar a su cargo la solución de la tarea. Establecer el motivo de la confusión en los niños (2 pizzas para sus 5 amigos), la importancia de usar el algoritmo en ciertos problemas y la posible justificación del error (el procedimiento tradicional de plantear un problema a través de los datos, operación y resultado), son respuestas que F2 esperaba que emitieran los estudiantes, sin embargo, ante el fracaso inicial de la mayéutica es él quien las ha emitido.

> M: Aquí lo interesante es esa coincidencia. Bueno el primer problema planteaba que la mamá de Germán preparó 2 pizzas para sus 5 amigos ¿qué porción le toca a cada uno? En el primer procedimiento el niño divide 5 entre 2 y obtiene $\frac{2}{5}$

y aquí es donde viene la coincidencia que lo lleva a trasladar que 2.5 es igual a $\frac{2}{5}$, en otro de los procedimientos se divide en 5 partes y se reparte cada una de las pizzas, como en los ejemplos que hemos estado viendo aquí. En cambio en el procedimiento 4 aunque es parecido al primero también nos sirve para entender el porqué la exigencia de usar un algoritmo. El niño resuelve mediante una operación, yo comentaba hacer rato con alguno de los equipos que cuando daba clase en escuela primaria, era muy utilizado el procedimiento de DATOS, OPERACIÓN, RESULTADO. Y esto fue muy justificado
A3: Limitar los datos sería también una ventaja, así habría menos confusión con los niños
M: Bueno, yo creo que la confusión fue en el problema No. 1 en los demás no. Bien ¿qué más encontraron por ahí? (silencio), creo que una estrategia importante sería trabajar equivalencias de fracciones a números decimales y viceversa, ahí mismo el practicante se remite a un trabajo pasado donde trabajó equivalencias es el caso donde les explica a los niños que en 2.5, el 2 está en el campo de los enteros y el 5 es la mitad de un entero, tanto como que $\frac{2}{5}$ es solo una parte de un entero y por lógica $\frac{2}{5}$ es menor que 2.5. Sin embargo, otro dato interesante pudo haber sido convertir $\frac{2}{5}$ a fracción decimal para hacer la comparación o llevar a los niños a realizar la división que inicialmente se indicaba en el problema (2÷5) y entrar de nueva cuenta en el campo de los decimales. Entonces es necesario saber qué tanto se ha trabajado este tipo de divisiones, porque ésta es otra dificultad, que en esa sesión dejaron de lado, no la enfocaron hacia el 2÷5 que daría como resultado 0.4

Con la acción de F2, el contrato original ha sido modificado, a partir del momento que toma a su cargo la tarea, la mayéutica no opera más, el nuevo contrato da al formador la responsabilidad de transmitir el saber didáctico, esto es evidente cuando no toma la respuesta de A3 como una nueva oportunidad para reactivar la mayéutica, sino que es F2 quien explica los elementos didácticos surgidos de la pregunta planteada, es decir, la interrogante ¿qué hubieran hecho respecto de esta problemática?, guía las sugerencias de F2. Trabajar las equivalencias de fracciones a decimales, convertir $\frac{2}{5}$ a notación decimal o realizar la división original 2 entre 5, como son sugerencias emitidas por el formador, nos muestran que la mayéutica ha cedido su lugar a una “clase de didáctica”. La técnica que finalmente despliega F2 se caracteriza por su semejanza con una estrategia cultural.[212]

[212] Para Kuzniak (1994), las estrategias culturales son aquellas en las que los formadores no tienen intención de “transponer” un saber didáctico y por ello toman la forma de “clases de matemáticas”,

Bajo esta misma lógica, como se puede observar en el siguiente fragmento, F2 precisa otros elementos didácticos del objeto matemático implicado en la tarea (el tema es fracciones equivalentes) y la manera como se dirige el proceso de estudio (pero fíjense que nada de esto se trabajó en el texto), aunque acepta las respuestas de los estudiantes (explicándoles con el sistema decimal) es él quien toma la mayor responsabilidad de la tarea: explorar y precisar los diferentes tratamientos para ese tipo de error.

> A4: Creo que los niños al ver el 0.4 sabrían que les toca menos de la unidad de la pizza
> M: ¿Pero cuánto les toca? ¿Cómo haríamos para que los niños leyeran cuanto les toca?
> A2: Explicándoles con el sistema decimal, cada unidad dividida en 10 y explicarles que a cada uno le tocan $\frac{4}{10}$
> M: Bien, ahí estaría una primera forma. En el texto se aprecia que ya se trabajó con decimales y podríamos decir que 0.4 es igual a $\frac{4}{10}$, aquí ya tenemos un reparto más claro para llegar a $\frac{2}{5}$. El tema es fracciones equivalentes
> A3: O sea que $\frac{2}{5}$ es igual a $\frac{4}{10}$
> M: Pero fíjense que todo esto no se trabajó en el texto. Y esto me remite a hacerles una pregunta ¿cuántos de ustedes consideran que tienen elementos para poder articular los diferentes contenidos y saber de qué manera se van a ir articulando? (silencio), bueno para seguir avanzando vamos a analizar…

Puede decirse que en este caso, la descontextualización de la tarea no ha sido relevante, porque aún cuando no se planteó como complemento al estudio de un objeto matemático (la equivalencia entre fracciones y decimales), las precisiones de F2 no se ubicaron en un nivel didáctico general, en todos los casos se ajustaron a la especificidad de los objetos matemático y didáctico (los tratamientos para el error). Sin embargo, una característica de las "clases de didáctica" es el rol poco relevante del estudiante, como se ha podido observar, éste tiene pocas oportunidades de utilizar o justificar una técnica didáctica, ya que es el formador quien toma a su cargo dicha responsabilidad. Otro hecho significativo en esta técnica de formación es que el saber didáctico toma la forma

---

sin embargo, señala este autor, cuando se intenta transponer un saber didáctico puede surgir una estrategia (de transposición) que toma esta misma forma pero un objeto diferente, el didáctico. En estos casos, señala Kuzniak, lo que se tiene es una "clase de didáctica".

de un discurso prescriptivo a-teórico que no requiere más justificación que la autoridad del formador.

5.2.3. La homología ampliada. La transposición del saber didáctico

Entre las técnicas analizadas, la que denominamos *homología ampliada* es la aproximación más cercana a la transposición, en ésta se toma a la homología como referente y, considerando la existencia de un saber didáctico que es necesario reconstruir, se gestiona una ampliación de la homología para reconstruir un elemento de la praxeología docente. Es decir, el estudio de un elemento de la OM se complementa con una tarea didáctica referida a ese objeto matemático: las dificultades y errores de los niños, las características de un dispositivo de estudio, la dirección de un proceso de estudio, etc.

Un dato significativo es que si bien F2 y F4 sólo plantean tareas didácticas descontextualizadas, la *homología ampliada* es una técnica que distingue al proceso que dirige F1. En el caso de este formador, es frecuente que gestione diferentes momentos didácticos para el estudio de un objeto matemático y que posteriormente planteé una tarea didáctica relacionada con dicho objeto, en otros términos, contra los mandatos curriculares que sugieren una tarea didáctica por tema, F1 gestiona una homología ampliada para la mayoría de los objetos matemáticos estudiados[213]. El hecho es significativo si se recuerda que, entre los formadores observados, F1 es le de menor experiencia en la enseñanza y en la formación de profesores, también es quien en sus representaciones sociales muestra un mayor acuerdo respecto de la articulación entre saberes matemáticos y didácticos planteada en el programa de estudios. En lo que sigue se analizará la manera en la que F1 gestiona una homología ampliada.

5.2.3.1. Los momentos del primer encuentro y exploratorio

Como se ha señalado, un primer momento de esta técnica consiste en gestionar una homología, este momento, como se puede observar en el siguiente

[213] Aunque la "homología ampliada" es utilizada por F1 como la técnica principal para la transposición del saber didáctico, en el proceso de estudio que él dirige también pueden observarse "deslizamientos didácticos" aunque no tareas didácticas descontextualizadas.

fragmento, inicia con la “devolución”, esto es, cuando el formador deja a cargo de los estudiantes la resolución de una tarea en la que se halla implícito el significado medida.

> M: Les voy a entregar este problema (en una hoja) van a anotar todos los procedimientos que usen, no borren ninguno (comienzan a trabajar)
> A: ¿Qué dice?
> M: El problema dice: “Un viaje interplanetario. La nave azul sale del planeta azul con rumbo al planeta rojo, al mismo tiempo la nave roja, un poco más lenta, sale del planeta rojo rumbo al planeta azul, cuando se cruzan en el camino la nave azul ha recorrido $^{1}/_{5}$ más de la distancia entre los dos planetas que la nave roja. Después de este punto la nave azul tarda 8 días más en llegar a su destino ¿Cuánto tiempo duró el viaje de cada nave? Bien entonces ubicamos qué plantea el problema y cuál es la interrogante y a partir de ahí lo resolvemos (los estudiantes comienzan a resolverlo)

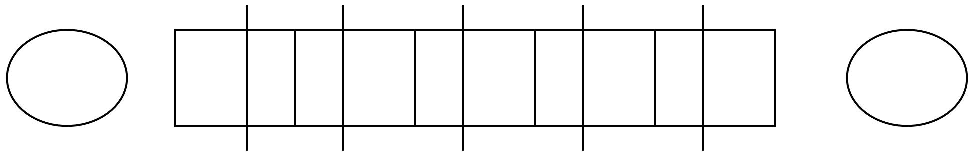
Una vez realizada la “devolución”, el momento del primer encuentro se realiza mediante una tarea (el problema) en la que se puede encontrar la organización matemática estudiada o uno de sus elementos: la razón. Por su parte, el momento de la exploración se lleva a cabo cuando los estudiantes intentan resolver el problema, mediante esta actividad exploran el tipo de tarea planteado e intentan construir una técnica adecuada para resolverla.

5.2.3.2. El momento de la constitución del entorno tecnológico teórico

Una segunda fase de la homología consiste en gestionar un momento para la justificación de las técnicas empleadas y, eventualmente, para dotar de sentido a la tarea a través de algunos elementos teóricos, este momento no es otro que el de la constitución del entorno tecnológico. En el siguiente fragmento se puede observar la manera como F1 gestiona este momento, particularmente se observa la naturaleza a-didáctica de su gestión, esto es, a pesar de que la técnica que intenta justificar Enrique (un estudiante) contiene un error (suponer que el punto medio es el lugar de encuentro entre las naves), esta respuesta no es justificada por F1, al contrario de esto, una vez que lanza una pregunta (¿$\frac{5}{5}$?) que obliga al estudiante a precisar su respuesta, son otros estudiantes (A1, A2 y A3) los que toman a su cargo la justificación de la técnica utilizada.

> M: Bien, vamos a ver ahora los resultados, Enrique expliquen su procedimiento.

E: Primero hicimos una gráfica del problema, representamos el planeta azul con un círculo, hicimos el recorrido con este cuadro, lo fragmentamos en 5 partes y después, como no quedó claro dónde era la mitad, decidimos fragmentarla en más partes, la dividimos en décimos y así pudimos ver dónde estaba el punto medio que son $\frac{5}{10}$, no $\frac{5}{5}$



M: ¿$\frac{5}{5}$?

E: No, $\frac{5}{10}$

A1: Son $\frac{5}{10}$ pero el problema nos dice que la nave azul recorrió más que la nave roja y el cruce es aquí en $\frac{6}{10}$

A2: Pero en todo caso sería en $\frac{7}{10}$ porque $\frac{1}{5}$ equivale a $\frac{2}{10}$

A3: Es que ustedes están pensando que recorrió $\frac{1}{10}$ nada más y es $\frac{1}{5}$

A1: Más bien recorrió $\frac{10}{5}$

A2: $\frac{10}{5}$ son 2 enteros, ¿quieres decir $\frac{10}{10}$?

A4: No, $\frac{7}{10}$

La discusión de los estudiantes es una muestra de que la intención de F1 por justificar ha desaparecido, ya que ha “devuelto” la responsabilidad de resolver la tarea, pero también la de justificar las técnicas empleadas y los resultados que de ellas se derivan, así, se observa una gestión a-didáctica del momento de la constitución del entorno tecnológico teórico. Este tipo de gestión resulta significativo por su coherencia con la homología y con la intención de gestionar un medio que sea similar al que se desea gestionen los estudiantes cuando dirijan un proceso de estudio. Por otra parte, como se puede observar en el siguiente fragmento, resulta significativo también que F1 no sustituya su contrato a pesar de las dificultades de los alumnos para justificar la técnica, cuando dice, *explica por qué* $\frac{10}{5}$ o *¿qué opinan los demás?* sostiene la devolución sin importar que la técnica adecuada no haya surgido todavía.

M: A ver, explica porqué $\frac{10}{5}$

A1: Lo dividimos en $\frac{10}{5}$, la mitad son $\frac{5}{5}$ y la nave azul recorrió $\frac{1}{5}$ más, serían $\frac{6}{5}$ y este es el punto donde se encontraron las naves, luego a partir de aquí (señala $\frac{6}{5}$, que tomando el trayecto como la unidad serían $\frac{6}{10}$) recorrió 8 días, los dividimos entre los $\frac{4}{10}$, nos salen 2 días por cada décimo y concluimos que la nave roja tardó 20 días y la azul 12 días porque era más rápida

M: ¿Qué opinan los demás? ¿cómo supieron que era 12? (pasa otro alumno del mismo equipo)

A2: Es que cada parte valía 4 días (se refiere a cada quinto) entonces lo dividimos en décimos y cada cuadro valía 2 días, entonces ya se sumaba 2,4,6,8,10,12 (señalando los décimos) por eso le pusimos 12 días y las otras suman 20

A3: Es que ahí debes decir que llevan 12 pero hasta $\frac{6}{5}$ y todavía faltan sumarle el otro para que llegue hasta el planeta rojo

A1: Fíjate bien (el alumno del pizarrón) es que la nave roja iba más rápido entonces...

A2: La nave azul era la más rápida

A1: Ah me equivoque, la azul iba más rápido, entonces dicen que se tardó 8 días menos ¿verdad? O más

A2: No dice eso, sólo que llegó a los 8 días

A: Fíjese bien lo que dice, la nave azul tardó 8 días más

A2: No

A: Sí

A3: Dice 8 días más del recorrido que ya lleva

A: En llegar a su destino, no de recorrido, entonces réstenle los 8 días y nos da el 12

Mediante esta especie de mayéutica, F1 continúa gestionando el momento tecnológico, solicita a cada equipo que explique su procedimiento y en cada ocasión pregunta al grupo sobre la validez de la técnica y del resultado. No obstante que ningún equipo pudo llegar al resultado y ni encontrar la técnica adecuada, F1 continuó con este mismo tipo de gestión hasta el momento de la institucionalización.

5.2.3.3. El momento de la institucionalización

Como el resultado y la técnica adecuados no han surgido del momento tecnológico anterior, requieren de precisarse en el momento de la institucionalización. Por esta razón, como se puede observar en el siguiente fragmento, una primera acción de F1 consiste en institucionalizar estos elementos.

M: Vamos por puntos, $\frac{3}{5}$ es el punto de encuentro, aquí va la nave azul y tarda 8 días más en llegar a su destino, entonces haciendo la partición en quintos podemos decir que cada quinto equivale a 4 días, si en $\frac{2}{5}$ son 8 días ¿cuántos serían en $\frac{3}{5}$?
As: Doce
M: Ahora, salen al mismo tiempo y llevan el mismo tiempo recorrido, sólo que la roja va más lenta, entonces llevan 12 días cuando se cruzan y tarda 8 días en completar su recorrido. ¿Cuántos días tardó en total?
As: 20
M: Ahora, cuando se cruzan en $\frac{3}{5}$ la nave roja sólo ha recorrido $\frac{2}{5}$ y también se ha tardado 12 días. ¿Cuánto se tardó en recorrer cada quinto?
As: Seis días
M: ¿Cuánto se tardará en recorrer toda la distancia?
As: Treinta días
A1: Entonces ese dato se pierde ¿no?

Como se puede observar, para dicha institucionalización, F1 reconstruye la técnica mediante la que se resuelve el problema y a través de preguntas de bajo nivel cognitivo (¿Cuántos serían en $\frac{3}{5}$?, ¿cuántos días tardó en total?), demanda la adhesión a su proyecto institucionalizador y hace participar a los alumnos en un momento donde él es el actor principal. Con la precisión de la técnica y el resultado F1 ha concluido la gestión de la homología.

Hasta ese punto, F1 ha gestionado momentos del primer encuentro, exploratorio y de institucionalización, en su gestión sólo ha otorgado a los estudiantes el rol del alumno que estudia un objeto matemático. Sin embargo, la última pregunta de A1 es utilizada para precisar otros elementos de la OM que no corresponden a la homología. Como se puede observar en el siguiente fragmento, cuando precisa los significados parte-todo y medición, la relación entre ambos y las magnitudes discreta y continua, rompe con la naturaleza de la homología y desplaza la actividad hacia el sistema de formación, esto es, como los elementos institucionalizados no son necesarios en un proceso dirigido con niños, se instaura un contrato de formación en el que los estudiantes ocupan el lugar del eventual profesor.

M: Acabas de tocar un punto esencial en el manejo de las fracciones en la recta numérica. ¿Qué podemos observar aquí? Es más abstracto por eso necesitamos

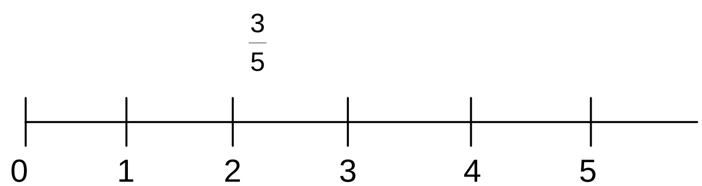
primero identificar la relación parte-todo a través de superficies, de rectángulos, de cuadrados, de círculos
A2: Este problema como que está en un contexto discreto ¿no?
M: Los demás ¿qué opinan? ¿es un contexto discreto?
As: No porque es una sola recta, no tenemos dos rectas
M: Es una sola recta
A2: Pero en el caso de que hayan dividido la recta en dos enteros
M: Lo que pasa es que la unidad es la distancia y nos habla de quintos, si fuesen dos unidades implicaría fracciones impropias, mayores que la unidad. ¿En qué nos apoyamos para resolver este problema?
A1: En una recta
M: ¿Qué significado o contexto de la fracción podemos encontrar?
As: Contexto de medición
M: Contexto de medición, muy bien, y ¿qué significado?
A: Parte-todo
M: Partes de una unidad, parte-todo, recuerden que es un significado relacionado con la medición, entonces ¿qué podemos deducir de este problema? Que es un poco más complejo, no podemos repartir el número de partes como en las actividades anteriores (se refiere a los problemas de reparto), de ahí podemos deducir la importancia de este contexto. También es necesario que los niños puedan interpretar cuál es el todo y las partes. Acuérdense, la relación parte-todo está implícita en todos los significados, pero se puede considerar como un significado específico ligado a la medición
A: ¿O sea que la medida lleva incluida la relación parte-todo?
M: Sí, estamos hablando del contexto de medición, habíamos manejado dos contextos ¿qué eran?
As: Reparto y medición
M: Y magnitudes discretas y continuas.

Empero, lo más importante es que la institucionalización de estos elementos ha derivado de la inclusión un tanto forzada de la recta numérica como factor ligado al significado medida, es decir, cuando toma a la recta como referente para resolver el problema y cuando pregunta por el significado implícito en la tarea, relaciona este significado con la recta numérica. Al parecer, como se observa en el siguiente apartado, esta relación también se utiliza para relacionar la homología con una tarea didáctica.

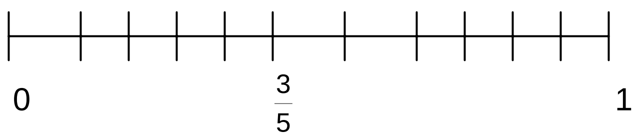
5.2.3.4. Las dificultades en la recta numérica. Una ampliación para la homología

Aunque en el momento de la institucionalización F1 ha precisado elementos de la OM que son propios del profesor, su gestión no ha rebasado los límites de la homología, el saber didáctico ha permanecido “transparente”, visible sólo a través del contacto con el medio que ha gestionado, puede decirse también que la tarea que plantea enseguida es una ampliación de la homología, porque no se desliga del objeto matemático (el significado medida) cuyo estudio ha gestionado. La tarea planteada puede apreciarse en el siguiente fragmento.

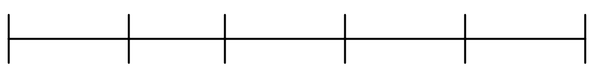
> M: Vamos a ver ahora otra cosa, van a pasar a ubicar puntos en la recta, que es una de las actividades relacionadas con la medición que se realizan comúnmente en la escuela primaria (dibuja la siguiente recta). Carolina, indícame $\frac{3}{5}$ en la recta numérica
> A: Ya



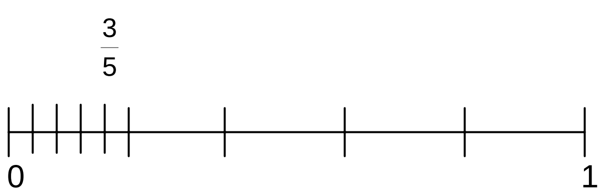
> M: Daniela pasa y ubica $\frac{3}{5}$ (F1 dibuja la recta)
> D: Ya está



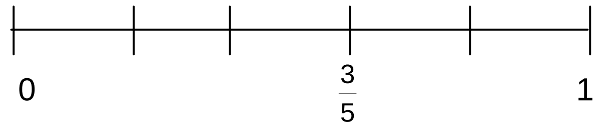
> M: Oscar, ¡ubica $\frac{3}{5}$! (F1 dibuja la recta)



> O: Es un entero que está fraccionado en quintos, ya está



> As: Nooo
> O: (Repasa las rayas con su dedo pero no cambia el resultado)
> M: Maribel, ¡pasa a ubicar $\frac{3}{5}$!
> Ma: ¿Aquí? (les pregunta a sus compañeros)



La tarea parece corresponder a momento del trabajo con la técnica matemática, sin embargo, dos rasgos evidencian su naturaleza didáctica, la referencia a la recta numérica como dispositivo para el estudio del significado medida y el hecho de que, aún cuando algunas de las respuestas son inadecuadas, no se percibe ningún intento de justificar la técnica. Como se puede observar en el siguiente fragmento, estos rasgos son coherentes con la intención de F1 para gestionar la tarea como un momento específicamente didáctico. Cuando pregunta ¿qué podemos observar en estas respuestas?, lo que hace es tomar las respuestas de los alumnos como referente para una tarea didáctica. Así, ante la ausencia de tareas realzadas por los niños, la ubicación de puntos en la recta, que han hecho los estudiantes, es un elemento del “medio” que permite plantear una tarea didáctica en la que deberán utilizar una técnica didáctica que les permita identificar la naturaleza de los errores cometidos.

M: Bien ¿qué podemos observar en estas respuestas? La primera

A1: Que son 3 enteros y no $\frac{3}{5}$

M: A ver tenemos $\frac{3}{5}$ ¿es mayor o menos que la unidad?

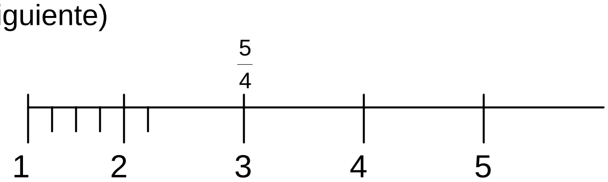
As: Menor

M: Menor, aquí encontramos una de las ventajas de la recta para representar fracciones, por un lado se podría decir que las fracciones rellenan esos huecos entre dos números enteros, aquí podemos ubicar (señala el hueco entre 1 y 2) a $^{3}/_{5}$, una de las dificultades que se encuentran en la escuela primaria es la de Carolina ¿Porqué pensó que ahí era $\frac{3}{5}$?

A2: Por que tomó 5 enteros como un solo entero

M: Estamos tomando varias unidades, todavía nos cuesta un poco de trabajo interpretar la relación parte-todo, también de aquí se deriva que no podemos pasar rápidamente a la suma y a la comparación de fracciones hasta que no esté firme la relación parte-todo. Otra de las ventajas es que aquí aparecen con mayor naturalidad las fracciones impropias, porque si yo digo Miguel ubícame en esta recta $\frac{5}{4}$

Mi: (Marca lo siguiente)



> M: Vemos que esta fracción es mayor que la unidad, entonces al representarla en la recta es más sencillo ver con naturalidad esta representación que fracciona otro entero

Lo significativo de este momento es que, a diferencia de otras técnicas de formación analizadas, en la “homología ampliada” existe una tarea específica en la que los estudiantes deben utilizar una técnica propia del profesor (identificar los errores), en este sentido, los estudiantes y el saber didáctico tienen un primer encuentro a través de un tipo de tareas ligado con el elemento matemático (el significado medida) que se estudia, con una técnica que deben utilizar para cumplir con esta tarea y con un discurso que justifica esas técnicas, este discurso se hace presente cuando A2 señala el origen del error, ya que es mediante este señalamiento que justifica la validez de su técnica.

En este caso pueden observarse tres elementos de una praxeología docente que relaciona a los errores con el significado medida: un tipo de tareas en las que está implicado dicho objeto didáctico (los errores), una técnica que debe desplegarse para cumplir con esa tarea y un discurso tecnológico que justifica la técnica empleada, aunque también es significativa la ausencia de un discurso teórico que de sentido a este tipo de tareas[214]. También es posible observar que, si bien los estudiantes tienen a su cargo la construcción de una técnica y la justificación de sus respuestas, el formador es quien introduce los elementos didácticos de naturaleza prescriptiva, él precisa las ventajas de la recta numérica en el estudio de la densidad y las fracciones impropias y orienta a los estudiantes sobre los saberes previos necesarios para plantear este tipo de tareas (hasta que esté firme el significado parte todo).

Sin embargo, como se puede observar en el siguiente fragmento, este juego de roles no se sostiene durante todo el episodio, por un lado, F1 cede la responsabilidad de la prescripción cuando solicita a los estudiantes responder a la pregunta de A3 y por el otro, recupera la responsabilidad que había asignado a los

---

[214] Sin embargo, esta ausencia no es una constante en las “homologías ampliadas” que gestiona F1, en dos casos este formador incluye un discurso teórico. En ambos casos la inclusión se hace a través de la discusión de reportes de investigación en los que se da cuenta de las dificultades de los niños en tareas ligadas al significado parte-todo y operador multiplicativo. No obstante, para el análisis de la “homología ampliada” hemos seleccionado este episodio porque es donde se puede apreciar está técnica de una manera más clara.

estudiantes cuando precisa la naturaleza del error en la segunda recta (la confusión se da porque utilizamos múltiplos de la fracción). No obstante, coherente con la inestabilidad del contrato didáctico que ha puesto en marcha, en el tercer caso (la respuesta de Oscar) se establecen nuevamente los roles originales, los estudiantes dan el resultado y la justificación (Oscar no toma en cuenta el 0 y el 1) y F1 precisa la prescripción (si utilizamos una representación rectangular esto es menos complejo).

> M: ¿Aquí qué sucede? (señala la segunda recta sobre la que ubicaron $\frac{3}{5}$)
> A: Es un error de cálculo
> A2: Sí, o sea que ella puso $\frac{5}{10}$ y debería haber puesto $\frac{6}{10}$
> A3: Maestra, yo pasé a un niño y le dije, ubícame $\frac{3}{5}$ en esa recta pero él empezó a contar de derecha a izquierda ¿esto es como direccionalidad? Y les pregunté si estaba bien y me decían sí porque son 3 pedazos
> M: Los demás qué opinan? ¿qué se debe hacer ante este tipo de situaciones?
> A: Ponerle el 0 y el 1 para que sepa cuál es la dirección
> M: Lo que pasa es que el niño únicamente sabe fraccionar equitativamente, pero no sabe a partir de donde se ubica ese entero, entonces como dice Miguel, colocar los números sería una de las formas, o los demás ¿qué opinan?
> As: Sí
> M: Entonces, cuidado con este tipo de situaciones, hemos comentado la necesidad de implementar muchos tipos de situaciones que refuercen este tipo de aprendizajes, aquí por ejemplo (señala la 2da. recta) la confusión se da porque utilizamos múltiplos de la fracción (se refiere a que la subdivisión de la recta es múltiplo del denominador), lo mismo sucede con los niños, aunque Daniela verificó dónde estaba el error, por lo general, los niños buscan que la unidad esté fraccionada en las partes que les piden representar.
> M: Y acá (señala la tercera recta) ¿qué pasó?
> A: Oscar no toma en cuenta el 0 y el 1
> O: Es que yo me confundí al ver un entero, dividí cada pedazo en quintos para poder ubicar tres pedazos
> M: Si utilizamos una representación rectangular esto es menos complejo, pero en la recta, las situaciones son más abstractas, por eso es más difícil ubicar a la unidad, lo que hace Oscar es tomar una de las partes como unidad.

Si analizamos la gestión de esta tarea didáctica en su conjunto, podremos advertir que, al igual que en la homología, se ha gestionado un momento para el primer encuentro con el elemento de la OD (los errores de los alumnos), a través de una tarea específica. También puede advertirse un intento por gestionar un momento tecnológico cuando F1 cuestiona a los estudiantes sobre la naturaleza de los errores, este tipo de gestión resulta significativo si se observa en el siguiente fragmento la manera como F1 intenta gestionar un momento para la institucionalización.

> M: Bueno éstas son algunas de las dificultades y los errores que cometen los niños al trabajar con la recta numérica y las formas mediante las que podrían superarlos. También algunas ventajas de trabajar con la recta numérica, ¿cuáles serían?
> A1: Lo de las fracciones impropias
> M: ¿Qué conocen de los números fraccionarios?
> A2: Que están ubicados entre un número entero y otro
> A3: ¿Aquí no van las mixtas?
> A4: Las fracciones equivalentes
> M: También pueden ser las mixtas, uno más $\frac{1}{2}$
> A2: También la equivalencia
> M: Bueno vamos a seguir trabajando un poco con las fracciones en la medición…

Si bien puede observarse que el elemento didáctico (los errores) se ha deslizado, porque más que precisar las cuestiones sobre los errores de los estudiantes, F1 precisa las ventajas del dispositivo de estudio, resulta significativo su intento por gestionar todos los momentos didácticos para el estudio de un elemento didáctico, incluyendo un momento para el trabajo con la técnica que se hace evidente en la última frase del formador (bueno vamos a seguir trabajando con las fracciones y la medición).

Es por este intento, que en nuestra perspectiva la “homología ampliada” se constituye como la técnica que más se aproxima a la transposición de los saberes didácticos, en ella el saber didáctico ocupa el lugar central del proceso de estudio como un objeto de saber específico ligado a un elemento matemático. No obstante la intencionalidad de esta técnica, son evidentes las dificultades para estudiar un objeto didáctico que tiene una existencia “borrosa” esto es, en todas las técnicas analizadas lo común es la dificultad para delimitar claramente la naturaleza de los objetos (de saber) didácticos, esta dificultad provoca que estos objetos tomen formas diversas: una especie de consejos, especulaciones sobre lo que podría acontecer, prescripciones sobre la dirección de un proceso de estudio o sobre los posibles tratamientos del error. Al parecer, la ausencia casi total de un discurso teórico que de sentido a las tareas de naturaleza didáctica es un factor determinante en este proceso diluyente.

5.3. CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

Para finalizar ese capítulo, hemos de decir que, en tanto que la técnica principal que utiliza F4 es la homología directa, la actividad nunca rebasa los límites del sistema didáctico *stricto sensu,* es decir, permanece encerrada en lo matemático. Así, la praxeología de formación que reconstruye es incompleta ya que si bien en la homología hay un componente didáctico, en esta técnica este elemento nunca aparece de manera explícita y por lo mismo es difícil de incluirlo en un momento de institucionalización. Al no incluir tareas en las que aparezca de manera explícita un elemento didáctico*,* los elementos de la praxeología didáctica devienen "transparentes", es decir no visibles para el formado, de manera que éste debe estudiarlos solamente mediante el contacto con el medio que se ha estructurado a través de la homología.

Intentar reconstruir las praxeologías docentes a partir de la homología directa, como lo hace F4, significa olvidar la existencia de un "saber didáctico" objetivo y también que el profesor en formación deberá aprender a dirigir un proceso de estudio imitando solamente la actividad del formador, si a esto le añadimos las dificultades que F4 ha mostrado para gestionar los momentos didácticos de manera adecuada, podemos deducir que el estudiante tendrá dificultades para construir técnicas didácticas que le permitan resolver las tareas "problemáticas" de su profesión.

Otro dato relevante es que esta técnica es utilizada principalmente por el formador con mayor experiencia, lo que significa que la técnica que utiliza, más que apoyarse en saberes provenientes del campo de la didáctica, recibe una influencia de los saberes sedimentados históricamente en las escuelas normales, saberes que al parecer, dan mayor importancia a la formación matemática que a la didáctica. Además, esta forma de dirigir el proceso de estudio es congruente con las representaciones que sobre el saber didáctico ostenta F4, recordemos que es este formador quien da mayor énfasis al dominio de los contenidos matemáticos como una de las tareas prioritarias en la formación. También es congruente con la dinámica interna que ha impuesto al proceso de estudio, orientado sobre un modelo epistemológico clásico, F4 establece un *topos* teórico para sí mismo y un *topos* ligado a la aplicación para el estudiante.

En el caso de F2, la técnica más recurrente es la homología, combinada con deslizamientos didácticos, además de sus representaciones sobre el saber didáctico su dirección del proceso de estudio nos permite suponer que considera la existencia de un “saber didáctico” necesario para la formación, en la técnica que utiliza con más frecuencia (el deslizamiento didáctico) este saber aparece desligado de cualquier elemento praxeológico, es decir, en su gestión no aparecen tareas didácticas en las que el estudiante deba probar la eficacia de sus técnicas y sin este elemento es difícil gestionar los otros momentos didácticos, por esta razón, en el proceso que dirige F2 lo didáctico aparece solamente como una especie de consejos para la práctica, como técnicas sugeridas por el formador que se justifican por el ejemplo que de éstas hace a través de la homología. En síntesis, si bien F2 acepta la existencia del “saber didáctico” y su actividad está orientada por un modelo epistemológico constructivista, su dificultad principal para establecer mejores formas de gestión estriba en la construcción de técnicas de formación adecuadas para reconstruir dicho saber.

En el caso de F1 lo significativo es que aún siendo el formador de menor experiencia, incluye un mayor número de elementos de una praxeología de formación, es el único que intenta gestionar diferentes momentos didácticos para el estudio de un elemento didáctico, también en el proceso que dirige podemos observar la presencia de tareas que los estudiantes deben resolver mediante una técnica didáctica y la gestión de momentos tecnológicos y de institucionalización para un elemento didáctico. Como en el caso de F2, este tipo de gestión que se orienta por un modelo constructivista es congruente con sus representaciones sociales sobre aquello que considera necesario en la formación de profesores, es decir, en las representaciones de F1 puede apreciarse la aceptación de saberes ligados a la didáctica como un componente necesario para la formación de los profesores.

Finalmente es necesario aclarar dos puntos, los formadores observados utilizan varias técnicas de formación, sin embargo, las analizadas son las que mayor frecuencia presentan a lo largo de cada uno de los procesos de estudio que cada uno dirige, por esta razón, podemos asumir que en buena parte, éstas nos permiten inferir el discurso tecnológico global que guía las acciones de cada uno. Por otra parte, la dificultad para desplegar técnicas de formación eficaces es una consecuencia del carácter poco elaborado de las praxeologías de formación espontáneas y como lo señala Bosch (2003), la manera de superarlas pasa necesariamente por el desarrollo de una *teoría didáctica* que sirva como fundamento para diseñar y gestionar organizaciones praxeológicas viables.

VI. LAS PRAXEOLOGÍAS MATEMÁTICAS Y LOS PROFESORES EN FORMACIÓN

En el capítulo anterior se ha visto el trabajo de transposición interna sobre el saber didáctico, es decir, se ha analizado la manera como los formadores "hacen vivir" ese saber en las aulas de las escuelas normales, no obstante, este análisis sólo puede permitir algunas inferencias acerca de la forma en que ese saber llegó a los formados, por esta razón para conocer con mayor precisión el estado que guardan los distintos saberes en los profesores en formación, en este capítulo analizaremos su capacidad para utilizar las técnicas matemáticas reconstruidas a través del proyecto de formación.

Para realizar tal análisis, como se menciona en la introducción, se aplicó un cuestionario (ver anexo 3) a los profesores en formación de los grupos observados, en él se incluyen tareas ligadas a los saberes matemáticos y didácticos. En lo que respecta a las tareas matemáticas como se puede ver en el cuestionario, se plantearon tareas en las que es necesario poner en funcionamiento un concepto en situación y otras en las que la tarea debe realizarse en el contexto de la representación convencional o algorítmica, la inclusión de ambos tipos de tareas fue una elección que toma en cuenta lo señalado por Brousseau respecto de la forma en que un conocimiento matemático adquiere su sentido, sobre esta cuestión afirma que,

> ... la construcción de la significación de un conocimiento debe ser considerada en dos niveles:
> - un nivel "externo": ¿cuál es el campo de utilización de este conocimiento y cuáles son los límites de este campo?
> - Un nivel "interno": ¿cómo y por qué funciona tal herramienta (por ejemplo, ¿cómo funciona un algoritmo y por qué conduce al resultado buscado?)... (Brousseau, en Charnay; 1994, p. 54)

En correspondencia con esta acotación, es deseable que el conocimiento de los profesores en formación pueda operar en estos dos niveles, por esta razón en el cuestionario se plantean tareas en uno y otro nivel. Cabe mencionar también que las tareas planteadas son similares en contenido y complejidad a aquellas que se sugieren en los materiales de los formadores para la evaluación de los aprendizajes.

Por otra parte y como ha sido señalado en capítulos anteriores, la intención de este trabajo es explicar los fenómenos de la transposición del saber didáctico utilizando como herramientas de análisis los conceptos creados en el mismo seno de la didáctica, en el caso de los saberes de los profesores en formación la intención es la misma que la de este trabajo. Para ello echaremos mano de algunas nociones de la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud, desde la que, fundamentalmente, se ha estudiado el proceso de conceptualización de la realidad. Sobre dicho proceso Vergnaud señala:

> ... un concepto adquiere su significado a lo largo del desarrollo y en los diferentes contextos en que el individuo actúa. El campo de aplicación de los conceptos se modifica conforme se vincula con otros conceptos y principios matemáticos, con nuevas situaciones o con diversas herramientas de simbolización... (Vergnaud,1980, en Flores, 2002, p. 35)

Desde esta perspectiva, la significación de un concepto está dada por su funcionalidad en situaciones, más específicamente menciona este autor, los conceptos matemáticos adquieren su significado con base en la interrelación que *invariantes y representaciones* tienen al aplicarse en diferentes situaciones. Las *invariantes operacionales,* como Vergnaud las denomina, tienen que ver con el conocimiento de las propiedades de los objetos matemáticos, de las relaciones entre ellos y de las operaciones para su transformación, en síntesis, las invariantes operacionales designan el componente eminentemente matemático de los conceptos y a decir de Vergnaud, el conocimiento de los conceptos e invariantes es implícito en un primer momento pero es también la base del conocimiento formal.

Por su parte la representación alude a la relación entre invariantes y las distintas formas de simbolización, relación que se da en el curso de la acción sobre la realidad, dichas herramientas simbólicas que pueden ser explícitas, orales, gráficas, escritas, etc., a la vez que se emplean como herramientas del pensamiento durante la acción, derivan su significado de ésta, es decir, una representación deriva de la acción sobre la situación, pero se constituye como una herramienta del pensamiento que permite resolver situaciones de mayor complejidad. En opinión de Vergnaud (en Flores 2002), el empleo de los sistemas simbólicos está ligado a dos dimensiones: una cultural socialmente transmitida, y una epistemológica desarrollada en el proceso de conocimiento del individuo sobre su entorno. En la dimensión epistemológica se pueden observar las representaciones individuales que el sujeto crea en su búsqueda de la solución de una situación, mientras que la dimensión cultural alude a los sistemas simbólicos derivados de las convenciones sociales.

La representación, en tanto relación entre invariantes y formas de simbolización, es un concepto que permite comprender que junto a ciertos principios lógicos matemáticos, el sujeto debe conocer los sistemas simbólicos matemáticos convencionales para poner en práctica dichos principios, por esta razón es responsabilidad de la escuela lograr que los sujetos no sólo resuelvan determinadas situaciones, sino que también lo hagan con la representación matemática convencional, puesto que es ésta la que permite poner en práctica principios matemáticos de cierta complejidad.

Por otra parte, en la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud las situaciones son eventos que dan significado a la relación entre invariantes y simbolización, esto es, son eventos que permiten significar a las representaciones y el contexto que da funcionalidad a invariantes y simbolización ya que los principios lógicos que definen a un concepto y las formas simbólicas que permiten operar con él adquieren un significado específico en la situación donde se les emplea (Vergnaud 1996, en Flores, 2002, p. 41). Cada situación se define entonces por un conjunto de invariantes y por las relaciones entre ellas, en este sentido y siguiendo a Vergnaud, pueden distinguirse dos clases generales de situaciones:

1. Clases de situaciones para las cuales el individuo dispone de conocimientos necesarios y en cuyo caso las acciones son automáticas.

2. Clases de situaciones para las cuales no se dispone de los conocimientos necesarios, lo que promueve el surgimiento de esquemas que se acomodan, se descomponen y recomponen.

Bajo esta lógica, la extensión con la que se comprenda un concepto está directamente relacionada con la diversidad de situaciones en que se aplica y con la experiencia del individuo sobre ellas, por ejemplo si un conjunto de situaciones ligadas a un concepto matemático es ubicado por un sujeto dentro de las situaciones del primer tipo, es de esperarse que dicho sujeto tendrá una mayor comprensión de dicho concepto. Por su parte, la combinación de invariantes y la experiencia en diversas situaciones permite al sujeto el análisis y la clasificación de diferentes posibilidades de aplicación del concepto y el dominio progresivo de un campo conceptual, a partir del reconocimiento de semejanzas y diferencias entre situaciones.

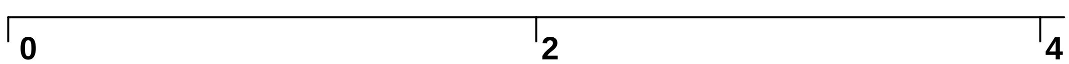
En términos de la TAD, podría decirse que los dos tipos de situaciones que menciona Vergnaud son los diversos tipos de tareas en los que se puede encontrar un elemento de cierta organización praxeológica, mientras que la representaciones nos permiten analizar con mayor profundidad el tipo de técnicas que utilizan los sujetos y los mecanismos (invariantes) que las caracterizan. Una vez aclaradas estas nociones, en lo que sigue analizaremos la conceptualización que los formados hacen de las diferentes nociones matemáticas relativas a los números racionales, para ello, en congruencia con las ideas de Vergnaud, el análisis se centrará en las representaciones que se despliegan en la resolución de las tareas planteadas.

Como se ha señalado en el capítulo II (ver apartado 2.4), el “modelo teórico ideal” que Kieren propone para el conocimiento del número racional enfatiza los constructos (o mecanismos constructivos) de partición, equivalencia y relación parte-todo como base para el conocimiento posterior de subconstructos como medida, cociente, razón y operador, lo que permitiría finalmente comprender los campos formales aditivos y multiplicativos y sintetizar el conocimiento del número racional como campo cociente de números racionales[215]. Intentando seguir el sentido de este modelo, en lo que sigue analizaremos las representaciones que los formados utilizan para resolver las tareas propuestas en el cuestionario.

6.1. LA FRACCIÓN COMO MEDIDA

Sobre la importancia de la medición en el conocimiento de las fracciones, los materiales de los formadores señalan que “La medición es otra actividad fundamental que da lugar al fraccionamiento y además, constituye un contexto adecuado para trabajar ciertos aspectos de las fracciones, como la comparación, la suma, la resta y la multiplicación por un entero...” (SEP; 1997, p. 31). Algo similar se dice de las fracciones en la recta numérica, que constituyen una representación útil para la comprensión de las fracciones, sobre todo del orden.

Por las razones anteriores una de las tareas que se propusieron a los profesores en formación tuvo que ver con la ubicación de fracciones en la recta numérica, específicamente se les pidió que ubicaran las fracciones $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{3}$ y $\frac{14}{3}$ en tres rectas numéricas idénticas presentadas de la siguiente forma:[216]



Como se puede observar, la técnica adecuada exigía la ubicación de los puntos 1 y 3 de la recta y posteriormente ubicar las tres fracciones; una menor que la unidad y dos mayores que ésta, pero equivalentes entre sí. Las características de las fracciones propuestas, pensamos, exigirían que se reflexionara sobre el

[215] Comprender a los números racionales como elementos de un campo cociente, implica el manejo de las propiedades de los racionales y de sus operaciones, mediante el establecimiento de teoremas algebraicos como: el teorema de la equivalencia, el de la suma de racionales, el de la multiplicación de racionales, el del inverso aditivo y el inverso multiplicativo.

[216] Cabe mencionarse que no se fijaron criterios rígidos para la precisión de las subdivisiones, es decir, para considerar adecuada la respuesta bastaba con que los segmentos de la subdivisión fueran en apariencia del mismo tamaño.

orden y la equivalencia de las fracciones. Las respuestas correctas que se obtuvieron en esta tarea se muestran en el siguiente cuadro[217]:

Cuadro 26. Respuestas correctas

	$\frac{3}{5}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{14}{6}$	**TOTAL Aciertos**
Grupo A 19 alumnos	57.8 %	68.4 %	52.6 %	**59.6%**
Grupo B 35 alumnos	60.0 %	57.1 %	54.2 %	**57.1 %**
Grupo C 21 alumnos	76.1 %	85.7 %	80.9 %	**80.9 %**
TOTAL	**64 %**	**68 %**	**61.3 %**	**64.4 %**

Como puede observarse, aunque con poca diferencia, el mayor número de respuestas correctas se presenta en la fracción mayor que la unidad ($\frac{7}{3}$) pero con el denominador más pequeño. Lo que este dato indica es que el tamaño de la fracción (mayor o menor que la unidad) no parece haber jugado un papel determinante en la solución de la tarea. La cantidad de partes en la que debía dividirse cada unidad, al parecer fue una dificultad importante, ya que la fracción con el denominador más pequeño tuvo el más alto porcentaje de respuestas acertadas y la fracción con el denominador mayor ($\frac{14}{6}$) presentó el más bajo porcentaje de respuestas correctas, aunque otro factor que puede explicar esta diferencia es el tipo de denominador, ya sea que fuese un denominador 2 a la “n” o diferente. No obstante, esta tendencia no es observable entre los estudiantes del grupo “C”, al parecer en este caso la comprensión de la equivalencia entre $\frac{7}{3}$ y $\frac{14}{6}$ elevó el porcentaje de respuestas correctas, tal vez por ello se presentan similitudes entre los porcentajes de respuestas correctas en la ubicación de estas fracciones.

[217] En todos los cuadros que se presentarán en este capítulo los porcentajes fueron redondeados, por esa razón, en algunos casos la suma no arroja un 100%. Por otra parte, el grupo “A” trabajo con F4, el “B” con F2 y el “C” con F1.

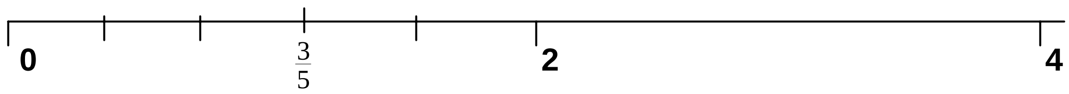
Por otra parte, si bien las diferencias entre los porcentajes de respuestas correctas entre el grupo “A” y “B” no son significativas -la diferencia es apenas de 2.5%-, la situación es diferente respecto del grupo “C”, la diferencia de éste respecto de los otros grupos es significativa. Entre el grupo “C” y el “B” existe una diferencia del 23.8% y respecto del grupo “A” del 21.3%. Posiblemente esta diferencia es producto de las estrategias que cada formador utilizó en el proceso de estudio, esto es, posiblemente sea una muestra de las bondades de la homología ampliada. Finalmente, es de destacar que de cada 10 profesores en formación, sólo 6 aproximadamente fueron capaces de resolver adecuadamente esta tarea, el porcentaje más bajo de respuestas correctas se ubica en el grupo “A”, específicamente en la ubicación de la fracción $\frac{14}{6}$. No obstante, resulta interesante analizar la frecuencia y el tipo de errores que se presentaron. El análisis de tales errores se presenta en los siguientes apartados.

6.1.1. La dificultad para situar la unidad de referencia

Como puede inferirse de los datos del cuadro 26, en 35.6% de los casos, los estudiantes no lograron llegar a un resultado adecuado, el porcentaje más alto de respuestas inadecuadas (15.1%) corresponde a los casos en los que no se emitió respuesta. Entre las respuestas erróneas, las dificultades más frecuentes estuvieron ligadas con la primera exigencia de la tarea, ubicar los puntos 1 y 3 en la recta numérica. La incomprensión de esta exigencia generó el porcentaje más alto de respuestas inadecuadas, al no fijar dichos puntos, los formados realizaron las particiones considerando diferentes segmentos de la recta como unidades, en casos como el que se ilustra enseguida, tomaron como unidad al segmento comprendido entre 0 y 2, en otros, la referencia para la partición fue el segmento comprendido entre 0 y 4.

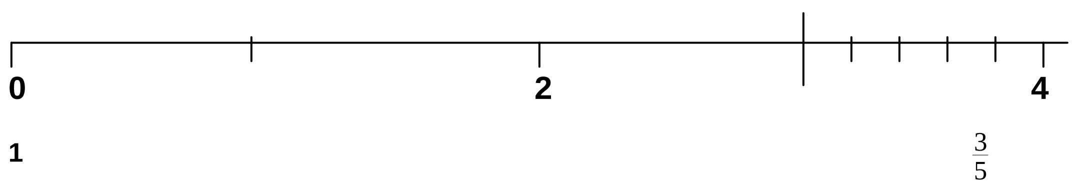
A2: $\frac{3}{5}$ [218]

[218] La primera letra corresponde al grupo al que pertenece el alumno, el número corresponde al número del alumno y la fracción indica la tarea que se intenta resolver.



Al parecer estas respuestas son producto de las prácticas escolares en las que, generalmente, se presenta sólo el segmento de la recta que ha de ser partido, sin esta referencia los profesores en formación que dan respuestas de este tipo no relacionan la unidad con las partes, esto es, no fijan adecuadamente el todo al que alude la tarea, al parecer esto es una muestra de una comprensión no cabal de la relación entre la parte y el todo. No obstante que en algunos casos ubicaron los puntos 1 y 3 en la recta, las dificultades para fijar la unidad de referencia persistieron, en la siguiente respuesta se puede observar que a pesar de haber ubicado los puntos 1 y 3, el estudiante toma como referencia el segmento comprendido entre 3 y 4.

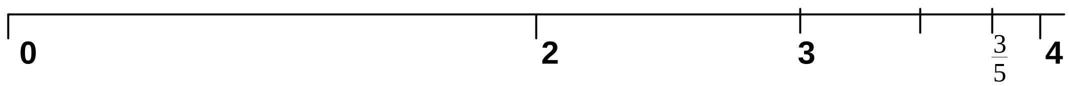
C17



Este tipo de errores se presentó con mayor frecuencia con la fracción $\frac{3}{5}$ y por lo general, los estudiantes tomaron como referencia los segmentos 2-3 y 3-4, lo que indica un predominio del numerador (3) sobre el denominador (5), posiblemente relacionan al numerador con los tres enteros de la recta, ya sea que tomen al 3 como inicio para el conteo de las partes o bien como la unidad –errónea- que debe partirse. Este tipo de error, como puede inferirse, también está ligado a la relación entre la parte y el todo.

Otra dificultad ligada a las anteriores tiene que ver con la equitatividad en la partición, en estos casos, como se puede ver en la siguiente técnica, sin importar la unidad de referencia, las partes en las que se dividió la unidad no fueron iguales. En opinión de Dávila (2002), estos errores surgen cuando los sujetos tienen que representar una fracción en situaciones en las que el diagrama que representa al todo no está dividido de antemano.

B9: $\frac{3}{5}$



En la técnica utilizada por B9, puede observarse que ubica el punto 3 de la recta pero éste funciona como uno de los quintos, es decir, para ubicar los $\frac{3}{5}$ posiblemente el estudiante inició el conteo tomando al 2 como cero, luego al 3 como el primer quinto, el punto medio entre 3 y 4 se toma como $\frac{2}{5}$ para, finalmente, concluir en el punto que marca como $\frac{3}{5}$. Lo significativo en este caso es que el estudiante tuvo claro que entre 2 y 4 debería ubicarse el 3, no obstante lo anterior, inicia la partición en la unidad 2, que no es la referencia correcta para marcar $\frac{3}{5}$, ya que la fracción dada es menor que 1. Otro rasgo significativo de esta técnica es la partición sin equitatividad, en esta tarea, B9 no considera la igualdad de las partes, únicamente la división de la unidad de referencia, sin considerar la exigencia de que dichas partes deben tener la misma longitud, aunque no se estipularon criterios de exactitud para la partición, en este caso es significativo que el alumno tome al segmento 2-3 como uno de los quintos.

6.1.2. Ubicación por medio de estimaciones

Otro tipo de errores está ligado al intento de evadir la partición, en estos casos ubican los puntos 1 y 3 en la recta y sin partición alguna, ubican las fracciones mediante la estimación, por lo general en los puntos correspondientes a los números enteros. Bajo la lógica de la estimación, $\frac{3}{5}$ fue ubicada en el punto que corresponde al 2 por B5, B25 y B27 y en el que corresponde al 3 por B10, B19 y B31. Por su parte, $\frac{7}{3}$ fue ubicada por B8 en el punto que corresponde a 3 y $\frac{14}{6}$

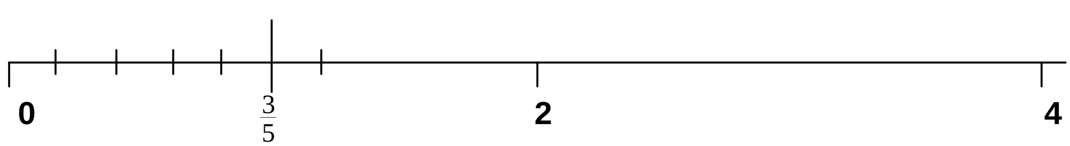
fue ubicada en el 1 y en el 3 por B5 y B8 respectivamente. Al parecer, sin recursos para realizar una partición, tomando como referencia una unidad determinada, estos estudiantes realizan su elección tomando como base el tamaño aproximado de la fracción, la falta de regularidades en este tipo de respuestas no permite inferir si los estudiantes intentaron utilizar criterios basados en la equivalencia, puesto que, en sus técnicas no hay vestigios de partición aunque sí de la ubicación de los puntos 1 y 3.

No obstante la ausencia de particiones, en algunos casos puede observarse una aproximación deficiente al orden y la equivalencia de las fracciones, ejemplos de esto son las técnicas que utilizan B5 y B8. El primero ubica $\frac{3}{5}$ en el 2 y $\frac{14}{6}$ en el 1, lo que es un indicio de que no reconoce la relación de orden entre las fracciones, esto es, aún utilizando la estimación no tiene claro que una de las fracciones es mayor que la unidad y la otra menor. El ejemplo contrario está representado por B8 quien ubica a $\frac{7}{3}$ y a $\frac{14}{6}$ en el punto 3, lo que nos indica que aún siendo erróneas las respuestas reconoce que las dos fracciones son equivalentes. Otro dato significativo es que esta técnica fue utilizada por 4% de los estudiantes y se presenta con mayor frecuencia en la fracción $\frac{3}{5}$, donde todas las respuestas erróneas corresponden a los alumnos del grupo B.

6.1.3. Errores de conteo

Considerados como errores que dicen poco acerca de la conceptualización de los formados, los errores de conteo aparecen frecuentemente por un descuido, como se puede ver en la siguiente técnica, se toma una unidad de referencia correcta, se hace una partición adecuada pero no se ubica correctamente la fracción.

A12: $\frac{3}{5}$



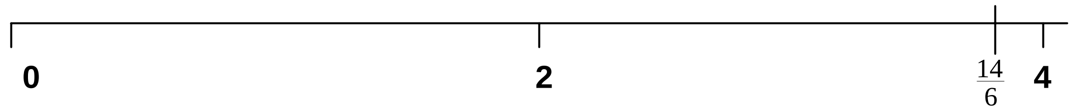
Como se puede observar, A12 ubica correctamente el punto 1 y realiza la partición adecuadamente pero posiblemente realiza un conteo inadecuado o por alguna razón decide ubicar a $\frac{3}{5}$ en el punto que corresponde a 1. Este tipo de errores se presentó por igual en estudiantes de los tres grupos y en las tres fracciones dadas, 4% de las respuestas no adecuadas en esta tarea se observa este tipo de error.

6.1.4. Errores ligados a la equivalencia

Al igual que los errores de estimación, en estos casos el estudiante intenta evadir la partición, sólo que en la estimación se pretende evadir por completo esta actividad y en las técnicas donde se presentan errores ligados a la equivalencia el objetivo es otro, se trata de hacer una "economía" con la partición, es decir, se intenta ahorrar la partición de las unidades enteras cuya cantidad de partes es conocida, para ubicar solamente las partes "sobrantes" de los enteros. Lo que de inicio no constituye un error.

Bajo esta lógica y para el caso de la fracción $\frac{7}{3}$, se consideraría que 2 enteros son igual a $\frac{6}{3}$ y bastaría ubicar la parte correspondiente al tercio faltante a partir del 2. En estos casos los profesores en formación pretenden utilizar un conocimiento sobre la equivalencia de fracciones, lo que les permitiría evitar la partición de los enteros incluidos en la fracción dada. No obstante lo adecuado de la estrategia, en ocasiones las equivalencias son establecidas de manera errónea, lo que genera la aparición del error. Un ejemplo de este tipo de respuestas puede verse a continuación.

A1: $\frac{14}{6}$

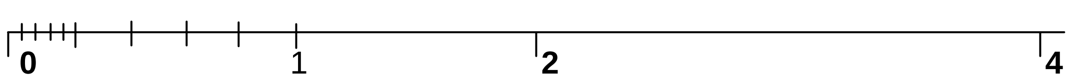


Al parecer, A1 establece la equivalencia 4 = $\frac{15}{6}$ y considera que $\frac{14}{6}$ debe ubicarse un sexto antes de 4. Lo que llama la atención en estos casos es que si bien la noción de equivalencia es la herramienta fundamental para cumplir con la tarea, no es utilizada para analizar la relación entre $\frac{7}{3}$ y $\frac{14}{6}$, esto es, en éste como en la mayoría de los casos, los estudiantes no se percatan de que estas dos fracciones deberían ubicarse en el mismo punto. Por otra parte, debe reconocerse que este tipo de errores se genera al intentar utilizar una herramienta más compleja que la partición, puesto que lo que aquí se juega es el reconocimiento de la equivalencia entre números enteros y fracciones. Como es de inferirse, este tipo de errores se presenta sólo en la ubicación de $\frac{7}{3}$ y $\frac{14}{6}$ y en total suman 4% del total de respuestas, también en este caso los errores se distribuyen por igual entre los estudiantes de los distintos grupos.

6.1.5. La disociación de los elementos de la fracción. Cuando la fracción es más que un número

La representación convencional de una fracción indica que el denominador es el número de partes en que se dividió el todo y el numerador sugiere las partes que se toman del todo, a pesar de construirse mediante dos números naturales enteros, su significado remite a la fracción como un sólo número en el que la relación entre la parte y el todo es esencial. Sin embargo, algunos estudiantes asignan un sentido diferente a dicha representación, hacen una "...disociación de los elementos constitutivos del numeral o de la relación parte-todo y una tendencia a asignarle al numerador o a la parte una posición de privilegio..." (Figueras, 1988, en: Dávila; 2002, p. 22). Desde esta idea, como puede observarse en la siguiente técnica, la fracción no es vista como un solo número.

C7: $\frac{3}{5}$

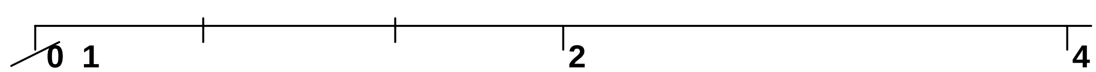


Como se puede observar, en congruencia con el significado atribuido al denominador, C7 realiza la partición en quintos, pero una vez realizada no recupera el significado convencional del numerador, lo que lo llevaría a contar tres partes y ubicar el punto que corresponde a $\frac{3}{5}$. Al contrario de esto, toma al primer quinto como nueva unidad de referencia y vuelve a realizar la partición basándose en el significado del denominador, una vez dividido cada quinto en cinco partes iguales, cuenta tres de las partes pequeñas (25 avos) y ubica el punto, que en este caso corresponde a $\frac{3}{5}$ de $\frac{1}{5}$.

Sus acciones nos indican que posiblemente el lugar privilegiado que ha dado al denominador le sugiere una doble acción de partición, luego de la cual asigna el sentido adecuado al numerador. Podríamos suponer que esta dificultad está ligada a la incomprensión de la relación entre la parte y el todo, específicamente a la relación entre numerador y denominador. Lo significativo en este caso es que C7 no tiene dificultades para ubicar al 1, tampoco para realizar la partición, el error surge de significar al denominador como una doble partición. Otro dato relevante es que asigna adecuadamente el significado al numerador, ubica las tres partes de la partición aunque, como se mencionó, ésta se haya realizado en una nueva unidad de referencia.

Un error diferente, también relacionado con la representación convencional de las fracciones, consiste en atribuir al numerador y al denominador un significado relacionado con la partición, en este caso no es el denominador quien ocupa el lugar de privilegio, sino la significación de la partición por encima del número de partes. En la siguiente técnica se ilustra esta variante.

B34: $\frac{7}{3}$



Una diferencia respecto del caso anterior es que B34 modifica la notación de la recta para que el diagrama sea más familiar, sustituye al cero por el 1 en la recta, lo que modifica el sentido de la parte y el todo. No obstante, lo que aquí se analiza es el significado que da a la representación convencional de las fracciones, sobre ese respecto y en congruencia con el significado del denominador, su primera acción es la partición de su unidad de referencia (en tercios), sin embargo, el mismo sentido de partición se asigna al numerador, es por ello que cada tercio es dividido en 7 partes iguales. En su perspectiva, esta segunda partición es sugerida por el numerador, una vez que la realiza, cuenta cada séptimo de un tercio (cada 21 avo) como si fueran tercios de la unidad, por esta razón, $\frac{7}{3}$ queda ubicado en el punto correspondiente a $\frac{1}{3}$. En otros términos, ha ubicado a $\frac{7}{7}$ de un tercio, lo que indica la incomprensión de la relación entre la parte y el todo, este tipo de errores es el menos frecuente, apenas un 1.3% de los estudiantes cuestionados lo cometió, sin embargo, resulta significativa su presencia si se considera que el significado de la representación convencional y la relación parte-todo deberían ser nociones elementales si de profesores en formación se trata.

6.1.6. Sobre la naturaleza de los errores

En síntesis, las principales dificultades de los formados en las tareas relativas al significado medida están relacionadas con las nociones parte-todo y partición, como puede observarse en el cuadro 27, la mayoría de los formados que dieron respuestas erróneas tuvieron dificultades para fijar la unidad de referencia (el todo) y para realizar una partición adecuada.

Cuadro 27. Respuestas correctas

	$\frac{3}{5}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{14}{6}$	**Total**
Unidad de referencia	11	3	2	**7.1%**
Estimaciones	6	1	2	**4%**
Error de conteo	2	2	5	**4%**
Errores ligados a la equivalencia	1	5	3	**4%**
Dificultades con la notación	0	2	1	**1.3%**
No contestó	6	12	16	**15.1%**
Total	**11.5%**	**11.1%**	**12.8%**	**35.5%**

Si sumamos los porcentajes que corresponden a los estudiantes que no realizaron la tarea o partición alguna (que ubicaron los puntos basándose en la estimación), se tiene 26.2% de tareas en las que no se realizaron particiones, en estos casos, al igual que en los que se presentaron dificultades para significar la representación convencional, el problema fundamental tiene que ver con las nociones de partición y relación parte-todo. El dato es relevante si se enfatizan dos hechos; si se suman las respuestas erróneas y las tareas sin respuesta se observa que un poco más de la cuarta parte de las tareas no fueron resueltas; el segundo tiene que ver con la complejidad de las nociones puestas en juego, si se piensa que las nociones de partición y relación parte-todo son los mecanismos que permiten construir los demás significados de las fracciones, se tiene a una cuarta parte de estudiantes con dificultades relativas a estas nociones elementales. No obstante, estas afirmaciones no deben tomarse como concluyentes, el análisis de las otras tareas propuestas tal vez permita matizarlas.

6.2. LAS FRACCIONES Y LA NOTACIÓN DECIMAL

La tarea que se analiza en este apartado tuvo como objetivo representar fracciones en notación decimal, en ella se enunciaba: *Escribe en notación decimal las siguientes fracciones,* $\frac{2}{5}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{24}{10}$, *"doce décimos",* $\frac{4}{1000}$ *y* $\frac{5}{10000}$.

Como puede observarse, una técnica para transformar las dos primeras fracciones consiste en utilizar la división, aunque no es indispensable porque ambas son fracciones decimales. La tercera y cuarta fracción son mayores que 1 y están expresadas mediante denominador igual a 10, aunque una en lenguaje común, por esta razón pueden transformarse sin utilizar la división. Las dos últimas son expresadas mediante denominadores potencia de 10 y son menores que la unidad. En el siguiente cuadro se pueden observar los resultados globales.

Cuadro 28. Respuestas correctas

	$\frac{2}{5}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{24}{10}$	**Doce Dec.**	$\frac{4}{1000}$	$\frac{5}{10000}$	**Total aciertos**
Grupo A (19 alumnos)	79%	79%	42%	21%	74%	79%	**62%**
Grupo B (35 alumnos)	60%	54%	51%	40%	43%	48%	**49%**
Grupo C (21 alumnos)	86%	71%	86%	86%	86%	81%	**82%**
TOTAL	**72%**	**65%**	**59%**	**48%**	**63%**	**65%**	**62%**

Si analizamos los resultados por parejas, podremos observar que las fracciones con mayores porcentajes de respuestas correctas son aquellas en las que -se puede deducir- se utilizó el algoritmo de la división, esto es, se ubican en las fracciones ($\frac{2}{5}$ y $\frac{7}{4}$) donde se dividió el numerador entre el denominador. Por su parte, los porcentajes más bajos corresponden a las fracciones mayores que uno ($\frac{24}{10}$ y "doce décimos"), en éstas, era de esperarse que no se utilizaría dicho algoritmo. Estos datos nos indican que, encontrar la posición adecuada para las cifras en una notación decimal fue una dificultad mayor cuando la fracción era mayor que uno, esta afirmación se consolida si se observa que entre las respuestas a $\frac{2}{5}$ y $\frac{7}{4}$ el porcentaje menor corresponde a la fracción en la que se involucran enteros, al parecer el lenguaje común de la fracción $\frac{12}{10}$ se constituyó como una dificultad extra, la diferencia entre los porcentajes de $\frac{24}{10}$ y $\frac{12}{10}$ así parecen indicarlo.

Respecto de los resultados globales puede apreciarse que son similares a los que se presentaron en la tarea anterior, sólo que el segundo mejor porcentaje corresponde a los estudiantes del grupo "A", aunque los del grupo "C" obtienen nuevamente el porcentaje más alto de respuestas correctas. No obstante, resulta significativo que en promedio 4 de cada 10 estudiantes no fueron capaces de cumplir adecuadamente con la tarea, por esta razón en lo que sigue analizaremos las respuestas erróneas que se presentaron con mayor frecuencia. Para tal análisis seguiremos considerando las respuestas dadas para cada pareja de fracciones, ya que en cada caso se presentan errores de distinta naturaleza.

6.2.1. Dificultades en la utilización de la división

Como hemos mencionado, en los casos de $\frac{2}{5}$ y $\frac{7}{4}$ la técnica más viable consistía en utilizar el algoritmo de la división, por esta razón, la mayoría de los errores corresponden a esta técnica. Enseguida se describe los errores que se presentaron en estos casos.

- Errores por confusión en la notación. Se generan cuando no se comprende la notación (decimal) a la que hace referencia la consigna, como se puede ver en las respuestas siguientes, bajo esta confusión los estudiantes resuelven la tarea utilizando la notación de las fracciones decimales o el lenguaje común. [219]

$$\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$$

$$\frac{2}{5} = \text{dos quintos}$$

$$\frac{7}{4} = \frac{11}{10}$$

$$\frac{7}{4} = \text{siete cuartos}$$

- Errores por la inversión del cociente. Este error fue el más frecuente (ver cuadro 29), se presenta cuando los estudiantes invierten la división, esto es, ubican el denominador como dividendo y el numerador como divisor, este tipo de error se manifiesta de la siguiente forma:

$$\frac{2}{5} = 5{:}2 = 2.5$$ [220]

---

[219] Aunque en la tercera equivalencia la fracción decimal no corresponde a $\frac{7}{4}$ puede verse que la idea del estudiante era señalar una fracción decimal.

[220] Esta respuesta también se presenta por un error de naturaleza diferente (tomar la línea de la fracción como equivalente al punto que separa tanto a numerador como denominador), sin

$$\frac{7}{4} = 4{:}7 = 0.57$$

- Errores generados la línea de la notación fraccionaria. En este tipo de errores, los estudiantes toman la línea de la fracción como fuese un punto decimal que separa la parte entera de la no entera del número decimal, estos errores se manifiestan de la siguiente forma:

$$\frac{2}{5} = 2.5$$

$$\frac{7}{4} = 7.4$$

En una variante de este error, los estudiantes invierten los números de la fracción, esto es, $\frac{7}{4} = 4.7$

- En otro tipo de error, relacionado con la línea de la fracción, se piensa que ésta representa al punto decimal, pero también suponen que la notación decimal siempre deberá ser un número no entero, bajo este supuesto se establecen las igualdades siguientes:

$$\frac{2}{5} = 0.25$$

$$\frac{7}{4} = 0.74$$

- Cociente no exhaustivo. Este error se presenta cuando realizan la división (7÷4) sin encontrar la parte no entera del resultado, en su lugar se ubica al cociente entero como la parte entera del número decimal y al residuo como la parte no entera.

$$\frac{7}{4} = \quad \begin{array}{r|l} & 1 \\ \cline{2-2} 4 & 7 \\ & 3 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \frac{7}{4} = 1.3$$

- Los errores menos frecuentes tienen que ver con la estimación (1 estudiante) o con la búsqueda de una fracción equivalente con

embargo la ubicación de unas y otras respuestas en los diferentes tipos de error se dio tomando en consideración la presencia o no de la división efectuada.

denominador múltiplo de 10 (1 estudiante), como se puede ver en este caso, el error deriva de un procedimiento erróneo para tal búsqueda.

$$\frac{7}{5} \text{ x } 5 = \frac{40}{20} = \frac{20}{10} = 2.0$$

Este tipo de error deriva de la incomprensión del teorema de la equivalencia, es decir, tanto el numerador como el denominador resultantes (40 y 20) no son resultados adecuados de la multiplicación planteada. Los errores ligados a este teorema se analizarán más exhaustivamente en la tarea referida a la equivalencia de fracciones. En el cuadro siguiente se presenta tanto el tipo de errores como la frecuencia con la que aparecieron.

Cuadro 29. Tipos de errores

	$\frac{2}{5}$	$\frac{7}{4}$	**Total**
Cociente invertido	4	7	**7%**
Línea para la determinación de la "fracción"	5	5	**7%**
Notación errónea	5	4	**6%**
Línea como división entre enteros y no enteros	6	3	**6%**
Cociente no exhaustivo	-	2	**1%**
Transformación a notación decimal	-	1	**0.6%**
Aproximación	-	1	**0.6%**
No contestó	1	3	**6%**
Total	**21**	**26**	**31%**

Como se puede observar, 3 de cada 10 tareas resultaron erróneas y por su frecuencia, destacan los errores relacionados con el cociente invertido, en éstos se hace evidente una comprensión defectuosa del significado "parte" del denominador, de la "cantidad de partes" del numerador y de aquellos que toman la línea de la fracción como signo equivalente al punto decimal. En términos agregados estos tipos de errores suman un 20% de las respuestas erróneas.

6.2.2. Las dificultades para ubicar la parte entera de un número decimal

En las fracciones $\frac{24}{10}$ y "doce décimos", la dificultad mayor tuvo que ver con la ubicación adecuada de las partes entera y no entera de cada fracción. Los errores que se presentaron en este caso son los siguientes:

- Al igual que en la tarea con las fracciones anteriores, en ésta aparecen errores ligados a la notación, incluso este error es más frecuente, lo que puede explicarse porque la fracción está expresada en lengua materna (doce décimos) y algunos estudiantes simplemente la transformaron a fracciones decimales, esto es, “doce décimos” = $\frac{12}{10}$
- Un error ligado a la posición de las cifras decimales se relaciona también con la comprensión deficiente de la relación entre la parte y el todo, en este caso no advierten que las fracciones son mayores que la unidad y establecen las siguientes equivalencias:

$$\frac{12}{10} = 0.24$$

“doce décimos” = 0.12

- Una variante del error anterior tiene que ver con la ubicación de los décimos en el lugar de los milésimos, es decir, se establecen igualdades como $\frac{12}{10}$ = 0.024 y “doce décimos = 0.012, en estos casos el error se genera porque los estudiantes consideran insuficiente la presencia de un cero en la notación decimal, por esta razón, añaden otro después del punto decimal, otra explicación menos probable tiene que ver con la confusión del lugar que corresponde a los décimos.
- Otro error que aparece en estas fracciones se genera por la inversión del cociente, en este caso la equivalencia se establece mediante el siguiente procedimiento:

$$\frac{24}{10} = \quad 10\overline{\left)24\right.} \quad = 0.416$$

- Finalmente, un error que sólo se presenta en un estudiante aparece en el siguiente ejemplo:

$$\frac{24}{10} = 0.214$$

En este caso, la fracción es tratada como un conjunto de números naturales enteros que requieren ser ordenados en torno del punto decimal, el cero ocupa el primer lugar, luego el uno y el dos. Este error es relevante porque es el único donde se manifiesta la idea de tomar a los números de la fracción como números naturales enteros. A continuación se presenta un cuadro en el que se incluyen los tipos de errores y su frecuencia.

Cuadro 30. Tipos de errores

	$\frac{24}{10}$	**"doce décimos"**	**Total**
Notación errónea	5	17	**15%**
Dificultades en la relación parte-todo	16	15	**21%**
Ubicación como milésimos	3	3	**4%**
Cociente invertido	3	0	**2%**
La fracción como conjunto de números enteros	1	0	**0.6%**
No contestó	3	2	**3%**
Total	**31**	**37**	**45%**

Dos aspectos pueden destacarse del cuadro, al igual que en las fracciones anteriores, es significativo el número de estudiantes que no tienen claras las diferencias entre una fracción decimal y un número decimal. Por otro lado es relevante también el porcentaje de estudiantes que tienen dificultades para ubicar correctamente la posición de los décimos, al parecer esta confusión está ligada a la comprensión de la relación entre la parte y el todo.

6.2.3. Dificultades en la ubicación de las cifras decimales

Cuando se trata de cambiar las fracciones $\frac{4}{1000}$ y $\frac{5}{10000}$ a notación decimal puede prescindirse del algoritmo de la división, tampoco se requiere de reflexionar sobre la relación entre las partes y la unidad. La dificultad principal estriba en ubicar correctamente la posición del 4 y el 5 en la notación decimal. Los errores que se presentaron en esta parte de la tarea se describen a continuación.

- Notación errónea. En 5 casos la transformación se hizo a lengua materna, en uno fue inadecuada se estableció la igualdad $\frac{5}{10000}$ y "cinco milésimos"

- Cociente invertido. Aunque la tarea podía resolverse sin utilizar el significado cociente, en 6 casos se utilizó de manera invertida y aparecieron las siguientes respuestas:

$$\frac{4}{1000} = 250$$

$$\frac{5}{10000} = 2000$$

- Ubicación usando el criterio de los ceros. En estos casos el número de ceros que tenía la fracción decimal fue el mismo que se utilizó para registrar la parte no entera del número decimal, se dieron las siguientes respuestas:

$$\frac{4}{1000} = 0.0004$$

$$\frac{5}{10000} = 0.00005$$

- Tratamiento basado en los números naturales. En estas respuestas las cifras incluidas en la fracción decimal se utilizan para escribir el número decimal. En los dos casos que se ilustran se establece un cero en la parte entera y el mismo orden para las cifras de la fracción:

$$\frac{4}{1000} = 0.00041$$

$$\frac{5}{10000} = 0.000051$$

Una variante de este tipo de error consiste en utilizar un cero de las cifras incluidas en la fracción para señalar la parte entera, el resto de las cifras se ordena en la parte no entera, por ejemplo:

$$\frac{4}{1000} = 0.0041$$

Como se puede ver en el cuadro siguiente, al margen de las confusiones en la notación o de los errores de inversión del cociente, existe un número importante de estudiantes que tiene dificultades para comprender las reglas de la escritura decimal, colocar el mismo número de ceros que tiene la fracción decimal es la regla que frecuentemente siguen estos estudiantes.

Cuadro 31. Tipos de error

	$\frac{4}{1000}$	$\frac{5}{10000}$	**Total**
Igualar número de ceros	14	12	**17%**
Cociente invertido	3	3	**4%**
Notación errónea	2	3	**3%**
Respuesta basada en números naturales enteros	2	1	**2%**
No contestó	5	5	**7%**
Total	**26**	**24**	**33%**

Como puede observar también, dos de cada cinco estudiantes tuvieron dificultades para resolver esta tarea, sus errores están ligados principalmente al tamaño de la fracción dada y a la forma en que ésta se expresa.

Un ejemplo de la relación entre la naturaleza de los errores y la forma en que están expresadas las fracciones es que cuando son fracciones decimales sin denominador potencia de 10, los errores más frecuentes tienen que ver con el cociente invertido (que al parecer tienen su origen en búsqueda de un cociente mayor que la unidad) y con la línea de la fracción que se toma como punto decimal. Sin embargo la naturaleza de los errores se modifica cuando la fracción se da en lengua materna, en este caso los errores más frecuentes tienen que ver con la distinción entre la fracción y la notación decimal. Por último los errores más frecuentes en el caso de las fracciones decimales están ligados al papel de los ceros, es decir, es común que intenten trasladar el número de ceros a la notación decimal sin reflexionar sobre la relación entre la parte y la unidad o sobre el papel del valor posicional.

6.3. LA EQUIVALENCIA DE FRACCIONES

Como hemos mencionado, la equivalencia es uno de los mecanismos constructivos que en opinión de Kieren permiten la construcción de la noción de número racional, sin embargo, en el modelo teórico ideal de este autor la equivalencia está relacionada con dos constructos. En un primer momento, en tanto mecanismo constructivo, la equivalencia tiene que ver con los conocimientos etnomatemáticos del sujeto, esto es, con aquellos que derivan de las experiencias concretas que posibilitan el paso a conocimientos más ligados con lo formal, es precisamente en lo formal que Kieren ubica el segundo constructo para la equivalencia, en este plano la equivalencia se relaciona directamente con los campos formales multiplicativos.

La tarea sobre fracciones equivalentes que se planteó, se relaciona con la equivalencia, para esta elección se consideró que al terminar el curso sobre los racionales los estudiantes habrían construido los diferentes constructos de la fracción, incluyendo los campos formales aditivos y multiplicativos. La tarea consistió en lo siguiente: dadas las fracciones $\frac{2}{3}$, 0.50, $\frac{4}{9}$, $\frac{10}{30}$, $\frac{3}{6}$, 0.25, $\frac{7}{5}$, $\frac{12}{27}$ y $\frac{2}{8}$, se les pidió que identificaran pares de fracciones que fuesen equivalentes. Como se puede observar, en la tarea se incluyen fracciones comunes y otras expresadas en notación decimal, una técnica que permite resolver esta tarea consiste en transformar las fracciones a una misma notación e identificar la equivalencia entre $\frac{2}{8}$ y 0.25; $\frac{4}{9}$ y $\frac{12}{27}$ y $\frac{3}{6}$ y 0.50. A continuación se verán los resultados en esta tarea.

Cuadro 32. Respuestas correctas

	$\frac{3}{6} = 0.50$	$\frac{4}{9} = \frac{12}{27}$	$\frac{2}{8} = 0.25$	**Total Aciertos**
Grupo A 19 alumnos	26%	37%	31%	**31%**
Grupo B 35 alumnos	37%	43%	40%	**40%**
Grupo C 21 alumnos	81%	81%	71%	**78%**
TOTAL 75 alumnos	**47%**	**52%**	**47%**	**49%**

En la mitad de los casos (49%) se identificaron los pares equivalentes, los porcentajes de respuestas adecuadas son similares en las tres parejas de fracciones. Sin embargo, existe una pequeña diferencia entre las parejas compuestas por fracciones comunes y aquellas en las que se incluyen fracciones en notación decimal, en estas últimas se presentaron porcentajes menores de respuestas correctas, al parecer esto es un indicador de que los estudiantes tuvieron dificultades para transformar la notación de las fracciones.

Por otra parte, una diferencia significativa está representada por los porcentajes de respuestas adecuadas por grupo, es decir, entre el grupo "A" y "B" la diferencia es 19%; entre el "A" y el "C" es 47%; también entre el grupo "B" y "C" la diferencia es relevante (38%). Posiblemente las tareas sobre la equivalencia que se plantearon en cada proceso de estudio tuvieron un impacto importante, basta decir que, en promedio, sólo 3 de cada 10 estudiantes del grupo "A" pudieron resolver satisfactoriamente la tarea, en este mismo rubro, 8 de cada 10 alumnos del grupo "C" pudieron resolverla. Por otra parte, de las 116 respuestas insuficientes, en 32 se señalaron parejas no equivalentes, en el resto los estudiantes identificaron una, dos, o ninguna pareja equivalente.

Entre las respuestas erróneas más frecuentes (6 estudiantes) se enunció la igualdad $\frac{3}{6} = \frac{10}{30}$, al parecer, en estos casos se establece la equivalencia considerando sólo la relación entre denominadores, posiblemente esto tiene que ver con pensar a las fracciones como conjunto de números separados, por esta razón no consideran la relación entre numeradores y denominadores. Algo similar puede verse en las respuestas donde enuncian las equivalencias $\frac{2}{3} = \frac{3}{6}$ y $\frac{2}{3} = \frac{10}{30}$, como se puede ver, también se utiliza un criterio basado en el denominador. Estas respuestas fueron emitidas por 5 y 4 estudiantes respectivamente.

Un caso distinto aunque menos frecuente (3 estudiantes), se presenta cuando se establece la equivalencia considerando sólo la relación entre numeradores, en estos casos señalan la equivalencia $\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$, no obstante que el criterio utilizado se relaciona con los numeradores, se parte de un mismo supuesto: establecer la equivalencia sin tomar en cuenta el significado global de ambas fracciones.

Finalmente, 5 estudiantes establecen la equivalencia 0.25 = 0.50 lo que permite inferir que el criterio que guió su elección tiene que ver con la notación en la que se expresan estas fracciones, es decir, al parecer, el tipo de representación determina la equivalencia de las fracciones, tal vez porque el significado atribuido a la representación de la fracción es lo que genera el error.

En términos globales, aproximadamente la mitad de los estudiantes no lograron utilizar una técnica adecuada que les permitiera verificar la equivalencia. Esta insuficiente comprensión no parece estar ligada al cambio de notación, ya que la identificación de la equivalencia entre $\frac{4}{9}$ y $\frac{12}{27}$ (donde no se requería transformación) se realizó adecuadamente en un 52% de los casos. Este porcentaje es similar al de la identificación de fracciones con diferente representación, hecho que es significativo puesto que desde la perspectiva asumida, la comprensión insuficiente de este teorema no posibilita la comprensión de las estructuras multiplicativas y aditivas en el plano formal.

6.4. LA "DENSIDAD" DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Para todo número racional será posible encontrar un punto sobre la recta y el orden de los puntos en la recta vendrá dado por la relación "a" precede a "b" (a>b), si y solamente si existe un elemento "c" que verifica la igualdad (a= b + c), siendo a, b y c números racionales, y "a", "b" y "c" los puntos correspondientes en la recta. Y se constata además, que los números racionales se distribuyen de manera "densa" sobre toda la recta. Entre cada dos racionales a y b es siempre posible colocar otro, basta con hacer (a + b)/2. Pero aunque los números racionales se distribuyan de forma densa sobre la recta, ello no significa que tengamos ya un número para cada punto de la recta. La realidad es que el conjunto de los números racionales tiene todavía lagunas que sólo se eliminan cuando se extiende el conjunto de los racionales, con la construcción de los números reales (**R**). (Centeno; 1997, pp. 62-63)

En el contexto de los números decimales los materiales de los formadores señalan que "... en el conjunto de los números naturales, todo número tiene un sucesor. Así, después del uno está el dos, después del dos está el tres, etc. Entre dos y tres no hay ningún número. En cambio, en el conjunto de las fracciones, entre dos números, siempre hay otro: entre $\frac{1}{10}$ y $\frac{2}{10}$ está , entre otros, $\frac{11}{100}$ entre $\frac{1}{10}$ y $\frac{11}{100}$ está $\frac{101}{1000}$ ...” (SEP, 1997, p. 67)

Para explorar esta cuestión, se planteó a los estudiantes una tarea relacionada con la propiedad de densidad, dicha tarea es similar a la sugerida como parte de la evaluación en el bloque dedicado a los racionales. En la tarea planteada se pidió lo siguiente: *Escribe un número que se encuentre entre las siguientes fracciones:* $\frac{2}{10}$ *y* $\frac{3}{10}$*;* $\frac{15}{100}$ *y* $\frac{16}{100}$*;* $\frac{25}{1000}$ *y* $\frac{26}{1000}$*; 0.53 y 0.54; 1.8 y 1.9.* En el caso de las fracciones decimales la técnica más económica consiste en agregar una cifra (entre 0 y 9) al numerador y un cero al denominador de la fracción menor, en el caso de las fracciones expresadas en notación decimal basta con agregar cualquier número a la parte no entera de la expresión menor. A continuación se presentan un cuadro en el que se muestran los resultados globales en esta tarea.

Cuadro 33. Porcentaje de respuestas correctas

	$\frac{2}{10} - \frac{3}{10}$	$\frac{15}{100} - \frac{16}{100}$	$\frac{25}{1000} - \frac{26}{1000}$	**0.53 – 0.54**	**1.8 – 1.9**	**Total**
Grupo A 19 als.	26	31	26	37	37	**31%**
Grupo B 35 als.	40	28	23	60	68	**44%**
Grupo C 21 als.	62	62	43	90	90	**69%**
Total	**43%**	**39%**	**29%**	**63%**	**67%**	**48%**

Con base en los resultados del cuadro, puede decirse que el tamaño de las fracciones fue un elemento determinante en la resolución de la tarea, esto puede advertirse si se observa que, en la medida que el tamaño de las fracciones disminuye, lo hace también el porcentaje de respuestas correctas, salvo en el grupo “A”, esto sucede en las fracciones decimales y en las expresiones en notación decimal.

Al igual que en las tareas anteriores, sólo aproximadamente la mitad de los estudiantes dan una respuesta adecuada, un dato que también se ha presentado en otras tareas es la diferencia entre los alumnos de los diferentes grupos, una tendencia que va consolidándose tiene que ver con la preeminencia del grupo "C" y la posición del grupo "A". Al parecer, el lugar que ocupa cada uno de estos grupos no es casual, tiene que ver con la manera en la que se desarrolló el proceso de estudio. En lo que sigue se analizarán los errores que con mayor recurrencia se presentaron en las dos partes de la tarea, es decir, las fracciones decimales y a las expresadas en notación decimal.

6.4.1. Dificultades con la "densidad" de las fracciones decimales

Una dificultad en la tarea con fracciones decimales es el intento de combinarlas con la notación decimal, en estos casos es frecuente que los estudiantes ubiquen $\frac{2.5}{10}$ entre $\frac{2}{10}$ y $\frac{3}{10}$ ó $\frac{15.5}{100}$ entre $\frac{15}{100}$ y $\frac{16}{100}$, algo similar ocurre con el tercer par de fracciones decimales, ubican $\frac{25.5}{1000}$ entre $\frac{25}{1000}$ y $\frac{26}{1000}$, no obstante, en este caso también ubican $\frac{0.256}{1000}$ entre las dos fracciones. Como se puede observar, para obtener estas respuestas los estudiantes calculan el punto medio entre los numeradores y con el resultado obtenido construyen una nueva fracción, si bien es cierto que en esencia esta acción no es incorrecta, al emitir este tipo de respuestas no toman en cuenta que la notación en la que se expresan no es decimal.

Un error diferente lo constituye la respuesta $\frac{0.256}{1000}$, en este caso toman el numerador de la primera fracción y agregan una de las cifras del numerador de la segunda para construir una fracción decimal (0.256) que funciona como numerador. La diferencia respecto de las otras respuestas es que en ésta no toman en cuenta el tamaño de la fracción respuesta, es decir, no pueden discernir que, al colocarla como numerador de una fracción con denominador 1000, es menor que las fracciones dadas.

La intención de utilizar la notación decimal parece ser también la causa de otro tipo de errores, en éstos los estudiantes buscan una expresión decimal que se ubique entre ambos numeradores pero no representan el denominador sino que emiten soluciones como 2.6 entre $\frac{2}{10}$ y $\frac{3}{10}$, 15.5 entre $\frac{15}{100}$ y $\frac{16}{100}$ ó 25.5 entre $\frac{15}{1000}$ y $\frac{16}{1000}$. Al parecer los estudiantes disocian la relación entre los elementos (numerador y denominador) de la fracción y ubican la tarea en el contexto de los números naturales enteros, esto es, toman en cuenta a los numeradores como números enteros.

Otro tipo de errores se manifiesta en las respuestas donde sí se toma en cuenta la relación entre los elementos de la fracción, este error pueden verse cuando se ubica 0.162 entre $\frac{15}{10}$ y $\frac{16}{10}$, a 0.255 entre 0.259 y 0.251 ó $\frac{2591}{1000}$ entre $\frac{25}{1000}$ y $\frac{26}{1000}$. En el primer caso se considera adecuadamente que la respuesta debe ser una fracción con denominador más grande (1000 en este caso) y que en correspondencia con la modificación del denominador, el numerador debe aumentar en cifras, pero no considera que el denominador más pequeño es el que debe aumentar sus cifras, tampoco considera el tamaño de las fracciones (mayores que uno), por esta razón no representa el 1 incluido en el 16 como entero (aunque la respuesta correcta debería construirse sobre la base del 15). Algo similar ocurre en las respuestas para las fracciones $\frac{25}{1000}$ y $\frac{26}{1000}$, en éstas puede advertirse que los estudiantes comprenden que es necesario que el numerador aumente sus cifras, por esta razón añaden 5, 9 y 1 al numerador más pequeño, sin embargo, no aumentan las cifras del denominador.

La comprensión insuficiente de la relación entre numerador y denominador puede verse con mayor claridad en las siguientes respuestas: $\frac{21}{10}$ entre $\frac{2}{10}$ y $\frac{3}{10}$, $\frac{154}{100}$ entre $\frac{15}{100}$ y $\frac{16}{100}$, y, $\frac{254}{1000}$ entre $\frac{25}{1000}$ y $\frac{26}{1000}$. A diferencia de los casos anteriores, los estudiantes presentan sus respuestas mediante fracciones decimales, sin embargo son construidas bajo el predominio del numerador, es decir, sin tomar en cuenta la relación entre numerador y denominador sólo modifican al primero pero no el segundo. Un error similar se relaciona con el predominio del denominador y se observa en las respuestas que ubican a $\frac{2}{100}$ (o $\frac{2}{11}$) entre $\frac{2}{10}$ y $\frac{3}{10}$, a $\frac{15}{1000}$ entre $\frac{15}{100}$ y $\frac{16}{1000}$ (o $\frac{25}{10000}$) entre $\frac{25}{1000}$ y $\frac{26}{1000}$, en todos estos casos los denominadores podrían ser parte de una solución adecuada, no lo son porque los numeradores no se modificaron sino que es el denominador más pequeño el que aparece en la respuesta.

Lo que hemos observado hasta aquí es que, en su mayoría, los errores son causados por una deficiente comprensión de la relación entre los elementos de la representación de la fracción, no obstante, aún cuando se considera esta relación aparecen otros errores. Cuando la relación entre numerador y denominador es considerada, fundamentalmente los errores tienen que ver con las modificaciones que se requieren hacérseles. Por ejemplo, algunos ubican $\frac{1}{6}$ entre $\frac{2}{10}$ y $\frac{3}{10}$ y al parecer el denominador de la respuesta es el producto de los numeradores de las fracciones dadas. Otros modifican adecuadamente el denominador pero consideran que cualquier modificación del numerador produce una respuesta adecuada, en estos casos, ubican $\frac{11}{100}$ entre $\frac{2}{10}$ y $\frac{3}{10}$, a $\frac{3}{1000}$ (o $\frac{2}{1000}$) entre $\frac{15}{100}$ y $\frac{16}{100}$ y $\frac{53}{10000}$ entre $\frac{25}{1000}$ y $\frac{26}{1000}$. Otra modificación errónea consiste en eliminar un cero del denominador y disminuir en uno al numerador, es decir, ubican $\frac{24}{100}$ entre $\frac{25}{1000}$ y $\frac{26}{1000}$.

6.4.2. Dificultades con la "densidad" de los números decimales

Como hemos mencionado la técnica más económica para encontrar un número intermedio a dos números decimales consiste en aumentar una cifra a la parte no entera del número más pequeño, por ejemplo para encontrar un número intermedio a 0.53 y 0.54, basta con añadir una cifra en el número menor (0.53**5**).

Ahora bien, cuando los estudiantes utilizan esta técnica, aparece cierto tipo de dificultades, algunos ubican 0.053 entre 0.52 y 0.53 y 1.09 (ó 1.999) entre 1.8 y 1.9, lo que indica que intentan añadir una cifra a la parte no entera del número decimal sólo que no siempre añaden la cifra al número menor (ver el caso de 1.09 y 1.999), o bien no la ubican a la derecha de la parte no entera (ver casos 1.09 y 0.053).

Estas respuestas nos indican que los estudiantes parten de una idea acertada, el número intermedio deberá tener subdivisiones más pequeñas (milésimos en el primer caso y centésimos en el segundo), pero no consideran que las subdivisiones deben estar en relación de inclusión con el número menor, esto es, si se tiene 1.8 la siguiente subdivisión toma como referente al 8 porque cada uno de los 8 décimos es la parte que se subdivide en centésimos, por esta razón el 8 (la parte no entera) deberá guardar su posición original al margen del añadido de cifras que se haga. La excepción es la respuesta 1.999 entre 1.8 y 1.9, en este caso la modificación del número decimal es correcta, pero toman como referencia al número mayor, es decir, construyó un número intermedio entre 1.9 y 1.99

Otro tipo de error deriva de la intención por calcular un punto medio entre ambos números, bajo esta lógica los estudiantes ubican 0.53.5 entre 0.53 y 0.54, como se puede inferir, como toman las partes no enteras como naturales enteros, el error se produce porque no pueden integrar el resultante a otro número decimal dado, por esta razón deciden utilizar un doble punto decimal. Algo similar puede observarse en las respuestas donde ubican 0.85 entre 1.8 y 1.9, en este caso los estudiantes toman las partes no enteras de los números dados como enteros naturales, es por esto que tienen dificultades para representar a 8.5 como punto intermedio entre 8 y 9, por lo que deciden representarlo como número decimal no entero. En una respuesta semejante se representa 8.5 como $\frac{1}{85}$ o 26 (punto medio de 0.52) como $\frac{26}{1000}$.

Finalmente, otro tipo de errores se presenta cuando los estudiantes no pueden identificar una técnica que les permita cumplir con la tarea, en estos casos su respuesta se expresa mediante números menores o mayores que los determinados, este tipo de errores se encuentran en respuestas donde se ubica 0.52 (ó 0.59) entre 0.53 y 0.54 y 1.0 (ó 1.7) entre 1.8 y 1.9. En el cuadro siguiente se muestra la recurrencia de cada uno de los tipos de error.

Cuatro 34. Errores en la "densidad" de los racionales

	$\frac{2}{10}$ $\frac{3}{10}$	$\frac{15}{100}$ $\frac{16}{100}$	$\frac{25}{1000}$ $\frac{26}{1000}$	**0.53 0.54**	**1.8 1.9**	**Total**
Fusión de representaciones	7	10	8			**11%**
Representación decimal	7	8	7			**10%**
Dominio del numerador	4	5	7			**7%**
Dominio del denominador	3	4	3			**4%**
Modificando num. y denom.	2	2	4			**3%**
Aumentar las cifras sin referente				3	2	**3%**
Representación del punto medio				2	3	**3%**
Sin considerar la densidad				3	3	**4%**
No contesta	20	18	23	20	17	**26%**
Total	**57%**	**63%**	**69%**	**37%**	**33%**	**52%**

Existen dos datos en el cuadro que dan cuenta de las dificultades de los estudiantes para resolver la tarea. Uno es el de las preguntas sin respuesta, en este rubro, una de cada 4 preguntas quedaron sin respuesta. Por otro lado, como la mayoría de los errores se ubica en las preguntas donde se involucran fracciones decimales, los errores más frecuentes derivan de la comprensión insuficiente de la relación entre los elementos de la representación de la fracción, lo mismo puede decirse de los errores cometidos por el predominio del numerador o del denominador, en porcentajes agregados 21% del total de respuestas presentan errores relacionados con este aspecto.

6.5. LOS NÚMEROS RACIONALES EN EL CONTEXTO DE LOS CAMPOS FORMALES ADITIVO Y MULTIPLICATIVO.

Como se ha mencionado en el capítulo II, el dominio del campo formal de las estructuras aditivas y multiplicativas deriva de la comprensión de constructos como medida, operador, cociente y de mecanismos constructivos como partición, unidades divisibles y equivalencia. También se ha mencionado que estos campos formales constituyen una síntesis de la comprensión del número racional como campo cociente, por esta razón, una de las tareas propuestas a los profesores en formación se inscribe en ellos. Para explorar su comprensión acerca de los números racionales en el contexto de estos constructos se pidió que resolvieran los siguientes problemas utilizando la operación correspondiente.

1. José Luis va a construir una bandera con $\frac{3}{4}$ de un pliego de cartulina, si $\frac{2}{3}$ de la cartulina que usará deben iluminarse de rojo, ¿cuál es la parte del pliego de cartulina que irá de rojo?

2. La mamá de Martín cocinaba un pastel cuya receta indicaba usar $\frac{3}{4}$ de taza de azúcar, como llegaron sus sobrinos aumentó los ingredientes, le añadió $\frac{2}{6}$ de tasa de azúcar más. ¿Cuánta azúcar utilizó en total?

3. Para arreglar la tubería de los baños el plomero requiere un tramo de tubo que mida $\frac{5}{6}$ de metro pero sólo tiene tramos que miden $\frac{3}{15}$ de metro. ¿Cuántos tramos de $\frac{3}{15}$ necesita pegar para tener el tubo que requiere?

Los problemas 1 y 3 se ubican en el campo de las estructuras multiplicativas mientras que el 2 corresponde a las aditivas, las técnicas matemáticas convencionales para resolverlos son una multiplicación, una suma y una división respectivamente. Para analizar el tipo de respuestas emitidas en cada caso utilizaremos las siguientes categorías:

a) *Representación no congruente (NC)*, el sujeto utiliza una representación que no es apropiada para la clase de problema planteado, es decir, no representan las relaciones matemáticas implicadas en el problema, aunque las acciones con la simbolización utilizada sean adecuadas.

b) *Representación congruente no algorítmica (CNA)*, el sujeto reconoce las relaciones implicadas en el problema, las representa de manera congruente pero no mediante la representación convencional o algorítmica.

c) *Representación congruente algorítmica (CA)*, el sujeto utiliza las herramientas matemáticas convencionales que además son congruentes con las relaciones implicadas en el problema.[221]

En el siguiente cuadro se puede ver que el problema No. 2 fue comprendido en mayor medida, 8 de cada 10 estudiantes utilizaron representaciones congruentes en este problema. Este dato es relevante si se observa el porcentaje de estudiantes que utilizaron este tipo de representaciones en los problemas con estructura multiplicativa (1 y 3), sólo la mitad de los estudiantes comprendieron el tipo de estructura implicada en los problemas. Los estudiantes de los grupos "A" y "B" obtienen porcentajes cercanos al promedio general (48% y 52% respectivamente)[222] mientras que 92% de los estudiantes del grupo "C" utilizaron representaciones congruentes en los tres problemas. Este dato confirma la tendencia a favor del grupo C que se ha podido observar en las diferentes tareas.

Cuadro 35. Categorías de representaciones

		Problema No. 1	**Problema No. 2**	**Problema No. 3**	**Total**
No congruente[223]	**Grupo A (19 als)**	95%	21%	42%	53%
	Grupo B (35 als.)	48%	34%	63%	48%
	Grupo C (24 als.)	5%	0	19%	8%
	Subtotal	**48%**	**21%**	**45%**	**38%**
Congruente no algorítmica	**Grupo A**	0	0	0.5%	2%
	Grupo B	46%	8%	17%	24%
	Grupo C	67%	5%	48%	40%
	Subtotal	**40%**	**5%**	**23%**	**23%**
Congruente algorítmica	**Grupo A**	5%	79%	53%	46%
	Grupo B	6%	57%	20%	28%
	Grupo C	28%	95%	33%	52%
	Subtotal	**12%**	**73%**	**32%**	**39%**

[221] Estas categorías se basan en las que utiliza Flores (2002) para analizar las representaciones que niños de escuelas primarias emiten frente a problemas aditivos con números naturales enteros.

[222] Aunque éstos son porcentajes agregados de las representaciones congruentes (algorítmicas y no algorítmicas) cabe destacar que en el problema no. 3 el porcentaje de representaciones congruentes algorítmicas es mucho mayor en el grupo A

[223] Los problemas sin respuesta se ubican en este rubro porque consideramos esta ausencia como falta de comprensión de las relaciones matemáticas implicadas en cada problema.

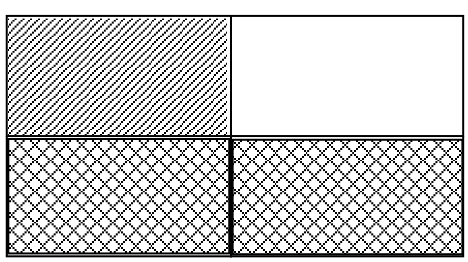
En el problema No.1 la comprensión deficiente de las relaciones implicadas en el problema se refleja principalmente mediante la ausencia de respuestas (25%) y mediante la resta $\frac{3}{4}$ - $\frac{2}{3}$ (17%). En el problema No. 2, luego de los problemas sin respuesta (19%), la representación no canónica más frecuente es la resta $\frac{3}{4}$ - $\frac{2}{6}$, algo similar ocurrió en el problema No. 3, la ausencia de respuestas es el signo más recurrente de la comprensión deficiente de las relaciones implicadas en el problema.

Los porcentajes de respuestas correctas en los problemas 1 y 3 son similares, aunque existe una diferencia significativa entre los estudiantes que plantean una representación CNA y una CA. En el problema No.1, cuatro de cada cinco estudiantes con representaciones canónicas seleccionan una no convencional, mientras que en el problema No. 3, sólo dos de cada cinco hacen lo mismo. Este dato indica que, al parecer los problemas multiplicativos del tipo “cuántas veces cabe” (tasativos) son más difíciles de representar de manera no algorítmica, sobre todo si el problema incluye dos fracciones impropias (como en este caso), también son una muestra de las dificultades de los estudiantes para representar algorítmicamente la estructura de los problemas planteados.

También ha podido observarse que en el problema No. 1 todos los estudiantes que utilizaron una representación CNA excepto uno, lo hicieron mediante un diagrama basado en las subdivisiones de las partes, enseguida se ilustra una de las representaciones más utilizadas de este tipo.

B.20

$\frac{1}{2}$



En estos casos los estudiantes dividen el pliego de papel en cuartos y toman a $\frac{3}{4}$ como referente para señalar 2 terceras partes, mediante esta acción encuentran el resultado.

En el problema No. 3, las representaciones gráficas fueron las CNA que más aparecen (8 de 16 estudiantes), no obstante, a diferencia del problema No. 1, en éste también se pueden encontrar representaciones canónicas como la suma iterada $\frac{3}{15}+\frac{3}{15}+\frac{3}{15}...$ (5 de 16 estudiantes) o una técnica basado en aproximaciones sucesivas mediante multiplicaciones, como $\frac{3}{15}$ x 2; $\frac{3}{15}$ x 4, etc.

Finalmente, resulta significativo observar que sólo 39% de las representaciones son congruentes y si se analizan de manera desagregada, en el problema No. 2 se ubica el mayor número de estudiantes que utilizaron representaciones de este tipo, en contraste sólo un 22% de las representaciones en los problemas multiplicativos fueron algorítmicas. Estos datos nos indican que si bien un poco más de la mitad de los estudiantes son capaces de comprender las relaciones matemáticas implicadas en los problemas multiplicativos, menos de la cuarta parte pueden representarlos algorítmicamente.

Sin embargo, resulta evidente que la utilización de representaciones congruentes no garantiza un resultado correcto. Por esta razón resulta interesante analizar el grado en el que unas u otras representaciones funcionaron como técnicas efectivas de resolución, para tal análisis en el siguiente cuadro se presentan los porcentajes de respuestas adecuadas tomando en consideración sólo las representaciones congruentes.

Cuadro 36. Respuestas adecuadas

		Problema No. 1	Problema No. 2	Problema No. 3	Total
Congruente No convencional	**Grupo A**	---	---	0%	0%
	Grupo B	62%	67%	17%	52%
	Grupo C	93%	0%	30%	64%
	Subtotal	**77%**	**50%**	**23%**	**57%**
Congruente convencional	**Grupo A**	100%	80%	40%	65%
	Grupo B	100%	70%	57%	69%
	Grupo C	100%	75%	57%	76%
	Subtotal	**100%**	**74%**	**50%**	**70%**
Total		**88%**	**62%**	**36%**	**63%**

Antes de analizar los datos del cuadro recordemos que las representaciones congruentes suman un 62%, de manera que los datos incluidos en el cuadro deberán analizarse tomando como referencia esta cifra. Un primer dato destacable es la efectividad de la herramienta matemática convencional, el porcentaje más alto de respuestas adecuadas corresponde a las representaciones CA, esto significa que el dominio de la herramienta formal brinda mayores posibilidades de resolver adecuadamente los problemas.

No obstante que en el problema No. 2 se ubican los mayores porcentajes de representaciones canónicas, no se reflejan en las respuestas adecuadas, ya que en el problema No 1 es donde se presentan los mayores porcentajes de respuestas correctas tanto en las representaciones CNA como en las CA. Con base en estos datos, puede decirse que, una vez comprendidos los problemas, la solución del problema No. 1 tuvo un grado menor de dificultad, seguido por el No. 2 y al parecer, el problema No. 3 representó una mayor dificultad. Esta tendencia puede observarse en ambos tipos de representaciones (CNA y CA), aunque es más evidente en el caso de las representaciones CA. En el problema No. 1 todos los estudiantes que utilizaron representaciones CA lo resolvieron de manera adecuada, en el problema No. 2 hicieron lo mismo 7 de cada 10 estudiantes y apenas la mitad pudo hacer lo mismo en el tercer problema.

Al parecer, estos datos muestran que si bien los estudiantes identifican con mayor facilidad los problemas aditivos, las dificultades para resolverlos son mayores que las que tienen en los problemas multiplicativos, donde se trata de calcular una fracción de otra fracción. Por su parte los problemas multiplicativos que se resuelven mediante una división (relación tasativa) son comprendidos en igual medida que los anteriores, pero representan mayores dificultades para su solución. Este hecho es comprensible si se piensa que el algoritmo para multiplicar fracciones es menos complejo que el de la división y la suma en donde el teorema relativo a las fracciones equivalentes requiere utilizarse.

Finalmente, si se toma en cuenta que las tareas fueron planteadas al finalizar el estudio de los números racionales, un hecho significativo respecto de la comprensión del significado matemático es que sólo 62% de los estudiantes comprendió las relaciones implicadas en los tres problemas, 39% pudo representarlos algorítmicamente y de éstos, sólo 70% los resolvió adecuadamente. En términos globales, aproximadamente 3 de cada 10 estudiantes (27%) pudieron representar algorítmicamente los tres problemas y resolverlos adecuadamente.

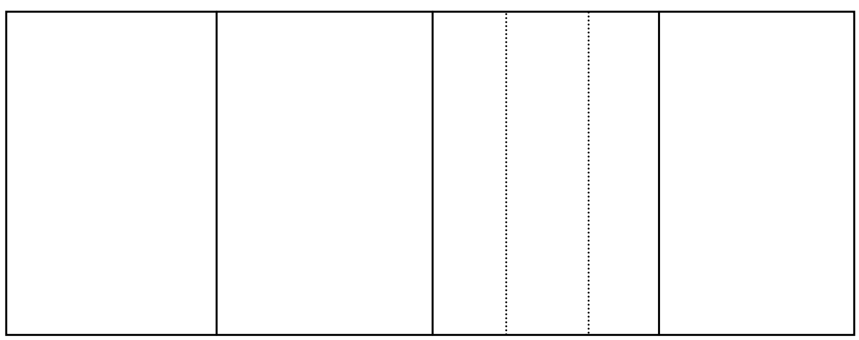
Como puede observarse, el número de estudiantes que pudo resolver la tarea utilizando las herramientas estudiadas es escaso, con base en ello pudiera decirse que sólo tres de cada diez han podido construir la noción de número racional como campo cociente. El dato cobra mayor relevancia si se piensa que, de las tareas planteadas, ésta tiene los menores porcentajes de éxito, lo que indica que si bien existen ciertos conocimientos sobre los racionales que los estudiantes han construido, difícilmente han podido ponerse a funcionar en unas situaciones dadas. Como es de suyo evidente, entre la comprensión de las relaciones implicadas en un problema y la resolución adecuada median diferentes acciones en las que pueden advertirse las ideas erróneas que guían las técnicas utilizadas, en lo que sigue analizaremos precisamente los errores que con mayor frecuencia se presentaron en dichas técnicas.[224]

[224] Sólo analizaremos los errores que corresponden a las representaciones CNA. Los errores relacionados con los mecanismos y reglas de la herramienta convencional se analizarán en el contexto de la siguiente tarea.

6.5.1. Dificultades ligadas a la relatividad de la unidad divisible. Problema 1

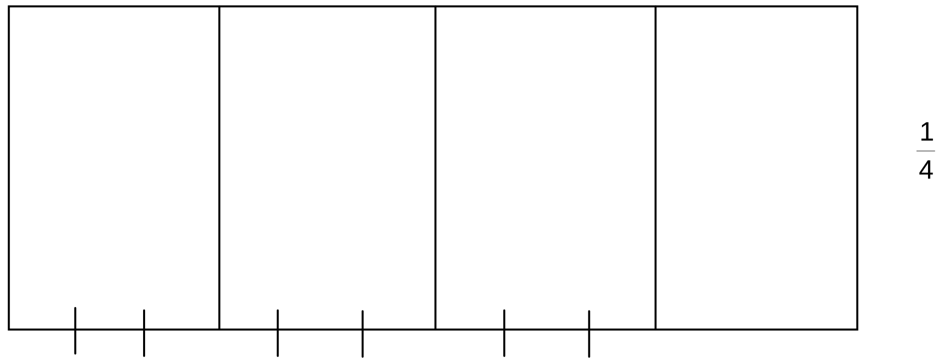
Como se ha mencionado, todas las representaciones CNA (excepto una) utilizadas para resolver este problema son diagramas e invariablemente la técnica consistió en subdividir un número de partes dada. En estos casos los errores más frecuentes tienen que ver con las dificultades para comprender que los $\frac{3}{4}$ iniciales se constituían como una nueva unidad para la partición. Como se puede observar en el siguiente diagrama, B9 toma $\frac{3}{4}$ como referente, pero sólo hace la partición (en tercios) sobre el tercero de los cuartos, así encuentra que uno de esos tercios sumado a los dos cuartos iniciales es el resultado, aunque cabe destacar que no es capaz de representar convencionalmente el resultado de su acción.

B9



Algo similar puede apreciarse en la representación de B33, toma a $\frac{3}{4}$ como referente pero no como una nueva unidad, los toma como tres unidades que deben partirse en tercios, por esta razón, al finalizar tiene dificultades para encontrar la parte que resulta de tal acción y considera que es cuarto no dividido es el resultado.

B33

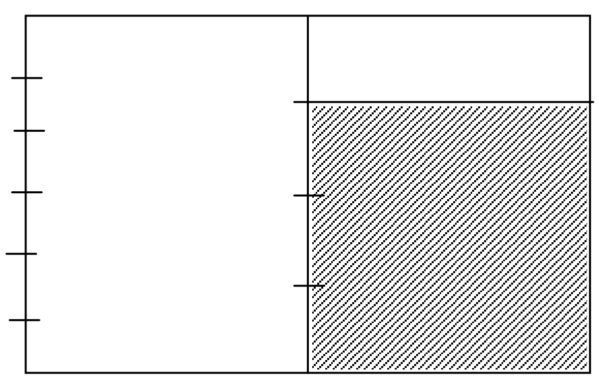


La comprensión deficiente sobre la relatividad de la unidad, es decir, que una fracción puede convertirse en una nueva unidad divisible, es la idea errónea que con mayor frecuencia se pudo observar en las representaciones CNA usadas en este problema.

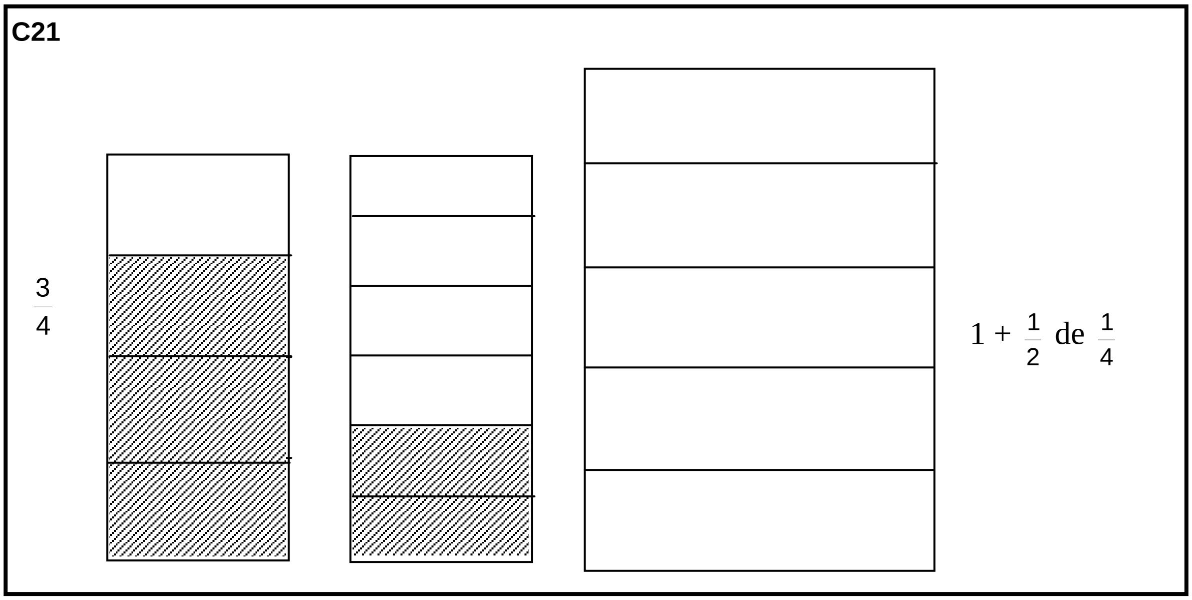
6.5.2. Dificultades en la equivalencia de fracciones. Problema 2

Al igual que en el problema anterior, en éste, las representaciones congruentes no algorítmicas son gráficas y la dificultad principal tuvo que ver con encontrar un diagrama en el que se reflejara la equivalencia de las cantidades a sumar, un ejemplo de dichas dificultades se muestra en el diagrama siguiente.

B11



Al iniciar, B11 representa adecuadamente las cantidades a sumarse, sin embargo, sin posibilidad de representarlas como partes “similares”, no comprende que la cantidad final debe ser mayor que una tasa, por esta razón tal vez, no es capaz de definir un resultado. Algo similar puede observarse en la representación utilizada por C21, en ella se puede apreciar su intento por construir una tercera representación en la que se puedan integrar las dos fracciones del problema.



Sin embargo, dicha representación apela a un “denominador” que no incluye ninguna de las fracciones, dividir en quintos, como lo hace C21, es una acción que basa en el supuesto de que $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{6}$ tienen una fracción equivalente con denominador 5, pero cuando advierte que con esta representación no es posible solucionar el problema, supone –acertadamente- que el resultado es mayor que uno y que la parte no entera resulta de calcular una fracción de otra fracción. Al parecer, supone que cada sexto es $\frac{1}{2}$ de cada cuarto.

6.5.3. Equivalencia y exhaustividad. Dificultades en el problema 3

A diferencia de los problemas anteriores, en éste se utilizaron representaciones congruentes no algorítmicas más diversificadas, 12 estudiantes utilizaron representaciones de este tipo; 6 de tipo gráfico, 4 una suma reiterada y 2 utilizaron aproximaciones mediante la multiplicación. Los errores que se presentaron en este problema pueden agruparse en varias categorías:

- Errores ligados a la equivalencia. Al margen del tipo de representación, la dificultad por encontrar el resultado tiene que ver con una idea errónea respecto de la equivalencia de fracciones, un ejemplo de este tipo de error se puede observar en la respuesta de C4

C4

8 x 5
6 | 100
40

6.66
15 | 100
100
100
10

6.66 x 14
2664
666
93.24

6.66 x 15
3330
666
99.90

6.66 x 13
1998
666
86.58

16 x 5
80

6.66 x 12
1332
666
79.92

Necesita 12 tramos de $\frac{3}{15}$

Al parecer, C4 pretendió convertir las fracciones impropias a su notación decimal, para ello divide 100 entre 15 y posiblemente supone que ha encontrado una fracción equivalente a $\frac{3}{15}$ (6.66), luego divide 100 entre 6 y para encontrar la fracción equivalente a $\frac{3}{6}$, multiplica el resultado (16) por cinco. A partir de estos resultados erróneos, mediante una técnica basada en la aproximación intenta llegar al resultado. Otro error de esta naturaleza en una representación basada en la suma, puede verse en la siguiente respuesta.

B20.

$\frac{3}{5} + \frac{3}{5} +$

5 de $\frac{3}{5}$

$\frac{6}{30} + \frac{3}{5} = \frac{9}{45} + \frac{3}{15} = \frac{12}{60} + \frac{15}{75}$

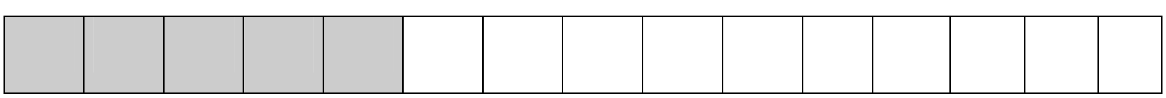
Aunque la técnica es adecuada, B20 realiza sumas iteradas sin tomar en cuenta la relación entre numerador y denominador, al parecer, los suma como números enteros naturales. Su técnica también es ejemplo del segundo tipo de error que se presenta en este problema, esto es, la dificultad por fijar un referente que le permita decidir el momento en que debe dejar de añadir más "tramos".

En nuestra perspectiva, ésta es una dificultad ligada a la exhaustividad puesto que se trata de juntar tramos de tubo, sin utilizar más de los necesarios y sin que el "tramo" mayor quede incompleto. Como puede observarse, los $\frac{5}{6}$ enunciados en el problema no funcionan como referente, por esta razón, deja de añadir "tramos" cuando la suma defectuosa produce un par de números divisibles entre sí (75 y el 15). Sin tomar en cuenta las reglas de transformación basadas en el constructo cociente, B20 calcula un "cociente invertido" para emitir su resultado.

- Errores ligados a la exhaustividad. En estos casos, las respuestas erróneas se caracterizan por la dificultad para "fijar" a $\frac{5}{6}$ como magnitud referente en la que "debe caber" un cierto número de veces la magnitud $\frac{3}{15}$. Esta dificultad se observa lo mismo en representaciones de tipo gráfico como en las aproximativas basadas en la suma o la multiplicación, enseguida se muestran algunos ejemplos.

C1

$\frac{3}{5}$ $\qquad \frac{5}{1} \times \frac{3}{5} = \frac{15}{5} = \frac{3}{5}$



En esta representación puede observarse que C1 divide la unidad en quinceavos para contar dos veces $\frac{3}{5}$, al parecer detiene su conteo porque llega a 6, número que es igual al denominador de la fracción referente. Sin posibilidades para deducir el resultado, intenta una aproximación por medio de la multiplicación, sin embargo no da a $\frac{5}{6}$ una función congruente con el planteamiento del problema, por esta razón, termina sin encontrar la respuesta. Algo similar ocurre en las representaciones “aproximativas” de algunos estudiantes, en éstas el papel de divisor de la fracción $\frac{5}{6}$ constituye la dificultad principal, un ejemplo de ello se puede apreciar en la siguiente representación.

A14

$\frac{3}{15} x \frac{20}{1} \quad 3 \; \frac{5}{6}$ $\qquad$ $\frac{3}{15} x \frac{7}{1} = \frac{21}{15}$ $\qquad$ Aproximadamente $\frac{21}{15}$

$\frac{35 \text{ x } 3}{105}$

$\frac{1}{5} x \frac{5}{1} = \frac{5}{25}$

```
 483.12 x 0.36
 -------------
    289872
   144936
   00000
 -------------
   173.9232
```

```
          233.2
 3.36 | 783.75
         1117
          1095
           0870
            198
```

Como se puede observar, A14 utiliza una representación congruente basada en aproximaciones mediante la multiplicación, sin embargo, no tiene claro el punto en el que las aproximaciones están cercanas a $\frac{5}{6}$, por esta razón hace una estimación errónea cuando supone que $\frac{21}{15}$ es la fracción más próxima, con esto considera que ha llegado al resultado.[225]

Un número importante de estudiantes no fue capaz de representar congruentemente las relaciones implicadas en los problemas, como hemos

[225] De los 12 estudiantes que utilizan representaciones congruentes no convencionales sin llegar al resultado correcto, 5 tuvieron errores ligados a la equivalencia y 7 a la función de $\frac{5}{6}$.

mencionado, estas dificultades se hacen más evidentes en los problemas de estructura multiplicativa y, a pesar de que el problema con estructura aditiva fue representado de forma canónica en mayores porcentajes, un buen número de estudiantes lo hizo sin utilizar la representación algorítmica. Lo mismo puede decirse de los problemas multiplicativos, las representaciones CA se utilizaron por aproximadamente 40% de los estudiantes. Respecto de las dificultades observadas en las representaciones CNA, el teorema relativo a las fracciones equivalentes se constituye como obstáculo principal para llegar a la respuesta correcta, baste observar que las dificultades ligadas a este teorema se presentan en las representaciones CNA de los tres problemas planteados.

6.6. LA SIGNIFICACIÓN "INTERNA" DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO.

Como se ha mencionado al inicio de este capítulo, el significado del conocimiento matemático no sólo se adquiere en la dimensión "externa" al utilizar una herramienta matemática para resolver una situación específica, también se adquiere en el nivel "interno" cuando el sujeto interactúa con los mecanismos y reglas propias de cierto tipo de algoritmo. Por esta razón, para explorar el significado que los profesores en formación dan al conocimiento matemático de los números racionales, la última de las tareas que se les planteó tiene que ver con resolver los algoritmos más usuales en este campo numérico[226]. Específicamente, se les pidió que resolvieran los algoritmos siguientes: $\frac{7}{3}+\frac{8}{5}+\frac{4}{7}$; $\frac{15}{7} - \frac{4}{8}$; $\frac{5}{8} \times \frac{9}{12}$; $\frac{9}{8} \div \frac{3}{4}$; 48.312 x 0.36 y 783.75 : 3.36. En el siguiente cuadro se presentan los porcentajes de respuestas correctas.

[226] En esta tarea no se plantearon algoritmos de suma y resta con números decimales por considerar que, dada la escolaridad de los estudiantes, representarían un grado de complejidad menor.

Cuadro 37. Porcentaje de respuestas correctas

	$\frac{7}{3}+\frac{8}{5}+\frac{4}{7}$	$\frac{15}{7}-\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8} \times \frac{9}{12}$	$\frac{9}{8} \div \frac{3}{4} =$	**483.12 x 0.36**	**783.75 : 3.36**	**Total**
Grupo A 19 alumnos	79%	68%	37%	53%	68%	31%	**56%**
Grupo B 35 alumnos	8%	26%	28%	37%	63%	46%	**35%**
Grupo C 21 alumnos	67%	81%	76%	76%	86%	76%	**77%**
Total	**43%**	**52%**	**44%**	**52%**	**71%**	**51%**	**52%**

Como se puede observar, el porcentaje menor de respuestas correctas corresponde a la suma de fracciones y el mayor, a la multiplicación con números decimales. Una explicación plausible de estos resultados tiene que ver con la complejidad de la suma de fracciones. Es decir, en la suma de fracciones se requiere utilizar el teorema de las fracciones equivalentes, por esta razón es más complejo que los algoritmos con números decimales, donde las reglas de solución son similares a las que se utilizan en la suma con números naturales.

Sin embargo, a pesar de la similitud entre los algoritmos de la suma y resta de fracciones, existe una diferencia significativa entre los porcentajes de respuestas correctas en uno y otro que puede explicarse con base en el número de fracciones implicado en cada algoritmo, esto es, en la resta se incluyen dos fracciones mientras que en la suma se incluyen tres, al parecer esta diferencia explica los distintos porcentajes de respuestas adecuadas, ya que al incluir tres fracciones en la suma el teorema sobre las fracciones equivalentes debe utilizarse con un mayor grado de complejidad.

Por otra parte, sólo cerca de la mitad de los estudiantes fue capaz de resolver adecuadamente todos los algoritmos. Aunque los estudiantes del grupo “A” están próximos a este promedio, los del grupo “B” se ubican por debajo y los del grupo “C” por encima. A diferencia de la tendencia que se observaba en tareas anteriores, en ésta los estudiantes del grupo “A” se ubican en el promedio global, este hecho puede explicarse por la frecuencia con la que, como se ha visto en capítulos anteriores, estos alumnos han practicado las técnicas algorítmicas, al parecer, la naturaleza de su proceso de estudio se refleja en estos resultados. Por otra parte, el porcentaje de respuestas adecuadas de los estudiantes del grupo “C” sólo confirma la tendencia que se ha venido observando.

Otro dato que llama la atención tiene que ver con la dificultad de los estudiantes del grupo “B” para resolver los algoritmos con fracciones, particularmente con la suma. Si se observan las respuestas de este grupo, puede observarse que los algoritmos con fracciones les plantearon mayores dificultades que los algoritmos con decimales, lo que puede explicarse por la atención que los números decimales tuvieron durante su curso. No obstante estos resultados, para conocer cuáles fueron las dificultades específicas que tuvieron en unos y otros algoritmos, en lo que sigue se analizarán las respuestas erróneas más frecuentes.

6.6.1. Errores ligados a la equivalencia de fracciones en la suma y la resta

En el algoritmo de la suma, los errores con mayor frecuencia son producto de una técnica inadecuada para encontrar dos fracciones equivalentes de igual denominador, de los 42 estudiantes que plantearon este algoritmo, 14 identifican el mínimo común denominador de $\frac{7}{3}$, $\frac{8}{5}$ y $\frac{4}{7}$ (105), pero no encuentran los numeradores de cada fracción equivalente. Luego de encontrar el denominador, algunos sumaron los numeradores sin realizar transformación alguna, en otros casos más frecuentes realizaron la suma con dos numeradores surgidos de los productos “cruzados” 7 x 8 x 4 y 3 x 5 x 7.

Un error similar se relaciona con el intento –fallido- para encontrar el mínimo común denominador, en estos casos (7 de 42) los errores se producen cuando calculan dicho denominador, por ejemplo hubo estudiantes que sólo multiplicaron los denominadores 5 y 7, otros que multiplicaron 7 por 3 y unos más que tuvieron un error de cálculo, por ejemplo realizaron la siguiente operación errónea 7 x 5 x 3 = 110

Un error diferente tiene que ver con la disociación de los elementos de la fracción, es decir, con tomarlos como un conjunto de números naturales enteros, en estos casos (9 de 42) simplemente suman numeradores y denominadores para dar como resultado $\frac{19}{15}$. Finalmente, 14 de los 42 estudiantes no dieron respuesta en el algoritmo de la suma.

En lo que respecta a la resta, los errores más frecuentes son similares a los anteriores, 6 de los 33 estudiantes con respuestas erróneas restan numeradores y denominadores, 2 encuentran el denominador común pero restan los denominadores sin transformarlos, otros 2 realizan una suma "cruzada" para encontrar el resultado ($\frac{1}{7} - \frac{4}{8} = \frac{23}{12}$), 4 tienen errores de cálculo y otros tres toman al algoritmo como una suma. Al igual que en el algoritmo de suma, en éste se presenta un número alto de algoritmos sin respuesta (16 de 33).

6.6.2. Errores ligados al inverso multiplicativo. La multiplicación y división de fracciones

Para resolver el algoritmo de la división es necesario utilizar la propiedad del inverso multiplicativo, $\frac{9}{8} \div \frac{3}{4}$ puede resolverse buscando un número que multiplicado con $\frac{3}{4}$ de $\frac{9}{8}$, este mismo principio puede ser aplicado si se multiplica $\frac{9}{8}$ por el inverso multiplicativo de $\frac{3}{4}$. Aunque el uso de esta propiedad es exclusivo del algoritmo de la división con fracciones, también generó errores en la multiplicación.

En el caso de la multiplicación, 20 de los 41 estudiantes con respuestas erróneas multiplican $\frac{5}{8}$ por el inverso multiplicativo de $\frac{9}{12}$, como se puede inferir, los estudiantes utilizaron la técnica para resolver una división. El dato es significativo si se piensa que en el caso de la división 9 de los 37 estudiantes con respuestas erróneas utilizaron la técnica para la multiplicación, esto es, multiplican $\frac{9}{8}$ x $\frac{3}{4}$. Como se puede observar en ambos casos, la técnica ligada a la propiedad del inverso multiplicativo es la dificultad principal. Este error es el que se presenta con mayor frecuencia en la división y multiplicación.

Otro tipo de error en la multiplicación tiene que ver con asignar un significado diferente a la operación planteada, por ejemplo 3 de los 41 estudiantes toman la operación $\frac{5}{8}$ x $\frac{9}{12}$ como una suma y buscan fracciones equivalentes con denominador común para luego sumar los numeradores, en el caso de la división este error se presenta en un caso, aunque 3 de 41 alumnos resuelven la multiplicación de la siguiente manera: $\frac{5}{8}$ x $\frac{9}{12}$ = 5+9÷2; 8+12 ÷ 2 = $\frac{7}{10}$. Finalmente, en 2 casos hubo sólo errores de cálculo.

En el algoritmo de la división también se presentaron errores que no se relacionaban con el inverso multiplicativo o el significado de suma, por ejemplo hubo 3 (de 37) estudiantes que dividieron $\frac{9}{8} \div \frac{3}{4}$ = 9 ÷3; 8 ÷ 4 = $\frac{3}{2}$, al igual que en la suma y la resta, este error se relaciona con la disociación de los elementos constitutivos de una fracción, es decir, aparece cuando sólo se consideran como conjunto de números naturales enteros. Otro tipo de error que cometen 3 de los 37 estudiantes tiene que ver con la siguiente técnica: $\frac{9}{8} \div \frac{3}{4}$ = 9 – 8 ; 9 – 4 = $\frac{1}{5}$. Como se puede ver, el denominador de la fracción dividendo es el referente para obtener un resultado erróneo mediante una técnica basada en la sustracción con los denominadores

6.6.3. Multiplicación y división con números decimales

Las técnicas para resolver estos dos algoritmos son similares a los que se despliegan para resolverlos con números naturales enteros, la única diferencia es que, cuando se utilizan números decimales, es necesario reflexionar sobre la ubicación del punto decimal en el resultado. No obstante, entre el algoritmo de la multiplicación y la división existe una diferencia respecto de tal ubicación, mientras que en la primera, dicha reflexión se realiza después de hacer los cálculos, en el caso de la división que se planteó, dicha reflexión se da en dos momentos, el primero consiste en “desaparecer” el punto decimal del divisor multiplicando por 100 al dividendo y divisor y debe realizarse antes de hacer cualquier cálculo, en un segundo momento se debe ubicar el punto decimal en el cociente respetando la ubicación que hubiese tenido en el dividendo.

Las características de las técnicas descritas para ambos algoritmos determinaron de cierta manera la naturaleza de los errores cometidos, por ejemplo en lo que concierne a la multiplicación, 21 de los 75 estudiantes tuvieron respuestas erróneas, los diferentes tipos de errores se enuncian a continuación.

- 8 estudiantes no dieron respuesta alguna
- 8 estudiantes cometieron errores de cálculo relacionados con alguna multiplicación del tipo 3 x 8 ó 6 x 8
- 4 estudiantes dieron una respuesta con cifras correctas pero sin una colocación adecuada del punto decimal. Tres sólo consideraron dos de las cuatro partes no enteras del resultado, contestaron 17392.32 Al parecer sólo tomaron en cuenta el punto decimal del 0.36. Un estudiante no consideró el punto decimal en el resultado. Tres dieron un resultado correcto en cifras pero no colocaron de manera adecuada el punto decimal, sus respuestas fueron del tipo 17392. 32 Un estudiante no consideró las partes no enteras, su respuesta fue 1739232
- Finalmente, uno de los estudiantes sumó los números en lugar de multiplicarlos.

En lo que concierne a la división hubo mayor número de respuestas erróneas (37 de 75 estudiantes) que en la multiplicación. Además, los algoritmos sin respuesta son una abrumadora mayoría, 30 de los 37 estudiantes que no pudieron llegar al resultado no emitieron respuesta alguna. Lo que este dato nos indica es que el dominio de los mecanismos propios del algoritmo de la división con números decimales es escaso. Por otra parte entre las respuestas erróneas se pueden observar los siguientes tipos de errores:

- 2 estudiantes cometieron errores de cálculo, se presentaron principalmente en multiplicaciones simples.
- 2 estudiantes multiplicaron los números dados en lugar de dividirlos.

- 2 emitieron la respuesta 2.3325 en la que se advierte el “corrimiento” del punto decimal del dividendo hacia el cociente, pero sin multiplicar por 100 es decir, dividieron sin considerar el punto decimal en el divisor.
- 1 estudiante sumó los números, lo significativo es que es el mismo alumno que en ambas operaciones (multiplicación y división) sumó, esto indica que ante la dificultad por realizar las operaciones planteadas prefiere considerarlas como operaciones que conoce.

6.7. CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

Al iniciar el capítulo, se mencionó que el objetivo era analizar el dominio de los contenidos matemáticos que los profesores en formación habían adquirido luego de estudiar el bloque dedicado a los números racionales, la idea era explorar dicho dominio en un doble nivel, en el nivel “externo” que se refiere al campo de utilización de ese conocimiento y a los límites de ese campo y en un nivel “interno” que tiene que ver con el funcionamiento de una herramienta matemática, por ejemplo el funcionamiento de un algoritmo.[227]

Para dar cuenta del nivel de dominio adquirido, en lo que sigue analizamos a manera de conclusión los resultados globales de las cuestiones revisadas en el cuerpo del capítulo. En el siguiente cuadro se presenta el porcentaje de respuestas correctas que los estudiantes dieron a algunas cuestiones referidas al nivel “externo”. Específicamente, se presentan los resultados relacionados con la ubicación de fracciones en la recta numérica (medida), con la transformación de fracciones a notación decimal, con la identificación de fracciones equivalentes y con la identificación de una fracción ubicada entre otras dos (densidad).

[227] Algunas cuestiones incluidas en el cuestionario aplicado no fueron analizadas, la razón es que en algunos casos un planteamiento defectuoso no produjo respuestas relevantes, en otros consideramos que el análisis de las respuestas escapaba a los límites del presente estudio.

Cuadro 38. Dominio de contenidos en el nivel “externo”

	Grupo A 19 alumnos	Grupo B 35 alumnos	Grupo C 21 alumnos	Total
La fracción como medida	59.6%	57.1%	80.9%	**64.4%**
Fracciones y notación decimal	62%	49%	82%	**62%**
Equivalencia de fracciones	31%	40%	78%	**49%**
Densidad de los racionales	31%	44%	69%	**48%**
PORCENTAJE PROMEDIO	**45.9%**	**47.5%**	**77.4%**	**55.8%**

Como se puede observar, sólo un poco más de la mitad de los estudiantes contestaron adecuadamente a todas estas cuestiones (55.8%), lo que nos indica un dominio insatisfactorio del contenido matemático en su nivel “externo”. Además en este grupo de respuestas destacan dos datos, por un lado la diferencia significativa entre los porcentajes de respuestas de las dos primeras y las dos últimas tareas, en las dos primeras los porcentajes se encuentran alrededor del 60% mientras que en las dos últimas (equivalencia y densidad) apenas se registraron porcentajes cercanos al 50%.

El otro dato tiene que ver con la diferenciación entre los tres grupos, como se ha podido observar a lo largo del capítulo, los estudiantes del grupo “C” presentan los porcentajes más altos de respuestas correctas, en estos datos agrupados la diferencia respecto de los grupos “A” y “B” es aproximadamente de 30 puntos porcentuales. Posiblemente esta diferencia se explique con base en las características del proceso de estudio que vivió cada grupo, principalmente si tomamos en cuenta a los grupos “A” y “C” que pertenecen a una misma escuela y que por lo tanto, puede pensarse, son alumnos con características sociales y escolares similares,[228] es decir, en tanto que el grupo “A” vivió un proceso de estudio en el que se privilegiaron los momentos para el trabajo con la técnica algorítmica, el nivel “externo” del conocimiento matemático pudo haber representado una dificultad mayor que para los alumnos del grupo “C”, quienes

[228] De los tres grupos analizados, el grupo “B” tiene condiciones sociales, culturales y escolares que impiden hacer una comparación más justa, ya que en este caso, junto con las características del proceso de estudio vivido, pueden existir otras diferencias que expliquen las tendencias observadas.

vivieron un número importante de momentos exploratorios y de justificación de las técnicas.

Para analizar la plausibilidad de esta explicación, en el siguiente cuadro se presentan los datos agrupados de las respuestas a una tarea que combina tanto el nivel “externo” como el “interno”, esto es, como la tarea consistía en resolver tres problemas, el primer nivel se puede analizar a través del tipo de representación que utilizaron los estudiantes.

Cuadro 39. Los números racionales en el contexto del campo formal aditivo

	Grupo A	Grupo B	Grupo C	Total
Representaciones no congruentes	**53%**	**48%**	**8%**	**38%**
Representaciones congruentes no algorítmicas	**2%**	**24%**	**40%**	**23%**
Representaciones congruentes algorítmicas	**46%**	**28%**	**52%**	**39%**

En términos generales puede apreciarse que sólo 39% de los estudiantes utilizó representaciones congruentes algorítmicas, lo que significa que menos de la mitad de los estudiantes representaron los tres problemas planteados mediante una herramienta matemática convencional. Si sumamos los porcentajes de representaciones congruentes, se observa que apenas 61% de los alumnos pudieron comprender las relaciones implicadas en los problemas, lo que indica un dominio poco aceptable del contenido matemático relacionado con la tarea.

Por otra parte y en congruencia con los argumentos anteriores, puede observarse que, en esta tarea, los estudiantes del grupo “A” tienen un porcentaje (46%) un poco más bajo que los del grupo “C” en las representaciones de este tipo. En el siguiente cuadro pueden observarse los porcentajes de respuestas correctas para los tres problemas planteados.

Cuadro 40. Respuestas correctas por tipo de representación

	Grupo A	Grupo B	Grupo C	Total
Representaciones congruentes no algorítmicas	**0%**	**52%**	**64%**	**57%**
Representaciones congruentes algorítmicas	**65%**	**69%**	**76%**	**70%**

Tres datos llaman la atención en este caso, uno es la incapacidad de los estudiantes del grupo “A” para llegar a las respuestas correctas a través de representaciones congruentes no algorítmicas, lo que puede explicarse tal vez por el énfasis que se puso durante el proceso de estudio en la utilización de técnicas algorítmicas. Otro, son los altos porcentajes del grupo “C” en ambos tipos de representaciones, lo que fractura de alguna manera la idea de que los recurrentes momentos exploratorios no generan un dominio de las técnicas convencionales y el tercer dato relevante son los resultados aceptables (70%) en el manejo de las herramientas algorítmicas por parte de los estudiantes. Sobre este último aspecto, en el siguiente cuadro se presentan los resultados globales de una tarea relacionada con el dominio del nivel “interno” esto es, con el uso adecuado de la herramienta matemática, recordemos que en este caso la tarea se trataba de solucionar seis algoritmos con fracciones.

Cuadro 41. Dominio de la herramienta matemática

	Grupo A	Grupo B	Grupo C	Total
Porcentaje de respuestas correctas	**56%**	**35%**	**77%**	**52%**

Por un lado estos resultados nos muestran una tendencia conocida, sólo aproximadamente la mitad de los estudiantes cuestionados resuelven correctamente la tarea, es decir, en ésta como en las otras tareas analizadas podemos ver que el dominio de los contenidos matemáticos es significativamente deficiente si se piensa que estos estudiantes serán profesores en un futuro cercano y que deberán utilizar praxeologías docentes para ayudar a reconstruir estas praxeologías matemáticas, en otros términos, será difícil que ayuden a los niños a reconstruir una organización matemática que difícilmente ellos mismos pueden reconstruir.

Empero, sobre el nivel de dominio de los contenidos matemáticos, dejemos que hablen los propios estudiantes. Cuestionados sobre los conocimientos que mayormente adquirieron durante el curso, como se puede observar en el siguiente cuadro, en congruencia con el énfasis que en los tres procesos de estudio se dio a las praxeologías matemáticas, excepto los estudiantes del grupo "B", que perciben un equilibrio entre los conocimientos matemáticos y didácticos adquiridos durante el curso, los del grupo "A" y "B" señalan a las praxeologías matemáticas como los conocimientos en los que adquirieron mayor dominio.

Cuadro 42. Conocimientos adquiridos convenientemente

	Grupo A	Grupo B	Grupo C	TOTAL
Sobre las fracciones y decimales	84%	43%	81%	**64%**
Sobre la manera cómo aprenden los niños	47%	66%	71%	**63%**
Sobre cómo enseñar matemáticas	31%	43%	48%	**41%**
Sobre cómo enseñar las fracciones y los decimales	31%	26%	48%	**33%**

Cuando se invierte la pregunta, esto es, cuando se les cuestiona por los conocimientos que no adquirieron de manera conveniente, como se puede ver en el siguiente cuadro, sólo se confirma la tendencia observada en el cuadro anterior, esto es, por lo general, los estudiantes señalan a los saberes de tipo didáctico como las ausencias más notables en su dominio de saber. También se confirma la excepción de los estudiantes del grupo "B" que enuncian un equilibrio entre los saberes matemáticos y didácticos.

Cuadro 43. Conocimientos no adquiridos convenientemente

	Grupo A	Grupo B	Grupo C	TOTAL
Sobre las fracciones y decimales	31%	34%	14%	**28%**
Sobre la manera cómo aprenden los niños	58%	17%	24%	**29%**
Sobre cómo enseñar matemáticas	68%	34%	28%	**41%**
Sobre cómo enseñar las fracciones y los decimales	53%	54%	71%	**59%**

Al parecer, los estudiantes suponen que tienen un dominio suficiente de los contenidos matemáticos y que son los saberes didácticos los que requieren consolidar para devenir en profesores de escuelas primarias. Este supuesto parece explicar también las respuestas que dan cuando se les cuestiona si luego de este curso se sienten capaces de enseñar las fracciones y los decimales en la escuela primaria.

Como se puede observar en el siguiente cuadro, resulta por demás significativo que más de la mitad de los estudiantes (57%), no se sientan capaces de enseñar estos contenidos en la escuela primaria, además llama la atención que este porcentaje sea similar a los que se han observado en las tareas matemáticas fallidas.

Cuadro 44. Capacidad para enseñar las fracciones y los decimales en la escuela primaria

	Grupo A	Grupo B	Grupo C	TOTAL
SÍ	42%	28%	48%	**37%**
NO	58%	60%	52%	**57%**
No responde		11%		**6%**

Aunque, por otra parte, esta incapacidad pudiera estar relacionada con el escaso énfasis que, durante el estudio de los números racionales, se le ha dado a la reconstrucción de las praxeologías matemáticas. En este caso dejemos también que sean los propios estudiantes, a través de través de los datos incluidos en el siguiente cuadro, los que den las justificaciones a estas respuestas, en él se presentan las respuestas a la pregunta: ¿por qué no te sientes capaz de enseñar las fracciones y los decimales en la escuela primaria, luego de estudiar este curso?

Cuadro 45. ¿Por qué no te sientes capaz?

	Grupo A	Grupo B	Grupo C	TOTAL
Porque falta más dominio de contenidos	32%	43%%	38%	**39%**
Porque hacen falta otros saberes	21%	9%	14%	**23%**
Porque se necesita la práctica	5%	9%	---	**5%**

Articulando los resultados obtenidos en las diferentes tareas matemáticas con estas res últimas preguntas, puede advertirse que los estudiantes reconocen que son las praxeologías matemáticas las que, en mayor medida, se estudian durante el curso, por esa razón expresan que éstas son sus mejores aprendizajes.

No obstante, reconocen también, como se puede ver en el cuadro anterior, que a pesar del énfasis en estas praxeologías y de que son su mejor aprendizaje, no les otorgan un dominio suficiente para poder dirigir un proceso de estudio en la escuela primaria, las dificultades que han tenido para resolver las tareas planteadas parece darles la razón. Los otros datos en el cuadro anterior también son significativos, nos indican que hay estudiantes que tienen claro que, para poder enseñar de una manera efectiva requieren de otros saberes además de los matemáticos: los didácticos. Pero además, también los hay que reconocen en la práctica un lugar para adquirir saberes que no podrían encontrar en las aulas de las escuelas normales.

Por otra parte, con respecto a las diferencias entre los resultados de las tareas matemáticas planteadas, si consideramos que el grupo “A” tuvo numerosos momentos para el trabajo con la técnica, podríamos esperar que, en esta tarea, los estudiantes de este grupo obtuvieran los porcentajes más altos de respuestas correctas, sin embargo, a pesar de que ésta es una de las pocas tareas en las que obtienen resultados más altos que el grupo “B”, la diferencia respecto del grupo “C” sigue siendo significativa, más de 20 puntos porcentuales. Este dato provoca una interrogante, si los alumnos de los grupos “A” y “C” son estudiantes de la misma escuela y por ello viven una cultura escolar similar, ¿qué es lo que explica la diferencia entre sus resultados?

La respuesta no es fácil de enunciar, ya que, en el trayecto de aprender los contenidos matemáticos que se proponen en las escuelas normales, se presentan múltiples variables: la historia personal de los sujetos, su historia escolar, las condiciones en las que se desenvuelven, etc. Sin embargo, en el marco de este estudio, la única explicación posible tiene que ver con las representaciones de sus formadores y con la manera en la que éstos han dirigido el proceso de estudio, en este sentido una parte de la respuesta parece estar dada precisamente por las técnicas de formación que utilizan los formadores, es decir, al parecer, la utilización de la homología ampliada y la recurrencia a los momentos exploratorios y de justificación de las técnicas que hace el formador del grupo “C”, parece tener ciertas bondades, si bien la relación entre éstas y los resultados de los estudiantes de este grupo no son lo suficientemente claras, no nos queda alternativa mejor que pensar, aunque sea de forma precavida y provisional, que estas técnicas generan resultados favorables en lo que concierne al dominio “externo” e “interno” del contenido matemático.

El carácter provisional de tal afirmación tiene que ver con la necesidad de explorar otras variables que permitan explicar con mayor plausibilidad las diferencias entre grupos de estudiantes como éstos, en los que aparentemente no intervienen otros elementos más que la naturaleza del proceso de estudio vivido.

CONCLUSIONES

1. La últimas reformas: De la investigación a las competencias didácticas

Antes de la reforma a los programas oficiales para las escuelas normales que se hiciera en 1997, en el llamado Plan 84 la formación de los profesores para la escuela primaria se orientaba hacia la constitución de un profesor investigador que se aproximara al hecho educativo más como antropólogo que como profesor enseñante. En términos generales, se trataba que el futuro profesor observara la realidad educativa para problematizarla, y mediante la investigación buscara respuestas a los problemas encontrados. En esta perspectiva, la escuela primaria y sus profesores poco aportaban a la formación del futuro profesor; en el mejor de los casos, eran parte de una realidad deformada que el nuevo profesor debería transformar.

Las ideas que sustentaban esa propuesta se ajustaban perfectamente a la oleada internacional que en los 1980 promulgaba la necesidad de formar profesores investigadores. Sustentada en la idea de que el "profesor enseñante" sólo se responsabilizaba de la dimensión técnica de su trabajo, dejando de lado la dimensión intelectual y la responsabilidad de transformar su objeto de trabajo (el hecho educativo), esta corriente de pensamiento, basada además en los principios de la teoría marxista, proponía el rescate de la figura del profesor como intelectual crítico y transformador.

Como la preocupación por la investigación ocupó el lugar central en la formación, la construcción de conocimientos ligados a la enseñanza de las matemáticas ocupó un lugar marginal. Lo mismo sucedió con los saberes para enseñar la historia, la escritura, la geografía, etc. Todos ellos se aglutinaron en un solo espacio curricular (*Contenidos de aprendizaje)* con poco o ningún énfasis en la especificidad y sistematicidad de los saberes producidos en el seno de las diversas didácticas. Si bien es cierto que se incluían contenidos matemáticos en los programas de ese Plan, fundamentalmente se relacionaban con la estadística y la probabilidad porque su función era servir como herramientas de investigación para describir o explicar el fenómeno educativo que los profesores en formación investigaban.

A pesar de las orientaciones de estos programas, los formadores no fueron capaces de formar investigadores, a causa, entre otras cuestiones, de que ellos tampoco habían hecho investigación. Sin embargo, lo más relevante es que, preocupados por formar para la investigación, olvidaron la función esencial del profesor: la formación para la enseñanza. Así, los resultados esperados nunca llegaron; los nuevos profesores no pudieron convertirse en investigadores, y tuvieron dificultades para establecer nuevas relaciones didácticas en las aulas. Dicho de otra manera, no fueron capaces de transformar la realidad educativa ni de convertirse en profesores que enseñaran.

No obstante lo evidente de las dificultades para operar el Plan 84 y de los resultados poco favorables que el trabajo con esta propuesta arrojaba, hubieron de transcurrir 13 años para que los agentes de la noosfera educativa modificaran la orientación de los programas oficiales. En 1997 se abandonó la pretensión de formar profesores investigadores y se propuso una formación basada en la adquisición de competencias didácticas.

En este contexto es en el que aparece la didáctica de las matemáticas como referente para la formación de competencias para la enseñanza de las matemáticas. Se trata de que los profesores en formación profundicen y consoliden sus conocimientos sobre la matemática; que descubran el sentido y la estructura de los contenidos para la escuela primaria; que observen y analicen el papel del profesor y de los alumnos de la escuela primaria, las características de las situaciones didácticas que se plantean en este nivel, y que apliquen el enfoque basado en la resolución de problemas.

Para cumplir estos propósitos, los programas oficiales incluyeron dos espacios curriculares dedicados específicamente al estudio de la enseñanza de las matemáticas: *Matemáticas y su enseñanza I* y *II*. En estos espacios curriculares se propone que se estudien conjuntamente los contenidos matemáticos y los que tienen que ver con el aprendizaje y la enseñanza de esta disciplina. En otros términos, en estos espacios se incluyen los diferentes saberes que conforman una perspectiva didáctica.

En el contexto que se acaba de describir sucintamente, el objetivo del estudio de investigación educativa presentado en esta tesis de doctorado fue analizar la transposición del conocimiento didáctico y matemático relativo a los números racionales en la formación de los profesores. Para ello, se analizó la transposición en dos niveles diferentes: en el primero, se revisó la estructura y secuencia de los contenidos sugeridos en los programas de estudio, así como las representaciones sociales que sobre estos elementos tienen los formadores de docentes; en el segundo, se analizó la manera en la que los formadores reconstruyen los contenidos matemáticos y didácticos en las aulas.

Para realizar dichos análisis, se utilizó como categoría central una noción de la teoría antropológica didáctica: la de praxeología. Desde esta perspectiva, lo que se analiza es el tipo de tareas (*T)*, las técnicas para cumplir con esas tareas (*τ),* los discursos que justifican esas técnicas (θ) y los discursos teóricos que le dan sentido a las tareas planteadas (Θ).

Luego de analizar los tipos de tareas matemáticas y didácticas que se sugieren en los programas de estudio, se identificó que el nuevo “texto de saber” presenta un desequilibrio en la inclusión de los diferentes saberes o tipos de tareas profesorales. Un ejemplo de tal desequilibrio es el énfasis privilegiado que se da a las tareas ligadas a la reconstrucción de las praxeologías matemáticas, énfasis que es un indicador de las preocupaciones de los agentes de la noosfera: el dominio de los contenidos matemáticos “a enseñar”. En este contexto, las tareas ligadas a las praxeologías didácticas tienen menor presencia tanto en número como en el tiempo que se les dedica.

En este estudio de investigación educativa también se determinó que en el caso de las tareas de naturaleza matemática existen contenidos a los que se da mayor énfasis: son los casos de las cuatro operaciones básicas con números naturales, los números racionales y la medición. Baste un dato para ilustrar la preeminencia de estos contenidos: 80% de las tareas matemáticas sugeridas en el programa se refieren a ellos. Esta situación es contrastante si se advierte que para la geometría y los procesos de cambio (proporcionalidad), juntos, apenas se sugiere 7.4% del total de tareas matemáticas.

Al parecer la preeminencia de contenidos, como las cuatro operaciones básicas y los números racionales, es un aspecto coherente con lo que sucede en las escuelas primarias y con las preocupaciones de los diseñadores de la reforma. En las escuelas primarias, estos contenidos también ocupan la mayor parte del tiempo de enseñanza y de los esfuerzos de los profesores. Así, resulta comprensible que los diseñadores de la reforma se muestren preocupados porque los profesores en formación profundicen y amplíen sus conocimientos sobre los contenidos que más se trabajan en las escuelas primarias. Esta preocupación se confirma a partir de que el grado de complejidad de la mayoría de las tareas matemáticas sugeridas es similar al de las que se sugieren para los niños de las escuelas primarias. Sin embargo, las tareas que corresponderían al momento del trabajo con la técnica son muy escasas en el programa para las escuelas normales, hecho que es significativo porque indica la posibilidad de que para los diseñadores de la reforma el estudio de las técnicas matemáticas no es un problema prioritario, aunque sí lo es la comprensión y el sentido de las diferentes nociones matemáticas sugeridas.

En lo que corresponde a las praxeologías didácticas, el “texto de saber” presenta tres desequilibrios: el primero tiene que ver con el discurso teórico; el segundo se relaciona con la naturaleza de las tareas didácticas, y el tercero tiene que ver con el momento en el que se estudian los elementos de una praxeología.

El desequilibrio relacionado con el discurso teórico consiste en que a pesar de que en el programa se reconoce explícitamente la influencia de la didáctica de las matemáticas en el estudio de los fenómenos ligados a la enseñanza de esta disciplina, y a pesar de que se plantean determinadas nociones teóricas (variable, contrato, transposición, obstáculo, etc.) como herramientas que permiten estudiar cuestiones didácticas puntuales, el discurso teórico está dirigido únicamente a los formadores. Esta división de responsabilidades constituye un doble *topos:* uno para el estudiante, quien sin un discurso teórico que dé sentido a las tareas planteadas sólo tiene la responsabilidad de cumplir con el bloque práctico-técnico de la praxeología; y uno para el formador, quien toma a su cargo la inclusión de los discursos teóricos. Así, se propone una “didáctica de la acción” para el formado y una de corte teórico para el formador.

En cuanto a desequilibrio que tiene que ver con la naturaleza de las tareas didácticas, se ha determinado que el “texto de saber” da prioridad al estudio de la enseñanza sobre el de los procesos de aprendizaje. Además, en las tareas ligadas a la enseñanza se privilegia el estudio de dispositivos dados sobre el análisis de prácticas de enseñanza y sobre los momentos didácticos que es necesario gestionar cuando se dirige un proceso de estudio.

El tercer desequilibrio, el del momento en que se estudian los elementos de una praxeología, consiste en que por lo general las tareas ligadas a la enseñanza se ubican en el nivel de la planeación. Esto significa que los profesores en formación estudian cómo dirigir un proceso de estudio, pero no tienen oportunidad de experimentarlo. La ausencia de escenarios de clase como herramientas para los análisis sobre la enseñanza, o de sesiones de práctica en las que puedan dirigir un proceso de estudio concreto, son una muestra de que el "texto de saber" plantea el estudio de una enseñanza evocada pero no real. Lo paradójico del caso es que el *topos* asignado al estudiante se caracteriza por la exclusión del discurso teórico. Sin ese discurso teórico y sin posibilidades de probar sus técnicas didácticas en un proceso de estudio concreto, la praxeología que se propone para los estudiantes se reduce a cumplir con las responsabilidades del bloque práctico-técnico en una práctica didáctica sólo evocada.

El vacío que deja el estudio de una enseñanza real es llenado por un buen número de tareas dedicadas a explorar los dispositivos de estudio, esto es, frente a una enseñanza evocada el "texto de saber" intenta remediar este hecho mediante los análisis de dispositivos que tampoco son experimentados durante los cursos. Así, la transposición de una cierta praxeología didáctica tiene sus primeras dificultades en la estructura del "texto de saber" puesto que, sin posibilidades de probar la eficacia de los dispositivos analizados o de las técnicas didácticas reconstruidas, el estudio de lo didáctico no rebasa los límites del mero discurso. Las praxeologías didácticas puestas en el "texto de saber" resultan incompletas, permanecen en un nivel discursivo (a-teórico) con escasas posibilidades de incorporar la dimensión de la *praxis.*

2. La reconstrucción de las praxeologías docentes: Encuentros y desencuentros con el "texto de saber"

No obstante los desequilibrios presentes en los programas de estudio, en éstos se hace patente el intento por articular los diferentes tipos de tareas profesorales. Es decir, se ha identificado que se incluyen tareas tanto para la reconstrucción de las praxeologías matemáticas, para el estudio de los dispositivos de enseñanza, para los diferentes momentos didácticos y para el análisis de los procesos de aprendizaje.

El hecho es relevante si se toma en cuenta que cuando exploramos las representaciones sociales de los formadores entrevistados, ellos aceptan el "texto del saber". La dicotomía entre teoría y práctica, el mayor acercamiento a la práctica docente y la inclusión de los contenidos de la escuela primaria son argumentos que los formadores utilizan para ponderar positivamente la nueva propuesta. En otros términos, lo que estas justificaciones muestran es que los formadores aceptan el "texto de saber" porque plantea una formación más cercana a la enseñanza.

Sin embargo, la aceptación del "texto de saber" no sigue los mismos cauces. Por ejemplo, hay quienes como F1 suponen que los saberes matemáticos y didácticos incluidos en los programas mantienen un equilibrio adecuado, pero hay otros como F2 que suponen que se da demasiado énfasis a lo didáctico, y en el extremo pudimos observar a formadores como F4 que no aceptan el programa porque consideran que los saberes matemáticos y didácticos sugeridos en los programas son insuficientes para desarrollar una formación adecuada.[1]

Lo relevante de las representaciones sociales sobre el "texto de saber" es que el formador más joven (F1) es quien acepta de mejor manera la nueva propuesta de formación. En correspondencia con este hecho, el formador con más experiencia (F4) se distingue por su rechazo. Al parecer, los formadores con menos experiencia no han estructurado una representación muy estable sobre la formación, lo que les permite iniciar una transformación progresiva de su representación, sin que esto signifique una crisis en su significación global. Con este mismo argumento se explica el rechazo de los formadores con mayor experiencia, es decir, en tanto que a lo largo de su desarrollo profesional han estructurado representaciones muy estables sobre la formación, aceptar una nueva propuesta implica para ellos transformar abruptamente sus representaciones, lo cual no puede llevarse a cabo sin que se produzca una crisis en su nudo central.

[1] Por cuestiones de anonimato de los formadores entrevistados, se les ha llamado en este reporte F1, F2, F3, F4, F5 y F6.

No obstante la aceptación sin restricciones o el rechazo absoluto, se ha identificado que cuando los formadores dan cuenta de las negociaciones que han hecho con el “texto de saber”, principalmente negocian con el tiempo legal de la enseñanza. Esto es, bajo la lógica de una temporalidad impuesta en los programas de estudio, los formadores no pueden estudiar todos los contenidos que se sugieren. En unos casos se omiten bloques enteros, y en otros se da un tratamiento poco profundo o, como le hemos llamado, un “tratamiento suavizado” a ciertas nociones. Los contenidos *de geometría* y *tratamiento de la información, predicción y azar,* generalmente se excluyen, mientras que frecuentemente los de *los números racionales* reciben un “tratamiento suavizado”. No obstante, en lo que respecta a la cantidad y secuencia de contenidos, los formadores entrevistados declaran no haber modificado sustancialmente los planteamientos de los programas, esto sucede en el caso de F4, quien, a pesar de considerar insuficientes los contenidos (matemáticos y didácticos), no integra conceptos diferentes a los sugeridos. En el caso de F2, que considera que en los programas se pone demasiado énfasis en los contenidos didácticos, no modifica la estructura del curso ni la secuencia de los contenidos.

No obstante lo anterior, luego de que se observó la manera como dirigen el proceso de estudio en las aulas, se determinó que sus representaciones influyen sobre ciertas negociaciones con el “texto de saber” que no habían sido enunciadas. Por ejemplo, en correspondencia con sus ideas sobre la insuficiencia de los contenidos matemáticos sugeridos en los programas, F4 desarrolla una práctica en la que lo preponderante es la reconstrucción de las organizaciones matemáticas, viéndose dicha reconstrucción influenciada por sus ideas acerca de lo que es la actividad matemática. Un ejemplo de ello es la frecuencia con la que este formador recurre a las “clases de matemáticas” y a las clases de “ejercicios”. En ambos casos, sus estrategias se sustentan en un modelo epistemológico, el “euclidianismo”, que privilegia la explicación del maestro como vía para la enseñanza y que posiblemente ha sido estructurado por los formadores en el curso de sus experiencias pasadas.

Lo paradójico en este caso es que a pesar de que F4 también considera insuficientes los contenidos didácticos sugeridos en los programas, no incluye otros contenidos de este tipo. Además, sólo en contadas ocasiones plantea tareas didácticas, y cuando lo hace es común que las gestione mediante técnicas de formación en las que no se “devuelve” la responsabilidad al estudiante para construir técnicas que permitan resolver esas tareas sino que es el formador quien por lo general asume la responsabilidad de dar una didáctica prescriptiva o de inferir las posibles dificultades que tendrían los niños en el trabajo con un dispositivo determinado. Así, en el proceso de estudio dirigido por F4 el estudiante sólo se responsabiliza del bloque técnico-práctico de una praxeología. Los discursos tecnológicos que justifican las técnicas empleadas por lo general son responsabilidad del formador y los discursos teóricos se distinguen por su ausencia, de manera que lo que aparece en su gestión es la reconstrucción de praxeologías incompletas.

La determinación de las representaciones sociales sobre las prácticas también ha podido observarse en el caso de F2. Como este formador considera que los programas dan demasiado énfasis a lo didáctico, el proceso de estudio que dirige se centra en la reconstrucción de las praxeologías matemáticas, sólo que, a diferencia de F4, este formador no recurre a las “clases de matemáticas” o a las “clases de ejercicios”: su acción se basa fundamentalmente en la gestión de momentos de exploración y tecnológicos, esto es, privilegia momentos en los que los estudiantes tienen que resolver problemas no “ejercitados” y explicar la técnica empleada. Así, la gestión de F2 se funda sobre una estrategia basada en la homología, es decir, sobre una estrategia que intenta formar a los estudiantes mediante la reproducción de un tipo de gestión similar al que se desea que desarrollen los profesores en formación con los alumnos de la escuela primaria.

Sin embargo, en correspondencia con su representación sobre la inclusión de lo didáctico en los programas, en su gestión este saber se diluye y pocas veces aparece de manera explícita. Esa disolución se opera mediante dos formas: incluir lo didáctico como prescripciones o consejos sobre una práctica solamente evocada, o como un saber “transparente” que permanece implícito en la gestión del propio formador.

La gestión de F2, orientada por un modelo epistemológico constructivista que privilegia los momentos de exploración, se distingue por la ausencia de momentos para el trabajo con la técnica. Otro aspecto que también caracteriza su gestión es la ausencia de un saber didáctico objetivo y de los discursos teóricos didácticos que dotan de sentido a las tareas de esta naturaleza. Así, a pesar de los esfuerzos de F2 para reconstruir ciertas praxeologías docentes, lo que aparecen son organizaciones matemáticas en las que se privilegia la exploración y el momento tecnológico. Por su parte, las praxeologías didácticas se ven reducidas a un discurso (*logos)* sin práctica o a una práctica (del formador) sin el *logos* didáctico.

Algo similar ocurre en la gestión de F1, el formador con menos experiencia y quien acepta sin restricciones al “texto de saber”. Su gestión es la que sigue más fielmente los mandatos curriculares, es decir, orientado por un modelo epistemológico “constructivista” que da mayor énfasis a la resolución de problemas; la reconstrucción de las praxeologías matemáticas se basa casi invariablemente en la homología, pero el saber didáctico aparece como un saber objetivo y explícito. En este caso se plantean tareas donde se incluyen ciertas nociones didácticas y se gestionan mediante una especie de homología, es decir, cuando se plantean las tareas didácticas se gestionan momentos exploratorios, tecnológicos y de institucionalización didáctica. Además, estas tareas se ligan a una noción matemática específica.

Sin embargo, a pesar de sus intentos por reconstruir determinadas praxeologías didácticas, los momentos para el trabajo con las técnicas didácticas es la ausencia más notable. Este hecho es relevante porque sin posibilidades de acrecentar el dominio de estas técnicas, los estudiantes tendrán poca probabilidad de utilizarlas eficazmente. La ausencia de momentos para el trabajo con la técnica didáctica es un efecto de las restricciones que impone el tiempo legal de la enseñanza, es decir, el tiempo sugerido para desarrollar los cursos no es suficiente para gestionar los diversos momentos didácticos para el estudio de las nociones matemáticas y didácticas sugeridas. En este mismo sentido, el estudio de los números decimales es una parte del proceso que se ve determinada por el tiempo legal. En los tres procesos de estudio observados, es a los números decimales a los que se les dedica menor tiempo y número de tareas. En contraste, los significados de la fracción y las técnicas para operar con fracciones son las cuestiones que ocupan la mayor parte de los procesos de estudio.

Respecto de las praxeologías de formación que ponen en práctica los formadores, la de F4 es incompleta porque no se incluyen tareas didácticas en el proceso de estudio. Además, toda la actividad se desarrolla en el sistema didáctico *stricto sensu,* esto es, el profesor en formación nunca abandona su papel de alumno. Así, los elementos de una praxeología didáctica que le asignarían finalmente el papel de profesor, sólo aparecen como saber "transparente".

La utilización de la homología directa como técnica principal de formación, como lo hace F4, significa que no se acepta la existencia de un "saber didáctico" objetivo. Por otra pare, también indica que F4 asume que el formado puede aprender a dirigir un proceso de estudio sólo mediante la imitación de la actividad del formador. Si a esto se añaden las dificultades de F4 para gestionar adecuadamente los diferentes momentos didácticos, se infiere que el estudiante tendrá dificultades para construir técnicas didácticas que le permitan resolver las tareas "problemáticas" de su profesión. Esta situación es relevante si se considera que F4 es el formador con mayor experiencia y que la técnica que utiliza con mayor frecuencia, más que apoyarse en saberes provenientes de la didáctica, recibe una influencia de los saberes sedimentados en las escuelas normales, saberes que dan mayor importancia al estudio de las praxeologías matemáticas.

En el caso de F2, las características de su actividad permiten conjeturar que acepta la existencia de un "saber didáctico" que es necesario "transponer". Sin embargo, en su gestión este saber se desliga de cualquier elemento praxeológico, esto es, no aparecen tareas didácticas en las que el estudiante pueda probar la eficacia de sus técnicas, y sin este elemento resulta difícil gestionar adecuadamente otros momentos para un elemento didáctico. Luego, lo didáctico se presenta como una especie de consejos para la práctica, como técnicas sugeridas por el formador que se justifican por el uso que él hace de ellas.

En el caso de F1, quien tiene menos experiencia, resulta significativo observar que incluye un mayor número de elementos de una praxeología de formación que los otros formadores observados. En realidad, es el único que intenta gestionar diferentes momentos didácticos para el estudio del "saber didáctico". Un ejemplo de ello es la presencia de tareas didácticas específicas, de técnicas didácticas construidas por los formados y de momentos tecnológicos y de institucionalización para un elemento didáctico.

No obstante estas diferencias, lo común en los tres procesos de estudio observados es la serie de dificultades que los formadores tienen para "transponer" el saber didáctico. Una primera dificultad tiene que ver con aceptar o no la existencia de un saber de este tipo. Cuando no se acepta la existencia de ese tipo de saber, los formadores utilizan técnicas en las que se da énfasis a lo matemático y se deja el estudio de lo didáctico como una mera actividad de imitación. Empero, aun cuando se acepte la existencia de este saber, como se conjetura que ocurre en el caso de F2, otra fuente de dificultades es la conceptualización de la naturaleza de dicho saber, es decir, cuando se asume que el "saber didáctico" es solamente un saber especulativo sobre la práctica (como se ha observado en este caso, las técnicas de formación priorizan "los consejos" sobre la práctica).

Por otra parte, aun cuando se acepte la existencia de este saber y se considere como saber objetivo susceptible de "transponerse", existen dificultades ligadas a las técnicas adecuadas para realizar ese proceso. Es decir, el establecimiento de un equilibrio entre tareas matemáticas y didácticas, el diseño o la organización de los dispositivos de enseñanza para objetos didácticos y la construcción de técnicas adecuadas para gestionar momentos tecnológicos, teóricos y de institucionalización de un objeto didáctico son apenas algunas de las dificultades de los formadores cuando intentan "transponer" el saber didáctico, según se ha observado. Sin embargo, como lo señalan Bosch y sus colaboradores (2003), estas dificultades son una consecuencia del carácter poco elaborado de las praxeologías de formación espontáneas; por esta misma razón, la manera de superarlas pasa necesariamente por el desarrollo de una *teoría didáctica* que sirva como fundamento para diseñar y gestionar organizaciones praxeológicas viables.

3. Los profesores en formación y los saberes construidos

A pesar de que en los tres procesos de estudio observados los formadores dedican mayores esfuerzos a reconstruir las praxeologías matemáticas, los resultados no dan pie para el optimismo. Después de haber explorado la manera como los estudiantes resuelven tareas matemáticas, se ha visto que aún son muchos profesores en formación los que no son capaces de resolverlas adecuadamente. Los resultados muestran que en promedio la mitad de los estudiantes no pudieron resolver las tareas planteadas en el cuestionario y, lo que es más, sus errores son similares a los que cometen los niños en los mismos tipos de tareas. En tareas que requieren de una significación interna, esto es, en el trabajo con una técnica matemática aislada, se observó algo análogo que en aquellas referidas a la significación externa donde los estudiantes deben "aplicar" los conocimientos adquiridos. Estos resultados también son similares en tareas ligadas a nociones que tuvieron un mayor tiempo de estudio, como los significados de la fracción, y en aquellas que no ocuparon un lugar preponderante en el proceso de estudio, como las que se relacionan con los números decimales

En todos los casos, ya sean tareas para el estudio de la técnica o para la "aplicación de conocimientos", los resultados son similares: promedios cercanos a 50% de respuestas adecuadas. Sin posibilidades de resolver adecuadamente las tareas matemáticas que se sugieren para los niños de la escuela primaria, los profesores en formación tendrán dificultades para poner en práctica praxeologías didácticas que permitan la reconstrucción de los números racionales en la escuela primaria. Resulta evidente entonces la necesidad de valorar la pertinencia de los planteamientos del "texto de saber" y de las prácticas que los formadores desarrollan en el aula.

En ese sentido, es necesario enfatizar las diferencias observadas en las tareas que resolvieron los profesores en formación, esto es, a lo largo de los resultados presentados en el capítulo VI, se observó una tendencia: los estudiantes de uno de los grupos observados (el grupo C) obtienen mejores resultados; también es significativo observar que, por lo general, los estudiantes del grupo A obtienen los porcentajes más bajos de respuestas adecuadas. En estos resultados se muestran las bondades de la homología, ya que los profesores en formación que estudiaron las praxeologías matemáticas mediante un proceso basado en la homología son los que obtienen mejores resultados. No obstante, también los estudiantes de estos grupos obtienen resultados lejanos a los que de ellos se esperaba, por lo que sería ingenuo pensar que sólo con la implementación de la homología pudieran mejorarse.

En una perspectiva que haga justicia a la complejidad del acto de formación, es necesario pensar en las múltiples determinaciones sociales y culturales que tiene este proceso. Sólo se han analizado en este estudio las que derivan del “texto del saber”, de las representaciones sociales de los formadores y de las praxeologías de formación que éstos ponen en marcha.

4. Los alcances del estudio

En este estudio de investigación educativa se analizaron las praxeologías de formación que ponen en práctica tres formadores. Sin embargo, con base en los principios de la teoría antropológica didáctica, se observa que las prácticas de los formadores no toman su sustento principal de sus características individuales sino que son determinadas fundamentalmente por las restricciones que históricamente les han impuesto las instituciones. Es decir, más que analizar las prácticas individuales de **tres** formadores, se han analizado tres prácticas institucionales: la de un formador con larga experiencia, la de otro con experiencia regular y la de uno más que recién comienza a desempeñarse en este campo.

Los modelos epistemológicos observados y las prácticas que de ellos se derivan proporcionan un panorama general de lo que acontece en las aulas de las escuelas normales, aunque de antemano se sabe que se presentan particularidades en cada institución y en cada formador.

La homología directa y los deslizamientos didácticos como técnicas de formación que utilizan los formadores para “transponer” el saber didáctico se constituyen en invariantes de su acción y, por ende, de la actividad didáctica que se desarrolla en las escuelas normales. En ese sentido, la homología ampliada es una situación de excepción.

Por otra parte, las dificultades que las escuelas normales han mostrado para ser evaluadas y la resistencia natural de los formadores para transformar sus representaciones indican que la situación imperante *no* se modificará en un periodo breve durante los próximos años.

5. A manera de cierre

El objetivo central del estudio de investigación educativa reportado en esta tesis de doctorado era dar cuenta de lo que ocurre en las aulas una vez que una reforma curricular se ha puesto en marcha. Específicamente, se trataba de dar cuenta de los saberes o praxeologías didácticas puestos en juego, de los momentos didácticos “vividos”, de los contratos celebrados, de las técnicas de formación que se utilizan y de los saberes que al final de la cadena transpositiva quedan en los estudiantes.

Los datos obtenidos y los análisis de éstos permitieron esclarecer diversos procesos de formación de profesores para la enseñanza de las matemáticas que se viven en las escuelas normales y la influencia que el “texto de saber” y las representaciones sociales tienen sobre ellos. Este esclarecimiento conducirá en parte a cambiar la idea dominante de que todas las dificultades para modificar las relaciones de formación de profesores surgen de factores externos al aula.

Con los resultados expuestos en esta tesis de doctorado hemos dado cuenta de que para transformar los procesos de formación de profesores no basta con modificar las condiciones materiales de las instituciones, tampoco con introducir un nuevo “texto de saber”: además de estos elementos es necesario transformar las representaciones y las prácticas de los formadores. Para ello, es necesario modificar nuestra perspectiva acerca de la manera como una reforma educativa puede traducirse en prácticas efectivas. Es decir, es necesario considerar a los formadores como sujetos que se aproximan de diferentes maneras a un nuevo saber y a nuevas prácticas; esto significa realizar esfuerzos institucionales para modificar la formación (profesionalización) y actualización (educación continua) de los formadores. En la planeación de esos esfuerzos se debe tomar en cuenta al formador como un sujeto cuya historia didáctica le provee de determinadas representaciones y saberes que influyen en la manera como se desenvuelva en la puesta en marcha de una reforma curricular.

BIBLIOGRAFÍA

Abric, Jean-Claude (1994) “L’organisation interne des représentations sociales: système central et système périphérique” en: *Structures et transformations des représentations sociales*. Textes de base en sciences sociales. Delachaux et Niestlé, Lausane, Suize, pp. 73-84.

Aguayo, Luis Manuel (2000) *Matemáticas y educación normal. Los “habitus” en torno a una ciencia.* México, UAZ-ENMAC-ICZ.

Aguilera R. Alma Delia. (2001) “El papel de los sistemas de representación gráfica en los procedimientos que utilizan los docentes para resolver problemas matemáticos que involucran fracciones” en: *Memorias del VI Congreso Nacional de Investigación Educativa.* México.

Aline, Robert y Jacqueline Robinet. (1989) *Representaciones de los profesores de matemáticas sobre las matemáticas y su enseñanza.* Cuadernos del DIDIREM Núm 1, IREM. Universidad de París VII. Trd. Alicia Ávila.

Arnaut, Alberto. (1989) *Historia de una profesión. Los maestros de educación primaria en México, 1887-1994.* S.E.P.- CIDE. Biblioteca del normalista, México.

Arrieta, Óscar. (1997) “La educación normal. Pasado, presente y futuro” en: *La educación ante los retos del cambio.* SEC, Zacatecas, México.

Artigue Michéle. (1995) “El lugar de la didáctica en la formación de profesores” en, *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* Iberoamérica, México, pp. 7-23.

Ávalos, Alejandra y Rodolfo Méndez (1997). “La formación no institucionalizada de los formadores a través de la circulación de saberes docentes” en: *Memorias del IV Congreso Nacional de Investigación Educativa.* México.

Ávila, Alicia. (1999) “Enseñar a través de la resolución de problemas: Dificultades, obstáculos y efectos de una transposición” en: *Memorias del VII Simposio Internacional en Educación Matemática ELFRIEDE WENZELBURGER.* Iberoamérica, México.

------------------ (2001) *La experiencia matemática en la educación primaria. Estudio sobre los procesos de transmisión y apropiación del saber matemático escolar.* Tesis Doctoral, UNAM, México.

------------------- (2001) “Algunas realizaciones de la reforma a las matemáticas” en: *Memorias del VI Congreso Nacional de Investigación Educativa.* México.

Azcárate Goded, Pilar. (2000) “Los futuros maestros ante el estudio de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas” en: *Investigación en la escuela No. 42.* Díada, Sevilla, pp. 45-54.

Ball, D. L. (1990) “Prospective Elementary and Secondary Teachers. Understanding of Division” en: *Journal for Research in Mathematics Education. Vol 21, No. 2.* USA, pp. 132-144.

Bartolomé, Olga y Dilma Fregona (2003). “El conteo en un problema de distribución: una génesis posible en la enseñanza de los números naturales” en*: Enseñar matemáticas en el nivel inicial y el primer ciclo de la EGB.* Piados, México, pp. 131-162.

Becerra Beltrán, Edgar. (2001) “Trabajo en equipos: la opinión de los maestros” en: *Memorias del VI Congreso Nacional de Investigación Educativa.* México.

Blanco Nieto, Lorenzo J. (1996) “Aprender a enseñar matemáticas: tipos de conocimiento” en: *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la Educación Matemática.* Comares, Granada, pp. 199-221.

Block, David y Diana Solares (2001) “Las fracciones y la división en la escuela primaria: Análisis didáctico de un vínculo”, en: *Educación Matemática.* Vol. 13, No. 2 pp. 5-30. Iberoamérica, México.

Bodin, Antoine. (1994) “Un observatoire du système d’enseignement des mathématiques. La situation de l’observatoire EVAPM” en: *Vingt ans de didactique des mathématiques en France.* La pensée sauvage, Grenoble Francia, pp. 395-402.

Bonilla, Elisa et al. (1993) *La investigación Educativa en los Ochenta. Perspectiva para los Noventa.* Cuaderno 10 del Congreso Nacional de Investigación Educativa, México.

Bosch, Mariana e Ives Chevallard (1999) »La sensibilité de l’activité mathématique aux ostensifs. Objet d’étude et problématique » en, *Recherches en didactique des mathématiques Vol. 19/1.* La pensée sauvage, Grenoble Francia, pp. 77-123.

Bosch, Mariana y Joseph Gascón. (2002) “Organiser l’étude 2. Théories & Empiries” en: *Actes du 11e École d’Été de Didactique des Mathématiques* (Version électronique).

Bosch, Mariana, Lorena Espinoza y Joseph Gascón (2003) “El profesor como director de procesos de estudio: Análisis de organizaciones didácticas espontáneas” en: *Recherches en didactique des mathématiques Vol. 23/1.* La pensée sauvage, Grenoble Francia, pp. 79-135.

Bourdieu, Pierre (1998). *Capital cultural, escuela y espacio social.* Siglo XXI Editores, Madrid.

Bravo Tapia, José María et al. (1999) “La formación de profesores de matemáticas como actividad investigativa en Matemática Educativa” en: *Memorias del VII Simposio Internacional en Educación Matemática ELFRIEDE WENZELBURGER..* Iberoamérica, México.

Brousseau, Guy. (1986) *Théorisation des phénomènes d’enseignement des mathématiques.* Thèse d’état. Université de Bordeaux 1.

-------------------- (1994) “Perspectives pur la didactique des mathématiques” en: *Vingt ans de didactique des mathématiques en France.* La pensée sauvage, Grenoble Francia, pp. 51-66.

------------------------ (1995) “L’enseignant dans la Théorie des situations didactiques” VII École et Université d’Eté de Didactique des Mathématiques. Actes de l’École d’Eté. 22-31 de agosto de 1995. pp. 3-45.

------------------- (1998) *Théorie des situations didactiques. Textes rassemblés et préparés par Nicolas Balachef, Martin Cooper, Rosamund Sutherland, Virginia Warfiled.* La Pensée Sauvage, Grenoble.

------------------- (2000) “Educación y didáctica de las matemáticas” en: *Revista Educación Matemática Vol 12 No. 1.* Iberoamérica, México.

Brousseau, Guy y Julia Centeno. (1991) “Rôle de la mémoire didactique de l’enseignant” en: *Recherches en didactique des mathématiques Vol. 11 no. 2.3.* La pensée sauvage, Grenoble Francia, pp. 167-210.

Butlen, Denis y Marie-Lise Peltier. (1994) *Enseigner la didactique des mathématiques aux futurs professeurs d’école.* Document de travail pour la formation des enseignants. Université Paris 7-IREM.

Carpenter, T. Fennema, E. Peterson, P. & Carey D. (1988) “Teachers’ pedagogical content knowledge of students’ problem solving in elementary arithmetic” in: *Journal for Research in mathematics Education, 19 (5)* pp. 385-401

Carrillo, José, Moisés Coriat y Hélia Oliveira. (1998) ”Teacher Education and investigation into teachers’ knowledge” en: *On research in teacher Education. From a Study of Teaching Practices to Issues in Teacher Education.* First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 1). Osnabrück, Germany, August 27-31, pp. 99-145.

Carrol, Thomas. (1985) *La observación sistemática para la formación de docentes.* University off Buffalo, N.Y. Trd. Carlos García González.

Castoriadis, Corneliuis (1989). *La institución imaginaria de la sociedad. Vol 2. El imaginario social y la institución.* Tusquets Editores, Barcelona.

Castro Martínez, Enrique y Encarnación Castro Martínez. (1996) “Conocimiento de contenido pedagógico de los estudiantes de Magisterio sobre la estructura multiplicativa” en: *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la Educación Matemática.* Comares, Granada, pp. 119-141.

Centeno Pérez, Julia. (1997) *Números decimales. ¿Por qué? ¿Para qué?* Ed. Síntesis Colección Matemáticas: cultura y aprendizaje, Madrid.

Chevallard, Ives. (1991) *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné.* La pensée Sauvage, Grenoble.

-------------------- (1994) “Nouveaux objets, nouveaux problèmes en didactique des mathématiques” en : *Vingt ans de didactique des mathématiques en France.* La pensée sauvage, Grenoble Francia, pp. 313-320.

-------------------- (1997) *Les savoirs enseignés et leurs formes scolaires de transmission : un point de vue didactique.* Communication au Colloque International *Savoirs scolaires, interactions didactiques et formation des enseignants* (Marseille, 28-30 avril)

--------------------- (1998a) “Familière et problématique, la figure du professeur” en : *Cinq études sur le thème de l’enseignement.* La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 17-54.

--------------------- (1998b) *Sur l’inadéquation de la formation première des professeurs de mathématiques de l’enseignement secondaire français.* Texte rédigé en vue de la conférence préparatoire á ICMI *Study on the Teaching and Learning of Mathematics at University Level* (Singapour, 8-12 décembre).

-------------------- (1999a) “La recherche en didactique et la formation des professeurs : problématiques, concepts, problèmes” en, *Actes de la Xe École d’Été de Didactique des Mathématiques,* Houlgate, Francia.

--------------------- (1999b) « L’analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique » en, *Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol.* 19(2) La Pensée Sauvage, Grenoble pp. 221-226

--------------------- (2000) *Individualisation de la formation ou apprentissage collectif des savoirs ?* Notes pour un exposé à la libraire Païdos. Marseille (en ligne)

--------------------- (2001) “Aspectos problemáticos de la formación docente” (en ligne) *XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SI-IDM),* Huesca.

------------------- (2002a) “Organiser l’étude. 1. Structures & Fonctions” en: *Actes du 11e École d’Été de Didactique des Mathématiques* (Version électronique).

------------------- (2002b) “Organiser l’étude. 3. Ecologie & Régulation” en : *Actes du 11e École d’Été de Didactique des Mathématiques* (Version électronique).

Chevallard, Ives, Marianna Bosch y Josep Gascón. (1998) *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* S.EP. Cooperación Española, México.

Civil, Marta. (1996) “Pensando sobre las matemáticas y su enseñanza : Una experiencia con estudiantes para profesores de primaria” en: *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la Educación Matemática.* Comares, Granada, pp. 173-197.

Comité Latinoaméricano de Matemática Educativa. (1997) *Actas de la Undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.* CLAME, México.

Contreras, Luis Carlos. (1999) *Concepciones de los profesores sobre la resolución de problemas.* Tesis doctoral, Universidad de Huelva, España.

Contreras, Luis Carlos y José Carrillo (2000) “Formación inicial de los maestros y resolución de problemas” en: *La Gaceta Vol. 3 No. 6. (Versión electrónica).* Universidad de Huelva, pp.1-11.

Contreras, Luis Carlos. (2001) “Una experiencia en la formación inicial de maestros en España, en el ámbito de la Educación Matemática” en: *Educación en Ciencias Vol. 4 No. 12.* Almería, España, (Versión electrónica)

Cooney Thomas J., Barry E. Shealy y Bridget Arvold. (1998) “Conceptualizing belief de structures of preservice secondary mathematics teachers” en: *Journal for Research in Mathematics Education, Vol 29, No. 3.* USA, pp. 306-333.

Coppe, Sylvie, Christiane Rolet y Claude Tisseron (2002) “Etude de routines et régulations dans la pratique professionnelle d’un professeur des écoles” en : *Actes du 11e École d’Été de Didactique des Mathématiques* (Version électronique).

Dávila, Martha. *El reparto y las fracciones,* en Revista Educación Matemática (1), vol. 4, Iberoamérica, México, 1992, pp. 32-45.

De Ibarrola, María. (1998) “La formación de los profesores de educación básica en el siglo XX” en: *Un Siglo de educación en México II.* FCE-CONACULTA, México.

Díaz Barriga, Ángel (1995)

Douady, Régine. (1995) “La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento” en: *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* Iberoamérica, México, pp. 61-96

Duveen, Gerard y Barbara Lloyd (2003) “Las representaciones sociales como una perspectiva de la psicología social” en: *Representaciones sociales. Problemas teóricos y conocimientos infantiles*. Gedisa, Barcelona, pp. 29-40

Elizondo, Aurora. (1988) *La Universidad Pedagógica Nacional. ¿Un nuevo discurso magisterial?* Colección Documentos de Investigación Educativa. UPN, México.

Ensor, Paula. (2001) “From preservice mathematics teacher education to beginning teaching: A study in recontextualizing” en: *Journal for Research in Mathematics Education, Vol 32, No. 3.* USA, pp. 296-320.

Ericson, Frederick. (1997) “Métodos cualitativos de investigación sobre la enseñanza” en: *La investigación de la enseñanza II. Métodos cualitativos y de observación.* Paidós Ecuador, México.

Everton, Carolyn M. y Judith L. Green. (1997) “La observación como indagación y método” en: *La investigación de la enseñanza II. Métodos cualitativos y de observación.* Paidós Ecuador, México.

Fennema, E. Y Loef, M. F. (1992) “Teachers’ knowledge and is impact” en: D. A. Grows *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* New York: Macmillan.

Figueroa Millán, Lilia M. (2000) “La formación de docentes en las escuelas normales: entre las exigencias de la modernidad y las influencias de la tradición” en: *Revista latinoamericana de estudios educativos Vol. XXX, No. 1.* Centro de Estudios Educativos, México, pp.117-142.

Farr, Robert M. (2003) “De las representaciones colectivas a las representaciones sociales: ida y vuelta” en: *Representaciones sociales. Problemas teóricos y conocimientos infantiles*. Gedisa, Barcelona, pp. 153-176.

Flores Martínez, Pablo. (1996) “Creencias y concepciones de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje” en: *Revista Educación Matemática Vol 8 No. 3.* Iberoamérica, México.

Flores, Rosa del Carmen. (2002) *El conocimiento matemático en problemas de adición y sustracción: Un estudio sobre las relaciones entre conceptos, esquemas* *y representaciones.* Tesis Doctoral, Centro de Ciencias Sociales y Humanidades, UAA, México.

Fregona, Dilma. (1999) "La didáctica de la matemática en la formación de profesores de matemáticas" en: *Revista Educación Matemática Vol. 11 No. 2.* Iberoamérica, México.

Fuenlabrada, Irma y Humberto de León. (1997) "Obstáculos epistemológicos para comprender el significado de cociente de fracciones. Experiencia con profesores" en: *Memorias del IV Congreso Nacional de Investigación Educativa.* México.

Gellert, Uwe. (1999) "Prospective Elementary teacher's comprensión of mathematics instruction" en: *Education Studies in Mathematics. An international Journal Vol. 37 No. 1.* Netherlands, pp. 23-43.

Gómez, Pedro (2001) "Conocimiento didáctico del profesor y organizadores del currículo en matemáticas" en: *Congreso Nacional de Didácticas Específicas. Las didácticas de las áreas curriculares en el siglo XXI, Vol. 2.* Grupo Editorial Universitario, Granada, pp. 1245-1258. On line

González, Fredy. (2000) "Agenda latinoaméricana de investigación en educación matemática para el siglo XXI" en: *Revista Educación Matemática Vol 12 No. 1.* Iberoamérica, México.

Guzmán Zasueta, María Luisa. (2000) "Formación, concepciones y prácticas de los profesores de Matemáticas" en: *Revista Educación Matemática Vol. 12, No. 2.* Iberoamérica, México, 139-140

Gutiérrez, Ángel y Adela Jaime. (1996) "Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de Magisterio" en: *El proceso de* *llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la Educación Matemática.* Comares, Granada, pp.143-170.

Houdement, Catherine. (1995) *Projets de formation des maîtres du premier degré en mathématiques: programmation et stratégies.* Thèse de doctorat. IREM VII, Paris.

Houdement, Catherine y Alain Kuzniak. (1996) “Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques” en, *Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 16/3.* La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 289-322

--- (2000) “Formation des maîtres et paradigmes géométriques” en, *Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 20/1.* La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 89-15

Huraux-Masselot, Pascal (2000). *De la formation initiale en didactique des mathématiques (en centre I.U.F.M.) aux pratiques quotidiennes en mathématiques, en classe, des Professeurs d’Ecole (une étude de cas).* Thèse de Doctorat. Université París 7.

Josse, Elise y Aline Robert. (1993) “Introduction de l’homothétie en seconde, analyse de deux discours de professeurs” en : *Recherches en didactique des mathématiques Vol. 13 no.1.2* La pensée sauvage, Grenoble Francia, pp. 119-154.

Kuzniak, Alain. (1994) *Etude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres du premier degré.* Thèse de doctorat, IREM VII, Paris.

Llinares, S. Y V. Sánchez. (1996) “Comprensión de las nociones matemáticas y modos de representación. El caso de los números racionales en estudiantes para profesores de primaria” en: *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la Educación Matemática.* Comares, Granada, pp. 95-118.

Llinares, Salvador y Ma. Victoria Sánchez. (1997) *Fracciones.* Ed. Síntesis, Colección Matemáticas: cultura y aprendizaje. Madrid.

Mancera, Eduardo. (1993) “Problemas, maestros y la resolución de problemas” en: *Revista Educación Matemática Vol. 5 No. 3.* Iberoamérica, México.

Mancera, Eduardo y Luz Manuel Santos Trigo. (1993) “¡Qué piensan los maestros sobre la enseñanza relacionada con resolución de problemas?” en: *Revista Educación Matemática Vol. 13 No. 1.* Iberoamérica, México, pp. 31-50.

Marková, Ivana (2003). “La presentación de las representaciones sociales: diálogo con Serge Moscovici” en: *Representaciones sociales. Problemas teóricos y conocimientos infantiles*. Gedisa, Barcelona, pp. 111-152.

Mercado, Ruth. (2000) *La implantación del Plan 1997 de la Licenciatura en Educación Primaria. Un estudio sobre el primer semestre.* S.E.P. México.

Mercier, Alain. (1995) “La biographie didactique d´un élève et les contraintes temporelles de l’enseignement” en: *Recherches en didactique des mathématiques Vol. 15/1.* La pensée Sauvage.

Mewborn, Denise S. (1999) “Reflective thinking among preservice elementary mathematics teachers” en: *Journal for Research in Mathematics Education, Vol 30, No. 3.* USA, pp. 316-341.

Mochón, Simón (s/f) *Fracciones : algo más que romper un todo.* Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV, México.

Moreno Armella, Luis. (1997) “Estudio sobre las concepciones de los maestros de primaria acerca de la matemática escolar y la medición” en : *Memorias del IV Congreso Nacional de Investigación Educativa.* México.

Moreno Sánchez Lucía. (1997)*Estudio sobre las concepciones de los maestros de primaria acerca de la matemática escolar y la medición.* Ponencia presentada en el IV Congreso Nacional de Investigación Educativa, México, 1997.

Moscovici, Serge y Georges Vignaux (1994) “Le concept de Themata” en : *Structures et transformations des représentations sociales*. Textes de base en sciences sociales. Delachaux et Niestlé, Lausanne, Suize, pp. 25-72.

Neyret, Robert. (1995) *Contraintes et déterminations des processus de formation des enseignants : nombres décimaux, rationnels et réels dans les Instituts Universitaires de Formation des Maîtres.* Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier-Grenoble 1.

Nesbit Vacc, Nancy y George W. Bright. (1999) “Elementary preservice teacher’s changing beliefs and instructional use of children’s mathematical thinking” en : *Journal for Research in Mathematics Education, Vol 30, No. 1.* USA, pp. 89-110.

Nicol, Cynthia. (1999) “Learning to teach mathematics : Questioning, listening, and responding” en : *Educational Studies in Mathematics. An international Journal Vo. 37 No. 1.* Netherlands, pp. 45-65.

Peltier, Marie-Lise. (1995) *La formation initiale en mathématiques des professeurs d’école: « entre la conjoncture et lëternité » Etude des sujets de concours de recrutement et contribution á la recherche des effets de la formation sur les professeurs stagiaires.* Thèse de doctorat. l’IREM Paris VII.

Pézard, Monique (1985) *Une expérience d´enseignement de la proportionnalité aux élèves instituteurs.* Thèse de 3éme cycle, Université de Paris 7.

Pope, Maureen. (1991) “La investigación sobre el pensamiento del profesor : una construcción personal” en *Procesos de enseñanza y aprendizaje.* Aiqué, Buenos Aires, pp. 51-82.

Portugais, Jean. (1995) *Didactique des mathématiques et formation des enseignants.* Exploration Peter Lang, Suisse.

Portugais, Jean y Jean Brun. (1994) “De futurs instituteurs formés á la didactique des mathématiques ? Un étude de cas” en: *Vingt ans de didactique des mathématiques en France.* La pensée sauvage, Grenoble Francia, pp. 283-290.

Rico, Luis, María José González-López e Isidoro Segovia. (2000) “Representación y resolución de problemas geométricos por profesores de matemáticas en formación” en: *Revista Educación Matemática Vol. 12 No. 3.* Iberoamérica, México.

Ruiz López, Francisco. (2001) “La tabla –100: representaciones geométricas de relaciones numéricas. Un estudio con profesores de primaria en formación” en: *Educación Matemática Vol. 13, No. 2.* Iberoamérica, México.

Sánchez, V. Y Llinares S. (1996) “Prácticas escolares habituales y situaciones de resolución de problemas: el caso de Carlota” en: *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la Educación Matemática.* Comares, Granada, pp. 223-247.

S.E.P. (1994) Libro para el Maestro. Matemáticas. Cuarto Grado. México.

S.E.P. (1996a) *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Lecturas.* México.

S.E.P. (1996b) *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Taller para maestros I.* México.

S.E.P. (1996c) *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Taller para maestros II.* México

S.E.P. (1997a) *Plan de estudios. Licenciatura en Educación Primaria. Programa para la transformación y el fortalecimiento académicos de las escuelas normales. Versión final para consulta.* México.

S.E.P. (1997b) *Libro para el maestro. Matemáticas. Educación Secundaria.* México.

S.E.P. (1998) *Iniciación al Trabajo Escolar. Programa y materiales de apoyo para el estudio.* México.

S.E.P. (1999a) *Matemáticas y su Enseñanza I. Programa.* México.

S.E.P. (1999b) *Matemáticas y su Enseñanza II. Programa.* México.

S.E.P. (2000) *Lineamientos para la organización del trabajo académico durante el séptimo y octavo semestres. Licenciatura en Educación Primaria. Plan 1997.* México, 2000.

Sierra, Modesto y Luis Rico. (1996) “Contexto y evolución histórica de la formación en Matemáticas y su Didáctica de los profesores de primaria” en: *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la Educación Matemática.* Comares, Granada, pp. 39-62.

Simon, M. A. (1990) "Prospective elementary teachers ? knowledge of division" en: *Proceeding Fourteenth PME Conference.* México.

Simon, M. A. (1993) "Prospective Elementary teachers knowledge of division" en: *Journal of Researches in Mathematics Education Vol. 24, No. 3.* USA, pp. 233-254.

Shulman, L.S. (1986) "Paradigms and research program in the study of teaching: A contemporary perspective, in, M.C. Wittrock (Ed), *Handbook of research on teaching.* New York, Macmillan.

Tanguy, Lucie. (1995) "Questions de sociologue aux didacticiens sur les savoirs professionnels et leur enseignement" en: Différents types de savoirs et leur articulation. La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 81-92.

Vergnaud, Gerard. (1983) "Didactique et acquisition du concept de volume" en: *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 4/1

-------------------- (1991) "La théorie des champs conceptuels" en : *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 10/2-3.

--------------------- (1994) "Le rôle de l'enseignant á la lumière des concepts de schème et de champ conceptuel" en: *Vingt ans de didactique des mathématiques en France.* La pensée sauvage, Grenoble Francia, pp. 177-191

Watson, Anne. (2000) "Mathematics teachers acting as informal assessors: practices, problems and recommendations" en: *Educational Studies in Mathematics. An international Journal Vo. 41, No. 1,* Netherlands, pp. 69-91.

ANEXO N0. 1

ENTREVISTA NÚMERO 1

DATOS PERSONALES:

1. **Edad:** 24
2. **Nivel de Escolaridad:** Licenciatura en Educación Primaria (Normal) y estudios actuales de Maestría en Educación
3. **Años de servicio en educación básica**: 2 y medio
4. **Años de servicio en la formación**: 1 y medio
5. **Otro empleo**: no
6. **Asignaturas que impartía en el plan 84**: Ninguna
7. **Asignaturas que ha impartido en el plan 97:** Estrategias para el estudio y la comunicación y Las matemáticas y su enseñanza

Entrevistador: ¿Cuál es en su opinión la diferencia fundamental entre el plan de estudios anterior y el actual?

Maestro: Bueno, que el plan de estudios actual tiene un mayor acercamiento a la práctica docente, con el anterior se trataba de formar en el estudiante un espíritu de investigación pero dejaba de lado muchos aspectos sobre de la didáctica, no tenían ese preciso acercamiento que les diera a conocer los elementos necesarios para después desarrollar la práctica.

E: ¿Cuál de estos planes está más próximo a su visión sobre formación de docente?

M: El 97

E: ¿Por alguna razón en particular?

M: Precisamente porque maneja este nuevo enfoque sobre didáctica, si que hace bueno que se pueda tener mayor conocimiento sobre lo que realmente se va a hacer en la escuela primaria.

E: ¿Y particularmente sobre la tarea de enseñar matemáticas cuál cree que es usted la diferencia fundamental entre ambos planes?

M: La diferencia fundamental radicaría principalmente en ese acercamiento que se tiene nuevamente con la práctica, este otro es un poquito más teórico y el plan 97 tiene mayor acercamiento con la práctica.

E:¿Cuál es su opinión respecto de la tutoría externa que en este nuevo plan se les brindará a los estudiantes?

M: Bueno aquí tienen nuevamente los alumnos mayores elementos porque tienen la oportunidad de acercarse con aquellas personas que, bueno de una forma u otra les dan los elementos de la experiencia si, aquí en la escuela a lo mejor pudiéramos retomar lo que son los elementos teóricos y bueno allá las personas que han vivido más de cerca el grupo han tenido más contacto con esa forma de trabajo en la escuela bueno les puede dar mejores alternativas para desempeñar su trabajo.

E: ¿Nos podría decir cuáles son en su opinión los conocimientos necesarios para poder enseñar matemáticas de una forma adecuada?

M: Bueno, los conocimientos necesarios por un lado son básicamente el conocimiento de la matemática, conocer, saber realmente el significado de los diferentes conceptos matemáticos que se están abordando y por otro lado bueno pues el conocimiento didáctico en sí, cómo se van a enseñar esos conceptos.

E: ¿Hay alguno de esos dos conocimientos que es más importante?

M: Creo que deben ir a la par de una forma equilibrada.

E: Sobre los programas de estudio, usted nos ha dicho que usted cree que hay como dos conocimientos fundamentales que debe saber un maestro para enseñar matemáticas, ¿usted cree que esos dos conocimientos están incluidos en el programa de estudios de la asignatura matemáticas y su enseñanza?

M: Están pero en menor grado diría que el de didáctica porque se enfoca un poquito más a lo que son los contenidos, pero se deja de lado no sé la propuesta de nuevas actividades que se pudieran implementar en la escuela primaria.

E: ¿Quiere decir que no hay un buen equilibrio entre estos dos componentes?

M: No, un buen equilibrio no lo hay debería de haberlo pero se manejan algunas situaciones como ver el libro de texto, estudiar el plan y programas de estudio pero que diera no sé algunas opciones sobre qué actividades se pudieran realizar o cuál sería la mejor forma de enseñar matemáticas pues no lo trabaja ampliamente.

E: ¿Y el contenido matemático le parece suficiente el que está incluido en los programas de estudio?

M: Sí es suficiente pero bueno aquí entraría nuevamente un problema que sería el tiempo para poder abordar todos esos contenidos.

E: ¿Le parecen muchos contenidos y poco tiempo o viceversa?

M: Sí, son muchos contenidos y poco tiempo.

E: Si hay ese desequilibrio entre contenidos y tiempo ¿usted cree que sería adecuado eliminar algunos contenidos matemáticos del programa?

M: Pudiera ser que sí fuera necesario debido a que se deben de contemplar otros aspectos como las prácticas, las observaciones, bueno todo eso de una forma u otra limita el tiempo, además en el programa de matemáticas viene especificado sesión por sesión cada uno de los contenidos que se deben de trabajar y no se contemplan básicamente esos periodos de observación, de prácticas que se dejan, se contemplan nada más un día, una sesión de observación y práctica al final de cada bloque, entonces no queda mucho tiempo para poder abordar.

E: ¿Y si de usted dependiese cuáles eliminaría?

M: Pues creo que trataría de eliminar, bueno no digamos uno de manera específica sino algunos de cada uno de los bloques pero que no fueran tan... aquellos que fueran más bien para ejercitar.

E: ¿En el curso de su experiencia con esta asignatura ha dejado por cualquier razón de trabajar algunos contenidos?

M: Sí, algunos han sido precisamente los significados de las fracciones, no se ha dejado digamos de trabajar cuáles son los significados, pero no se ha profundizado totalmente sobre ellos. otro que también se deja mucho es el de geometría y el de procesos de cambio que vienen siendo los últimos, entonces igual por el tiempo no se abarcan.

E: ¿Y sobre las secuencias de los ejes o de las unidades temáticas del programa cuál es su opinión? ¿están secuenciados adecuadamente? la secuencia no le parece la adecuada?

M: La secuencia creo que es sí está bien, porque pareciera ser que va de lo menos difícil a lo más complejo, pero nuevamente aquí hay otro problema cuando van los alumnos a practicar, digamos que nada más hemos trabajado los números su relación y sus operaciones y hay quienes empiezan a practicar digamos con fracciones o con otro bloque que no se ha podido abordar acá, entonces esa es la dificultad

E: ¿Usted ha modificado esa secuencia?

M: Sí, se han tenido que abrir espacios donde bueno principalmente los contenidos con los cuales tienen que ir a practicar se ha tratado bueno de dar una explicación o al menos general o dar un tratamiento específico sobre ese contenido.

E: ¿Nos podría dar un ejemplo de una de esas modificaciones?

M: Sí, en segundo semestre, bueno se trabaja en tercer semestre que son matemáticas y su enseñanza segunda parte estábamos trabajando lo que fue el bloque de medición sí, entonces ellos se fueron a su primera práctica y para esto bueno se tuvo que hacer una modificación tratando de ver algo sobre las fracciones en el contexto de reparto, como su significado sí.

E: ¿Estas modificaciones son frecuentes en el desarrollo del curso?

M: Generalmente se presentan cuando es periodo de prácticas entonces están relacionadas con eso.

E: Hablando de los planes de estudio, ¿le parece a usted que en otras asignaturas de este mismo plan existen conocimientos que ayudan a enseñar matemáticas?

M: Sí, por ejemplo pudiera ser geografía sí es uno de ellos, historia bueno principalmente en ellos se trabaja igual no, los números, su relación y sus operaciones, el tratamiento de la información cuando se trata de analizar datos estadísticos a través de la historia, no sé alguna otras, también medidas que se analizan en geografía entonces sí, sí está relacionado con las matemáticas.

E: ¿Y durante las prácticas, le parece que los estudiantes aprenden algo que les sirva posteriormente para enseñar matemáticas?

M: Sí, bueno al principio cuando ellos van a sus observaciones encuentran... en ocasiones, no de manera general pero hay ciertos desfases entre lo que se les comenta aquí dentro del aula y lo que ellos están percibiendo allá en el grupo de práctica sí, pero ya al momento de practicar bueno ya hacen más explícito ese conocimiento matemático empiezan a ver ellos cuáles son las dificultades, de echar en práctica lo que se está viendo aquí y bueno todos esos errores que en ocasiones ellos manifiestan sí, o viven en la práctica les sirven nuevamente para retroalimentar su formación.

E: ¿Cuál es su opinión sobre el tratamiento que se le da en los programas a la multiplicación o estructuras multiplicativas.

M: Bueno a la multiplicación es algo muy importante pero desafortunadamente se trabaja dentro de un bloque que maneja las cuatro operaciones: la suma, la resta, la multiplicación y la división, no hay un tratamiento exclusivo para la multiplicación y esto hace nuevamente que se vea de manera muy superficial.

E: ¿A cuál de las operaciones es a la que regularmente usted de otorga más tiempo en sus clases?

M: Pues sería a la multiplicación y a la división debido a que... bueno como que se percibe que es un poco más compleja que la suma y la resta. en estas otras bueno la dificultad que tiene en un primer momento es sobre como dar tratamiento a los errores de los alumnos sí, pero sí generalmente sería multiplicación y división.

E: ¿Hay en los materiales de los maestros ciertas actividades para que usted trabaje la multiplicación con las estudiantes de las normales, le parecen adecuadas Las estrategias propuestas?

M: Sí, bueno en lo personal si me parecen adecuadas, pero pues nuevamente vuelvo a lo mismo, hay ocasiones en que no se alcanza a poderlas abordar todas.

E: ¿Le parecen suficientes?

M: Sí, son suficientes.

E: ¿Ha seguido usted al pie de la letra o usted ha modificado o creado sus propias estrategias para trabajar con la multiplicación?

M: Bueno se han tenido que hacer algunas modificaciones no se puede seguir exactamente al pie de la letra debido a que en ocasiones surgen algunas preguntas o bien algunas inquietudes de quienes ya han observado como se trabaja la multiplicación, entonces se trata se abordar esas expectativas que se tienen en el momento y se tienen que hacer modificaciones.

E: ¿Podría usted recordar la estrategia que más resultado le ha dado para trabajar la multiplicación con sus alumnos?

M: Bueno, ha sido precisamente ver de que manera se pueden trabajar esos contenidos, sí digamos plantearles un problema de multiplicación y que entonces ellos lo resuelvan sí, y ver las diferentes estrategias que ellos mismos resuelven para después confrontarla con la que los niños pueden hacer.

E: ¿Y cuál estrategia le ha dado menos resultado?

M: Bueno como es también la primera vez que voy a trabajar con primer semestre precisamente con multiplicación no lo he trabajado todavía de manera sistemática este ejemplo anterior bueno fue nuevamente en una ocasión que en tercer semestre se tuvo que trabajar debido a que iban a trabajar con ese contenido, entonces no.

E: ¿Le parece que la multiplicación está bien ubicada en la secuencia del programa?

M: Está bien ubicado, pero en ocasiones creo que sería necesario darles un lugar específico a cada una de las cuatro operaciones y no manejarlas como un solo bloque.

E: ¿Ha modificado usted esa secuencia?

M: Bueno hasta ahorita no he trabajado todavía bien con ella, entonces pues no he hecho todavía ninguna modificación, pero igual a lo mejor se va a tener que hacer alguna en el momento en que ellos vayan a practicar y si surge alguna dificultad precisamente con la multiplicación. y que no sea tan firme digamos como la suma y la resta, entonces si se tendría que hacer alguna modificación.

E: ¿Ya conocía usted anteriormente la propuesta para enseñar matemáticas que se incluye en los programas?

M: La verdad la conozco a raíz de que se empieza a trabajar con el plan 97 porque ya se empieza a dar esa relación entre la formación de maestros y la educación básica entonces es cuando lo empiezo a ver más recientemente. anteriormente con el plan 84 si lo había visto pero digamos que no había una comprensión, no había un manejo tan adecuado de este nuevo enfoque porque nada más, bueno se abordaba uno a los contenidos y pero se dejaba un poquito fuera el enfoque.

E: ¿Y durante sus estudios actuales de maestría esta propuesta de enseñar matemáticas es una temática de sus cursos?

M: No.

E: En ese sentido quiero preguntarle ¿si antes de empezar a trabajar usted esta asignatura cree usted que necesitaba alguna capacitación?

M: Sí

E: ¿Tuvo usted algún periodo de capacitación?

M: No

E: ¿Y cuáles son los elementos que a su juicio deberían incorporarse en los cursos de actualización que al parecer son necesarios, qué se le debiera enseñar a los profesores que van a trabajar esta asignatura?

M: Pues retomo nuevamente una de las preguntas anteriores yo creo que tanto el conocimiento matemático como el conocimiento didáctico, porque en ocasiones nosotros mismos nos encontramos con esa deficiencia, que hay algún contenido que igual no lo dominamos o no conocemos ese concepto en su totalidad y bueno, debido a eso también tenemos dificultades para ver cómo se va a enseñar ese contenido.

E: Respecto de su experiencia en las aulas ¿podría decirnos cuáles han sido durante su trayecto las principales dificultades que ha tenido para impartir la materia?

M: Precisamente estas, hay ocasiones en que bueno algún contenido, algún concepto matemático no lo tengo muy claro, entonces igual se me dificulta por un lado bueno conocer la esencia la naturaleza de ese contenido y bien saber cómo poder enseñarlo.

E: ¿Y de los conocimientos que ha trabajado en los programas de estudio, cuál le ha parecido el más difícil de enseñar y por qué?

M: Pues de hecho yo creo que sería el de las fracciones los diferentes significados, incluso con los mismos alumnos ellos ha habido un poco de resistencia a poder interpretar o a poder comprender esos cuatro significados, entonces sí, ese ha sido el más difícil.

E: ¿Y cuál ha sido el más fácil?

M: Pues el más fácil hasta el momento con el que he trabajado es medición.

E: ¿Por qué le parece que ha sido el más fácil?

M: A lo mejor porque pudiera encontrarse más actividades en las cuales se pudiera trabajar directamente más vivenciales por así decirlo como que las fracciones en ocasiones hasta resulta para nosotros mismos un poquito más abstracto que la medición, la medición la vemos como más real.

E: ¿Usted ha trabajado siguiendo al pie de la letra las instrucciones de los programas de estudio o más bien ha trabajado separada de los planes de estudio?

M: Pues he tratado de equilibrarlo, pero no se puede seguir totalmente al pie de la letra no lo he hecho así porque igual se presentan otras dificultades que hay que atenderlas en su momento y bueno se tiene que dejar de lado un poquito el programa.

E: De las que se incluyen en los programas y en los materiales ¿cuáles estrategias en términos generales le han servido más?

M: Bueno hasta el momento las que más me han servido son aquellas en las que se trabaja sobre el concepto matemático en sí para tratar de comprenderlo sí, entonces aquellos ejercicios, aquellos problemas que los mismos alumnos tienen que resolver sí, y que denota cuál es el nivel de conocimiento que ellos tienen sobre ese concepto.

E: ¿Y de las propuestas en los programas cuáles estrategias le han provocado mayores dificultades para trabajar?

M: Bueno principalmente aquellas donde es más difícil, bueno vuelvo nuevamente al ejemplo de las fracciones donde había algunos ejercicios un poquito más abstractos que bueno en ocasiones no permitían ese nivel de conocimiento que se trataba de alcanzar.

E: ¿Ha incorporado usted estrategias que no están sugeridas en el programa?

M: Sí, en ocasiones sí.

E: ¿Podría ejemplificarnos alguna?

M: Bueno dentro de la medición realizamos medición de diversos objetos de manera no convencional dentro de la misma escuela, que bueno no venía propiamente sugerido en el programa.

E: ¿Podría decirnos lo que al parecer es una gran dificultad ¿cómo evalúa usted lo que aprendieron los estudiantes?

M: Bueno, se hace una evaluación en primer término, nuevamente de qué conocimiento didáctico se tiene y qué conocimiento matemático sí, esto bueno se hace por un lado a través de las prácticas de la observación que se les hace a través de las prácticas si ellos están teniendo dominio de ese concepto si lo están aplicando como es, bien qué tanta capacidad tienen ellos para desenvolverse en el grupo, pero no tanto en función de disciplina o algo así sino más bien en cuanto a la enseñanza.

E: ¿Ha tenido algunas dificultades para evaluar y cuáles serían si ha habido dificultades para encontrar cómo valorar esos aprendizajes?

M: Sí es un poquito más difícil porque aquí en las matemáticas, bueno son dos aspectos que se tienen que evaluar, y por otro lado como que es un proceso el que se tiene que evaluar, no hay algo así que digamos una evaluación cuantitativa que me diga no este alcanzó mayor puntaje que el anterior, entonces como que es un poco más cualitativo en este sentido y bueno como es un proceso entonces es más difícil establecer cuáles serían los criterios de evaluación.

E: ¿Podría platicarnos su mejor experiencia en este trabajo con la enseñanza de las matemáticas?

M: Bueno la mejor experiencia ha sido cuando estamos dentro del grupo y que vemos esa capacidad de razonamiento que incluso ellos mismos dicen no? bueno yo no sabía porque “pi” por radio al cuadrado es esto donde empezamos a ver cuál es la esencia de esos conceptos que ellos a lo largo de su formación los han tenido como un saber acabado.

E: ¿Recuerda particularmente uno de esos momentos?

M: Sí, estábamos precisamente sobre una clase de medición entonces se trataba de medir las circunferencia de unos cartones, bueno de unos círculos en cartón, de hecho esta actividad sí viene sugerida en el programa y bueno hubo quienes trataban inmediatamente de buscar la fórmula, cuál es la fórmula de la circunferencia no? algunos lo lograban otros no lograban acordarse, daban datos erróneos sí, pero al final al pedirles que no usaran fórmulas bueno empezaron a medir ellos con estambres la circunferencia y empezamos bueno a deducir por qué o de dónde provenía el pi al momento de cuestionar a los alumnos ellos decían no pues es que yo no sé, en el primer momento sí cuando ellos utilizaron la fórmula es que yo no sé toda mi vida me han dicho que es “pi” pero pues no sé ni porque o por qué se utiliza esa fórmula para calcular la circunferencia y después al hacerlo ahí durante la clase ellos se dieron cuenta de dónde provenía por qué era esto y vieron pues en vida no? la vida misma del enfoque no lo vieron ya tan teórico sino que vieron a partir de donde viene, vieron la construcción de ese saber matemático y bueno también vieron que ya no era tanto ese enfoque tradicional sino que ahora había otras cosas que las hacía más comprensibles.

E: ¿Cuál ha sido una de las peores o la peor de sus experiencias con el grupo?

M: Pues fue precisamente con las fracciones si, habíamos trabajado ya bastante tiempo con los cuatro significados y en un planteamiento donde ellos tenían que identificar cuál era o mejor dicho sí cual era el significado que estaba implícito en los problemas, bueno existió muchísima confusión ellos llegó un momento en que se desesperaron e incluso dijeron no es que a mí de que me va a servir conocer los significados de las fracciones yo llego y trabajo con las fracciones pero ni modo que a los niños les vaya a decir para qué son o sea que las fracciones tienen cuatro significados.

E: ¿Y respecto de los estudiantes ¿cuáles cree usted que son las cosas que más les han interesado a ellos de su curso?

M: Lo que más les ha interesado es precisamente cómo voy a enseñar yo tal o cual contenido porque ellos manifiestan que es una de las principales dificultades que tienen cuando les entregan sus contenidos ellos no saben realmente como van a trabajarlo entonces bueno se han hecho, se ha tratado de que dentro del curso ver de qué manera se pudiesen manejar con los niños y bueno hay quienes los han llevado a la práctica y eso los ha mantenido con atención.

E: ¿Y cuáles son a su juicio las cosas que menos les han interesado a los alumnos?

M: Cuando se trabaja un poquito digamos lo teórico digamos este nuevo enfoque sus orígenes, un poco hablando de términos filosóficos como que surge un poquito de apatía en ese sentido pero ya cuando son conocimientos más prácticos bueno es cuando

E: ¿Usted considera adecuada la relación que hay entre los contenidos del programa, las estrategias que se sugieren para trabajar el programa y la práctica que los estudiantes hacen en las escuelas primarias?

M: Sí es adecuada pero hay varios detalles que impiden propiamente esa relación nuevamente vuelvo al tiempo otro que los contenidos bueno a lo mejor no se alcanzan a ver en su totalidad sí, y no se puede dar totalmente esa relación que uno quisiera.

E: ¿Cuáles serían las fallas de articulación más evidentes?

M: Bueno la secuencia que se tiene de los contenidos en el programa y la práctica si, porque están un poco desfasadas, ellos van a practicar con todos los contenidos propiamente con todos los bloques sí, y no se da esa relación que bueno estamos trabajando ahorita con este bloque igual se va a ir a practicar sobre este mismo bloque no, sino que es general.

E: Hay algunas sugerencias que se dan en los propios programas para articular lo que enseña en las normales y lo que sucede en las prácticas de las escuelas ¿cuáles de esas sugerencias le han dado mayor resultado a la hora de coordinar la práctica de los estudiantes con su curso de enseñanza de las matemáticas?

M: Bueno, una de esas es propiamente la de los registros de observación pero dándole un matiz diferente sí, porque ahí nada más abarca, o sea da términos generales de qué es lo que se debe de observar pero se dejan aspectos en ocasiones que pasan desapercibidos y nos están dando muestra clara de bueno cuales son digamos el conocimiento que tienen los niños sobre lo que están trabajando sí, cuál es la forma en que el maestro desarrolla su clase que nos hacer ver bueno, de qué manera esta implícita ahí la didáctica de las matemáticas pero bueno el registro de observación es uno de ellos sí, que apoya esa práctica.

E: ¿Y ha desarrollado algunas actividades para estrechar la relación entre su curso y las prácticas de los estudiantes?

M: Sí, bueno por un lado se hace una especie de diagnóstico antes de las prácticas para ver realmente bueno, en qué nivel cognitivo se encuentran los niños para a partir de ahí empezar a hacer esas planeaciones, esto de hacer una especie de diagnóstico no viene propiamente dentro de los programas aquí nada más nos sugiere que se haga un registro de observación pero nada más, entonces los alumnos van digamos a una observación antes de la práctica y desarrollan un proyecto, bueno no un proyecto en sí, sino que desarrollan digamos un problema o una actividad que les de cuenta de cual es el saber que tienen los niños sobre lo que ellos pudiesen practicar.

E: ¿Sobre este mismo asunto, cuáles considera usted que son las dificultades más fuertes en la planeación que hacen los alumnos?

M: Bueno, una de las dificultades es precisamente articular ese binomio no, de contenido didáctico, conocimiento didáctico y conocimiento matemático si, ellos bueno tienen en sí el contenido pero igual se encuentran con la dificultad de bueno ahora cómo lo voy a enseñar no, sé a lo mejor que existen cuatro significados de las fracciones sé esto sé lo otro pero bueno ahora el problema está en cómo lo enseño, entonces en desarrollar esa secuencias o bien esas situaciones didácticas es la principal.

E: ¿Y qué dificultades específicas se pueden encontrar?

M: Bueno una primera dificultad es digamos la secuencia de actividades que ellos deben de ir desarrollando sí, no saben por ejemplo al principio sí, principalmente al principio de las prácticas si plantear primero los problemas en qué momento deben de confrontar resultados cuál va a ser el papel del maestro ahí y bueno otra es precisamente esta no, la dificultad para plantear problemas sí, ellos hay ocasiones en que dicen bueno este problema es para empezar a ver tal o cual contenido pero el problema que están planteando es más bien como de reafirmación o de evaluación sí, no tanto de inicio.

E: Por otro lado ¿cuáles son las dificultades que usted ha observado que los alumnos en el trabajo con los niños?

M: En ocasiones ellos planean digamos una situación didáctica muy bonita por así decirlo pero al momento de llegar a la práctica encuentran con que hay otras dificultades que no les permiten llevar a buen término esa planeación sí, una de ellas bueno está digamos la heterogeneidad de conocimientos que tienen los niños unos pueden responderles favorablemente esas actividades, otros no tanto llegan a desesperarse en ocasiones porque no tienen los resultados totalmente favorables como ellos lo quisieran tener.

E: ¿Habría otros elementos aparte de la heterogeneidad que les provoquen dificultades?

M: Bueno otra que también ellos afirman es el número de alumnos sí, bueno dicen que para trabajar con problemas o para ver digamos el proceso o bien lo que hacen los niños, cada uno de los niños es más difícil con grupos numerosos sí, para tratar de ver sí cada uno de los procedimientos que emplean para la resolución de problemas y bueno precisamente esto del número del grupo en ocasiones les hace difícil controlar el grupo, pues en cuestiones de indisciplina.

ANEXO NO. 2

Registro No. 4

Asignatura: Matemáticas y su enseñanza II

Semestre: 3°

Bloque: Números racionales

Fecha: 8 de noviembre, 2002

11:20

Maestro: Para iniciar vamos comentando los resultados de las páginas del libro del taller que quedaron de tarea. Para empezar a trabajar con las tiras, me refiero a las primeras tiras. Entonces vamos viendo la pag. 25 del taller, vamos a ver cómo lo resolvieron rápidamente; a ver alguien que lea

Alumno: ¿El 5?

M: Sí

A: (Leyendo) Varios niños se repartieron varias barritas de chocolate, a cada uno le tocó lo mismo y no sobró nada, las barritas y la poción que le tocó a cada uno son las que se presentan a continuación

M: Ahí están, ahí ven la barrita entera y la porción que le tocó a cada niño ¿cuál es la pregunta?

A: ¿Cree usted que es igual el número de niños que de barritas?

M: ¿Qué resolvieron ustedes?

As: Que no

M: ¿Por qué?

A2: Por que la porción que le toca es más grande

A3: Más de una barra

M: Porque la porción que les toca es más de una barra, o sea que si fueran más niños que barras la porción sería menos de una barra. Bueno ahí tienen y les piden que dibujen las porciones que les tocaron a cada niño para que saquen cuántos niño y cuántas barritas eran ¿cuántos niños eran?

A4: 4

M: ¿Y cuántas barritas eran?

A: 6

A2: 6

A3: Yo saqué 2 niños y 3 barritas

M: ¿Cómo encontraron la respuesta ahí cada quién?

A3: Yo hice como una equivalencia midiendo, tomando la medida de la barra entera

M: ¿Y cuánto mide la barra entera?

A3: 4 cm. Mide la barra entera y la porción es 6 cm. Entonces hice la equivalencia que coincidiera

M: y ¿Cuál fue la respuesta?

A3: 3 Barritas enteras y 2 niños

M: Bien, ¿alguien tiene otra respuesta? ¿no hay otro resultado?

A4: Si, 4 niños y 6 barritas

M: ¿Y serían equivalentes?

As: Sí

M: Sí son equivalencias, entonces ambos están bien; también nos dice el ejercicio, trate de encontrar 3 respuestas más, 2 niños 3 barras, 4 niños 6 barras, ¿cuál más sería?

A: 6 niños 9 barras,

A2: 20 niños 24 barras

A3: 9 niños 12 barras

M: ¿Qué encontraron ahí?

As: Que son equivalencias

M: Están trabajando con puras equivalencias, puras fracciones equivalentes. A continuación se debe de dar la solución de este problema. ¿Fue distinta la solución que ustedes hicieron de las de el libro antes de completarla?

A: No

M: Javier ayúdanos a leer el recuadro 3

A2: (Leyendo) En el problema anterior sólo se conocen 2 datos el tamaño de la porción que le toca a cada niño y el tamaño de la porción que se repartieron, para averiguar entre cuantos niños se hizo el reparto y cuántos chocolates se repartieron, se puede considerar que el total de chocolates repartidos debe coincidir con el total de porciones

M: Ahí está por eso 3 barras corresponden a 2 porciones, viene otra pregunta que se responde ahí mismo, la de las equivalencias que ustedes ya resolvieron. El problema No. 7 léelo Martha.

A: (Leyendo)Varios niños se repartieron varias barritas de chocolate y a cada uno le tocaron $\frac{7}{4}$ de barrita ¿cuántas barritas se repartieron?

As: 7

M: ¿Cuántos niños eran?

As: 4

M: Ya hasta encontraron una relación directa, en la primera ocasión que trabajamos un problema de este tipo de pronto no se encontraba la relación así tan rápido, por ejemplo qué pasaría si se dijera; se repartieron varias barras de chocolate entre varios niños y a cada niño le tocó $\frac{5}{3}$ de chocolate. ¿cuántos niños serían?

As: 3

M: Ya estamos encontrando otra relación, si logramos que los niños también encuentran rápidamente esta relación rápidamente van a poder resolver fácilmente los problemas. Vamos con el siguiente ejemplo, me ayudan a leerlo

A: Este problema es similar al anterior, peor esta vez la información se da a nivel genérico, es necesario ver cuántas porciones de $\frac{7}{4}$ forman entero

11:50

M: A ver ¿cómo resolvieron ese problema? ¿quién nos ayuda?

A2: Profe, ahí había un recuadro que por lo menos yo no entendí, que era donde dice que eran 3 galletas y ya después sale que eran 5, no se qué relación hubo

M: ¿Cómo?

A2: Si estos dos enunciados son del mismo problema, entonces ahí existe una relación

A3: Son $\frac{3}{5}$

M: Yo tengo en el libro que 3 niños se repartieron 5 galletas redondas en partes iguales

As: Y nosotros tenemos 5 niños se reparten 3 galletas

M: Bueno aquí tenemos un error viene cambiado, pero nos quedaremos con este 3 niños se reparten 5 galletas, ¿qué parte le tocaría a cada uno?

A: $\frac{3}{5}$

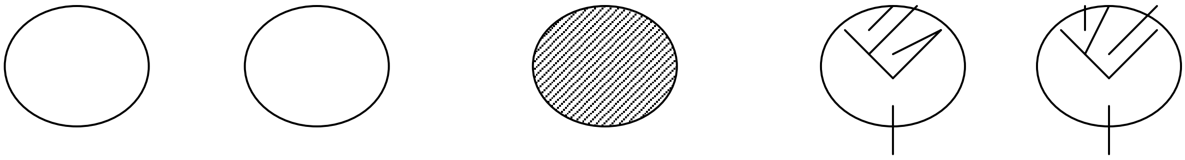
M: No

A: $\frac{5}{3}$

M: Son más galletas que niños, se supone que les toca más de una galleta, ¿cómo representamos en una sola galleta $\frac{5}{3}$? es más de una galleta

A2: Una galleta y un pedacito

M: Aquí en su libro dice, trate de representar lo que le toca a un niño ¿cómo lo representan?



A cada uno le toca más de una galleta, sería 1 entero y $\frac{2}{3}$ de las galletas que sobran. Bien hasta aquí ¿alguna pregunta? Aquí terminamos la primera parte. En el recuadro que sigue en el libro es como una síntesis de lo que hemos visto hasta el momento, que es el reparto y lo que nos dice que en ocasiones es mejor que lo que se reparte esté formado por un solo elemento repartido entre x cantidad, es incluso mejor que en el reparto les toque más de un entero. Este tipo de situaciones permitiría que ya el niño empezara a comprender las fracciones en esta primera parte que sólo se trata de repartir, y además es más fácil, los niños inician repartiéndose todo, unidades enteras por ejemplo, las canicas, vamos a repartir una bolsa de canicas ¿qué estrategia usan los niños para repartirse esas canicas?

A: Ir repartiendo una por una

M: Si, reparten de uno en uno. Hasta aquí entendimos lo del reparto, también hace pocas sesiones acabamos de terminar lo que es la medición, a partir de la medición podemos trabajar fracciones, si yo preguntara 2cm. ¿cuánto es de 1 m.?

As: Una parte

M: Una parte, una fracción del metro, o una centésima parte del metro. Bien en la siguiente parte vamos a trabajar cómo las fracciones se relacionan con la medición, y para eso necesitamos dos materiales uno, son las tiras, saquenlas, las tiras amarillas van a integrarse por equipos, ¿todos tienen su material? La tira “U” va a ser la tira unidad, con la tira “U” vamos a medir todas las demás, por ejemplo la tira “A” mide 2 tiras “U” ¿es cierto eso? A ver mídanlo a ver si es cierto

As: Sí

M: Ahora la tira “B” en “U”

A: 4

A2: 2

A3: Media

M: Mide media, a ver ¿la tira “B” mide 2 veces la tira “U”? no, mide la mitad de la “U”, ¿están de acuerdo? Entonces sigan midiendo y anoten en su cuaderno para después verificar y comparar entre todos ¿cuánto miden las tiras?

12: 15

(maestro)

La tira A mide 2 tiras “U”

La tira B mide $\frac{1}{2}$ tiras “U”

La tira C mide 1 $\frac{1}{2}$ tiras “U”

La tira D mide $\frac{1}{3}$ tiras “U”

La tira E mide $\frac{2}{3}$ tiras “U”

La tira F mide $\frac{1}{4}$ tiras “U”

La tira G mide $\frac{3}{4}$ tiras “U”

La tira H mide 1 $\frac{1}{4}$ tiras “U”

Ahora vamos a comprobar los resultados ¿cuánto mide la tira C?

A: 1 $\frac{1}{2}$ de la tira U

M: La tira D

A2: $\frac{1}{3}$ de la tira U

M: La tira E

A3: $\frac{2}{3}$ de la tira U

M: Hasta aquí vamos bien, ¿todos tienen los mismos resultados?

As: Sí

M: La tira F

A4: Mide $\frac{1}{4}$ de la tira U

M: La tira G

As: Mide $\frac{3}{4}$ de la tira U

M: La H

A6: Un entero $\frac{1}{4}$ de la tira U

M:

I = $\frac{5}{4}$ de U

J = $\frac{5}{3}$ de U

K = $\frac{7}{4}$ de U

$L = \frac{6}{5}$ de U

$M = \frac{10}{8}$ de U

$N = \frac{35}{50}$ de U

Aquí tenemos otras medidas, estas medidas son arbitrarias vamos a hacer de cuenta que eso valen, la pregunta es, sin utilizar la regla ni las tiras, ¿cuál tira es más larga la I ó la J?

A: La I

A2: La J

As: La J

M: ¿Por qué la J?

A2: Porque se divide en tercios

A3: Están iguales de largo, nada más que una se divide en tercios y otra en cuartos

A2: No

M: Fíjense bien la tira I mide $\frac{5}{4}$, una tira entera y $\frac{1}{4}$. la tira J mide $\frac{5}{3}$, una tira entera y $\frac{2}{3}$ entonces ¿cuál mide más?

A: La J

M: La J pero ¿por qué?

A: Porque es un entero y $\frac{2}{3}$ y la de arriba es un entero $\frac{1}{4}$, sería más cantidad $\frac{2}{3}$

M: Dice que es mayor $\frac{2}{3}$ que $\frac{1}{4}$ ¿estamos de acuerdo?

As: Sí

M: Ahora ¿cuál es mayor la I o la K?

As: La K

M: ¿Por qué?

A: Porque la K es un entero $\frac{2}{4}$ y la I un entero $\frac{1}{4}$

M: Ahora ¿cuál es mayor la tira I o la N?

A: Son iguales

A2: No

M: Acuérdense del procedimiento que vimos cuando dijimos que entre más grande sea el numerador más pequeña será la cantidad, es más pequeña la fracción

A2: La I

A3: Son iguales, son equivalentes

M: Para los niños, ¿es evidente que es equivalente? ¿por qué creen que son equivalentes? Acuérdense que cuando tenemos fracciones con distinto numerador y denominador por ejemplo $\frac{3}{5}$ y $\frac{2}{4}$, hay que tomar en cuenta ambos números tanto el numerador como el denominador para saber cual es más grande, en cambio cuando tenemos fracciones con igual denominador por ejemplo, $\frac{3}{4}$ y $\frac{8}{4}$ aquí el numerador determinará cual es más grande. Entonces ¿cuál es más grande la I o la N?

A3: La I

M: ¿por qué?

A3: Porque si el 50 son las partes en que se va a dividir N, $\frac{35}{50}$ sería un poco más d la mitad de N y I sería más de un entero

M: Una respuesta rápida porque la N no llega ni a un entero, ni a una unidad. Fíjense aquí podemos sacar una primera conclusión, aquí tenemos una la comparación de fracciones equivalentes y sobre todo cuando son mayores que la unidad y menores que la unidad. Bueno otra pregunta ¿cómo harían ustedes para dividir la tira “A en 6 partes iguales sin doblarla, sin regla?

As: Con la B

M: A ver háganlo a ver si salen las 6 partes

As: Si

M: ¿Y si la quisiéramos dividir en 5 partes?

ANEXO NO. 3

Cuestionario aplicado a los estudiantes

Como parte de su formación usted ha estudiado la unidad referida a los números racionales, por tal razón el presente cuestionario tiene como propósito explorar los tópicos que tienen mayor dificultad para usted así como conocer su opinión sobre varios de los aspectos estudiados.

I. En los diversos materiales para el maestro se dice que los racionales -y las matemáticas en general- deben enseñarse mediante el enfoque llamado “de la resolución de problemas”. Podrías explicar brevemente la importancia que en este enfoque tienen:

a. Los problemas

b. Las estrategias informales de los niños

c. Los errores que comenten los niños

II. Planteé tres problemas, uno que se resuelva mediante una suma de fracciones, otro mediante una multiplicación de fracciones y uno más que se resuelva mediante una división de fracciones.

III. Durante el estudio de los racionales se ha visto que la fracción asume distintos significados: la fracción como parte de unidades, la fracción como operador multiplicativo y la fracción como división de enteros. Indique cuál de los significados anteriores está implicado en cada una de las siguientes situaciones:

1. El señor Sánchez, quien es carpintero, por lo general utiliza clavos de $\frac{7}{16}$ de pulgada

___

2. Este año la producción de fríjol en Zacatecas fue 0.40 veces mayor que la del año pasado

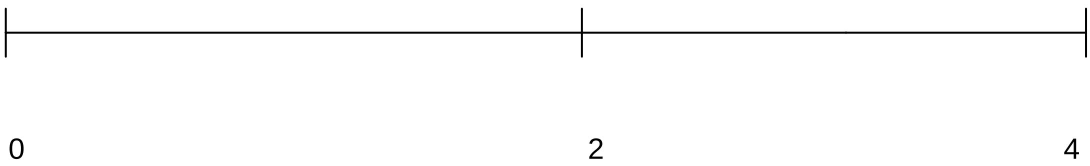
3. Si un automóvil recorre una distancia de 60 km en 45 minutos se dice que su velocidad promedio es de 60km/ 45min.

4. En México, $\frac{2}{5}$ de la población están en la pobreza extrema

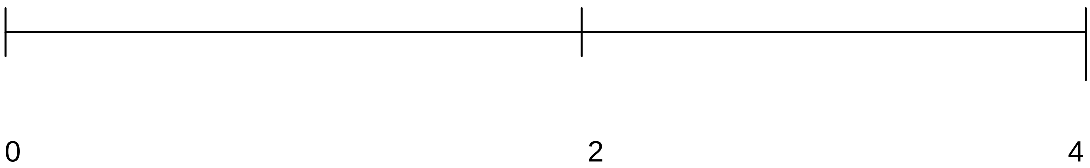
5. El arquitecto Martínez construirá una maqueta del edificio de la escuela a una escala de $\frac{5}{70}$.

IV. Indica el lugar que ocupan las siguientes fracciones en la recta numérica

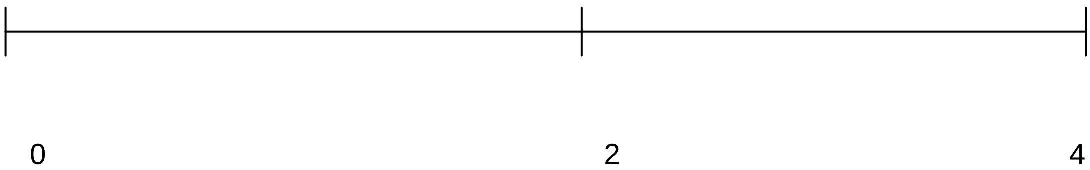
a). $\frac{3}{5}$



b) $\frac{7}{3}$



c) $\frac{14}{6}$



V. Identifica de entre las siguientes fracciones, aquellas que sean equivalentes

$\frac{2}{3}$, 0.50, $\frac{4}{9}$, $\frac{10}{30}$, $\frac{3}{6}$, 0.25, $\frac{7}{5}$, $\frac{12}{27}$, $\frac{2}{8}$

VI. Escribe un número que se encuentre entre las siguientes fracciones

$\frac{2}{10}$ ----- $\frac{3}{10}$ 0.53 ______ 0.54 $\frac{15}{100}$ ------ $\frac{16}{100}$

1.8 _____ 1. 9 $\frac{25}{1000}$ ------- $\frac{26}{1000}$

VII. Escribe en notación decimal las siguientes fracciones

$\frac{2}{5}$ = ________ $\frac{7}{4}$ = _____________ $\frac{4}{100}$ = _________ $\frac{24}{10}$ = ______

Doce décimos = ____________ $\frac{5}{10000}$ = ______________

VIII. Resuelve las siguientes operaciones.

$\frac{7}{3} + \frac{8}{5} + \frac{4}{7} =$ $\frac{15}{7} - \frac{4}{8} =$ $\frac{5}{8} \times \frac{9}{12} =$ $\frac{9}{8} \div \frac{3}{4} =$

483.12 x 0.36 = 783.75 ÷ 3.36 =

IX. Resuelve los siguientes problemas utilizando la operación correspondiente

1. José Luis va a construir una bandera con $\frac{3}{4}$ de un pliego de cartulina, si $\frac{2}{3}$ de la cartulina que usará deben iluminarse de rojo, ¿cuál es la parte del pliego de cartulina que irá de rojo?

2. La mamá de Martín cocinaba un pastel cuya receta indicaba usar $\frac{3}{4}$ de taza de azúcar, como llegaron sus sobrinos aumentó los ingredientes, le añadió $\frac{2}{6}$ de tasa de azúcar más. ¿Cuánta azúcar utilizó en total?

3. Para arreglar la tubería de los baños el plomero requiere un tramo de tubo que mida $\frac{5}{6}$ de metro pero sólo tiene tramos que miden $\frac{3}{15}$ de metro. ¿Cuántos tramos de $\frac{3}{15}$ necesita pegar para tener el tubo que requiere?

X. Luego del estudio de esta unidad ¿ha cambiado tu percepción sobre las fracciones y los decimales?

SI NO ¿Porqué?

XI. Luego del estudio de esta unidad ¿te sientes capaz (utilizando los diferentes materiales para el maestro) de enseñar las fracciones y los decimales en la escuela primaria?

SI NO ¿Porqué?

XII. Marca con una cruz los conocimientos que consideres haber adquirido mayormente durante el estudio de esta unidad.

a) Conocimientos sobre las fracciones y los decimales .... ( )
b) Conocimientos sobre la manera en que las aprenden los niños .... ( )
c) Conocimientos sobre como enseñar matemáticas .... ( )
d) Conocimientos sobre como enseñar las fracciones y los decimales............ ( )
e) Otros

XIII. Marca con una cruz los conocimientos que en tu opinión no has adquirido de forma conveniente y que por ello deberán estudiarse en posteriores cursos

a) Conocimientos sobre las fracciones y los decimales .... ( )
b) Conocimientos sobre la manera en que las aprenden los niños .... ( )
c) Conocimientos sobre como enseñar matemáticas .... ( )
d) Conocimientos sobre como enseñar las fracciones y los decimales............... ( )
e) Otros

- GRACIAS POR TU COLABORACIÓN –