UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

SECRETARIA ACADÉMICA
CONSEJO DE POSGRADO
DIRECCIÓN DE POSGRADO
DOCTORADO EN EDUCACIÓN

"Comprensión y Conversión de Representaciones Gráfica y Algebraica en Funciones Polinomiales Elementales por Alumnos de Bachillerato"

Tesis que para obtener el grado de
Doctor en Educación
Presenta

ASELA CARLÓN MONROY

TUTOR:
DR. ERNESTO SÁNCHEZ SÁNCHEZ

México, D. F. Diciembre de 2005

ÍNDICE

Introducción

El propósito del estudio que en estas páginas se reporta es explorar en qué medida una instrucción centrada en el estudiante, la comunidad del salón de clases, la evaluación y el conocimiento de la conversión de los registros de representación gráfico y algebraico en funciones polinomiales elementales de la forma $y = ax^n + b$, *donde* a, $b \in \Re$, $a \neq 0$ y $n = 1, 2$ y 3, con un enfoque global cualitativo, promueve en estudiantes de bachillerato el dominio de esta conversión y la comprensión de dichas funciones.

La motivación de este trabajo encuentra su razón, fundamentalmente, en las siguientes consideraciones: la importancia del estudio de las funciones en las matemáticas escolares; algunos resultados que la investigación en educación matemática ha aportado con relación a las dificultades que tienen los estudiantes en el aprendizaje de las funciones; el aprendizaje y la comprensión.

Importancia del estudio de las funciones en las matemáticas escolares. La NCTM (2000), en sus *Principles and Standards for School Mathematics*, considera a las funciones como uno de los hilos conductores en el proceso enseñanza─aprendizaje desde el Kindergarten hasta el grado 12 y propone que los estudiantes deberían comprender relaciones y funciones, usar varias representaciones, convertir a través de ellas, analizar las funciones investigando el cambio de coeficientes y el comportamiento global de la gráfica.

Dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de las funciones. En el ámbito escolar, numerosas observaciones en clase, el análisis de los resultados de encuestas y evaluaciones, así como experiencias de aprendizaje, muestran que los estudiantes tienen dificultades en el aprendizaje de las funciones (Duval, 1999; Leinhardt, Zaslavsky y Stein, 1990; Moschkovich, 1999; Moschkovich, Schoenfeld y Arcavi, 1993); dificultades que pueden ser atribuibles a que la propia enseñanza soslaya o tiene a menos algunos aspectos de las mismas, por ejemplo la conversión de registros de representación, que son valiosos tanto para la comprensión de las funciones como para las matemáticas más avanzadas (Duval, 1992; Leinhardt, Zaslavsky y Stein, 1990).

Aprendizaje y comprensión. La NCTM (2000) afirma que “[a]prender sin comprensión ha sido un problema persistente desde al menos los 1930” (p. 20). Knuth (2000) declara que pocas son las investigaciones en educación matemática que se han realizado en torno al problema de la comprensión y la conversión entre distintos registros de representación de las funciones. Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990) sostienen que la enseñanza de gráficas, graficación y funciones está pobremente estudiada en comparación con otras áreas de la instrucción matemática y que los estudios reales de enseñanza son bastante raros y, en general, desconectados del conocimiento que desarrolla un estudiante.

El documento que aquí se presenta se conforma de cinco Capítulos, las Conclusiones generales, las Referencias bibliográficas y cuatro Anexos. En el Capítulo 1 se plantea el problema de investigación y las preguntas que orientaron el trabajo; en el Capítulo 2, se exponen algunos aspectos referidos en la literatura en educación matemática que se relacionan directamente con la problemática de interés y los supuestos que se aceptan; en el Capítulo 3, se aborda la metodología del estudio; en el Capítulo 4, se describe cómo se llevó a cabo la instrucción y se registran las observaciones en torno al desempeño de los estudiantes en las tareas que enfrentaron a lo largo de dicho proceso de instrucción y en el Capítulo 5, se muestran los resultados a los que se llegaron. Después de este Capítulo se dedica un espacio para plantear las Conclusiones generales del estudio y otro, para registrar las referencias. Con relación a los Anexos, el primero contiene los formatos de las tareas que se usaron en la instrucción; el segundo, los formatos de los instrumentos denominados de comprensión y dominio; el tercero, muestra un ejemplo de la forma en que se llevó a cabo el análisis de las tareas y el cuarto, proporciona las respuestas que emitieron los estudiantes al llamado 4° Instrumento de Comprensión.

Capítulo 1

El Problema

Introducción

El objetivo central del presente estudio es explorar el grado de comprensión que alcanzan, alumnos del bachillerato, en funciones polinomiales elementales de la forma $y = ax^n + b$, *donde* $a, b \in \Re$, $a \neq 0$ y n = *1, 2* y *3,* y el nivel de dominio en la conversión de los registros de representación gráfico y algebraico de dichas funciones, después de haber recibido una instrucción para tal fin. Este estudio tiene en cuenta las siguientes consideraciones.

Según Boyer (1946) "[e]l desarrollo del concepto de función ha revolucionado las matemáticas tanto como lo hicieron las Geometrías no–Euclideanas" (p. 13). Por esto, no es de extrañar que se reconozca al concepto de función como uno de los conceptos fundamentales en las matemáticas escolares; de tal manera que, por la potencialidad organizativa de dicho concepto desde la escuela elemental hasta el primer año de la universidad (Leinhardt, Zaslavsky y Stein, 1990), el tema de funciones se considera importante a nivel mundial. Por ejemplo, la NCTM (2000) en sus *Principles and Standards for School Mathematics* lo considera como uno de los hilos conductores para la enseñanza─aprendizaje desde el Kindergarten hasta el grado 12.

Ahora bien, numerosas observaciones en clase, el análisis de los resultados de encuestas y evaluaciones, así como experiencias de aprendizaje, muestran que los estudiantes tienen dificultades en el aprendizaje de las funciones (Duval, 1999; Leinhardt, Zaslavsky y Stein, 1990; Moschkovich, Schoenfeld y Arcavi, 1993). De igual forma, los resultados de las investigaciones en Educación Matemática refieren un sinnúmero de dificultades que los estudiantes exhiben cuando abordan tareas centradas en el dominio de las funciones (Janvier, 1987; Leinhardt, Zaslavsky y Stein, 1990; Romberg, Fennema y Carpenter, 1993).

Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990) señalan que el tópico matemático de funciones, gráficas y graficación han recibido considerable atención por parte de los investigadores en Educación Matemática pero que, sin embargo, pocos trabajos tienen que ver con la investigación sobre el estudio de la enseñanza de estos temas y que se necesitan tener estudios de secuencias instruccionales y de cómo afectan al alumno.

Bransford, Brown y Cocking (1999) manifiestan que si el propósito de la instrucción es el aprendizaje con comprensión, es necesario diseñar entornos de aprendizaje que lo favorezcan es decir, centrarlos en el estudiante, el conocimiento, la evaluación y la comunidad.

En este contexto, se enmarca el propósito general del presente estudio. Este Capítulo está dedicado al planteamiento del problema, algunas de las causas que lo motivan, algunas preguntas que de él se derivan y que orientan el trabajo aquí expuesto.

EL PROBLEMA

El hilo conductor del estudio que a lo largo de estas páginas se reporta es la pregunta que se enuncia a continuación.

Planteamiento del Problema

> ¿En qué medida una instrucción centrada en el alumno, la evaluación, la comunidad del salón de clases y el conocimiento de la conversión de los registros de representación gráfico y algebraico en funciones polinomiales elementales de la forma $y = ax^n + b$, *donde a, b* $\in \Re$, $a \neq 0$ y n = 1, 2 y 3, con un enfoque global cualitativo, promueve un aprendizaje con comprensión de dichas funciones polinomiales y el dominio de la referida conversión en alumnos de bachillerato?

Antes de continuar, cabe señalar que la expresión “en qué medida”, con la que inicia el problema de investigación arriba planteado, ha de ser considerada de acuerdo a las puntaciones obtenidas por los estudiantes en los instrumentos utilizados en este estudio; los instrumentos son pruebas de rendimiento y la puntuación máxima de cada uno de ellos es de diez puntos.

La intención de las siguientes líneas es señalar algunos antecedentes que soportan este problema y algunas preguntas que de él se derivan.

Antecedentes

La investigación realizada en Educación Matemática en torno al tópico de las funciones, exhibe que los estudiantes muestran múltiples dificultades al enfrentar tareas de predicción, clasificación, traducción y escala que son típicas del dominio de las funciones y que involucran la interpretación y/o la construcción (Leinhardt, Zaslavsky y Stein, 1990). Por ejemplo, la relación entre el concepto de pendiente y la dirección de la recta en el plano muy frecuentemente no se efectúa (Herscovics, 1980); la confusión entre pendiente y altura parece frecuente (Clement, 1985); la interpretación de una gráfica de una situación como una imagen literal de esa situación (Stein y Leinhardt, 1989, citados en Leinhardt et al., 1990).

La variedad de conceptos erróneos y dificultades reportadas por la investigación, revela la inclinación de los estudiantes a enfocar puntos individuales de una gráfica a expensas de los intervalos y del análisis global. Esto conlleva a que el enfoque puntual se considere una de las tres grandes áreas que revela problemas de aprendizaje (Leinhardt, Zaslavsky y Stein, 1990). Duval (1992) afirma que algunos resultados de la investigación muestran de manera brutal el abismo que separa la vía del punteo de la interpretación global.

Janvier (1981a, 1981b) sugiere que este enfoque puntual no es sorprendente dada la instrucción tradicional. Duval (1992), por su parte, afirma que en la enseñanza y en ciertos estudios didácticos se atiende al paso de una ecuación a su representación gráfica a través de la construcción punto por punto, y se olvida que *es el paso inverso lo que crea problemas*. Para efectuar este paso inverso *la aproximación punto por punto* no solamente es inadecuada sino que *constituye un obstáculo*. El paso de la representación gráfica a la escritura algebraica proviene de una interpretación global que exige se centre la atención sobre el conjunto de propiedades y no sobre valores particulares tomados de uno en uno.

Además, Duval (1999) indica que el pasaje de un sistema de representación a otro para nada es evidente o espontáneo para la mayoría de los alumnos. Moschkovich, Schoenfeld y Arcavi (1993) señalan que, de acuerdo con otras investigaciones en el dominio, los estudiantes deben enfrentarse con conexiones a través de las representaciones (i.e. el significado de los parámetros algebraicos en un contexto geométrico). La NCTM en 1989, sugiere que en los grados 9-12 los estudiantes usen tablas y gráficas como herramientas para interpretar relaciones; representen y analicen relaciones usando tablas, reglas verbales, ecuaciones y gráficas; traduzcan entre las representaciones tabular, simbólica y gráfica de las funciones y analicen los efectos del cambio de parámetros sobre las gráficas de funciones. Posteriormente, en el año 2000, la NCTM señaló que los estudiantes deberían comprender relaciones y funciones, usar varias representaciones y convertir a través de ellas; así como analizar funciones de una variable investigando cambio de coeficientes, intersecciones, ceros y el comportamiento local y global.

Moschkovich, Schoenfeld y Arcavi (1993), refiriéndose a lo sugerido por la NCTM en 1989, señalan que esas son declaraciones del desempeño esperado. En contraste, un indicador de la realidad del logro de los estudiantes son los resultados de la NAEP (*National Assessment of Educational Progress)* de 1990. Los cuales, a decir de ellos son angustiantes. También señalan que estudiantes quienes parecen ser competentes en el dominio pueden fallar en conexiones fundamentales y que deberíamos enseñar para conexiones y comprensión, no meramente para habilidades algorítmicas y de procedimiento.

La NCTM (2000) reconoce que desafortunadamente aprender matemáticas *sin* comprensión ha sido por mucho tiempo un resultado común de la instrucción de las matemáticas escolares. Hiebert y Carpenter (1992) señalan que el problema de la comprensión matemática logra su importancia a través de las numerosas demandas hechas en su nombre.

Bransford, Brown y Cocking (1999) sostienen que si el objetivo de la instrucción es el aprendizaje con comprensión, el diseño de los ambientes de aprendizaje debe considerarse desde cuatro perspectivas: la primera de ellas centrada en el *estudiante*; la segunda, en el *conocimiento*; la tercera, en la *evaluación* y la cuarta, en la *comunidad*; y que éstas necesitan ser conceptualizadas como un sistema de componentes interconectados que se apoyen mutuamente unos sobre otros. Además señalan que un reto para el diseño de dichos ambientes es dar con el balance apropiado entre actividades diseñadas para promover la comprensión y aquellas diseñadas para promover la automatización.

Con relación al estudiante, en general se acepta que los alumnos construyen nuevo conocimiento desde sus conocimientos anteriores (Bransford, Brown y Cocking, 1999; Hiebert y Carpenter, 1992; NCTM, 2000).

En torno al conocimiento, Leinhardt et al., (1990) señalan que en general, hay considerable acuerdo en que la instrucción debería moverse desde lo menos formal, menos abstracto, más global e intuitivo al sistema formal, notacionalmente riguroso y que, en particular, el uso de gráficas cualitativas parece una opción fascinante que no ha sido explorada sistemáticamente.

La evaluación y la instrucción deben estar integradas de tal manera que la evaluación sea una parte rutinaria del proceso de las actividades del salón de clases, más que una interrupción (Bransford, Brown y Cocking, 1999; NCTM, 2000).

Sobre la comunidad del salón de clases, en la actualidad se reconoce al trabajo colectivo —trabajo en grupos pequeños y del grupo en su conjunto— en el salón de clases (Artzt y Newman, 1990; Goos y Galbraith, 1996; Goos, Galbraith y Renshaw, 2002; Kramarski, Maverech y Arami, 2002; Laborde, 1994; Leikin y Zaslavsky, 1997; NCTM, 2000) como una forma meritoria de instrucción. Su justificación está en la aceptación de que el aprendizaje tiene como una de sus componentes la interacción social entre individuos. Vygotsky (1896-1934), uno de los más grandes expositores de esta línea de pensamiento, en su libro *Pensamiento y lenguaje* (1992) pone de manifiesto lo importante que para el aprendizaje de un individuo es la comunicación con otros. Good, Mulryan y

McCaslin (1992) y Slavin (1989─1990) han realizado revisiones de la investigación en problemas de enseñanza─aprendizaje y su relación con el trabajo en pequeños grupos. La investigación para las matemáticas del bachillerato es escasa: la revisión de Slavin incluye sesenta y ocho comparaciones, treinta y tres tratan de matemáticas y de éstas sólo cuatro tratan del nivel de bachillerato.

Instrucción, dominio de la conversión de registros de representación en funciones polinomiales elementales y el aprendizaje con comprensión de dichas funciones, son los elementos fundamentales que se fusionan en el problema de investigación en el que se está interesado.

Preguntas que se derivan del problema de investigación

Ante el fracaso de los estudiantes en analizar globalmente una gráfica aún después de una enseñanza de funciones y de un trabajo sobre diferentes registros (Duval, 1998; Leinhardt et al., 1990; Moschkovich, et al., 1993); el consenso que se observa en algunos estudios sobre el tópico y que Duval (1992) lo sintetiza al afirmar que un enfoque puntal [el más usual en la instrucción tradicional (Janvier, 1981a, 1981b)] no solamente es inadecuado para analizar globalmente una gráfica sino que *constituye un obstáculo*, la pregunta que surge de inmediato es:

> ¿en qué grado, el enfoque global cualitativo obstaculiza o favorece el desempeño de los estudiantes que, trabajando en grupos pequeños, enfrentan tareas que exigen un enfoque puntual ya sea de corte cualitativo o cuantitativo?

Los aspectos planteados en esta pregunta se exploran a lo largo de los tres primeros Instrumentos denominados de Comprensión que responden al nombre de: "*Explorando diversos aspectos de la articulación de registros*", "*Explorando* *algunos aspectos sobre la escala*” y “*Representaciones gráfica y algebraica en contexto*”, respectivamente (ver 2ª, 3ª y 4ª Parte del Capítulo 5).

Desde el punto de vista de Moschkovich, Schoenfeld y Arcavi (1993), la competencia en el dominio de las funciones consiste en ser capaz de moverse flexiblemente a través de representaciones y entre la perspectiva proceso y objeto. De donde,

> equipos conformados por alumnos que estudiaron, desde un enfoque global cualitativo, la conversión de los registros de representación gráfico y algebraico en funciones polinomiales elementales, ¿en qué medida son capaces de:
>
> > moverse flexiblemente a través de las representaciones gráfica y algebraica de las funciones estudiadas por ellos y algunas otras “parecidas” a éstas y, percibir a las funciones como proceso y como objeto y moverse flexiblemente entre esas perspectivas?

Al igual que en la pregunta anterior, los elementos implicados en la pregunta recién enunciada, se sondean a lo largo de los tres primeros Instrumentos de Comprensión (ver 2ª, 3ª y 4ª Parte del Capítulo 5).

Leinhardt y sus colaboradoras (1990) consideran que una comprensión completa de las representaciones gráficas significa darse cuenta de qué características no cambian y qué características cambian cuando se alteran las escalas. Luego entonces,

> grupos pequeños, constituidos por alumnos que de hecho no enfrentaron problemas de escala dado que su instrucción fue de corte cualitativo, ¿cuáles de las características de una gráfica que no cambian cuando se alteran las escalas y cuáles de las

que sí cambian son identificadas por ellos cuando abordan tareas de escala?

El 2° Instrumento de Comprensión está dedicado a indagar lo referido en esta pregunta (ver 3ª Parte del Capítulo 5).

Hiebert y Carpenter (1992) manifiestan que una de las consecuencias de la comprensión matemática es que incrementa la transferencia. De aquí que,

> equipos integrados por alumnos que estudiaron la conversión de los registros de representación gráfico y algebraico en funciones polinomiales elementales con un enfoque global cualitativo y en un contexto puramente matemático,
>
> > ¿cómo llevan a cabo la conversión de las representaciones de funciones “un tanto similares” a las presentadas en la instrucción?;
> >
> > ¿cómo es su desempeño cuando abordan situaciones contextualizadas que involucran tanto funciones que se trabajaron en la instrucción como algunas que no se estudiaron?

Los aspectos involucrados en la primera de estas dos preguntas se exploran a lo largo del 1er. y 3er. Instrumento de Comprensión, mientras que en este último, los de la segunda (ver 2ª y 4ª Parte del Capítulo 5).

Otra consecuencia más que mencionan Hiebert y Carpenter (1992) es que la comprensión matemática promueve el recuerdo. En consecuencia, una pregunta inmediata es:

> ¿qué recuerdan de la conversión de los registros de representación gráfico y algebraicos en funciones polinomiales

> elementales estudiantes que un año escolar antes mostraron dominio en dicha conversión?

En el caso que algún o algunos de los elementos que entran en juego en la citada conversión no se recuerden "rápidamente" o se dude de alguno,

> ¿en qué medida los estudiantes son capaces de "crear" o "reconstruir" algún procedimiento que les permita recordar o zanjar su(s) duda(s)?

Si los estudiantes son capaces de "crear" o "reconstruir" algún procedimiento que les permita recordar o zanjar su(s) duda(s),

> ¿en cuánto tiempo lo logran?

El 4° Instrumento de Comprensión que responde al nombre de "*Cuestionario*" está dedicado a sondear los puntos involucrados en estas tres últimas preguntas (ver 6ª Parte del Capítulo 5).

El propósito, fundamental, del trabajo que en estas páginas se reporta, es documentar en qué medida la instrucción a la que fueron sometidos estudiantes de bachillerato promueve el aprendizaje con comprensión de dichas funciones polinomiales elementales y el dominio de la referida conversión.

Capítulo 2

Revisión de la Literatura

Introducción

La noción de función es central tanto en matemáticas como en educación matemática (Kleiner, 1993). La NCTM (2000), en sus *Principles and Standards for School Mathematics*, la considera como uno de los hilos conductores en el proceso enseñanza—aprendizaje desde el Kindergarten hasta el grado 12.

No obstante lo anterior, numerosas investigaciones (Clement, 1985; Duval, 1999; Even, 1998; Guzmán y Consiguiere, 1997; Mac Gregor y Stacey, 1993; Mevarech y Kramarsky, 1997; Moschkovich, 1990 y 1999; Moschkovich, Schoenfeld y Arcavi, 1993, entre otras) en educación matemática —marco en el que se inscribe el presente trabajo— muestran que los estudiantes tienen dificultades en aprendizaje de las funciones. Dificultades que pueden ser atribuibles a que la propia enseñanza soslaya o tiene a menos algunos aspectos de las mismas, por ejemplo la conversión de registros de representación, que son valiosos tanto para la comprensión de las funciones como para las matemáticas más avanzadas (Duval, 1992; Leinhardt, Zaslavsky y Stein, 1990); o bien, a un aprendizaje con deficiente comprensión, que a decir de la NCTM (2000), “[a]prender sin comprensión ha sido un problema persistente desde al menos los 1930” (p. 20).

En torno a los puntos arriba señalados, la literatura en educación matemática contiene diferentes posturas teóricas. En este Capítulo, se explicitan aquellas que se asumen en el estudio que en estas páginas se reporta y consta de tres grandes apartados: funciones, aprendizaje con comprensión y diseño de ambientes de aprendizaje.

FUNCIONES

LA NOCIÓN DE FUNCIÓN EN MATEMÁTICAS

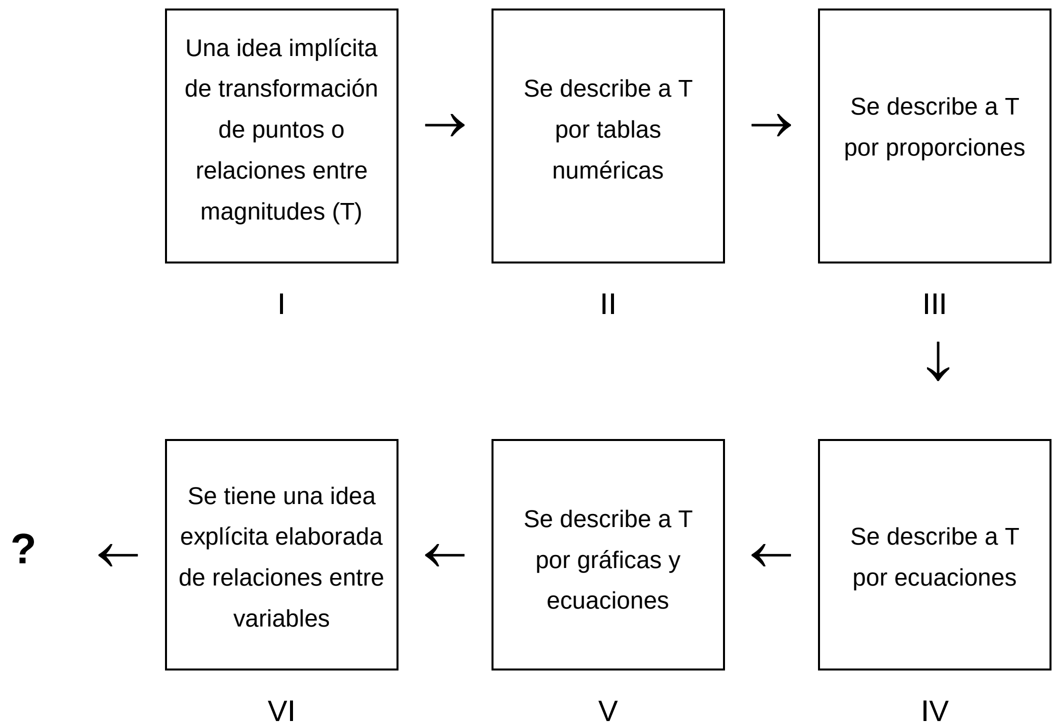
Desde un punto de vista matemático, tal vez, la mejor síntesis de la importancia que para las matemáticas ha tenido el concepto de función es la siguiente afirmación:

> El desarrollo del concepto de función ha revolucionado las matemáticas tanto como lo hicieron las geometrías no–euclideanas. Transformó a las matemáticas de una ciencia natural pura –la reina de las ciencias– en algo mucho más vasto. Estableció a las matemáticas como la base de todo pensamiento riguroso –*la lógica de todas las posibles relaciones* (Boyer, 1946, p. 13).

Con esto, Boyer finaliza su artículo titulado *"*Proporción, Ecuación, Función: Tres Pasos en el Desarrollo de un Concepto*"*, en el que, como su nombre lo indica, describe las diferentes etapas que condujeron al concepto moderno de función:

> *y* es una función de *x*, para un dominio dado de valores de *x*, cada vez que se pueda establecer claramente una ley precisa de correspondencia entre *x* y *y* (Boyer, 1946, p. 13).

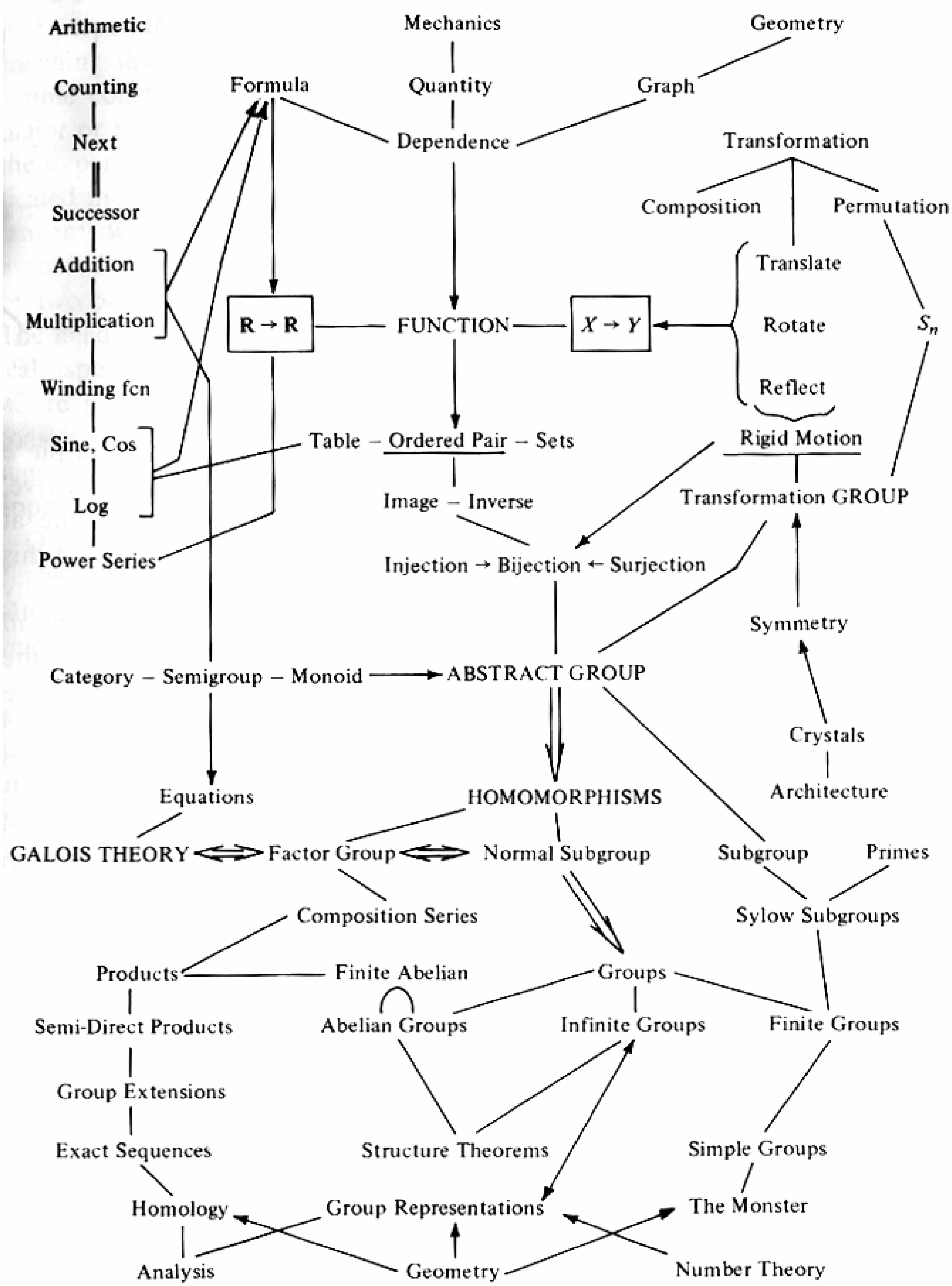
Además, Boyer afirma que esta definición incluye todas las relaciones, si son o no expresadas implícita o explícitamente en términos de las operaciones matemáticas usuales, siempre que la correspondencia de valores pueda ser expresada con precisión y sin ambigüedades en palabras o símbolos. Sierpinska (1988), de acuerdo a Boyer, elabora un diagrama de las etapas históricas de la noción de función. Dicho diagrama es el que se reproduce a continuación.

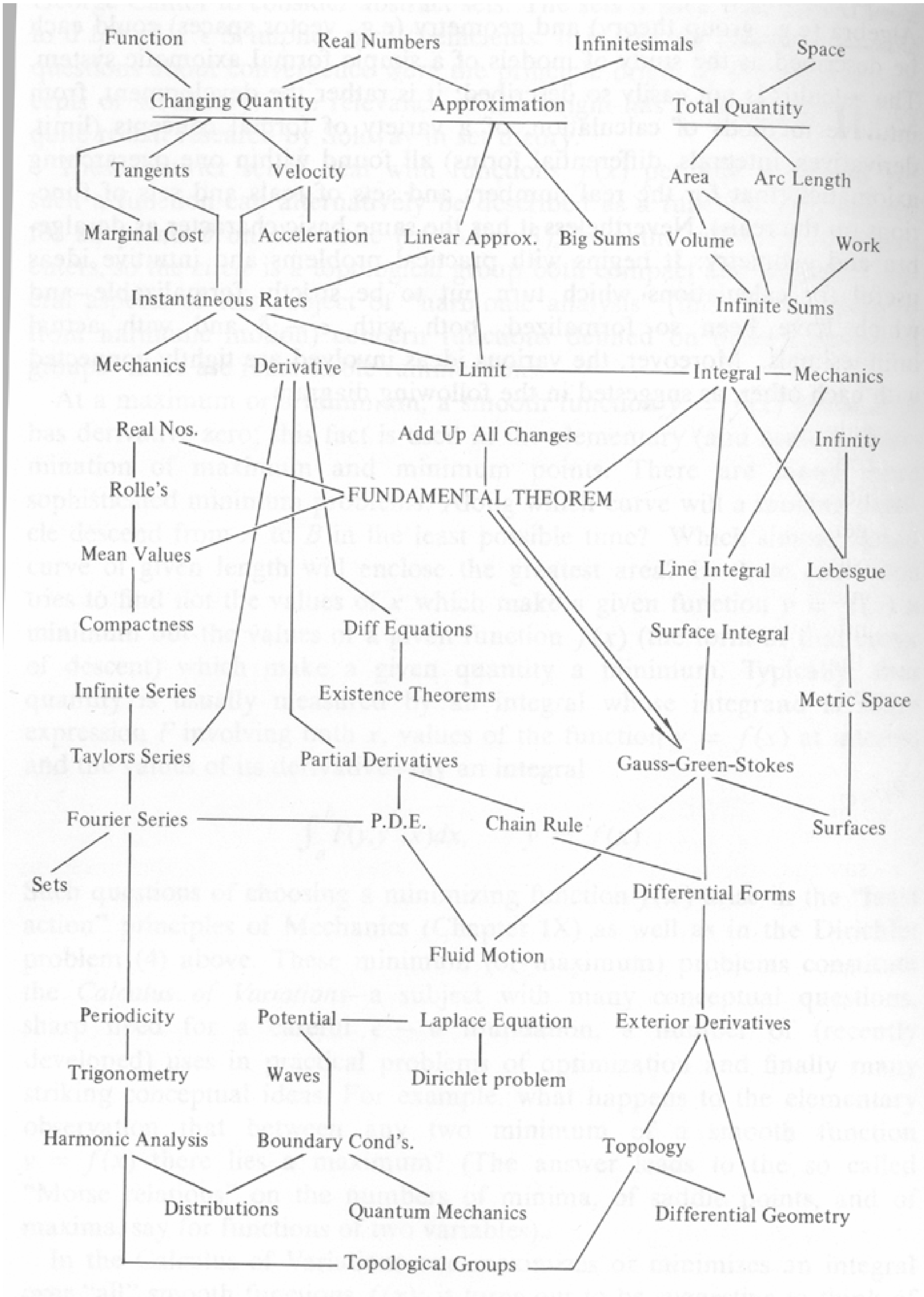


Las etapas históricas de la noción de función
(cf. Boyer, "Proportion, ... ") [en Sierpinska, 1988, p. 569]

La importancia del concepto de función radica, en mucho, en las múltiples relaciones que tiene con otros conceptos dentro y fuera de las matemáticas. MacLane (1986) construye dos redes que ilustran, sólo en parte, cómo varias ideas están conectadas con la noción de función. Dichas redes son las siguientes:

Functions – Transformations – Groups




Function
Real Numbers
Infinitesimals
Space
Changing Quantity
Approximation
Total Quantity
Tangents
Velocity
Area
Arc Length
Marginal Cost
Acceleration
Linear Approx.
Big Sums
Volume
Work
Instantaneous Rates
Infinite Sums
Mechanics
Derivative
Limit
Integral
Mechanics
Real Nos.
Add Up All Changes
Infinity
Rolle's
FUNDAMENTAL THEOREM
Mean Values
Line Integral
Lebesgue
Compactness
Diff Equations
Surface Integral
Infinite Series
Existence Theorems
Metric Space
Taylors Series
Partial Derivatives
Gauss-Green-Stokes
Fourier Series
P.D.E.
Chain Rule
Surfaces
Sets
Differential Forms
Fluid Motion
Periodicity
Potential
Laplace Equation
Exterior Derivatives
Trigonometry
Waves
Dirichlet problem
Harmonic Analysis
Boundary Cond's.
Topology
Distributions
Quantum Mechanics
Differential Geometry
Topological Groups

LA NOCIÓN DE FUNCIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

La importancia del concepto de función es reconocida por las matemáticas escolares. Por esta razón, a nivel mundial, dicho concepto se considera digno de enseñarse en los distintos niveles de la educación "elemental". Así por ejemplo, la NCTM (2000) indica:

> Ideas fundamentales como (...) funciones, (...) deberían tener un lugar prominente en el currículo de matemáticas porque ellas les permiten a los estudiantes comprender otras ideas matemáticas y conectar ideas a través de diferentes áreas de matemáticas (p. 15).

Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990) señalan que a menudo surgen debates de cómo es mejor introducir el concepto de función en el currículo. Estos debates se centran en cuál definición debería usarse, la moderna o la vieja. Entendida la primera de éstas "como un tipo especial de relación o correspondencia, una relación con una regla que asigna a cada miembro del conjunto A exactamente un miembro del conjunto B (a esto también se le llama el acercamiento conjuntista)" (p. 27). La llamada definición vieja de función es la que la considera "como una relación entre dos variables numéricas interconectadas y basada en una regla de correspondencia" (p. 27). Kleiner (1993) considera que no es tan importante la forma de definirla, sino lo que se puede hacer con ellas. Lo cual es la esencia.

En el ámbito escolar, numerosas observaciones en clase, el análisis de los resultados de encuestas y evaluaciones, así como experiencias de aprendizaje, muestran que los estudiantes tienen dificultades en el aprendizaje de las funciones (Clement, 1985; Duval, 1999; Leinhardt et al., 1990; Moschkovich et al., 1993, entre otros) y de algunos de los conceptos que a decir de Boyer (1946), antecedieron al concepto moderno de función. Como por ejemplo el de proporciones.

De esta manera se ve, que lo que es epistemología del concepto de función se ha extendido al ámbito de lo cognitivo. La investigación en educación matemática ha dedicado mucha atención a distintos problemas que aparecen en el aprendizaje y la enseñanza de algunos de esos conceptos que antecedieron al concepto moderno de función. Por ejemplo, Behr et al. (1992), Heller et al. (1989), Karplus et al. (1983), Larson et al. (1989), Lesh et al. (1988), Noelting (1980) y, Siegler y Vago (1978), han investigado las dificultades en el aprendizaje de las proporciones.

El tópico de funciones, gráficas y graficación también ha recibido considerable atención por parte de la comunidad de investigadores en educación matemática (Leinhardt, Zaslavsky y Stein, 1990).

Las investigaciones realizadas sobre funciones (Leinhardt et al., 1990) muestran que las dificultades de los estudiantes en el tópico no son atribuibles al uso de una definición en particular. Éstas se presentan tanto en uno como en otro acercamiento. En general, dichas dificultades, más bien, se refieren a las interpretaciones y/o construcciones que llevan a cabo los estudiantes al trabajar con las distintas representaciones de una función: parejas ordenadas, ecuaciones, gráficas y descripciones verbales de relaciones.

Construcción e Interpretación de Funciones

Para Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990), la *interpretación* es “la acción por la cual un estudiante le da sentido o gana significado de una gráfica (o una porción de ella), de una ecuación funcional o de una situación” (p. 8). Además, ellas consideran que, dependiendo de la pregunta, el proceso de interpretación de una gráfica, “puede moverse desde local, es decir, lectura de puntos (...), a más global, es decir, lectura de intervalos (...) y, finalmente, a global en su más amplio sentido, es decir, la lectura de toda la gráfica” (p. 9). Aunado a esto y aceptando la posición de estas mismas autoras en el sentido de que *"*el *enfoque* se refiere a la localización de la atención dentro de una tarea específica*"* (p. 23), se puede decir, que existen tres formas de enfocar una gráfica: en puntos específicos, en intervalos o en toda ella. Estas tres formas de enfocar una gráfica son referidas, en el presente trabajo, como *enfoque puntual*, *enfoque por intervalos y enfoque global*, respectivamente. La posición que aquí se asume en torno a los distintos tipos de enfoques, difiere un poco de la sostenida por las citadas autoras. Ellas sólo utilizan los términos "enfoque puntual" y "enfoque global". El significado que le atribuyen a este último lo consideramos un "poco ambiguo": lo usan cuando en una gráfica se centra la atención en intervalos y también cuando se atiende a toda la gráfica.

Wainer (1992) por su parte, identifica esos tres acercamientos o procesamientos de la información (como él los llama) que se pueden llevar a cabo con las gráficas y los jerarquiza en niveles. El primero –al que denomina "nivel elemental"–, comprende la extracción de datos; el segundo –nivel intermedio–, implica centrar la atención en partes de la gráfica y el tercero –nivel global–, requiere una comprensión de la estructura de los datos. Aunque en este trabajo se coincide con la posición de Wainer en lo que se refiere a la diferenciación explícita de los tres enfoques, no se asume la parte que concierne a la jerarquización de los niveles en virtud de que, no se considera que, por ejemplo, la extracción de datos, es decir, enfocar una gráfica puntualmente, sea una tarea que corresponda a un "nivel elemental" para estudiantes que dominan un enfoque global y que, durante la instrucción, de hecho, no enfrentaron tareas de corte puntual. Ésta es una de las características de la población con la que se trabajó en la investigación que aquí se reporta.

Continuando con Leinhardt et al. (1990), ellas manifiestan que:

> Otra dimensión a lo largo de la cual pueden analizarse las tareas de interpretación, es su progresión a partir de una interpretación cuantitativa a una cualitativa (...). [Donde], [u]na interpretación cualitativa de una gráfica en su sentido más amplio requiere mirar toda la gráfica (o parte de ella) y darse cuenta del significado de la

> relación entre las dos variables y, en particular, su patrón de variación conjunta (p. 11).
>
> (...) [Además], al interpretar o construir gráficas cualitativamente el enfoque se mantiene principalmente sobre la gráfica misma, más que en lo específico de los ejes. (...) [Mientras que], el acercamiento cuantitativo a menudo requiere un enfoque más detallado sobre los ejes y las cantidades representadas por ellos que sobre la gráfica (p. 24).

En resumen, la acción de interpretar una gráfica exige moverse dentro de dos perspectivas. Una de ellas que transita (en cualquier dirección) de un enfoque puntual hasta un global, pasando por el de intervalos y la otra, de lo cualitativo a lo cuantitativo (o inversamente). De tal manera que, por ejemplo, interpretar una gráfica con un enfoque global cualitativo implica centrar la atención en toda la gráfica, hacer la lectura completa de ella y darse cuenta del significado de la relación entre las dos variables y, en particular, su patrón de variación conjunta.

En contraste a la interpretación, para Leinhardt y sus colaboradoras (1990), la acción de *construcción* se refiere

> al acto de generar algo nuevo (...) construir una gráfica o graficar puntos a partir de datos (o desde la regla de correspondencia de la función o de una tabla) o construir una función algebraica para una gráfica. En su sentido más amplio, la construcción [de una gráfica] involucra ir desde los datos en bruto (o función abstracta) hasta el proceso de selección y nominación de los ejes, la selección de la escala, la identificación de las unidades y la graficación (p. 12).

Para estas autoras, la construcción, como la interpretación, puede ser local (por ejemplo, graficar un número de puntos) o global (proponer una ecuación factible de asociársele al bosquejo de una gráfica dada). La construcción también puede ser cuantitativa (por ejemplo, determinar las coordenadas del punto de intersección de una recta con el eje de las abscisas) o cualitativa (bosquejar la gráfica de una ecuación dada).

La construcción (Leinhardt et al., 1990), al igual que la interpretación, puede ser bastante simple o completamente difícil. En el primer caso se tiene, por ejemplo, graficar puntos a partir de una tabla de parejas ordenadas una vez que los ejes y escalas están establecidos. Sin embargo, construir una ecuación a partir de una gráfica dada puede ser extremadamente difícil. Los ejemplos que se acaban de mencionar, son tareas de construcción que exigen de los estudiantes, "cambiar" de una representación de una función a otra.

"Cambio" de Registros de Representación

El "cambio" de una representación a otra es referido por distintos autores con diferentes términos. Por ejemplo, Janvier (1987a) habla de proceso de traducción*;* Leinhardt et al. (1990), de traducción y Duval (1999), de *conversión*.

En este trabajo se asume la posición de Duval quien considera que:

> La conversión es la transformación de la representación de un objeto, de una situación o de una información dada en un registro, en una representación de ese mismo objeto, esta misma situación o de la misma información en otro registro. Las operaciones habitualmente designadas con los términos "traducción", "ilustración", "transposición", "interpretación", "codificación", etc., son operaciones que hacen corresponder una representación dada en un registro con otra representación en otro registro. La conversión es pues una **transformación externa relativa al registro de la representación de partida** (1999, p. 44).

Para Duval (1998, 1999) la conversión de las representaciones requiere la identificación de las unidades significantes en el registro de partida y en el de llegada. Sostiene que la discriminación de estas unidades es la condición necesaria para toda actividad de conversión; por lo que es preciso poder explorar todas las variaciones posibles de una representación en un registro, haciendo la observación de las variaciones concomitantes de las representaciones en el otro registro y segmentar las dos representaciones en sus respectivas unidades significantes, de tal manera que puedan ser puestas en correspondencia. Agrega que la puesta en correspondencia de dos representaciones pertenecientes a registros diferentes, se puede establecer localmente a través de una correspondencia asociativa entre las unidades significantes elementales constitutivas de cada uno de dichos registros. Señala que, por ejemplo, en la representación gráfica de las rectas, las unidades significantes en el registro de los gráficos cartesianos están determinados por ocho valores visuales que corresponden a la asociación de tres variables visuales pertinentes para el registro de los gráficos cartesianos: el sentido de la inclinación de la recta (subiendo o bajando), la posición de su intersección con el eje de las ordenadas (corta en el origen, por arriba del origen o por debajo de éste) y el ángulo con los ejes (simétrico, ángulo más grande con el eje de las abscisas o más apequeño con dicho eje); por lo que, para las rectas no paralelas a los eje hay solamente 18 representaciones gráficas que son visualmente diferentes de manera significativa y para cada variación en el registro gráfico, se obtiene una variación concomitante de forma en el registro de la escritura algebraica.

Dificultades en el "cambio" de registros de representación. Al margen de la posición que se asuma en torno al "cambio" de registros de representación, el hecho real es que dentro del contexto de las funciones uno de los aspectos que ha sido el centro de atención de muchas investigaciones es "el cambio" de una representación a otra y las dificultades que muestran los sujetos al llevar a cabo dicho "cambio". Entre esas investigaciones se encuentran la de Acuña (1998), Campos y Carlón (1999), Carlón y Cruz (1993a, 1993b, 1994, 1995), Duval (1992), Even (1998), Guzmán y Consigliere (1997), Mac Gregor y Stacey (1993), Mevarech y Kramarsky (1997) y Moschkovich (1990, 1999).

En términos generales, es posible afirmar que los resultados de las investigaciones realizadas en torno a la conversión de los registros de representación de una función, muestran que ésta no está establecida en la mayoría de los alumnos. Duval (1999), refiriéndose a este punto, dice, "se ha probado que cambiar la forma de una representación es, para muchos alumnos de los diferentes niveles de enseñanza, una operación difícil e incluso en ocasiones imposible” (p. 28). Carpenter, Corbit, Kepner, Lindquist y Reys (1981, citados en Leinhardt et al., 1990) indican que uno de los resultados de la NAEP (National Assessment of Educational Progress) es que sólo el 18% de los estudiantes de 17 años produjeron una gráfica correcta correspondiente a una ecuación lineal, cuando se les dio una regla y una hoja de papel con ejes marcados y que, cuando se les dio la gráfica de una línea recta indicando sus intersecciones con los ejes, únicamente el 5% de dichos alumnos pudo generar la ecuación. Por su parte, Moschkovich, Schoenfeld y Arcavi (1993), citando a Mullis, et al. (1991) señalan que un resultado de la NAEP de 1990 es, que sólo el 16% de los estudiantes de preparatoria –que hicieron esa prueba– trazaron y dieron la ecuación correcta de una recta que pasara por el origen y fuese paralela a una recta dada. Duval (1992, 1999) afirma que la mayoría de los alumnos de primero de preparatoria no discriminan la forma de escritura que corresponde a una recta que pasa por el origen y la de una recta que no pasa por el origen, ni incluso la forma de escritura que corresponde a una recta con pendiente positiva y la correspondiente a una recta de pendiente negativa. Él considera que para efectuar esta discriminación hace falta, recurrir a una *interpretación global* que requiere que se hayan resaltado los diferentes valores posibles de las variables visuales pertinentes en el registro gráfico y haberlos puesto en relación con los símbolos correspondientes en la escritura algebraica.

En relación a lo anterior, Duval (1992) manifiesta que es comprensible que la mayoría de los alumnos no lleguen a una utilización correcta de las representaciones gráficas dado que la vía de interpretación global generalmente se tiene a menos en la enseñanza. Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990) opinan que el tratamiento de las características globales de una gráfica generalmente es soslayado del currículo y que la comprensión de dichas características es valiosa tanto para las matemáticas más avanzadas (especialmente cálculo) como para una comprensión total de las situaciones representadas por las gráficas. Ellas también afirman que la literatura en educación matemática contiene ejemplos de un sinnúmero de dificultades y conceptos erróneos asociados con el aprendizaje de los estudiantes para enfocar más ampliamente la totalidad de la forma de la gráfica (enfoque global) o partes de la misma (enfoque por intervalos). Además sostienen que el enfoque de los estudiantes en un solo punto (enfoque puntual) parece ser toda una tendencia a interpretar las gráficas en forma puntual, lo que conlleva a que se considere que un enfoque puntual es una de las grandes áreas que revela problemas de aprendizaje.

En este trabajo se asume que la vía de *interpretación global* no debe ser relegada del currículo y que ésta requiere que se resalten los diferentes valores posibles de las variables visuales pertinentes en el registro gráfico y ponerlos en relación con los símbolos correspondientes en la escritura algebraica (Duval, 1992, 1999).

Se considera que incorporar la vía de interpretación global en las actividades del salón de clases ayudará a los estudiantes a minimizar, por un lado, la tendencia a interpretar las gráficas en forma puntual (Leinhardt et al., 1990), y por otro, el sinnúmero de dificultades y conceptos erróneos, que a decir de Leinhardt y sus colaboradoras (1990), están asociados con el aprendizaje de los estudiantes para enfocar más ampliamente la totalidad de la forma de la gráfica (enfoque global) o partes de la misma (enfoque por intervalos).

Concepciones transitorias. Algunos de los términos que han sido empleados para describir el conocimiento existente de los estudiantes que utilizan cuando enfrentan una tarea y producen una respuesta que está en conflicto con el cuerpo de conocimientos llamado matemáticas son: conceptos erróneos (Leinhardt et al., 1990), concepciones alternativas (Mevarech y Kramarsky, 1997) y *concepciones transitorias* (Moschkovich, 1999). Los distintos términos (Mevarech y Kramarsky, 1997), reflejan diferentes perspectivas de ese conocimiento de los aprendices.

Moschkovich (1999) sostiene que el hecho de que los estudiantes de secundaria y de bachillerato, con los que ella trabajó, consideren (cuando intentan conectar las representaciones gráfica y algebraica de una función lineal) que la intersección con el eje *x* está determinada por el valor de *"m"* en la ecuación de la forma $y = mx + b$ y recíprocamente , *no* es un error superficial, una simple equivocación o un concepto erróneo sino una concepción robusta que utilizan los alumnos a fin de darle *"*sentido matemático*"* a la intersección con el eje *x*. Esto, afirma, es un ejemplo de una *concepción transitoria*. Entendida ésta como *"*una concepción la cual es el resultado de darle sentido, algunas veces productivo (aún en contextos limitados), y que tiene el potencial de ser refinada*"* (p. 172).

En estas páginas se acepta la posición de Moschkovich en torno a que el conocimiento existente de los estudiantes que utilizan cuando enfrentan una tarea y producen una respuesta que está en conflicto con el cuerpo de conocimientos llamado matemáticas es una *concepción transitoria*. Pero, independientemente de la forma en que se interprete dicho conocimiento, el hecho real es que los estudiantes muestran dificultades en distintos aspectos de las funciones. Tal es el caso de la conversión de registros de representación y el enfoque global, foco de interés de este trabajo.

Las investigaciones centradas en las dificultades que presentan los sujetos al coordinar distintas representaciones de una función muestran que dichas dificultades no son exclusivas de los estudiantes, también las exhiben profesores de matemáticas en servicio y en preservicio (Carlón y Cruz 1997; Even, 1990 y 1998; Hitt, 1992). Ante estos hechos, se han elaborado propuestas para la enseñanza del "cambio" de registros de representación (Carlón, 1990; Confrey y Smith, 1992; Cruz, 1992; Mancilla y Pinto, 1992; Wenzelburger y Cruz, 1992) que pretenden que los estudiantes logren un aprendizaje con comprensión en el "cambio" de registros de representación de las funciones.

APRENDIZAJE CON COMPRENSIÓN

COMPRENSIÓN Y "CAMBIO" DE REGISTROS DE REPRESENTACIÓN

Muchas de las dificultades –reportadas por la investigación– que muestran los estudiantes cuando enfrentan tareas de conversión entre las distintas representaciones de una función, pueden ser atribuidas a una *"*deficiente*"* comprensión en el aprendizaje de las funciones. Cuando la NCTM (2000) afirma:

> Desafortunadamente, aprender matemáticas *sin* comprensión ha sido por mucho tiempo un resultado común de la instrucción de las matemáticas escolares. Aprender sin comprensión ha sido un problema persistente desde al menos los 1930, y ha sido objeto de mucha discusión e investigación (p. 20),

hace explícito que la situación no es exclusiva del tema que aquí se discute. Por el contrario, es generalizada. Pero, por la importancia que el concepto de función tiene tanto en matemáticas como en otras áreas del conocimiento, un aprendizaje *"*sin comprensión*"* de él, es un problema crítico.

El problema de la comprensión y la conversión entre distintos registros de representación de las funciones ha sido el centro de atención en investigaciones en educación matemática. Sin embargo, a decir de Knuth (2000), pocas son las investigaciones que se han realizado en este sentido. Dentro de éstas se tienen, por ejemplo, la de Sánchez (1998), Hollar y Norwood (1999) y Knuth (2000).

MARCOS DE REFERENCIA PARA LA COMPRENSIÓN

Investigar en torno a la comprensión de los estudiantes en algún aspecto específico de su aprendizaje matemático, independientemente de cuál es éste, implica, de una u otra forma, asumir una posición en torno a qué es la comprensión y/o cómo se *"desarrolla"*. Esto último, bajo el entendido de que *"*la comprensión no es un fenómeno de todo o nada y que ella crece*"* (Hiebert y Carpenter, 1992, p. 69). O como lo expresan English y Halford (1995), refiriéndose a uno de los conceptos fundamentales en matemáticas, *"*el concepto de *número* de un niño de 5 años de edad es presumiblemente mucho más restringido que el de un matemático puro*"* (p. 57).

Miembros de la comunidad de investigadores en educación matemática reflexionan sobre la comprensión de los aprendizajes matemáticos (por ejemplo, Price, 1996); algunos proponen marcos de referencia para la comprensión de un tópico específico de la matemática (Hitt, 1998 y Moschkovich, Schoenfeld y Arcavi, 1993) y otros para la comprensión matemática (Buxkemper y Hartfiel, 2003; Duffin y Simpson, 2000; Hiebert y Carpenter, 1992; Pirie y Kieren 1994).

En estas páginas se asume la posición del Leinhardt et al. (1990) en el sentido de que

> "[u]na comprensión completa de las representaciones gráficas significa darse cuenta de qué características visuales de la gráfica no cambiarán bajo el cambio de escalas (por ejemplo, las intersecciones con los ejes) y qué características cambian cuando se alteran las escalas (por ejemplo, los ángulos geométricos que la recta forma con cada uno de los eje)" (p. 19);

así como la de Moschkovich, Schoenfeld y Arcavi (1993) para la comprensión de las funciones lineales y la de Hiebert y Carpenter (1992) para la comprensión matemática.

Marco de Referencia para la Comprensión de las Funciones Lineales de Moschkovich, Schoenfeld y Arcavi

Estos investigadores, en 1993, elaboran un marco de referencia para la comprensión de funciones lineales. Es decir, “qué significa comprender parte de un dominio –ciertamente no todo él” (p. 74).

Asumen que la comprensión es hacer conexiones y que trabajar competentemente en funciones lineales exige pensar a lo largo de al menos dos dimensiones. Una de ellas se refiere a los medios disponibles de representar funciones lineales (aclaran que su foco está sobre las tres representaciones simbólicas más comunes: algebraica tabular y gráfica) y la otra dimensión, a la perspectiva desde la cual una función lineal es vista u operada: perspectiva proceso y perspectiva objeto. En otras palabras, los autores consideran que los estudiantes deben enfrentarse con conexiones a través de representaciones (por ejemplo, el significado de los parámetros algebraicos en un contexto geométrico) y, dependiendo del contexto o la interpretación, con diferentes perspectivas (proceso u objeto) relativas a las funciones mismas.

Perspectiva proceso y perspectiva objeto. Con relación a las perspectivas proceso y objeto, ellos sostienen que:

> Desde la *perspectiva proceso*, una función es percibida como una relación entre los valores de *x* e *y*: Para cada valor de *x*, la función tiene un correspondiente valor de *y*. Desde la *perspectiva objeto*, una función o relación y cualquiera de sus representaciones son pensadas como entidades –por ejemplo, algebraicamente como miembros de clases parametrizadas, o en el plano como gráficas que, en lenguaje coloquial, son pensadas como siendo “tomadas enteras” y rotarlas o trasladarlas (p. 71).

Además, afirman que la habilidad para moverse flexiblemente entre las perspectivas proceso y objeto (i.e. ser capaces de seleccionar y transitar con soltura a través de ellas para obtener el fin deseado) en una variedad de representaciones (su interés está en la tabular, algebraica y gráfica) son aspectos de una comprensión de las relaciones lineales.

Conexión Cartesiana. Consideran que un elemento que “juega” un papel fundamental en lo que se refiere a las citadas representaciones es, la llamada Conexión Cartesiana: “Un punto está sobre la gráfica de la línea L si y sólo si sus coordenadas satisfacen la ecuación de L” (p. 73). Su importancia estriba en el hecho de que, ‘gracias a la Conexión Cartesiana las coordenadas *x* y *y* de puntos sobre la gráfica son vistos como “satisfaciendo” la ecuación y corresponder a posibles entradas en la forma tabular’ (p. 79).

En este trabajo se acepta que algunos aspectos de la comprensión de funciones lineales son: la habilidad de moverse flexiblemente entre las perspectivas proceso y objeto en una variedad de representaciones (tabular, algebraica y gráfica) y que en éstas, las Conexiones Cartesianas son importantes. Sin embargo, se considera que dichos aspectos de comprensión son válidos no sólo para funciones lineales sino para otro tipo de funciones, en particular para las polinomiales elementales que son las que, fundamentalmente, se abordan en el presente estudio. En otras palabras, se asume y se extiende el marco de referencia de Moschkovich, Schoenfeld y Arcavi (1993) para la comprensión de algunos aspectos de la función lineal.

Marco de Referencia para la Comprensión Matemática de Hiebert y Carpenter.

El marco de referencia que proponen Hiebert y Carpenter (1992) para la comprensión matemática está basado en la suposición de que el conocimiento está representado internamente, y que estas representaciones internas están estructuradas. Consideran que para pensar y comunicar ideas matemáticas, es necesario representarlas en alguna forma. Para pensarlas, se requiere representarlas internamente, en una forma que permita a la mente operar sobre ellas. Para comunicar dichas ideas, es necesario que las representaciones sean externas: hablar, escribir, simbolizar, dibujar, ... Esto se puede llevar a cabo en virtud de que, "[u]na idea matemática particular puede con frecuencia ser representada en cualquier forma o en todas las formas de representación" (p. 66).

Influencia entre las representaciones matemáticas internas y externas. Basados en dos suposiciones de la ciencia cognitiva que Hiebert y Carpenter asumen: (1) existe alguna relación entre representaciones internas y externas y (2) las representaciones internas pueden ser relacionadas o conectadas con otras en formas útiles; consideran "razonable suponer" (p. 66) que la naturaleza de las representaciones matemáticas externas influyen en las representaciones matemáticas internas e inversamente. Esto es, la forma de una representación externa (materiales físicos, dibujos, símbolos, etc.) con la cual un estudiante interactúa hace una diferencia en la forma que el estudiante representa la cantidad o relación internamente. Inversamente, la forma en la cual un estudiante trata con o genera una representación externa revela algo de como el estudiante tiene representada esa información internamente. De aquí que, conexiones entre representaciones internas pueden ser estimuladas por construcción de conexiones entre las correspondientes representaciones externas. Además, señalan que las conexiones externas se pueden llevar a cabo entre formas de representación y dentro de formas de representación.

Definición de comprensión. Hiebert y Carpenter plantean que cuando las relaciones entre representaciones internas de ideas son construidas, ellas producen redes de conocimiento. Es en términos de la forma en que la información está representada y estructurada que definen comprensión. Su definición es:

> Una idea o procedimiento o hecho matemático es comprendido si es parte de una red interna. Más específicamente, la matemática es comprendida si su representación mental es parte de una red de representaciones. El grado de comprensión esta determinado por el número y la fuerza de las conexiones. Una

idea, procedimiento o hecho matemático es comprendido completamente si está conectado a redes existentes con más fuerza o más numerosas conexiones (p. 67).

Clases de conexiones. Dichos investigadores sostienen que hay diferentes clases de conexiones que los aprendices construyen para crear redes mentales. Una está basada en similitudes y diferencias y una segunda clase, en inclusión. Relaciones de similitud y diferencia, afirman, pueden ser creadas para darse cuenta de las correspondencias entre diferentes formas de representaciones externas y dentro de la misma forma. Este tipo de relaciones no necesariamente implican relaciones de orden más alto, más bien, pueden simplemente unir piezas de información representadas en el mismo nivel de generalidad. Relaciones basadas en similitudes y diferencias, sea entre o dentro de formas de representación, son posibles de encontrarse en redes que se parecen a las telarañas. Otra clase de relación es sugerida cuando un hecho o procedimiento matemático es visto como un caso especial de otro. Esa clase de relaciones está basada sobre nociones de inclusión o nociones de casos generales y casos específicos. Es probable que dichas clases de relaciones se encuentren en una red jerárquica.

Crecimiento de la comprensión. Para estos autores, las redes de representación mental se construyen gradualmente cuando nueva información es conectada a una red existente o cuando nuevas relaciones son construidas entre previa información desconectada. La comprensión crece cuando las redes se hacen más largas y más organizadas y cuando las relaciones se fortalecen. Estos cambios en las redes, que pueden ser mejor descritos como reorganizaciones de las mismas, constituyen el crecimiento de la comprensión en virtud de que, dichas reorganizaciones (que dependen de las redes que ya han sido creadas) producen redes cohesivas más ricamente conectadas. El crecimiento de la comprensión se manifiesta algunas veces como regresiones temporales y otras, como progresiones.

Consecuencias de la comprensión matemática. Desde el punto de vista de Hiebert y Carpenter las consecuencias de la comprensión matemática son cinco: *es generativa, promueve el recuerdo, reduce la cantidad que debe ser recordada, incrementa la transferencia e influye en las creencias*.

Dichos investigadores señalan que, dentro de su marco, el hecho de que una de las consecuencias de la comprensión es que es *generativa* significa que los estudiantes crean sus propias representaciones internas y sus interacciones con el mundo y construyen sus propias redes de representación. Si los argumentos de las invenciones de los estudiantes son partes de redes bien conectadas, el resultado matemático puede ser productivo. Pero, si las invenciones están operando sobre representaciones no conectadas con conocimiento relacionado entonces, es más probable que las invenciones sean estropeadas y contraproductivas. En este sentido, “muchos de los errores que los estudiantes hacen, pueden ser interpretados como el resultado de invenciones” (p. 74).

En lo que se refiere a que la comprensión matemática *promueve el recuerdo*, Hiebert y Carpenter sostienen que la memoria es un proceso constructivo o reconstructivo en vez de una actividad pasiva de almacenamiento. Señalan que la gente frecuentemente estructura la información para recordarla; de tal manera que, le impone algún significado. Dicha información es representada por los estudiantes en una forma que se adapte con su red de conocimientos existente. Una ventaja de la inclinación de crear conexiones entre el nuevo conocimiento y el existente es que el conocimiento bien conectado es mejor recordado. Los autores consideran que hay probablemente dos explicaciones para esto:

> Primera, una red de conocimientos entera es menos probable de deteriorarse que una pieza de información aislada. Segunda, la recuperación de la información es aumentada si es conectada a redes más grandes. Hay simplemente más rutas de recuerdo (p. 75).

En torno al punto a discusión, finalmente señalan que:

> Entonces parece, que la causa de que la comprensión promueva el recuerdo es teóricamente sencilla. Si la memoria es considerada como un proceso reconstructivo entonces, involucra la misma actividad cognitiva como la de comprensión: construir conexiones entre representaciones del nuevo conocimiento y el conocimiento existente. Suponiendo que las conexiones son apropiadas matemáticamente, comprensión y memoria son incrementadas simultáneamente (p. 75).

Para estos autores, una tercera consecuencia de la comprensión es que *reduce la cantidad de información que debe ser recordada*. Consideran, por un lado, que si algo es comprendido, es representado de tal manera que esté conectado a una red. Por otro, que entre más estructurada sea una red, menos piezas individuales de información necesitan ser recuperadas separadamente. Finalmente sostienen que acceder a cualquier parte o pedazo de la red significa acceder a la red entera. Por lo que, “el recuerdo de cualquier parte simple de la red llega con el recuerdo de toda la red como un todo, reduciendo el número de detalles que deben ser recordados” (p. 75).

Una cuarta consecuencia que le atribuyen Hiebert y Carpenter a la comprensión es que *aumenta la transferencia*. Sostienen que transferir es esencial en virtud de que nuevos problemas necesitan ser resueltos utilizando estrategias previamente aprendidas. Proponen que la forma en que las representaciones internas son conectadas ayuda a explicar el potencial para transferir: a mayores conexiones, mayor potencial. Sugieren que las situaciones problema en las que los estudiantes se comprometen influyen en la naturaleza de las representaciones internas y en sus conexiones con otras representaciones. Si los problemas no promueven conexiones con otras representaciones, las redes internas que son formadas permanecen severamente limitadas y desconectadas de otro conocimiento. En otras palabras, la situación o contexto en la que tiene lugar el aprendizaje, influye en la cantidad de transferencia que realmente se produce. De tal manera que

> [l]a riqueza de la información y del material influyen en la riqueza de sus representaciones internas [las de los alumnos]. Si las actividades matemáticas en las cuales los estudiantes se comprometen son demasiado restrictivas, sus representaciones internas son severamente constreñidas y consecuentemente las redes que se están construyendo son limitadas por esas restricciones. Conexiones entre esas redes limitadas son difíciles de establecer. Los estudiantes son forzados a buscar el significado dentro de esas relativamente pequeñas redes limitadas y porque significar en matemáticas frecuentemente viene al relacionar ideas, hechos o procedimientos a través de un rango de situaciones, una búsqueda de significado dentro de un dominio demasiado limitado está obligada a ser deficiente (p. 76).

Aunado a lo anterior, señalan, que al parecer, ‘existe en los estudiantes un “esfuerzo natural de buscar significado” (...) los estudiantes están haciendo conexiones pero las conexiones son inapropiadas. (...) Evidencia de tal esfuerzo frecuentemente puede ser encontrada en los errores que ellos cometen’ (p. 76).

La quinta y última consecuencia que los citados autores le asignan a la comprensión, es que *influye en las creencias*. Señalan que la comprensión no sólo tiene consecuencias cognitivas (las cuatro citadas renglones arriba) sino también, en el campo afectivo. Consideran que los trabajos de Doyle (1983, 1988, citados por Hiebert y Carpenter) proporcionan un puente entre el proceso cognitivo de comprensión y el proceso afectivo de formar creencias. Aceptan sus argumentos en el sentido de que, (1) la clase de trabajo que los estudiantes hacen determina cómo piensan acerca de un dominio particular y lo que creen acerca de la naturaleza de la materia; (2) el trabajo es definido por las tareas que los estudiantes realizan y los procesos cognitivos que usan. Sostienen que en las clases de matemáticas, frecuentemente los estudiantes son “invitados” a memorizar procedimientos y reglas para manipular símbolos como piezas individuales de información. Por lo cual, no sorprende que los alumnos crean que las matemáticas son principalmente una materia dedicada a reglas. Pero,

> si los estudiantes fueran invitados a construir conexiones entre piezas de información –dentro de un sistema de representación o entre diferentes representaciones– uno podría suponer que los estudiantes creerían que las

> matemáticas son un cuerpo cohesivo de conocimientos, esa información adquirida en un escenario se conectará con información adquirida en otro, y que hay consistencia dentro de sistemas de representación y previsibles correspondencias entre sistemas de representación. Tales creencias, cada una a su vez, apoyarían el crecimiento posterior del conocimiento matemático (p. 77).

Influencia entre las redes existentes y las nuevas relaciones. Si bien, como se señaló párrafos arriba, la construcción de la comprensión está determinada por la construcción de relaciones que producen más largas y cohesivas redes internas, el grado en el cual la naturaleza de las nuevas relaciones influye en las redes ya existentes probablemente varíe mucho. Esto, a decir de Hiebert y Carpenter, de hecho, depende del sujeto que aprende. Afirman que un aprendiz puede tratar arduamente de adaptar, adecuadamente, la nueva idea, hecho o procedimiento a las redes existentes para que contengan la relación que está siendo creada. O bien, en el otro extremo, puede representar nueva información en una forma que no la conecte con redes existentes. En este caso, la representación podría ser considerada aislada y, si no desaparece o se debilita, puede ser conectada eventualmente con otras representaciones compartimentalizadas o sin una red conectada. Pero, aún aquí la eventual relación es influenciada por aquellas que ya existían. En otras palabras, “las redes existentes influyen en las relaciones que son construidas, por lo tanto ayudan a dar forma a las nuevas redes que son formadas” (p. 70). De aquí que, desde la perspectiva de estos autores, “los más posibles escenarios para construir comprensión involucra crecimiento en la magnitud o estructura de redes, ambos procesos se construyen sobre redes existentes” (p. 70).

Consecuentes con lo anterior, Hiebert y Carpenter hacen algunos señalamientos con relación a ciertas características que consideran convenientes para la instrucción a fin de que propicie entornos favorables para promover aprendizajes con comprensión. Esto es el tema fundamental de la siguiente sección.

DISEÑO DE AMBIENTES DE APRENDIZAJE

Bransford, Brown y Cocking (1999) afirman que "[u]n principio fundamental de las modernas teorías del aprendizaje es que diferentes objetivos de aprendizaje requieren diferentes enfoques para la instrucción" (p. xvi). Por lo que, ellos consideran que si el propósito de la instrucción es el aprendizaje con comprensión, es necesario diseñar entornos de aprendizaje que lo favorezcan.

Para estos autores, el diseño de entornos de aprendizaje (o bien, el diseño de la instrucción) es posible considerarlo desde cuatro perspectivas. La primera de ellas centra su atención en el *aprendiz o estudiante*; la segunda, en el *conocimiento*; la tercera, en la *evaluación* y la cuarta, en la *comunidad*. Estas cuatro perspectivas pueden ser trabajadas, analizadas o discutidas separadamente pero, si el objetivo de la instrucción es el aprendizaje con comprensión, necesitan ser conceptualizadas como un *todo* es decir, como un sistema de componentes interconectados que se apoyan mutuamente unos sobre otros. Esta es la posición que se acepta, para el diseño de entornos de aprendizaje, en el trabajo que aquí se refiere.

A continuación se presentan, bajo el esquema de esas cuatro perspectivas, algunos aspectos que señala la literatura y que se asumen en estas páginas.

Centrados en el estudiante

Bransford, Brown y Cocking (1999) utilizan el término "centrados en el estudiante" para referirse a los ambientes de aprendizaje que ponen atención en los conocimientos, habilidades, actitudes y creencias que los estudiantes traen al escenario educativo. Consideran que los ambientes centrados en los estudiantes aceptan que los aprendices construyen su propio significado, conocimiento y comprensión sobre los conocimientos y creencias que “llevan” al salón de clases; respetan las prácticas de lenguaje, las experiencias y comprensiones anteriores de los estudiantes, asumiendo que éstas proporcionan una base para su aprendizaje posterior y pueden servir como un fundamento sobre el cual construir las nuevas comprensiones. Sostienen que algunas veces, el conocimiento actual de los estudiantes apoya el nuevo aprendizaje y en otras, lo obstaculiza; pero que, una instrucción efectiva empieza con lo que los estudiantes traen al escenario e intenta ayudar a los alumnos a hacer conexiones entre sus conocimientos previos y sus tareas académicas actuales.

Coincidiendo con lo anterior, la visión de la NCTM, plasmada en los Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares del 2000, es que los estudiantes deben aprender matemáticas con comprensión y construir activamente nuevo conocimiento desde sus experiencias y conocimientos anteriores.

Por su parte, Hiebert y Carpenter (1992) señalan que es importante considerar la red interna que los estudiantes traen con ellos. Si los estudiantes no traen consigo la clase de conocimiento que los maestros esperan, no es fácil para ellos relacionar el nuevo material con las redes existentes. Los alumnos pueden no interpretar los materiales en la forma en la que el profesor espera y entonces, “es probable que sólo generen conexiones fortuitas” (p. 70). Para hacer las conexiones planeadas, los aprendices deben centrar su atención en las características de la representación (de un determinado conocimiento) que capture las relaciones de interés. Estos autores consideran que la instrucción debería ayudar a centrar dicha atención de los estudiantes.

Determinar qué conocimientos, cuáles de sus representaciones, qué conexiones entre ellos y ellas, etc., serán objeto de estudio en la instrucción, conlleva a centrar la atención en el conocimiento: segunda perspectiva en el diseño de los ambientes de aprendizaje.

Centrados en el conocimiento

"Los entornos centrados en el conocimiento consideran seriamente la necesidad de ayudar a los estudiantes para que lleguen a ser eruditos al aprender en formas que conduzcan a la comprensión y a la transferencia posterior" (Bransford, Brown y Cocking, 1999, p. 124).

Como se señala renglones arriba, según Bransford, Brown y Cocking (1999), una instrucción efectiva empieza con lo que los estudiantes traen al salón de clases. Esto incluye tanto los conocimientos previos de los alumnos como sus preconcepciones iniciales acerca del tema, objeto de enseñanza. Para dichos autores, cuando la instrucción empieza con un interés en las preconcepciones iniciales de los aprendices acerca del tema, los entornos centrados en el conocimiento se intersecan con los centrados en el estudiante.

Acerca de los conocimientos que necesitan adquirir los estudiantes. Definir qué conocimientos necesitan adquirir los estudiantes es uno de los elementos fundamentales en el diseño de ambientes de aprendizaje desde la perspectiva que ahora nos ocupa. Bransford, Brown y Cocking (1999) afirman que los estándares en áreas tales como matemáticas y ciencia ayudan en la mencionada definición.

La NCTM en sus Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares del 2000, sostiene que los estudiantes deberían aprender (desde el *prekindergarten* hasta el grado 12), en lo que se refiere a contenidos, números y operaciones, álgebra, geometría, medición y análisis de datos, y probabilidad; y en cuanto a procesos, resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones y representaciones. Dentro de estos cinco contenidos, las funciones son consideradas, por dicha asociación, como una de las ideas fundamentales que deberían tener un lugar prominente dentro del currículo de matemáticas. En torno a los procesos, por ejemplo el de representar, la NCTM afirma que los estudiantes deberían usar diferentes representaciones de un concepto, moverse entre ellas y elegir la representación más apropiada en una determinada situación. Asume que cuando los estudiantes trabajan con representaciones múltiples, por ejemplo, de una función, desarrollan una mejor comprensión de las funciones. Asegura que es importante para los estudiantes examinar cómo ciertos cambios en una representación ─tal como variar un parámetro en una ecuación─, afecta simultáneamente otras representaciones ─la gráfica y la tabular.

Lo anterior, es una muestra, que pone de manifiesto que la NCTM en sus Principios y Estándares del 2000, no sólo "sugiere" los contenidos y procesos que considera deberían aprender los estudiantes en los distintos niveles de enseñanza (desde el *prekindergarten* hasta el grado 12); sino también, la clase de información y las actividades que ayudan a los estudiantes a desarrollar una comprensión de las matemáticas. En este mismo tenor de ideas, Hiebert y Carpenter (1992) señalan que es importante considerar las actividades en el salón de clases que promueven la construcción de relaciones entre representaciones y Bransford, Brown y Cocking (1999) afirman que los entornos centrados en el conocimiento deben fijar su atención sobre la información y actividades que ayudan a los estudiantes a desarrollar una comprensión de las disciplinas. Estas afirmaciones plantean la necesidad de asumir una posición en torno a la naturaleza de las matemáticas es decir, es menester establecer una caracterización de las mismas.

Caracterización de las matemáticas. De acuerdo a Schoenfeld (1992), en las últimas décadas ha habido un cambio significativo frente a las matemáticas (su alcance y los medios por los cuales se pueden llevar a cabo) y en la comprensión de qué es saber y hacer matemáticas. Señala que una serie de artículos y reportes publicados a finales de los 1980, intentan caracterizar la naturaleza de las matemáticas contemporáneas, y que la principal característica de esa reconceptualización es pensar de las matemáticas, en forma amplia, como "la ciencia de los patrones". Así, con esta visión, el *National Research Council* sostiene:

> (…) El proceso de "hacer" matemáticas va más allá de los cálculos y la deducción; involucra la observación de patrones, la prueba de conjeturas y la estimación de resultados.
>
> Como una materia práctica, las matemáticas son una ciencia de patrones y orden. Su dominio no son las moléculas o las células, sino los números, la probabilidad, la forma, los algoritmos y el cambio. Como una ciencia de objetos abstractos, las matemáticas descansan sobre la lógica, más que sobre la observación, como estándar de verdad, sin embargo emplea la observación, la simulación y aún la experimentación como medios de descubrir la verdad (National Research Council, 1989, citado en Schoenfeld, 1992, p. 343).

En completo acuerdo con esta posición, Schoenfeld (1992) concibe a las matemáticas como la ciencia de los patrones que consiste de

> intentos sistemáticos, basados sobre la observación, el estudio y la experimentación, para determinar la naturaleza o los principios de regularidades en sistemas definidos axiomáticamente o teóricamente (matemáticas puras) o modelos de sistemas abstraídos de objetos del mundo real (matemáticas aplicadas). Las herramientas de las matemáticas son la abstracción, la representación y la manipulación simbólicas (p. 344).

Ante esta caracterización de las matemáticas, la cual es la que se acepta en este trabajo, las formas instruccionales (usuales en los recintos educativos) en donde,

> *hacer* matemáticas significa seguir las reglas dadas por el maestro; *saber* matemáticas significa recordar y aplicar la regla correcta cuando el maestro haga una pregunta; y la verdad matemática *está determinada* cuando la respuesta es ratificada por el maestro (Lampert, 1999, citado en Schoenfeld, 1992, p. 342),

deben cambiar. Es decir, las actividades de los estudiantes deben ser de tal naturaleza que ellos practiquen las matemáticas y no "sólo" las memoricen.

Las actividades que llevan a cabo los alumnos en una situación de aprendizaje, están determinadas por la tarea que tengan ante sí. Ella incluye, en términos generales, por un lado, los contenidos que son objeto de enseñanza y por otro, las acciones que deben llevar a cabo los estudiantes sobre dichos contenidos. De aquí que las tareas son un elemento fundamental en el diseño de los entornos de aprendizaje: *la estructuración de su contenido* (p. e. de lo simple a lo complejo) determinará la secuencia de la instrucción; *la forma de "abordar" el conocimiento* (p. e. de lo informal a lo formal), su nivel de formalidad; *el énfasis en el tipo de conocimiento* (p. e. conceptual), el enfoque de la instrucción y *la forma de presentar el conocimiento* (p. e. en un problema de la vida cotidiana), su contexto.

Sobre la estructuración del contenido de las tareas. Resnick y Ford (1990) señalan: "[c]omo sucede en otros campos, el currículo de matemáticas ha seguido tradicionalmente un camino de lo sencillo a lo complejo: de la suma y resta de números de una cifra a la resolución de problemas aritméticos complejos con varias cifras y a las ecuaciones algebraicas" (p. 57). Para estos autores, *la teoría del aprendizaje acumulativo* de Gagné (1962, 1970) supone que el aprendizaje del contenido es una acumulación de elementos cada vez más complejos, que parte de conexiones sencillas, pasa por conceptos y reglas, y llega a la resolución de problemas de orden superior. En dicha teoría, "las tareas más sencillas funcionan como componentes (elementos) de las tareas más complejas" (p. 58). En otras palabras, las tareas complejas están compuestas de elementos más sencillos e identificables. Este hecho permite la transferencia de lo sencillo a lo complejo.

Basado en su teoría del aprendizaje acumulativo, Gagné, refieren Resnick y Ford (1990), sostiene que las tareas matemáticas se pueden dividir en jerarquías de habilidades componentes. El producto de esta disgregación ordenada de habilidades y subhabilidades es llamado *jerarquía de aprendizaje*. Señalan que, "cada una de las habilidades y subhabilidades que se identifican en una jerarquía, es una capacidad de realización, es decir, es algo que una persona sabe *hacer*" (p. 60) y que, Gagné se refiere al conocimiento que se presenta en las jerarquías “como conjunto de «habilidades intelectuales», distinguiéndolo así del conocimiento de hechos” (p. 60). Por ejemplo, los valores de las tablas aritméticas, cuando los estudiantes se los saben de memoria.

Una jerarquía, continúan estos autores, se genera considerando la tarea─objetivo y preguntando: “¿Qué tendría que saber {el niño} para realizar esta tarea si sólo hubiera recibido las instrucciones?” (Gagné y otros autores, 1962, citado en Resnick y Ford, 1990). Cuando se ha identificado un primer conjunto de tareas que son requisitos previos, se puede aplicar la misma pregunta a las subtareas. Este proceso se puede repetir hasta que se haya generado una jerarquía completa de habilidades cada vez más sencillas. Las tareas se describen con un nivel de abstracción relativamente importante; no se especifica completamente cómo se realizaría el proceso. Pero, el análisis no suele ir más allá del nivel de capacidades que se supone que el estudiante ya posee. Además, la naturaleza de una jerarquía de aprendizaje es tal que las tareas subordinadas están *incluidas* en, o son *componentes* de la tarea de primer nivel. Esta no es más que una de las maneras en las que las capacidades adquiridas en las primeras etapas del aprendizaje o del desarrollo pueden tener una influencia sobre el aprendizaje posterior.

Las tareas de más alto nivel son, ciertamente, señalan Resnick y Ford (1990), más complejas que las de nivel más bajo, porque están compuestas de todas las habilidades que se han identificado en los niveles inferiores (además de otras habilidades que se pueden haber pasado por alto en el análisis). Pero las habilidades de menor nivel pueden ser las más difíciles de aprender en la realidad, en términos de tiempo necesario para dominarlas y de la forma en que hay que reorganizar el pensamiento para aceptar la nueva habilidad. La tarea nueva se puede aprender mucho más deprisa que la anterior, porque muchos componentes de la segunda ya se aprendieron en relación con la primera. Estas interrelaciones de tareas, que se basan en la transferencia, forman parte integrante de la teoría del aprendizaje acumulativo, porque son los vínculos que permiten que el conocimiento se "acumule" y que se asocian para aprender nuevas habilidades.

Resnick y Ford (1990) sostienen que las jerarquías resultan útiles para explicar el aprendizaje en muchos campos, entre ellos el de las matemáticas; se pueden aplicar a las decisiones del contenido y sugieren un orden para la enseñanza de las habilidades componentes. Una jerarquía de aprendizaje no es más que una hipótesis de partida sobre la manera en que se relacionan entre sí ciertas habilidades intelectuales. "Queda claro que lo más adecuado es interpretar con cuidado los elementos de detalle de las jerarquías de aprendizaje. Pero queda claro también que las jerarquías tienen una realidad psicológica suficiente que justifica su empleo para guiar la planificación de la enseñanza" (p.70). Una aplicación que salta a la vista es la de utilizar las jerarquías como mapa para una secuencia de enseñanza. Podemos concebir cada habilidad definida como una tarea que se debe llegar a realizar con éxito. Si varias habilidades se relacionan entre sí de forma jerárquica, entonces podemos diseñar la enseñanza de cada una de las tareas y presentar dicha enseñanza de forma secuencial. En otras palabras, la teoría del aprendizaje acumulativo implica para la enseñanza que toda tarea u objetivo del currículo se puede disgregar en componentes más sencillos. Estos componentes se pueden organizar formando una jerarquía, y cabe esperar que se produzca la transferencia de aprendizaje desde los niveles inferiores de la jerarquía a los superiores. Cuando existen dos habilidades que son independientes entre sí, se pueden aprender en cualquier orden, siempre que se aprendan ambas antes de que se intente dominar la tarea─objetivo.

Resnick y Ford (1990) aclaran que las jerarquías rara vez, o nunca, han llegado a especificar de forma *exacta* los caminos de aprendizaje de los niños. Por tanto, las jerarquías sirven a la enseñanza para proporcionar una secuencia estructurada para el profesor y para el estudiante, pero dicha secuencia no está completamente determinada. En otras palabras,

> [u]na jerarquía de aprendizaje (…) no puede representar el camino único o más eficiente para ningún estudiante concreto. Por el contrario, lo que representa es la situación que nos brinda las mejores posibilidades de transferencia en toda una muestra de estudiantes, de los que lo único que sabemos es la cantidad de habilidades relevantes que dominan en el momento de partida (Gagné, 1968, citado en Resnick y Ford, 1990).

Por lo tanto, continúan estos investigadores, las jerarquías de aprendizaje pueden ser unas herramientas útiles, que permitan a los profesores y a los planificadores de la enseñanza determinar la organización del aprendizaje de habilidades, tal como ellos lo conciben, y medir las diferencias del nivel de aprendizaje entre los niños. Pero se deben utilizar con cuidado. Si se utilizan con prudencia y con flexibilidad, las jerarquías bien diseñadas pueden resultar útiles para asegurarse de que todos los niños, hasta los menos dotados, lleguen a dominar los principios básicos de las matemáticas escolares.

Los citados autores manifiestan que, es evidente que algunos individuos son capaces de "saltarse" a veces los requisitos previos, y que parece que son capaces de aprender conductas complejas sin practicar explícitamente las habilidades que se supone son requisitos previos de dichas conductas. No obstante, estudios como por ejemplo el de Resnick, Siegel y Kresh de 1971 y el de Caruso y Resnick de 1972 (citados en Resnick y Ford, 1990) mostraron que todos los estudiantes que habían conseguido aprender antes la habilidad compleja demostraron en los tests que *también* habían llegado a dominar todos los requisitos previos. "Esto confirma que la jerarquía de habilidades es una realidad psicológica, pero indica que algunos individuos son capaces de aprender los componentes que son requisitos previos en el contexto de una habilidad más compleja, sin recibir una enseñanza explícita de cada subhabilidad" (p. 77).

Por otra parte, Duval (1998), refiriéndose a la conversión de los registros de representación gráfico y algebraico de las funciones, afirma que un tipo de tareas que parece imponerse para favorecer la coordinación de registros de representación en los estudiantes, son las *tareas de variación comparativa*. Es decir, tareas en las que “se realice, por una parte, la observación de las variaciones de representación efectuadas sistemáticamente en un registro y, por otro lado, las variaciones concomitantes de representación en otro registro” (p. 190). Además sostiene que para proponer tareas de variación comparativa se requiere identificar previamente todos los factores de variación pertinente de una representación en un registro.

Esta posición de Duval, juzgada a la luz de la teoría del aprendizaje acumulativo, es posible interpretarla de la siguiente manera: la tarea─objetivo es la conversión de registros de representación y las subtareas, todas aquellas que emanen al llevar a cabo las variaciones sistemáticas en un registro de representación y observar las variaciones concomitantes de representación en otro registro.

Además de la posición que se asuma al diseñar entornos de aprendizaje con relación a la forma de estructurar el conocimiento en las tareas, es necesario definir el nivel de formalidad con el que se va a abordar dicho conocimiento en las citadas tareas: informal, formal o cualquier nivel de formalidad que se encuentre entre estos límites.

Sobre la forma de “abordar” el conocimiento en las tareas. Bransford, Brown y Cocking (1999) señalan que existen nuevas aproximaciones interesantes para desarrollar el currículo que soportan o apoyan el aprendizaje con comprensión y estimulan el dar sentido. Una es la “formalización progresiva”, la cual empieza con las ideas informales que los estudiantes traen a la escuela y gradualmente se les ayuda para que vean como estas ideas pueden ser transformadas y formalizadas. Las unidades instruccionales estimulan a los estudiantes para construir sobre sus ideas informales en una manera gradual pero estructurada así que ellos adquieren los conceptos y procedimientos de una disciplina.

La “formalización progresiva”, afirman estos autores, es una cuestión que representa otro ejemplo del traslape o intersección entre la perspectiva centrada en el aprendiz y la centrada en el conocimiento.

Por su parte, Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990), con referencia al tema de funciones, sostienen que la instrucción debería moverse desde lo menos formal, menos abstracto, más global e intuitivo al sistema formal, notacionalmente riguroso.

En resumen, estos seis autores son partidarios de que los conceptos y procedimientos, objetos de enseñanza, sean abordados en una secuencia de lo informal a lo formal. Reiterando lo que se señala desde el inicio del apartado titulado “Diseño de ambientes de aprendizaje”, esta posición, al igual que todas las que contiene el citado apartado, se aceptan en el presente trabajo.

Al diseñar entornos de aprendizaje es menester, además de establecer la secuencia, determinar el tipo de conocimiento a enfatizar en las tareas: de procedimiento y/o conceptual.

Sobre el énfasis en el tipo de conocimiento en las tareas. Bransford, Brown y Cocking (1999) manifiestan que los procesos de cálculo o cómputo que sólo requiere el despliegue de un conjunto de rutinas son enfatizados en “muchos currículos de matemáticas” (p. 125). Señalan que no es que los estudiantes nunca deberían aprender a calcular o computar, pero ellos deberían aprender también otras cosas acerca de las matemáticas, especialmente el hecho de que es posible para ellos darles sentido y pensar matemáticamente.

Por su parte, Hiebert y Carpenter (1992) consideran que tanto el conocimiento de procedimientos como el conceptual son necesarios para la habilidad matemática. Sugieren que las relaciones entre estos dos tipos de conocimiento dependen de las conexiones que los aprendices construyen entre sus representaciones y que los ambientes para la enseñanza, deberían ser diseñados para ayudar a los estudiantes a construir representaciones internas de procedimientos que se vuelven parte de redes conceptuales más grandes antes de estimular la práctica repetida de procedimientos.

La NCTM (2000) sostiene que desarrollar el dominio de las matemáticas requiere un balance y conexión entre la comprensión conceptual y la destreza computacional (p. 35). Además señala:

> (…) Uno de los resultados más robustos de la investigación es que la comprensión conceptual es un componente importante de la pericia [matemática], junto con el conocimiento de hechos y la facilidad en procedimientos (Bransford, Brown, and Cocking, 1999).
>
> La alianza del conocimiento de hechos, la pericia en procedimientos y la comprensión conceptual hacen a las tres componentes utilizables en formas poderosas. Los estudiantes quienes memorizan hechos o procedimientos sin comprensión frecuentemente no están seguros de cuándo o cómo usar lo que ellos conocen, y tal aprendizaje es con frecuencia demasiado frágil (Bransford, Brown y Cocking, 1999). Aprender con comprensión también hace el aprendizaje subsecuente más fácil (p. 20).

A su vez, Bransford, Brown y Cocking (1999), basados en el hecho de que “la importancia del automatismo ha sido demostrada en un número de áreas” (p. 127), manifiestan que un reto para el diseño de ambientes centrados en el conocimiento es dar con el balance apropiado entre actividades diseñadas para promover la comprensión y aquellas diseñadas para promover la automatización de habilidades necesarias para funcionar efectivamente.

Diseñar tareas con la intención de promover aprendizajes con comprensión requiere, además de lo señalado con anterioridad, definir de qué manera se presentará el conocimiento: en un contexto puramente matemático o en un contexto no matemático. Este último referido por Leinhardt et al. (1990) como contextualizado, y por la NCTM (2000), como de aplicaciones.

Sobre la forma de presentar el conocimiento en las tareas. La NCTM (2000) indica que las tareas pueden estar relacionadas con las experiencias del mundo real de los estudiantes, o ellas pueden plantearse en contextos que son puramente matemáticos. Considera que en *high school*, muchas áreas del currículo pueden ser introducidas a través de problemas desde contextos matemáticos o de aplicaciones.

En relación al tema de funciones y ante el hecho de que el número de conexiones que se pueden establecer con el concepto de función son múltiples: con otras ciencias (física, biología, economía, …), con la vida cotidiana, con otros conceptos matemáticos, con las diferentes representaciones de una función, etc. (NCTM, 2000); en principio, el contexto de las tareas para el estudio de dicho tema, puede ser puramente matemático o de aplicaciones. Sin embargo, Leinhardt y sus colaboradoras (1990) manifiestan que los estudios que incluyen tareas contextualizadas (referidas por la NCTM como problemas en un contexto de aplicaciones) a menudo están basados en la presunción de que es más fácil para los estudiantes tratar con problemas que se construyen sobre situaciones familiares que tratar con situaciones abstractas. Sin embargo, sostienen, “no es claro que una clase de contexto de la vida real apoye siempre el proceso de aprendizaje” (p. 20).

Por su parte Duval (1992) sostiene que

> [u]n aprendizaje de la vía de interpretación global [de la representación gráfica y algebraica de una función, tema de interés en este estudio] no puede economizar un estudio puramente matemático. (…) la presentación de un fenómeno físico, económico o biológico da tal vez un interés mayor a las gráficas pero esta presentación no facilita la aprehensión del funcionamiento semiótico de un registro, ella lo presupone por el contrario (p. 138).

Esta posición de Duval es la que se acepta en el trabajo que aquí se reporta; por tal razón, en las tareas que en él se incluyen, se presenta el conocimiento en un contexto puramente matemático.

Al margen de cuál sea el contexto que se seleccione para presentar el conocimiento y de la posición que se asuma en los otros puntos señalados renglones arriba (la estructuración del contenido, la forma de "abordar" el conocimiento y el énfasis en el tipo de conocimiento), elaborar las tareas con las que habrán de enfrentarse los estudiantes a fin de promover aprendizajes con comprensión es, como señala la NCTM (2000), una parte difícil de la enseñanza. Sin embargo, "la dificultad" al diseñar entornos de aprendizaje se incrementa al considerar otro de sus aspectos fundamentales: la evaluación.

Centrados en la evaluación

Diseños efectivos de entornos de aprendizaje deben estar centrados en la evaluación. Ella debería proporcionar oportunidades para la retroalimentación y revisión y, debe ser congruente con los objetivos del aprendizaje (Bransford, Brown y Cocking, 1999). La evaluación debería centrarse en la comprensión de los estudiantes así como en sus habilidades de procedimiento (NCTM, 2000).

La evaluación (uno de los seis Principios de la NCTM en sus Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares del 2000) "debería apoyar el aprendizaje de matemáticas importantes y proporcionar información útil a maestros y estudiantes" (NCTM, 2000, p. 11). Debería ser una parte integral de la instrucción matemática que informe y guíe a los profesores cuando tomen decisiones sobre la instrucción, más que meramente una prueba al final de la instrucción para ver cómo los estudiantes se desempeñan en condiciones especiales. Cuando la evaluación es una parte integral de la instrucción matemática contribuye significativamente al aprendizaje de los estudiantes (NCTM, 2000).

Para asegurar que el aprendizaje de las matemáticas sea profundo y cualitativamente alto, la evaluación y la instrucción deben estar integradas de tal manera que la evaluación sea una parte rutinaria del proceso de las actividades del salón de clases, más que una interrupción (NCTM, 2000). Los dos mayores usos de la evaluación son: *la sumativa y la formativa* (Bransford, Brown y Cocking, 1999).

Evaluación sumativa. La evaluación sumativa mide lo que los estudiantes han aprendido al final de algún conjunto de actividades de aprendizaje (Bransford, Brown y Cocking, 1999) es decir, se usa para juzgar el logro de los estudiantes (NCTM, 2000). Este tipo de evaluación incluye exámenes hechos por el maestro y que los estudiantes presentan al final de una unidad de estudio o de un curso (Bransford, Brown y Cocking, 1999).

Si bien la evaluación sumativa es importante porque una de sus funciones principales es la promoción (o no promoción) de los estudiantes a un nuevo curso o ciclo escolar (Lafourcade, 1969), la evaluación debería ser más que solamente usar pruebas para certificar el logro de los estudiantes; debería ser parte integral de la instrucción que guíe a los profesores cuando tomen decisiones instruccionales e incremente el aprendizaje de los estudiantes (NCTM, 2000). Esto es, la evaluación debería ser también formativa.

Evaluación formativa. La evaluación formativa comprende el uso de evaluaciones (usualmente administradas en el contexto del salón de clases) como recurso de retroalimentación para mejorar la enseñanza y el aprendizaje. La evaluación formativa incluye, por ejemplo, comentarios del profesor al trabajo en proceso (Bransford, Brown y Cocking, 1999), hacer preguntas durante el curso de una lección, dar sugerencias escritas y llevar a cabo conversaciones y entrevistas con los estudiantes (NCTM, 2000).

La evaluación formativa proporciona a los estudiantes oportunidades para revisar y por lo tanto mejorar la cualidad de su pensamiento y aprendizaje. De aquí que, la suma de oportunidades para la evaluación formativa incrementa el aprendizaje de los estudiantes y la transferencia (Bransford, Brown y Cocking, 1999).

Dado el objetivo de aprendizaje con comprensión, la evaluación y la retroalimentación deben centrarse en la comprensión y no únicamente en la memorización de procedimientos y hechos (aunque esto también puede ser valioso). Oportunidades para la retroalimentación deberían ocurrir continuamente, pero no “intrusamente”, sino como parte de la instrucción (Bransford, Brown y Cocking, 1999).

La retroalimentación es más valiosa cuando los estudiantes tienen la oportunidad de usarla para revisar sus pensamientos y cómo están trabajando en una unidad o proyecto (Bransford, Brown y Cocking, 1999). La retroalimentación puede también ayudar a los estudiantes a proponerse objetivos, asumir responsablemente su propio aprendizaje, y llegar a ser aprendices más independientes (NCTM, 2000).

Oportunidades para trabajar colaborativamente en grupo también puede incrementar, cualitativamente, la retroalimentación de los estudiantes (Bransford, Brown y Cocking, 1999) y tener un impacto positivo en su aprendizaje (Wilson y Kenney, citados en NCTM, 2000). Discusiones en el salón de clases en las cuales los estudiantes presenten y valoren diferentes propuestas para resolver un problema, pueden ayudarlos a comprender las características de una respuesta completa y correcta. Con la discusión pública de criterios para este tipo de respuestas, los profesores pueden ayudar a sus estudiantes en la disposición y capacidad para comprometerse en su autoevaluación y reflexionar sobre su propio trabajo y sobre las ideas propuestas por otros es decir, evaluar a sus pares (NCTM, 2000).

No obstante que muchos estudiantes deben ser ayudados a aprender cómo trabajar colaborativamente (Bransford, Brown y Cocking 1999), ellos necesitan oportunidades para someter a prueba sus ideas sobre las bases de compartir conocimiento en la comunidad matemática del salón de clases (NCTM, 2000).

Centrados en la comunidad

Actualmente se considera al aprendizaje de las matemáticas como una actividad inherentemente social (tanto como cognitiva), y esencialmente constructiva, en lugar de considerarla como un proceso de absorción (Schoenfeld, 1992).

De acuerdo con Bransford, Brown y Cocking (1999), "[n]uevos desarrollos en la ciencia del aprendizaje sugieren que el grado en el cual los ambientes de aprendizaje estén centrados en la comunidad es también importante para el aprendizaje" (p. 132).

Para Schoenfeld (1992), los salones de clases de matemáticas son *comunidades de práctica* (grupos de personas involucradas en tareas comunes dentro de su propia cultura) en las cuales los estudiantes aprenden matemáticas. De aquí que, los salones de clases deben ser comunidades en las cuales se practique la construcción del sentido matemático. Sin embargo, dado que, ser miembro de una comunidad de práctica matemática es parte de lo que constituye saber y hacer matemáticas, es menester asumir una posición en torno a qué son las matemáticas, es decir, es necesario caracterizarlas, a fin de que, en las actividades que realicen los estudiantes en los salones de clase, se practiquen los modos matemáticos que se desea desarrollar y que respondan a dicha caracterización.

Bajo el esquema de Bransford, Brown y Cocking (1999), lo anterior es una muestra más de los traslapes o intersecciones de los entornos. En este caso, en lo referente al conocimiento y a la comunidad. Por otra parte, estos mismos autores señalan que en los entornos centrados en la comunidad, las normas son especialmente importantes para el aprendizaje de la gente.

En resumen, al diseñar los entornos de aprendizaje centrados en la comunidad, hay que considerar dos aspectos: las *actividades* que habrán de realizar los estudiantes y las *normas* del salón de clases, es decir, de la comunidad. A continuación se expone lo que se asume en estas páginas en torno a cada uno de esos dos aspectos.

Las actividades. Aceptando de Schoenfeld (1992) la caracterización que hace de las matemáticas y el supuesto de que los salones de clase deben ser comunidades en las cuales la construcción del sentido matemático se practique y la posición de Greeno (1988, citado en Schoenfeld, 1992) de que una práctica es una actividad de cada día en un contexto social en el cual ella depende de la comunicación y la colaboración con los otros, las tareas que enfrenten los estudiantes deben promover, entre otras actividades, la observación, la abstracción y la representación; todas ellas en un ambiente de constante comunicación y colaboración con los demás integrantes del grupo, es decir, con la comunidad del salón de clases.

Por otro lado, Hiebert y Carpenter (1992) señalan que es importante considerar las actividades en el salón de clases que promueven la construcción de relaciones entre representaciones. Consideran que es posible argumentar que los estudiantes pueden beneficiarse de una dirección explícita cuando ellos construyen conexiones. En caso contrario, es posible que centren su atención “en conexiones superficiales que no corresponden a las conexiones requeridas para ejecutar hábilmente y comprender los conceptos centrales” (p. 86). Aceptan que la interacción social en el salón de clases proporciona una forma poderosa de encauzar la atención de los alumnos y que el discurso la puede orientar en las relaciones matemáticas de interés “[h]asta el punto que el mismo hecho matemático sea percibido por todos los estudiantes” (p. 72). Aunado a lo anterior, sostienen que discusiones en grupos cooperativos (discusión en equipo) y del grupo en su conjunto (discusión grupal), pueden proporcionar la oportunidad a los estudiantes para describir y explicar las conexiones que ellos han formado.

ACTIVIDADES EN GRUPO. Las “bondades” que en el aprendizaje de las matemáticas tiene el trabajo colectivo –en equipo y del grupo en su conjunto– en el salón de clases, no sólo es reconocido por Hiebert y Carpenter (1992), también se han manifestado en ese sentido Artzt y Newman, 1990; Cobb, Yackel y Word, 1992; Coulibaly, 1987; Forman, 1989; Good, Mulryan y McCaslin, 1992; Goos y Galbraith, 1996; Goos, Galbraith y Renshaw, 2002; Grevsmühl, 1991; Grisvard, 1981, 1983; Hoyles, Healy y Possi, 1993, citados en Laborde, 1994; Kramarski, Maverech y Arami, 2002; Mugny, 1985; Laborde, 1994; Leikin y Zaslavsky, 1997; NCTM, 2000. Su justificación está, como se menciona en el Capítulo 1 de este trabajo, en la aceptación de que el aprendizaje tiene como una de sus componentes la interacción social entre individuos. Vygotsky (1892-1934), uno de los más grandes expositores de esta línea de pensamiento, en su libro *Pensamiento y lenguaje* (1992) pone de manifiesto lo importante que para el aprendizaje de un individuo es la comunicación con otros.

La investigación educativa ha considerado, por un lado, el aprendizaje individual de los integrantes del grupo pequeño como resultado de la interacción entre los diversos elementos que entran en juego en el trabajo en equipo: la tarea, los recursos con que cuentan para realizarla y el ambiente en que tiene lugar la actividad; por otro, lo que el grupo pequeño produce, al margen de logros personales de sus integrantes (Zawojewski, Lesh y English, 2003).

En la primera parte del estudio que aquí se reporta, la atención se centra, fundamentalmente, en el aprendizaje que logra cada estudiante como resultado de su trabajo individual y su participación en el trabajo colectivo –en equipo y del grupo en su conjunto– en el salón de clases; en la segunda parte, en el producto que emana de la actividad del equipo.

En las situaciones de trabajo en grupo, los estudiantes deben resolver conjuntamente un problema y estar de acuerdo en una solución común. Así, los alumnos se enfrentan con dos dificultades: resolver un problema matemático y realizar esta tarea a través de una actividad social (Laborde, 1994).

Los resultados positivos de introducir una dimensión social en las situaciones de aprendizaje en matemáticas están relacionados con el incremento de la complejidad de estas situaciones debido a los aspectos sociales; quizá la mayor complejidad es una razón mayor para más aprendizaje (Laborde, 1994).

Llegar a un acuerdo sobre una solución común con otros requiere, al menos, hacer explícito nuestro propio enfoque, posiblemente compararlo con el enfoque del compañero, y eventualmente argumentar en contra de él (Robert y Tenaud, 1989, citados en Laborde 1994; Yackel, 1991).

Trabajar en pequeños grupos involucra una multiplicidad de enfoques y puntos de vista, moverse de una estrategia de resolución a otra, considerar un problema bajo puntos de vista distintos; todo esto contribuye a un uso más flexible del conocimiento y así, a un trabajo de coordinación conceptual más grande (Laborde, 1994).

La interacción entre pares puede amplificar el interés y la motivación de los estudiantes involucrados e incrementar la capacidad de la potencia matemática (Zawojewski, Lesh y English, 2003).

La solución producida por el equipo generalmente es mejor que la producida por un individuo (Middleton, Lesh y Heger, 2003; Noddings, 1989; Slavin, 1989a, 1989b; Zawojewski, Lesh y English, 2003). Las propuestas hechas por un estudiante pueden ser mejoradas por los otros compañeros y transformadas en soluciones más sofisticadas. Nuevos enfoques hacia una solución pueden ser elaborados a partir de propuestas hechas por cualquier estudiante e ir más allá de la simple adición de ideas (Laborde, 1994; Robert y

Tenaud, 1989, citados en Laborde, 1994). Naturalmente, no se excluye que ante posiciones diferentes entre compañeros se puedan “lograr acuerdos” por causas externas al problema matemático, por ejemplo, por “argumentos de autoridad”. Pero, si un conflicto no es resuelto por argumentos racionales, ni la solución ni la razón son necesariamente correctas desde un punto de vista matemático (Laborde, 1994; Balacheff, 1991).

El comportamiento de los estudiantes en el grupo de trabajo y el contenido de sus intercambios se ven influidos por la tarea (Cohen, 1994; Hoyles, Healy y Possi, 1993, citados en Laborde, 1994; Laborde, 1994; Robert y Tenaud, 1989, citados en Laborde, 1994; Zawojewski, Lesh y English, 2003). Ella debe proporcionar una situación nueva para los alumnos, de tal manera que no puedan resolverla de manera inmediata pero sí iniciarla con sus conocimientos previos. Esto, juzgado a la luz del punto de vista de Bransford, Brown y Cocking (1999), es una muestra más del traslape de los entornos de aprendizaje centrados en el estudiante, en el conocimiento y en la comunidad.

Por todo lo anterior, es posible afirmar que el trabajo colectivo en la clase de matemáticas parece ser una actividad prometedora para que los alumnos mejoren sus aprendizajes, es decir, aumenten su comprensión.

En relación a la comprensión, antes de continuar, cabe señalar, en primer lugar, que en estas páginas, como se señala renglones arriba, se acepta la posición de Hiebert y Carpenter (1992) y lo que implica; en segundo, que dicha posición se extiende al trabajo en equipo por lo que, se asume que *es posible estimar el grado de comprensión de un equipo a través de las producciones escritas que genere*.

Si se acepta que la discusión en equipo y la discusión grupal (naturalmente, también el trabajo individual) son actividades que favorecen el aprendizaje, es necesario, como lo refiere Cobb (2000), estructurarlas al momento de delinear los entornos de aprendizaje.

Estructura de las actividades. Una decisión importante al diseñar ambientes de aprendizaje es bosquejar la estructura de las actividades del salón de clases, es decir, determinar, en la medida de lo posible, la forma en la cual se llevarán a cabo: individual y/o por equipo y/o grupal (Cobb, 2000). De hecho lo que se tiene que definir, es la o las combinaciones de estas tres formas de trabajo para los distintos momentos de la instrucción. Por ejemplo, una estructura de las actividades puede ser, para cada punto a tratar, iniciar con una discusión grupal, continuar con trabajo en equipo y finalizar con un trabajo grupal. Aunado a lo anterior, en la comunidad del salón de clases existen normas que permiten llevar a cabo las actividades dentro de dicha comunidad.

Las normas. Bransford, Brown y Cocking (1999) señalan que las normas son especialmente importantes en los ambientes de aprendizaje centrados en la comunidad. En este trabajo se admite que las normas sociales del salón de clases y las sociomatemáticas, tomadas de la perspectiva social de Cobb (2000), rigen las actividades que realizan los miembros de una comunidad del salón de clases de matemáticas.

Normas sociales del salón de clases. Para cada fase de la estructura de las actividades del salón de clases es decir, para el trabajo individual, en equipo y grupal, existen normas sociales que establecen las obligaciones de las acciones de un miembro de la comunidad y las expectativas que el maestro y los estudiantes tienen para cada una de las acciones de los otros. En otras palabras, las normas sociales fijan los roles de los diferentes miembros de la comunidad. Por ejemplo, las normas sociales para una discusión grupal pueden ser, que los estudiantes estén obligados a explicar y justificar sus soluciones, escuchar las explicaciones dadas por otros e indicar su acuerdo o desacuerdo y plantear alternativas cuando aparentemente se tengan interpretaciones en conflicto (Cobb, 2000).

Las normas sociales no son específicas de matemáticas, sino que se refieren a cualquier otra disciplina. Por ejemplo, uno podría esperar que los estudiantes debieran explicar y justificar su razonamiento en clases de historia y ciencias así como en matemáticas (Cobb, 2000). La normatividad que es propia de la actividad matemática en el salón de clases está determinada por las normas sociomatemáticas.

NORMAS SOCIOMATEMÁTICAS DEL SALÓN DE CLASES. Cobb (2000) señala que las normas sociomatemáticas tratan con las acciones e interacciones de los miembros de una comunidad del salón de clases que son específicas de matemáticas. De acuerdo a Cobb (2000), algunos ejemplos de este tipo de normas son: qué vale como una solución matemática diferente, sofisticada y/o eficiente, y cuándo una explicación matemática es aceptable (i.e. que el maestro y los otros estudiantes acepten como legítimos los argumentos dados por uno de los miembros de dicha comunidad). Considera que estas normas resultan ser particularmente importantes porque pueden favorecer el desarrollo de la autonomía intelectual de los estudiantes, es decir, pueden contribuir a que ellos dependan cada vez más de sus propios juicios, mas que apelar directamente a la autoridad del profesor o del libro de texto, o como lo refiere Schoenfeld (1992), "a sentir confianza en su habilidad para hacer matemáticas" (p. 345).

Para cerrar con la exposición de los supuestos que se aceptan en el trabajo que en estas páginas se reporta y, por ende, concluir el presente Capítulo, sólo resta reiterar que si bien las cuatro perspectivas para el diseño de ambientes de aprendizaje (centradas en el estudiante, en el conocimiento, en la evaluación y en la comunidad) se han discutido prácticamente por separado, ellas deben estar en correspondencia unas a otras porque todas ellas tienen el potencial de superponerse e influenciarse mutuamente. Dicha correspondencia "parece ser muy importante para acelerar el aprendizaje" (Bransford, Brown y Cocking, 1999, p. 142).

CAPÍTULO 3
METODOLOGÍA DEL ESTUDIO

Introducción

Para poder explorar en qué medida una instrucción centrada en el alumno, la evaluación, la comunidad del salón de clases y el conocimiento de la conversión de los registros de representación gráfico y algebraico en funciones polinomiales elementales de la forma $y = ax^n + b$, *donde* $a, b \in \Re$, $a \neq 0$ y n = *1, 2* y *3,* con un enfoque global cualitativo, promueve un aprendizaje con comprensión de dichas funciones polinomiales y el dominio de la referida conversión en alumnos de bachillerato, se requiere contar con:

i) una población de alumnos de bachillerato,

ii) el diseño del ambiente de aprendizaje que centre su atención en los cuatro aspectos arriba señalados,

iii) los instrumentos que hagan posible la recabación de datos y,

iv) las posiciones teóricas a la luz de las cuales se analicen dichos datos.

Atendiendo a estas necesidades, el Capítulo que ahora nos ocupa, está dedicado a describir lo concerniente a esos aspectos. La presentación se realiza en cinco apartados; éstos responden al título de: El Estudio, Diseño del Ambiente de Aprendizaje, Los Instrumentos y su Aplicación, Recabación de los Datos y Análisis de los Datos.

A continuación se expone lo correspondiente a cada uno de estos apartados en el orden en el que se citaron.

EL ESTUDIO

Propósito

El propósito fundamental del trabajo que en estas páginas se reporta es explorar en qué medida una instrucción centrada en el alumno, la evaluación, la comunidad del salón de clases y el conocimiento de la conversión de los registros de representación gráfico y algebraico en funciones polinomiales elementales de la forma $y = ax^n + b$, *donde* a, $b \in \Re$, $a \neq 0$ y $n = 1, 2$ y 3, con un enfoque global cualitativo, promueve un aprendizaje con comprensión de dichas funciones polinomiales y el dominio de la referida conversión en alumnos de bachillerato.

Ante este propósito y en lo que respecta a la *comprensión*, a la luz de las posiciones de Hiebert y Carpenter (1992); Moschkovich, Schoenfeld y Arcavi (1993) y Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990), es posible apreciar el grado de comprensión que alcanzan los estudiantes en funciones de la forma $y = ax^n + b$, *donde* a, $b \in \Re$, $a \neq 0$ y $n = 1, 2$ y 3, a través de la forma en la cual tratan o generan representaciones externas en virtud de que éstas *revelan algo* del número de conexiones que los alumnos han logrado establecer en sus redes internas de conocimiento y dado que, a mayor número de conexiones, mayor comprensión entonces, es factible valorar el grado en el cual la instrucción promueve aprendizajes con comprensión en términos del desempeño que muestren los estudiantes cuando enfrentan situaciones problemáticas cuyo contenido matemático esté relacionado con las referidas funciones polinomiales. En otras palabras, dicho desempeño es un indicador de la medida en que establecen conexiones pertinentes con otros aspectos de las citadas funciones que no fueron abordados en la instrucción. Éstos, sin embargo, son múltiples; por ejemplo, sus operaciones; sus máximos y mínimos; su límite; su rapidez de variación; sus aplicaciones en la vida cotidiana y en otras ciencias (física, biología, economía); la conversión de la representación tabular a la algebraica o del lenguaje natural a su representación simbólica; las “modificaciones” que sufre su gráfica cuando se alteran las escalas o la interpretación de su gráfica con un enfoque puntual. Ante la gama de aspectos factibles de ser explorados y que, evidentemente, está fuera de los alcances de este trabajo indagar el desempeño de los estudiantes en *todos* ellos, se decide centrar la atención en seis: la forma en que enfrentan tareas que exigen un enfoque puntual de la gráfica de una función; la medida en la cual son capaces de percibir a las funciones como proceso y como objeto y moverse flexiblemente entre esas perspectivas; la manera en que llevan a cabo la conversión de los registros de representación gráfico y algebraico en funciones “un tanto similares” a las presentadas en la instrucción; cuáles de las características de una gráfica que no cambian cuando se alteran las escalas y cuáles de las que sí cambian son identificadas por los estudiantes cuando abordan tareas de escala; cómo se desempeñan los escolares cuando enfrentan situaciones contextualizadas que involucran tanto funciones que se trabajaron en la instrucción como algunas que no se estudiaron y, qué recuerdan, después de un año, de la conversión de registros de representación estudiada por ellos un año atrás y cómo la llevan a cabo.

En síntesis, es posible valorar la medida en que la instrucción promueve aprendizajes con comprensión en términos del desempeño que muestren los estudiantes cuando enfrentan situaciones problemáticas cuyo contenido matemático está relacionado con las funciones polinomiales elementales; de tal manera que, a mayor éxito de los estudiantes en las situaciones planteadas, existen mayores posibilidades de que la instrucción promueva aprendizajes con comprensión.

Por otra parte, en lo que se refiere al *dominio de la citada conversión*, de la que se habla en el propósito del estudio, en este trabajo se considera que un estudiante domina la conversión de los registros de representación gráfico y algebraico en funciones polinomiales de la forma $y = ax^n + b$, *donde* $a, b \in \Re$,

$a \neq 0$ y $n = 1$, 2 y 3, si contesta de manera correcta al menos el 60% de las preguntas de un Cuestionario que es diseñado para tal fin.

Finalmente, como se señala renglones arriba, el estudio se llevó a cabo con alumnos de bachillerato. A continuación, se describen, brevemente, las características de la población estudiada y el entorno en el que se realizó dicho estudio.

Población

La población sujeta a estudio fueron 70 alumnos de 4º semestre del bachillerato de la UNAM (CCH-Sur), distribuidos en dos grupos. Uno de ellos con 38 estudiantes y el otro con 32. Su edad oscilaba entre los 16 y 17 años y todos ellos cursaban por primera vez la asignatura de Matemáticas IV. Ni los alumnos ni los grupos fueron seleccionados por algún criterio. Los alumnos eran "estudiantes típicos" cursando la materia. Más que una población seleccionada fue una población de oportunidad: los grupos que tenía a su cargo la autora de estas páginas.

Entorno

El proceso de instrucción se llevó a cabo en un entorno natural: en el salón de clases de matemáticas dentro de un curso curricular. La clase de matemáticas cuenta con cinco horas a la semana y los alumnos asisten al salón de clases tres veces por semana: dos sesiones de dos horas cada una y una sesión de una hora.

En seguida se exponen los elementos que se consideraron en el diseño del entorno de aprendizaje que permitió llevar a cabo el proceso de instrucción mencionado.

DISEÑO DEL AMBIENTE DE APRENDIZAJE

Para el diseño del ambiente de aprendizaje requerido en este trabajo, se asumió, como se señala en el Capítulo 2, la posición de Bransford, Brown y Cocking (1999). Estos autores sostienen que si el objetivo de la instrucción es el aprendizaje con comprensión (lo cual es uno de los propósitos del estudio que en estas páginas se reporta), dicho diseño debe considerarse desde cuatro perspectivas ─la primera de ellas centra su atención en el *estudiante*; la segunda, en el *conocimiento*; la tercera, en la *evaluación* y la cuarta, en la *comunidad*─; ellas pueden ser trabajadas separadamente pero, necesitan ser conceptualizadas como un sistema de componentes interconectados que se apoyan mutuamente unos sobre otros. Bajo esta óptica, a continuación se presenta, en cinco secciones, el diseño del ambiente de aprendizaje que se llevó a cabo en esta experiencia, desde esas cuatro perspectivas; cada una de ellas se expone en una sección y, para concluir este apartado, en la quinta y última sección, se muestra una descripción sintética de las tareas y de su análisis.

Centrado en el estudiante

Bransford, Brown y Cocking (1999) consideran que los ambientes centrados en los estudiantes aceptan que los aprendices construyen su propio significado, conocimiento y comprensión sobre los conocimientos que “llevan” al salón de clases y que la instrucción debería empezar, precisamente, con eso que ellos “traen” al escenario. En este mismo sentido, la NCTM (2000) sostiene que los estudiantes deben aprender matemáticas con comprensión y construir activamente nuevo conocimiento desde sus experiencias y conocimientos anteriores.

Se estima que los conocimientos que los estudiantes tienen al momento de iniciar con el estudio de la conversión de registros de representación gráfico y algebraico en funciones polinomiales de la forma $y = ax^n + b$, *donde* a, $b \in \Re$, $a \neq 0$ y $n = 1, 2$ y 3, son múltiples y variados. Sin embargo, algunos de aquellos que se reconoce pueden proporcionar una base para el aprendizaje de dicha conversión, se supone que los estudiantes los "llevan consigo" al momento de iniciar la instrucción en virtud de que fueron abordados con antelación en el salón de clases y la evaluación de los aprendices en torno a ellos se consideró satisfactoria. Dentro de dichos conocimientos, se pueden señalar los siguientes:

- Construcción de un sistema de coordenadas cartesiano de dos dimensiones y convenciones notacionales que en él se utilizan.
- Concepto de abscisa y ordenada de un punto, así como la notación que se utiliza para representar un punto.
- Asociación de una pareja de números reales a un punto en el plano cartesiano.
- Asociación de un punto en el plano cartesiano a una pareja de números reales.
- Relación biyectiva entre puntos en el plano cartesiano y parejas de números reales.
- Condiciones que debe cumplir una pareja de números reales para que su punto asociado en el plano cartesiano se localice en algún semi–eje o en el Cuadrante I, II, III o IV.
- Conocimiento informal del concepto de variable independiente y variable dependiente.
- Conocimiento informal del concepto de función; entendida ésta como un tipo especial de relación con una regla que asigna a cada miembro del conjunto A un miembro del conjunto B.
- Conocimiento informal de dominio, contradominio, rango y regla de correspondencia de una función.

- Asociación de una gráfica en el plano cartesiano a una relación funcional de dos variables reales por el método de tabulación y graficación.
- Conocimiento informal de las distintas representaciones de una función: lenguaje natural, algebraica, geométrica y tabular.
- Conocimiento informal de distintos tipos de gráfica de una función: continua, discontinua en algunos de sus puntos, discreta, escalonada y constante.

Por otra parte, dado que, desde la posición de Bransford, Brown y Cocking (1999), “lo que los estudiantes llevan” al salón de clases no sólo incluye los conocimientos previos de los alumnos sino también sus preconcepciones iniciales acerca del objeto de enseñanza, se juzga conveniente aplicar, en la primera sesión dedicada al estudio de la citada conversión, un Cuestionario a fin de valorar en qué medida los estudiantes son capaces de establecer las asociaciones entre el registro de representación gráfico y algebraico en funciones de la forma antes mencionada. El contenido de dicho Cuestionario (ver Anexo 1) responde, a las posiciones que se asumen en torno al *conocimiento*; esto es el centro de interés de la 2ª perspectiva que rige el diseño del ambiente de aprendizaje que en estas páginas se expone y que se procede a desarrollar a continuación.

Centrados en el conocimiento

Con la intención de seguir la recomendación de Bransford, Brown y Cocking (1999) en el sentido de que se debe centrar la atención sobre la información y las actividades que ayuden a los estudiantes a aprender en formas que conduzcan a la comprensión y, bajo el entendido de que las actividades que llevan a cabo los alumnos en una situación de aprendizaje, están determinadas por la tarea que tengan ante sí y que ésta a su vez responde a una posición en torno a la naturaleza de las matemáticas; en seguida, se especifica *la caracterización de las matemáticas* bajo la cual se diseñó el ambiente de aprendizaje; *los conocimientos que* se considera *necesitan adquirir los estudiantes*; la *estructuración del contenido*, la *forma de abordar el conocimiento*, el *énfasis en el tipo de conocimientos* y la *forma de presentar el conocimiento* en las tareas.

Caracterización de las matemáticas. Para Schoenfeld (1992), las matemáticas son la ciencia de los patrones que consiste de intentos sistemáticos, basados en la observación, el estudio y la experimentación a fin de determinar los principios de regularidades y sus herramientas son la abstracción, la representación y la manipulación simbólicas. Bajo esta óptica, se diseñan las tareas a fin de que los estudiantes, al enfrentarlas, practiquen la construcción de este sentido matemático. En otros términos, esta caracterización rige las actividades que realizan los estudiantes durante el periodo de instrucción.

Acerca de los conocimientos que necesitan adquirir los estudiantes. Bransford, Brown y Cocking (1999) afirman que los estándares en matemáticas ayudan a definir qué conocimientos necesitan adquirir los estudiantes. En este sentido, la NCTM en sus Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares del 2000, en cuanto a contenidos se refiere, considera a las funciones como una de las ideas fundamentales dentro del currículo de matemáticas y, en cuanto a procesos, sostiene que los estudiantes deberían usar diferentes representaciones de las funciones y examinar cómo ciertos cambios en una representación —tal como variar un parámetro en una ecuación— afecta simultáneamente otras representaciones —la gráfica y la tabular—; esto conlleva a reconocer que la conversión de los registros de representación gráfico y algebraico en funciones polinomiales de la forma $y = ax^n + b$, *donde* $a, b \in \Re$, $a \neq 0$ y $n = 1, 2$ y 3, es un conocimiento que necesitan adquirir los estudiantes y por ende, ser objeto de enseñanza—aprendizaje.

Definido el conocimiento a tratar en el proceso de instrucción y, como se señala renglones arriba, las actividades que realizan los alumnos están determinadas por la tarea que tengan ante sí, es menester definir la forma en la que se organiza el contenido en las tareas.

Sobre la estructuración del contenido de las tareas. De acuerdo a lo expuesto en el Capítulo 2, el contenido de las tareas se estructura, asumiendo, por un lado, la posición de Resnick y Ford (1990), y por otro, la de Duval (1998).

Para Resnick y Ford (1990), i) las tareas complejas están compuestas de elementos más sencillos; ii) las tareas matemáticas se pueden dividir en jerarquías de habilidades componentes; iii) una jerarquía se genera considerando la tarea─objetivo y determinando qué tendría que saber el estudiante para realizarla; iv) las tareas subordinadas son componentes de la tareas de primer nivel. Para Duval (1998), las *tareas de variación comparativa* favorecen la conversión de registros de representación. De acuerdo a lo anterior, en nuestro caso, la tarea─objetivo es la conversión de registros de representación gráfico y algebraico en funciones polinomiales elementales de la forma $y = ax^n + b$, *donde* $a, b \in \Re$, $a \neq 0$ y $n = 1, 2$ y 3, y las subtareas, todas aquellas que emanan al llevar a cabo las variaciones sistemáticas en el registro de representación algebraico y observar las variaciones concomitantes de representación en el registro gráfico.

Admitiendo lo anterior, y *partiendo del supuesto que se conoce la forma de la representación algebraica de la relación funcional* que se desea estudiar, en este trabajo, se generan trece lineamientos para estructurar el contenido de las tareas. Con base en éstos, se diseñan 56 tareas, de un total de 57 (ver Anexo 1); sólo la Tarea 7 queda excluida de esta sección por ser una tarea de metacognición. A continuación, se presentan dichos lineamientos y se ilustran, con la relación funcional de la forma $y = ax^2 + b$, *donde* $a, b \in \Re$ y $a \neq 0$.

LINEAMIENTOS PARA LA ESTRUCTURACIÓN DEL CONTENIDO DE LAS TAREAS QUE TIENEN COMO PROPÓSITO LA CONVERSIÓN DE LOS REGISTROS DE REPRESENTACIÓN GRÁFICO Y ALGEBRAICO.

Conocida *la forma* de la *representación algebraica* de la *relación funcional* que se desea estudiar, los lineamientos para la estructuración del contenido de las tareas son:

1. Determinar cuáles son los valores de los parámetros que permiten obtener la ecuación madre.

EN ESTE TRABAJO LA EXPRESIÓN "ECUACIÓN MADRE" ES UNA FORMA ABREVIADA QUE SE UTILIZA PARA REFERIRNOS A LA ECUACIÓN ASOCIADA A LA GRÁFICA MADRE; ESTE ÚLTIMO EN EL SENTIDO QUE LA NCTM (1989) LE ASIGNA AL TÉRMINO.

Si la representación algebraica de la relación función es de la forma $y = ax^2 + b$*, donde* a*, b* $\in \Re$ y $a \neq$ *0 entonces, la ecuación madre es* $y = x^2$*. Por lo que, los valores de los parámetros son:* a *= 1* y *b = 0.*

2. Determinar cuáles parámetros son independientes y cuáles dependientes.

PARA REALIZAR UN ANÁLISIS DE LA ESTRUCTURACIÓN DEL CONTENIDO, DESDE EL PUNTO DE VISTA DIDÁCTICO, EN ESTE TRABAJO SE INTRODUCEN LOS TÉRMINOS *PARÁMETRO INDEPENDIENTE Y DEPENDIENTE*. LOS CUALES SE DEFINEN COMO: DOS O MÁS *PARÁMETROS SON INDEPENDIENTES* SI PARA CUALQUIER VALOR DISTINTO DE ELLOS, SE OBTIENEN DISTINTAS ECUACIONES. EN CASO CONTRARIO, SERÁN DEPENDIENTES. ES DECIR, SI PARA ALGUNOS VALORES DE DOS O MÁS PARÁMETROS SE OBTIENE LA MISMA ECUACIÓN, ÉSTOS SON *DEPENDIENTES*. POR EJEMPLO, PARA LA ECUACIÓN DE LA FORMA $y = \frac{a}{bx}$ LOS PARÁMETROS a Y b SON DEPENDIENTES EN VIRTUD DE QUE, SI a = ½ Y $b = 1$, SE TIENE LA ECUACIÓN $y = \frac{\frac{1}{2}}{x}$; PERO, AL REALIZAR EL TRATAMIENTO CORRESPONDIENTE EN EL REGISTRO ALGEBRAICO, ESTA ECUACIÓN "SE TRANSFORMA" EN $y = \frac{1}{2x}$ Y EN ÉSTA, LOS VALORES DE LOS PARÁMETROS SON $a = 1$ Y $b = 2$; ES DECIR,

PARA DISTINTOS VALORES DE a Y b SE OBTIENE "LA MISMA ECUACIÓN"; PERO, SI LA ECUACIÓN ES DE LA FORMA $y = ax + b$, VALORES DISTINTOS DE LOS PARÁMETROS a Y b GENERAN ECUACIONES DISTINTAS; POR LO QUE, SE DICE QUE a Y b SON INDEPENDIENTES.

En la forma $y = ax^2 + b$ *los parámetros "a" y "b" son independientes*.

3. Definir un "nuevo" parámetro independiente por cada pareja (terna, cuarteta, etc., según sea el caso) de parámetros dependientes.

   Este lineamiento no se aplica a la forma $y = ax^2 + b$ *en virtud de que los parámetros "a" y "b" son independientes.*

4. Determinar el conjunto de parámetros independientes.

   Para la forma $y = ax^2 + b$*, el conjunto de parámetros independientes es el que tiene por elementos a "a" y a "b".*

5. Asignar a cada uno de los parámetros independientes los siguientes valores:

   i. $w = 0$, $w > 0$ y $w < 0$, para todo parámetro independiente "*w*" que implique una suma, en la forma de la ecuación bajo estudio.

      En la forma $y = ax^2 + b$ *los valores de "b" son:* $b = 0$, $b > 0$ y $b < 0$.

   ii. $s = 1$, $0 < s < 1$, $s > 1$, $s = -1$, $-1 < s < 0$ y $s < -1$, para todo parámetro independiente "*s*" que implique una multiplicación, en la forma de la ecuación bajo estudio. Los tres primeros valores de "*s*" son para el caso cuando $s > 0$ y los otros tres, cuando $s < 0$.

      En la forma $y = ax^2 + b$ *los valores de "a" son:* $a = 1$, $0 < a < 1$, $a > 1$, $a = -1$, $-1 < a < 0$ y $a < -1$.

6. Determinar cuántas y cuáles son las familias de ecuaciones que se obtienen al combinar los distintos valores de los parámetros.

Para la forma $y = ax^2 + b$ *se tienen 18 familias de ecuaciones. Los valores de los parámetros que las generan son:*

$$a > 0 \begin{cases} a = 1 \text{ y } \begin{cases} b = 0 \\ b > 0 \\ b < 0 \end{cases} \\ a > 1 \text{ y } \begin{cases} b = 0 \\ b > 0 \\ b < 0 \end{cases} \\ a < 1 \text{ y } \begin{cases} b = 0 \\ b > 0 \\ b < 0 \end{cases} \end{cases} \qquad a < 0 \begin{cases} a = -1 \text{ y } \begin{cases} b = 0 \\ b > 0 \\ b < 0 \end{cases} \\ a > -1 \text{ y } \begin{cases} b = 0 \\ b > 0 \\ b < 0 \end{cases} \\ a < -1 \text{ y } \begin{cases} b = 0 \\ b > 0 \\ b < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Naturalmente, si el número de familias de ecuaciones son 18, el número de familias de gráficas también son 18. A saber, las asociadas a dichas familias de ecuaciones.

7. Asignar valores específicos a los parámetros para obtener un “representante” de cada una de las familias de relaciones funcionales.

Si en la forma $y = ax^2 + b$ *al parámetro “a” se le asignan los valores de 1, 2, 1/2, -1, -2* y *-1/2 y al parámetro “b” los valores de 0, 3 y -3, los “representantes” de cada una de las dieciocho familias de relaciones funcionales son:*

Valores de los parámetros			Representante de familia
$a > 0$	$a = 1$ y	$b = 0$	$y = x^2$
		$b > 0$	$y = x^2 + 3$
		$b < 0$	$y = x^2 - 3$
	$a > 1$ y	$b = 0$	$y = 2x^2$
		$b > 0$	$y = 2x^2 + 3$
		$b < 0$	$y = 2x^2 - 3$
	$a < 1$ y	$b = 0$	$y = \frac{1}{2}x^2$
		$b > 0$	$y = \frac{1}{2}x^2 + 3$
		$b < 0$	$y = \frac{1}{2}x^2 - 3$

Valores de los parámetros			Representante de familia
$a < 0$	$a = -1$ y	$b = 0$	$y = -x^2$
		$b > 0$	$y = -x^2 + 3$
		$b < 0$	$y = -x^2 - 3$
	$a > -1$ y	$b = 0$	$y = -\frac{1}{2}x^2$
		$b > 0$	$y = -\frac{1}{2}x^2 + 3$
		$b < 0$	$y = -\frac{1}{2}x^2 - 3$
	$a < -1$ y	$b = 0$	$y = -2x^2$
		$b > 0$	$y = -2x^2 + 3$
		$b < 0$	$y = -2x^2 - 3$

8. Tabular cada una de las relaciones funcionales construidas en el lineamiento anterior.

EN CASO DE USAR GRAFICADORA, ESTE PASO LA MÁQUINA LO REALIZA AUTOMÁTICAMENTE.

9. Graficar (considerando los dos pasos anteriores) en un mismo sistema de coordenadas cartesianas las gráficas asociadas a las relaciones funcionales en las que sólo varíe un parámetro y los restantes permanezcan constantes.

*El número de planos*** *que se obtengan depende, por un lado, del número de parámetros y por otro, de la forma en que se decida qué parámetro va a variar y cuál va a permanecer constante en las ecuaciones asociadas a las gráficas de cada plano.*

*****NOTA: *DE AQUI EN ADELANTE, EN ESTE TRABAJO, SE UTILIZA EL TÉRMINO "PLANO" (O "PLANOS") PARA REFERIRNOS AL SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS Y A LAS GRÁFICAS QUE EN ÉL SE ENCUENTRAN.*

Como en el caso que nos ocupa existen dos parámetros independientes, a saber, "a" y "b", existen, en términos generales, tres posibilidades para determinar cuáles son los representantes de familia que se graficarán en un mismo sistema de coordenadas:

i. *Graficar, en todos los sistemas de coordenadas que se construyan, los representantes de familia que tengan fijo el valor de "a" y el de "b" varíe.*
ii. *Graficar, en todos los sistemas de coordenadas que se construyan, aquellos representantes de familia que tengan fijo el valor de "b" y el de "a" varíe.*
iii. *Graficar, en algunos sistemas de coordenadas, aquellos representantes de familia que tengan el mismo valor de "a" y el de "b" varíe y en otros, variar "a" y dejar fijo "b".*

Si se elige la tercera posibilidad para graficar, se podrían tener nueve planos. Las gráficas en cada uno de ellos son las asociadas a los representantes de familia que se indican a continuación.

Nº de Plano	***Representantes de familia***
1º	$y = x^2$, $y = 2x^2$ e $y = \frac{1}{2}x^2$
2º	$y = x^2$, $y = x^2 + 3$ e $y = x^2 - 3$
3º	$y = 2x^2$, $y = 2x^2 + 3$ e $y = 2x^2 - 3$
4º	$y = \frac{1}{2}x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$ e $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$
5º	$y = x^2$ e $y = -x^2$
6º	$y = -x^2$, $y = -2x^2$ e $y = -\frac{1}{2}x^2$
7º	$y = -x^2$, $y = -x^2 + 3$ e $y = -x^2 - 3$
8º	$y = -2x^2$, $y = -2x^2 + 3$ e $y = -2x^2 - 3$
9º	$y = -\frac{1}{2}x^2$, $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3$ e $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3$

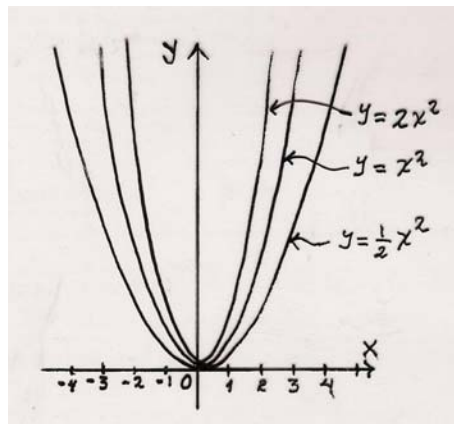
CABE SEÑALAR, QUE LAS TAREAS REPORTADAS EN ESTE TRABAJO SE DISEÑARON SIGUIENDO EL ESQUEMA DEL CUADRO ANTERIOR.

10. Establecer cualitativamente los rasgos de la gráfica madre.

La gráfica madre es la asociada a la ecuación $y = x^2$ *que, como se mencionó renglones arriba, es la ecuación madre.*

A la derecha se muestra el denominado 1^{er} *Plano de los especificados en la tabla anterior. Su observación nos permite afirmar que las variables visuales de la gráfica madre son:*

Forma: parábola.
Hacia dónde abre: abre hacia arriba.
Posición del vértice: vértice en (0,0).
"Abertura": al no ser "cerrada" ni "abierta" la llamaremos "normal".



1^{er} *Plano*

11. Analizar las gráficas de un mismo plano y las representaciones algebraicas asociadas a ellas, considerando las características de las madres como medio de comparación.

TODOS LOS INCISOS DE ESTE PUNTO, SE EJEMPLIFICAN, EN ESTE TRABAJO, CON LAS GRÁFICAS DEL PRIMER PLANO Y SUS REPRESENTACIONES ALGEBRAICAS ASOCIADAS.

i. Observar y enlistar las similitudes que exhiben las representaciones algebraicas (ecuaciones).

Las similitudes de las representaciones algebraicas son:

- *Tienen dos variables. La variable independiente representada por "x" y la dependiente por "y".*
- *La variable dependiente está despejada.*

- *El exponente de la variable independiente es dos.*
- *El signo del coeficiente de la variable independiente es positivo.*
- *El término independiente es cero.*

ii. Observar y enlistar las similitudes que exhiben las gráficas.

Las similitudes de las gráficas son:

- *Están en un plano cartesiano.*
- *Son continuas e infinitas.*
- *Son parábolas con eje en el eje de las ordenadas.*
- *Se abren hacia arriba.*
- *El vértice está en el origen.*

iii. Observar y enlistar la(s) diferencia(s) que exhiben las representaciones algebraicas (ecuaciones).

La diferencia en las representaciones algebraicas es:

- *El valor del coeficiente de la variable independiente (1, 2 y $\frac{1}{2}$).*

iv. Observar y enlistar la(s) diferencia(s) que exhiben las gráficas.

La diferencia en las gráficas es:

- *La abertura de las parábolas ("normal", "cerrada" y "abierta") [ver el "1^{er} Plano" en la página anterior].*

v. Correlacionar, es decir, establecer una correspondencia asociativa entre las similitudes de las representaciones algebraicas con las similitudes de sus gráficas asociadas. En otras palabras, las similitudes que existen en las gráficas se explican por las similitudes que tienen las representaciones algebraicas y recíprocamente.

Similitudes en las ecuaciones	***Correlación***	***Similitudes en las gráficas***
Tienen dos variables	$\leftrightarrow$	*Están en un plano cartesiano*
La variable dependiente está despejada	*es posible saber que*	*Son continuas e infinitas*
El exponente de la variable independiente es dos	$\leftrightarrow$	*Son parábolas con eje en el eje de las ordenadas*
El signo del coeficiente de la variable independiente es positivo	$\leftrightarrow$	*Se abren hacia arriba*
El término independiente es cero	$\leftrightarrow$	*El vértice está en el origen*

vi. Correlacionar las diferencias de las representaciones algebraicas con las diferencias de sus gráficas asociadas. En otras palabras, las diferencias que muestran las gráficas se explican por las diferencias que tienen las representaciones algebraicas y recíprocamente.

Diferencia en las ecuaciones	***Correlación***	***Diferencia en las gráficas***
El valor del coeficiente de la variable independiente	$\leftrightarrow$	*La abertura de las parábola*
Coeficiente de la v.i. = 1	$\leftrightarrow$	*"Normal"*
Coeficiente de la v.i. = 2	$\leftrightarrow$	*"Cerrada"*
Coeficiente de la v.i. = $\frac{1}{2}$	$\leftrightarrow$	*"Abierta"*

12. Generalizar, verbalmente (a partir de un número limitado de representaciones algebraicas y gráficas), las correlaciones establecidas en el paso anterior para toda gráfica y representación algebraica de la forma estudiada.

Si bien todos los incisos del paso anterior se ilustraron con el análisis del Primer Plano (sistema de coordenadas en el que se localizan las *gráficas asociadas a las ecuaciones* $y = x^2$, $y = 2x^2$ *e* $y = \frac{1}{2}x^2$*), las tareas que se les presentan a los alumnos están diseñadas para que analicen, en este caso, los cuatro primeros planos antes de que procedan a generalizar y registrar por escrito dichas generalizaciones.*

13. Registrar por escrito las generalizaciones obtenidas en el paso anterior.

Cuando los estudiantes hayan analizado los cuatro primeros planos a los que se hace referencia en el noveno lineamiento, ellos registrarán sus generalizaciones en un cuadro como el que se muestra a continuación.

$y = ax^2 + b$ *, donde* $a, b \in \Re$ y $a \neq 0$ $\Leftrightarrow$ *Parábola que se abre hacia arriba o hacia abajo, con eje el eje de las ordenadas*

$a > 0$	$a = 1$ y	$b = 0$	$\Leftrightarrow$	*Abre hacia arriba;*	*“Normal” ;*	*V (0,0)*
		$b > 0$	$\Leftrightarrow$	*Abre hacia arriba;*	*“Normal” ;*	*V (0,b)*
		$b < 0$	$\Leftrightarrow$	*Abre hacia arriba;*	*“Normal” ;*	*V (0,b)*
	$a > 1$ y	$b = 0$	$\Leftrightarrow$	*Abre hacia arriba;*	*“Cerrada”;*	*V (0,0)*
		$b > 0$	$\Leftrightarrow$	*Abre hacia arriba;*	*“Cerrada”;*	*V (0,b)*
		$b < 0$	$\Leftrightarrow$	*Abre hacia arriba;*	*“Cerrada”;*	*V (0,b)*
	$a < 1$ y	$b = 0$	$\Leftrightarrow$	*Abre hacia arriba;*	*“Abierta” ;*	*V (0,0)*
		$b > 0$	$\Leftrightarrow$	*Abre hacia arriba;*	*“Abierta” ;*	*V (0,b)*
		$b < 0$	$\Leftrightarrow$	*Abre hacia arriba;*	*“Abierta” ;*	*V (0,b)*

De la ejemplificación que se hace de los lineamientos, es posible vislumbrar cuál es la forma en que se aborda el conocimiento en las tareas; esto es el punto a discusión del siguiente apartado

Sobre la forma de “abordar” el conocimiento en las tareas. Desde la posición de Bransford, Brown y Cocking (1999), la “formalización progresiva” apoya el aprendizaje con comprensión; en otras palabras, iniciar las unidades instruccionales con las ideas informales que los estudiantes llevan al salón de clases y formalizarlas gradualmente, favorece que los aprendices construyan, sobre sus ideas informales, los conceptos y procedimientos de una disciplina. Por su parte, Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990) sostienen que la instrucción debería moverse desde lo menos formal, menos abstracto, más global e intuitivo al sistema formal. Estas posiciones, como se refiere en el Capítulo 2, son las que se aceptan en este trabajo y nos conducen a considerar que iniciar el estudio de la citada conversión de registros de representación por la vía *global cualitativa* es una forma adecuada de abordar el conocimiento en las tareas a fin de alcanzar los propósitos de la instrucción: promover aprendizajes con comprensión y lograr que los alumnos dominen dicha conversión. Para alcanzar estas dos grandes metas es menester, entre otras cosas, determinar el tipo de conocimiento en el que habrán de hacer énfasis las tareas; esto es el centro de atención del punto siguiente.

Sobre el énfasis en el tipo de conocimiento en las tareas. Bransford, Brown y Cocking (1999) y Hiebert y Carpenter (1992) reconocen que el conocimiento conceptual y de procedimientos son necesarios para la habilidad matemática. En este mismo tenor de ideas, la NCTM (2000) sostiene que desarrollar el dominio de las matemáticas requiere un balance y conexión entre la comprensión conceptual y la destreza computacional. Aceptando estos puntos de vista y tratando de "librar" el reto que ─de acuerdo a Bransford, Brown y Cocking (1999)─ para el diseño de los ambientes de aprendizaje, centrados en el conocimiento, significa balancear apropiadamente las actividades diseñadas para promover la comprensión y aquellas diseñadas para promover la automatización, de las 57 tareas (Anexo 1) que habrán de enfrentar los estudiantes, 40 (de la Tarea 5 a la 44) son planeadas con la intención de promover, fundamentalmente, la comprensión y 12 (de la 45 a la 56), para promover, en primer término, la automatización.

Por otra parte, cabe aclarar que las actividades que los estudiantes llevan a cabo en las cinco tareas restantes, no se encuentran enmarcadas completamente en las de comprensión o de automatización, aunque tienen algunos rasgos de éstas. El propósito fundamental de las Tareas 2, 3 y 4 es la elaboración del material necesario para el estudio de la mencionada conversión y la Tarea 1 y 57 son instrumentos de evaluación. Sin embargo, a pesar de que estas cinco tareas y las 52 mencionadas en el párrafo anterior, tienen propósitos y contenidos específicos distintos, coinciden en la forma en que en ellas se presenta el conocimiento. Este aspecto es el que se discute en seguida.

Sobre la forma de presentar el conocimiento en las tareas. En principio, el contexto de las tareas para el estudio de la conversión de los registros de representación gráfico y algebraico en funciones polinomiales de la forma $y = ax^n + b$, *donde* $a, b \in \Re$, $a \neq 0$ y $n = 1, 2$ y 3, puede ser puramente matemático o de aplicaciones. Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990) sostienen que no es claro que una clase de contexto de la vida real apoye siempre el proceso de aprendizaje. Basados en esta afirmación y comprometidos con la posición de Duval (1992) en el sentido de que un aprendizaje de la vía de interpretación global de la representación gráfica y algebraica de una función no puede economizar un estudio puramente matemático en virtud de que la presentación de un fenómeno físico o biológico no facilita la aprehensión del funcionamiento semiótico de un registro sino que ella, por el contrario, lo presupone, en este trabajo se determina que en las 57 tareas, se presente el conocimiento en un contexto puramente matemático.

Con esta decisión se “cierra” una etapa en el diseño del ambiente para el aprendizaje de la mencionada conversión de registros de representación, a saber, la centrada en el conocimiento, dando paso a la siguiente perspectiva: la centrada en la evaluación.

Centrados en la evaluación

El diseño del ambiente de aprendizaje bajo el rubro que ahora nos ocupa, atiende las recomendaciones que en torno a la evaluación expresan, por un lado, la NCTM (2000), en uno de sus seis Principios (ver Capítulo 2) y por otro, las de Bransford, Brown y Cocking (1999), también señaladas en el Capítulo 2; por tal razón, la evaluación y la instrucción están integradas de tal manera que la evaluación es una parte rutinaria del proceso de las actividades del salón de clases, más que una interrupción. Además, la evaluación tiene el propósito de centrarse tanto en la comprensión de los estudiantes como en sus habilidades de procedimiento.

Durante las 18 sesiones en las que se distribuyen las 57 tareas que se diseñan para que los estudiantes emprendan el estudio de la mencionada conversión de registros de representación, se considera, durante 16 sesiones (de la 2ª a la 17ª) evaluaciones formativas; en la 1ª sesión, una evaluación a fin de explorar las preconcepciones iniciales de los estudiantes acerca de la conversión de registros de representación gráfico y algebraico en funciones polinomiales elementales de la forma $y = ax^n + b$, *donde* $a, b \in \Re$, $a \neq 0$ y n = *1,2* y *3* y, el propósito de la evaluación que se realiza en la última sesión (18ª) es valorar en qué medida los estudiantes logran la conversión de dichos registros, después de haber sido sometidos al proceso de instrucción. Estas dos evaluaciones se llevan a cabo mediante una prueba de rendimiento y la que se aplica en la 1ª Sesión es la misma que la de la 18ª. Dicha prueba responde al nombre de “Cuestionario” y va acompañado de una hoja que contiene 54 bosquejos de gráficas, la cual es indispensable para dar respuesta a las 30 preguntas que en él se formulan.

Para realizar las evaluaciones formativas, se contemplan, entre otras cosas, los comentarios del profesor al trabajo que los estudiantes estén realizando durante las sesiones; las preguntas del profesor y las de los aprendices, bien sea las que éstos dirijan a aquél o las que les hagan a sus compañeros, durante el desarrollo de una discusión; las conversaciones entre los alumnos y con el profesor; las afirmaciones que emiten; los argumentos que expresan para defender su punto de vista y/o rebatir el de los otros; la participación en las discusiones; el compromiso ante el trabajo.

Con la evaluación formativa, en este diseño, se pretende brindar oportunidades a los estudiantes para someter a prueba sus ideas sobre las bases de compartir el conocimiento con sus compañeros y el profesor por lo que, es menester centrar la atención en la última perspectiva de Bransford, Brown y Cocking (1999): la comunidad del salón de clases. A continuación se expone lo que corresponde a la cuarta perspectiva, en el diseño del ambiente de aprendizaje que nos ocupa.

Centrados en la comunidad

Adheridos a la posición de Bransford, Brown y Cocking (1999) y de Schoenfeld (1992), en torno a que la comunidad del salón de clases juega un papel importante en el aprendizaje de las matemáticas (ver Capítulo 2), el diseño del ambiente de aprendizaje, bajo esta cuarta perspectiva, atiende a los aspectos que emanan de dichas posiciones: las *actividades* de los estudiantes y las *normas del salón de clases*. En seguida se señala, en términos generales, lo que se considera en cada una de ellas al llevar a cabo el referido diseño.

Las actividades. De acuerdo con las posturas de Greeno (1988, citado en Schoenfeld, 1992), Hiebert y Carpenter (1992) y Schoenfeld (1992), reseñadas en el Capítulo 2, las tareas que han de enfrentar los estudiantes se diseñan con el propósito de que promuevan, entre otras actividades, la observación, la abstracción, la representación y la identificación de patrones. Aunado a esto, se planea que esas actividades se realicen en un ambiente de constante comunicación y colaboración con los demás integrantes del grupo; la forma en que ha de llevarse a cabo esto último, se discute en seguida.

Actividades en grupo. De acuerdo a lo expuesto en el Capítulo 2, en este trabajo se acepta que el trabajo colectivo en el salón de clases favorece el aprendizaje de las matemáticas. Por tal razón, en el diseño del ambiente de aprendizaje se considera que algunas de las actividades que habrán de realizar los estudiantes las ejecuten en grupo; bien sea en equipo (grupos pequeños) o en el grupo en su conjunto. Definir si la actividad de los estudiantes en las distintas tareas que enfrentará, ha de ser individual, en equipo o grupal, conduce a precisar la estructura de las actividades.

Estructura de las actividades. Establecer, en la medida de lo posible, la forma en la cual se han de llevar a cabo las actividades del salón de clases ─individual y/o en equipo y/o grupal─; es decir, determinar la estructura de las actividades, es una decisión importante al diseñar ambientes de aprendizaje (Cobb, 2000; ver Capítulo 2). Atendiendo a esta indicación, en este diseño se juzga conveniente que las actividades que exigen las Tareas 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 14, 19, 22, 26, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 47, 49, 51, 53, 55 y 57 sean individuales; las de las Tareas 12, 15, 20, 23, 27, 31, 34, 37, 40 y 43, en equipo (grupos pequeños) y las de la 3, 8, 10, 13, 16, 17, 18, 21, 24, 25, 28, 29, 32, 35, 38, 41, 44, 46, 48, 50, 52, 54, 56 y 57, grupales.

Para realizar las distintas actividades en la comunidad del salón de clases, son especialmente importantes las normas que permiten llevarlas a cabo (Bransford, Brown y Cocking, 1999).

Las normas. En el diseño de este ambiente de aprendizaje, se acepta que las normas sociales del salón de clases y las sociomatemáticas ─tomadas de la perspectiva social de Cobb (2000); ver Capítulo 2─, rigen las actividades que realizan los estudiantes en la comunidad del salón de clases de matemáticas.

Normas sociales del salón de clases. En este tipo de normas se establecen las obligaciones de las acciones de los miembros de la comunidad en cada fase de las estructura de las actividades del salón de clases es decir, para el trabajo individual, en equipo y grupal. Algunas de las normas sociales que se consideran en el diseño del ambiente de aprendizaje que aquí se reporta, son:

i. Para la actividad individual, fundamentalmente, lo que el nombre establece; es decir, el trabajo debe ser *estrictamente* personal.

ii. Para la actividad en equipo, los estudiantes están obligados a explicar y justificar sus soluciones o puntos de vista; escuchar las explicaciones dadas por otros, sin interrumpir al orador, e indicar su acuerdo o desacuerdo; tratar de plantear alternativas cuando sostengan puntos de vista distintos; respetar el orden de las participaciones; en todo momento de una discusión respetar el punto de vista de los otros sobre todo de aquellos que sostienen uno diferente al de él (o ella); todos los integrantes del equipo deben tener registrado por escrito las conclusiones a las que lleguen después de la discusión y en el caso que en algún aspecto no logren un acuerdo, deben anotar las distintas posiciones; cada equipo debe nombrar un representante para que, en el momento necesario, exprese las conclusiones ante el grupo.

iii. Las normas para el trabajo grupal son, prácticamente las mismas que para la discusión por equipo, salvo que en este caso, la discusión inicia con la lectura, por parte del representante de cada equipo, de las conclusiones a las que haya llegado el equipo en cuestión; este representante debe aclarar en su participación cuáles fueron los puntos de acuerdo y de desacuerdo. Después de conocer las diferentes conclusiones a las que llegaron los equipos y plantear las discrepancias y coincidencias de éstos, se procede a discutir grupalmente con la intención de aclarar, sobre todo, los puntos donde no hay acuerdo general. Durante el trabajo grupal, el rol del *profesor* es, fundamentalmente, de *moderador*.

Normas sociomatemáticas del salón de clases. Como se indica en el Capítulo 2, estas normas tratan con las acciones e interacciones de los miembros de la comunidad del salón de clases que son específicas de matemáticas. Una de las que se establece en este diseño del ambiente de aprendizaje es: “correcta” expresión verbal y escrita, de acuerdo al nivel de formalización logrado en el grupo de los aspectos matemáticos a los que se haga referencia. Otras, conforme progresan las discusiones en equipo y grupal, se “construyen” bajo la pretensión de que sean los propios alumnos los que determinen, por ejemplo, cuándo una explicación matemática es aceptable; cuándo el argumento proporcionado por un miembro de la comunidad se admite como legítimo por los demás; cuándo una “observación”, un “análisis”, una “generalización”o una “inferencia” es correcta desde el punto de vista de las matemáticas y, en consecuencia, se acepta como tal. En estas interacciones, el papel principal del *profesor* es el de *cuestionar* al resto de la comunidad a fin de que rectifiquen o ratifiquen su posición en torno al punto a discusión; esto con la intención de que los estudiantes dependan cada vez más de sus propios juicios y menos de los del profesor.

Con lo anterior, cerramos la exposición del diseño del ambiente de aprendizaje para la conversión de los registros de representación gráfico y algebraico en funciones polinomiales de la forma $y = ax^n + b$, *donde* a, $b \in \Re$, $a \neq 0$ y n = *1, 2* y *3*, desde las cuatro perspectivas que señalan Bransford, Brown y

Cocking (1999), reiterando que, si bien ellas se discutieron por separado, son consideradas como un sistema de componentes que se apoyan mutuamente unos sobre otros. Para finalizar este apartado, en seguida se presenta una descripción sintética de las 57 tareas y de su análisis.

Descripción sintética de las tareas y de su análisis.

Como se ha mencionado en los párrafos precedentes, al diseñar el ambiente de aprendizaje, a la luz de las posiciones expuestas en el Capítulo 2, se generan 57 tareas centradas en la citada conversión de registros de representación (ver Anexo 1), con la intención de que al ser enfrentadas por los estudiantes, promuevan en ellos un aprendizaje con comprensión de las citadas funciones polinomiales elementales y el dominio de dicha conversión. A continuación se expone, en primer lugar, una descripción sintética de las tareas y en segundo, un resumen de su análisis.

Descripción sintética de las tareas. Esta descripción pretende dar un panorama general de cómo se distribuyen las 57 tareas a lo largo de las 18 sesiones que se le dedican al estudio de la referida conversión de registros de representación, al tiempo que se muestre el número con el que se identifica cada una de ellas, su título y la forma de trabajo. Esta información se muestra en la tabla siguiente.

Descripción sintética de las tareas

Nº de Tarea	Título de la Tarea	Forma de trabajo	Nº de sesión
1	*Cuestionario*	Individual	1ª
2	*Tabulaciones*	Individual	1ª
3	*Revisión de las tabulaciones*	Grupal	2ª
4	*Representación gráfica de las 54 representaciones algebraicas*	Individual	3ª
5	*Clasificando ecuaciones*	Individual	4ª
6	*2ª aplicación del Cuestionario*	Individual	5ª
7	*¿Cómo resolví el cuestionario en su segunda aplicación?*	Individual	5ª
8	*Clasificando ecuaciones*	Grupal	5ª
9	*Registrando las clasificaciones. Construcción del Cuadro I*	Individual	5ª
10	*Registrando las clasificaciones. Construcción del Cuadro I*	Grupal	6ª
11	*Analizando Bloques*	Individual	6ª
12	*Analizando Bloques*	Equipo	6ª
13	*Analizando Bloques*	Grupal	6ª
14	*Estableciendo condiciones*	Individual	6ª
15	*Estableciendo condiciones*	Equipo	7ª
16	*Estableciendo condiciones*	Grupal	7ª
17	*Formas de las representaciones algebraicas de las funciones bajo estudio*	Grupal	7ª
18	*Construyendo el Cuadro II*	Grupal	7ª
19	*Analizando Columnas*	Individual	7ª
20	*Analizando Columnas*	Equipo	8ª
21	*Analizando Columnas*	Grupal	8ª
22	*Analizando el 1er. y 2º Plano*	Individual	8ª
23	*Analizando el 1er. y 2º Plano*	Equipo	9ª
24	*Analizando el 1er. y 2º Plano*	Grupal	9ª
25	*Construyendo la 1ª parte del Cuadro III*	Grupal	9ª
26	*Analizando el 3er. y 4º Plano*	Individual	9ª
27	*Analizando el 3er. y 4º Plano*	Equipo	10ª
28	*Analizando el 3er. y 4º Plano*	Grupal	10ª
29	*Construyendo la 2ª parte del Cuadro III*	Grupal	10ª
30	*Construyendo el Cuadro IV*	Individual	10ª
31	*Construyendo el Cuadro IV*	Equipo	11ª
32	*Construyendo el Cuadro IV*	Grupal	11ª
33	*Construyendo el Cuadro V*	Individual	11ª
34	*Construyendo el Cuadro V*	Equipo	12ª
35	*Construyendo el Cuadro V*	Grupal	12ª
36	*Construyendo el Cuadro VI*	Individual	12ª
37	*Construyendo el Cuadro VI*	Equipo	13ª
38	*Construyendo el Cuadro VI*	Grupal	13ª
39	*Construyendo el Cuadro VII*	Individual	13ª
40	*Construyendo el Cuadro VII*	Equipo	14ª
41	*Construyendo el Cuadro VII*	Grupal	14ª
42	*Construyendo el Cuadro VIII*	Individual	13ª
43	*Construyendo el Cuadro VIII*	Equipo	14ª
44	*Construyendo el Cuadro VIII*	Grupal	14ª
45	*Ejercicios: características de la gráfica asociada a una ecuación. 1ª parte*	Individual	15ª
46	*Ejercicios: características de la gráfica asociada a una ecuación. 1ª parte*	Grupal	15ª
47	*Ejercicios: características de la gráfica asociada a una ecuación. 2ª parte*	Individual	15ª
48	*Ejercicios: características de la gráfica asociada a una ecuación. 2ª parte*	Grupal	15ª
49	*Ejercicios: características y bosquejo de la gráfica asociada a una ecuación*	Individual	16ª
50	*Ejercicios: características y bosquejo de la gráfica asociada a una ecuación*	Grupal	16ª
51	*Ejercicios: bosquejo de la gráfica asociada a una ecuación. 1ª parte*	Individual	16ª
52	*Ejercicios: bosquejo de la gráfica asociada a una ecuación. 1ª parte*	Grupal	16ª
53	*Ejercicios: bosquejo de la gráfica asociada a una ecuación. 2ª parte*	Individual	17ª
54	*Ejercicios: bosquejo de la gráfica asociada a una ecuación. 2ª parte*	Grupal	17ª
55	*Ejercicios: ecuación asociada al bosquejo de una gráfica*	Individual	17ª
56	*Ejercicios: ecuación asociada al bosquejo de una gráfica*	Grupal	17ª
57	*Cuestonario*	Individual	18ª

Resumen del análisis de las tareas. El análisis resumido se realiza, fundamentalmente, de acuerdo a seis grandes categorías que se superponen y que emanan de lo expuesto en el Capítulo 2 (de lo cual, algunos aspectos han sido retomados en los párrafos precedentes). Dicho resumen se presenta en tres partes. En la primera, se describen las características comunes de las tareas; en la segunda, se enuncian y etiquetan las citadas categorías con sus respectivas subcategorías y, en la tercera, se muestra una tabla en la que se concentra la información en torno a las características de cada tarea, de acuerdo a las categorías y subcategorías establecidas.

Primera parte. Tomando como directriz la posición de Leinhardt et al. (1990), es posible afirmar que:

i. en relación a la *situación*, el *marco* de las 57 tareas es la clase de matemáticas;

ii. el contexto de 56 tareas es abstracto (la Tarea 7 se excluye por corresponder a un ejercicio de metacognición)

iii. en todas las 56 tareas (no se considera la 7), el *dominio* de las variables es el conjunto de los números reales.

Segunda parte. De los supuestos que se aceptan en este trabajo, se desprenden seis grandes categorías (representadas con números romanos); cada categoría tiene asociadas subcategorías (etiquetadas con números arábigos) y algunas de éstas, tienen a su vez otras subcategorías (nominadas con las primeras letras minúsculas del abecedario). Esta serie de categorías son el cristal con el que se analizan las 57 tareas y son las que se enuncian en seguida.

Categorías de análisis

I. Forma de trabajo.

  1. Individual.

2. Equipo.
3. Grupal.

II. Propósito.

1. Evaluación.
   a. Diagnóstica.
   b. Formativa.
   c. Sumativa.
2. Promoción de aprendizaje con comprensión.
3. Promoción de la automatización.

III. Acción del estudiante.

1. Interpretación.
   a. Local.
   b. Global.
   c. Cuantitativa.
   d. Cualitativa.
2. Construcción.
   a. Local.
   b. Global.
   c. Cuantitativa.
   d. Cualitativa.
3. Discusión en grupo.

IV. Tipo de función.

1. Lineal.
2. Cuadrática.
3. Cúbica.

V. Enfoque.

1. Interno al sistema coordenado.
2. En el sistema coordenado.
3. En la representación simbólica.

4. En un rasgo particular de una función en una representación, al mismo rasgo en otra representación.

VI. Tipo de conversión.

1. De la representación algebraica a la geométrica.
2. De la representación geométrica a la algebraica.

Tercera parte. A fin de establecer las características de las 57 tareas diseñadas con la intención de promover el dominio y el aprendizaje con comprensión de la mencionada conversión de registros de representación, dichas tareas se analizan de acuerdo a las categorías y subcategorías recién enunciadas. En este espacio se muestra una tabla que concentra esa información; en ella, el símbolo "✓", en una celda, indica que la tarea en cuestión tiene el atributo de la característica señalada en el encabezado de la columna a la que pertenece la celda. Por otra parte, los números y las letras en los encabezados de las columnas corresponden a la categoría o subcategoría, según sea el caso, de las categorías de análisis que se enunciaron antes del presente párrafo.

Información concentrada de las características de las tareas

				II					III																	
	I			1			2	3	1				2				3	IV			V				VI	
Nº de tarea	1	2	3	a	b	c			a	b	c	d	a	b	c	d		1	2	3	1	2	3	4	1	2
1	✓			✓					✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓
2	✓							✓					✓		✓			✓	✓	✓			✓			
3			✓		✓																					
4	✓							✓					✓	✓	✓			✓	✓	✓	✓	✓				
5	✓						✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓			✓			
6	✓				✓				✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓
7	✓						✓																			
8			✓		✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓			✓			
9	✓						✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓		✓			
10			✓		✓				✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓			
11	✓						✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓		✓			
12		✓					✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓			
13			✓		✓				✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓			
14	✓						✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓
15		✓					✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓
16			✓		✓				✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓
17			✓		✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓
18			✓		✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓			✓		✓	✓	✓	✓
19	✓						✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓
20		✓					✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓
21			✓		✓				✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓
22	✓						✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓			✓		✓	✓	✓	✓
23		✓					✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓			✓		✓	✓	✓	✓
24			✓		✓				✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓			✓		✓	✓	✓	✓
25			✓		✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓			✓		✓	✓	✓	✓
26	✓						✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓			✓		✓	✓	✓	✓
27		✓					✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓			✓		✓	✓	✓	✓
28			✓		✓				✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓			✓		✓	✓	✓	✓
29			✓		✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓			✓		✓	✓	✓	✓
30	✓						✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓			✓		✓	✓	✓	✓
31		✓					✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓			✓		✓	✓	✓	✓
32			✓		✓				✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓			✓		✓	✓	✓	✓
33	✓						✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓			✓		✓		✓	✓	✓	✓
34		✓					✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓		✓		✓	✓	✓	✓
35			✓		✓				✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓		✓		✓	✓	✓	✓
36	✓						✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓			✓		✓		✓	✓	✓	✓
37		✓					✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓		✓		✓	✓	✓	✓
38			✓		✓				✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓		✓		✓	✓	✓	✓
39	✓						✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓				✓	✓		✓	✓	✓	✓
40		✓					✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓			✓	✓		✓	✓	✓	✓
41			✓		✓				✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓			✓	✓		✓	✓	✓	✓
42	✓						✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓				✓	✓		✓	✓	✓	✓
43		✓					✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓			✓	✓		✓	✓	✓	✓
44			✓		✓				✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓			✓	✓		✓	✓	✓	✓
45	✓							✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓			✓	✓	✓	
46			✓		✓				✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓			✓	✓	✓	
47	✓							✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓			✓	✓	✓	
48			✓		✓				✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓			✓	✓	✓	
49	✓							✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	
50			✓		✓				✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	
51	✓							✓	✓	✓	✓	✓						✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	
52			✓		✓				✓	✓	✓	✓						✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	
53	✓							✓	✓	✓	✓	✓						✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	
54			✓		✓				✓	✓	✓	✓						✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	
55	✓							✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓			✓		✓
56			✓		✓				✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓			✓		✓
57	✓					✓			✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓

Se concluye este apartado haciendo énfasis en que si bien las 56 primeras tareas se consideran importantes para los propósitos de la instrucción ─promover en los estudiantes un aprendizaje con comprensión de las funciones polinomiales elementales de la forma $y = ax^n + b$, *donde a, b* $\in \Re$, *a* $\neq 0$ y *n* = *1, 2* y *3* y el dominio de la conversión de los registros de representación gráfico y algebraico en dichas funciones─, la 57, es particularmente importante; es uno de los cinco instrumentos que se utilizan para explorar en qué medida la instrucción cumplió su propósito. En el siguiente apartado se centra la atención, precisamente, en dichos instrumentos, los cuales son el medio para recabar los datos que al procesarse y analizarse permiten aproximarse a las preguntas de investigación planteadas.

LOS INSTRUMENTOS Y SU APLICACIÓN

Como se ha mencionado en distintas ocasiones, el propósito fundamental de este trabajo es explorar en qué medida una instrucción centrada en el alumno, la evaluación, la comunidad del salón de clases y el conocimiento de la conversión de los registros de representación gráfico y algebraico en funciones polinomiales elementales de la forma $y = ax^n + b$, *donde a, b* $\in \Re$, *a* $\neq 0$ y *n* = *1, 2* y *3,* con un enfoque global cualitativo, promueve el dominio de la referida conversión y un aprendizaje con comprensión de dichas funciones polinomiales en los 70 alumnos de bachillerato que conformaron la población bajo estudio. Por tal razón, una vez concluido el proceso de instrucción, es menester explorar en qué medida esa instrucción promovió, por un lado, el dominio de dicha conversión y por otro, la comprensión de las citadas funciones. Para llevar a cabo la exploración requerida, se utilizaron pruebas de rendimiento: una para averiguar lo referente al dominio de la conversión y cuatro, para la comprensión. Algunas de las características de estos instrumentos y las condiciones en las que se aplicaron, se exponen, brevemente, en los párrafos subsiguientes. En primer lugar, se aborda lo tocante al instrumento que se utilizó para indagar el dominio que lograron los estudiantes en la conversión bajo estudio y, en segundo lugar, lo que atañe a la comprensión.

Instrumento para explorar el dominio de la conversión y su aplicación

Como se mencionó anteriormente, este instrumento es una prueba de rendimiento que responde al nombre de *Cuestionario*; consta de dos partes: la primera está referida al proceso ecuación→gráfica y la segunda, al proceso gráfica→ecuación; cada una de ellas contiene 15 preguntas de las cuales, cinco están dedicadas a la función lineal, cinco, a la cuadrática (del tipo estudiado) y cinco a la cúbica (también del tipo estudiado); las 15 preguntas de cada parte no siguen un orden determinado y para dar respuesta a las 30 preguntas del Cuestionario es necesario contar con una hoja que contiene 54 bosquejos de gráficas: 18 de recta, 18 de parábola y 18 de parábola cúbica (ver Tarea 1 en el Anexo 1).

El Cuestionario se aplicó en la sesión siguiente a la última que se dedicó a la instrucción propiamente dicha. El trabajo que realizan los estudiantes para contestar el Cuestionario es estrictamente individual y disponen de 60 minutos para contestarlo.

Instrumentos para explorar la comprensión y su aplicación

Como se señala al inicio de este Capítulo, múltiples son los aspectos relacionados con las funciones polinomiales estudiadas durante la instrucción; todos ellos son potencialmente útiles para explorar el grado de comprensión que logran los estudiantes en dichas funciones; sin embargo, se decidió centrar la atención en seis: análisis de una gráfica desde un enfoque puntual, las funciones desde la perspectiva proceso y objeto, la conversión de los registros de representación gráfico y algebraico en funciones “un tanto similares” a las presentadas en la instrucción, variantes e invariantes de una gráfica cuando se alteran las escalas, situaciones contextualizadas y el recuerdo. De aquí que, con la intención de recabar datos que permitan realizar la indagatoria correspondiente a la comprensión, los propósitos específicos de los instrumentos, o mejor dicho, de las pruebas de rendimiento son inspeccionar

i. cuál es el desempeño de la población estudiada cuando enfrenta tareas que exigen un enfoque puntual ya sea de corte cualitativo o cuantitativo,
ii. en qué medida los alumnos son capaces de percibir a las funciones como proceso y como objeto y moverse flexiblemente entre esas perspectivas,
iii. cómo los aprendices llevan a cabo la conversión de los registros de representación gráfico y algebraico en funciones “un tanto similares” a las presentadas en la instrucción,
iv. cuáles de las características de una gráfica que no cambian cuando se alteran las escalas y cuáles de las que sí cambian son identificadas por los estudiantes cuando abordan tareas de escala,
v. cómo se desempeñan los escolares cuando enfrentan situaciones contextualizadas que involucran tanto funciones que se trabajaron en la instrucción como algunas que no se estudiaron,
vi. qué recuerdan y cómo llevan a cabo la conversión de los registros de representación gráfico y algebraico en funciones polinomiales elementales estudiantes que un año escolar atrás mostraron dominio en dicha conversión.

En este estudio se utilizan cuatro instrumentos: el primero centrado en lo señalado en el punto iii (de los enunciados arriba); el segundo, en lo del iv; el tercero, en lo del v y el cuarto, en lo del vi. Los aspectos referidos en los puntos i y ii, se sondean a lo largo de los tres primeros instrumentos. Estas cuatro pruebas de rendimiento, en algunas ocasiones, son referidas como 1er., 2°, 3er y 4° Instrumento de Comprensión, respectivamente. Los cuatro instrumentos se muestran en el Anexo 2 y responden al nombre de: *“Explorando diversos aspectos de la articulación de registros”, “Explorando algunos aspectos sobre la escala,” “Representaciones gráfica y algebraica en contexto”* y *“Cuestionario”*, respectivamente. El número total de preguntas que contiene cada uno de ellos es: el 1°, 17; el 2°, 25; el 3°, 14 y el 4°, 30. Cabe señalar que este 4° instrumento es exactamente el mismo que se utiliza para explorar en qué medida los estudiantes logran el dominio de la mencionada conversión de registros de representación.

Por otra parte, los tres primeros instrumentos de comprensión se aplican inmediatamente después de haber concluido la instrucción y en sesiones posteriores a la que se utilizó para administrar a los estudiantes el instrumento para explorar el dominio de la conversión citada. Cada instrumento se abordó en una sesión sin límite de tiempo; los estudiantes enfrentaron los cuestionarios en equipo; el número de integrantes por equipo no fue menor de tres ni mayor de cinco; la formación de equipos fue voluntaria pero fija, esto es, los alumnos decidieron con quien trabajar antes de proceder a contestar el primer cuestionario y con esos mismos compañeros afrontaron los otros dos; a los equipos se les asignó un número al azar para identificarlos.

El 4° Instrumento de Comprensión se administró un año escolar después de haber concluido el proceso de instrucción, durante una entrevista, a diez estudiantes que se logró contactar (de los que habían mostrado dominio en la citada conversión) y que disponían de un tiempo libre para conceder la entrevista; se trabajó de manera individual con cada uno y al momento de concertar la cita, no se les informó de la finalidad de la reunión: enfrentarlos al Cuestionario que hubieran resuelto un año atrás.

La entrevista consistió, fundamentalmente, de tres momentos:

1º Aplicar el Cuestionario sobre la conversión de registros de representación que, como se ha señalado, consta de dos partes. La primera de ellas (con 15 preguntas) dedicada al proceso *ecuación→gráfica* y la segunda parte (también con 15 preguntas), al proceso *gráfica → ecuación*.

2º Conceder el tiempo que los estudiantes consideraron necesario para que, con sus propios recursos, intentaran disipar las dudas que tuvieron al contestar el Cuestionario.

3º Realizar una *segunda* aplicación del Cuestionario, una vez que los alumnos consideraron haber aclarado sus dudas.

En cada uno de estos tres momentos, los estudiantes *no* recibieron ayuda alguna del entrevistador y éste, a lo más, en algunas ocasiones los cuestionó. Los diez alumnos con los que se trabajó fueron designados con números ordinales respondiendo al orden en el que fueron entrevistados.

Finalizada la entrevista con el 10° estudiante, se concluyó la aplicación de los instrumentos; éstos, permitieron recabar datos para el trabajo que en estas páginas se reporta.

Recabación de los Datos

Las fuentes de recabación de datos para el estudio fueron, en primera instancia, los trabajos escritos de los estudiantes y en segunda, las notas de campo del investigador. Las vías de esta recabación residieron en las tareas que abordaron los estudiantes durante el proceso de instrucción y en los cuestionarios correspondientes a los instrumentos de investigación para indagar el dominio de la conversión de los registros gráfico y algebraico en funciones polinomiales elementales y la comprensión de dichas funciones. En seguida, se especifica cómo contribuyeron cada una de estas vías.

Recabación de datos vía la Instrucción

Como se ha señalado en otras ocasiones, los 70 estudiantes que participaron en esta experiencia (distribuidos en 17 equipos) enfrentaron un total de 56 tareas; de las cuales, 23 las trabajaron en forma individual, 10 en equipo y 23 grupalmente. La fuente de datos de las producciones escritas de los estudiantes consistió en las tareas en equipo y las individuales; el número total de todos estos documentos asciende a 1 662: 170 que corresponden al trabajo en equipo (diez tareas por cada uno de los 17 equipos) y el resto, al individual. Las notas del investigador, principalmente, suministraron información acerca de las dificultades que iban enfrentando los estudiantes en las tareas en equipo y en las grupales y, en el mejor de los casos, la manera de superarlas.

Recabación de datos vía los Instrumentos de Exploración

El instrumento para explorar el dominio de la conversión de los registros gráfico y algebraico en funciones polinomiales elementales aportó 70 manuscritos individuales (uno por cada estudiante); mientras que cada uno de los denominados 1°, 2° y 3er. Instrumento de Comprensión contribuyó con 18 documentos escritos en equipo (uno por cada equipo) y el 4° instrumento, con 16 individuales. Además de los datos que proporcionaron estas 140 producciones escritas de los alumnos, se contó con los de las notas del investigador, en el sentido que se indica en el párrafo anterior.

ANÁLISIS DE DATOS

Por lo que se acaba de ver, los datos sujetos a análisis son, por un lado, los que provienen del proceso de instrucción y por otro, los que aportaron los instrumentos de exploración. Antes de exponer brevemente la forma en que se llevó a cabo el análisis de dichos datos según la vía de la que provienen, cabe señalar que el análisis de los datos es más de orden cualitativo (cualidades de las respuestas) que cuantitativo (asignación de un puntaje de acuerdo al número de las respuestas correctas). Este último se considera, en algunas ocasiones, como un elemento más que contribuye a valorar el desempeño de los estudiantes.

Análisis de los datos de la Instrucción

En términos generales, las 56 tareas que enfrentaron los estudiantes durante el proceso de instrucción, se pueden clasificar en cuatro categorías de acuerdo a su propósito:

1a. indagar, en la Tarea 1 y 6, cómo llevan a cabo la conversión de los registros gráfico y algebraico en funciones de la forma $y = ax^n + b$, *donde a, b* $\in \Re$, $a \neq 0$ y n = *1, 2* y *3*; en la Tarea 7, promover en los alumnos la toma de conciencia de las estrategias que utilizaron al enfrentarse por segunda ocasión a problemas de conversión y autoevaluarse en su desempeño;

2a. elaborar el material necesario para abordar el estudio de la conversión de interés (Tareas 2, 3 y 4);

3a. identificar, a partir de casos particulares, las unidades significantes en el registro gráfico y algebraico en funciones de la forma $y = ax^n + b$, *donde a, b* $\in \Re$, $a \neq 0$ y n = *1, 2* y *3* y/o establecer una correspondencia asociativa entre dichas unidades significantes de cada uno de los dos registros y/o registrar por escrito las generalizaciones de esas correspondencias (Tareas 5, 8─44);

4a. promover la automatización de dicha conversión (Tareas 45─56).

Por lo anterior, a continuación se expone, brevemente, la forma en que se llevó a cabo el análisis de los datos bajo el esquema de esas cuatro categorías.

Análisis de los datos proporcionados por las tareas de la primera categoría. Los datos de la Tarea 1 y 6 son las respuestas que emitieron los estudiantes a las 30 preguntas del denominado “Cuestionario” (éste se muestra en el Anexo 1). Para que ellos contesten correctamente las 15 preguntas de la 1ª parte del Cuestionario, dedicadas al proceso ecuación$\rightarrow$gráfica, es necesario que:

1º analicen la ecuación, que a saber es de la forma $y = ax^n + b$, a fin de establecer las propiedades de las unidades significantes, es decir, valor de "*n*", signo de "*a*", valor de "*a*" y valor de "*b*";

2º con base a lo anterior, determinen, para cada una de las unidades significantes de la escritura algebraica, la característica correspondiente de la gráfica asociada y,

3º finalmente, identifiquen, de un conjunto de 54 bosquejos de gráficas, aquella que cumpla con las condiciones establecidas en el punto precedente.

Algo parecido es preciso para la 2ª parte del Cuestionario, cuyas preguntas, están referidas al proceso gráfica $\rightarrow$ ecuación.

Los aspectos que se acaban de enunciar, conformaron el marco de análisis para las respuestas de los alumnos; de tal manera que,

i. en primer lugar, se determinó el número de preguntas no contestadas;
ii. cada respuesta de los estudiantes fue catalogada como correcta o incorrecta;
iii. cuando la respuesta era incorrecta, se intentó distinguir cuál o cuáles eran las correspondencias asociativas entre las unidades significantes de los dos registros que habían establecido y, finalmente,
iv. si el grado de consistencia de las respuestas era alto, es decir, si las respuestas revelaban *una* misma estrategia de solución o un patrón; por ejemplo, para el caso del proceso ecuación$\rightarrow$gráfica, si el estudiante *siempre* le asociaba el mismo tipo de gráfica a ecuaciones de la misma forma.

Para el caso de la Tarea 7, se comparó lo que cada uno de los estudiantes relató por escrito en torno a lo que había realizado para contestar las dos partes del Cuestionario con los resultados que se obtuvieron del análisis de su Tarea 6 y se valoró la compatibilidad de nuestros resultados con su punto de vista.

Análisis de los datos proporcionados por las tareas de la segunda categoría. El análisis de los datos de las tareas de esta categoría se centró en las dificultades que los alumnos mostraron al realizarlas: qué aspectos de las tabulaciones solicitadas (Tareas 2 y 3) representaron mayores problemas para la población y qué complicaciones tuvieron al graficar (Tarea 5).

Análisis de los datos proporcionados por las tareas de la tercera categoría. En términos generales, las respuestas a cada una de las preguntas de las tareas de esta tercera categoría se clasificaron, en un primer momento, como correctas y no correctas. Las respuestas fueron etiquetadas como correctas cuando se estimó,

a. por un lado, que la respuesta revelaba que los estudiantes habían centrado su atención en aquellos aspectos que, de acuerdo a la pregunta y por ende a su propósito, eran los elementos relevantes a identificar, en ese momento, en los registros gráfico y algebraico y/o establecía apropiadamente las correspondencias asociativas entre los dos registros y/o se registraban adecuadamente las generalizaciones de esas correspondencias, según fuera el caso;
b. y por otro, que los términos utilizados al redactar la repuesta eran claros y precisos es decir, sin ambigüedades, imprecisiones o equívocos.

Las respuestas que en una primera instancia fueron etiquetadas como no correctas, se reclasificaron de acuerdo a las categorías que se iban construyendo con base en las respuestas específicas que se estaban analizando en un momento determinado. De esas categorías que se construyeron, las que se presentaron con mayor frecuencia fueron las intituladas *ambiguas*, *imprecisas*, *no relevantes* e *incorrectas*.

Análisis de los datos proporcionados por las tareas de la cuarta categoría. El propósito de las Tareas 45─56 es promover la automatización de la conversión de los registros de representación gráfico y algebraico en funciones de la forma $y = ax^n + b$, *donde* $a, b \in \Re$, $a \neq 0$ y n = *1, 2* y *3*; ante tal interés, el análisis de los datos provenientes de dichas tareas, centró su atención en el desempeño que mostraron los estudiantes al,

a. identificar las unidades significantes en la representación algebraica y las variables visuales, en la representación geométrica;
b. establecer las correspondencias asociativas entre las unidades significantes de las dos representaciones;
c. identificar la gráfica requerida dentro del conjunto de 54 bosquejos que se les proporcionó (proceso ecuación→gráfica) y construir una ecuación factible de asociársele a la gráfica indicada (proceso gráfica→ecuación), según fuera el caso.

A partir del desempeño observado en estos aspectos señalados, se determinó, por un lado, cuáles de ellos (en lo global y en lo específico) representaba mayor problema para la población; por otro, qué tipo de función (de los tres trabajados: lineal, cuadrática y cúbica) había implicado mayor dificultad para los estudiantes y, finalmente, cuál proceso (ecuación→gráfica o gráfica→ecuación) parecía ser más accesible para ellos.

Análisis de los datos de los Instrumentos de Exploración

Como se ha especificado en diversas ocasiones, los instrumentos de exploración son cinco: uno para indagar hasta qué grado la instrucción promovió el dominio de la citada conversión de los registros gráfico y algebraico, es decir, su automatización, y cuatro, para sondear la comprensión. En las líneas subsecuentes, se expone, a grandes rasgos, cómo se efectuó el análisis de los datos que proporcionaron dichos instrumentos presentando, en primer lugar, lo correspondiente al del dominio y, en segundo lugar, a lo de la comprensión.

Análisis de los datos proporcionados por el instrumento que se utilizó para explorar el dominio de la conversión de los registros gráfico y algebraico en funciones polinomiales elementales. A la luz de la posición de Duval (1998, 1999) con relación a la conversión de registros (ver Capítulo 2) y en virtud de que el instrumento que se utiliza en esta ocasión es el mismo que el de la Tarea 1 y 6, el análisis de los datos proporcionados por el denominado “Cuestionario” es muy similar a lo reseñado para la Tarea 1 y 6 (ver, arriba, la sección titulada *Análisis de los datos proporcionados por las tareas de la primera categoría*), salvo que en este caso, además de lo declarado en el espacio correspondiente al análisis de dichas tareas, se examinan las respuestas incorrectas de los estudiantes, se ubica el equívoco es decir, se localiza cuál o cuáles de las correspondencias asociativas entre las unidades significantes de los dos registros no fueron las adecuadas, se considera una posible fuente de equívoco; se determina, para cada pregunta, los distintos equívocos que presentaron los estudiantes y el número de alumnos que incurrieron en el mismo equívoco en la pregunta bajo análisis; se determina, desde la óptica del número de alumnos que contestaron correctamente, cual fue la pregunta más fácil y la más difícil para los aprendices; se compara el desempeño de la población en los distintos tipos de funciones y se establece cual de ellos representó mayor dificultad para los estudiantes; se asigna un puntaje a cada respuesta correcta; se obtiene la puntuación total (sobre diez), de cada alumno en el Cuestionario y se calcula la puntuación promedio del conjunto de los 70 estudiantes que participaron en esta experiencia.

Análisis de los datos proporcionados por los cuatro instrumentos de comprensión. El proceder para analizar los datos provenientes de estos cuatro instrumentos se resume en los párrafos subsiguientes, abordando cada uno de ellos a la vez y en concordancia al orden en el que fueron aplicados: en primer lugar, el que responde al nombre de *“Explorando diversos aspectos de la articulación de registros”* (también referido como 1er. Instrumento de

Comprensión); en segundo, *“Explorando algunos aspectos sobre la escala”* (2° Instrumento de Comprensión); en tercer lugar, “*Representaciones gráfica y algebraica en contexto*” (3er. Instrumento de Comprensión) y, en cuarto y último lugar, “*Cuestionario*” (4° Instrumento de Comprensión) y para cerrar esta sección, se describe, brevemente, un elemento más que se consideró en dicho análisis: una comparación del rendimiento alcanzado por los equipos en los tres primeros Instrumentos de Comprensión y en el de Dominio.

1er. Instrumento de Comprensión: *“Explorando diversos aspectos de la articulación de registros”*. Los “cristales” que se utilizaron para el análisis de los datos de este 1er. Instrumento fueron, esencialmente, tres:

1. La concepción de Duval (1998, 1999) en torno a que la conversión de las representaciones requiere la identificación de las unidades significantes en el registro de partida y en el de llegada, segmentar las dos representaciones en sus respectivas unidades significantes y establecer una correspondencia asociativa entre las unidades significantes elementales de cada uno de dichos registros.
2. La posición de Hiebert y Carpenter (1992) en el sentido de que una de las consecuencias de la comprensión es que es generativa y otra, que incrementa la transferencia; por lo que, un aspecto en el que se centra dicho análisis es la forma en que los aprendices llevan a cabo la conversión de los registros de representación gráfico y algebraico en funciones “un tanto similares” a las presentadas en la instrucción y otro es, la manera en que abordan tareas que exigen un enfoque puntual (la instrucción se llevó a cabo con un enfoque global cualitativo).
3. El punto de vista de Moschkovich, Schoenfeld y Arcavi (1993) con relación a que la habilidad para moverse flexiblemente entre la perspectiva proceso y objeto en una variedad de representaciones son aspectos de una comprensión de las funciones y que en éstas, las conexiones cartesianas son importantes; de donde, otros focos

de atención en dicho análisis son: el uso que hacen los estudiantes de las conexiones cartesianas; la forma en la que trabajan las representaciones de las funciones (como proceso y/o como objeto) y la manera de moverse entre las perspectivas objeto y proceso.

Sin perder de vista lo expresado en los dos puntos anteriores, el análisis de los datos del instrumento que ahora nos ocupa, se efectuó, en términos generales, bajo el siguiente esquema:

1º cada una de las preguntas del instrumento (17) se agruparon en contestadas y no contestadas;

2º las respuestas a cada una de las preguntas (a lo más 18 por pregunta, una por cada equipo) se clasificaron en dos grandes categorías: correctas y no correctas;

3º las respuestas no correctas se reclasificaron en categorías que se fueron construyendo conforme se revisaban las producciones de los grupos pequeños; por ejemplo, incorrectas, imprecisas, etc.;

4º tanto las respuestas correctas como las incorrectas se distribuyeron en grupos, éstos se formaron de acuerdo a la(s) característica(s) de las respuestas de tal forma que, cada uno de ellos aglutinara las que mostraban las mismas características;

5º cuando el contenido de dos o más preguntas estaba “directamente relacionado”, para cada grupo pequeño, se comparó la estrategia de solución utilizada por el equipo en una de esas preguntas con la que había empleado en la(s) otra(s) pregunta;

6º se asigna un puntaje a cada respuesta correcta; se obtiene la puntuación total (sobre diez) de cada equipo en el Instrumento y se calcula la puntuación promedio del conjunto de los 18 grupos pequeños que participaron en esta experiencia.

Como puede observarse, el esquema anterior revela que en el análisis de los datos se acepta que una respuesta “no correcta” es diferente de una “incorrecta”. Esta diferenciación de términos responde a la consideración de que para que una respuesta emitida por un alumno o un equipo sea etiquetada como correcta es necesario que satisfaga “*n*” requisitos y para que sea incorrecta, que ninguno de ellos se cumpla; sin embargo, es usual que las respuestas de los estudiantes contengan algunos y otros no; si manejásemos como sinónimos los términos “respuesta incorrecta” y “respuesta no correcta”, estaríamos en una posición de “todo o nada”; éste no es el caso; ello, estimamos, limitaría nuestro análisis.

Por otra parte, en el análisis de los datos, en algunos casos, además de centrar la atención en los aspectos específicos que se pretendían explorar en cada pregunta, se consideraron algunos otros que se apreciaron convenientes para complementar la información de dicho análisis; entre ellos está, por ejemplo, en la Pregunta 1 y 2, cuántos y cuáles fueron los registros de representación que utilizaron los grupos pequeños en sus respuestas.

2° Instrumento de Comprensión: *“Explorando algunos aspectos sobre la escala”*. Las posiciones a la luz de las cuales se analizan los datos que provee este instrumento son, por un lado, la de Duval (1998, 1999), Hiebert y Carpenter (1992) y la de Moschkovich, Schoenfeld y Arcavi (1993), en el mismo sentido que son referidas en la sección inmediata anterior y por otro, la de Leinhardt, Zaslavshy y Stein (1990) en torno a que una comprensión completa de las representaciones gráficas significa darse cuenta de qué características no cambian cuando se alteran las escalas y cuáles sí.

El análisis de los datos de este instrumento, se realizó, prácticamente, bajo el mismo esquema con el que se llevó a cabo el de los del anterior salvo que en esta ocasión, conjuntamente con lo señalado en los cinco puntos del referido esquema, se compara el rendimiento del grupo en su conjunto en cada una de las cinco partes de las que consta el instrumento que ahora se discute.

3er. Instrumento de Comprensión: *"Representaciones gráfica y algebraica en contexto"*. Los datos provenientes de este instrumento se analizaron, fundamentalmente, por un lado, desde las posiciones de Duval (1998, 1999), Hiebert y Carpenter (1992), conforme a lo que se expresó de ellas en el 1er, Instrumento y por otro, la de Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990) en torno a que la acción de interpretar una gráfica exige moverse dentro de dos perspectivas: una de ellas que transita (en cualquier dirección) de un enfoque puntual hasta un global, pasando por el de intervalos y la otra, de lo cualitativo a lo cuantitativo (o inversamente) y que, la construcción de una gráfica involucra ir desde los datos en bruto hasta el proceso de selección y nominación de los ejes, la selección de la escala, la identificación de las unidades y la graficación.

Con relación al esquema seguido para el análisis de los datos provenientes del instrumento que ahora nos ocupa, baste mencionar que es similar al seguido en el 2° Instrumento de Comprensión.

4° Instrumento de Comprensión: *"Cuestionario"*. Al igual que en el análisis de los datos de los tres instrumentos anteriores en este 4° se considera la posición de Duval (1998, 1999) para la conversión y la de Hiebert y Carpenter (1992) para la comprensión; sólo que de esta última, en esta ocasión, se considera otra consecuencia de la comprensión (además de las especificadas para el 1er. Instrumento): que promueve el recuerdo.

En virtud de que el 4° Instrumento de Comprensión es el mismo que se empleó para explorar el dominio de la conversión de registros de representación gráfico y algebraico en funciones polinomiales, los esquemas para analizar sus respectivos datos son muy parecidos; su diferencia fundamental estriba en la forma en la que se considera la posible fuente de equívoco; se estima que ésta, en mucho, es producto del momento en que se aplicó el denominado Cuestionario: no se juzga igual, cualitativamente hablando, incurrir en un determinado equívoco, por ejemplo, asociar una ecuación de la forma $y = ax^2 + b$

con una parábola cúbica, inmediatamente después de haber finalizado el proceso de instrucción que un año después. En el primer caso puede reflejar impericia en la automatización de la conversión mientras que en el segundo, olvido de la relación existente entre el exponente de la variable independiente y la forma de la gráfica asociada.

Comparación del rendimiento alcanzado por los equipos en los tres primeros Instrumentos de Comprensión y el de Dominio. Una vez analizados los datos que proporcionó el Instrumento dedicado a explorar el dominio de la citada conversión y los de cada uno de los tres primeros Instrumentos de Comprensión, se concentraron en una tabla las puntuaciones alcanzadas por cada grupo pequeño en cada uno de estos cuatro Instrumentos, se calculó la puntuación promedio obtenida por los 18 equipos en cada Instrumento y, la de cada equipo en los tres Instrumentos de Comprensión; se compararon las distintas puntuaciones y se estableció, con base en las puntuaciones obtenidas, entre otras cosas, qué Instrumento representó mayores dificultades para la población y qué equipo mostró el mejor rendimiento.

Con esto, se da por concluida la exposición del Capítulo que ahora nos ocupa y se procede a relatar, en el Capítulo 4, la forma en la cual se llevaron a cabo las 18 sesiones que conformaron el citado proceso de instrucción.

Capítulo 4

Descripción de las Sesiones y algunas Observaciones

Introducción

En este apartado se describe cuáles son las tareas que enfrentaron los estudiantes en cada una de las sesiones del proceso enseñanza-aprendizaje al cual fueron sometidos. El propósito de las tareas y actividades, como se ha mencionado en varias ocasiones, fue promover en los alumnos la comprensión y la automatización de la conversión de los registros de representación gráfico y algebraico en funciones polinomiales elementales.

Antes de continuar, es pertinente señalar que si bien las tareas que se les presentan a los estudiantes en las clases son, naturalmente, distintas ya sea por el contenido y/o la forma de trabajo (individual, en equipo o grupal), todas las sesiones se desarrollan, prácticamente, de la misma manera. En términos generales, la estructura de cada clase es la siguiente:

1º Registro de asistencia (tiempo aproximado, cinco minutos).

2º Revisión y registro del trabajo extraclase (de cinco a diez minutos).

3º Exposición, por parte de los estudiantes, de los aspectos fundamentales vistos en la o las clases anteriores (diez minutos).

4º Asignación y realización de la(s) tarea(s) planeada(s) para la sesión (de 25 a 80 minutos).

5º Recapitulación de las conclusiones obtenidas en el grupo (diez minutos).

6º Asignación del trabajo extraclase (aproximadamente cinco minutos).

Por ser estas seis actividades comunes en las clases y con la intención de señalar las que son diferentes en cada una de ellas, a continuación se describen las sesiones tratando de evitar, en la medida de lo posible, la repetición de aspectos que comparten. Por ejemplo, baste haber mencionado que la primera actividad de cada sesión fue el registro de asistencia, para omitir, en la descripción de cada una de ellas, una afirmación como la siguiente: “al inicio de clase el profesor pasa lista”. Por otro lado, es conveniente señalar que en este apartado no se reproducen las tareas, sólo se hace referencia a ellas; si se desea, se pueden consultar en el Anexo 1.

Por otra parte, todos los resultados a los que se hace referencia en la descripción de las sesiones bajo el título de “*Observaciones”*, responden por una lado, a las notas de campo del profesor─investigador; y por otro, al análisis de las tareas; el cual, se llevó a cabo de la misma manera como el que se ejemplifica, con las Tareas 22 y 23, en el Anexo 3.

1ª SESIÓN

Descripción

Aplicación del denominado Cuestionario (Tarea Uno, Anexo 1); éste contiene 30 preguntas: las primeras 15 están referidas al proceso ecuación→gráfica en funciones de la forma $y = ax^n + b$, *donde* a*, b* $\in \Re$*,* $a \neq 0$ y n = *1, 2* y *3* y, las 15 restantes, al proceso inverso para el mismo tipo de funciones. Para poder contestar el Cuestionario es necesario contar con la hoja que contiene 54 bosquejos de gráficas: 18 rectas, 18 parábolas y 18 parábolas cúbicas. Las gráficas son entregadas a los estudiantes antes que el Cuestionario y se les solicita que las observen detenidamente con el propósito de que distingan una de otra. Para el caso de las rectas, el profesor, verbalmente, va indicando el ángulo que forma cada una de ellas con la parte positiva del eje de las abscisas. Cuando los estudiantes cuentan con el material completo, el profesor les comunica que el tiempo del que disponen para realizar la tarea, la cual se lleva a cabo en forma individual, es de 45 minutos.

Observación: Aplicar el mencionado Cuestionario en esta primera sesión responde, como se señala en el Capítulo 3, al hecho de que bajo la posición de Bransford, Brown y Cocking (1999), los ambientes de aprendizaje centrados en el alumno incluye las preconcepciones iniciales de los estudiantes acerca del objeto de enseñanza.

Finalizada la actividad, se comenta en el grupo las opiniones de los estudiantes acerca del Cuestionario.

Observación: En esta actividad la gran mayoría de los alumnos manifiestan que no tenían "ni idea" de como llevar a cabo la asociación solicitada y que, en el mejor de los casos, en la primera parte *del Cuestionario, algunos de ellos tabularon, graficaron y elegían la gráfica "que más se parecía".*

Acto seguido, el profesor interviene para señalar que al igual que un traductor profesional, por ejemplo, español─inglés, si se le habla en español, inmediatamente traduce al inglés y recíprocamente, para realizar con éxito las asociaciones solicitadas en el Cuestionario (sin tabular), es necesario ser un buen "traductor del lenguaje algebraico al gráfico y recíprocamente". A éste le basta observar la representación algebraica de una función, para que inmediatamente pueda describir las características de su gráfica asociada o seleccionarla de un conjunto de ellas y viceversa. Esto, aclara el profesor, es uno de los objetivos fundamentales del curso. El maestro también señala que por cuestiones didácticas, en las 54 tareas que habrán de realizarse para lograr el objetivo deseado, primero se estudiará cómo "traducir" del lenguaje algebraico al geométrico y posteriormente el proceso inverso.

Observación: En realidad, bajo la posición de Duval (1998, 1999), que es la que se acepta en este trabajo, lo que se espera de los estudiantes es la conversión de los registros de representación gráfico y algebraico en funciones polinomiales elementales. Sin embargo, éste lenguaje se considera demasiado técnico para utilizarlo con ellos. Por tal razón, a la luz de la metáfora del traductor, se introducen los términos "traducción" o "traducir" con el único fin de hacer más accesible la comunicación con los aprendices.

Finalmente, el profesor aclara que las Tareas Dos y Cuatro constituyen el material indispensable para el logro de los objetivos propuestos. Acto seguido, le entrega a cada estudiante la hoja de la Tarea Dos y les explica que el único motivo por el cual se les está pidiendo que las relaciones funcionales sean tabuladas de -3 a 3, es decir, que le asignen a la variable independiente los valores de -3, -2, -1, 0, 1, 2 y 3, es operativo. Esto le permitirá al grupo revisar sus tabulaciones en el menor tiempo posible.

Observación: Cada una de las relaciones funcionales de la Tarea Dos representa a una de la 54 familias de relaciones funcionales que se obtienen al combinar los distintos valores de n, a y b en la forma $y = ax^n + b$ donde a, $b \in \Re$, $a \neq 0$ y n = 1, 2 y 3.

Las relaciones funcionales contenidas en esta Tarea son:

1. $y = x$
2. $y = 2x$
3. $y = \frac{1}{2}x$
4. $y = x + 3$
5. $y = x - 3$
6. $y = 2x + 3$
7. $y = 2x - 3$
8. $y = \frac{1}{2}x + 3$
9. $y = \frac{1}{2}x - 3$
10. $y = -x$
11. $y = -2x$
12. $y = -\frac{1}{2}x$
13. $y = -x + 3$
14. $y = -x - 3$
15. $y = -2x + 3$
16. $y = -2x - 3$
17. $y = -\frac{1}{2}x + 3$
18. $y = -\frac{1}{2}x - 3$
19. $y = x^2$
20. $y = 2x^2$
21. $y = \frac{1}{2}x^2$
22. $y = x^2 + 2$
23. $y = x^2 - 2$
24. $y = 2x^2 + 1$
25. $y = 2x^2 - 1$
26. $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$
27. $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$
28. $y = -x^2$
29. $y = -2x^2$
30. $y = -\frac{1}{2}x^2$
31. $y = -x^2 + 2$
32. $y = -x^2 - 2$
33. $y = -2x^2 + 1$
34. $y = -2x^2 - 1$
35. $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3$
36. $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3$
37. $y = x^3$
38. $y = 2x^3$
39. $y = \frac{1}{2}x^3$
40. $y = x^3 + 2$
41. $y = x^3 - 2$
42. $y = 2x^3 + 1$
43. $y = 2x^3 - 1$
44. $y = \frac{1}{2}x^3 + 4$
45. $y = \frac{1}{2}x^3 - 4$
46. $y = -x^3$
47. $y = -2x^3$
48. $y = -\frac{1}{2}x^3$
49. $y = -x^3 + 2$
50. $y = -x^3 - 2$
51. $y = -2x^3 + 1$
52. $y = -2x^3 - 1$
53. $y = -\frac{1}{2}x^3 + 4$
54. $y = -\frac{1}{2}x^3 - 4$

Uno de los problemas que se presentan cuando se le asocia una gráfica a una ecuación utilizando el proceso de tabulación (bien sea que en dicho proceso se le asignen a la variable independiente valores enteros o no, pero con mayor razón en el primer caso) es, ¿qué se hace con los puntos graficados?, ¿se unen o no se conectan entre sí?; si se unen, ¿cómo se unen?, ¿con segmentos de recta?, ¿con una curva suave que pase por los puntos graficados?, ¿la gráfica inicia y termina en el primer y último punto, respectivamente, que se obtienen de la tabulación?, si no es este el caso, ¿qué pasa con la gráfica antes y después de esos puntos? Si bien estos aspectos son centrales en el tema que nos ocupa, ellos no se discuten en las sesiones que ahora se describen en virtud de que fueron abordados, en clases anteriores (ver en el Capítulo 3 Diseño del Ambiente de Aprendizaje, sección Centrado en el estudiante); por tal razón, se estima que cuando a los estudiantes se les solicite hacer las gráficas correspondientes a cada una de las 54 relaciones funciones que se trabajan en esta Tarea Dos, las dificultades que presenten en los aspectos antes señalados sean mínimas a pesar de que únicamente hayan realizado la tabulación con números enteros. Bajo este entendido y considerando que el número de tabulaciones que habrá de realizar el estudiante es elevado, se piensa pertinente que los valores asignados a la variable independiente sean de tal naturaleza que faciliten el trabajo algorítmico. Estas son las razones por las cuales a la variable independiente se le asignan únicamente números enteros. Por otro lado, para evitar problemas innecesarios, las tabulaciones deben revisarse antes de que los estudiantes procedan a graficar. Además, si para efectuar las tabulaciones los valores de la variable independiente no se estipularan, la revisión de las 54 tabulaciones de cada alumno sería, prácticamente, imposible.

No obstante que se pretende allanar un tanto el trabajo algorítmico que llevará a cabo el alumno, se estima conveniente repasen las operaciones con racionales de la forma $\frac{m}{n}$ *. Esto explica el porque en la consigna de la Tarea Dos se solicita a los estudiantes no convertir a su expresión decimal dichos números. Cabe señalar que esta parte de la consigna arrancó expresiones de desencanto prácticamente en todos los alumnos. Saber que tenían que trabajar con "quebrados" les provocó angustia e inseguridad. Ellos preferían convertirlos a su expresión decimal.*

Aclarado lo anterior, se procede a que los estudiantes empiecen a realizar sus tabulaciones hasta que el tiempo de la clase finalice.

Observación: El tiempo, en la sesión, del que dispusieron los estudiantes para tabular, fue relativamente breve: aproximadamente 15 minutos. Sin embargo éste fue suficiente para que empezaran a aflorar las dificultades que un gran número de alumnos (alrededor de un 80%) tenían para realizar operaciones con racionales de la forma $\frac{m}{n}$ *. Ante esta situación el profesor coordina una breve discusión grupal para repasar cómo se llevan a cabo dichas operaciones y ratificar las operaciones algebraicas básicas; se habla de ratificar porque de hecho, en ese sentido, los estudiantes no mostraron serias dificultades*

El trabajo extraclase para la próxima sesión es realizar como mínimo las 27 primeras tabulaciones.

2ª Sesión

Descripción

El profesor les indica a los alumnos que la Tarea Tres: “Revisión de las tabulaciones”; se llevará a cabo de la siguiente manera:

- El primer estudiante a su derecha leerá la primera ecuación ($y = x$) y dará el primer par ordenado que se obtuvo de la tabulación. Es decir, aquel cuya abscisa es igual a -3. El siguiente alumno leerá el segundo par ordenado, el que le sigue el tercero y así sucesivamente hasta finalizar con esa tabulación. El procedimiento se repite hasta concluir con las 27 tabulaciones.

  Observación: El orden de los oradores no representa el más mínimo problema en virtud de que las sillas en el salón de clases se acomodan de tal manera que el grupo en su conjunto forme “una mesa redonda”. Esta es la forma usual de sentarse en cada clase salvo, cuando se realiza trabajo en equipo.

- Simultáneamente a lo anterior, los integrantes del grupo, incluyendo al profesor, checan si lo que está diciendo el compañero en turno coincide con lo que cada quien tiene escrito.

- Si el par ordenado que se lea en un momento determinado es incorrecto, el profesor, inmediatamente, lo hace saber al orador y al grupo y es el siguiente estudiante o el siguiente el que rectifica el equívoco.

- Cuando algún par ordenado de algún alumno no coincida con el correcto que se haya dado en voz alta, el estudiante sólo deberá marcar, por ejemplo con una cruz, las coordenadas incorrectas y no corregirlas en ese momento. Las correcciones se harán al final de revisión, de manera individual con el profesor, para detectar las dificultades y corregir lo pertinente.

Aclarado el procedimiento a seguir, se procede a la revisión de las tabulaciones. Concluida la actividad, el profesor indica a los alumnos que quienes hayan tenido todas las tabulaciones correctas continúen con las restantes y los que se equivocaron, deben rectificar las equivocaciones antes de proseguir con las otras tabulaciones.

Mientras los estudiantes realizan la actividad que les corresponde, el maestro pasa con cada uno de ellos para conocer, cuántas tabulaciones estuvieron incorrectas, cuáles fueron, cuál fue la dificultad y ayudar al alumno a zanjar sus dudas.

Observación: A pesar de que el porcentaje de alumnos que tienen severas dificultades al realizar operaciones con racionales de la forma $\frac{m}{n}$ *disminuye considerablemente con respecto a la clase pasada (en esta ocasión estamos hablando de aproximadamente un 10% de estudiantes), las tabulaciones más difíciles y en consecuencia, donde se presentan más problemas algorítmicos son, naturalmente, aquellas que implican dicho tipo de operaciones.*

La supervisión del trabajo que realizan los estudiantes es la actividad que el profesor lleva a cabo hasta que el tiempo destinado a la sesión se agota.

La clase concluye cuando el profesor indica a los alumnos que su trabajo extraclase es terminar las 54 tabulaciones y que para la próxima sesión deben llevar escuadra o regla y tres colores distintos porque van a empezar a graficar.

3ª SESIÓN

Descripción

Se revisan las 27 tabulaciones restantes de la misma manera en que se revisaron las anteriores en la clase pasada. El profesor aclara que los estudiantes que tienen bien todas las tabulaciones procederán a graficar y que, los que tienen algunas incorrectas, primero las corrijan y posteriormente grafiquen. Acto seguido, entrega a cada estudiante la Tarea Cuatro: "Representación gráfica de las 54 representaciones algebraicas". Les solicita que la lean y que, si hay dudas sobre las indicaciones para graficar, se las hagan saber para aclararlas.

Aclaradas las dudas de la Tarea Cuatro, algunos estudiantes empiezan a graficar, otros corrigen sus tabulaciones y el profesor primero, asiste a estos últimos y después revisa cómo están graficando.

Observación: Los equívocos de los estudiantes en las tabulaciones que se revisaron en esta clase fueron mínimos. Por lo que, se puede decir, que en esta ocasión, prácticamente, los alumnos superaron los problemas que habían tenido en las tabulaciones anteriores.

La forma estipulada en la Tarea Cuatro para graficar, responde a lo señalado en el noveno lineamiento del apartado "Estructuración del contenido": "Graficar en un mismo sistema de coordenadas cartesianas las gráficas asociadas a las relaciones funcionales en las que sólo varíe una unidad significante y las restantes permanezcan constantes".

Considerando lo anterior, son 26 sistemas de coordenadas cartesianas en los que se grafican las 54 relaciones *funcionales. A continuación se muestra la distribución de las gráficas en cada uno de los sistemas de coordenadas cartesianas de esta Tarea Cuatro. Esta es la forma en que los estudiantes grafican.*

Número de Plano	Gráficas asociadas a las ecuaciones (*designadas según su número*)	Número de Plano	Gráficas asociadas a las ecuaciones (*designadas según su número*)	Número de Plano	Gráficas asociadas a las ecuaciones (*designadas según su número*)
1º	1, 2 y 3	10º	19, 20 y 21	19º	37, 38 y 39
2º	1, 4 y 5	11º	19, 22 y 23	20º	37, 40 y 41
3º	2, 6 y 7	12º	20, 24 y 25	21º	38, 42 y 43
4º	3, 8 y 9	13º	21, 26 y 27	22º	39, 44 y45
5º	1 y 10	14º	19 y 28	23º	46, 47 y 48
6º	10, 11 y 12	15º	28, 29 y 30	24º	46, 49 y 50
7º	10, 13 y 14	16º	28, 31 y 32	25º	47, 51 y 52
8º	11, 15 y 16	17º	29, 33 y 34	26º	48, 53 y 54
9º	12, 17 y 18	18º	30, 35 y 36		

Para finalizar la clase el maestro les indica a los alumnos que para la próxima sesión deberán traer mínimamente los veinte primeros planos.

4ª Sesión

Descripción

Mientras los estudiantes continúan con la graficación, el profesor revisa los veinte planos de cada estudiante señalándole, en caso necesario, cuáles son los equívocos para que los corrija.

Observación: Dos fueron las dificultades fundamentales en la graficación: una elección no muy adecuada de la unidad de medida en los ejes (lo cual implicaba que en algunas partes las gráficas "se encimaban") y la localización de puntos cuya ordenada era un racional no entero. Aproximadamente un 20% de estudiantes presentaron la primera, mientras que sólo tres alumnos exhibieron la segunda.

Aproximadamente diez minutos antes de finalizar la clase, los estudiantes suspenden su actividad de graficación y el profesor les entrega la Tarea Cinco: "Clasificando ecuaciones". Como es costumbre, ellos leen las instrucciones y si existe alguna duda, el profesor la aclara. Al no externarse ninguna duda por parte de los alumnos, el maestro indica que el trabajo extraclase, para la próxima sesión, es terminar los 26 planos y la Tarea Cinco.

5ª Sesión

Descripción

El profesor recoge los cuadernos de los estudiantes donde se encuentran los 26 planos. A continuación les aplica, nuevamente, el "Cuestionario" (Tarea

Seis) bajo las mismas condiciones en las que se realizó la primera aplicación (Tarea Uno, Primera Sesión).

Observación: El objetivo de aplicar el "Cuestionario" por segunda ocasión en este momento es explorar la influencia de las Tareas de Tabulación y, fundamentalmente, la de Graficación en el desempeño de los estudiantes al enfrentarse nuevamente con el Cuestionario. En otras palabras, se estaba interesado en indagar la "ganancia" que tuvieron los estudiantes en la articulación de los registros de representación gráfico y algebraico (vía de interpretación global) cuando realizaron las Tareas de Tabulación y Graficación (vía de punteo).

Mientras los alumnos contestan el Cuestionario, el maestro revisa los planos que se tenían que entregar para esta clase y, los que algún estudiante hubiera tenido que repetir de los anteriores.

Transcurrido el tiempo fijado para contestar el "Cuestionario", los alumnos lo entregan e inmediatamente después el profesor les encomienda la Tarea Siete: "¿Cómo resolví el Cuestionario en su segunda aplicación?".

Observación: Tres propósitos fundamentales tiene esta tarea: un ejercicio de metacognición (el cual obliga a estructurar, al menos en un primer nivel, la actividad cognitiva realizada); una autoevaluación del trabajo realizado (que el alumno determine, por sí mismo, si va avanzando, retrocediendo o permanece igual con relación al punto en cuestión) y recabar mayor información sobre la "ganancia" de la que se habla renglones arriba.

Cuando los estudiantes terminan la Tarea Siete, al igual que en la primera sesión, se comenta en el grupo sus opiniones acerca de esta segunda aplicación del “Cuestionario”.

Observación: En términos generales, se puede decir que los alumnos a pesar de considerar que su desempeño en el “Cuestionario” sigue siendo muy bajo, estiman que mejoraron ligeramente en comparación con la primera aplicación. Manifiestan que en esta segunda aplicación, al menos, “ya tenían alguna idea” de cómo llevar a cabo la asociación de las gráficas y las ecuaciones. Esto, a decir de ellos, fue posible gracias a la Tarea de graficación.

Finalizada la actividad anterior, se continúa con la Tarea Ocho: “Clasificando ecuaciones”. Esta tarea es grupal y se inicia con la lectura de los dos criterios clasificatorios que utilizó cada estudiante en su Tarea Cinco. Ante la diversidad de los criterios clasificatorios utilizados, el profesor somete a discusión grupal, por un lado, los propios criterios clasificatorios y por otro, la validez de dicha diversidad. El grupo concluye que todos los criterios que ellos eligieron son correctos y que es completamente válido tener esa diversidad. Es decir, tanto el primer criterio clasificatorio como el segundo puede ser cualquiera de los expuestos en el salón.

Observación: Una riqueza de criterios clasificatorios se obtuvo en el grupo. Las representaciones algebraicas se clasificaron por el exponente de la variable independiente (éste fue el más socorrido, aproximadamente un 60% lo utilizó como uno de los dos criterios), el signo del coeficiente de la variable independiente, el valor del coeficiente de la variable independiente y el valor del término independiente.

El profesor, retomando la conclusión anterior, interviene para explicitar que los dos criterios clasificatorios que se considerarán para la Tarea Nueve son: el primero, el exponente de la variable independiente y el segundo, el signo del coeficiente de la variable independiente.

A continuación les entrega la hoja de la Tarea Nueve: “Registrando las clasificaciones” [Construcción del Cuadro I]. Les aclara que ésta es su trabajo extraclase y que los que tengan que corregir algún plano también lo hagan para la próxima sesión.

Observación: El propósito fundamental de la segunda consigna de la Tarea Nueve (que al construir el Cuadro I utilicen diferentes colores para anotar los distintos elementos de la ecuación), es que los estudiantes reafirmen los conceptos de variable, exponente, coeficiente y término independiente. Al mismo tiempo, la utilización de colores le permite al profesor, al momento de revisar el Cuadro I de los alumnos, percatarse rápidamente si algún estudiante no está identificando correctamente, por ejemplo, el término independiente. En otras palabras, si se les está solicitando a los estudiantes que anoten el término independiente con verde y al anotar las ecuaciones sólo anotan con verde el número pero no el signo, hay problemas para identificar el término independiente y, por razones obvias, esto se tiene que corregir antes de continuar.

6ª Sesión

Descripción

El profesor le solicita a cada estudiante que le muestre su Cuadro I. Cuando ha revisado todos, manifiesta ante el grupo las coincidencias y las discrepancias que mostraron los distintos integrantes en la construcción de dicho cuadro con el fin de que se discutan sobre todo las discrepancias. Con esto, el maestro enfrenta al grupo con la Tarea Diez: “Registrando las clasificaciones” [Construcción del Cuadro I].

Observación: El problema fundamental que enfrentan los alumnos en la Tarea Nueve y, en consecuencia, en la Tarea Diez es identificar que -1 es el coeficiente de la variable independiente en las ecuaciones $y=-x$, $y=-x+3$, $y=-x-3$, $y=-x^2$, $y=-x^2+3$, $y=-x^2-3$, $y=-x^3$, $y=-x^3+2$ *e* $y=-x^3-2$.

Aproximadamente el 64% de los estudiantes presentan la dificultad citada en el párrafo anterior. Un porcentaje menor (alrededor del 10% del total de alumnos) no sólo tienen ese problema en las ecuaciones antes mencionadas sino también en las demás ecuaciones. Por ejemplo, en la ecuación $y=-2x$ *anotan con azul (color asignado para los coeficientes) el “2” pero no el signo menos. Una cuestión similar muestran cuatro estudiantes con el término independiente.*

Una alumna al anotar las ecuaciones en el Cuadro I, hace explícitos el coeficiente y el exponente de la variable independiente así como el término independiente en aquellas ecuaciones que los tienen implícitos. Por ejemplo, en lugar de escribir $y=-x$ *anota, con los colores correctos,* $y=-1x^1+0$. *Esto fue una aportación valiosa para la discusión grupal.*

Aclarados todos los aspectos que así lo requirieron, el grupo en su conjunto se aboca a la “reconstrucción” (si se me permite el término) del Cuadro I en la parte de ecuaciones y se completa la construcción de dicho Cuadro, cuando se registra lo correspondiente en gráficas.

Comentario: La versión final del mencionado Cuadro es más o menos como la que se muestra a continuación.

C U A D R O I

E C U A C I O N E S					
Bloque I		Bloque II		Bloque III	
1ª Columna	2ª Columna	1ª Columna	2ª Columna	1ª Columna	2ª Columna
1. $y = x$	10. $y = -x$	19. $y = x^2$	28. $y = -x^2$	37. $y = x^3$	46. $y = -x^3$
2. $y = 2x$	11. $y = -2x$	20. $y = 2x^2$	29. $y = -2x^2$	38. $y = 2x^3$	47. $y = -2x^3$
3. $y = \frac{1}{2}x$	12. $y = -\frac{1}{2}x$	21. $y = \frac{1}{2}x^2$	30. $y = -\frac{1}{2}x^2$	39. $y = \frac{1}{2}x^3$	48. $y = -\frac{1}{2}x^3$
4. $y = x+3$	13. $y = -x+3$	22. $y = x^2+2$	31. $y = -x^2+2$	40. $y = x^3+2$	49. $y = -x^3+2$
5. $y = x-3$	14. $y = -x-3$	23. $y = x^2-2$	32. $y = -x^2-2$	41. $y = x^3-2$	50. $y = -x^3-2$
6. $y = 2x+3$	15. $y = -2x+3$	24. $y = 2x^2+1$	33. $y = -2x^2+1$	42. $y = 2x^3+1$	51. $y = -2x^3+1$
7. $y = 2x-3$	16. $y = -2x-3$	25. $y = 2x^2-1$	34. $y = -2x^2-1$	43. $y = 2x^3-1$	52. $y = -2x^3-1$
8. $y = \frac{1}{2}x+3$	17. $y = -\frac{1}{2}x+3$	26. $y = \frac{1}{2}x^2+3$	35. $y = -\frac{1}{2}x^2+3$	44. $y = \frac{1}{2}x^3+4$	53. $y = -\frac{1}{2}x^3+4$
9. $y = \frac{1}{2}x-3$	18. $y = -\frac{1}{2}x-3$	27. $y = \frac{1}{2}x^2-3$	36. $y = -\frac{1}{2}x^2-3$	45. $y = \frac{1}{2}x^3-4$	54. $y = -\frac{1}{2}x^3-4$
G R Á F I C A S					
Bloque I *Planos del 1º al 9º*		Bloque II *Planos del 10º al 18º*		Bloque III *Planos del 19º al 26º*	
1ª Columna	2ª Columna	1ª Columna	2ª Columna	1ª Columna	2ª Columna
Planos 1º - 4º	*Planos 6º - 9º*	*Planos 10º - 13º*	*Planos 15º - 18º*	*Planos 19º - 22º*	*Planos 23º - 26º*

Finalizado el trabajo grupal, el profesor les entrega la Tarea Once titulada "Analizando Bloques" para ser realizada de manera individual durante un lapso de aproximadamente 15 minutos.

Observación: A partir de esta Tarea las distintas preguntas que se les formulan a los estudiantes están numeradas progresivamente. Es decir, los números asignados a las dos preguntas de la Tarea Once son "1" y "2". Como en la Tarea Doce se plantean las mismas dos preguntas para ser discutidas en equipo, la numeración de éstas es también "1" y "2". La Tarea Catorce contiene cinco preguntas y la numeración para ellas es "3", "4", "5", "6" y "7". Como la Tarea Quince es el trabajo en equipo de la Tarea Catorce, las preguntas y la numeración son las mismas. A la primera pregunta de la Tarea Dieciséis le corresponde el número ocho y así sucesivamente.

La forma en que están numeradas las preguntas permite localizar rápidamente alguna de ellas cuando esto es necesario.

Al concluir el trabajo individual, los estudiantes se integran en equipos de tres o cuatro personas para abordar la Tarea Doce. Esta tarea consiste en analizar los Bloques pero ahora en equipo. El profesor le entrega a cada equipo la hoja impresa con la Tarea Doce y el equipo anota en ella sus conclusiones.

Observación: Analizar los Bloques del Cuadro I (Tareas Once y Doce) implica, por lo señalado en el apartado de Estructuración del Contenido, establecer las diferencias y las similitudes que existen entre el Bloque I, II y III tanto en ecuaciones como en gráficas.

Para los estudiantes, en su trabajo individual y en equipo, no representa mayor problema identificar y describir cual es la diferencia entre las ecuaciones de los tres Bloques. No se puede decir lo mismo para la diferencia entre las gráficas. A pesar de que los alumnos identifican rápidamente que la diferencia entre las gráficas es su forma, tienen algunos problemas para describirlas. No saben cómo hacerlo. Desconocen el nombre de las del Bloque II y III. Le solicitan al profesor el nombre de dichas gráficas. Pero, en ese momento, lo único que obtienen por respuesta es: "si no saben el nombre, descríbanlas como puedan". Ante esta situación, deciden describir a las del Bloque II como las que tienen forma de "u" y a las del Bloque III como las que tienen forma de "s" alargada, de "rehilete" o de "viborita".

A pesar de lo anterior, se puede afirmar que desde el trabajo individual (Tarea Once) y, naturalmente en el trabajo en equipo (Tarea Doce), hay consenso en el grupo sobre cuáles son las diferencias tanto en ecuaciones como en gráficas. Sin embargo, no se puede decir lo mismo para las similitudes. Este caso, difiere del anterior en varios aspectos. Primero, en el trabajo individual y en equipos no hay consenso sobre las similitudes que presentaban tanto las ecuaciones como las gráficas. Es decir, algunos alumnos (y, en consecuencia, algunos equipos) observan y registran alguna(s) similitud(es); otro(s), otra(s) y otro(s) más, alguna(s) otra(s) similitud. Además, ningún alumno ni equipo logran enunciar todas las similitudes de las ecuaciones y de las gráficas. Esta situación se presenta a pesar de que el profesor, al ver el trabajo que los alumnos están realizando (individual o en equipo), insistentemente les hace comentarios tales como: "fíjate *(fíjense) bien", "¿ya no tienen otra cosa en común?", "faltan similitudes", etc.*

Finalizada la discusión en equipo se procede a la discusión grupal (Tarea Trece). Esta inicia con las diferencias en ecuaciones y continúa con las diferencias en gráficas. Cuando esta parte de la discusión finaliza y el grupo como tal llega a un consenso en torno a estos puntos, el profesor intervine para dar a conocer a los estudiantes el nombre que se utiliza en matemáticas para las gráficas del Bloque II y III. Solicita a los estudiantes que centren su atención en las parábolas y mediante preguntas como "¿cuáles creen que son los elementos importantes en una parábola?", "¿la parábola podrá estar en otra u otras posiciones distintas a las que tenemos?", involucra al grupo en una discusión que finaliza cuando los estudiantes concluyen, apoyados por el maestro en los nombres "oficiales", que las parábolas tienen un punto importante llamado vértice y que éste puede ser cualquier punto del plano cartesiano; que son simétricas y que su eje de simetría puede ser cualquier recta además de que se pueden abrir en cualquier dirección. Conclusiones similares se obtienen para el caso de las parábolas cúbicas.

El profesor nuevamente interviene para aclarar que de todas las parábolas que existen sólo se van a estudiar aquellas que se abren hacia arriba o hacia abajo, que su eje coincide con el eje de las ordenadas y que tienen su vértice en dicho eje. Y que, para el caso de las parábolas cúbicas las únicas que van a ser objeto de estudio son las que tienen su punto de inflexión en el eje de las ordenadas y que se abren sobre dicho eje.

Posteriormente se discuten las similitudes hasta completar la lista de ellas tanto en ecuaciones como en gráficas.

Observación: La similitud que presenta mayor dificultad para los alumnos es la de que "la variable dependiente está despejada". Esta versión sólo es expresada por un equipo, mientras que lo más cercano que obtienen algunos otros equipos son dos *similitudes que están muy próximas a la antes citada. Ellas son: "la variable dependiente tiene exponente uno" y "la variable dependiente tiene coeficiente uno".*

Las discusiones en equipo y grupal en torno a las similitudes fueron unas de las más ricas durante el proceso de instrucción en el sentido de que pusieron de manifiesto, una vez más, la validez del refrán "dos cabezas piensan más que una" y nosotros le agregaríamos "y cuatro ojos ven mejor que dos".

Para finalizar la clase el maestro les entrega la Tarea Catorce: "Estableciendo condiciones", la cual deberá realizarse en forma individual y ser entregada la próxima sesión.

7ª Sesión

Descripción

Los estudiantes forman equipos para realizar la Tarea Quince: "Estableciendo condiciones". El profesor, como es costumbre, le entrega a cada equipo la hoja correspondiente para que anoten sus conclusiones en torno a las preguntas que previamente se han contestado de manera individual.

El trabajo en equipo es expedito. Prácticamente, hay consenso en las respuestas y las pocas discrepancias que surgen en algunos equipos son superadas con facilidad.

Observación: El análisis requerido para dar respuesta a las preguntas planteadas es limitado tanto en el trabajo individual como en el de equipo. En cuatro de las cinco preguntas, las respuestas de todos los equipos son incompletas. Por ejemplo, ante la *pregunta "¿Cuáles son las condiciones que debe cumplir una ecuación para que su gráfica asociada sea una recta (no paralela a los ejes) en el Plano Cartesiano?" la respuesta que dan los estudiantes en su trabajo individual y después es consensada en el trabajo en equipo es: "Que el exponente de la variable independiente sea uno".*

Como el profesor transita por todo el salón y se detiene con cada equipo (o con cada alumno cuando el trabajo es individual) para saber cómo van, conoce perfectamente bien cual es la situación del grupo. Decide no interpelar por separado a los equipos (como en algunas ocasiones lo hace) sino conjuntamente en la discusión grupal.

Antes de continuar, cabe señalar que las Tareas Catorce y Quince (individual y en equipo, respectivamente) son las primeras tareas que exigen a los estudiantes generalizar. Para esto, desde el punto de vista de la estructuración del contenido (ver apartado correspondiente), es necesario que, primero, los alumnos correlacionen las diferencias de las representaciones algebraicas con las diferencias de las representaciones geométricas y las similitudes de las ecuaciones con las similitudes de sus gráficas asociadas. En otras palabras, para que los estudiantes generalicen, es necesario que primero consideren que las diferencias que muestran las gráficas se explican por las diferencias que tienen las representaciones algebraicas y recíprocamente. Así mismo, que las similitudes que muestran las gráficas se explican por las similitudes que exhiben las representaciones algebraicas y recíprocamente.

En un momento posterior de la sesión, el profesor involucra a los estudiantes para que hagan explícitas las correlaciones y señala que al generalizar se está suponiendo que las *correspondencias asociativas establecidas para un número limitado de ecuaciones y gráficas son válidas para toda gráfica y representación algebraica de la forma estudiada.*

Cuando el trabajo en equipo finaliza, se procede a la discusión grupal (Tarea Dieciséis). Para iniciarla, el profesor indica a los alumnos que se discutirán primero las preguntas cinco, seis y siete y posteriormente la tres y la cuatro.

A continuación, le solicita a un equipo que lea su respuesta de la pregunta cinco. Cuando el estudiante dice “que el exponente de la variable independiente sea uno”, el profesor les pide a los demás equipos que alcen la mano los que tengan exactamente la misma respuesta. Unanimidad. Acto seguido, el profesor interviene con el propósito de que los estudiantes se den cuenta de lo limitado de la respuesta. El recurso que utiliza para ello son cuestionamientos. En esta ocasión, el diálogo que el profesor entabla con el grupo es más o menos en el siguiente tenor:

Profesor: Ustedes dicen que las condiciones que debe cumplir una ecuación para que su gráfica asociada sea una recta en el Plano Cartesiano no paralela a los ejes es que el exponente de la variable independiente sea uno. En otras palabras, ¿lo que ustedes afirman es que si en una ecuación el exponente de la variable independiente es uno entonces, puedo afirmar que su gráfica asociada es una recta en el Plano Cartesiano no paralela a los ejes?

Grupo: Si (contesta al unísono).

Profesor: Bien, entonces, ¿la gráfica asociada a la ecuación $y^2 = 5x + 2$ (la cual anota en el pizarrón) es una recta?

Alumnos: No.

Profesor: ¿Por qué no?, si esta ecuación cumple con la condición que ustedes me dieron.

Algunos alumnos alzan la mano para solicitar la palabra. El maestro se la concede a uno de ellos.

Alumno: Si cumple con la condición pero, no es una recta por el exponente de la "*y*".

Profesor: ¿Y qué?, ustedes sólo me pusieron restricciones para la variable independiente, que en este caso es "x", y no para la variable dependiente, que en esta ecuación la estamos representando por "y". Y, si no me pusieron ninguna restricción para "y", eso quiere decir que para que la gráfica asociada a una ecuación sea una recta en el Plano Cartesiano no importa como esté "y". Es más, ni siquiera me están exigiendo que tenga "y". Así que, yo puedo tener la ecuación $4x-2=5$ y afirmar que su gráfica asociada es una recta en el Plano Cartesiano no paralela a los ejes. Esto lo puedo hacer porque la ecuación cumple con la condición que me dieron. ¿O, no cumple?

Grupo: Sí

Profesor: Entonces, ¿qué está pasando? O las condiciones están incompletas o, las estoy interpretando mal.

Grupo: Están incompletas.

Profesor: Así es, están incompletas. Vuelvan a discutir en equipo las cinco preguntas y corrijan lo que sea necesario.

Los estudiantes regresan al trabajo en equipo. El profesor observa que a pesar de que las respuestas mejoran, las condiciones solicitadas no han sido establecidas correctamente por todo el grupo.

Observación: Aunque generalmente el profesor conoce la situación del grupo en torno al punto a discusión por los rondines que realiza *mientras los estudiantes trabajan, es usual que en las discusiones grupales, después de escuchar alguna conclusión de algún equipo, solicite a los demás equipos que alcen la mano los que obtuvieron la misma conclusión. Esto permite que los estudiantes se percaten del nivel de coincidencia o discrepancia que tiene el grupo y que, en ciertas ocasiones, ello es un indicador del debate que habrá de realizarse: a mayor discrepancia, mayor debate.*

Cuando el trabajo en equipo finaliza, el profesor convoca, nuevamente, a la discusión grupal. En esta ocasión, sólo hay consenso en una de las condiciones. A saber, que la ecuación tenga dos variables, la cual es correcta. Para la otra, existen, fundamentalmente, dos posiciones. Una de ellas, la correcta, es la que sostiene un equipo y la otra, el resto de los equipos.

“El equipo solitario”, que sostiene la posición correcta, afirma que la otra condición que debe cumplir una ecuación para que su gráfica asociada sea una recta en el Plano Cartesiano no paralela a los ejes es que “la variable independiente tenga exponente uno *cuando* la variable dependiente está despejada”, mientras que los otros equipos consideran que “el exponente de la variable independiente debe ser uno y que la variable dependiente debe estar despejada”.

El equipo que está en franca minoría recurre al concepto de ecuaciones equivalentes para convencer a sus compañeros de que no es requisito que la variable dependiente esté despejada para que la gráfica sea una recta, parábola o una parábola cúbica de los tipos que están estudiando.

Observación: Lograr el consenso del grupo no es fácil. No todos los estudiantes se dan cuenta de su equívoco desde la primera intervención de sus compañeros. Más bien, el convencimiento se va dando poco a poco. Al principio sólo se convencen *algunos, después, los convencidos (si se me permite el término) junto con los del equipo que sostiene la posición en debate, ejemplifican o cuestionan a sus demás compañeros a fin de “unirlos a las filas de los convencidos” y así continúa la dinámica hasta que todos se ponen de acuerdo.*

Esta discusión grupal permite abordar la siguiente Tarea sin mayor problema.

Consensadas las respuestas a las cinco preguntas de la Tarea 16, el profesor interviene y, mediante preguntas, enfrenta al grupo con la Tarea 17: “Forma de las representaciones algebraicas de las funciones bajo estudio”. Algunas preguntas que formula el maestro son: Dada una ecuación, ¿cuántas ecuaciones existen que sean equivalentes a ella?; ¿dichas ecuaciones equivalentes tienen la misma forma?; si se desea establecer las condiciones que debe cumplir una ecuación para que su gráfica asociada sea, por ejemplo, una recta, ¿dichas condiciones son válidas para cualquier forma de la ecuación?; si consideramos la forma de las 54 ecuaciones que se están trabajando, ¿cuáles son los elementos de la ecuación que no influyen en la forma de la gráfica asociada?; ¿eso que implica?, etc.

En esta nueva discusión grupal, se concluye que:

$y = ax + b$, donde a, $b \in \Re$	$\Leftrightarrow$	Recta no paralela a los ejes.
$y = ax^2 + b$, donde a, $b \in \Re$	$\Leftrightarrow$	Parábola que se abre hacia arriba o hacia abajo, su eje es el eje de las ordenadas y su vértice está en dicho eje.
$y = ax^3 + b$, donde a, $b \in \Re$	$\Leftrightarrow$	Parábola cúbica con punto de inflexión en el eje de las ordenadas y que se abre sobre dicho eje.

Observación: Para obtener estas ecuaciones generales el grupo recibe la ayuda del profesor para simbolizar el decir de ellos de que "el coeficiente de la variable independiente puede ser cualquier número y que el término independiente también puede ser cualquier número".

En relación a la bicondicional, cabe señalar que los estudiantes conocen su simbolización, sus componentes y cuándo es verdadera. Por otro lado, se hace hincapié en el abuso del lenguaje en el que se está incurriendo, fundamentalmente, al formular las recíprocas (o las condicionales, si así se desea). Por ejemplo, la lectura de la recíproca de la primera bicondicional es: si [se tiene una] recta [en el plano cartesiano] no paralela a los ejes entonces, [es posible asociarle una ecuación de la forma] $y = ax + b$ *, donde* a*, b* $\in \Re$*.*

El profesor retoma la palabra para cuestionar, nuevamente, al grupo. En esta ocasión, centra sus preguntas en "*a*" y en "*b*" con el propósito de que los estudiantes sean conscientes de que al generalizar, cuentan con elementos que les permiten afirmar que "*b*" puede ser cualquier número real. Es decir, que $b \in \Re$. Tienen ecuaciones donde $b > 0$, $b < 0$ y ecuaciones donde $b = 0$. Pero, para el caso de "*a*" es distinto. Para ella no tienen ecuaciones donde $a = 0$. Por lo que, para poder afirmar que $a \in \Re$ es necesario considerar ecuaciones donde $a = 0$ y ver si su gráfica asociada es una recta, parábola o parábola cúbica, según sea el caso.

Después de una breve discusión, los estudiantes consideran que el único camino que tienen para saber si la gráfica asociada a la ecuación $y = 0x + 5$, $y = 0x^2 - 6$ e $y = 0x^3 + 8$ es una recta, parábola y parábola cúbica, respectivamente, es tabular y graficar. Esto lo llevan a cabo inmediatamente y de forma individual.

Observación: Prácticamente, el 90% de los alumnos tabulan y grafican las tres ecuaciones. Sólo algunos cuando tabulan y grafican $y = 0x + 5$ *perciben que la gráfica asociada a* $y = 0x^2 - 6$ *e* $y = 0x^3 + 8$ *es también una recta sin necesidad de tabular y graficar.*

Cuando los alumnos se dan cuenta que para el caso de la parábola y la parábola cúbica "a debe ser distinta de cero", se procede a completar lo correspondiente en las ecuaciones generales y se analiza la ecuación de la recta cuando a = 0. Este análisis culmina con el registro de las generalizaciones obtenidas en el llamado Cuadro II. En otras palabras, grupalmente se construye el Cuadro II que es precisamente la Tarea 18. A continuación se reproduce dicho Cuadro.

CUADRO II

$y = b$, donde $b \in \Re$ $\Leftrightarrow$ Recta paralela al eje de las abscisas

$b > 0$	$\Leftrightarrow$	Cuadrantes I y II;	α* = 0° o α = 180° ;	P.I.E.O.**(0,b)
$b < 0$	$\Leftrightarrow$	Cuadrantes III y IV;	α = 0° o α = 180° ;	P.I.E.O. (0,b)
$b = 0$	$\Leftrightarrow$	Coincide con el eje de las abscisas;	α = 0° o α = 180° ;	P.I.E.O. (0,0)

* α representa el ángulo que forma una recta con la parte positiva del eje de las abscisas

** P.I.E.O., el punto de intersección de la gráfica con el eje de las ordenadas.

Observación: Al generalizar el P.I.E.O. cuando b < 0, aproximadamente el 70% de los estudiantes consideran que las coordenadas de dicho punto en ese caso son (0,- b).

Para finalizar la sesión, el profesor asigna la Tarea 19: "Analizando Columnas" como trabajo individual extraclase.

8ª SESIÓN

Descripción

En esta sesión, los estudiantes, con la Tarea 19 “en mano”, proceden a discutir en equipo las diferencias y las similitudes, tanto en ecuaciones como en gráficas, entre la primera y segunda columna del Bloque I, II y III del Cuadro I (Tarea 20: “Analizando Columnas”).

Observación: Una vez más, la gama de términos utilizados en las respuestas de las Tareas 19 y 20 es amplia. Al mismo tiempo, se ratifica la importancia que tiene la discusión en equipo para superar, corregir o subsanar los equívocos, las imprecisiones o las limitaciones del trabajo individual.

Para ilustrar lo anterior, baste mencionar que ante la pregunta “¿Cuáles son las diferencias que existen entre la 1ª y 2ª columna del Bloque I del Cuadro I tanto en ecuaciones como en gráficas?”, los estudiantes, en su trabajo individual, expresan las diferencias en gráficas de diversas maneras e inclusive, once de ellos expresan dichas diferencias utilizando más de un término. La tabla siguiente muestra los términos más utilizados por los estudiantes para expresar las diferencias que existen entre las gráficas de la 1ª y 2ª columna del Bloque I del Cuadro I y la frecuencia de cada uno de ellos.

Término	*Frecuencia*
Posición	*26*
Cuadrantes	*15*
Sentido	*10*
Dirección	*7*
Inclinación	*7*

Nótese que la respuesta más imprecisa es la que tiene mayor frecuencia. Además, cabe señalar, que de los 26 estudiantes que afirman que la diferencia en las gráficas bajo estudio es la "posición", sólo ocho utilizan otro término para precisar su respuesta.

Por otro lado, 16 alumnos utilizan un lenguaje inadecuado o impreciso, desde el punto de vista matemático, para expresar la diferencia que existe entre las ecuaciones de la 1ª y 2ª columna del Bloque I del Cuadro I. Así por ejemplo, tres afirman que la diferencia en ecuaciones es "el signo de la variable independiente"; dos anotan, "el coeficiente de las ecuaciones" y dos, simplemente, "el coeficiente".

La pregunta nueve está referida a las similitudes que existen entre la 1ª y 2ª columna del Bloque I del Cuadro I, tanto en ecuaciones como en gráficas. En relación a las similitudes entre las ecuaciones, se registra que las respuestas individuales de 35 estudiantes son completas y utilizan un lenguaje adecuado. Mientras que, la respuesta de 30 alumnos es incompleta o imprecisa. Para el caso de las gráficas, prácticamente, el 50% de los estudiantes (33) dan una respuesta incompleta, en tanto que, las respuestas del 50% restante (32 estudiantes) no presentaron problema alguno.

Los párrafos anteriores tratan de ilustrar la gama de respuestas dadas por los estudiantes en las dos primeras preguntas de la Tarea 19. Prácticamente esta situación se repite en las otras cuatro preguntas de dicha tarea: variedad de términos para expresar las diferencias en gráficas y respuestas imprecisas o incompletas al señalar las diferencias en ecuaciones, las similitudes en ecuaciones y las similitudes en gráficas.

Cuando esas mismas seis preguntas se trabajan en equipo (Tarea 20), materialmente las respuestas incompletas y las imprecisiones desaparecen. La gama de términos utilizados para describir las diferencias en las gráficas de hecho se mantiene y, aproximadamente, el 50% de los equipos utiliza más de un término para establecer dichas diferencias.

Por otro lado, en las Tareas 19 y 20 (individual y en equipo respectivamente) no se les solicita a los estudiantes que correlacionen. Sin embargo, cuando el profesor observa que algún equipo ha finalizado con la Tarea 20, les sugiere que intenten establecer las correlaciones mientras los otros equipos terminan.

Cuando el trabajo en equipo finaliza se procede al trabajo grupal (Tarea 21). El mecanismo es el acostumbrado. En esta ocasión, la discusión se centra, fundamentalmente, en establecer la equivalencia entre algunas de las diferencias en gráficas. Así por ejemplo, para el caso de las rectas, afirmar que la diferencia "es el ángulo que forman las rectas con el eje de las abscisas: las de la primera columna forman un ángulo agudo y las de la segunda columna, un obtuso", es equivalente a afirmar que "las rectas de la primera columna pasan necesariamente por los Cuadrantes I y III y las de la segunda columna, necesariamente por Cuadrantes II y IV".

Observación: Naturalmente, algunos estudiantes, aproximadamente el 50%, establecieron por sí mismos dichas equivalencias al utilizar más de un término para describir las diferencias entre las gráficas.

Una vez consensadas las diferencias y similitudes tanto en ecuaciones como en gráficas entre las columnas de cada Bloque, el grupo se aboca a discutir y establecer las correlaciones pertinentes.

Posteriormente, el profesor anota en el pizarrón algunas ecuaciones, cuestiona al grupo sobre las características de su gráfica asociada y bosqueja en el pizarrón algunas gráficas factibles de asociársele a cada una de dichas ecuaciones. De manera recíproca, el maestro bosqueja en el pizarrón una gráfica y el grupo le proporciona un conjunto de ecuaciones factibles de asociársele a dicha gráfica.

Observación: La intención de este trabajo, es que los alumnos cuenten con un mayor número de casos particulares para generalizar al tiempo que vayan ejercitando y consolidando las correlaciones que establecieron. Obviamente, las ecuaciones y las gráficas que se trabajan en esta parte de la sesión son de las formas bajo estudio.

Por otro lado, a reserva de ser reiterativa, cabe recordar que no es el propósito de la instrucción que los estudiantes proporcionen la ecuación asociada a una gráfica dada ni la gráfica asociada a una ecuación dada sino únicamente una ecuación factible de asociársele a una gráfica dada o una gráfica factible de asociársele a una ecuación dada, según sea el caso.

Lo anterior, es una de las dos razones fundamentales que justifica el hecho de que en la actividad grupal que se describió renglones arriba, el profesor realiza varios bosquejos asociados a una ecuación dada y los estudiantes proporcionan un conjunto de ecuaciones factibles de asociársele a un bosquejo dado. La otra razón, es que con el material visto hasta este momento, sólo se espera que los estudiantes asocien correctamente formas de ecuaciones con formas de gráficas y signo del coeficiente de la variable independiente con la variable visual correspondiente. Esto, necesariamente,

> *proporciona un abanico mucho mayor de propuestas tanto de gráficas como de ecuaciones. Por ejemplo, si la ecuación dada es* $y = 8x^2 + 5$ *, basta que el estudiante haga el bosquejo de una parábola que abra hacia arriba y que el vértice esté en el eje de las ordenadas para que su respuesta se considere correcta. Por el momento no importa si en el bosquejo la parábola, por ejemplo, es "abierta" y el vértice está en la parte negativa del eje de las ordenadas. Esto se irá precisando poco a poco en futuras sesiones.*

El trabajo grupal concluye cuando se registran, por escrito, las generalizaciones obtenidas.

Para finalizar la sesión, el profesor asigna la Tarea 22: "Analizando el 1er. y 2º Plano" como el trabajo extraclase. Aclara ante el grupo el abuso de lenguaje que se está haciendo en el título de esta Tarea y de las subsecuentes. Indica que el enunciado "Analizar el 1er. Plano", por ejemplo, debe entenderse, de aquí en adelante, que el trabajo a realizar es tanto el análisis de las gráficas esbozadas en el mencionado plano, como el análisis de sus ecuaciones asociadas (las cuales están anotadas en un extremo de su gráfica). Dicho lo anterior, da por terminada la clase no sin antes reiterar que el trabajo extraclase es individual.

COMENTARIO: POR EL MOMENTO, HASTA ESTA CLASE, EL TÉRMINO "ANALIZAR" TIENE LA CONNOTACIÓN DE ESTABLECER DIFERENCIAS Y SIMILITUDES. LA EXIGENCIA DEL TÉRMINO IRÁ EN AUMENTO CONFORME SE ABORDEN LAS TAREAS SUBSECUENTES.

EN TORNO A LA ARTICULACIÓN DE REGISTROS DE REPRESENTACIÓN, EL AVANCE EN ESTA SESIÓN CONSISTIÓ EN HACER EXPLÍCITA LA CORRELACIÓN QUE EXISTE ENTRE EL SIGNO DEL COEFICIENTE DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE Y HACIA DONDE ABREN LAS PARÁBOLAS O EL ÁNGULO QUE FORMAN LAS RECTAS CON LA PARTE POSITIVA DEL EJE DE LAS ABSCISAS (α*) Y LOS CUADRANTES POR LOS QUE NECESARIAMENTE PASAN LAS RECTAS Y LAS PARÁBOLAS CÚBICAS.*

INTEGRANDO LO DE LA SESIÓN ANTERIOR A LO DE ESTA SESIÓN Y SIMBOLIZANDO, QUE ES LA FORMA EN QUE SE REGISTRAN LAS GENERALIZACIONES EN EL GRUPO, LOS AVANCES SE PUEDEN RESUMIR DE LA SIGUIENTE FORMA:

$y = ax + b$, donde $a, b \in \Re$ y $a \neq 0$ $\Leftrightarrow$ Recta no paralela a los ejes.

$a > 0$ $\Leftrightarrow$ Pasa necesariamente por Cuadrantes I y III; $0° < \alpha < 90°$

$a < 0$ $\Leftrightarrow$ Pasa necesariamente por Cuadrantes II y IV; $90° < \alpha < 180°$

$y = ax^2 + b$, donde $a, b \in \Re$ y $a \neq 0$ $\Leftrightarrow$ Parábola que se abre hacia arriba o hacia abajo, su eje es el eje de las ordenadas y su vértice está en dicho eje.

$a > 0$ $\Leftrightarrow$ Abre hacia arriba

$a < 0$ $\Leftrightarrow$ Abre hacia abajo

$y = ax^3 + b$, donde $a, b \in \Re$ y $a \neq 0$ $\Leftrightarrow$ Parábola cúbica con punto de inflexión en el eje de las ordenadas y que se abre sobre dicho eje.

$a > 0$ $\Leftrightarrow$ Pasa necesariamente por Cuadrantes I y III

$a < 0$ $\Leftrightarrow$ Pasa necesariamente por Cuadrantes II y IV

9ª Sesión

Descripción

En esta ocasión, los estudiantes trabajan en equipo la Tarea 23: “Analizando el 1er. y 2º Plano”. Toman como base el trabajo individual que realizaron en la Tarea 22 y consideran la indicación hecha por el profesor antes de iniciar la discusión en equipo, en el sentido de que, si les es posible, establezcan las correlaciones y las registren en las conclusiones del equipo.

Comentario: El 1er. plano contiene las ecuaciones $y = x$, $y = 2x$ e $y = \frac{1}{2}x$ y sus gráficas asociadas. En el 2º plano se encuentran las gráficas asociadas a las ecuaciones $y = x$, $y = x + 3$ e $y = x - 3$.

Mientras los estudiantes trabajan en equipo, el profesor supervisa cómo se está llevando a cabo la discusión. Transita por el salón de un equipo a otro una y otra vez.

Todos los equipos inician su trabajo con el análisis del 1er. Plano. Al concluir, continúan con el 2º.

Observación: El documento de trabajo con el que cuenta cada estudiante para discutir, con sus compañeros de equipo, es su trabajo individual (Tarea 22). En éste, se observa, que en general, los alumnos muestran un mejor desempeño al trabajar con ecuaciones que con gráficas independientemente de que sean diferencias o similitudes. Por ejemplo, de los 55 estudiantes (≈ 94.83%) que contestaron las diferencias en ecuaciones del 1er. Plano, 50 (≈ 86.21% de 58 o ≈90.91% de 55) de ellos dan un respuesta correcta. Mientras que, de los 57 (≈ 98.28%) que registran las diferencias en gráficas del 1er. Plano, 39 (≈ 67.24% de 58 o ≈ 68.42% de 57), contestan correctamente. Una situación similar se presenta en el 2º Plano: de los 53 estudiantes (≈ 91.38%) que establecen alguna diferencia en ecuaciones y en gráficas, 43 (≈ 74.14%), contestan correctamente la parte de las diferencias en ecuaciones y 27 (≈46.55%), las diferencias en gráficas.

COMENTARIO: UN ANÁLISIS MÁS DETALLADO DE LAS RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES EN LAS TAREAS 22 Y 23 PUEDE CONSULTARSE EN EL ANEXO 3.

El trabajo individual también muestra, entre otras cosas, un número suficientemente alto de imprecisiones y respuestas incorrectas. Para el caso del 1er. Plano, de los 78 enunciados que producen los estudiantes como respuesta a las diferencias *en gráficas, 17 (≈ 21.8%) de ellos son imprecisos y 12 (≈ 15.39%), incorrectos. La situación del 2º Plano es similar: de un total de 74 enunciados referidos a las diferencias en gráficas, 21 (≈ 28.38%) son imprecisos y 10 (≈ 13.51%), incorrectos.*

Uno de los problemas que se tiene en el trabajo individual es la omisión, por parte de 39 estudiantes (≈ 67.24%) de una similitud importante en las ecuaciones bajo estudio del 1er. Plano: a saber, el signo del coeficiente de la variable independiente. Esta similitud se correlaciona con los cuadrantes por los que necesariamente pasan las rectas o bien, con el tipo de ángulo que forman dichas rectas con la parte positiva del eje de las abscisas. Posiblemente, dicha similitud no se detecte como tal, debido a que los coeficientes de la variable independiente son numéricamente diferentes (diferencia en ecuaciones). Al parecer, la similitud es eclipsada por la diferencia.

A la luz de las respuestas de los estudiantes, es posible afirmar que, por un lado, su rendimiento en el 1er. Plano es similar al del 2º en el sentido que, se observa un mejor desempeño en ecuaciones que en gráficas. Y por otro, que en general, el trabajo con el 1er. Plano es mejor que el realizado con el segundo. Por ejemplo, en el 1er. Plano, el desempeño de los alumnos en las diferencias en ecuaciones es superior al de las gráficas por casi 19 puntos porcentuales. En el 2º Plano el rendimiento de los estudiantes en las diferencias en ecuaciones supera en aproximadamente 28 puntos porcentuales al de las gráficas. Además, los resultados obtenidos en el 1er. Plano en las diferencias en ecuaciones, *están ubicados en 12 puntos porcentuales por arriba de los del 2º.*

Los resultados ponen de manifiesto las dificultades de los estudiantes en su trabajo con gráficas. Dificultades que, al parecer, se agudizan más con unas gráficas que con otras: en el 2º Plano, los alumnos disminuyen su rendimiento en las diferencias en gráficas casi en 21 puntos porcentuales con respecto al del 1º. Esto permite afirmar que los aprendices enfrentan mayores problemas al trabajar con rectas desplazadas que con rectas rotadas.

Cuando los estudiantes trabajan en equipo, las respuestas imprecisas, ambiguas e incorrectas, por mencionar algunas, prácticamente desaparecen en las conclusiones de los equipos (Tarea 23) tanto del 1er. Plano como del 2º. Las producciones en equipo superan en mucho a las individuales. Por ejemplo, el trabajo en equipo está 12 puntos porcentuales arriba del individual en las similitudes en ecuaciones del 2º Plano. En este mismo plano, casi duplica las respuestas correctas en lo que se refiere a las diferencias en ecuaciones y prácticamente triplica el porcentaje de diferencias correctas en gráficas.

En general, es posible afirmar, que el desempeño de los estudiantes, bien sea individual o en equipo, es superior en ecuaciones que en gráficas, independientemente de que se trabajen diferencias o similitudes y que, en estas últimas, los alumnos logran mayores éxitos que en las diferencias, al margen de que sean ecuaciones o gráficas.

Por otro lado, 14 equipos ($\approx$ 82.35%) responden a la sugerencia del profesor y correlacionan las diferencias y las *similitudes del 1er. Plano; nueve ($\approx$ 52.94%), las diferencias del 2º Plano y 12 ($\approx$70.59%), las similitudes del 2º Plano.*

Finalizado el trabajo en equipo, se procede a la discusión grupal (Tarea 24). Ésta se lleva a cabo en la forma acostumbrada. El profesor aclara el orden de la discusión: primero se discutirán las diferencias y similitudes tanto en ecuaciones como en gráficas del 1er. Plano, después se llevarán a cabo las correlaciones correspondientes y, posteriormente, de igual forma, se trabajará con el 2º Plano.

Observación: De la misma manera que el trabajo en equipo permite superar las limitaciones del trabajo individual, la discusión grupal logra lo correspondiente con el trabajo en equipo. Desde esta perspectiva, en la discusión grupal, todas las aportaciones de los equipos son valiosas. Sin embargo, existen unas que, en este momento de la instrucción, son medulares para el buen logro de la articulación de registros de representación. A continuación se muestran algunas de ellas y el número de equipos que las sustentan.

1er. Plano. Diferencias en ecuaciones

Aportación	*Número de equipos*
Diferentes valores de "a"	*7 ($\approx$41.18%)*

1er. Plano. Diferencias en gráficas

Aportación	*Número de equipos*
Diferentes valores de "α"	*5 ($\approx$29.41%)*

1er. Plano. Similitudes en ecuaciones

Aportación	*Número de equipos*
Signo del coeficiente de la v.i.	*13 ($\approx$76.47%)*

1er. Plano. Similitudes en gráficas

Aportación	*Número de equipos*
Cuadrantes I y III	*13 (≈76.47%)*
$0° < \alpha < 90°$	*6 (≈35.29%)*

2º Plano. Diferencias en ecuaciones

Aportación	*Número de equipos*
Diferentes valores de "b"	*5 (≈29.41%)*

2º Plano. Diferencias en gráficas

Aportación	*Número de equipos*
Los diferentes puntos de intersección con el eje de las ordenadas (Ps.I.E.O.)	*4 (≈23.53%)*

2º Plano. Similitudes en ecuaciones

Aportación	*Número de equipos*
Coeficiente de la v.i.	*10 (≈58.82%)*

2º Plano. Similitudes en gráficas

Aportación	*Número de equipos*
Ángulo de inclinación (α)	*6 (≈35.29%)*

Una vez consensadas las respuestas de la Tarea 23 en lo que respecta al 1er. Plano, y antes de que se lleven a cabo las correlaciones, el profesor interviene a fin de precisar y hacer hincapié en los diferentes valores de α. Para ello, bosqueja en el pizarrón la gráfica asociada a la ecuación $y = x$, reitera que ella tiene la propiedad de bisecar los Cuadrantes I y III y que en consecuencia el ángulo que forma con la parte positiva del eje de las abscisas es igual a 45° (α = 45°). Acto seguido, señala que esta recta es la que se toma como base para analizar las restantes. Esto, la hace merecedora al nombre de *gráfica madre* [en estas páginas, este término se utiliza de acuerdo al sentido que le asigna la NCTM, 1989] y que, su ecuación asociada es considerada la *ecuación madre* es decir, es la ecuación que "genera" las restantes o a través de la cual se juzgan las restantes. Así por ejemplo, la ecuación $y = 7x + 8$ se puede considerar como generada por la ecuación madre $y = x$ en el sentido de que para obtenerla, hay que multiplicar por siete la variable independiente de la ecuación madre y sumarle ocho. También señala que, vistas así las cosas, se hace necesario especificar qué le sucede a la gráfica madre cuando la ecuación madre se “modifica” y que esto, se irá logrando poco a poco en las sesiones.

Aclarado lo anterior y bosquejada la gráfica madre (con su ecuación asociada en uno de sus extremos), el profesor bosqueja, en el mismo plano y con gis de color verde, la gráfica asociada a la ecuación $y = 2x$ e interroga al grupo en el sentido de que si es posible saber, con los elementos con los que se cuentan en ese momento, cuál es el valor exacto de α de esa recta. Ante la negativa del grupo, el profesor comenta que si bien no es posible saber el valor exacto de α, lo que sí se sabe de ella es que es mayor que 45° pero menor que 90°. De igual manera, trabaja con la gráfica asociada a la ecuación $y = \frac{1}{2}x$, solo que en esta ocasión bosqueja la gráfica con gis amarillo, y establece que, para este caso, $0° < \alpha < 45°$. Acto seguido, se establecen las correlaciones.

El profesor interviene nuevamente y bosqueja, en el mismo plano con el que estaba trabajando, una serie de rectas que los alumnos no han graficado. Por ejemplo, las asociadas a las ecuaciones $y = 5x$, $y = 3x$, $y = \frac{1}{4}x$, $y = 8x$, $y = \frac{1}{7}x$, $y = \frac{3}{8}x$, $y = \frac{9}{5}x$, etc. La forma en que va “construyendo” este plano (el cual denomina 1er. Plano aumentado) es verbalizar primero la ecuación, bosquejar la gráfica asociada, anotar la ecuación en un extremo de la misma y finalmente, externa en qué intervalo se encuentra su α. Esto último lo hace para las primeras gráficas. Posteriormente, interroga al grupo en este sentido una vez que ha verbalizado la ecuación y antes de hacer el bosquejo correspondiente. Todas las rectas cuyo valor de α se encuentra entre cero y 45° son bosquejadas con color amarillo y las que cumplen con que $45° < \alpha < 90°$, con verde.

Cuando el grupo identifica correctamente el intervalo en el que se encuentra α para cada una de las ecuaciones propuestas por el profesor, se procede a generalizar y el grupo se aboca a iniciar la construcción del Cuadro III (Tarea 25: "Construyendo la primera parte del Cuadro III") en el cual se registra por escrito únicamente la generalización de las tres posibilidades del coeficiente de la variable independiente, cuando éste es mayor que cero. El resto, por el momento, sólo se reitera verbalmente. Lo que queda registrado en el pizarrón es lo siguiente:

C U A D R O   I I I

$y = ax + b$, donde a, $b \in \Re$ y $a \neq 0 \Leftrightarrow$ Recta no paralela a los ejes.

$$a > 0 \quad \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a > 1 \\ a < 1 \end{array} \right.$$

Observación: La mayor dificultad que presentan los estudiantes en esta parte de la sesión es identificar cuándo un racional expresado en la forma $\frac{m}{n}$ *es mayor que uno. La mayoría de ellos consideran que cualquier número de esa forma es menor que uno. De tal manera que, cuando el profesor propone la primera ecuación con dicha característica, al momento de estar construyendo el 1er. Plano aumentado, aproximadamente el 90% de los alumnos manifiestan que* $0° < \alpha < 45°$. *Conforme se proporcionan más ejemplos este porcentaje va disminuyendo sin que se estabilice en cero. Este es un problema que se va a presentar en distintos momentos de la instrucción aunque no de manera tan severa como en esta sesión. Adelantándonos un poco, es posible afirmar que si bien los estudiantes mejoran significativamente en su rendimiento ante este tipo de* *situaciones, en ocasiones incurren en el mismo equívoco. Al final de las sesiones, aproximadamente, un 15% de alumnos tienen que ponerle mucha atención al número e inclusive, en algunas ocasiones, dividir mentalmente, por escrito o con calculadora a fin de no equivocarse.*

Concluida la discusión del 1er. Plano, se procede con la del 2º. La forma en que ésta se lleva a cabo es completamente similar a la primera. Para este caso se construye el 2º Plano aumentado durante el cual, el profesor hace énfasis en el valor de α (α = 45º). Cuando el grupo está en condiciones de generalizar así lo hace y retoma el Cuadro III (Tarea 25) para registrar sus generalizaciones.

Observación: El énfasis en el valor de α responde a que si bien seis equipos (≈35.29%) consideran que una similitud en las gráficas del 2º Plano es el valor de α, ninguno hace explícito que α = 45º.

El propósito del 2º Plano es que los alumnos generalicen "b" cuando a = 1.

Prácticamente, al final de esta sesión, el Cuadro III queda conformado como se muestra a continuación.

C U A D R O I I I

$y = ax + b$, donde a, $b \in \Re$ y $a \neq 0$ $\Leftrightarrow$ Recta no paralela a los ejes.

$a > 0$	a = 1 y	b = 0	$\Leftrightarrow$ Cuadrantes I y III ;	α = 45º ;	P.I.Es. (0,0)
		b > 0	$\Leftrightarrow$ Cuadrantes I, II y III ;	α = 45º ;	P.I.E.O. (0,b)
		b < 0	$\Leftrightarrow$ Cuadrantes I, III y IV ;	α = 45º ;	P.I.E.O. (0,b)
	a > 1				
	a < 1				

Para concluir esta clase, el profesor entrega la hoja impresa de la Tarea 26: “Analizando el 3er. y 4º Plano”. No externándose duda alguna sobre el trabajo extraclase que han de realizar de manera individual los estudiantes, ni sobre algún aspecto discutido en clase, se da por terminada la sesión.

10ª Sesión

Descripción

De hecho la sesión inicia cuando los estudiantes trabajan en equipo la Tarea 27: “Analizando el 3er. y 4º Plano”. Para ello, consideran el trabajo individual que realizaron en la Tarea 26.

Antes que los equipos inicien su discusión, el profesor se dirige al grupo para aclarar que la exigencia del término “analizar” va a aumentar en esta Tarea 27. Interroga a los alumnos en relación con este punto. Cuando obtiene por respuesta que “analizar” ahora debe entenderse como “establecer diferencias y similitudes en ecuaciones y gráficas y correlacionar”, el maestro ratifica que ésa es la “nueva” acepción del término. Por lo que, los equipos deberán registrar por escrito, en sus conclusiones, las correlaciones. Acto seguido, se procede al trabajo en equipo.

Observación: El desempeño de los 56 estudiantes en el análisis individual del 3er. y 4º Plano es similar al mostrado en el 1er y 2º Plano, en el sentido que, en términos generales, por un lado, el rendimiento en ecuaciones es superior al de gráficas (independientemente que se traten diferencias o similitudes) y por otro, tienen mayor éxito en las similitudes que en las diferencias (bien sean ecuaciones o gráficas). La tabla que se localiza renglones abajo, exhibe algunos resultados que apoyan esta afirmación.

Al igual que en el 2º Plano, en los planos que ahora nos ocupan, el "efecto eclipse" vuelve a manifestarse en el trabajo individual. 38 estudiantes (≈ 67.86%) registran que una similitud de las ecuaciones del 3er. y 4º Plano es "el coeficiente de la variable independiente" y 11 (≈ 19.64%), que "el signo del coeficiente de la variable independiente es positivo".

Algunos resultados del análisis individual del 3er. y 4º Plano

	3er. Plano				4º Plano			
	Diferencias		Similitudes		Diferencias		Similitudes	
	Ecuaciones	Gráficas	Ecuaciones	Gráficas	Ecuaciones	Gráficas	Ecuaciones	Gráficas
No contestaron	2 ≈ 3.57%	4 ≈ 7.14%	0	0	5 ≈ 8.92%	9 16.07%	3 ≈ 5.36%	3 ≈ 5.36%
Teóricas ** (de los 56 estudiantes)	224	280	280	336	224	280	280	336
Enunciadas	83 ≈ 37.05%	71 ≈ 25.36%	197 ≈ 70.36%	192 ≈ 57.14%	72 ≈ 32.14%	61 ≈ 21.78%	192 ≈ 68.57%	186 ≈ 55.36%
Correctas	65 ≈ 78.31%*	39 ≈ 54.93%*	191 ≈ 96.95%*	170 ≈ 88.54%*	58 ≈ 80.55%*	31 ≈ 50.82%*	189 ≈ 98.44%*	166 ≈ 89.25%*
Imprecisas	0	21 ≈ 29.58%	4 ≈ 2.03%	9 ≈ 4.69%	0	20 ≈ 32.78%	1 ≈ 0.52%	8 ≈ 4.3%
Incorrectas	18 ≈ 21.69%	11 ≈ 15.49%	2 ≈ 1.01%	13 ≈ 6.77%	14 ≈ 19.44%	10 ≈ 16.39%	2 ≈ 1.04%	11 ≈ 5.91%

** Número *ideal* que se espera que los estudiantes enuncien correctamente.
* El porcentaje está calculado en términos de las enunciadas.

La supervisión del trabajo en equipo la realiza el profesor en la forma acostumbrada. Transcurrido el tiempo asignado para realizar la Tarea que los ocupa, se procede a la discusión grupal (Tarea 28: Analizando el 3er. y 4º Plano).

Observación: El trabajo en equipo de la Tarea 27 muestra el mismo patrón de desempeño de las últimas tareas. Por un lado, los resultados del trabajo en equipo superan en mucho a los del trabajo individual a pesar de que el "efecto eclipse" continúa haciendo acto de presencia y por otro, los estudiantes tienen mayor éxito al trabajar con ecuaciones que con gráficas y su rendimiento es mejor en similitudes que en diferencias. Véase la tabla siguiente.

Algunos resultados del trabajo en equipo del análisis del 3er. y 4º Plano

	3er. Plano				4º Plano			
	Diferencias		Similitudes		Diferencias		Similitudes	
	Ecuaciones	Gráficas	Ecuaciones	Gráficas	Ecuaciones	Gráficas	Ecuaciones	Gráficas
No contestaron	1 ≈ 5.88%	1 ≈ 5.88%	0	0	3 ≈ 17.65%	3 17.65%	4 ≈ 23.53%	4 ≈ 23.53%
Teóricas ** (de los 17 equipos)	68	85	85	102	68	85	85	102
Enunciadas	55 ≈ 80.88%	65 ≈ 76.46%	73 ≈ 85.88%	75 ≈ 73.53%	47 ≈ 69.12%	49 ≈ 57.65%	56 ≈ 65.88%	60 ≈ 58.82%
Correctas	55 100%*	64 ≈ 98.98%*	72 ≈ 98.63%*	69 92%*	46 ≈ 97.87%*	49 100%*	56 100%*	56 ≈ 93.33%*
Imprecisas	0	0	1 ≈ 1.37%	0	0	0	0	0
Incorrectas	0	1 ≈ 1.54%	0	6 8%	1 ≈ 2.13%	0	0	4 ≈ 6.67%

** Número *ideal* que se espera que los equipos enuncien correctamente.
* El porcentaje está calculado en términos de las enunciadas.

En relación a la petición de correlacionar, 13 equipos (≈76.47%) responden a ella en las diferencias del 3er. Plano;

14 (≈ 82.35%), en similitudes del 3er. Plano y 10 (≈ 58.82%), en diferencias y similitudes del 4º.

La discusión grupal (Tarea 28) se centra, en primera instancia, en las respuestas emitidas por los equipos en la Tarea 27. Consensadas éstas, el profesor interviene para construir, junto con los estudiantes, el 3er. y 4º Plano Aumentado. Posteriormente se generaliza y se procede al registro de las generalizaciones. Ellas se plasman en el llamado Cuadro III. Para lo cual, el maestro cuestiona al grupo a fin de, primero, reconstruir la parte de dicho Cuadro que se trabajó la sesión anterior y, posteriormente, completarlo (Tarea 29: "Construyendo la 2ª parte del Cuadro III"). Todo se anota en la pizarra hasta concluir el Cuadro tal como se muestra a continuación.

C U A D R O I I I

$y = ax + b$, donde a, $b \in \Re$ y $a \neq 0 \Leftrightarrow$ Recta no paralela a los ejes.

$a > 0$	$a = 1$ y	$b = 0$	$\Leftrightarrow$	Cuadrantes I y III ;	$\alpha = 45º$;	P.I.Es. (0,0)
		$b > 0$	$\Leftrightarrow$	Cuadrantes I, II y III ;	$\alpha = 45º$;	P.I.E.O. (0,b)
		$b < 0$	$\Leftrightarrow$	Cuadrantes I, III y IV ;	$\alpha = 45º$;	P.I.E.O. (0,b)
	$a > 1$ y	$b = 0$	$\Leftrightarrow$	Cuadrantes I, y III ;	$45º < \alpha < 90º$;	P.I.Es. (0,0)
		$b > 0$	$\Leftrightarrow$	Cuadrantes I, II y III ;	$45º < \alpha < 90º$;	P.I.E.O. (0,b)
		$b < 0$	$\Leftrightarrow$	Cuadrantes I, III y IV ;	$45º < \alpha < 90º$;	P.I.E.O. (0,b)
	$a < 1$ y	$b = 0$	$\Leftrightarrow$	Cuadrantes I, y III ;	$0º < \alpha < 45º$;	P.I.Es. (0,0)
		$b > 0$	$\Leftrightarrow$	Cuadrantes I, II y III ;	$0º < \alpha < 45º$;	P.I.E.O. (0,b)
		$b < 0$	$\Leftrightarrow$	Cuadrantes I, III y IV ;	$0º < \alpha < 45º$;	P.I.E.O. (0,b)

Hecho lo anterior, el grupo trabaja el 5º Plano (en él se encuentran las gráficas asociadas a la ecuaciones $y = x$ e $y = -x$). La discusión se centra, fundamentalmente, en cuál es el valor de α para la recta que tiene por ecuación $y = -x$. Cuando los estudiantes concluyen que α = 135º, establecen, respondiendo a los cuestionamientos del profesor, que en la ecuación de la recta de la forma $y = ax + b$, si $a <$ 0, la gráfica que se va a considerar para analizar las restantes es la que tiene por ecuación $y = -x$ y que en consecuencia, los ángulos que se consideran cuando el coeficiente de la variable independiente es negativo son: 90º < α < 135º , α = 135º y 135º < α < 180º.

Para finalizar la sesión el profesor entrega a los alumnos la Tarea 30: “Construyendo el Cuadro IV”. Al tiempo indica que, por un lado, como es sabido el trabajo extraclase es individual y por otro, que a partir de esta Tarea, el término “analizar” alcanza su máxima exigencia: establecer diferencias y similitudes tanto en ecuaciones como en gráficas, correlacionar, generalizar y registrar por escrito dichas generalizaciones. Dicho lo anterior se da por concluida la clase.

11ª Sesión

Descripción

En esta clase, los estudiantes, primero, trabajan en equipo la Tarea 31 (“Construyendo el Cuadro IV”) tomando como base la Tarea 30. Posteriormente, con las conclusiones del equipo en mano, se enfrentan a la discusión grupal (Tarea 32 “Construyendo el Cuadro IV”). Conforme avanza la discusión y el grupo toma puntos de acuerdo, el profesor registra en el pizarrón, las generalizaciones que emanan del grupo hasta concluir el Cuadro IV. Al final de este proceso, lo que está escrito en la pizarra es lo que se ilustra a continuación.

C U A D R O I V

$y = ax + b$, donde a, $b \in \Re$ y $a \neq 0 \Leftrightarrow$ Recta no paralela a los ejes.

$a < 0$	$a = -1$ y	$b = 0$	$\Leftrightarrow$	Cuadrantes II y IV ;	$\alpha = 135º$;	P.I.Es. (0,0)
		$b > 0$	$\Leftrightarrow$	Cuadrantes I, II y IV ;	$\alpha = 135º$;	P.I.E.O. (0,b)
		$b < 0$	$\Leftrightarrow$	Cuadrantes II, III y IV ;	$\alpha = 135º$;	P.I.E.O. (0,b)
	$a > -1$ y	$b = 0$	$\Leftrightarrow$	Cuadrantes II, y IV ;	$135º < \alpha < 180º$;	P.I.Es. (0,0)
		$b > 0$	$\Leftrightarrow$	Cuadrantes I, II y IV ;	$135º < \alpha < 180º$;	P.I.E.O. (0,b)
		$b < 0$	$\Leftrightarrow$	Cuadrantes II, III y IV ;	$135º < \alpha < 180º$;	P.I.E.O. (0,b)
	$a < -1$ y	$b = 0$	$\Leftrightarrow$	Cuadrantes II, y IV ;	$90º < \alpha < 135º$;	P.I.Es. (0,0)
		$b > 0$	$\Leftrightarrow$	Cuadrantes I, II y IV ;	$90º < \alpha < 135º$;	P.I.E.O. (0,b)
		$b < 0$	$\Leftrightarrow$	Cuadrantes II, III y IV ;	$90º < \alpha < 135º$;	P.I.E.O. (0,b)

Observación: De los 55 estudiantes que realizan el trabajo individual (Tarea 30), cuatro ($\approx$ 7.27%), construyen el Cuadro IV perfectamente. 19 ($\approx$ 34.55%), consideran que $-2 > -1$ y que $-\frac{1}{2} < -1$ por lo que, al generalizar "a" los valores de α que le asignan cuando $a > -1$ y $a < -1$ son incorrectos (los invierten).

COMENTARIO: LOS MAYORES PROBLEMAS QUE ENFRENTARON LOS ESTUDIANTES EN EL ESTUDIO DEL CAMBIO DE REPRESENTACIONES FUERON TRES:

a) IDENTIFICAR CUÁNDO UN RACIONAL POSITIVO DE LA FORMA $\frac{m}{n}$ ES MAYOR O MENOR QUE UNO.

b) DETERMINAR SI UN NÚMERO NEGATIVO ES MAYOR O MENOR QUE MENOS UNO.

c) RECONOCER CUÁNDO UN RACIONAL NEGATIVO DE LA FORMA $\frac{m}{n}$ ES MAYOR O MENOR QUE MENOS UNO.

ESTOS TRES PROBLEMAS VAN A ACOMPAÑAR A LOS ESTUDIANTES DURANTE TODO EL TIEMPO QUE ELLOS DEDIQUEN AL ESTUDIO DEL CAMBIO DE REPRESENTACIONES. DISMINUIRÁN CONSIDERABLEMENTE PERO SERÁN LA FUENTE FUNDAMENTAL DE DESACIERTOS CUANDO LOS ALUMNOS LLEVEN A CABO CAMBIOS DE REPRESENTACIÓN.

Siete ($\approx$ 12.73%) aprendices generalizan correctamente los valores de "a" pero los valores de α son los correspondientes a a > 0. Siete más ($\approx$12.73%), anotan el mismo valor de α en los tres casos de "a". Seis de estos siete, escriben 90º < α < 180º y el otro, α = 135º. Otros dos ($\approx$ 3.63%), escriben "a" en lugar de α. Por ejemplo, a = 135º. Siete ($\approx$12.73%), no generalizan "a" (manejan los valores particulares para construir el Cuadro) pero sí "b". Cuatro ($\approx$7.27%), no cometen equívocos en lo que escriben del Cuadro IV pero omiten los valores de α. Cuatro ($\approx$ 7.27%), únicamente analizan los planos, en el sentido menos riguroso. No generalizan ni "a" ni "b". 17 ($\approx$ 30.91%), simbolizan incorrectamente los intervalos para α. Por ejemplo, 90º< α >135º. Estos son algunos resultados de la Tarea 30.

La calidad del trabajo en equipo de la Tarea 31 supera, nuevamente, en mucho a la del individual. Seis equipos ($\approx$ 35.29%), construyen el Cuadro IV impecablemente. Tres ($\approx$17.65%), asumen que $-2 > -1$ y que $-\frac{1}{2} < -1$ por lo que sus generalizaciones son incorrectas en lo que corresponde a este aspecto. Otros tres ($\approx$17.65%), no generalizan "a" (aunque si "b"). Dos ($\approx$ 11.76%), anotan incorrectamente los intervalos para α. Escriben, por ejemplo, 135º > α < 180º en lugar de 135º < α < 180º. Dos más ($\approx$ 11.76%), incurren en un sólo *equívoco: plasman en su Cuadro 180º < α < 135º. Por último, un equipo ($\approx$5.88%), no concluye el Cuadro.*

La última parte de la sesión se dedica, primero, a que los alumnos, en forma grupal, hagan una recapitulación de los avances logrados, hasta el momento, en “la traducción del lenguaje algebraico al gráfico y viceversa”. En segundo lugar, a hacer algunos ejercicios orales. El profesor anota en el pizarrón alguna ecuación de recta, elige a un estudiante (o unos, según vayan contestando) para que describa verbalmente las características de la gráfica asociada y cuando obtiene la respuesta correcta, bosqueja la gráfica en el pizarrón. En tercer lugar, el grupo entabla una pequeña discusión en relación a la abertura de las parábolas tomando como base el 10º Plano (primer plano de parábola que contiene las gráficas asociadas a las ecuaciones $y = x^2$, $y = 2x^2$ e $y = \frac{1}{2}x^2$). Ésta culmina cuando el grupo *acuerda* que los términos que se pueden utilizar para referirse a las distintas aberturas de la parábola son: “normal” (para la gráfica asociada a la ecuación madre $y = x^2$), “cerrada” (para la asociada a $y = 2x^2$) y “abierta” (para la asociada a $y = \frac{1}{2}x^2$).

Antes de abandonar el salón de clases el maestro le entrega a cada discípulo la Tarea 33 (“Construyendo el Cuadro V”). Hace explícito que ésta, como es costumbre, debe ser realizada en forma individual y entregarse la próxima sesión.

12ª Sesión

Descripción

El desarrollo de esta clase es similar al de las últimas seis. Los estudiantes se integran en equipos, el maestro entrega la hoja impresa de la Tarea correspondiente (en esta ocasión es el turno de la Tarea 34: “Construyendo el Cuadro V”). Los alumnos la realizan tomando como base el trabajo individual extraclase (Tarea 33: “Construyendo el Cuadro V”). Mientras se lleva a cabo el trabajo en equipo, el profesor lo supervisa. Cuando los equipos tienen sus conclusiones, se procede a la discusión grupal (Tarea 35: “Construyendo el Cuadro V”). Conforme el grupo obtiene puntos de acuerdo en las generalizaciones, se las dictan al docente para que las anote en el pizarrón.

Al final de todo este proceso, el Cuadro V queda estructurado como se muestra a continuación.

C U A D R O V

$y = ax^2 + b$, donde a, $b \in \Re$ y $a \neq 0 \;\Leftrightarrow\;$ Parábola con eje el Eje de las Ordenadas

$a > 0$	$a = 1$ y	$b = 0$	$\Leftrightarrow$	Abre hacia arriba;	“normal” ;	V (0,0)
		$b > 0$	$\Leftrightarrow$	Abre hacia arriba;	“normal” ;	V (0,b)
		$b < 0$	$\Leftrightarrow$	Abre hacia arriba;	“normal” ;	V (0,b)
	$a > 1$ y	$b = 0$	$\Leftrightarrow$	Abre hacia arriba;	“cerrada” ;	V (0,0)
		$b > 0$	$\Leftrightarrow$	Abre hacia arriba;	“cerrada” ;	V (0,b)
		$b < 0$	$\Leftrightarrow$	Abre hacia arriba;	“cerrada” ;	V (0,b)
	$a < 1$ y	$b = 0$	$\Leftrightarrow$	Abre hacia arriba;	“abierta” ;	V (0,0)
		$b > 0$	$\Leftrightarrow$	Abre hacia arriba;	“abierta” ;	V (0,b)
		$b < 0$	$\Leftrightarrow$	Abre hacia arriba;	“abierta” ;	V (0,b)

Observación: De los 61 estudiantes que participaron en esta sesión, uno (≈ 1.64%), de hecho, se integra al equipo con su hoja de trabajo individual en blanco. Lo único escrito en ella es la leyenda “no entendí”. Los 60 restantes (≈ 98.36%), de una u otra forma cumplen con el cometido de la Tarea 33. En esta

Tarea, el Cuadro V de diez alumnos ($\approx$ 16.39% de 61), es prácticamente idéntico al que se muestra renglones arriba. 45 ($\approx$ 73.77%), se refieren a los cuadrantes por los que pasa la parábola y no hacia donde se abre. Cuatro ($\approx$ 6.56%), indican hacia dónde se abre y los cuadrantes por los que pasa. Uno ($\approx$1.64%), hacia dónde se abre. Cuatro ($\approx$ 6.56%), establecen la abertura. Siete ($\approx$ 11.46%), utilizan el concepto de ángulo de inclinación con respecto a la parte positiva del eje de las abscisas (α) para indicar las diferentes aberturas. 24 ($\approx$39.34%), hablan del vértice de la parábola, mientras que otros 24 ($\approx$ 39.34%), para señalar dicho punto, aluden al concepto de punto de intersección con los ejes o con el eje de las ordenadas (P.I.Es. o P.I.E.O.). Cuatro ($\approx$ 6.56%), generalizan los tres valores de "b" para los distintos valores de "a"; pero al momento de establecer las coordenadas del vértice o del punto de intersección (según el concepto que hayan utilizado), anotan los valores particulares. Estos son, algunos de los resultados del trabajo individual.

En esta ocasión, el trabajo en equipo se vio ensombrecido por dos hechos desafortunados. Uno, en la clase sólo estuvieron presentes 16 equipos en lugar de los 17 acostumbrados. Dos, un equipo anota en su hoja de trabajo "no hubo discusión" aunque por los rondines que el profesor realiza cuando los estudiantes trabajan en equipo, se puede decir que sí hubo discusión, lo que no hubo fueron acuerdos y lo poco que habían acordado y anotado, terminaron borrándolo. No había condiciones de trabajo. Estaban molestos unos con otros; discutían enojados; unos, abandonaban el trabajo y salían del salón un rato, regresaban, se integraban a la discusión, minutos después, otros hacían lo mismo hasta que transcurrió *el tiempo asignado a la Tarea 34. Estos dos hechos nunca se habían dado ni se volvieron a presentar.*

Por otro lado, un equipo (6.25%), hace su Cuadro completo y sin equívoco alguno. Cuatro más (25%), acuerdan que para "definir" una parábola es necesario establecer hacia donde se abre, la abertura, las coordenadas del vértice (hasta aquí todo está correcto) pero consideran que también hay necesidad de indicar los cuadrantes por los que pasa. Ocho equipos (50%), se refieren a los cuadrantes en lugar de hacia dónde se abre. Dos (12.5%), no registran la abertura pero lo demás es correcto. Siete (43.75%), omiten la abertura y hacia dónde se abre. Tres (18.75%), aluden al punto de intersección con el eje de las ordenadas aunque dos de ellos (12.5%) también se refieren al vértice. Otro resultado y el último aquí enunciado es que dos equipos al momento de generalizar los valores de "a", anotan, en lugar de ésta, "a^2".

La clase continúa con algunos ejercicios orales en el mismo tenor de los realizados en la sesión anterior y finaliza cuando a los estudiantes se les asigna como trabajo individual extraclase la Tarea 36: "Construyendo el Cuadro VI".

13ª Sesión

Descripción

En esta sesión, en base a la Tarea 36, se trabaja en equipos la construcción del Cuadro VI (Tarea 37). Posteriormente, se lleva a cabo la discusión grupal (Tarea 38) hasta que el grupo construye el Cuadro VI como se muestra a continuación.

C U A D R O V I

$y = ax^2 + b$, donde a, $b \in \Re$ y $a \neq 0 \Leftrightarrow$ Parábola con eje el Eje de las Ordenadas

$$a < 0 \quad \left[\begin{array}{l}
a = -1 \text{ y} \left[\begin{array}{llll}
b = 0 & \Leftrightarrow \text{ Abre hacia abajo;} & \text{“normal” ;} & \text{V } (0,0) \\
b > 0 & \Leftrightarrow \text{ Abre hacia abajo;} & \text{“normal” ;} & \text{V } (0,b) \\
b < 0 & \Leftrightarrow \text{ Abre hacia abajo;} & \text{“normal” ;} & \text{V } (0,b)
\end{array}\right. \\
a > -1 \text{ y} \left[\begin{array}{llll}
b = 0 & \Leftrightarrow \text{ Abre hacia abajo;} & \text{“abierta” ;} & \text{V } (0,0) \\
b > 0 & \Leftrightarrow \text{ Abre hacia abajo;} & \text{“abierta” ;} & \text{V } (0,b) \\
b < 0 & \Leftrightarrow \text{ Abre hacia abajo;} & \text{“abierta” ;} & \text{V } (0,b)
\end{array}\right. \\
a < -1 \text{ y} \left[\begin{array}{llll}
b = 0 & \Leftrightarrow \text{ Abre hacia abajo;} & \text{“cerrada” ;} & \text{V } (0,0) \\
b > 0 & \Leftrightarrow \text{ Abre hacia abajo;} & \text{“cerrada” ;} & \text{V } (0,b) \\
b < 0 & \Leftrightarrow \text{ Abre hacia abajo;} & \text{“cerrada” ;} & \text{V } (0,b)
\end{array}\right.
\end{array}\right.$$

Acto seguido, se hacen algunos ejercicios orales; se entabla una breve discusión grupal en torno al primer plano de parábola cúbica (19º Plano); ésta culmina cuando el grupo acuerda los elementos que se van a considerar para describir una parábola cúbica; se les asigna a los estudiantes la construcción del Cuadro VII y VIII (Tareas 39 y 42 respectivamente) como trabajo individual extraclase y se da por terminada la sesión.

Observación: Dentro de los resultados de los 64 estudiantes en la Tarea 36 se tiene que, 29 ($\approx$ 45.31%), construyen el Cuadro VI idéntico al que emanó de la discusión grupal. Seis ($\approx$ 9.38%), especifican en el Cuadro VI los cuadrantes por los que pasa la parábola además de anotar hacia donde se abre, la abertura y las coordenadas del vértice. Cuatro (6.25%), no identifican correctamente qué números son mayores o menores que *menos uno. Motivo por el cual, tienen incorrecta la columna de la abertura. En lugar de "cerrada" ponen "abierta" y viceversa. 16 (25%), no registran hacia dónde abre la parábola. Aunque 15 de ellos escriben los cuadrantes por los que pasa. Dos (≈3.13%), indican hacia dónde se abre y los cuadrantes. 12 (18.75%), no anotan la abertura. Siete (≈ 10.94%), utilizan el concepto de punto de intersección en el eje de las ordenadas en lugar de vértice. Cinco (≈ 7.81%), no generalizan las coordenadas del vértice.*

De los 17 equipos, 15 (≈ 88.24%), construyen el Cuadro VI completo y correcto. Mientras que los dos restantes (≈11.76%), lo hacen completo pero incorrecto. El equívoco es la abertura: "abierta" en lugar de "cerrada" y viceversa. Esto, nuevamente, es una manifestación más de la dificultad de algunos estudiantes para identificar cuándo un número negativo es mayor o menor que menos uno.

14ª Sesión

Descripción

Los alumnos, integrados en equipo, construyen los Cuadros VII y VIII (Tareas 40 y 43 respectivamente). La base de la discusión la constituye el trabajo individual realizado por los estudiantes en las Tareas 39 y 42. Al concluir el trabajo en equipo, se prosigue con la discusión grupal. En la primera parte de ésta, se construye el Cuadro VII (Tarea 41) con la misma dinámica de las sesiones anteriores; y, en la segunda parte, el Cuadro VIII (Tarea 44). Acto seguido, como en ocasiones anteriores, se hacen algunos ejercicios orales utilizando como soporte para realizarlos, los dos cuadros de parábola cúbica construidos por el grupo y que se encuentran escritos en el pizarrón (estos cuadros se reproducen a continuación). La clase finaliza con la recomendación del profesor de repasar lo visto hasta este momento porque las tres sesiones siguientes estarán dedicadas a ejercicios.

C U A D R O V I I

$y = ax^3 + b$, donde a, $b \in \Re$ y $a \neq 0$ $\Leftrightarrow$ Parábola Cúbica que se abre sobre el Eje de las Ordenadas

$a > 0$	$a = 1$ y	$b = 0$	$\Leftrightarrow$	Cuadrantes I y III;	“normal” ;	P.In.Es.* (0,0)
		$b > 0$	$\Leftrightarrow$	Cuadrantes I, II y III;	“normal” ;	P.In.E.O.** (0,b)
		$b < 0$	$\Leftrightarrow$	Cuadrantes I, III y IV;	“normal” ;	P.In.E.O. (0,b)
	$a > 1$ y	$b = 0$	$\Leftrightarrow$	Cuadrantes I y III;	“cerrada” ;	P.In.Es. (0,0)
		$b > 0$	$\Leftrightarrow$	Cuadrantes I, II y III;	“cerrada” ;	P.In.E.O. (0,b)
		$b < 0$	$\Leftrightarrow$	Cuadrantes I, III y IV;	“cerrada” ;	P.In.E.O. (0,b)
	$a < 1$ y	$b = 0$	$\Leftrightarrow$	Cuadrantes I y III;	“abierta” ;	P.In.Es. (0,0)
		$b > 0$	$\Leftrightarrow$	Cuadrantes I, II y III;	“abierta” ;	P.In.E.O. (0,b)
		$b < 0$	$\Leftrightarrow$	Cuadrantes I, III y IV;	“abierta” ;	P.In.E.O. (0,b)

* P.In.Es.: Punto de inflexión en los ejes.
** P.In.E.O.: Punto de inflexión en el eje de las ordenadas.

C U A D R O V I I I

$y = ax^3 + b$, donde a, $b \in \Re$ y $a \neq 0$ $\Leftrightarrow$ Parábola Cúbica que se abre sobre el Eje de las Ordenadas

$a < 0$

- $a = -1$ y
  - $b = 0$ $\Leftrightarrow$ Cuadrantes II y IV; "normal" ; P.In.Es. (0,0)
  - $b > 0$ $\Leftrightarrow$ Cuadrantes I, II y IV; "normal" ; P.In.E.O. (0,*b*)
  - $b < 0$ $\Leftrightarrow$ Cuadrantes II, III y IV; "normal" ; P.In.E.O. (0,*b*)
- $a > -1$ y
  - $b = 0$ $\Leftrightarrow$ Cuadrantes II y IV; "abierta" ; P.In.Es. (0,0)
  - $b > 0$ $\Leftrightarrow$ Cuadrantes I, II y IV; "abierta" ; P.In.E.O. (0,*b*)
  - $b < 0$ $\Leftrightarrow$ Cuadrantes II, III y IV; "abierta" ; P.In.E.O. (0,*b*)
- $a < -1$ y
  - $b = 0$ $\Leftrightarrow$ Cuadrantes II y IV; "cerrada" ; P.In.Es. (0,0)
  - $b > 0$ $\Leftrightarrow$ Cuadrantes I, II y IV; "cerrada" ; P.In.E.O. (0,*b*)
  - $b < 0$ $\Leftrightarrow$ Cuadrantes II, III y IV; "cerrada" ; P.In.E.O. (0,*b*)

Observación: De los 63 estudiantes que construyeron el Cuadro VII (Tarea 39), 19 (≈ 30.16%), no cometen equívoco alguno. 37 (≈ 58.73%), no registran la abertura. Tres (≈ 4.76%), anotan únicamente los cuadrantes por los que pasan necesariamente las parábolas cúbicas (I y III). Dos de estos tres, en lugar de la abertura escriben "P.In. < P.In. de la parábola cúbica madre", cuando $a > 1$ y "P.In. > P.In. de la parábola cúbica madre", cuando $a < 1$. Uno (≈ 1.59%), tiene invertidas las aberturas. Otro (≈ 1.59%), considera que la abertura está en función de "b": "b = 0, normal; b > 0, cerrada y b < 0 abierta". Uno más, (≈ 1.59%), no generaliza "b". Finalmente otro más (≈ 1.59%), no concluye el cuadro: le falta el caso cuando $a < 1$.

De los 17 equipos, nueve ($\approx$ 52.94%), construyen correctamente el Cuadro VII. Seis ($\approx$ 35.29%), no anotan la abertura. Uno ($\approx$ 5.88%), omite los cuadrantes; y uno más, ($\approx$5.88%), considera únicamente los cuadrantes por los que necesariamente pasan las parábolas cúbicas y no asigna aberturas.

En relación al Cuadro VIII, de los 63 estudiantes que lo construyeron, 14 ($\approx$ 22.22%), lo hacen correctamente. 38 ($\approx$ 60.32%), no registran la abertura. Tres ($\approx$ 4.76%), no ponen los cuadrantes. Dos ($\approx$ 3.17%), únicamente escriben los cuadrantes por los que necesariamente pasan las parábolas cúbicas. Dos ($\approx$ 3.17%), anotan la abertura en función de “b”. Otros dos ($\approx$ 3.17%), se refieren a “P.In. < P.In. de la parábola cúbica madre”, cuando $a > -1$ y a “P.In. > P.In. de la parábola cúbica madre”, cuando $a < -1$, en lugar de la abertura. Otro ($\approx$1.59%), sustituye la abertura por el tamaño (“normal”, “corta” y “larga”); y otro más ($\approx$ 1.59%), no generaliza “b”.

Cuando los 17 equipos trabajan el Cuadro VIII, ocho ($\approx$47.06%), lo construyen correctamente. Seis ($\approx$ 35.29%), no mencionan la abertura. Dos ($\approx$ 11.76%), registran las aberturas invertidas al considerar que, por ejemplo, $-2 > -1$. Uno ($\approx$5.88%), sólo anota los cuadrantes por los que necesariamente pasan las parábolas cúbicas.

Lo anterior son algunos de los resultados que se tienen tanto del trabajo individual como en equipo cuando los alumnos enfrentan las Tareas 39, 40, 42 y 43.

15ª SESIÓN

Descripción

El profesor señala que esta clase es la primera de tres, que estará dedicada a ejercicios. Da las instrucciones generales de cómo se van a llevar a cabo: se les entrega la hoja de ejercicios; él dicta una ecuación; los estudiantes la anotan, inmediatamente contestan hasta que se les indique que el tiempo asignado al ejercicio ha concluido; se revisa grupalmente; ellos se califican; se dicta la ecuación siguiente y así sucesivamente hasta completar una ronda de cinco ejercicios; se suma la calificación de cada ejercicio para obtener la calificación de la ronda y ésta se expresa públicamente ante el grupo; cuando todos han dado su calificación, se procede con otra ronda y así continúan hasta que la sesión finalice. Aclara que, la calificación de una ronda es de diez puntos, y como cada ronda es de cinco ejercicios, cada ejercicio vale dos puntos pero como para cada ecuación hay que registrar cuatro características entonces, cada característica correcta tiene un valor de medio punto.

Recalca que el trabajo es estrictamente individual y que las calificaciones únicamente serán consideradas como un indicador de los avances que vaya logrando cada estudiante y el grupo en su conjunto. Acto seguido, le entrega a cada alumno la hoja de la Tarea 45 (“Ejercicios: características de la gráfica asociada a una ecuación. 1ª Parte”). En cuanto los alumnos tienen claro cómo van a usar la hoja para contestar, dicta la primera ecuación.

La Tarea 45 consta de dos rondas de ejercicios. Al terminar estos diez, el profesor les da la hoja de la Tarea 47 (“Ejercicios: características de la gráfica asociada a una ecuación. 2ª Parte”), para otros diez. Al finalizar la cuarta ronda se da por terminada la clase.

Observación: En las sesiones de ejercicios las tareas individuales y grupales se van alternando. Es decir, no se agota la tarea individual *(como se acostumbraba) y luego se procede a la grupal, más bien, se trabaja parte de la tarea individual (un ejercicio) y se procede a la parte correspondiente de la tarea grupal. Las tareas grupales de la 45 y 47 son 46 y 48, respectivamente.*

En las tres sesiones dedicadas a que los estudiantes refuercen y automaticen los conocimientos que han obtenido en las clases anteriores, se realizan un total de 18 rondas (90 ejercicios), algunas de las cuales se diferencian de otras por el "apoyo" que se les va proporcionando o por el tipo de cambio de registro de representación que se les solicita (ecuación $\rightarrow$ gráfica o gráfica $\rightarrow$ ecuación).

El formato de la hoja de trabajo para las Tareas 45 y 47 es el mismo y es en las cuales el alumno recibe el mayor "apoyo". Éste, en las tareas subsecuentes, va disminuyendo. A continuación se reproduce la parte que muestra el "apoyo" que se les proporciona a los estudiantes en las tareas correspondientes a esta sesión.

		RECTA			**PARÁBOLA**			**PARÁBOLA CÚBICA**			
ECUACIÓN	**Forma**	**Cuadrantes**	α	**P.I.**	**Abre hacia**	**"Abertura"**	**Vértice**	**Cuadrantes**	**"Abertura"**	**P.In.**	Calif.

Si los resultados de los estudiantes se juzgan a la luz de los tres tipos de relaciones funcionales que se trabajan, es posible afirmar que la que les causa mayores dificultades es la recta, *luego la parábola cúbica y finalmente la parábola. Esto, adelantándonos a los resultados de las otras sesiones, no sólo se presenta en los primeros 20 ejercicios sino en los 90 e inclusive en el Instrumento que se utiliza para explorar el Dominio de la conversión; y aunque el desempeño de los estudiantes va mejorando conforme avanzan en las rondas, la recta es la que les cuesta más trabajo y la parábola la que se les es más fácil.*

De la recta, la dificultad mayor la tienen en α *y en menor grado, los cuadrantes por los que pasa. Para el caso de la parábola cúbica, la mayor dificultas está en la abertura, seguida de los cuadrantes; y para la parábola, el problema se localiza en la abertura. En los tres casos, identificar la forma de la gráfica, cuando se les da la ecuación, y establecer las coordenadas del P.I.E.O., del V o del P.In.E.O., según sea el caso, no representa, en general, obstáculo alguno.*

Determinar el valor de α *en recta, la abertura en parábola y parábola cúbica, está directamente relacionado con la identificación de cuándo un número positivo es mayor o menor que uno, y cuándo un negativo es mayor o menor que menos uno. Situación que, como se comentó páginas atrás, representa una dificultad para los estudiantes sobre todo si el número es un racional expresado en la forma* $\frac{m}{n}$*; esto es, al parecer, la fuente fundamental de los desaciertos.*

En el caso específico de las cuatro rondas de cinco ejercicios que se trabajan en esta sesión, el grupo de 68 alumnos, en torno a sus calificaciones, obtiene los siguientes resultados:

Nº de Tarea	Nº de ronda	Ejercicios	$\bar{x}$	σ_x
45	1	1 - 5	7.50	1.47
45	2	6 -10	8.07	1.33
47	3	11 -15	8.29	1.77
47	4	16 -20	8.45	1.01

16ª Sesión

Descripción

Antes de iniciar las seis rondas de ejercicios que se llevan a cabo en esta clase, el profesor entrega a cada estudiante una hoja con 54 bosquejos de gráficas: 18 de recta, 18 de parábola y 18 de parábola cúbica. Esta misma hoja se les proporcionó cuando trabajaron el Cuestionario en la Tarea 1 y la segunda aplicación de ese Cuestionario (Tarea 6). El profesor les solicita que la observen cuidadosamente y transcurrido un tiempo, los estudiantes verbalizan el ángulo de cada uno de los 18 bosquejos de recta y la abertura que tienen los 18 bosquejos de parábola y parábola cúbica. Se les entrega la hoja de la Tarea 49 titulada “Ejercicios: características y bosquejo de la gráfica asociada a una ecuación” al tiempo que se les indica los cambios en esta tarea con respecto a las de la clase pasada: además de hacer la descripción de la gráfica asociada hay que anotar el número del bosquejo correspondiente y, para calificarse no se considerará la columna donde se registra la forma de la gráfica asociada a la ecuación en turno. Acto seguido el profesor dicta la primera ecuación.

Cuando se completan dos rondas (ejercicios del 21 al 30), las Tareas 49 y 50 (individual y grupal, respectivamente) concluyen. En seguida el profesor entrega la hoja de la Tarea 51: “Ejercicios: bosquejo de la gráfica asociada a una ecuación. 1ª Parte”. Aclara que en estos ejercicios (del 31 al 50) sólo hay que anotar el número de gráfica por lo que, cada respuesta correcta vale dos puntos. También señala que en la revisión grupal (Tarea 52) deben enunciarse las características de la gráfica, antes de decir el número de bosquejo. La clase finaliza con la décima ronda.

Observación: La ayuda que se les proporciona a los estudiantes, vía el formato, para resolver los ejercicios de la Tarea 49, disminuye considerablemente mientras que para la Tarea 51, desaparece.

Los formatos son similares a los que se reproducen a continuación. El primero de ellos es para la Tarea 49 y el segundo, para la 51.

ECUACIÓN	**Características de la gráfica asociada**				**N° de gráfica**	Calif.

ECUACIÓN	**Nº de gráfica**	Calif.

ECUACIÓN	**Nº de gráfica**	Calif.

La tabla siguiente muestra los resultados de cada una de las seis rondas que realizan los 70 estudiantes en esta clase.

Nº de Tarea	Nº de ronda	Ejercicios	$\bar{x}$	σ_x
49	5	21 - 25	8.22	1.48
49	6	26 -30	8.36	1.35
51	7	31 -35	8.29	1.70
51	8	36 - 40	8.29	1.45
51	9	41 - 45	8.34	1.97
51	10	46 -50	9.09	1.25

17ª Sesión

Descripción

Prácticamente, la clase inicia cuando el profesor entrega la hoja de la Tarea 53: “Ejercicios: bosquejo de la gráfica asociada a una ecuación. 2ª Parte”. La dinámica para esta tarea y su correspondiente grupal (Tarea 54), es idéntica a las de las dos últimas de la sesión anterior.

Cuando los estudiantes realizan los 20 ejercicios que corresponden a estas tareas (del 51 al 70), se les proporciona la Tarea 55: “Ejercicios: ecuación asociada al bosquejo de una gráfica”. Indicándoseles que en esta tarea se les va a asignar un número de gráfica, ellos tienen que anotar una ecuación factible de asociársele al bosquejo indicado y que al momento de la revisión grupal (Tarea 56) varios compañeros dirán la ecuación que le asociaron y el por qué. El maestro también aclara que cada ecuación vale dos puntos y si hay una equivocación en alguno de sus elementos, toda la respuesta se considerará incorrecta.

La clase llega a su término al momento en que el grupo escucha las calificaciones individuales de la 18ª ronda (ejercicios del 86 al 90).

Observación: El formato para la Tarea 53 es el mismo que el utilizado en la Tarea 51 y el de la 55, es parecido al que se muestra en seguida.

Nº de GRÁFICA	**Ecuación**	Calif.

Nº de GRÁFICA	**Ecuación**	Calif.

Los resultados que se obtienen en esta ocasión son los siguientes:

Nº de Tarea	Nº de ronda	Ejercicios	$\bar{x}$	σ_x
53	11	51 - 55	8.65	1.72
53	12	56 -60	8.68	1.52
53	13	61 -65	8.88	1.43
53	14	66 - 70	8.91	1.35
55	15	71 - 75	8.78	1.45
55	16	76 - 80	9.07	1.16
55	17	81 - 85	8.99	1.30
55	18	86 -90	9.45	0.90

Nótese que de las catorce rondas que trabajaron los estudiantes en el cambio del registro de representación algebraico al gráfico, sólo en una de ellas (la 10), obtuvieron un promedio grupal de calificación superior a nueve (9.09). Mientras que, de las cuatro que se dedican al cambio del registro de representación gráfico al algebraico, dos de ellas son mayores que nueve.

18ª Sesión

Descripción

En esta sesión se aplica el Instrumento que se utiliza para explorar el Dominio de la citada conversión (Tarea 57). El profesor entrega a cada alumno el denominado Cuestionario y la hoja que contiene los 54 bosquejos de gráficas. Conforme los estudiantes van terminando, abandonan el salón.

Observación: El promedio grupal de calificaciones de los 70 estudiantes que se enfrentaron al Cuestionario es de 8.47 ($\bar{x}$) y en este caso, σ_x = 1.8. Los resultados de este Instrumento se pueden consultar en la 1ª Parte del Capítulo 5.

CAPÍTULO 5

RESULTADOS DE LOS CINCO INSTRUMENTOS DE EXPLORACIÓN

Introducción

En este Capítulo se muestran los resultados de los instrumentos que se utilizaron para explorar, por un lado, el dominio de la conversión de registros de representación gráfico y algebraico en funciones polinomiales elementales, con un enfoque global cualitativo, y por otro, la comprensión de esas funciones. Para lo primero se aplicó un instrumento denominado “*Cuestionario*” y para lo segundo, cuatro instrumentos que responden al nombre de: *“Explorando diversos aspectos de la articulación de registros”* (también referido como 1er. Instrumento de Comprensión), *“Explorando algunos aspectos sobre la escala”* (2° Instrumento de Comprensión), “*Representaciones gráfica y algebraica en contexto*” (3er. Instrumento de Comprensión) y, “*Cuestionario*” (4° Instrumento de Comprensión).

El Capítulo se presenta dividido en seis partes: una dedicada a cada uno de los Instrumentos y una más, que se ubica después de la cuarta; en la que se muestra, en forma condensada, el rendimiento de los estudiantes (en términos cuantitativos) en los cuatro primeros Instrumentos.

1ª PARTE

RESULTADOS DEL INSTRUMENTO PARA EXPLORAR EL DOMINIO DE LA CONVERSIÓN

Introducción

Esta sección está dedicada a mostrar algunos de los resultados que los estudiantes obtienen al enfrentar el Cuestionario que se les aplica con el propósito de indagar si logran el dominio de la conversión de los registros de representación gráfico y algebraico en funciones polinomiales elementales, después de haber sido sometidos a una instrucción diseñada para tal fin.

El Cuestionario, como se ha mencionado en otras ocasiones, contiene un total de 30 preguntas y está dividido en dos partes (ver Tarea 1 en el Anexo 1). La primera de ellas, está dedicada a la conversión del registro algebraico al gráfico y consta de 15 preguntas. La segunda parte, también constituida por 15 reactivos, está referida al proceso inverso: conversión de la representación gráfica a la algebraica.

El Cuestionario va acompañado de un hoja que contiene 54 bosquejos de gráficas (numerados del uno al 54) indispensable para dar respuesta a las preguntas formuladas en las dos partes del citado Cuestionario.

Desde el punto de vista de las categorías y subcategorías utilizadas para analizar las Tareas (ver Capítulo 3), la *acción del estudiante* requerida para dar respuesta a la 1ª parte del Cuestionario es: *interpretación local, global, cuantitativa y cualitativa*. Para la 2ª parte, *construcción local, global, cuantitativa y cualitativa.* Considerando, naturalmente, el decir de Leinhardt et al. (1990) en el sentido de que toda *construcción* implica una *interpretación.*

El trabajo que realizan los estudiantes en esta Tarea es estrictamente individual y el tiempo máximo con el que cuentan para realizarla es de 60 minutos.

Los resultados del Cuestionario se presentan desde tres perspectivas. En la primera, el rendimiento de los estudiantes desde la óptica de las puntuaciones que obtienen; en la segunda, se consideran los aciertos o respuestas correctas y, en la tercera, los equívocos que cometen.

RESULTADOS

INSTRUMENTO PARA EXPLORAR EL DOMINIO DE LA CONVERSIÓN

Rendimiento de los estudiantes de acuerdo a su puntuación

La puntuación que se le asigna a cada estudiante depende del número de respuestas correctas que haya logrado en el Cuestionario (ver Tarea 1 en el Anexo 1) que se les aplica a fin de indagar en qué medida la instrucción recibida por ellos logró promover el dominio de la conversión de los registros de representación gráfico y algebraico en funciones polinomiales de la forma $y = ax^n + b$, *donde* a, $b \in \Re$, $a \neq 0$ y n = 1, 2 y 3.

Como se indica en el Capítulo 3, en este trabajo se asume que un estudiante domina la citada conversión de registros si contesta correctamente al menos el 60% de las preguntas del Cuestionario que ahora nos ocupa. Si la puntuación de un alumnos se determina multiplicando el número total de aciertos por 0.33 ─más 0.1 cuando el número de respuestas correctas es mayor o igual que 16─ entonces, los aprendices que obtienen una puntuación de 6.04 (equivalente al 60% de aciertos) o más son considerados, y por ende así referidos, como los estudiantes que logran el dominio de la mencionada conversión.

De los 70 adolescentes que participaron en esta experiencia, 64 de ellos (≈ 91.42%), alcanzan una puntuación de 6.04 o más en el citado Cuestionario; en tal sentido, y de acuerdo a la definición operativa dada en el Capítulo 3 y retomada renglones arriba, es posible afirmar que la instrucción recibida por 70 estudiantes logra promover, en 64 de ellos, el dominio de la referida conversión.

Por otra parte, los 70 alumnos que conformaron el grupo, utilizaron, en promedio, 28 minutos (con una desviación de aproximadamente 7 min.) para contestar las 30 preguntas del Cuestionario que se les aplicó.

A continuación se muestran en tablas algunos resultados de los estudiantes referentes a su rendimiento.

	Puntuación promedio ($\bar{x}$)	Desviación (σ_x)
Grupo (70 alumnos)	8.53	1.75
Alumnos que *dominan* la conversión * (64)	8.94	1.1

* Forma breve de indicar "Alumnos que *dominan* la conversión de los registros de representación gráfico y algebraico en funciones polinomiales elementales

Puntuación	Nº de alumnos	% del grupo	% acumulado del grupo	% de los alumnos que *dominan* la conversión	% acumulado de los alumnos que *dominan* la conversión
10	15	≈ 21.43%	21.43%	≈ 23.44%	23.44%
[9,10〉	27	≈ 38.57%	60%	≈ 42.19%	65.63%
[8,9〉	12	≈ 17.17%	77.14%	≈ 18.75%	84.38%
[7,8〉	4	≈ 5.71%	82.85%	6.25%	90.63%
[6,7〉	6	≈ 8.57%	91.42%	≈ 9.37%	100%
[5,6〉	3	≈ 4.29%	95.71%		
[0,5〉	3	≈ 4.29%	100%		

Desempeño de los estudiantes considerando el número de respuestas correctas

Resultados globales del número de respuestas correctas que los alumnos dieron a las 30 preguntas del Cuestionario

Nº de respuestas correctas	Nº de alumnos	Porcentaje acumulado
30	15 (≈ 21.42%)	21.42%
29	9 (≈ 12.85%)	34.27%
28	12 (≈ 17.13%)	51.4%
27	6 (≈ 8.57%)	59.97%
26	6 (≈ 8.57%)	68.54%
25	3 (≈ 4.29%)	72.83%
24	3 (≈ 4.29%)	77.12%
23	1 (≈ 1.43%)	78.55%
22	2 (≈ 2.86%)	81.41%
21	1 (≈ 1.43%)	82.84%
20	2 (≈ 2.86%)	85.7%
19	2 (≈ 2.86%)	88.56%
18	2 (≈ 2.86%)	91.42%
17	2 (≈ 2.86%)	94.28%
15	1 (≈ 1.43%)	95.71%
10	2 (≈ 2.86%)	98.57%
5	1 (≈ 1.43%)	100%

	Promedio de *respuestas correctas* en el Cuestionario ($\bar{x}$)	Desviación (σ_x)
Grupo (70 alumnos)	26	5
Alumnos que *dominan* la conversión (64)	27	3

Resultados globales del número de respuestas correctas que los alumnos dieron a cada una de las dos partes del Cuestionario

1ª parte (ecuación → gráfica)			2ª parte (gráfica → ecuación)		
Nº de respuestas correctas	Nº de alumnos	Porcentaje acumulado	Nº de respuestas correctas	Nº de alumnos	Porcentaje acumulado
15	27 (≈ 38.57%)	38.57%	15	24 (≈ 34.28%)	34.28%
14	17 (≈ 24.28%)	62.85%	14	17 (≈ 24.28%)	58.56%
13	6 (≈ 8.57%)	71.42%	13	7 (10%)	68.56%
12	6 (≈ 8.57%)	79.99%	12	3 (≈ 4.28%)	72.84%
11	5 (≈ 7.14%)	87.13%	11	4 (≈ 5.71%)	78.55%
10	2 (≈ 2.86%)	89.99%	10	2 (≈ 2.86%)	81.41%
9	2 (≈ 2.86%)	92.85%	9	2 (≈ 2.86%)	84.27%
8	2 (≈ 2.86%)	95.71%	8	3 (≈ 4.29%)	88.56%
6	1 (≈ 1.43%)	97.14%	7	3 (≈ 4.29%)	92.85%
5	1 (≈ 1.43%)	98.57%	6	1 (≈ 1.43%)	94.28%
2	1 (≈ 1.43%)	100%	5	1 (≈ 1.43%)	95.71%
			4	1 (≈ 1.43%)	97.14%
			3	2 (≈ 2.86%)	100%

	Promedio de *aciertos por alumno* ($\bar{x}$)	Desviación (σ_x)
1ª parte del Cuestionario (ecuación → gráfica)	13	3
2ª parte del Cuestionario (gráfica → ecuación)	13	3

	Promedio de *aciertos por alumno* que *domina* la conversión ($\bar{x}$)	Desviación (σ_x)
1ª parte del Cuestionario (ecuación → gráfica)	14	2
2ª parte del Cuestionario (gráfica → ecuación)	13	3

Resultados globales del número de respuestas correctas que los alumnos dieron a cada una de las preguntas del Cuestionario

1ª parte (ecuación → gráfica)			2ª parte (gráfica → ecuación)		
Nº de pregunta	Nº de alumnos que contestan correctamente	Tipo de función	Nº de pregunta	Nº de alumnos que contestan correctamente	Tipo de función
2	67 (≈ 95.71%)	Cuadrática	10	69 (≈ 98.57%)	Cuadrática
5	67 (≈ 95.71%)	Cuadrática	2	62 (≈ 88.57%)	Lineal
10	66 (≈ 94.29%)	Cuadrática	6	62 (≈ 88.57%)	Cuadrática
4	65 (≈ 92.86%)	Cúbica	12	62 (≈ 88.57%)	Cúbica
11	65 (≈ 92.86%)	Cúbica	1	61 (≈ 87.14%)	Cuadrática
3	64 (≈ 91.43%)	Cúbica	4	61 (≈ 87.14%)	Cúbica
15	63 (90%)	Cúbica	7	58 (≈ 82.86%)	Cuadrática
1	61 (≈ 87.14%)	Lineal	11	58 (≈ 82.86%)	Lineal
6	61 (≈ 87.14%)	Lineal	14	58 (≈ 82.86%)	Cúbica
8	61 (≈ 87.14%)	Cuadrática	3	57 (≈ 81.43%)	Cúbica
12	61 (≈ 87.14%)	Lineal	13	55 (≈ 78.57%)	Cuadrática
14	56 (80%)	Lineal	9	54 (≈ 77.14%)	Cúbica
7	54 (≈ 77.14%)	Lineal	15	53 (≈ 75.71%)	Lineal
13	54 (≈ 77.14%)	Cuadrática	5	52 (≈ 74.29%)	Lineal
9	50 (≈ 71.43%)	Cúbica	8	51 (≈ 72.86%)	Lineal

	Promedio de *aciertos por pregunta* ($\bar{x}$)	Desviación (σ_x)
Cuestionario Completo	60	5
1ª parte del Cuestionario (ecuación → gráfica)	61	5
2ª parte del Cuestionario (gráfica → ecuación)	58	5

Nivel de dificultad de las preguntas

	Pregunta(s) más fácil(es)		Pregunta(s) más difícil(es)	
	Nº de pregunta(s)	Alumnos que contestan correctamente	Nº de pregunta(s)	Alumnos que contestan correctamente
1ª parte del Cuestionario (ecuación → gráfica)	2 y 5	67 (≈ 95.71%)	9	50 (≈ 71.43%)
2ª parte del Cuestionario (gráfica → ecuación)	10	69 (≈ 38.57%)	8	51 (≈ 72.86%)
Cuestionario completo	10 (de la 2ª parte)	69 (≈ 38.57%)	9 (de la 1ª parte)	50 (≈ 71.43%)

Comparación del rendimiento de los estudiantes en las dos partes del Cuestionario

	Alumnos con rendimiento *superior* en la *1ª parte* (con respecto a la 2ª)	Alumnos con rendimiento *superior* en la 2ª *parte* (con respecto a la 1ª)	Alumnos con el *mismo* rendimiento en las *dos partes* del Cuestionario
Grupo completo (70 alumnos)	27 (≈ 38.57%)	21 (30%)	22 (≈ 31.43%)
Alumnos que *dominan* la conversión (64)	24 (37.5%)	19 (≈ 29.69%)	21 (≈ 32.81%)

Desempeño de los estudiantes considerando sus equívocos

Equívocos de los alumnos en las preguntas de la primera parte del Cuestionario dedicada al proceso ecuación $\rightarrow$ gráfica

Nº de pregunta	Respuesta correcta (Nº de gráfica)	Respuesta dada por los estudiantes: Nº de gráfica	Respuesta dada por los estudiantes: Frecuencia	Equívoco	Posible fuente de equívoco
1	8	6	7	α *	Considerar que $\frac{9}{4} < 1$
		4	1	α	Asignar los valores de α según los valores de "*a*"
		9	1	P.I.E.O**	Rol de "*b*"
2	25	27	2	Abertura	Asignar la abertura según los valores de "*a*"
		7	1	Forma	Distracción
3	54	52	5	Abertura	Considerar que $-\frac{11}{4} > -1$
		45	1	Cuadrantes	Rol del signo de "*a*"
4	41	50	3	Cuadrantes	Rol del signo de "*a*"
		54	1	Cuadrantes y abertura	Rol del signo de "*a*" y asignar la abertura según los valores de "*a*"
		45	1	Abertura	Asignar la abertura según los valores de "*a*"
5	34	36	2	Abertura	Considerar que $-\frac{5}{8} < -1$
		10	1	Forma	Distracción
6	13	4	2	α	Rol del signo de "*a*"
		10	2	P.I.E.O.	Rol de "*b*"
		15	2	α	Asignar los valores de α según los valores de "*a*"
		8	1	α	Asignar los valores de α según los valores de "*a*"
		14	1	P.I.E.O.	Rol de "*b*"
		17	1	α	Asignar los valores de α según los valores de "*a*"

* α: Ángulo que forma una recta con la parte positiva del eje de las abscisas
** P.I.E.O.: Punto de intersección en el eje de las ordenadas

Equívocos de los alumnos en las preguntas de la primera parte del Cuestionario dedicada al proceso ecuación $\rightarrow$ gráfica (continuación)

Nº de pregunta	Respuesta correcta (Nª de gráfica)	Respuesta dada por los estudiantes: Nª de gráfica	Respuesta dada por los estudiantes: Frecuencia	Equívoco	Posible fuente de equívoco
7	12	11	6	α	Considerar que $-\frac{8}{3} > -1$
		3	3	α	Rol del signo de "*a*"
		10	2	α	Asignar los valores de α según los valores de "*a*"
		2	1	α	Asignar los valores de α según los valores de "*a*"
		16	1	α y P.I.E.O.	Considerar que $-\frac{8}{3} > -1$ y rol de "*b*"
		18	1	P.I.E.O.	Rol de "*b*"
8	31	32	3	Vértice	Rol de "*b*"
		33	2	Abertura	Asignar la abertura según los valores de "*a*"
		4	1	Forma	Descuido
		22	1	Hacia donde abre	Rol del signo de "*a*"
		23	1	Hacia donde abre y vértice	Rol del signo de "*a*" y de "*b*"
		51	1	Forma y abertura	Descuido y asignar la abertura según valores de "*a*"
9	39	38	10	Abertura	Considerar que $\frac{7}{5} < 1$
		48	4	Cuadrantes	Rol del signo de "*a*"
		44	2	P.In.E.O.*	Rol de "*b*"
		40	1	Abertura y P.In.E.O.	Rol de "*a*" y de "*b*"
		49	1	Cuadrantes y abertura	Rol de "*a*" y de "*b*"
10	26	24	4	Abertura	Considerar que $\frac{7}{4} < 1$

* P.In.E.O.: Punto de inflexión en el eje de las ordenadas

Equívocos de los alumnos en las preguntas de la primera parte del Cuestionario dedicada al proceso ecuación $\rightarrow$ gráfica (continuación)

Nº de pregunta	Respuesta correcta (Nª de gráfica)	Respuesta dada por los estudiantes: Nª de gráfica	Frecuencia	Equívoco	Posible fuente de equívoco
11	42	44	4	Abertura	Considerar que $\frac{2}{9} > 1$
		53	1	Cuadrantes y abertura	Rol de "*a*"
12	16	18	8	α	Considerar que $-\frac{4}{7} < -1$
		9	1	α y cuadrantes	Rol de "*a*"
13	30	29	5	Abertura	Considerar que $-\frac{9}{5} > -1$
		28	4	Abertura	Asignar la abertura según los valores de "*a*"
		36	4	Vértice	Determinar el vértice según los valores de "*b*"
		32	1	Abertura y vértice	Asignar la abertura según los valores de "*a*" y determinar el vértice según los valores de "*b*"
		48	1	Forma	Descuido
		53	1	Forma y P.I.E.O.	Descuido y rol de "*b*"
14	7	9	5	α	Considerar que $\frac{5}{7} > 1$
		6	4	P.I.E.O.	Rol de "*b*"
		16	2	Cuadrantes	Rol del signo de "*a*"
		5	1	α	Asignar α según valores de "*a*"
		14	1	Cuadrantes y α	Rol de "*a*"
15	51	53	4	Abertura	Considerar que $-\frac{6}{7} < -1$
		42	1	Cuadrantes	Rol del signo de "*a*"
		44	1	Cuadrantes y abertura	Rol de "*a*"

Equívocos de los alumnos en las preguntas de la segunda parte del Cuestionario dedicada al proceso gráfica → ecuación

Nº de pregunta	Nº de gráfica	Respuesta correcta (Características de la ecuación asociada)	Respuesta dada por los estudiantes: Característica(s) incorrecta(s) de la ecuación asociada	Respuesta dada por los estudiantes: Frecuencia	Equívoco	Posible fuente de equívoco
1	21	n = 2, $a > 1$ y $b = 0$	$0 < a < 1$	4	Valor de “*a*”	Asignar “*a*” según abertura
			$a = 1$	3	Valor de “*a*”	Asignar “*a*” según abertura
			$a < -1$	1	Valor de “*a*”	Asignar signo de “*a*” según hacia donde se abre
			$b > 0$	1	Valor de “*b*”	Asignar “*b*” según vértice
2	5	$n = 1$, $a = 1$ y $b < 0$	$a > 1$ y $b > 0$	2	Valor de “*a*” y “*b*”	Asignar “*a*” y “*b*” según α y P.I.E.O., respectivamente
			$a > 1$	1	Valor de “*a*”	Asignar “*a*” según α
			$-1 < a < 0$ y $b = 0$	1	Valor de “*a*” y “*b*”	Asignar “*a*” y “*b*” según α y P.I.E.O., respectivamente
			$-1 < a < 0$	1	Valor de “*a*”	Asignar “*a*” según α
			$0 < a < 1$	1	Valor de “*a*”	Asignar “*a*” según α
			$b > 0$	1	Valor de “*b*”	Asignar “*b*” según P.I.E.O.
3	48	$n = 3$, $a < -1$ y $b = 0$	$a > 1$	5	Valor de “*a*”	Asignar signo de “*a*” según cuadrantes
			$a = -1$	4	Valor de “*a*”	Asignar “*a*” según abertura
			$-1 < a < 0$	3	Valor de “*a*”	Considerar que $-\frac{2}{3} < -1$, $-\frac{3}{8} < -1$ o $-\frac{6}{8} < -1$
			$a = 1$	1	Valor de “*a*	Asignar “*a*” según cuadrantes y abertura

Equívocos de los alumnos en las preguntas de la segunda parte del Cuestionario dedicada al proceso gráfica $\rightarrow$ ecuación (continuación)

Nº de pregunta	Nº de gráfica	Respuesta correcta (Características de la ecuación asociada)	Respuesta dada por los estudiantes: Característica(s) incorrecta(s) de la ecuación asociada	Respuesta dada por los estudiantes: Frecuencia	Equívoco	Posible fuente de equívoco
4	52	$n=3$, $-1<a<0$ y $b<0$	$a<-1$	5	Valor de "*a*"	Considerar que $-4>-1$, $-6>-1$, $-5>-1$, $-10>-1$ y $-\frac{14}{5}>-1$
			$a=-1$ y $b>0$	1	Valor de "*a*" y "*b*"	Asignar "*a*" y "*b*" según abertura y P.In.E.O., respectivamente
			$n=1$, $a=1$ y $b=0$	1	Valor de "*n*", "*a*" y "*b*"	Confusión total
			$a<-1$ y $b>0$	1	Valor de "*a*" y "*b*"	Considerar que $-8>-1$ y asignar valor de "*b*" según P.I.E.O.
			$a<1$	1	Valor de "*a*"	Asignar signo de "*a*" según cuadrantes
5	15	$n=1$, $-1<a<0$ y $b>0$	$a<-1$	11	Valor de "*a*"	Considerar que -3, -4, -6, -7, $-\frac{3}{2}$, $-\frac{5}{4}$ y $-\frac{7}{4}$ son mayores que menos uno
			$a=-1$	2	Valor de "*a*"	Asignar "*a*" según α
			$0<a<1$	2	Valor de "*a*"	Asignar signo de "*a*" según α
			$a>1$	2	Valor de "*a*"	Asignar "*a*" según α
			$a=-1$ y $b=0$	1	Valor de "*a*" y "*b*"	Asignar "*a*" según α y "*b*" según P.I.E.O.

Equívocos de los alumnos en las preguntas de la segunda parte del Cuestionario dedicada al proceso gráfica $\rightarrow$ ecuación (continuación)

Nº de pregunta	Nº de gráfica	Respuesta correcta (Características de la ecuación asociada)	Respuesta dada por los estudiantes: Característica(s) incorrecta(s) de la ecuación asociada	Respuesta dada por los estudiantes: Frecuencia	Equívoco	Posible fuente de equívoco
6	36	$n = 2$, $a < -1$ y $b < 0$	$-1 < a < 0$	4	Valor de "*a*"	Considerar que $-\frac{1}{3} < -1$, $-\frac{6}{15} < -1$ y $-\frac{3}{4} < -1$
			$a > 1$	1	Valor de "*a*"	Asignar signo de "*a*" según hacia donde se abre
			$a = -1$	1	Valor de "*a*"	Asignar "*a*" según abertura
			$b = 0$	1	Valor de "*b*"	Asignar "*b*" según el vértice
			$n = 3$, $b = 0$ y $0 < a < 1$	1	Valor de "*n*", "*a*" y "*b*"	Confusión completa
7	24	$n = 2$, $0 < a < 1$ y $b > 0$	$a > 1$	4	Valor de "*a*"	Considerar que $\frac{3}{2} < 1$, $\frac{8}{2} < 1$, $\frac{7}{4} < 1$ y $\frac{9}{5} < 1$
			$a > 1$	3	Valor de "*a*"	Asignar "*a*" según abertura
			$a < -1$	1	Valor de "*a*"	Asignar "*a*" según hacia donde abre y abertura
			$a = 1$	1	Valor de "*a*"	Asignar "*a*" según abertura
			$n = 3$ y $a > 1$	1	Valor de "*n*" y "*a*"	Descuido y asignar "*a*" según abertura
			$b = 0$	1	Valor de "*b*"	Asignar "*b*" según vértice
8	18	$n = 1$, $a < -1$ y $b < 0$	$a > 1$	8	Valor de "*a*"	Asignar signo de "*a*" según cuadrantes
			$-1 < a < 0$	7	Valor de "*a*"	Considerar que $-\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{5}$, $-\frac{3}{10}$, $-\frac{2}{30}$, $-\frac{5}{6}$ y $-\frac{5}{9}$ son menores que menos uno
			$0 < a < 1$	2	Valor de "*a*"	Asignar "*a*" según α
			$a > 1$ y $b > 0$	1	Valor de "*a*" y "*b*"	Descuido. Considerar la gráfica 8 en lugar de la 18
			$b > 0$	1	Valor de "*b*"	Descuido

Equívocos de los alumnos en las preguntas de la segunda parte del Cuestionario dedicada al proceso gráfica $\rightarrow$ ecuación (continuación)

Nº de pregunta	Nº de gráfica	Respuesta correcta (Características de la ecuación asociada)	Respuesta dada por los estudiantes: Característica(s) incorrecta(s) de la ecuación asociada	Respuesta dada por los estudiantes: Frecuencia	Equívoco	Posible fuente de equívoco
9	49	$n=3$, $a=-1$ y $b>0$	$a=1$	7	Valor de "*a*"	Asignar signo de "*a*" según cuadrantes
			$a<-1$	2	Valor de "*a*"	Asignar "*a*" según abertura
			$0<a<1$	1	Valor de "*a*"	Asignar "*a*" según cuadrantes y abertura
			$-1<a<0$	1	Valor de "*a*"	Asignar "*a*" según abertura
			$-1<a<0$ y $b=0$	1	Valor de "*a*" y "*b*"	Confusión total
			$a=1$ y $b=0$	1	Valor de "*a*" y "*b*"	Asignar signo de "*a*" según cuadrantes y "*b*" según P.In.E.O.
			$n=2$	1	Valor de "*n*"	Descuido
			$n=2$ y $a=1$	1	Valor de "*n*" y "*a*"	Descuido y asignar signo de "*a*" según cuadrantes
			$b<0$	1	Valor de "*b*"	Asignar "*b*" según P.In.E.O.
10	23	$n=2$, $a=1$ y $b<0$	$0<a<1$	1	Valor de "*a*"	Asignar "*a*" según abertura
11	9	$n=1$, $a>1$ y $b<0$	$0<a<1$	8	Valor de "*a*"	Asignar "*a*" según α
			$a=1$	1	Valor de "*a*"	Asignar "*a*" según α
			$-1<a<0$ y $b>0$	1	Valor de "*a*" y "*b*"	Confusión completa
			$n=2$ y $a=1$	1	Valor de "*n*" y "*a*"	Confusión completa
			$n=3$ y $a=1$	1	Valor de "*n*" y "*a*"	Confusión completa

Equívocos de los alumnos en las preguntas de la segunda parte del Cuestionario dedicada al proceso gráfica $\rightarrow$ ecuación (continuación)

Nº de pregunta	Nº de gráfica	Respuesta correcta (Características de la ecuación asociada)	Respuesta dada por los estudiantes: Característica(s) incorrecta(s) de la ecuación asociada	Respuesta dada por los estudiantes: Frecuencia	Equívoco	Posible fuente de equívoco
12	43	$n=3$, $0<a<1$ y $b<0$	$a>1$	3	Valor de "a"	Asignar "a" según abertura
			$a<-1$	1	Valor de "a"	Asignar "a" según cuadrantes y abertura
			$-1<a<0$	1	Valor de "a"	Asignar "a" según cuadrantes y abertura
			$a=1$	1	Valor de "a"	Asignar "a" según abertura
			$n=2$ y $b>0$	1	Valor de "n" y "b"	Descuido y asignar valor de "b" según P.In.E.O.
			$n=1$	1	Valor de "n"	Descuido
13	33	$n=2$, $-1<a<0$ y $b>0$	$a<-1$	9	Valor de "a"	Considerar que -4, -6, -7, -10, $-\frac{6}{5}$, $-\frac{13}{10}$ y $-\frac{5}{2}$ son mayores que menos uno
			$0<a<1$	3	Valor de "a"	Asignar signo de "a" según hacia donde abre
			$b<0$	2	Valor de "b"	Descuido
			$a=-1$	1	Valor de "a"	Asignar "a" según abertura
14	44	$n=3$, $a>1$ y $b>0$	$0<a<1$	6	Valor de "a"	Asignar "a" según abertura
			$a<-1$	2	Valor de "a"	Asignar signo "a" según cuadrantes
			$-1<a<0$	1	Valor de "a"	Asignar "a" según cuadrantes y abertura
			$a=1$	1	Valor de "a"	Asignar "a" según abertura
			$a=1$ y $b=0$	1	Valor de "a" y "b"	Asignar "a" según abertura y "b" según P.In.E.O.
			$b=0$	1	Valor de "b"	Asignar "b" según P.In.E.O.

Equívocos de los alumnos en las preguntas de la segunda parte del Cuestionario dedicada al proceso gráfica $\rightarrow$ ecuación (continuación)

			Respuesta dada por los estudiantes			
Nº de pregunta	Nº de gráfica	Respuesta correcta (Características de la ecuación asociada)	Característica(s) incorrecta(s) de la ecuación asociada	Frecuencia	Equívoco	Posible fuente de equívoco
15	6	$n=1$, $0<a<1$ y $b>0$	$a>1$	5	Valor de "*a*"	Considerar que $\frac{5}{4}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{15}{8}$, $\frac{8}{4}$ y $\frac{10}{5}$ son menores que uno
			$a>1$	3	Valor de "*a*"	Asignar "*a*" según α
			$a<-1$	2	Valor de "*a*"	Asignar "*a*" según α
			$b<0$	2	Valor de "*b*"	Asignar "*b*" según P.I.E.O.
			$a=1$ y $b<0$	2	Valor de "*a*" y "*b*"	Confusión completa
			$a=1$	1	Valor de "*a*"	Asignar "*a*" según α
			$-1<a<0$ y $b<0$	1	Valor de "*a*" y "*b*"	Confusión en el número de gráfica. La 16 por la 6
			Sin variable independiente	1	Falta la variable independiente	Descuido

Conclusión del Instrumento dedicado a explorar el dominio de la Conversión

En términos de los resultados presentados es posible afirmar que, al parecer, la instrucción recibida por los alumnos logró promover en la mayoría de ellos (64 de 70) el dominio en la conversión de registros de representación gráfico y algebraico en funciones polinomiales elementales de la forma $y = ax^n + b$, *donde* $a, b \in \Re$, $a \neq 0$ y $n = 1, 2$ y 3.

Para los propósitos de este trabajo, se considera que los 64 estudiantes *dominan* la conversión de los registros de representación gráfico y algebraico en funciones polinomiales elementales.

2ª PARTE
RESULTADOS DEL 1ER. INSTRUMENTO DE COMPRENSIÓN

Introducción

Una vez que los estudiantes, después de un periodo de instrucción, muestran su dominio en la conversión de los registros de representación gráfico y algebraico en funciones polinomiales elementales por la vía global cualitativa, es necesario indagar, por los propósitos de la investigación que en estas páginas se reporta, cómo enfrentan alguna situación referida a la articulación de registros de representación, cuando ésta, o no se limita a las estudiadas por ellos, o la solución exige un tratamiento puntual, o un cuantitativo, o requiere una reinterpretación (un análisis) de los conocimientos adquiridos. Estas situaciones, no está por demás decirlo, en principio, son desconocidas para ellos. No fueron abordadas durante la instrucción.

Los resultados que en este apartado se reportan, están referidos a los aspectos señalados en el párrafo anterior y corresponden al denominado “1er.

Instrumento de Comprensión" bajo el título de "*Explorando diversos aspectos de la articulación de registros*".

En primera instancia, los resultados se presentan por pregunta, anexando el enunciado de la misma pero, sin la gráfica o la tabla a la que, en algunos casos, se hace referencia. En segunda, se muestran los concentrados de las respuestas de los equipos a las 17 preguntas del instrumento.

El trabajo se llevó a cabo con dieciocho equipos. Aleatoriamente se les asignó un número del uno al dieciocho y la referencia a ellos es por dicho número.

RESULTADOS POR PREGUNTA

Con la intención de evitar repeticiones, antes de iniciar con la presentación de los resultados, cabe señalar que, según los supuestos que se aceptan en este trabajo (ver Capítulo 2), por un lado, se comparte la posición de Zawojewski, Lesh y English (2003) en el sentido de que *la atención está centrada en lo que el equipo produce, al margen de logros personales de sus integrantes*. Por otro, se acepta la posición de Hiebert y Carpenter (1992) en torno a la comprensión y *se extiende al trabajo en equipo*. Por lo que, cuando se cita a Hiebert y Carpenter al momento de hacer algún comentario en torno a las respuestas de los equipos, nos estamos refiriendo a la *extensión de la posición de dichos autores*. Finalmente, basados en las afirmaciones de Hiebert y Carpenter (1992) en el sentido de que: conexiones entre representaciones externas pueden estimular conexiones entre las correspondientes representaciones internas y que la forma en la cual los estudiantes tratan con o generan representaciones externas revela algo de cómo ellos tienen representada esa información internamente, cuando en la exposición de los resultados se hace referencia a las conexiones que establecen los equipos al emitir su respuesta nos estamos refiriendo, en primer término, a las conexiones entre las representaciones externas y en segundo, *se está suponiendo* que esas conexiones también se han llevado a cabo entre las correspondientes representaciones internas.

Los resultados de las Preguntas 1 y 2 se presentan desde dos perspectivas. En la primera, las respuestas clasificadas por correcta, imprecisa o incorrecta. En la segunda, cuántos y cuáles son los registros de representación utilizados en el proceso seguido para encontrar la respuesta. Al mismo tiempo, se indica la respuesta emitida por los equipos así como una breve descripción del procedimiento seguido por ellos o bien, la respuesta de algún equipo a fin de ilustrar su proceder. Además, en algunas ocasiones, se hacen algunos comentarios.

PREGUNTA 1: ¿Cuáles son las coordenadas del punto de intersección con el eje de las abscisas de la gráfica asociada a la ecuación $y = 2x - 8$?

Correctas, 14 equipos: el 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 17 y el 18.

Un registro de representación, cinco equipos: el 2, 4, 12, 14 y el 17.

Registro utilizado: Algebraico.

Respuesta: (4,0)

Procedimiento: A continuación se transcribe el trabajo del equipo 2 para ilustrar el proceder de los cinco equipos de este bloque.

$$0 = 2x - 8$$
$$8 = 2x$$
$$\frac{8}{2} = x$$
$$x = 4$$

Cuando se quiere obtener el PiE.O. [punto de intersección con el eje de las ordenadas] *x* toma valor de “0” entonces cuando se quiere obtener la pareja ordenada asociada al PiE.A. [punto de intersección con el eje de las abscisas] *y* será la que tome valor de “0”

Dos registros de representación, ocho equipos: el 1, 5, 6, 7, 10, 13, 15 y el 18.

Registros utilizados: Tabular y gráfico, siete equipos: el 1, 5, 6, 7, 10, 15 y el 18.

Tabular y algebraico, un equipo: el 13.

Respuesta: (4,0).

Procedimiento: Dos de los siete equipos que utilizan los registros tabular y gráfico, inician llevando a cabo la tabulación correspondiente y en ella está incluido el P.I.E.A. Es decir, uno de los valores que le asignan a *x* es cuatro. Posteriormente grafican la recta y ratifican, gráficamente, su respuesta. Los cinco equipos restantes, tabulan de -3 a 3, grafican y, es con su trabajo en el registro gráfico que determinan las coordenadas del P.I.E.A.

El equipo 13, quien trabaja con los registros tabular y algebraico, por la vía de la tabulación encuentra las coordenadas del P.I.E.A. y posteriormente las ratifica llevando a cabo un tratamiento en el registro algebraico. Éste, en el mismo sentido al ilustrado renglones arriba.

Tres registros de representación, un equipo: el 9.

Registros utilizados: Tabular, gráfico y algebraico.

Respuesta: (4,0).

Procedimiento: Tabulan de -3 a 3, grafican, encuentran las coordenadas del P.I.E.A. al trabajar sobre el registro gráfico y posteriormente, ratifican dicho resultado al realizar el tratamiento necesario en la ecuación.

Comentarios: Estos resultados muestran que la mayoría de los equipos (14 de 18) abordan un "problema puntal" exitosamente. Además, que la respuesta de nueve de los 14 equipos se haya emitido en más de un registro de representación, nos indica que los equipos son capaces de enfrentar una situación desde varias perspectivas, sin incurrir en un encasillamiento de los registro de representación, el cual, como señala Duval (1998), se puede observar en todos los niveles en la gran mayoría de los alumnos.

Por otra parte, en torno a las conexiones entre formas de representación, es posible afirmar que los 14 equipos las establecen al dar respuesta a la pregunta. Por ejemplo, los que utilizan el registro algebraico, las llevan a cabo entre ese registro y el gráfico.

Los 14 equipos hacen uso de la conexión cartesiana, la cual, para Moschkovich, Schoenfeld y Arcavi (1993), es el elemento fundamental en las representaciones tabular, algebraica y gráfica. Finalmente, es posible decir que los equipos que utilizan el registro gráfico en el proceso de solución, enfrentaron, al parecen sin mayor problema, la gráfica de la función desde la perspectiva proceso (según la acepción de Moschkovich, Schoenfeld y Arcavi, 1993, le asignan al término), lo cual difiere de lo observado por Knuth (2000).

Imprecisas, dos equipos: el 3 y el 16.

Un registro de representación, dos equipos: el 3 y el 16.

Registro utilizado: Algebraico. Equipo 3.

Respuesta: (c,0), donde 0 < c < 3.

Procedimiento: Analizan el valor de los parámetros “*a*” y “*b*” y establecen la condición para “c”.

Comentarios: La respuesta es, prácticamente, de corte global cualitativo y las conexiones que llevan a cabo las realizan entre el registro de representación gráfico y algebraico.

Registro utilizado: Gráfico. Equipo 16.

Respuesta: ($a > 0$, 0).

Procedimiento: Bosquejan la gráfica de la ecuación y visualmente establecen que la abscisa del punto requerido (la cual representan por "a") es mayor que cero.

Comentarios: Este equipo no abandona el enfoque global cualitativo y establecen conexiones entre la representación gráfica y algebraica de la función en cuestión.

Incorrectas, dos equipos: el 8 y el 11.

Dos registros de representación, dos equipos: el 8 y el 11.

Registros utilizados: Gráfico y algebraico.

Respuesta: (2,0).

Procedimiento: Bosquejan la gráfica y consideran que el valor del parámetro "a" es la abscisa del punto solicitado.

Comentarios: Estos dos equipos no abandonan el enfoque global. Además, le asignan un "nuevo" significado geométrico al parámetro "a": la abscisa del punto de intersección de la recta con el eje de las abscisas.

Este "nuevo" significado geométrico del parámetro "a" también es asignado por algunos de los sujetos con los que Moschkovich (1999) trabajó. Este hecho, ella lo considera, y en este trabajo así se asume, como un caso de concepción transitoria.

PREGUNTA 2: A continuación se muestra la gráfica asociada a la ecuación $y = 3x - 6$. ¿El punto con coordenadas (4,10) pertenece a la gráfica asociada a dicha ecuación?

Correctas, 18 equipos: todos los equipos.

Un registro de representación, 16 equipos: el 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 y el 18.

Registro utilizado: Gráfico. 14 equipos: el 1, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 y el 18.

Respuesta: No.

Procedimiento: Todos estos equipos localizan el punto (4,10). Los equipos 1 y 14 utilizan la definición de función para argumentar su respuesta. Por ejemplo, el equipo 14 afirma: "*a 4 ya se le asoció un elemento del Rango [el elemento al que se refieren es el 6] Si se le asocia otro ya no hay función*". El resto de los 14 equipos (12), justifican su respuesta afirmando que dicho punto no está en (o está fuera de) la gráfica asociada a la ecuación $y = 3x - 6$.

Comentario: La visualización es, fundamentalmente, el recurso que utilizan estos últimos 12 equipos para emitir su respuesta. Al parecer, estos resultados permiten suponer que la mayoría de los equipos "piensan visualmente". Esto difiere de lo sostenido por Eisenberg y Dreyfus (1991): "los estudiantes tienen una fuerte tendencia a pensar algebraicamente en lugar de visualmente. Además esto es así aún si ellos son presionados explícita y fuertemente hacia un procedimiento visual" (p. 29).

Registro utilizado: Algebraico. Un equipo: el 2.

Respuesta: No pertenece.

Procedimiento: A continuación se transcribe el proceder de este equipo.

$$10 = 3(4) - 6$$
$$10 = 12 - 6$$
$$10 \neq 6$$

la pareja ordenada (4,10) no satisface las condiciones de la igualdad

Comentario: *Para contestar esta pregunta, el equipo 2 hace uso de la conexión cartesiana (Moschkovich, Schoenfeld y Arcavi, 1993).*

Registro utilizado: Tabular. Un equipo: el 17.

Respuesta: No.

Procedimiento: Hacen la tabulación correspondiente (incluyendo el valor de x = 4). El punto (4,10) "no está" en la tabulación. Por lo tanto, dicho punto no pertenece a la gráfica.

Comentario: *La conexión cartesiana vuelve a hacer acto de presencia en el proceder de este equipo.*

Dos registros de representación, dos equipos: el 7 y el 9.

Registros utilizados: Gráfico y tabular.

Respuesta: No.

Procedimiento: Por un lado, localizan el punto y *visualmente* "comprueban" que dicho punto no está en la gráfica. Por otro, llevan a cabo la tabulación y exhiben que (4,10) no está en ella.

Comentarios: Fundamentalmente, los dos recursos que utilizan estos equipos son: la visualización y la conexión cartesiana.

A continuación se presentan las respuestas a las preguntas 3, 4, 5 y 6. El propósito fundamental de este bloque es explorar qué significado geométrico le asignan los estudiantes a los parámetros "*a, b* y *c*" cuando se les solicita el bosquejo de la gráfica asociada a ecuaciones de la forma $y = a(x+b)^2 + c$ (preguntas 3 y 4) y de la forma $y = ax^2 + bx + c$ (preguntas 5 y 6). Es decir, se está interesado en explorar qué conexiones establecen los equipos entre el registro de representación gráfico y algebraico cuando se les presentan funciones de las formas antes citadas.

Bajo el entendido de que la gráfica asociada a cada una de las ecuaciones en cuestión es una parábola, y desde la perspectiva del *rol* que los estudiantes le asignan a los parámetros (i.e. las conexiones que establecen entre la representación algebraica y gráfica), las respuestas *incorrectas* se presentan clasificadas por grupos. La clasificación, en algunas ocasiones, prácticamente, hace caso omiso de los equívocos generados por un *deficiente tratamiento* en el *registro algebraico*.

En relación a la pregunta 3, algunos equipos trabajan con la forma $y = a(x+b)^2 + c$ que es la forma en la que se da la ecuación en el enunciado. Otros, desarrollan el binomio y reducen. Por tal razón, al presentar los resultados de esta pregunta se especifica la forma con la que trabajan los equipos.

PREGUNTA 3: Bosquejen la gráfica asociada a la ecuación $y = -3(x-2)^2 + 4$.

Correctas, tres equipos: el 1, 4 y el 14.

Respuesta: Bosquejan una parábola que se abre hacia abajo, "cerrada" con vértice en (2,4).

Procedimiento: Trabajan con la forma $y = a(x+b)^2 + c$. Tabulan algunos puntos y a partir de ellos, bosquejan la gráfica. Infieren el rol de "*b*" y ratifican el de "*a*" y "*c*".

Rol de los parámetros: La interpretación geométrica que hacen de los parámetros "*a*", "*b*" y "*c*", naturalmente, es correcta.

Comentarios: Por la información registrada en las notas del investigador, se puede decir, que estos tres equipos, al enfrentarse a una nueva forma de ecuación, recurren a la tabulación, más que para graficar, para "ver cómo va la gráfica" e inferir el rol de "b"; en virtud de que ellos consideran que la gráfica asociada es una parábola por el exponente dos, que abre hacia abajo y es "cerrada" por el valor de "a" y que se desplaza hacia arriba cuatro unidades por el valor de "c". En relación a "b", suponen que desplaza la parábola a la derecha o a la izquierda pero no saben hacia dónde se desplaza cuando "b" es negativa.

El procedimiento que llevan a cabo estos equipos, muestra que los estudiantes construyen conexiones entre las tres representaciones que utilizan al dar respuesta a la pregunta: tabular gráfica y algebraica.

Además, el proceder de estos equipos (y adelantándonos un poco a los resultados, el de otros equipos más) proporciona elementos para suponer que los estudiantes aplican los contenidos que estudiaron con flexibilidad y habilidad. Esto a decir de Schoenfeld (1992) es uno de los objetivos para la instrucción matemática.

***Incorrectas, 15 equipos*:** el 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17 y el 18.

Como se anticipó, las respuestas incorrectas se presentan clasificadas en grupos, dependiendo, fundamentalmente, del rol que le asignen a los parámetros (i.e. las conexiones que establezcan entre la representación algebraica y gráfica), principalmente al parámetro "*b*", dejando un tanto al margen los equívocos en los que incurren cuando llevan a cabo un tratamiento algebraico.

Grupo 1. Conformado por los equipos 6, 12, 13 y 18. Trabajan con la forma $y = a(x+b)^2 + c$.

Respuesta: Bosquejan una parábola que abre hacia abajo, "cerrada" desplazada hacia la *izquierda* y hacia arriba. Los equipos 6, 12 y 18 le asignan al vértice las coordenadas (-2,4) y el 13, (-4,4).

Procedimiento: Analizan la ecuación, determinan el rol de los parámetros y bosquejan directamente. Es decir, no tabulan.

Rol de los parámetros: "*a*" y "*c*", bien. La interpretación geométrica que hacen de "*b*" es parcialmente correcta. Efectivamente "*b*" determina el desplazamiento de la parábola a la derecha o a la izquierda. Sin embargo, ellos consideran que, si $b < 0$, la parábola se *desplaza hacia la izquierda* tantas unidades como él lo indica (equipos 6, 12 y 18) o $-b^2$ (equipo 13).

Comentarios: Al parecer los equipos del Grupo 1 identifican que la forma de la ecuación con la que se enfrentan en esta ocasión, es una variación o modificación *de aquella con la que ellos han trabajado. Por esta razón,* aplican *lo aprendido para la forma* $y = ax^2 + b$ *a la forma* $y = a(x+b)^2 + c$ *, asignando un significado geométrico a los elementos de la nueva ecuación, a la luz de sus conocimientos anteriores. En otras palabras, al establecer las conexiones entre la representación gráfica y algebraica, los equipos transfieren lo aprendido en aquella situación a ésta.*

El hecho de que la respuesta de estos equipos esté catalogada como incorrecta (porque de hecho lo es), no implica que en estas páginas el significado geométrico que los equipos le asignan al parámetro "b" se considere como un error. Más bien, es interpretado como una "concepción transitoria", en el sentido que Moschkovich (1999) le asigna al término.

Por otro lado, los resultados aportan elementos para conjeturar que los estudiantes:

1. *Abordan el problema con un enfoque global cualitativo.*
2. *Consideran que modificaciones en la ecuación implican modificaciones en la gráfica asociada.*
3. *Conciben que la modificación en la ecuación es un nuevo término "asociado o relacionado directamente" con la variable "x" por lo que la gráfica se modificará en algo relacionado con "x": el desplazamiento en el eje de las abscisas.*
4. *Suponen que el comportamiento del parámetro "b" es similar al de "c": si b > 0, la gráfica se desplaza hacia la parte positiva del eje de las abscisas; y si b < 0, se desplaza hacia la parte negativa de dicho eje.*

5. *Son capaces de hacer tratamientos con la parábola. Es decir, logran aceptar, aparentemente, sin mayor problema, que una parábola no sólo se puede desplazar hacia arriba o hacia abajo (como ellos lo habían trabajado) sino que también se pueden desplazar hacia la derecha o izquierda e inclusive combinar los desplazamientos. Por ejemplo, hacia la derecha y hacia arriba tal como ellos consideran la gráfica de la pregunta que ahora nos ocupa.*

6. *Enfrentan el problema referido a la función cuadrática, planteado en la pregunta 3, desde la perspectiva objeto (Moschkovich, Schoenfeld y Arcavi, 1993), tanto en su representación algebraica como gráfica.*

Grupo 2. Incluye los equipos 2 y 3. Trabajan con la forma $y = ax^2 + bx + c$.

Respuesta: Bosquejan una parábola que abre hacia abajo, "cerrada" y desplazada. El equipo 2 la desplaza a la izquierda y hacia abajo con vértice en (-12,-15); el 3, a la derecha y hacia abajo con vértice en (12,-8).

Procedimiento: Desarrollan el binomio. En este proceso, el equipo 2 comete equívocos y el equipo tres no. Las ecuaciones que obtienen son: $y = -3x^2 - 12x - 15$ e $y = -3x^2 + 12x - 8$, respectivamente. Determinan el rol de los parámetros y bosquejan directamente.

Rol de los parámetros: "*a*", bien. Si *b* > 0, la parábola se *desplaza a la derecha* tantas unidades como él lo indique (equipo 3). Si *b* < 0, se *desplaza a la izquierda* tantas unidades como él lo indique (equipo

2). "*c*" determina cuánto se desplaza la parábola hacia arriba o hacia abajo. Como en este caso, $c < 0$, se *desplaza hacia abajo*.

Comentarios: Por un lado, al parecer, estos equipos "sienten la necesidad" de desarrollar el binomio a fin de expresar la ecuación en una forma "más parecida" a la que ellos conocen y así poder aplicar (i.e. transferir) lo que saben e inferir el rol del nuevo parámetro. Por otro, prácticamente todos los comentarios que se hicieron para el Grupo 1, son válidos para este grupo.

Grupo 3: El único equipo que pertenece a este Grupo es el 10. Este equipo trabaja con la forma $y = ax^2 + bx + c$.

Respuesta: Bosquejan una parábola que se abre hacia arriba, "cerrada", con vértice en (0,-8) y con puntos de intersección en el eje de las abscisas (-3,0) y (4,0).

Procedimiento: Desarrollan incorrectamente el binomio, lo multiplican por "3" en lugar de "-3" (valor correcto de "*a*"), reducen y obtienen la ecuación $y = 3x^2 - 12x - 8$. Interpretan geométricamente los parámetros y bosquejan directamente.

Rol de los parámetros: Al margen de la equivocación del signo de "*a*", la interpretación geométrica que hacen de dicho parámetro es correcta. Para el equipo de este grupo, "*b*" determina los puntos de intersección de la parábola con el eje de las abscisas: el producto de las abscisas de dichos puntos debe ser igual a "*b*". "*c*" indica el desplazamiento de la gráfica sobre el eje de las ordenadas y por ende, las coordenadas del vértice.

Comentarios: Salvo por la interpretación geométrica que este equipo hace del parámetro "b", el resto de los comentarios hechos para el Grupo 1 son válidos para este grupo.

Grupo 4. Contiene a los equipos 5 y 11. El equipo 5 trabaja con la forma $y = a(x+b)^2 + c$, y el equipo 11 con $y = ax^2 + bx + c$.

Respuesta: Bosquejan una parábola que se abre hacia abajo, "cerrada", desplazada hacia la derecha y hacia abajo. Las coordenadas que le asigna el equipo 5 al vértice son (4,-2) y el 11, (4,-12).

Procedimiento: El equipo 5 analiza la ecuación en la forma antes descrita, dan una interpretación geométrica a los parámetros y bosquejan directamente. El 11, desarrolla incorrectamente el binomio, reduce términos semejantes, obtiene la ecuación $y = -3x^2 - 12x + 4$, asigna un significado geométrico a los parámetros y bosquejan directamente.

Rol de los parámetros: La interpretación geométrica que hacen estos dos equipos del parámetro "*a*" es la adecuada. Sin embargo, al margen de la forma de la ecuación con la que trabajan, consideran que "*b*" *determina el desplazamiento en el eje de las ordenadas* y "*c*", *el desplazamiento en el eje de las abscisas*.

Comentarios: Al parecer, estos equipos asumen que la función del parámetro está determinada por la representación de éste. Es decir, ellos aprendieron que "b" determina el desplazamiento de la gráfica sobre el eje de las ordenadas o más específicamente, hacia arriba o hacia abajo. Por esta razón, en la nueva ecuación, a "b" le siguen asignando el mismo rol, independientemente de la forma de la ecuación, y al nuevo parámetro "c" le atribuyen el desplazamiento de la gráfica a derecha o izquierda. Salvo por esta interpretación que hacen los equipos 5 y 11 de los parámetros "b" y "c", los otros comentarios que se anotaron para el Grupo 1, son válidos para este Grupo 4.

Grupo 5: Formado por los equipos 7 y 8. El siete, trabaja con la forma $y = ax^2 + bx + c$; y el ocho con $y = a(x+b)^2 + c$.

Respuesta: *Recta* que pasa por los Cuadrantes I, III y IV.

Procedimiento: El equipo 7 desarrolla correctamente el binomio, reduce bien, tabula, correctamente, de -2 a 2 y grafica una recta. El 8, trabaja con la forma antes citada, tabula de -3 a 3, y hacen el bosquejo de una recta.

Rol de los parámetros: Por el procedimiento que estos equipos utilizan para contestar la pregunta, no es posible interpretar el significado geométrico que le asignan a los parámetros.

Comentarios: Por el procedimiento utilizado por estos dos equipos y por la respuesta emitida, parece ser que no reconocen que la ecuación a la que se enfrentan en la pregunta tres es una modificación a una de las ecuaciones (o forma de ecuación) *estudiadas por ellos. Es decir, no perciben que la nueva ecuación es "parecida" a la de la parábola, por el exponente dos, y que por esta razón, tal vez, la gráfica asociada sea una parábola. De tal manera que, ante esta situación "completamente distinta", es necesario empezar "desde el principio": tabulando. Por los valores que le asignan en la tabulación a la variable independiente, los que les resultan de la variable dependiente y el sistema de coordenadas que construyen para graficar (o bosquejar) lo que obtienen es la rama izquierda de la parábola que confunden con una recta. Todo esto aporta elementos para suponer que estos dos equipos no transfieren lo aprendido.*

Grupo 6: Conformado por los equipos 9, 15, 16 y 17.

Respuesta: Bosquejan una parábola que se abre hacia abajo, "cerrada" con vértice en (0,8), los equipos 9 y 16, y vértice (0,-8), los equipos 15 y 17.

Procedimiento: Desarrollan incorrectamente el binomio: consideran que $(x-b)^2 = x^2 + b^2$. Por esta razón, obtienen una ecuación de la forma $y = ax^2 + b$. La ecuación de los equipos 15 y 17 es $y = -3x^2 - 8$, y la de los equipos 9 y 16 (quienes incurren en otro tipo de equívoco, además del señalado), $y = -3x^2 + 8$. Bosquejan correctamente, según la forma anterior.

Rol de los parámetros: Juzgado a la luz de la ecuación con la que estos equipos trabajaron, la interpretación geométrica de los parámetros es adecuada.

Comentarios: Al parecer los equipos de este Grupo, al igual que los de los otros Grupos, identifican que la forma de la ecuación con la que se enfrentan en esta ocasión, es una variación o modificación *de la que ellos han trabajado. Pero que, al operar algebraicamente, aquella se reduce a la forma que han estudiado:* $y = ax^2 + b$*. El deficiente tratamiento algebraico que llevan a cabo los cuatro equipos, prácticamente impide obtener alguna información en relación a los aspectos que se desean explorar: el rol de los parámetros "a", "b" y "c".*

PREGUNTA 4: Bosquejen la gráfica asociada a la ecuación $y = 2(x+5)^2$.

Resultados: Prácticamente, el desempeño de los 18 equipos en esta pregunta es completamente similar al que tuvieron en la Pregunta 3. Es decir, sus respuestas a la Pregunta 4, las emiten utilizando el mismo procedimiento que en la 3. Los únicos cambios que se presentan son:

1. El bloque de los equipos que contestan correctamente, se incrementa en dos: el 12 y el 13. Éstos proceden de la misma forma que los equipos 1, 4 y 14 en la pregunta tres.

2. En esta ocasión, los equipos 1, 4 y 14, quienes nuevamente dan una respuesta correcta, ya no tabulan. En base a la respuesta de la 3, contestan la 4.

3. El Grupo 1, de respuestas incorrectas, se ve disminuido, por la razón antes expuesta, en los equipos 12 y 13.

Comentarios: Lo anterior nos indica que, salvo los equipos 12 y 13, el resto de los equipos son consistentes al emitir sus respuestas. En consecuencia, los comentarios que en su momento se hicieron para la pregunta anterior, también son válidos para ésta. Además, que algunos equipos contesten esta pregunta en base a la anterior, es posible interpretarlo como una muestra (algunas otras se presentan a lo largo de las páginas dedicadas a los resultados de este 1er. Instrumento de Comprensión) de la confianza de los alumnos en su "habilidad" de hacer matemáticas. Esto es otro de los objetivos para la instrucción matemática señalados por Schoenfeld (1992).

PREGUNTA 5: Bosquejen la gráfica asociada a la ecuación $y = x^2 - 3x$.

Correctas, un equipo: el 14.

Respuesta: Bosquejan una parábola que se abre hacia arriba, "normal" con vértice en $\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$.

Procedimiento: Tabulan algunos puntos y a partir de ellos, bosquejan la gráfica. En la tabulación encuentran los puntos de intersección de la parábola con el eje de las abscisas. Deducen la abscisa del vértice y encuentran la ordenada del mismo.

Rol de los parámetros: Por el procedimiento utilizado para dar respuesta a la pregunta, en esta ocasión, no existen elementos que permitan vislumbrar claramente el rol que le asignan a los parámetros "*b*" y "*c*". Lo más que se observa es que ratifican el de “a”.

Comentarios: Consistente con el procedimiento seguido en la Pregunta 3, este equipo al enfrentarse, nuevamente, a una nueva forma de ecuación, recurre a la tabulación, más que para graficar, para “ver cómo va la gráfica”; en virtud de que ellos consideran (o transfieren) que la gráfica asociada es una parábola por el exponente dos, que abre hacia arriba y es “normal” por el valor de “a”. Establecen conexiones entre la representación tabular, algebraica y gráfica. Hacen uso de la conexión cartesiana y enfrentan la representación gráfica desde la perspectiva proceso.

***Incorrectas, 16 equipos*:** el 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17 y el 18.

En esta pregunta, las respuestas incorrectas se presentan clasificadas en cuatro grupos.

Grupo 1. Conformado por los equipos 2, 3, 8, 9, 10 y 12.

Respuesta: Bosquejan una parábola que abre hacia arriba, “normal” y desplazada hacia la *izquierda*. Los equipos 2, 3 y 10 le asignan al vértice las coordenadas (-3,0) y los restantes, no anotan explícitamente dichas coordenadas.

Procedimiento: Analizan la ecuación, determinan el rol de los parámetros y bosquejan directamente.

Rol de los parámetros: “a”, bien. Consideran que cuando $b < 0$, la parábola se *desplaza hacia la izquierda* tantas unidades como él lo indica; y cuando $c = 0$, la parábola *no sube ni baja*.

Comentarios: Nuevamente se observa que los equipos tratan de darle significado a los parámetros de la nueva ecuación a la luz de sus conocimientos anteriores. De tal manera que para ellos, "b" determina el desplazamiento de la gráfica hacia derecha (b > 0) o izquierda (b < 0) y "c", hacia arriba (c > 0), hacia abajo (c < 0) o no sube ni baja (c = 0).

Grupo 2: Equipos 7 y 13.

Respuesta: Bosquejan una parábola que se abre hacia arriba, "normal", con vértice en (0,-3).

Procedimiento: Analizan la ecuación y bosquejan directamente.

Rol de los parámetros: "*a*" bien; "*b*", desplazamiento de la parábola hacia arriba o hacia abajo y "*c*", hacia derecha o izquierda.

Comentarios: Al igual que los equipos del Grupo 4 de la Pregunta 3, aparentemente, estos equipos mantienen rígido el rol de "b": el desplazamiento de la gráfica hacia arriba o hacia abajo.

Grupo 3: Equipo 18.

Respuesta: Bosquejan "algo" parecido a una parábola que se abre hacia arriba, "normal", la "rama izquierda" es un segmento de recta y se prolonga un poco más del punto con coordenadas (-3,18) y la rama derecha termina, prácticamente, en el punto (3,0). O como dicen ellos:

> La ecuación contiene dos tipos de gráficas (recta y parábola) pero al unirlos forman una sola figura.
> de (3,0) a (0,0) está la parábola
> de (-3,18) a (1,-2) está la recta.

Procedimiento: Tabulan algunos puntos y proceden al bosquejo según lo señalado arriba.

Rol de los parámetros: Eclipsado por el procedimiento.

Comentarios: Visualizar la ecuación $y = x^2 - 3x$ *como una función por partes y establecer el dominio de cada una de ellas, nos habla de la necesidad que sienten los estudiantes de darle sentido a su quehacer matemático y de la flexibilidad de pensamiento que tienen para enfrentar los problemas por diferentes vías.*

Grupo 4: Conformado por los equipos 4, 5, 6, 11, 15, 16 y 17.

Respuesta: Bosquejan una parábola cúbica con punto de inflexión en el eje de las ordenadas.

Procedimiento: Reducen incorrectamente la ecuación y obtienen una de la forma $y = ax^3 + b$. Bosquejan bien, según ecuación obtenida.

Rol de los parámetros: El deficiente tratamiento algebraico obstaculiza completamente alguna observación que se pueda llevar a cabo en relación a este rubro.

***Inconclusa, un equipo*:** el 1.

Procedimiento: Tabulan mal la ecuación original. Bosquejan en base a la tabulación y obtienen una gráfica con tres raíces. Por otro lado, “simplifican” la ecuación y obtienen la de una recta ($y = -2x$). Ante dos gráficas completamente distintas *no* llegan a una conclusión.

PREGUNTA 6: Bosquejen la gráfica asociada a la ecuación $y = -x^2 + 6x - 5$.

Resultados: 15 de los 18 equipos, enfrentan el problema planteado en esta pregunta, prácticamente, de la misma manera que la anterior. Por esta razón, las respuestas a esta pregunta se encuentran clasificadas en correctas (equipo 14), inconclusas (equipo 1) e incorrectas (el resto de los equipos). Las incorrectas se aglutinan en siete grupos. Los cuatro primeros son los mismos que los de la Pregunta 3 y casi con los mismos miembros. Los otros tres grupos son generados por los únicos tres equipos que cambian de grupo: el 7, el 10 y el 12. Uno para cada uno. A continuación se describen los grupos 5, 6 y 7.

Grupo 5: Constituido por el equipo 7.

Respuesta: Bosquejan una recta que pasa por los Cuadrantes II, III y IV.

Procedimiento: Basados en las respuestas de la pregunta 3 y 4, donde tabularon y graficaron una recta, los miembros de este equipo infieren el bosquejo.

Rol de los parámetros: El signo de "*a*" determina los cuadrantes por los que necesariamente pasa la recta y "*c*" el desplazamiento de la gráfica en el eje de las ordenadas. De "*b*", no se tiene información alguna.

Comentarios: Prácticamente los mismos que los de las dos preguntas anteriores. Salvo que en esta ocasión, utilizan "el saber" que les proporcionaron las preguntas 3 y 4.

Grupo 6: Conformado por el equipo 10.

Respuesta: Bosquejan una parábola que abre hacia arriba, con puntos de intersección en el eje de las abscisas (2,0) y (3,0) y con vértice en (2.5, -5).

Procedimiento: Analizan la ecuación, interpretan geométricamente los parámetros, encuentran la abscisa del vértice y bosquejan.

Rol de los parámetros: En esta ocasión, no hacen explícito el rol de “*a*” aunque al parecer, lo consideran positivo en lugar de negativo. En relación a “*b*”, suponen que es el producto de las abscisas de los puntos de intersección de la parábola con el eje de las abscisas: 6 = 2x3. Es decir, “*b*” es el producto de las raíces (término que no se trabajó en la instrucción). “*c*” lo asocian con el desplazamiento de la gráfica hacia arriba o hacia abajo. En este caso, como “*c* = -5” , la parábola se desplaza cinco unidades hacia abajo.

Comentarios. En su proceder y su respuesta se observa consistencia con lo hecho en la pregunta 3 y 4. Por lo que, los comentarios señalados en aquel momento, siguen siendo válidos para éste.

Grupo 7: Integrado por el equipo 12.

Respuesta: Bosquejan una parábola que abre hacia abajo, “normal”, con vértice en (3,16).

Procedimiento: Operan algebraicamente con la ecuación $y = -x^2 + 6x - 5$. Aunque con algunos equívocos (el valor de “*c*” y la ausencia de la variable “*y*”), la expresan en la forma $y = a(x+b)^2 + c$ y obtienen la "ecuación" $-(x-3)^2+16$. En base a ésta, realizan, adecuadamente, el bosquejo con el mismo procedimiento que en la pregunta 4.

Rol de los parámetros: En la forma en la que trabajaron ($y=a(x+b)^2+c$), la interpretación geométrica que hacen de "*a*", "*b*" y "*c*" es correcta (al margen de que el valor de "c" sea incorrecto) e igual a la que asumieron en la pregunta 4; sólo que en este caso, $c \neq 0$.

Comentarios: De los 18 equipos, el 12 es el único que opera algebraicamente para pasar de la forma $y=ax^2+bx+c$ a la forma $y=a(x+b)^2+c$ y así dar respuesta a la pregunta planteada. Esto muestra que, en primer lugar, este equipo establece conexiones entre la misma forma de representación (algebraica) y posteriormente, entre formas de representación (algebraica y gráfica).

Por otra parte, al margen de las fallas en el tratamiento algebraico en las que incurre este equipo al establecer el valor de "c", su proceder es por demás interesante: cambiar de forma de ecuación para aplicar "el saber matemático que construyeron" al dar respuesta a la Pregunta 4, nos habla de la confianza que siente el equipo en su "habilidad" para hacer matemáticas. Lo cual, como se ha señalado en otras ocasiones, es uno de los objetivos, señalados por Schoenfeld (1992), para la instrucción matemática

PREGUNTA 7: Se les presenta el bosquejo de una parábola que abre hacia arriba, "normal", con vértice en (-2,-1) y se les pregunta, "¿Cuál es la ecuación asociada?".

Resultados: En términos generales, las conexiones que establecieron los equipos entre la representación algebraica y gráfica, es decir, la interpretación geométrica que hicieron de los parámetros "*a*", "*b*" y "*c*" en las preguntas 3, 4, 5 y 6 (referidas al proceso ecuación $\rightarrow$ gráfica) la ratifican al considerar como válidas, en esta pregunta 7 (proceso gráfica $\rightarrow$ ecuación), las recíprocas de las condicionales que de hecho trabajaron en las cuatro preguntas anteriores. Esto, al margen de que su respuesta sea una ecuación de la forma $y = a(x+b)^2 + c$ o de la forma $y = ax^2 + bx + c$.

Dos equipos (el 4 y el 14) asocian correctamente la ecuación $y = (x+2)^2 - 1$ a la gráfica dada. El 2, admite: "Estamos confundidos y el equipo no encontró una respuesta que lo convenciera". Las respuestas incorrectas de los 15 restantes, se dividen en dos grandes grupos:

1er. Grupo: Aglutina a los equipos 1, 5, 6, 11, 12, 15, 16, 17 y 18 cuya respuesta es una ecuación de la forma $y = a(x+b)^2 + c$.

Tomando en cuenta la forma en la cual los equipos "traducen" de la representación geométrica a la algebraica las coordenadas del vértice, es posible dividir este grupo en dos subgrupos:

I. Quienes consideran que la abscisa del vértice (-2) es el valor de "*b*" (equipos 1, 6, 16 y 18) o el de "-*b*" (equipo 12) y la ordenada (-1), el valor de "*c*".

II. Los que asocian la abscisa del vértice (-2) con el valor de "*c*" (equipos 5, 11, 15 y 17) y la ordenada (-1), con el de "*b*".

2º Grupo: Integra a los equipos 3, 7, 8, 9, 10 y 13. La respuesta de éstos es una ecuación de la forma $y = ax^2 + bx + c$.

Al igual que en el grupo anterior, en éste se distinguen dos grandes subgrupos:

I. Los que "traducen" la abscisa del vértice (-2) en el valor de "*b*" (equipos 3, 7 y 8), en el de "-*b*" (equipo 9) o que el cuadrado de la abscisa es "*b*" (equipo 10). Los cinco equipos asocian la ordenada (-1), en el valor de "*c*".

II. Los que asocian la abscisa del vértice (-2) con el valor de "*c*" y la ordenada (-1), con el de "*b*" (equipo 13).

A excepción del equipo 2, quien emite una respuesta inconclusa, todos los demás equipos, independientemente de la forma de la ecuación utilizada en la respuesta, relacionan la abertura de la parábola y hacia dónde abre con el valor de $a = 1$.

Comentarios: Al igual que en el proceso ecuación $\rightarrow$ gráfica, en las respuestas incorrectas a esta pregunta, los equipos muestran dos concepciones transitorias. La primera de ellas, manifestada por todos los equipos que contestan incorrectamente, es asociar la abscisa del vértice con el valor del parámetro "b". La segunda, exhibida por los equipos que emiten su respuesta en la forma $y = ax^2 + bx + c$, es establecer la conexión entre la ordenada del vértice y el valor del parámetro "c".

Los resultados de esta pregunta ponen de manifiesto que dos tercios de los equipos (12 de 18) dan su respuesta en la forma $y = a(x+b)^2 + c$. Esta inclinación puede interpretarse como que los estudiantes consideran dicha forma "más cercana" o "más parecida" a aquella que ellos han estudiado, lo cual puede ayudar al diseño de actividades de una instrucción que pretenda el estudio de las parábolas desplazadas a derecha o izquierda y/o arriba o abajo.

PREGUNTA 8: El bosquejo de la gráfica asociada a la ecuación $y = x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 24x$ se presenta a continuación. ¿Cuál es el bosquejo de la gráfica asociada a la ecuación $y = x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 24x + 5$?

Resultados: Aparentemente sin mayor dificultad, los equipos 1, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17 y 18 realizan el bosquejo solicitado desplazando la gráfica dada cinco unidades hacia arriba. El resto de los equipos (3, 5, 7 y 13), asocian incorrectamente el término independiente de la ecuación con el desplazamiento de la gráfica sobre el eje de las abscisas.

Comentarios: Los 18 equipos, al margen de que su respuesta sea correcta o no, enfrentan el problema desde la "perspectiva objeto", según la acepción que Moschkovich, Schoenfeld y Arcavi (1993), le asignan al término.

Los 14 equipos que contestaron correctamente logran una transferencia positiva al asociar el término independiente de la ecuación con el desplazamiento hacia arriba de la gráfica en cuestión.

Por otro lado, los equipos 3, 5, 7 y 13, nuevamente, interpretan el "nuevo" parámetro "e" como el desplazamiento de la gráfica a derecha o izquierda, reservándole al parámetro "b", independientemente del tipo o forma de la ecuación, el desplazamiento de la gráfica hacia arriba o hacia abajo tal como ellos lo aprendieron.

PREGUNTA 9: El bosquejo de la gráfica asociada a la ecuación $y = x^3 + x^2 - 6x$ se presenta a continuación. Si la gráfica se desplaza cuatro unidades a la derecha, ¿cuál es su ecuación asociada?

Resultados: Si se toma en cuenta el número de respuestas correctas para evaluar el nivel de dificultad de una pregunta, definitivamente ésta, la nueve, es la más difícil del instrumento que ahora nos ocupa: el equipo 1 no contestó y la respuesta de los 17 restantes es incorrecta.

Tomando en cuenta la posición que asumen los equipos en relación a *la modificación* que *sufre* la *ecuación* al desplazar la gráfica dada, es posible clasificar las respuestas en los cuatro grandes grupos que a continuación se describen.

Grupo 1: Integrado por los equipos 4 y 18. Al parecer, se basan en su trabajo realizado en las preguntas 3, 4 y 7 en las cuales, a “*b*” le asignan el desplazamiento de la gráfica hacia derecha o izquierda en ecuaciones de la forma $y = a(x+b)^2 + c$. Por tal motivo, en esta ocasión, al desplazar la gráfica cuatro unidades a la derecha, la ecuación se modifica en el término cuadrático de tal manera que la respuesta solicitada es $y = x^3 + (x-4)^2 - 6x$ para el equipo 4 e $y = x^3 + (x+4)^2 - 6x$, para el 18.

Grupo 2: Los equipos 2, 8 y 14, también a la luz de su trabajo anterior, consideran que la ecuación se modifica en el término cuadrático de tal manera que su respuesta es $y = x^3 + 4x^2 - 6x$.

Grupo 3: Incluye a los equipos 9, 12, 15, 16, 17, 10 y 6 quienes modifican el término lineal de la ecuación original cuando la gráfica dada se desplaza cuatro unidades a la derecha. Los cinco primeros equipos observan que el término lineal de la ecuación original (-6) es el producto de las abscisas de los puntos de intersección de la gráfica con el eje de las abscisas (-3·2 = -6, el cero no lo toman en cuenta). Luego entonces, si la gráfica se desplaza cuatro unidades a la derecha, el valor de dichas abscisas pasa de -3 a 1 y de 2 a 6 y el producto de estas "nuevas" abscisas es 6 por lo que, la respuesta a la pregunta es la ecuación $y = x^3 + x^2 + 6x$. El equipo 10 suma las "dos nuevas" raíces y su respuesta es $y = x^3 + x^2 + 7x$. Finalmente, la respuesta del equipo 6 es $y = x^3 + x^2 - 2x$. El razonamiento que llevan a cabo para obtener el valor del término lineal es más o menos el siguiente: si el "coeficiente original" de "*x*" es -6, al desplazar la gráfica cuatro unidades a la derecha el "nuevo coeficiente" es -6 + 4 = -2 de donde, la ecuación requerida es $y = x^3 + x^2 - 2x$.

Grupo 4: Integra a los equipos que suponen que un desplazamiento de la gráfica a la derecha implica que la ecuación asociada se modifique en el término independiente. La respuesta de los equipos 3, 5, 7 y 11 es $y = x^3 + x^2 - 6x + 4$ y la del 13, $y = x^3 + x^2 - 6x - 4$.

Comentarios: Algunos equipos enfrentan esta pregunta con lo que, si se me permite el término, "aprendieron" al dar respuesta a algunas de las preguntas anteriores. Ratifican algunas de sus concepciones transitorias o asumen otras a fin de no *permanecer inmóviles ante una situación desconocida para ellos.*

PREGUNTA 10: A continuación se da la gráfica asociada a la ecuación $y = 2x - 5$.

En el mismo sistema de coordenadas cartesianas tracen una recta que pase por el origen y que sea paralela a la recta dada. ¿Cuál es la ecuación de la recta que dibujaron?

Resultados: Trece equipos (el 1, 2, 3, 4, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 y el 18) contestan correctamente. Es decir, trazan la recta paralela, aparentemente sin mayor problema, utilizando la cuadrícula para localizar algunos puntos que pertenecen a la recta solicitada. Deducen y aplican la condición que deben cumplir dos ecuaciones de recta para que sus gráficas asociadas sean paralelas. En este punto, de hecho, su razonamiento es el siguiente:

Son rectas paralelas $\Leftrightarrow$ forman el mismo ángulo con EA^{+} (α es el mismo).

Dos rectas tienen el mismo α $\Leftrightarrow$ "a" es igual en sus ecuaciones asociadas de la forma $y = ax + b$

De donde,

Son rectas paralelas $\Leftrightarrow$ "a" es igual en sus ecuaciones asociadas de la forma $y = ax + b$

Además,

Una recta pasa por el origen $\Leftrightarrow$ $b = 0$ en su ecuación asociada de la forma $y = ax + b$

Por lo tanto,

La ecuación solicitada es $y = 2x$.

Los equipos 5, 7, 8 y 16 trazan la recta paralela correctamente. Sin embargo, aunque en la ecuación que dan como respuesta $b = 0$, el coeficiente de "x" es incorrecto. Éste lo establecen basándose en las características globales cualitativas de la recta que trazaron por lo que, proporcionan una ecuación factible de asociársele a dicha recta y no *la* ecuación asociada. Por estas razones, la respuesta de estos equipos se cataloga como parcialmente correcta.

Finalmente, el equipo 17, al igual que los cuatro anteriores, su respuesta es una ecuación factible de asociársele a la recta paralela que se les solicita que tracen. Pero, este equipo no traza dicha recta. Su respuesta es etiquetada como incorrecta.

Comentarios: *Al parecer, los cinco equipos que emiten una respuesta parcialmente correcta o incorrecta no logran desprenderse de su visión global cualitativa al enfrentar el problema planteado en esta pregunta 10. Los 13 restantes sí lo logran y además, establecen, no con el rigor de un matemático, la condición para rectas paralelas ($L_1 // L_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2$). Aspecto que, no está por demás recordar, no se abordó en la instrucción.*

El proceder de los 13 equipos que emiten una respuesta correcta parece indicar que los equipos aplican lo que han estudiado con flexibilidad y habilidad. Objetivo planteado por Schoenfeld (1992) para la instrucción matemática.

En términos cuantitativos, los trece equipos que superaron el reto planteado en la pregunta diez, representa un poco más del 72% de la población a la que se le aplicó este instrumento

(18 equipos). Este resultado, supera en mucho al 16% y 32% reportados por Moschkovich, Schoenfeld y Arcavi (1993) para el mismo problema.

PREGUNTA 11: ¿Cuál es la ecuación de la recta paralela a $y = 3x - 4$ y que pasa por el punto (1,5)?

Resultados: Ocho equipos (el 2, 3, 10, 11, 13, 14, 17 y el 18) dan, correctamente, la ecuación $y = 3x + 2$ como respuesta. Para establecer esta ecuación, primero determinan que el coeficiente de "*x*" debe ser igual a tres (a = 3) dado que la recta deseada es paralela a la dada y por lo tanto las "as" deben ser iguales. Posteriormente, consideran el punto (1,5), hacen uso de la "conexión cartesiana" y establecen el valor de "*b*".

Los diez equipos restantes, abordan el problema planteado en la pregunta 10 tomando en cuenta la condición del paralelismo o el punto por el que debe pasar la recta deseada (lo cual implica el uso de la "conexión cartesiana") pero no ambas. Esto conlleva a que los equipos produzcan respuestas incorrectas. Así, los equipos 1, 4 y 9 sólo consideran la condición del paralelismo y dan como respuesta una ecuación que hace "*caso omiso*" del punto (1,5). El equipo 16 centra su atención en el punto (1,5) por el que debe pasar la recta y "*hace a un lado*" la condición del paralelismo, de tal manera que su respuesta es la ecuación de *una* recta que pasa por el mencionado punto: $y = 9x - 4$. Aparentemente, los equipos 5, 6, 7, 8, 12 y 15 toman en cuenta las dos condiciones que se requieren para contestar la pregunta. Con la del paralelismo no tienen problema alguno. La dificultad se encuentra en la forma en que utilizan la pieza de información que se refiere al punto (1,5): como *no* establecen la *conexión cartesiana* no cuentan con recursos suficientes para precisar el valor de "*b*" y al parecer, algunos (equipos 6, 7, 8 y 12) lo estiman basados en un análisis global cualitativo de la recta deseada y otros (equipos 5 y 15), asocian la ordenada del punto en cuestión con el valor de "*b*" ($b = 5$).

Comentarios: De los 18 equipos, 17 asocian, correctamente, la condición de que las rectas son paralelas con el hecho de que, en las ecuaciones correspondientes, los coeficientes de las variables independientes sean iguales. Este resultado permite suponer que el hecho de que los equipos dominen la articulación de registros de representación gráfico y algebraico en funciones polinomiales elementales y en particular en la función lineal, desde un enfoque global cualitativo, es una plataforma adecuada para potenciar las habilidades matemáticas de los estudiantes de tal manera que, enfrentados a situaciones distintas a las estudiadas, son capaces de generar o construir "nuevos" conocimientos matemáticos. Además, esto se ve reforzado si se considera que ocho equipos contestan correctamente a pesar de no haber abordado como objeto de estudio el concepto de pendiente ni las distintas formas de establecer la ecuación de una recta: dada la pendiente y un punto, dados dos puntos.

Al determinar la pendiente de la recta paralela a la dada, los equipos trabajan las funciones lineales desde la perspectiva objeto y al establecer la ecuación solicitada (que pase por *determinado punto), desde la perspectiva proceso (Moschkovich, Schoenfeld y Arcavi, 1993).*

Por otro lado, el porcentaje de equipos que contestan correctamente es de casi 45%. Si comparamos este porcentaje con el de la pregunta anterior se observa una disminución de 27 puntos porcentuales. Caída significativa pero aún así, superior a los porcentajes obtenidos por la población referida por Moschkovich, Schoenfeld y Arcavi en la pregunta anterior (16% y 32%). Por lo que, no se puede decir que la población que contesta correctamente esta pregunta 11, es "bastante pequeña" como dichos autores pronosticaban que sería la población a la que ellos aluden (Moschkovich et al., 1993) si se les planteara el problema que ahora se discute.

PREGUNTA 12: De las dos tablas que se les presentan a continuación, la de la izquierda es la tabulación de la ecuación $y = x^3 - 3x^2 + 2x$. Completa la tabla de la derecha si se sabe que ella corresponde a la ecuación $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 5$.

Resultados: Los equipos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 14, 15, 16 y 18 completan correctamente la tabla "sumando cinco" a cada uno de los valores de "*y*" de la tabla dada. Los equipos 13, 17, 8 y 11 realizan todo el proceso de tabulación. Los dos primeros sin equívoco alguno y los otros dos se equivocan en dos y tres valores, respectivamente. Por tal razón, la respuesta de estos últimos es catalogada como incorrecta.

Comentarios: Independientemente de si la respuesta a la pregunta es correcta o incorrecta, es posible afirmar que 14 equipos *afrontan el problema planteado en esta pregunta desde la "perspectiva objeto" y los cuatro restantes, desde la "perspectiva proceso". Esto, al parecer aporta elementos para suponer que 14 equipos han aprendido a seleccionar cuál perspectiva puede ser provechosamente empleada en ciertos contextos y moverse con soltura a través de ella. Lo cual, a la luz de los planteamientos de Moschkovich Schoenfeld y Arcavi (1993) puede interpretarse como que los estudiantes han desarrollado competencias con las relaciones funcionales.*

A continuación se presentan los resultados de las preguntas 13, 14, 15 y 16 las cuales pretenden explorar si los estudiantes cuentan con "*bases*" para generar familias de ecuaciones cuando se establece alguna condición para sus gráficas asociadas.

PREGUNTA 13: Escriban dos ecuaciones de recta cuyas gráficas asociadas se intersequen y su punto de intersección (entre ellas) se encuentre en el Eje de las Ordenadas.

PREGUNTA 14: Escriban dos ecuaciones de recta cuyas gráficas asociadas sean paralelas.

Resultados: Todos los equipos, excepto el 13, contestan correctamente ambas preguntas. Es decir, aparentemente 17 equipos no tienen mayor dificultad para establecer que parámetro debe permanecer fijo y cual debe variar. Naturalmente, esta no es la situación del equipo 13. En la pregunta 13, este equipo considera que el valor del parámetro "a" debe ser igual en ambas ecuaciones y que el que debe variar es el valor de "b". En relación a la pregunta 14, los integrantes del equipo 13 "intentan" construir dos ecuaciones de recta paralela al eje de las abscisas; pero solo una de ellas lo es y la otra, no.

PREGUNTA 15: Escriban dos ecuaciones de parábola cuyas gráficas asociadas no se intersequen.

Resultados: Las parejas de ecuaciones que proporcionan los equipos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17 y 18 satisfacen las condiciones establecidas en la pregunta. La relación que guardan los valores de los parámetros en las ecuaciones que proporcionan estos 14 equipos es: $a_1 = a_2$ y $b_1 \neq b_2$ en las de los equipos 4, 5, 12 y 17; $a_1 = -a_2$, $b_1 = -b_2$ y, a_1 y b_1 son del mismo signo, equipos 2, 3, 6, 10, 13 y 14; $a_1 = -a_2$, $b_1 = 0$ y $b_2 < 0$, equipos 9 y 11; $a_1 \neq a_2$ y $b_1 \neq b_2$, equipos 1 y 18.

De los cuatro equipos que su respuesta es incorrecta, al parecer, tres centran más su atención en las "*a*s" que en las "*b*s" y el cuarto, a la inversa.

PREGUNTA 16: Escriban dos ecuaciones de parábola cúbica cuyas gráficas asociadas se intersequen y su punto de intersección (entre ellas) se encuentre fuera del Eje de las ordenadas.

Resultados: De los nueve equipos que contestan correctamente, cuatro (el 2, 6, 11 y el 17) expresan las ecuaciones solicitadas en la forma $y = ax^3 + b$ donde $a_1 \neq a_2$ y $b_1 \neq b_2$; cinco (el 4, 5, 12, 14 y el 18), desplazan las parábolas cúbicas a derecha o izquierda y/o arriba o abajo de tal manera que su respuesta son las ecuaciones asociadas de la forma $y = a(x+b)^3 + c$ donde, en términos generales, $a_1 \neq a_2$, $b_1 = b_2$ y $c_1 = c_2$.

La respuesta de cinco equipos es errónea. Uno (el 7), al parecer considera que como el origen de coordenadas es un punto que pertenece a ambos ejes, si dos parábolas cúbicas pasan por él, se puede interpretar que, dichas gráficas se intersecan en el eje de las abscisas y por lo tanto, su intersección no está en el eje de las ordenadas. La forma de las ecuaciones de los otros cuatro equipos (el 3, 8, 9 y 13) es $y = ax^3 + bx + c$. Como ellos suponen que el parámetro "*b*" desplaza la gráfica sobre el eje de las abscisas entonces, si en las ecuaciones solicitadas $b_1 = b_2$, las parábolas cúbicas se intersecarán en un punto sobre el eje de las abscisas y por lo tanto, se satisface la condición establecida en la pregunta.

Finalmente, los equipos 1, 10, 15 y 16 no contestan la pregunta.

Comentarios: Las respuestas a estas cuatro preguntas aportan elementos para suponer que los estudiantes cuentan con las bases para construir familias de ecuaciones y de gráficas con alguna condición establecida. Naturalmente, unas preguntas les fueron más accesibles que otras: con las rectas prácticamente no tuvieron mayor problema y las parábolas cúbicas son las que les causaron más dificultades.

Por otro lado, independientemente de que la respuesta haya sido correcta o no, cabe señalar que a pesar de que las *parábolas cúbicas son las que para ellos tuvieron mayor grado de dificultad, es aquí, donde la mayoría de los equipos que contestaron (nueve de catorce) aplican "los conocimientos adquiridos" en otras preguntas del instrumento para contestar la 16. Esto habla de que los equipos no sólo enfrentan una situación con lo que saben que saben sino también, con "el saber que han generado" en otras situaciones. Este actuar de los equipos se ha observado en diversas ocasiones a lo largo de este cuestionario y no únicamente al contestar la pregunta 16. Ello, tal vez, se puede interpretar, como se menciona renglones arriba, como la seguridad que tienen los equipos en "el conocimiento que ellos producen". O en otras palabras, como "la confianza que sienten los equipos en su habilidad de hacer matemáticas". Que ha decir de Schoenfeld (1992) es uno de los objetivo de la instrucción matemática.*

En seguida, se transcribe la última pregunta del instrumento y sus respectivos resultados. La intención fundamental de esta pregunta es indagar si para los equipos existe diferencia o no, entre la expresión "*bosquejo* de una gráfica" y "*la* gráfica" a fin de descartar fuentes de equívoco. Es decir, si en este u otro instrumento se pregunta, por ejemplo, por *la* gráfica y un equipo (o más) da un *bosquejo* de la misma, la fuente de equívoco puede ser cualquier otra cosa pero no la confusión de los términos, cuando se tienen evidencias de que ellos los diferencian. Este aspecto es fundamental para el trabajo que aquí se desarrolla.

PREGUNTA 17: Expliquen cuál es la diferencia (si es que existe) entre la expresión "*bosquejo de la gráfica asociada a una ecuación*" y la expresión "*gráfica asociada a una ecuación*".

Resultados: Las explicaciones dadas por los 18 equipos nos permiten afirmar que todos ellos son claros de la diferencia que existe entre las dos expresiones planteadas en la pregunta.

Con esto se da por terminada la exposición de los Resultados por Pregunta. A continuación se presenta el Concentrado de dichos resultados.

CONCENTRADO DE RESULTADOS

Frecuencia de aciertos por equipo

Nº de aciertos (De 17)	Frecuencia (Nº de equipos)
16	1 (Equipo 14)
13	1 (Equipo 4)
11	4 (Equipos 1, 2, 12 y 18)
10	3 (Equipos 6, 10 y 17)
9	2 (Equipos 9 y 11)
8	4 (Equipos 3, 5, 13 y 15)
6	2 (Equipos 7 y 16)
5	1 (Equipo 8)

Frecuencia de aciertos por pregunta

Nº de aciertos (De 18)	Frecuencia (Nº de preguntas)
18	2 (Preguntas 2 y 17)
17	2 (Preguntas 13 y 14)
16	1 (Pregunta 12)
14	3 (Preguntas 1, 8 y 15)
13	1 (Pregunta 10)
9	1 (Pregunta 16)
8	1 (Pregunta 11)
5	1 (Pregunta 4)
3	1 (Pregunta 3)
2	1 (Pregunta 7)
1	2 (Preguntas 5 y 6)
0	1 (Pregunta 9)

La tabla de la izquierda muestra que de los 18 equipos, el 14 es el que enfrenta con mayor éxito las preguntas de este primer instrumento y el ocho, el desempeño más deficiente. Cabe recordar que este equipo es el único (de los dieciocho) que *no* mostró dominio en la coordinación de registros de representación gráfico y algebraico en funciones polinomiales elementales en virtud de que sus integrantes *no* alcanzaron la mínima puntuación promedio en el postest.

Tomando como referencia el número de equipos que contestan una pregunta, es posible afirmar, a la luz de los datos que contiene la tabla de la derecha, que las preguntas dos y 17 resultan ser las más fáciles para la población bajo estudio y la nueve, la más difícil.

Además, el *promedio de aciertos por equipo* es, en números redondos, de *nueve* con una *desviación* de *tres* y el *promedio de aciertos por pregunta* es de *diez* con una *desviación* de *siete*.

Prácticamente, hasta este momento, el desempeño de los equipos se ha analizado desde un punto de vista cualitativo. Sin embargo, contar con una visión global cuantitativa de tal desempeño, es un elemento más que contribuye a valorar el rendimiento de los equipos y ayuda a establecer comparaciones entre este 1er. Instrumento de Comprensión, los otros tres y el Instrumento para explorar el dominio de la conversión. En tal sentido, se convino en asignar diez puntos al cuestionario; el mismo puntaje a cada una de las respuestas correctas (0.59) y en los casos en que la respuesta es incorrecta pero contiene algunos aspectos correctos, éstos determinan la puntuación de aquella. A continuación se presenta una tabla con las puntuaciones de los equipos.

Puntuaciones obtenidas por los equipos en el 1er. Instrumento de Comprensión

Equipo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Puntuación	6.93	7.67	6.2	7.67	5.61	7.23	4.13	3.84	6.2	7.23	6.2	7.97	5.9	9.44	5.02	3.99	6.2	7.82

La puntuación promedio que obtienen los equipos en este 1er. Instrumento de Comprensión es de 6.4 con una desviación de 1.5.

Conclusiones del 1er. Instrumento de Comprensión

Tomando en cuenta tanto el procedimiento utilizado por los 18 equipos como las respuestas a las 17 preguntas de este 1er. Instrumento de Comprensión, y los comentarios que a lo largo de las páginas anteriores se realizaron, es posible hacer los siguientes señalamientos:

- Todos los equipos establecen conexiones entre la representación gráfica y algebraica en funciones distintas a las estudiadas por ellos (ver Preguntas de la 3 a la 9). Así por ejemplo, llevan a cabo la conversión de los registros de representación gráfico y algebraico en funciones de la forma $y = a(x+b)^2 + c$. Al margen de que la conversión que hayan efectuado sea correcta o no, al parecer, los equipos consideran que la mencionada conversión no se limita a funciones de la forma $y = ax^n + b$, *donde* $a,b \in \Re$, $a \neq 0$ y $n = 1, 2$ y 3, sino que también, se puede llevar a cabo en otro tipo de funciones. Este hecho, nos habla, por un lado, del número de las conexiones que establecen los equipos, lo cual, según Hiebert y Carpenter (1992), determina el grado de comprensión y por otro, de que las redes se hacen más largas y organizadas lo que indica (Hiebert y Carpenter 1992), que la comprensión crece. Por otra parte, parece ser que los estudiantes consideran que, "modificaciones" en la representación algebraica conlleva "modificaciones" en la representación gráfica y recíprocamente; de tal manera que, por ejemplo, si $y = ax^2 + b$ se "modifica" en $y = a(x+b)^2 + c$, la gráfica asociada a ésta será "una modificación" de aquélla. Esto, se puede interpretar como una de las consecuencias de la comprensión que señalan Hiebert y Carpenter (1992), a saber, que influye en las creencias.

- En términos generales, la gran mayoría de los equipos (prácticamente 16 de los 18) reconocen que las ecuaciones con las que se enfrentan en las Preguntas 3, 4, 5 y 6 (funciones de la forma $y = a(x+b)^2 + c$ y $y = ax^2 + bx + c$) son una "modificación" de las estudiadas por ellos. Por lo que, el conocimiento adquirido durante la instrucción para éstas lo aplican, es decir, lo transfieren a aquéllas al momento de establecer conexiones entre los registros de representación gráfico y algebraico. Además, conciben que la modificación de las "nuevas" ecuaciones (considerando las que ellos han trabajado), es un elemento "relacionado directamente" con la variable "*x*" por lo que, la gráfica se modificará en "algo" relacionado con "*x*": el desplazamiento en el eje de las abscisas. Por otro lado, la transferencia también la llevan a cabo en otro tipo de funciones diferentes a las del contexto de aprendizaje. Por ejemplo, funciones de la forma $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + d$ (ver Pregunta 8). La transferencia, a decir de Hiebert y Carpenter (1992) es una de las consecuencias de la comprensión.

- Los equipos hacen tratamientos con las gráficas, de tal manera que, por ejemplo, 12 equipos, aparentemente sin mayor problema, aceptan que una parábola no sólo se puede desplazar hacia arriba o hacia abajo (como ellos lo habían trabajado) sino que también se puede desplazar hacia derecha o izquierda e inclusive combinar los desplazamientos. Esto indica, desde la posición de Moschkovich, Schoenfeld y Arcavi (1993), que las representaciones gráficas son pensadas como objetos, es decir, desde la *perspectiva objeto* (ver Preguntas 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9). Por otro lado, algunos equipos enfrentan la gráfica de una función desde la *perspectiva proceso*: obtienen la información deseada de la *propia gráfica*. Por ejemplo, en la Pregunta 1, ocho equipos para determinar las coordenadas del punto de intersección con el eje de las abscisas de la recta asociada a la ecuación $y = 2x - 8$, la grafican y "extraen" de ella las coordenadas del punto solicitado: su proceso de solución es gráfico. Esto difiere de lo que, a decir de Knuth (2000) han sugerido los investigadores: "la incapacidad [de los estudiantes] para ver los puntos individuales que comprende una línea" (p. 504).

- Algunos equipos utilizan adecuadamente la *conexión cartesiana* (por ejemplo, cuatro equipos en la Pregunta 2). Este hecho, desde el punto de vista de Moschokovich, Schoenfeld y Arcavi (1993), es un elemento fundamental en las representaciones gráfica, algebraica y tabular.

- En general, los equipos se mueven entre la *perspectiva proceso* y la *perspectiva objeto* en las representaciones gráfica, algebraica y tabular en los distintos tipos de funciones que se abordan en el Instrumento que ahora nos ocupa y en la mayoría de las ocasiones, seleccionan la *perspectiva* "más adecuada". Así por ejemplo, en la Pregunta 12 donde se les presenta la tabulación de la ecuación $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ y se les solicita completar la tabla para la ecuación $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 5$, 14 equipos *eligen* la *perspectiva objeto* para emitir su respuesta: sumar 5 a los respectivos valores de *y* de la tabulación dada. Todo esto, desde la posición de Moschokovich, Schoenfeld y Arcavi (1993), son aspectos de comprensión de las relaciones funcionales. Los cuatro equipos restantes llevan a cabo *toda* la tabulación, es decir, abordan el problema planteado en dicha Pregunta desde la *perspectiva proceso* e, independientemente de que su respuesta sea correcta o no, es factible suponer que no eligen la *perspectiva* "más adecuada".

- Algunos equipos muestran que son capaces de enfrentar una situación por “diferentes caminos” (tabular y/o algebraico y/o gráfico), sin incurrir en un encasillamiento de los registros de representación, el cual, como señala Duval (1998), se puede observar en todos los niveles educativos en la gran mayoría de los alumnos. Así por ejemplo, en la Pregunta 1, 11 equipos utilizan más de un registro de representación al determinar las coordenadas del punto de intersección con el eje de las abscisas de la gráfica asociada a la ecuación $y = 2x - 8$.

- La mayoría de los equipos “piensan visualmente”. Por ejemplo, en la Pregunta 2, 16 equipos utilizan la visualización para determinar que el punto con coordenadas (4,10) no pertenece a la gráfica asociada a la ecuación $y = 3x - 6$. Esto difiere de lo sostenido por Eisenberg y Dreyfus (1991) en el sentido de que, “los estudiantes tienen una fuerte tendencia a pensar algebraicamente en lugar de visualmente. Además esto es así aún si ellos son presionados explícita y fuertemente hacia un procedimiento visual” (p. 29).

- En términos generales, los equipos abordan con éxito problemas cuya solución exigen un enfoque puntual cuantitativo. Así por ejemplo, 14 equipos determinan correctamente, en la Pregunta 1, las coordenadas del punto de intersección con el eje de las abscisas de la gráfica asociada a la ecuación $y = 2x - 8$. Esto aporta elementos para suponer que, dominar la conversión de registros de representación gráfico y algebraico desde un enfoque global cualitativo, no sólo no obstaculiza el abordar un problema que exige un enfoque puntual cuantitativo sino al contrario, al parecer, lo favorece.

- La mayoría de los equipos construyen parejas de ecuaciones (ver las Preguntas 13, 14, 15 y 16) cuando se les estipula una condición determinada para sus gráficas asociadas: por ejemplo, que dichas gráficas no se intersequen (Preguntas 14 y 15 contestadas correctamente por 17 y 14 equipos, respectivamente). Esto revela, una vez más, que las representaciones gráfica y algebraica de las funciones estudiadas por ellos (lineales, un tipo de cuadráticas y de cúbicas) son pensadas como entidades es decir, desde la *perspectiva objeto* (Moschokovich, Schoenfeld y Arcavi, 1993). Por otra parte, dan pautas que permiten suponer que aplican los contenidos que estudiaron con "cierta" flexibilidad y habilidad. Hecho que ha decir de Schoenfeld (1992), es uno de los objetivos de la instrucción matemática.

- Todos los equipos muestran, en un momento u otro (Pregunta 10, 11 y/o 14), que logran establecer por ellos mismos, aunque no rigurosamente, la condición que deben cumplir dos ecuaciones de recta de la forma $y = ax + b$ para que sus gráficas asociadas sean paralelas ($L_1 || L_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2$). Este hecho es factible de interpretarlo como que las redes de conocimiento de los equipos se hacen más largas y más organizadas. Lo cual a la luz de la posición de Hiebert y Carpenter (1992) es un indicador del crecimiento de la comprensión.

- Prácticamente todos los equipos utilizan "el conocimiento matemático que generan" al contestar una determinada pregunta para contestar otra (ver Preguntas 4, 5, 6, 7, 9 y 16). Por ejemplo, los equipos 1, 4 y 14 al contestar la Pregunta 3 "encuentran" que, cuando b < 0 en ecuaciones de la forma $y = a(x+b)^2 + c$, la parábola se desplaza a la derecha. Al enfrentar la Pregunta 4 utilizan el conocimiento que generaron en la 3 para contestarla. Al margen de que el "conocimiento que generan" esté de acuerdo o no, con el significado aceptado en Matemáticas, el actuar de los equipos, tal vez, es factible de interpretarlo desde dos puntos de vista. Por un lado, como una de las consecuencias que Hiebert y Carpenter (1992) le atribuyen a la comprensión a saber, que es generativa. Por otro, en la confianza que los alumnos puedan estar desarrollando en su habilidad de hacer, matemáticas. Lo que, ha decir de Schoenfeld (1992), es uno de los objetivos de la instrucción matemática.

- La visión global cualitativa se impone en cuatro equipos (ver Pregunta 1) limitando su desempeño en una situación que demanda un enfoque puntual cuantitativo. Al parecer, en esta ocasión, el enfoque global cualitativo resulta ser un obstáculo para estos equipos.

- La concepción transitoria que reporta Moschkovich (1999) en torno a que los estudiantes consideran que el parámetro "a" determina el punto de intersección de la recta con el eje de las abscisas cuando la ecuación es de la forma $y = ax + b$, la exhiben, dos de los 18 equipos con los que se trabajó en esta experiencia (ver Pregunta 1).

- La concepción transitoria (según la acepción que Moschkovich, 1999, le asigna al término) predominante en los equipos está referida al rol del parámetro "*b*" en ecuaciones de la forma $y = a(x+b)^2 + c$ e $y = ax^2 + bx + c$. En este proceso ecuación→gráfica (ver Preguntas 3, 4, 5 y 6), los equipos consideran que:
  - i) el desplazamiento de la gráfica hacia derecha o izquierda está determinado por el valor de "*b*" (lo cual, en principio, es correcto cuando trabajan con ecuaciones de la forma $y = a(x+b)^2 + c$ e incorrecto cuando las abordan en la forma $y = ax^2 + bx + c$);
  - ii) el signo del valor de "*b*" indica hacia donde se desplaza la parábola de tal manera que si el signo es positivo, se desplaza a la derecha y si es negativo a la izquierda; es decir, de hecho sostienen, incorrectamente, que:

si *b* > 0 entonces, la parábola se desplaza a la derecha tantas unidades como lo indique "*b*" y,

si *b* < 0 entonces, la parábola se desplaza a la izquierda tantas unidades como lo indique "*b*".

Para el proceso gráfica→ecuación, mantienen su visión equívoca al aceptar como verdaderas las recíprocas de las dos condicionales anteriores (ver Pregunta 7). En otras palabras, los equipos que muestran esta concepción transitoria (seis de los 18) aceptan como verdaderas las bicondicionales correspondientes cuando ni las condicionales ni sus recíprocas lo son.

- Los estudiantes aprendieron que en ecuaciones de la forma $y = ax^n + b$, *donde* $a, b \in \Re$, $a \neq 0$ y $n = 1, 2$ y 3, "*b*" determina el desplazamiento de la gráfica hacia arriba o hacia abajo. Cuando se enfrentan, por ejemplo, a ecuaciones de la forma $y = a(x+b)^2 + c$ o $y = ax^2 + bx + c$, asumen que "*b*" continúa determinando el desplazamiento de la gráfica hacia arriba o hacia abajo; esto, para el proceso ecuación → gráfica. Para el proceso inverso utilizan la recíproca correspondiente (ver Preguntas de la 3 a la 9). Este proceder, parece indicar que algunos equipos (dos de los 18) consideran que:
  - i) el segundo parámetro de una ecuación cualquiera es "*b*" (lo cual, es posible conceder que no es del todo incorrecto) y,
  - ii) "*b*" siempre determina el desplazamiento hacia arriba o hacia abajo de la gráfica asociada a la ecuación dada (esto sí es incorrecto).

  En otros términos, consideran que la representación de un parámetro (en el caso que se está discutiendo el símbolo "*b*") determina su función (desplazar la gráfica hacia arriba o hacia abajo). De ser así, existe una gran posibilidad de que no distingan el representante de lo representado, lo cual, desde el punto de vista de Duval (1998) habla de una "comprensión deficiente" del concepto de parámetro.

- Algunos equipos muestran deficiencias cuando llevan a cabo tratamientos en el registro algebraico: desarrollo del cuadrado de un binomio y/o reducción de términos semejantes (ver Preguntas 3, 4, 5 y 6). En ciertas ocasiones (Preguntas 5 y 6), dichas deficiencias impide obtener alguna información del rol que le asignan a los parámetros "*a*", "*b*" y "*c*" en ecuaciones de la forma $y = a(x+b)^2 + c$ y $y = ax^2 + bx + c$ (i. e. las conexiones entre la representación gráfica y algebraica), en virtud de que son reducidas a ecuaciones de la forma $y = ax^2 + b$ o $y = ax^3 + b$. Por ejemplo, en la Pregunta 5, siete equipos reducen una ecuación de la forma $y = ax^2 + bx + c$ a una de la forma $y = ax^3 + b$. Si bien, los tratamientos algebraicos señalados arriba no fueron objeto de enseñanza-aprendizaje durante el proceso de instrucción al que fue sometida la población bajo estudio, este aspecto habrá de tomarse en cuenta en subsecuentes experiencias.

Finalmente, para cerrar con la sección que ahora nos ocupa, sólo resta decir que, al parecer, el proceso de instrucción al que fue sometida la población bajo estudio, no sólo logra que diecisiete de los dieciocho equipos dominen la conversión de registros de representación gráfico y algebraico en funciones de la forma $y = ax^n + b$, *donde* $a, b \in \Re$, $a \neq 0$ y $n = 1, 2$ y 3 por la vía global cualitativa sino también promueve aprendizajes con comprensión: el desempeño que muestran los estudiantes en los aspectos explorados en este 1er. Instrumento, el cual, en términos generales, muestra que los equipos abordan con éxito "problemas puntuales"; establecen conexiones entre la representación gráfica y algebraica en funciones distintas a las del contexto de aprendizaje; utilizan adecuadamente la conexión cartesiana; se mueven entre la perspectiva proceso y objeto en las representaciones gráfica, algebraica y tabular; hacen tratamientos con las gráficas; enfrentan una situación por “diferentes caminos” (tabular y/o algebraico y/o gráfico), sin incurrir en un encasillamiento de los registros de representación; aplican o transfieren los conocimientos adquiridos durante la instrucción; utilizan “el conocimiento matemático que generan” al contestar una determinada pregunta para contestar otra; “piensan visualmente” es decir, visualizan la gráfica y emiten su respuesta; su proceso de solución es gráfico i. e., “extraen” de la gráfica las coordenadas del punto requerido y, establecen por ellos mismos, aunque no rigurosamente, la condición que deben cumplir dos ecuaciones de recta de la forma $y = ax + b$ para que sus gráficas asociadas sean paralelas ($L_1 || L_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2$). Sin embargo, en algunas ocasiones, la visión global cualitativa se impone en algunos equipos limitando su desempeño en problemas que requieren un enfoque cuantitativo.

3ª Parte

Resultados del 2º Instrumento de Comprensión

Introducción

En esta sección se reportan los resultados obtenidos por los dieciocho equipos en el denominado Segundo Instrumento de Comprensión que responde al nombre de “*Explorando algunos aspectos sobre la escala*”.

Aceptando la posición de Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990) en el sentido de que “[u]na gráfica no puede ser interpretada completamente sin tomar en cuenta sus escalas” (p. 19), el mencionado instrumento tiene la intención de indagar, como su nombre la indica, algunos aspectos sobre la escala que se consideran importantes al construir y/o interpretar una gráfica, bajo el entendido de que “[u]na comprensión completa de las representaciones gráficas significa darse cuenta de qué características no cambian cuando se alteran las escalas (e.g., las intersecciones con los eje) y qué características cambian cuando se alteran las escalas (e.g., los ángulos geométricos que la recta forma con cada uno de los ejes)” (Leinhardt et al., 1990, p. 19).

El instrumento, de hecho, consta de cinco apartados. Cuatro de éstos son ítems de base común (las bases comunes están etiquetadas con números romanos: I, III, IV y V) y cada uno de ellos contiene siete, tres, tres y cuatro reactivos, respectivamente. Estos últimos, están designados con números arábigos. El segundo apartado lo conforman dos ítems de base común. La consigna para ambos, está identificada con el “II”; la base común de cada uno de estos dos ítems está referida con el número 1 o 2, según sea el caso, y cada ítem contiene cuatro preguntas (i, ii, iii y iv). De aquí que, de hecho, el número total de preguntas incluidas en este Segundo Instrumento de Comprensión es de 25.

Los resultados, al igual que en el reporte anterior, primero se presentan por pregunta y posteriormente se muestran concentrados en tablas. Cuando se exponen por pregunta, se anota la base común, el número de pregunta y una descripción verbal de la “gráfica” que incluye. En algunas ocasiones, las respuestas se muestran clasificadas en grupos.

RESULTADOS POR PREGUNTA

En seguida se reproduce la base común (I) del primer ítem del instrumento (que de hecho constituye el primer apartado del mismo). Posteriormente, se indica el número de pregunta, se describe el bosquejo de la gráfica que incluye, la *condición* para el bosquejo de la *gráfica solicitada* y los resultados de la pregunta en cuestión.

Antes de proseguir, cabe señalar, que a excepción del bosquejo de la gráfica de la pregunta cinco, todos los demás, *están graficados en un sistema de coordenadas sin particiones en los ejes*.

I. A continuación se les presentan bosquejos de gráficas. Cada uno ha sido realizado en un sistema de coordenadas cartesiano donde *la unidad de medida* [u.m.] *en el eje de las abscisas* [E.A.] *es del mismo tamaño que la unidad de medida en el eje de las ordenadas* [E.O.]. En el espacio indicado, hagan el bosquejo de cada gráfica según las condiciones que se les indican.

PREGUNTA 1. Presenta el bosquejo de un círculo con centro en (0,0).

CONDICIÓN PARA EL NUEVO BOSQUEJO: u.m. en el E.A. *considerablemente mayor* que la u.m. en el E.O.

Correctas, 17 equipos: todos excepto el 12.

Grupo 1. Conformado por los equipos 2, 5, 6, 7, 8, 10, 13, 14, 15, 16 y 18.

Respuesta: En un sistema de coordenadas *sin* particiones en los ejes, bosquejan una "*elipse*" con eje mayor en el E.A. y con eje menor en el de las ordenadas.

Grupo 2. Incluye a los equipos 1, 3, 4, 9, 11 y 17.

Respuesta: Bosquejo de una gráfica que tiene la misma forma que los del Grupo 1. Sin embargo, estos equipos lo realizan sobre un sistema de coordenadas *con* particiones en los ejes donde la longitud del segmento de la partición en el eje de las abscisa (u.m. en el E.A.) es visiblemente mayor a la longitud del segmento de la partición en el eje de las ordenadas (u.m. en el E.O.), numeran las particiones (naturalmente, de uno en uno) y bosquejan correctamente. Es decir, los puntos de intersección de la gráfica con los ejes son equidistantes, en términos del número de particiones, con respecto al origen.

Comentarios: La respuesta de los 17 equipos exhibe que los estudiantes tienen claridad de que la forma de la gráfica es una característica que cambia cuando se altera la unidad de medida. Además, las de los equipos del Grupo 2, también muestran que ellos se dan cuenta de que las intersecciones con los ejes es una característica que no cambia.

Tal vez es posible interpretar la "necesidad" de los equipos del Grupo 2 en realizar particiones en los ejes desde dos puntos de vista: uno, que lo requieren para una "mejor visualización" de la deformación que sufre la gráfica o bien, para hacer explícita la diferencia en la longitud de las unidades de medida. Naturalmente, estos dos enfoques pueden no ser ajenos sino complementarios.

Incorrectas, un equipo: el 12.

Respuesta: Bosquejo de una "*elipse*" con eje mayor en el E.O. y con eje menor en el E.A. La gráfica se localiza sobre un sistema de coordenadas *con* particiones en los ejes. Los segmentos en el E.A. son de la misma longitud que los del E.O. En el E.A. asignan números de cinco en cinco y en el E.O. de uno en uno.

Comentarios: Al parecer, este equipo considera que, cuando los segmentos en los ejes son de la misma longitud y la escala en el eje de las abscisa (en este caso) es mayor que la del eje de las ordenadas entonces, la unidad de medida en el eje de las abscisas es mayor que la del eje de las ordenadas.

Adelantándonos un poco, cabe señalar, que el equipo 12 mantiene esta visión prácticamente a largo de todo el instrumento.

PREGUNTA 2. Contiene el bosquejo de una parábola que abre hacia arriba, "normal" y con vértice en (0,0).

CONDICIÓN PARA EL NUEVO BOSQUEJO: u.m. en el E.A. *considerablemente menor* que la u.m. en el E.O.

Correctas, 17 equipos: todos excepto el 12.

Grupo 1. Equipos 2, 5, 6, 7, 8, 10, 13, 14, 15 y 18.

Respuesta: Sobre un sistema de coordenadas *sin* particiones en los ejes, bosquejan una parábola que abre hacia arriba "*cerrada*" y con vértice en (0,0).

Grupo 2. Equipos 1, 3, 4, 9, 11y 17.

Respuesta: Bosquejo de una parábola con las mismas características que la del Grupo I pero, en un sistema de coordenadas *con* particiones en los ejes.

Grupo 3. Equipo 16.

Respuesta: El bosquejo, de hecho, es el mismo que el de los dos grupos anteriores. Salvo que, en el sistema de coordenadas, realizan la partición únicamente en el eje de las abscisas

Comentarios: Prácticamente son los mismos que los que se anotaron para la Pregunta 1 sólo que en esta ocasión, los 17 equipos muestran que el punto donde la gráfica interseca a los ejes (el origen de coordenadas) es una característica de la parábola que no cambia cuando las unidades de medida son de longitudes diferentes.

Incorrectas, un equipo: el 12.

Respuesta: En un sistema de coordenadas donde la longitud del segmento con el que se realiza la partición en el E.A. es la misma que la del E.O. y la numeración asignada en el primero es de .5 en .5 mientras que en ordenadas es de uno en uno, se localiza el bosquejo de una parábola que abre hacia arriba, “*abierta*” y con vértice en (0,0)

Comentarios: Con las modificaciones correspondientes, se puede decir que en esencia, la respuesta del equipo 12 a esta pregunta muestra la misma concepción en torno a la unidad de medida y la escala que en la anterior.

PREGUNTA 3. Bosquejo de una gráfica con cuatro raíces, dos en la parte negativa del eje de las abscisas, otra en el origen y la última en el semi-eje de las abscisas positivas; dos crestas en la dirección positiva del eje de las ordenadas y un "valle" en la dirección negativa de dicho eje; la gráfica tiene su máximo en el Cuadrante I, un máximo relativo en el Cuadrante II y un mínimo en el Cuadrante III.

CONDICIÓN PARA EL NUEVO BOSQUEJO: u.m. en el E.O. *cuatro veces mayor* que la u.m. en el E.A.

Correctas, 16 equipos: todos excepto el 5 y 12.

Grupo 1. Equipos 2, 6, 7, 8, 10, 13, 14 y 15.

Respuesta: En un sistema de coordenadas *sin* particiones en los ejes, está bosquejada una gráfica con las mismas características que la dada (raíces, máximos y mínimo) solo que "alargada" en el sentido del eje de las ordenadas.

Grupo 2. Equipos 1, 3, 4, 9, 11, 17 y 18.

Respuesta: El bosquejo es el mismo que los del Grupo I salvo que estos equipos lo llevan a cabo en un sistema de coordenadas *con* particiones en los ejes.

Grupo 3. Equipo 16.

Respuesta: El bosquejo es, de hecho igual al de los dos grupos anteriores. La diferencia estriba en que este equipo construye un sistema de coordenadas y realizan la partición únicamente en un eje (igual que en la pregunta anterior), sólo que en esta ocasión, en el de las ordenadas.

Incorrectas, dos equipos: el 5 y el 12.

Grupo 1. Equipo 5.

Respuesta: Sobre un sistema de coordenadas *sin* particiones construyen un bosquejo que muestra, correctamente, la deformación que sufre la gráfica pero, ésta, no pasa por el origen (interseca al E.O. en su parte negativa y la raíz correspondiente, está "desplazada" a la parte positiva del eje de las abscisas).

Grupo 2. Equipo 12.

Respuesta: Bosquejo de una gráfica con las mismas características que la gráfica dada en lo que se refiere a raíces, crestas, "valle", máximos y mínimo pero, "estirada" sobre el E.A. Dicho bosquejo se localiza en un sistema de coordenadas *con* particiones

Comentarios: Independientemente de que las respuestas sean correctas o no, es posible afirmar que, hasta este momento, la mayoría de los equipos (16 de los 18) muestran una consistencia de tres (considerando las tres preguntas hasta aquí analizadas) en el procedimiento que utilizan para dar respuesta a las preguntas planteadas. El equipo 16 exhibe una consistencia de dos (preguntas 2 y 3) y el 18, quien también tiene una consistencia de dos, ya que al parecer, para contestar la Pregunta 3, "siente la necesidad" de realizar particiones.

PREGUNTA 4. Bosquejo de dos parábolas cúbicas (G_1 y G_2), que pasan por los Cuadrantes I, II y IV, con el mismo punto de inflexión en la parte positiva del E.O. y G_1 es "más cerrada" que G_2.

CONDICIÓN PARA EL NUEVO BOSQUEJO: u.m. en el E.O. *un tercio* de la u.m. en el E.A.

Correctas, 17 equipos: todos excepto el 8.

Grupo 1. Equipos 2, 5, 6, 7, 10, 13, 14, 15 y16.

Respuesta: En un sistema de coordenadas *sin* particiones en los ejes, bosquejan las dos parábolas cúbicas solicitadas, de tal manera que, la deformación en su "abertura" es adecuada y su punto de inflexión, que también es su punto de intersección, se muestra visiblemente más abajo sobre el E.O. También conservan la posición relativa entre ellas y los Cuadrantes por los que pasan.

Grupo 2. Equipos 1, 3, 4, 9, 11, 12, 17 y 18

Respuesta: El bosquejo es similar a los del Grupo 1 pero, sobre un sistema de coordenadas *con* particiones en los ejes

Incorrectas, un equipo: el 8.

Respuesta: Las dos parábolas cúbicas que bosquejan, en un sistema de coordenadas *con* partición en el E.O., las construyen con la "misma abertura" que las que se les presentan. Esta es la razón por la cual la respuesta es catalogada como incorrecta. En relación a los otros aspectos, el bosquejo es adecuado.

PREGUNTA 5. Bosquejo de una elipse, con eje mayor en el E.A., eje menor en el E.O. y los puntos de intersección de la gráfica con los ejes tienen por coordenadas (2,0), (-2,0), (0,1) y (0,-1).

CONDICIÓN PARA EL NUEVO BOSQUEJO: u.m. en el E.O. *el doble* de la u.m. en el E.A.

Correctas, 14 equipos: el 1, 2, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17 y el 18.

Respuesta: Construyen un sistema de coordenadas *con* particiones en los ejes y bosquejan un "círculo" con centro en (0,0), que conserva las coordenadas de los puntos de intersección de la gráfica original con los ejes.

Incorrectas, 4 equipos: el 3, 5, 8 y 12.

Grupo 1. Equipo 5.

Respuesta: En un sistema de coordenadas *con* particiones en los ejes se localiza el bosquejo de una elipse con eje mayor en el E.O., eje menor en el E.A. y las coordenadas de los puntos de intersección de dicha gráfica con los ejes son (2,0), (-2,0), (0,1) y (0,-1).

Comentarios: El problema con este equipo es que, al efectuar la partición en el E.O., la u.m. que utilizaron para dicho eje, es más del doble que la del E.A. Por tal razón, obtienen el bosquejo antes descrito.

Grupo 2. Equipo 8.

Respuesta: Sobre un sistema de coordenadas donde la u.m. en el E.O. es de la misma longitud que la u.m. en el E.A. se encuentra el bosquejo de una "elipse" con eje mayor en el E.O., eje menor en el E.A. y las coordenadas de los puntos de intersección de dicha gráfica con los ejes son (2,0), (-2,0), (0,4) y (0,-4).

Comentarios: Al parecer, el razonamiento que este equipo lleva a cabo para contestar es el siguiente: como la u.m. en el E.O. es el doble de la u.m. en el E.A. y los puntos de intersección de la gráfica con este eje son (2,0) y (-2,0) entonces, los "nuevos" puntos de *intersección de la gráfica con el E.O. deben ser (0,4) y (0,-4). Es decir, “el doble de los de las abscisas”.*

Grupo 3. Equipo 3.

Respuesta: Bosquejo de una elipse con eje mayor en el E.O., eje menor en el E.A. y las coordenadas de los puntos de intersección de dicha gráfica con los ejes son (2,0), (-2,0), (0,2) y (0,-2). El bosquejo lo construyen sobre un sistema de coordenadas de tal manera que, las particiones en los ejes cumplen con la condición establecida (u.m. en el E.O. el doble de la u.m. en el E.A.).

Comentarios: La respuesta del equipo tres, al igual que la del equipo anterior (el ocho), parece indicar que sus integrantes consideran que la condición sobre la unidad de medida afecta directamente los puntos de intersección. Esto muestra, al menos en esta pregunta, que ellos no se percatan de que dichos puntos son una característica de la gráfica que no cambian cuando las longitudes de las unidades de medida cambian.

Grupo 4. Equipo 12.

Respuesta: Bosquejo de una elipse con eje mayor en el E.A., eje menor en el E.O. y conservan las coordenadas de los puntos de intersección. Dicho bosquejo se presenta en un sistema de coordenadas donde la longitud del segmento con el que realizan la partición en el eje de las abscisas es la misma que la del eje de las ordenadas. En el E.A. los segmentos son numerados de uno en uno y en el E.O. de dos en dos.

Comentarios: A la luz de la respuesta de este equipo es posible afirmar que sus integrantes perciben que los puntos de intersección de una gráfica con los ejes es una característica de ésta que no *cambia cuando se alteran las unidades de medida. Sin embargo, nuevamente, vuelven a manifestar su concepción en relación a que, cuando los segmentos con los que se realizan las particiones en los ejes, son de la misma longitud y en uno de ellos (en este caso el E.O.) la escala es mayor que en el otro (E.A.), la u.m. del primero (E.O.) es mayor que la del segundo (E.A.).*

PREGUNTA 6. Bosquejo de una parábola que abre hacia abajo, “normal”, con vértice en (0,4) y los puntos de intersección con en el E.A. tienen por coordenadas (-2,0) y (2,0).

CONDICIÓN PARA EL NUEVO BOSQUEJO: u.m. en el E.A. el triple de la u.m. en el E.O.

Correctas, 15 equipos: el 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17 y 18.

Respuesta: Sobre un sistema de coordenadas *con* particiones se presenta el bosquejo de una parábola que abre hacia abajo, “abierta”, con vértice en (0,4) y con puntos de intersección en el eje de las abscisas (-2,0) y (2,0).

Comentarios: Por segunda ocasión (la primera fue la respuesta de la pregunta cinco), todos los equipos que contestan correctamente realizan el bosquejo solicitado en un sistema de coordenadas con particiones. Al parecer, los estudiantes “sienten la necesidad” de realizar particiones en los ejes en la medida que se cuantifica que tan grande es la unidad de medida de un eje con respecto al otro.

Lo anterior, también se observa en los equipos que emiten una respuesta incorrecta a la pregunta en cuestión.

Incorrectas, tres equipos: el 6, 8 y 12.

Grupo 1. Equipos 6 y 8.

Respuesta: En un sistema de coordenadas con particiones en los ejes, bosquejan una parábola que abre hacia abajo, “abierta”, con vértice en en (0,4) y las coordenadas de los puntos de intersección de la gráfica con el E.A. que le asocia el equipo 6 son (6,0) y (-6,0) y el equipo 8, (12,0) y (-12,0).

Comentarios: *Estos dos equipos conservan las coordenadas del punto de intersección de la gráfica con el E.O. es decir, las coordenadas del vértice pero, cambian las del eje de las abscisas.*

Al parecer, la interpretación que hacen el equipo 6 de la condición para el nuevo bosquejo (u.m. en el E.A. el triple de la u.m. en el E.O.), es que las abscisas de los puntos de intersección de la parábola con el E.A. (2 y -2) deben ser multiplicadas por tres para obtener las abscisas de los “nuevos” puntos de intersección (6 y -6). Por su parte, el equipo 8 la interpreta como que la distancia del origen a los “nuevos” puntos de intersección de la gráfica con el E.A. debe ser el triple de la que existe con el del E.O. Es decir, si la distancia del origen al vértice es cuatro y la u.m. en el E.A. debe ser el triple de la u.m. en el E.O. entonces, la distancia del origen a los “nuevos” puntos de intersección de la gráfica con el E.A. debe ser igual a 12 (3x4).

Grupo 2. Equipo 12.

Respuesta: Sobre un sistema de coordenadas con particiones en los ejes, se localiza el bosquejo de una parábola que abre hacia abajo, “cerrada”, con vértice en (0,4) y los puntos de intersección con el E.A. tienen por coordenadas (-2,0) y (2,0).

Comentarios: El mismo proceder que han mostrado al dar respuesta a las preguntas anteriores, lo exhiben en ésta. Por tal razón, bosquejan una parábola "cerrada" en lugar de "abierta".

PREGUNTA 7. Presenta el bosquejo de una gráfica que "inicia" en el Cuadrante II en forma descendente, tiene un "valle" en el Cuadrante III, una cresta en el Cuadrante I (entre las raíces $x = 1$ y $x = 2$), interseca al E.O en el punto (-2,0) y al E.A. en los puntos (-2,0), (1,0) y (2,0).

CONDICIÓN PARA EL NUEVO BOSQUEJO: u.m. en el E.A. un cuarto de la u.m. en el E.O.

Correctas, 15 equipos: el 1, 2, 3, 4, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 y 18.

Respuesta: Sobre un sistema de coordenadas *con* particiones realizan el bosquejo de una gráfica que presenta las mismas características que la gráfica dada en lo que se refiere a las intersecciones con los ejes, el "valle" y el máximo pero, "alargada" con referencia el E.O. o bien, "contraída" con respecto al E.A.

Comentarios: De siete preguntas, esta es la segunda ocasión (la primera fue en la pregunta 4) en que el equipo 12 responde correctamente. Esto, parece mostrar, una visión "más consolidada" hacia una interpretación inadecuada de la unidad de medida y la escala que hacia una adecuada.

Incorrectas , tres equipos: el 5, 6 y 8.

Grupo 1. Equipo 5.

Respuesta: De hecho, el bosquejo que realizan los integrantes de este equipo es similar al que llevan a cabo los 15 equipos que contestan correctamente la pregunta. El problema con este equipo es que "cambian" la posición del mínimo de la gráfica (el cual tiene una ordenada menor que -2) y lo colocan en el punto de intersección de la gráfica con el E.O. Es decir, lo ubican en (0,-2).

Grupo 2. Equipo 8.

Respuesta: El bosquejo que realizan sobre un sistema de coordenadas con particiones en los ejes presenta una "deformación" adecuada de la gráfica original y con las mismas coordenadas del punto de intersección con el eje de las ordenadas. Sin embargo, las intersecciones con el eje de las abscisa las cambian y las abscisas de tales puntos las reducen a un cuarto del valor original.

Comentarios: En las preguntas donde la diferencia en las unidades de medida está cuantificada y en el bosquejo original se estipulan los valores de los puntos de intersección con los ejes, este equipo muestra, prácticamente, el mismo patrón al emitir su respuesta en relación a las intersecciones con los ejes. Por ejemplo, si la u.m. en el E.O. es el doble de la del E.A. entonces, las ordenadas de los puntos de intersección de la gráfica con el E.O. se duplican.

Grupo 3. Equipo 6.

Respuesta: En un sistema de coordenadas con particiones en los ejes, bosquejan una gráfica que de hecho es igual a la original (incluyendo las intersecciones con los ejes) sólo que, más pequeña: prácticamente a escala de 1 a 4.

Comentarios: La pregunta que se acaba de analizar, es la última del primer apartado de este instrumento. A la luz de las respuestas emitidas hasta este momento, y considerando el número de aciertos por equipo como elementos que permiten vislumbrar el posible nivel de comprensión que los estudiantes tienen en los aspectos aquí explorados, es factible afirmar, que la mayoría de los equipos (13 de 18) logran una muy buena comprensión en dichos aspectos dado que, contestan correctamente a las siete preguntas planteadas. Por otro lado, si se considera al grupo en su conjunto es decir, los 18 equipos, el nivel de comprensión se puede catalogar como bueno en virtud de que, el promedio de respuestas correctas por equipo es seis (de siete).

Los resultados que se muestran a continuación corresponden al segundo apartado del instrumento que ahora nos ocupa. Este apartado tiene la intención de explorar en qué medida los estudiantes se dan cuenta de qué características *no cambian* en una gráfica cuando se alteran las unidades de medida (las intersecciones con los eje), qué características *cambian* cuando se alteran las unidades de medida ("distorsión" de la forma) y qué elementos de la ecuación asociada a la gráfica sufre alguna modificación (ninguno) cuando la gráfica está graficada en distintos sistemas de coordenadas cartesianas y la diferencia entre ellos es la variación de la unidad de medida en algún eje. A excepción de este último punto, los otros dos se abordaron en el apartado anterior pero, con un "enfoque concreto". Es decir, con gráficas específicas y ahora, en términos generales.

A continuación se reproduce la consigna (II) de las preguntas que conforman el segundo apartado del instrumento, la base común (1) de las cuatro primeras preguntas (i, ii, iii y iv) y la primera pregunta con sus resultados. Al finalizar con estas cuatro preguntas, se anota la base común (2) de las siguientes cuatro (i, ii, iii y iv) y se transcriben cada una de ellas con los resultados correspondientes.

II. Contesten cada una de las siguientes preguntas y expliquen su respuesta lo más detalladamente que les sea posible.

1. Cuando una gráfica está graficada en *un sistema de coordenadas* cartesianas donde la unidad de medida en el eje de las abscisas *es del mismo tamaño* que la unidad de medida en el eje de las ordenadas *y después, esa misma gráfica* es graficada en *otro sistema de coordenadas* cartesianas donde la unidad de medida en el eje de las abscisas *es mayor* que la unidad de medida en el eje de las ordenadas,

PREGUNTA i. ¿qué *"le sucede"* a *la gráfica*?

Correctas, 17 equipos: todos, excepto el 12.

Respuestas: Se "alarga", se "ensancha", se "abre", se "expande", ..., con respecto al eje de las abscisas.

Incorrecta, un equipo: el 12.

Respuesta: Se contrae en el eje de las abscisas.

PREGUNTA ii. ¿qué *"le sucede"* a *la ecuación* asociada a la gráfica?

Correctas, 18 equipos: todos.

Respuestas: Nada, es la misma, no cambia, ...

PREGUNTA iii. ¿qué "le(s) sucede" a las coordenadas del (de los) punto(s) de intersección de la gráfica con el eje de las abscisas?

Correctas, 17 equipos: todos, excepto el 8.

Respuestas: Nada, son las mismas, no cambian, ...

Incorrecta, un equipo: el 8.

Respuesta: Cambian porque la unidad de medida en el eje de las abscisas cambió.

PREGUNTA iv. ¿qué “le(s) sucede” a las coordenadas del (de los) punto(s) de intersección de la gráfica con el eje de las ordenadas?

Correctas, 18 equipos: todos.

Respuestas: Nada, son las mismas, no cambian, ...

2. Cuando una gráfica está graficada en *un sistema de coordenadas* cartesianas donde la unidad de medida en el eje de las abscisas *es del mismo tamaño* que la unidad de medida en el eje de las ordenadas *y después, esa misma gráfica* es graficada en *otro sistema de coordenadas* cartesianas donde la unidad de medida en el eje de las abscisas *es menor* que la unidad de medida en el eje de las ordenadas,

PREGUNTA i. ¿qué *“le sucede”* a *la gráfica*?

Correctas, 17 equipos: todos, excepto el 12.

Respuestas: Se “alarga”, se “cierra”, ... sobre el eje de las ordenadas.

Incorrectas, un equipo: el 12.

Respuesta: Se expande [sobre el eje de abscisas]

PREGUNTA ii. ¿qué *“le sucede”* a *la ecuación* asociada a la gráfica?

Correctas, 18 equipos: todos.

Respuestas: Nada, no cambia, ...

PREGUNTA iii. ¿qué "le(s) sucede" a las coordenadas del (de los) punto(s) de intersección de la gráfica con el eje de las abscisas?

Correctas, 17 equipos: todos, excepto el 8.

Respuestas: Nada, no cambian, siguen siendo las mismas, ...

Incorrectas, un equipo: el 8.

Respuesta: Cambian porque la unidad de medida en este eje [el de abscisas] cambió.

PREGUNTA iv. ¿qué "le(s) sucede" a las coordenadas del (de los) punto(s) de intersección de la gráfica con el eje de las ordenadas?

Correctas, 18 equipos: todos.

Respuestas: Nada, no cambian, son las mismas, ...

Comentarios: El hecho de que 16 equipos de los 18 hayan contestado correctamente las ocho preguntas de este apartado y que los dos restantes (el 8 y el 12) muestren dificultad sólo en uno de los aspectos sondeados, permite suponer que los estudiantes no tienen mayores problemas en identificar qué características de una gráfica (cualquiera que ésta sea) cambian cuando se varían las unidades de medida en los ejes, cuáles no cambian y qué le sucede a la ecuación asociada a la gráfica cuando se realiza algún tratamiento en el sistema de coordenadas sobre el cual está graficada dicha gráfica.

Lo anterior, permite suponer que el grupo en su conjunto logra un muy buen nivel de comprensión de los tópicos explorados.

Considerando las puntuaciones de los equipos, es posible afirmar que su rendimiento es ligeramente mayor en este apartado (el promedio de aciertos por equipo es de casi ocho: 7.78) que en el anterior.

Por otro lado, en las respuestas incorrectas del equipo 8 y 12 se observa la ratificación de la visión que sostienen en torno a los aspectos planteados en las respectivas preguntas y que, los conllevó a cometer los equívocos señalados en el apartado anterior.

El tercer apartado consta de tres preguntas. Cada una de ellas presenta un sistema de coordenadas con escalas diferentes donde *la longitud del segmento con el que se realiza la partición en el E.A. es la misma que la del E.O*. La intención de estas preguntas es explorar si los estudiantes identifican cómo es la longitud de la unidad de medida (mayor, menor o igual) en el E.A. comparada con la del E.O. Aspecto que se considera importante en virtud de que la “deformación” que sufre una gráfica depende de la longitud de la unidad de medida: la escala, por ejemplo, en caso extremo, puede ser la misma pero, la longitud de la u.m. no y esto, provoca “distorsión” en la forma de la gráfica.

En seguida, se transcribe la base común (III) de las tres preguntas (1, 2 y 3) del apartado y posteriormente cada pregunta con sus respectivos resultados.

III. Observen *las escalas* de *cada uno* de los siguientes sistemas de coordenadas cartesianas. ¿Qué pueden decir de las *unidades de medida de los ejes* para cada sistema?

PREGUNTA 1. Sistema de coordenadas con escala en el E.A. de dos y en el E.O. de cinco.

Correctas, 9 equipos: el 1, 2, 4, 5, 6, 10, 12, 15 y el 17.

Respuesta: u.m. en el E.A. *mayor* que la u.m. en el E.O.

Incorrectas, 7 equipos: el 3, 7, 8, 11, 13, 14 y el 18.

Grupo 1. Equipos 3, 7, 8, 14 y 18.

Respuesta: u.m. en el E.A. *menor* que la u.m. en el E.O.

Comentarios: Al parecer, los estudiantes consideran que, cuando la escala en el E.A. es menor que la del E.O. entonces, la u.m. en el E.A. es menor que la u.m. en el E.O.

Una posible explicación de la respuesta de estos equipos es que prevalece en ellos la relación de orden que existe entre los Reales positivos (números que se asignan para indicar la escala) sobre la longitud de las unidades de medida: menos unidades por intervalo, menor longitud de las unidades. En otras palabras, se impone la visión numérica sobre la geométrica. Este proceder lo podemos catalogar como "confusión escala — unidad de medida".

Grupo 2. Equipo 11.

Respuesta: "la escala es la misma solo cambia la u.m."

Comentarios: A la luz de la primera parte de la respuesta, es factible suponer que los integrantes de este equipo consideran que si la longitud de los intervalos en el E.A. es la misma que la de los del E.O. entonces, la escala es la misma. En decir, la escala está determinada por la longitud de los intervalos. En este *caso, parece que predomina la visión geométrica (longitud de los intervalos). Este razonamiento es posible etiquetarlo como "confusión longitud de intervalo — escala".*

En relación a la segunda parte de la respuesta (sólo cambia la u.m.), no es clara su posición porque, aunque efectivamente las unidades de medida son diferentes, no especifican cómo cambian dichas unidades es decir, cuál es menor o mayor.

Grupo 3. Equipo 13.

Respuesta: "la unidad de medida es la misma en ambos ejes"

Comentarios: De los tres elementos que entran en juego en el tratamiento de la escala (longitud de los intervalos, unidad de medida y la escala propiamente dicha es decir, el número asignado en el extremo de cada intervalo), este equipo presenta dificultades en los dos primeros. De tal manera que, al parecer consideran que si la longitud de los intervalos en el E.A. es igual a la de los del E.O., la unidad de medida es la misma, independientemente de la escala marcada. Su respuesta, permite entrever que ellos centran su atención en el aspecto geométrico y dejan a un lado el numérico. Este proceder, es posible etiquetarlo como "confusión longitud de intervalos — unidad de medida".

Imprecisas, 2 equipos: el 9 y el 16.

Grupo 1. Equipo 9.

Respuesta: "La inclinación estará más cerca al E.A. y la abertura será abierta".

Comentarios: Describen correctamente cómo sería la "deformación de la gráfica en ese sistema pero, no dicen nada sobre las unidades de medida.

Grupo 2. Equipo 16.

Respuesta: "la u.m del E.O. es $\frac{1}{5}$ [y] la u.m. de E.A. $\frac{1}{2}$".

Comentarios: Una interpretación a esta afirmación es que, el equipo tiene claridad sobre cual es la longitud de la unidad de medida de cada eje. La razón por la que la respuesta es catalogada como imprecisa es que no especifican, por ejemplo, $\frac{1}{5}$ *de qué, ni comparan las unidades de medida.*

PREGUNTA 2. Sistema de coordenadas con escala en el E.A. de siete y en el E.O. de siete.

Correctas, 15 equipos: el 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 17 y el 18.

Respuesta: Las unidades de medida en ambos ejes son iguales o bien, u.m. en el E.A. *igual* a la u.m. en el E.O.

Comentarios: El número de equipos que contestan correctamente en esta ocasión es considerablemente mayor a los que lo hicieron en la pregunta anterior y a los que lo harán en la pregunta siguiente (la 3). Una explicación a este hecho es que, a los estudiantes les es más accesible determinar cómo son las unidades de medida en un sistema con estas características (o similares). Pero, también puede suceder que esta respuesta correcta encubra interpretaciones inadecuadas de algunos de los elementos involucrados en el tratamiento de la escala *como por ejemplo, la "confusión unidad de medida — longitud de intervalos".*

Incorrectas, un equipo: el 11.

Respuesta: "La escala es la misma sólo cambia la u.m.".

Comentarios: Prácticamente los mismos que los de la pregunta anterior.

Imprecisas, dos equipos: el 9 y el 16.

Grupo 1. Equipo 9.

Respuesta: 'La inclinación o abertura de la gráfica, será "normal"'.

Grupo 2. Equipo 16.

Respuesta: "u.m. E.A. $\frac{1}{7}$ [y] u.m. E.O $\frac{1}{7}$.

Comentarios: El tipo de respuesta de los equipos 9 y 16 es completamente similar a la que emitieron en la pregunta anterior por lo que, los comentarios son los mismos que se anotaron en dicha pregunta.

PREGUNTA 3. Sistema de coordenadas con escala en el E.A. de 20 y en el E.O. de 15.

Correctas, 6 equipos: el 1, 2, 4, 5, 12, y el 17.

Respuesta: u.m. del E.A. *menor* que la u.m. del E.O. o bien, u.m. en el E.O. *mayor* que la u.m. en el E.A

Incorrectas, 10 equipos: el 3, 6, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 15 y el 18.

Grupo 1. Equipos 3, 6, 7, 8, 14 y 18

Respuesta: u.m. E.O. *menor* que u.m. E.A. o bien, u.m. E.A. *mayor* que u.m. E.O.

Comentarios: La respuesta de todos estos equipos, excepto la del seis, es de la misma naturaleza que la emitida en la pregunta uno de este mismo apartado. Por lo que se puede decir que, dichos equipos incurren, nuevamente, en la "confusión escala — unidad de medida". En cuanto al equipo seis, es la primera ocasión que muestra este proceder.

Grupo 2. Equipo 11.

Respuesta: "la escala es la misma solo cambia la u.m".

Grupo 3. Equipo 13.

Respuesta: "La escala es dif. en cada eje, mientras que la u.m. es la misma en ambos ejes".

Comentarios: La esencia de la respuesta de estos dos equipos, es la misma que la que emitieron en la Pregunta 1. De donde, los comentarios que amerita en esta ocasión son los señalados renglones arriba.

Grupo 4. Equipo 15

Respuesta: "La u.m. de E.O. representa $\frac{3}{4}$ partes de la u.m. del E.A.

Grupo 5. Equipo 10

Respuesta: "La UM en el EO es $\frac{1}{3}$ menor que en el EA"

Comentarios: Al parecer, el equipo 15 considera que: como 15 (escala en el E.O.) es $\frac{3}{4}$ partes de 20 (escala en el E.A.) entonces, esa es la relación entre las unidades de medida.

Por su parte, el equipo 10, posiblemente, sigue un razonamiento como el siguiente: como $\frac{1}{3}$ de 15 (escala en el E.O.) es cinco y la diferencia de 15 a 20 (escala en el E.A.) es cinco entonces, la unidad de medida en el E.O. es $\frac{1}{3}$ menor que la unidad de medida en el E.A.

Por el tratamiento numérico que hacen estos dos equipos y por trasladar las relaciones que existen en el campo numérico a la relaciones entre las unidades de medida, es posible enmarcar su respuesta como variantes de la "confusión escala — unidad de medida".

Imprecisas, dos equipos: el 9 y el 16.

Grupo 1. Equipo 9.

Respuesta: "la gráfica estará más cerca a E.O y será cerrada".

Grupo 2. Equipo 16.

Respuesta: "U.M. E.A. $\frac{1}{20}$ [y] U.M. E.O. $\frac{1}{15}$".

Comentarios: Estos dos equipos, de hecho, proceden de la misma forma que en las dos preguntas anteriores. La respuesta a la pregunta que ahora nos ocupa presenta, con las modificaciones correspondientes, las mismas características que las señaladas en aquellas preguntas.

Si como elemento para juzgar la dificultad de una pregunta se considera el número de equipos que la contestan correctamente, se puede decir que esta Pregunta 3 no sólo fue la más difícil del tercer apartado sino, adelantándonos un poco, de todo el instrumento: únicamente seis equipos dan una respuesta adecuada. Además, estos son los mismos equipos que logran los tres aciertos del apartado.

Es posible afirmar que, de los cinco apartados que conforman el instrumento que ahora se analiza, este tercer apartado es el que tuvo mayor dificultad para los estudiantes. El promedio de respuestas correctas por equipo es del orden de 1.67.

En relación al foco de interés de la investigación reportada en estas páginas, es factible afirmar que la comprensión que muestran los estudiantes en los aspectos explorados en el tercer apartado es, aunque baja, satisfactoria.

Por otro lado, los resultados anteriores indican que, si en una instrucción se pretende abordar “la escala” como objeto de estudio, es necesario hacer énfasis en todos los elementos que entran en juego en su tratamiento a fin de evitar o minimizar los problemas que puedan tener los estudiantes con un tema tan usado tanto en Matemáticas como en otras áreas del conocimiento.

Una construcción inadecuada del sistema de coordenadas puede producir “severas distorsiones” en la gráfica y conllevar a un análisis equívoco de la misma. Por tal razón, el penúltimo apartado de este instrumento pretende explorar la comprensión de los estudiantes en algunas de las convenciones que se aceptan en la construcción del sistema de coordenadas cartesianas. Para ello se formulan tres preguntas (1, 2 y 3) con base común (IV) las cuales se reproducen a continuación con sus respectivos resultados.

IV. Observen las *escalas* utilizadas en la *construcción* de *cada uno* de los siguientes sistemas de coordenadas. ¿Qué pueden decir *en cada situación*? Expliquen detalladamente.

OBSERVACIÓN: SI BIEN DESDE UN PUNTO DE VISTA TÉCNICO LO QUE EN ESTA PREGUNTA AFIRMEN LOS ESTUDIANTES NO ES POSIBLE CATALOGARLA COMO CORRECTA O INCORRECTA EN VIRTUD DE QUE NO SE LES FORMULA UNA PREGUNTA DIRECTA SINO MÁS BIEN SE LES CUESTIONA EN TÉRMINOS DE "QUE PUEDES DECIR". DESDE UN PUNTO DE VISTA MATEMÁTICO ES DECIR, POR EL CONTENIDO MATEMÁTICO QUE ELLAS CONTIENEN, Y PARTIENDO DEL HECHO QUE LOS ÚNICOS SISTEMAS DE COORDENADAS QUE ELLOS HAN ESTUDIADO SON CARTESIANOS, ES FACTIBLE CLASIFICARLAS COMO CORRECTAS O INCORRECTAS. ES EN ESTE SENTIDO EN EL QUE SE TOMAN DICHAS AFIRMACIONES PARA ETIQUETARLAS COMO CORRECTAS O NO.

PREGUNTA 1. Se muestra un sistema de coordenadas cartesianas donde la longitud de los intervalos en el eje de las abscisas es la misma e igual a la longitud de los intervalos en el eje de las ordenadas. La escala en el eje de ordenadas es de uno; en el eje de abscisas positivas, de uno y en la parte negativa de dicho eje, de dos.

Correctas, 17 equipos: todos excepto el 18.

Respuesta: No se puede construir un sistema de coordenadas así porque no se deben utilizar dos escalas y/o dos unidades de medida en el *mismo eje*.

Comentarios: Esto es, en esencia, la respuesta de los distintos equipos.

Incorrectas, un equipo: el 18.

Respuesta: “Creemos que éste tipo de sistemas puede ayudar a que la representación de la gráfica sea mejor, sin embargo también el hecho de que en un mismo eje haya 2 escalas distintas, al no observarse con cuidado, puede llegar a confundir”.

Comentarios: Aún con los señalamientos marcados en la respuesta, el hecho real es que este equipo considera factible construir sistemas de coordenadas con esas características.

PREGUNTA 2. Sistema de coordenadas cartesianas donde la longitud de algunos intervalos en el eje de las abscisas es diferente a la de las demás. En el eje de las ordenadas se presenta la misma situación y “la escala” en ambos ejes es de uno.

Correctas, 17 equipos: todos excepto el 18.

Respuesta: No se pueden construir sistemas de coordenadas como ése porque la longitud de los intervalos es distinta, lo cual implica que se están tomando unidades de medida distintas en *un mismo eje*.

Comentarios: En este tenor son las respuestas de los equipos.

Incorrectas, un equipo: el 18.

Respuesta: En el mismo sentido que la anterior.

PREGUNTA 3. Sistema de coordenadas cartesianas donde la longitud de los intervalos en el E.A. y en el E.O. es la misma e iguales entre sí. La escala en el E.A. es de cinco en cinco y en el E.O. los números asignados en los extremos de los intervalos son: 5, 25 y 50, en la parte positiva y, -5, -25 y -50, en la parte negativa.

Correctas, 9 equipos: el 1, 2, 3, 4, 9, 10, 14, 16 y el 17.

Respuesta: No se puede construir un sistema de coordenadas con esas características porque, en el E.O. *no se tiene la misma u.m.*: de cero a cinco tiene una unidad de medida, de cinco a 25 otra y otra distinta de 25 a 50. Lo mismo sucede en la parte negativa de dicho eje.

Comentarios: Lo anterior es el espíritu de las respuestas de los distintos equipos.

Incorrectas, nueve equipos: el 5, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 15 y el 18.

Grupo 1. Equipos 5, 6, 7, 8, 11, 12 y 13.

Respuesta: Si se puede construir un sistema de coordenadas como ése dado que, la longitud de los intervalos es la misma, los números asignados en la parte positiva del E.O. son los mismos que en la parte negativa y, en dicho eje, la escala y/o la unidad de medida es la misma.

Grupo 2. Equipo 15.

Respuesta: "El sistema está bien ya que ambos ejes llevan una secuencia. E.A: 5, 10,15. [y] E.O: [5], 5^2, 25x2, 50^2, ..."

Grupo 3. Equipo 18.

Respuesta: "La unidad de medida en ambos ejes es la misma sin embargo la escala es distinta. El E.O. no lleva una secuencia logica, lo cual complicaría la graficación. Creemos que éste ... [lo mismo que lo de la Pregunta 1]".

Comentarios: A la luz de los resultados de este apartado, es viable afirmar que los aspectos explorados en las dos primeras preguntas, no representan mayor dificultad para los estudiantes y que muestran una muy buena comprensión en torno a ellos. Sin embargo, no se puede decir lo mismo del sondeado en la Pregunta 3. En ésta, sólo el 50% de los equipos superan la prueba, que a decir verdad, no es un porcentaje tan indecoroso.

Si a nivel grupal, se evalúa cualitativamente la comprensión, de los estudiantes en este apartado, basándose en las puntuaciones obtenidas en las tres preguntas entonces, es posible catalogarla como "buena": nueve equipos contestan correctamente las tres preguntas; ocho, dos y únicamente el 18 no logra ningún acierto.

El quinto y último apartado de este instrumento es un ítem de base común (V) con cuatro preguntas (1, 2, 3 y 4) y cada una de ellas con cuatro opciones (incisos a, b, c y d). La tarea (tomada de Yerushalmy, 1988) tiene el propósito de que los estudiantes, por un lado, seleccionen, de las ecuaciones que se les proponen en las opciones, cuál es *la* asociada a la gráfica dada en la pregunta; y por otro, que identifiquen que tres de las cuatro gráficas presentadas (una en cada pregunta), en apariencia diferentes (sólo difieren en sus escalas), son representaciones de la misma función (las gráficas de la Pregunta 1, 3 y 4 representan la función $y = 2x$) y que, las gráficas que parecen la misma (las de la Pregunta 1 y 2) son representaciones de dos funciones diferentes (la gráfica de la Pregunta 2 representa la función $y = 4x$).

En seguida se reproduce la base común, se describe la gráfica de la Pregunta 1, se especifica cuáles son las opciones (éstas son las mismas para las cuatro preguntas) y se presentan los resultados. Posteriormente se hace lo propio para las preguntas restantes.

V. Cada una de las siguientes *cuatro rectas* están graficadas en sistemas de coordenadas cartesianas con *escalas diferentes*. ¿Cuál es *la ecuación asociada a cada recta*? *Tachen la respuesta correcta y expliquen su elección.*

PREGUNTA 1. Gráfica de la función $y = 2x$ sobre un sistema de coordenadas cartesianas (con cuadrícula) donde la longitud de los intervalos en el E.A. es la misma que los del E.O. La escala en el E.A. y en el E.O. es de cinco en cinco.

Las opciones son: a) $y = \frac{1}{2}x$; b) $y = 2x$; c) $y = 4x$ y d) $y = 10x$

Correctas, 17 equipos: Todos excepto el 3.

Respuesta: b) $y = 2x$

Observación: Según el procedimiento seguido para dar respuesta a la pregunta, los 17 equipos se pueden clasificar en tres grupos. Ellos son:

Grupo 1. Equipo 2, 4, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 17 y 18.

Procedimiento: El principio general que utilizan es de *conexiones cartesianas.*

A partir de la lectura de la gráfica, extraen las coordenadas de un punto o dos. Estos, en general, son (5,10) y/o (-5,-10).

Proceden algebraicamente para determinar el valor del coeficiente de la variable independiente ("a").

Siete equipos (el 4, 10, 14, 15, 16, 17 y el 18) realizan, más o menos, el siguiente tratamiento algebraico:

$$\begin{aligned} y &= ?x \\ 10 &= ?5 \\ 10 &= 2(5) \\ \therefore\ y &= 2x \end{aligned}$$

Los otros tres equipos (el 2, 9 y 12), el tratamiento algebraico que utilizan es:

$$\begin{aligned} a &= \frac{y}{x} \\ \frac{10}{5} &= 2 \\ \therefore\ y &= 2x \end{aligned}$$

Comentarios: El procedimiento seguido por estos diez equipos (aproximadamente el 56% de la población estudiada) parece arrojar evidencia de que el dominio de la conversión de los registros de representación gráfico y algebraico en funciones polinomiales elementales, desde un enfoque global cualitativo, favorece el estudio de dichas funciones con una orientación cuantitativa. De tal suerte que, algunos estudiantes (los de estos diez equipos) son capaces de manejar con "soltura" las conexiones cartesianas y llevar a cabo un tratamiento algebraico adecuado para determinar "la ecuación" asociada a "la gráfica" dada a pesar de que ellos, en la instrucción a la que fueron sometidos, únicamente proponían "una ecuación factible de asociársele" a "un bosquejo" determinado y en ninguna ocasión se enfrentaron a una tarea como la que ahora se analiza.

Por otro lado, probablemente, los equipos utilizan su conocimiento en el sentido de que, una recta pasa por el origen si y sólo si, b *= 0 en su ecuación asociada de la forma*

$y = ax + b$. En tal caso, esta parte la abordan desde la "perspectiva objeto" y la anterior, desde la "perspectiva proceso". En el sentido que Moschkovich, Schoenfeld y Arcavi (1993, p. 71) le dan a estos dos términos.

Grupo 2. Equipo 6 y 13.

Procedimiento: Al igual que el Grupo anterior, hacen uso de las *conexiones cartesianas.*

Extraen las coordenadas de un punto: (5,10).

Utilizan el *proceso ecuación → gráfica* a pesar de que la tarea está referida al proceso inverso. El equipo 6 tabula las ecuaciones de -3 a 5 y el 13, no hace toda la tabulación, únicamente, en cada ecuación, sustituye $x = 5$.

Comentarios: Los dos equipos trabajan bajo la "perspectiva proceso" y no es claro el procedimiento que utilizarían para determinar "la ecuación" si no se les hubieran dado las opciones.

El comportamiento del equipo 6 y13, en el sentido de afrontar la tarea desde el proceso ecuación → gráfica cuando se pretende que ésta la aborden con el proceso inverso, es similar al que observó Zaslavsky (1987) en los estudiantes con los que trabajó.

Grupo 3. Equipo 1, 5, 7, 8 y 11.

Procedimiento: Llevan a cabo un análisis *global cualitativo* de la gráfica.

A partir de dicho análisis, eligen la ecuación correcta. Es decir, descartan las otras.

Comentarios: El análisis global cualitativo que realizan es "más fino" que el trabajado en la instrucción. Discriminan $y = 4x$ e $y = 10x$ basados en el hecho de que las gráficas de estas ecuaciones tienen un ángulo mayor que la de $y = 2x$ aunque, en todas ellas, $45° < \alpha < 90°$. Esto permite decir que afrontan el problema desde la "perspectiva objeto".

No está por demás decir que estos equipos no abandonan el enfoque global cualitativo el cual, en algún momento, puede "formar una barrera" que dificulte el buen desempeño en tratamientos cuantitativos.

Incorrectas, un equipo: el 3.

Respuesta: c) $y = 4x$

Procedimiento: La forma de trabajo de este equipo es completamente similar a los del Grupo 3: *global cualitativo "más fino"*. Sólo que, naturalmente, hacen consideraciones distintas y por ellas, eligen la ecuación incorrecta.

Comentarios: Al igual que los del Grupo 3, este equipo trabaja bajo la "perspectiva objeto". No se desprenden del enfoque global cualitativo y ello, al parecer, les obstaculiza afrontar una tarea de orden cuantitativo.

PREGUNTA 2. Gráfica de la función $y = 4x$ sobre un sistema de coordenadas cartesianas (con cuadrícula) donde la longitud de los intervalos en el E.A. es la misma que los del E.O. La escala en el E.A. es de cinco en cinco y en el E.O.de diez en diez. Con estas escalas, la apariencia de la gráfica presentada en la pregunta es la misma que la de la anterior.

Las opciones son: a) $y = \frac{1}{2}x$; b) $y = 2x$; c) $y = 4x$ y d) $y = 10x$

Correctas, 15 equipos: el 1, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17 y el 18.

Respuesta: c) $y = 4x$

Observación: Nuevamente, es posible aglutinar a estos equipos en tres grupos, de acuerdo al procedimiento utilizado al responder la pregunta.

Grupo 1. Equipo 2, 4, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 17 y 18.

Procedimiento: El mismo que en la pregunta anterior.

Grupo 2. Equipo 6 y 13.

Procedimiento: El mismo que en la pregunta anterior.

Grupo 3. Equipo 1, 7 y 8.

Procedimiento: En esencia es el mismo que en la pregunta anterior. Salvo que en esta ocasión hacen referencia a la escala y argumentan su respuesta en el hecho de que, “como el valor [escala] en el E.O. aumenta el doble, la ecuación es $y = 4x$”.

Incorrectas, tres equipos: el 3, 5 y el 11.

Respuesta: b) $y = 2x$

Procedimiento: Los tres equipos proceden de la misma forma que en la pregunta anterior sólo que en este caso, al 5 y al 11 ya “no les funciona” la estrategia global cualitativa “más fina” y, aunque son conscientes del cambio de escala en el E.O. afirman que la ecuación es la misma que la anterior.

Comentarios: *No obstante que el número de respuestas incorrectas se ve aumentado en dos, con respecto a la pregunta anterior, hasta este momento, se puede decir que el desempeño grupal es bastante bueno: un poco más del 83% de los equipos afrontan con éxito los retos planteados en la Pregunta 2 y más del 94% los de la Pregunta 1. Los cambios de escala como una de las principales fuentes de ilusiones visuales gráficas (Goldenberg et al., 1988, citado en Leinhardt et al., 1990) todavía no causan grandes estragos en la población bajo estudio. Sin embargo, como se verá en las preguntas siguientes, esta situación cambia.*

PREGUNTA 3. Gráfica de la función $y = 2x$ sobre un sistema de coordenadas cartesianas (con cuadrícula) donde la longitud de los intervalos en el E.A. es la misma que los del E.O. La escala en el E.A. es de 2.5 en 2.5 y en el E.O. de diez en diez.

Opciones: a) $y = \frac{1}{2}x$; b) $y = 2x$; c) $y = 4x$ y d) $y = 10x$

Observación: En esta ocasión, tomando en cuenta el procedimiento, los equipos que contestan correctamente se dividen en dos grupos y también los que lo hacen incorrectamente.

Correctas, ocho equipos: el 2, 4, 6, 9, 12, 13, 14 y el 17.

Respuesta: c) $y = 2x$

Grupo 1. Equipo 2, 4, 9, 12, 14 y 17.

Procedimiento: El mismo que en las dos preguntas anteriores: *Conexiones cartesianas* y tratamiento algebraico.

Grupo 2. Equipo 6 y 13.

Procedimiento: El mismo que en las dos preguntas anteriores: *Conexiones cartesianas* y tabulación.

Incorrectas, diez equipos: 1, 3, 5, 7, 8, 10, 11, 15, 16 y 18.

Grupo 1. Equipo 1, 3, 5, 7, 8, 10, 11, 15 y 18.

Respuesta: a) $y = \frac{1}{2}x$ (equipos 1, 3, 7, 8, 10, 11, 15 y 18).

d) $y = 10x$ (equipo 5)

Procedimiento: Hacen un análisis de la gráfica, fundamentalmente, desde un enfoque global cualitativo.

El equipo 5, además de lo anterior, compara la gráfica en cuestión con la de la pregunta cuatro y sostiene que “al cambiar la escala esta modifica la gráfica, pero en realidad con respecto a la gráfica 4 esta ecuación es $y = 10x$ [la misma que seleccionaron en la pregunta 4]”.

Comentarios: Como se adelantó, en esta pregunta aumenta considerablemente el número de respuestas incorrectas debido, al parecer, a una ilusión visual gráfica: la gráfica de la función y = 2x (graficada en un sistema como el que se presenta en esta pregunta) muestra un ángulo, con la parte positiva del eje de las abscisas, visiblemente menor que 45°. Esto seduce a los estudiantes a considerar que la representación algebraica de la función es $y = \frac{1}{2}x$. *Sólo el* *equipo 5 afirma que la ecuación es y = 10x, "aunque visiblemente parezca que la ecuación es* $y=\frac{1}{2}x$"

Grupo 2. Equipo 16.

Respuesta: $y=\frac{1}{2}x$

Procedimiento: Conexiones cartesianas y tratamiento algebraico.

De la lectura de la gráfica, obtienen el punto (5,10) pero, al parecer, la gráfica "favorece" para que consideren que: $5=\frac{1}{2}10$. Es decir, $x=\frac{1}{2}y$ o de otra forma, $y = 2x$. Pero en lugar de esto, ellos afirman que la ecuación es $y=\frac{1}{2}x$.

PREGUNTA 4. Gráfica de la función $y = 2x$ sobre un sistema de coordenadas cartesianas (con cuadrícula) donde la longitud de los intervalos en el E.A. es la misma que los del E.O. La escala en el E.A. es de diez en diez y en el E.O. de cinco en cinco.

Opciones: a) $y=\frac{1}{2}x$; b) $y = 2x$; c) $y = 4x$ y d) $y = 10x$

Observación: Por su procedimiento, los equipos que contestan correctamente se dividen en dos grupos y los que lo hacen incorrectamente, en tres.

Correctas, nueve equipos: el 2, 4, 9, 12, 13, 14, 16, 17 y el 18.

Respuesta: c) $y = 2x$

Grupo 1. Equipo 2, 4, 9, 12, 14, 16, 17 y 18.

Procedimiento: Los equipos 2, 4, 9, 12, 14, 16 y 17 enfrentan la tarea de misma manera que en las tres preguntas anteriores.

Por lo que respecta al equipo 18, su proceder es el mismo que en las dos primeras preguntas de este apartado.

Comentarios. De los ocho equipos de este grupo, siete (el 2, 4, 9, 12, 14, 16 y el 17), son consistentes en el procedimiento que utilizan al dar respuesta a las cuatro preguntas del apartado que ahora nos ocupa. Seis (todos los anteriores excepto el 16), contestan correctamente las cuatro preguntas y el 16, aunque su consistencia es de cuatro, sólo tres de sus respuestas son correctas (la de la 3 es incorrecta).

El equipo 18 contesta correctamente tres preguntas (la 1, 2 y 4). En ellas, su proceder es el mismo y en consecuencia, su consistencia es de tres.

Grupo 2. Equipo 13.

Procedimiento: El mismo que en las tres preguntas anteriores.

Comentarios: La consistencia de este equipo es de cuatro con cuatro respuestas correctas.

Incorrectas, nueve equipos: 1, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11 y 15

Grupo 1. Equipo 1, 3, 5, 7, 8, 10 y 11.

Respuesta: a) $y = 10x$

Procedimiento: Global cualitativo “más fino”. Todos los equipos, excepto el 10, utilizan el mismo procedimiento que en las tres preguntas anteriores: global cualitativo “más fino”.

Comentarios: Los equipos 1, 3, 5, 7, 8 y 11 tienen una consistencia de cuatro en este apartado mientras que el 10, de dos: en las preguntas 1 y 2, hace uso de las conexiones cartesianas y lleva a cabo un tratamiento algebraico; y en la 3 y 4, afronta la tarea con el mismo enfoque que el resto de los equipos de este grupo.

Evidentemente, estos equipos no logran abandonar el enfoque global cualitativo y aunque a los equipos 1, 7 y 8 ello les permite abordar con éxito dos de los cuatro problemas y a los equipos 5 y 11, uno; parece claro que dicha visión los limita para enfrentar los cuestionamientos con una perspectiva cuantitativa.

Grupo 2. Equipo 15.

Respuesta: d) $y = 10x$

Procedimiento: El mismo que en las preguntas 1 y 2 (las cuales contestaron correctamente): conexiones cartesianas y tratamiento algebraico. El “problema” en esta pregunta es que eligieron el punto (0,0) y al realizar el tratamiento algebraico, dicho punto satisface la condición de que $y = 10x$.

Comentarios: Al parecer, los integrantes del equipo no repararon en el hecho de que el punto con coordenadas (0,0) satisface cualquiera de las cuatro ecuaciones que se les plantean como opciones.

Por otra parte, este equipo exhibe una consistencia de tres en el procedimiento que utiliza (preguntas 1, 2 y 4).

Grupo 3. Equipo 6.

Respuesta: c) $y = 4x$

Procedimiento: Basados en la respuesta de la pregunta 2 (que es correcta), argumentan que la ecuación es la misma que la de dicha pregunta ya que "lo que cambió fue la unidad de medida que tenían en la gráfica 2 y la u.m.E.O. pasó al E.A. y al revés".

Comentarios: En esta pregunta, el equipo 6 abandona el procedimiento que había estado utilizando en las tres primeras preguntas (lo cual nos indica una consistencia de tres) e "infieren" la representación algebraica de la gráfica de la función al comparar la gráfica de la pregunta 2 con la de la 4 y observar que las escalas estaban "intercambiadas".

En el quinto y último apartado de este instrumento, se puede decir que el rendimiento de los equipos, en su conjunto, es bueno dado que el promedio de aciertos por equipo es casi tres (2.7). Pero, si se considera que en la instrucción a la que estuvieron sometidos nunca se enfrentaron con tareas de articulación de los registros de representación gráfico y algebraico desde una perspectiva cuantitativa, es posible afirmar que su desempeño es muy bueno; más aún, si se repara en el hecho de que siete equipos tienen un rendimiento excelente (las respuestas a las cuatro preguntas son correctas) en este apartado. Todos estos elementos parecen indicar que la comprensión que logran los estudiantes en los aspectos aquí explorados es buena.

Con esto, se da por concluida la exposición de los resultados por pregunta.

Con la intención de contar con una visión más global del desempeño de los equipos en este Instrumento, en seguida se procede con la segunda parte de la presentación de los resultados: mostrarlos de manera concentrada.

CONCENTRADO DE RESULTADOS

Frecuencia de aciertos por equipo

Nº de aciertos (De 25)	Frecuencia (Nº de equipos)
25	3 (Equipos 2, 4 y 17)
23	2 (Equipos 1 y 14)
22	3 (Equipos 9, 10 y13)
21	2 (Equipos 15 y 16)
20	2 (Equipos 6 y 7)
19	1 (Equipo 18)
18	3 (Equipos 3, 5 y 11)
17	1 (Equipo 12)
14	1 (Equipo 8)

Frecuencia de aciertos por pregunta

Nº de aciertos (De 18)	Frecuencia (Nº de preguntas)
18	4 (Preguntas II.1.ii, II.1.iv, II.2.ii y II.2.iv)
17	10 (Preguntas I.1, I.2, I.4, II.1.i, II.1.iii, II.2.i y II.2.iii)
16	1 (Pregunta I.3)
15	4 (Preguntas I.6, I.7, III.2 y V.2)
14	1 (Pregunta I.5)
9	3 (Pregunta III.1, IV.3 y V.4)
8	1 (Pregunta V.3)
6	1 (Pregunta III.3)

En la tabla de la izquierda se puede observar que de los 18 equipos, el 2, 4 y el 17 son los que enfrenta con un éxito rotundo las preguntas de este segundo instrumento y el ocho, el desempeño más deficiente. Recuérdese que este equipo es el único (de los dieciocho) que *no* mostró dominio en la coordinación de registros de representación gráfico y algebraico en funciones polinomiales elementales en virtud de que sus integrantes *no* alcanzaron la mínima puntuación promedio en el postest.

Tomando como referencia el número de equipos que contestan correctamente una pregunta, es posible afirmar, a la luz de los datos que contiene la tabla de la derecha, que las preguntas II.1.ii, II.1.iv, II.2.ii y II.2.iv no representaron mayor dificultad para los 18 equipos (todos las contestan correctamente) y que la III.3, fue la más difícil para ellos.

El *promedio* de aciertos *por equipo* es, redondeando al entero más próximo, 21 (de 25) con una desviación de tres y el *promedio* de aciertos *por pregunta* es 15 (de 18) con una desviación de tres.

Con el propósito de contar con un elemento que contribuya a valorar el rendimiento de los equipos en cada uno de los cinco apartados que conforman el 2º Instrumento, a continuación se presenta una tabla con el porcentaje promedio de aciertos que obtienen los 18 equipos (en conjunto) en cada uno de dichos apartados.

Porcentaje promedio de respuestas correctas
que logran los equipos en los distintos apartados del 2º Instrumento

Apartado	Porcentaje promedio de respuestas correctas
1º	88%
2º	97.3%
3º	55.7%
4º	79.7%
5º	68%

Tomando como base los datos contenidos en esta tabla, es posible afirmar que el rendimiento de los equipos en el 2º apartado es casi excelente mientras que, en el tercero tiende a deficiente.

Al igual que en el 1er. Instrumento de Comprensión, en este 2º Instrumento, se convino asignarle diez puntos al cuestionario, con el mismo puntaje (0.4) a cada una de las respuestas correctas, a fin de contar con una visión global cuantitativa del desempeño de los equipos como un elemento más que contribuya a valorar su rendimiento y ayude a establecer comparaciones con los otros Instrumentos. En seguida, se presenta una tabla con la puntuación de cada equipo.

Puntuaciones obtenidas por los equipos en el 2º Instrumento de Comprensión titulado: "Explorando algunos aspectos sobre la escala"

Equipo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Puntuación	9.2	10	7.2	10	7.2	8	8	5.6	8.8	8.8	7.2	6.8	8.8	9.2	8.4	8.4	10	7.6

La puntuación promedio que obtienen los equipos en este 2º Instrumento es de 8.3, con una desviación de 1.2. Ambas cifras son aproximadas.

Conclusiones del 2° Instrumento de Comprensión

Basados en el proceso que utilizaron los 18 equipos para emitir sus respuestas a las 25 preguntas de este 2° Instrumento de Comprensión y en sus respuestas propiamente dichas, es factible hacer los siguientes señalamientos:

- En general, todos los equipos realizan, adecuadamente, el tratamiento que requiere una gráfica ("alargarla" o "contraerla") cuando se les solicita bosquejar la gráfica —que originalmente se localiza en un sistema de coordenadas cartesianas donde la longitud de la unidad de medida en el eje de las abscisa es la misma que la del eje de las ordenadas— en un sistema de coordenadas en el cual la longitud de dichas unidades de medida cambie de tal manera que una de ellas sea más grande (o más pequeña) que la otra (ver las Preguntas I.1, I.2, I.3, I.4, I.5, I.6, I.7, II.1.i. y II.2.i.). Dicho tratamiento lo llevan a cabo inclusive con gráficas distintas a las estudiadas por ellos durante el proceso de instrucción. Así por ejemplo, en la Pregunta I.1, 17 equipos obtienen, correctamente, el bosquejo solicitado "deformando" el círculo que se les proporciona en una elipse con eje mayor en el eje de las abscisas. Todo esto nos habla de que:

  i) los equipos se dan cuenta de que la forma de una gráfica es una de sus características visuales que "cambia" cuando la longitud de la unidad de medida de un eje es diferente a la del otro lo cual, desde la posición de Leinhardt et al. (1990), indica que ellos comprenden las representaciones gráficas, al menos en el aspecto aquí explorado;

  ii) los equipos enfrentan las gráficas desde la perspectiva objeto lo que, para Moschkovich, Shoenfeld y Arcavi (1993), es un aspecto de la comprensión de las relaciones funcionales, en particular (y aquí se agregaría, de las relaciones en general);

iii) las redes de conocimiento de los equipos se hacen más largas y organizadas lo cual, según Hiebert y Carpenter (1992), es una muestra del crecimiento de la comprensión.

- Todos los equipos manifiestan que la ecuación asociada a una gráfica no cambia a pesar de que las características visuales de su gráfica se modifican cuando ésta se grafica en distintos sistemas de coordenadas cartesianas cuya diferencia es, por ejemplo, la relación que guardan entre sí las longitudes de las unidades de medida (ver Pregunta II.1.ii. y II.2.ii.). A la luz de los problemas planteados en este 2° Instrumento de Comprensión, al parecer, los equipos logran aceptar, aparentemente sin mayor problema, que la representación algebraica de una relación es única pero su representación gráfica no. Esto parece indicar que:

  i) los equipos aplican su conocimiento con “cierta” flexibilidad lo cual, desde el punto de vista de Schoenfeld (1992), es uno de los objetivos de la instrucción matemática;

  ii) las redes de conocimiento de los equipos se hacen más largas y organizadas; esto, según Hiebert y Carpenter (1992), es una muestra del crecimiento de la comprensión.

- Todos los equipos, en un momento u otro, reconocen que las coordenadas de los puntos de intersección de una gráfica con los ejes *no* cambian a pesar de que las características visuales de ella varíen de acuerdo a las particularidades del sistema de coordenadas cartesianas en el cual se encuentre graficada (ver Preguntas I.5, I.6, I.7, II.1.iii., II.1.iv., II.2.iii., y II.2.iv.). Percatarse de esta situación es, para Leinhardt et al. (1990), una condición para una comprensión completa de las representaciones gráficas.

- Dado que la forma de la gráfica cambia dependiendo de la escala (Leinhardt et al., 1990), y “[l]os cambios de escala son una de las principales fuentes de ilusiones visuales gráficas” (Goldenberg et al., 1988, citado en Leinhardt et al, 1990, p. 19), el hecho de que seis equipos contesten correctamente las Preguntas III.1., III.2. y III.3.; y sólo uno, lo haga incorrectamente, muestra que los equipos distinguen, satisfactoriamente, la relación que guardan las longitudes de las unidades de medida cuando, en un sistema de coordenadas cartesianas los intervalos en el eje de las abscisas son del mismo tamaño que los del eje de las ordenadas y las escalas son iguales o diferentes.

- Ante un conjunto de tres sistemas coordenados que violentan las convenciones que se aceptan para su construcción (Preguntas IV.1., IV.2. y IV.3.), la mayoría de los equipos (17) reconocen que *no* se deben utilizar dos escalas y/o unidades de medida en el *mismo eje* (Preguntas IV.1. y IV.2.). Los resultados obtenidos en la Pregunta IV.1. difieren de los que, de acuerdo a Leinhardt et al. (1990), emanaron del estudio de Kerslake: “muchos estudiantes creyeron que era legítimo construir escalas diferentes para las partes negativa y positiva de los ejes” (p. 43). Por otra parte, nueve equipos manifiestan acertadamente, de una forma u otra, que el sistema de coordenadas presentado en la Pregunta IV.3., contraviene la convención de que “para cada eje cualesquiera dos intervalos de la misma longitud representan el mismo número de unidades” (Leinhardt et al., 1990, p. 19).

- En términos generales, es posible decir que la mayoría de los equipos abordan con “relativo éxito” la conversión del registro gráfico al algebraico de funciones lineales en problemas que exigen un enfoque cuantitativo y el manejo de escalas (Preguntas V.1., V.2., V.3. y V.4.): siete equipos contestan correctamente las cuatro preguntas; tres equipos, tres preguntas; cinco equipos, dos; dos equipos, una y sólo un equipo contesta incorrectamente las cuatro preguntas. Este desempeño parece revelar, por un lado, que las redes de conocimiento de los equipos se hacen más largas y organizadas lo cual, según Hiebert y Carpenter (1992), es una muestra del crecimiento de la comprensión y por otro, que los equipos aplican su conocimiento con "cierta" flexibilidad lo cual, desde el punto de vista de Schoenfeld (1992), es uno de los objetivos de la instrucción matemática.

- La mayoría de los equipos (12), al enfrentar los problemas del Apartado V, i) extraen de las gráficas las coordenadas de algunos de sus puntos; ii) hacen uso de la conexión cartesiana y, iii) la representación algebraica es considerada desde la perspectiva objeto por diez equipos y desde la perspectiva proceso por los otros dos. Lo primero señala que la gráfica de una función la afrontan desde la perspectiva proceso, lo cual, nuevamente, difiere de lo que, a decir de Knuth (2000), han sugerido los investigadores: "la incapacidad [de los estudiantes] para ver los puntos individuales que comprende una línea" (p. 504). Lo segundo y tercero, desde el marco de Moschkovich, Schoenfeld y Arcavi (1993), sugieren una comprensión de las relaciones funcionales.

- 16 equipos, al margen de que su respuesta sea correcta o no, hacen frente a los problemas planteados en las Preguntas V.1., V.2., V.3. y V.4. desde el proceso gráfica$\rightarrow$ecuación, tal como lo requieren dichas preguntas; esto difiere de lo reportado por Zaslavsky (citada en Leinhardt et al., 1990, p. 36) quien observa que cuando los problemas que enfrenta su población bajo estudio se refieren al proceso gráfica$\rightarrow$ecuación, los estudiantes tendieron a trabajar en dirección de la ecuación a la gráfica. Abordar problemas concernientes al proceso gráfica$\rightarrow$ecuación mediante el proceso ecuación$\rightarrow$gráfica sólo se observa en dos equipos de nuestra población: uno de ellos lo utiliza en las cuatro preguntas citadas y el otro, en las tres primeras.

- El porcentaje de respuestas correctas de los 18 equipos en las Preguntas V.1., V.2., V.3. y V.4. son 94.4, 83.3, 44.4 y 50, respectivamente. A pesar de que Kerslake (1988, citado en Leinhardt et al, 1990) reporta, en general, porcentajes superiores para las mismas cuatro preguntas: “91, 94, 61 y 69.7, respectivamente” (Leinhardt et al, 1990, p. 44); se considera que la población bajo estudio logra un desempeño bastante satisfactorio en estos problemas de escala sobre todo si se considera que estos 18 equipos, prácticamente durante todas las sesiones que estudiaron la conversión de los registros de representación gráfico y algebraico en funciones polinomiales elementales lo hacen con un enfoque global cualitativo; esto implica, entre otras cosas, un sistema de coordenadas *sin escalas*, mientras que (según lo refieren Leinhardt et al, 1990) las lecciones que enfrentó la población de Kerslake fueron asistidas por computadora y esto involucra, necesariamente, el uso de escalas.

- Todo lo hasta aquí señalado, en términos generales, parece arrojar evidencia de que el dominio en la conversión de los registros de representación gráfico y algebraico en funciones polinomiales elementales, desde un enfoque global cualitativo, favorece el estudio de dichas funciones con una orientación cuantitativa incluyendo cambios de escala.

- No obstante lo anterior, algunos equipos ─en determinadas ocasiones─ son atrapados en las redes de las ilusiones visuales gráficas que, según Goldenberg (citado en Leinhardt et al., 1990), provocan los cambios de escala. Así por ejemplo, el caso más representativo (por considerarse el más extremo) lo constituye el desempeño de un equipo que contesta correctamente las Pregunta V.1., V.2. y V.4. pero, la gráfica de la función $y = 2x$ en un sistema de coordenadas como el de la V.3., lo seduce a considerar que su representación algebraica es $y = \frac{1}{2}x$. Otros siete equipos incurren en este mismo equívoco.

- Un equipo “no logra” desprenderse del enfoque global cualitativo cuando se enfrenta a los problemas planteados en el Apartado V y todas sus respuestas son incorrectas. En este caso, es posible decir que dicho enfoque obstaculiza el desempeño del equipo en problemas que exigen un acercamiento cuantitativo. Otros equipos (cinco en la Pregunta V.1. y tres en la V.2.) llevan a cabo un análisis de la gráfica desde un enfoque global cualitativo pero, si se nos permite el término, "más fino" (si se compara con el que ellos aprendieron) que les permite abordar con éxito las referidas preguntas. Si bien, se puede decir, que estos equipos no abandonan el enfoque global cualitativo, lo que parece ser un hecho es que: i) extienden su red de conocimientos y, ii) generan un análisis global cualitativo "más detallado" que el estudiado por ellos a fin de enfrentar el reto que las mencionadas preguntas les plantean. Esto, desde la perspectiva de Hiebert y Carpenter (1992), es, lo primero, una muestra del crecimiento de la comprensión y lo segundo, una consecuencia de la comprensión. Con la óptica de Schoenfeld (1992), el actuar de los equipos es una señal de que aplican su conocimiento con "cierta" flexibilidad lo cual, es uno de los objetivos de la instrucción matemática.

- Algunos equipos, en algunas ocasiones, consideran que las coordenadas de los puntos de intersección de la gráfica con los ejes cambian cuando se especifica qué tan grande (o tan chica) es la longitud de la unidad de medida de un eje con respecto al otro. Así por ejemplo en la Pregunta I.5, donde los puntos de intersección con los ejes, del bosquejo de la gráfica que se les proporciona, tienen por coordenadas (2,0), (-2,0), (0,1) y (0,-1) y se les solicita bosquejar dicha gráfica en un sistema de coordenadas donde la unidad de medida en el eje de ordenadas sea el doble de la del eje de abscisas, un equipo sostiene que los "nuevos" puntos de intersección son (2,0), (-2,0), (0,4) y (0,-4) y otro, (2,0), (-2,0), (0,2) y (0,-2). En ambos casos las intersecciones con abscisas no las modifican dado que, según ellos, como "la condición en la unidad de medida es para el eje de ordenadas y no para el eje de las abscisas", las coordenadas de los puntos de intersección con el eje de las ordenadas deben cambiar y los de abscisas, permanecer igual.

- De los tres elementos que entran en juego en el cambio de escalas: longitud de la unidad de medida en cada eje, longitud de los intervalos en los ejes y la escala propiamente dicha es decir, “la asignación de valores a los intervalos entre las líneas del sistema cartesiano” (Leinhardt et al., 1990, p. 4); algunos equipos muestran dificultades para diferenciarlos. Por ejemplo, en la Pregunta III.1. cinco equipos, al parecer, consideran que cuando la escala en el eje de las abscisas es menor que la del eje de las ordenadas entonces, la unidad de medida en el eje de abscisas es menor que la del eje de ordenadas. Una posible explicación a este hecho es que en estos equipos prevalece la relación de orden que existe entre los Reales positivos (números que se asignan para indicar la escala) sobre la longitud de las unidades de medida: menos unidades por intervalo, menor longitud de las unidades. En otras palabras, se impone la visión numérica sobre la geométrica. Este proceder se ha catalogado, en el trabajo que aquí se reporta, como “confusión escala — unidad de medida”. En la misma pregunta, un equipo supone que si la longitud de los intervalos en el eje de abscisas es la misma que la de los del eje de ordenadas entonces, la escala es la misma. Es decir, la escala está determinada por la longitud de los intervalos. En este caso, parece que predomina la visión geométrica (longitud de los intervalos). Este razonamiento se ha etiquetado como “confusión longitud de intervalos — escala”. Finalmente, un equipo más, considera que si la longitud de los intervalos en el eje de las abscisas es igual a la de los del eje de las ordenadas, la unidad de medida es la misma, independientemente de la escala marcada. Aquí, se centra la atención en el aspecto geométrico y se deja a un lado el numérico. Este proceder, se ha denominado “confusión longitud de intervalos — unidad de medida”.

A la luz de los resultados expuestos ─los cuales muestran que 17 equipos superan la mayoría de los retos planteados en este 2° Instrumento de Comprensión─ y del análisis que de ellos se realiza, es posible decir, al igual que en el 1er. Instrumento, que el proceso de instrucción al que fue sometida la población bajo estudio, no sólo logra que 17 de los 18 equipos dominen la conversión de registros de representación gráfico y algebraico en funciones polinomiales elementales (funciones de la forma $y = ax^n + b$, *donde* $a, b \in \Re$, $a \neq 0$ y $n = 1, 2$ y 3) por la vía global cualitativa sino también promueve aprendizajes con comprensión (al menos para los aspectos aquí explorados): en términos generales, los equipos se dan cuenta de qué características visuales de la gráfica no cambian y qué características sí cambian cuando se alteran las longitudes de las unidades de medida y/o la escala en los sistemas de coordenadas donde dicha gráfica es graficada y realizan los tratamientos que ella requiere (“alargarla” o “contraerla”); se mueven entre la perspectiva objeto y proceso, al enfrentar las gráficas y las ecuaciones; hacen uso de la conexión cartesiana; sus redes de conocimiento se hacen más largas y organizadas; aplican su conocimiento con “cierta” flexibilidad; generan un análisis global cualitativo “más fino” que el que ellos aprendieron; reconocen violaciones a las convenciones que se aceptan para la construcción del sistema de coordenadas cartesianas; abordan con “relativo éxito” la conversión del registro gráfico al algebraico de funciones lineales en problemas que exigen un enfoque cuantitativo y el manejo de escalas.

A pesar de lo anterior, algunos equipos, en ciertas ocasiones, enfrentan un problema con una visión global cualitativa cuando la situación demanda un enfoque cuantitativo; son “atraídos” por las ilusiones visuales gráficas; utilizan el proceso ecuación $\rightarrow$ gráfica al abordar un problema referido al proceso inverso (gráfica $\rightarrow$ ecuación); incurren, en lo que aquí se ha denominado, “confusión escala─unidad de medida”, “confusión longitud de intervalos─escala” y “confusión longitud de intervalos─unidad de medida”.

Por otra parte, el desempeño de todos los equipos, excepto el ocho, en el 1er. y 2º Instrumento, nos conduce a sospechar que el dominio en la coordinación de registros de representación gráfico y algebraico en funciones polinomiales elementales desde un enfoque global cualitativo, favorece la comprensión de las representaciones gráficas y algebraicas. Por ende, se presume ─basados en una afirmación de la NCTM (2000) en el sentido de que "[a]prender con comprensión también hace el aprendizaje subsecuente más fácil" (p. 20)─, que abordar la representación gráfica y algebraica con un enfoque cuantitativo será más fácil para los estudiantes, al menos en los aspectos explorados en tales instrumentos. Un elemento más que apoya esta afirmación es el hecho de que el único equipo de los 18 (el 8) que no logró el dominio de la citada coordinación no ha conseguido superar ninguno de los dos instrumentos: su puntuación en el primero es 3.84 y en el segundo, 5.6.

Para concluir, por los resultados que se obtienen de los aspectos explorados en esta sección, es posible hacer las siguientes valoraciones:

1. Al parecer, el proceso de instrucción al que fue sometida la población bajo estudio muestra ser una *estrategia de instrucción adecuada*.
2. Abordar la conversión de los registros de representación gráfico y algebraico (en funciones de la forma $y = ax^n + b$, *donde* a, *b* $\in \Re$, $a \neq 0$ y $n = 1, 2$ y 3) con un enfoque global cualitativo parece *favorecer* el análisis de las gráficas y de las ecuaciones desde un enfoque cuantitativo.
3. En términos generales, los equipos logran una *buena comprensión* de los aspectos aquí explorados; esto juzgado a la luz de los marcos de Hiebert y Carpenter (1992), Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990) y Moschkovish, Schoenfeld y Arcavi (1993).

4ª Parte
Resultados del 3er. Instrumento de Comprensión

Introducción

Las páginas siguientes están dedicadas a presentar los resultados de los dieciocho equipos, cuando éstos enfrentan las tareas contenidas en el Tercer Instrumento de Comprensión denominado "*Representaciones gráfica y algebraica en contexto*".

El propósito fundamental del instrumento en cuestión, es explorar cuál es la interpretación y construcción de las representaciones gráficas que hacen los estudiantes cuando el contexto del problema mismo —a menudo llamado la situación del problema (National Council of Teachers of Mathematics, 1989)— ya *no es abstracto*, como ellos siempre lo trabajaron en el proceso de instrucción e inclusive en los dos instrumentos anteriores, sino *contextualizado* —en el sentido que Leinhardt et al. (1990) asignan a estos términos—.

El hecho de que en el proceso enseñanza-aprendizaje al que fueron sometidos los estudiantes con la intención de que dominaran la articulación de registros de representación gráfico y algebraico en funciones polinomiales elementales, no se hayan abordado *situaciones contextualizadas* ─con la acepción que Leinhardt et al. (1990) dan a la expresión─ y que el instrumento que las presenta sea, de hecho, el último que enfrentan los dieciocho equipos (recuérdese que *el* último instrumento de este estudio sólo se aplicó a diez estudiantes un año escolar después de la instrucción), no es fortuito; responde, principalmente, por un lado, a la posición que sostiene Duval (1992):

> En vista de los análisis precedentes, aparece que un aprendizaje de la vía de interpretación global no puede economizar un estudio puramente matemático. Porque es en ese marco que la articulación entre valores de las variables visuales y propiedades conceptuales relativas a esos valores puede mostrarse por sí misma. La significación de las gráficas cartesianas, y en consecuencia su lectura, depende de esta articulación ...
>
> La presentación de un fenómeno físico, económico o biológico da tal vez un interés mayor a las gráficas, pero esta presentación no facilita la aprehensión del funcionamiento semiótico de un registro, ella lo presupone por el contrario. (p. 138)

y por otro, a lo manifestado por Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990) en el sentido de que:

> Sin embargo, no es claro que una clase de contexto de la vida real apoye siempre el proceso de aprendizaje (p. 20).

El Instrumento incluye cinco situaciones contextualizadas y un total de 14 preguntas. Las cuatro primeras preguntas (etiquetadas como a, b, c y d) están referidas a una misma situación (denotada como 1); las seis siguientes (a, b, c, d, e y f), aluden a la situación 2; las otras dos, a la 3 y las últimas dos preguntas, a la 4 y 5, respectivamente.

Continuando con la misma dinámica en la presentación de resultados, éstos, en primera instancia, se muestran por pregunta y posteriormente, concentrados.

Cuando se exponen por pregunta, se reproduce la situación con el número que la identifica; posteriormente, si es el caso, una descripción de la gráfica que incluye y finalmente, cada una de las preguntas con sus respectivos resultados. Éstos, generalmente, se encuentran clasificados en grupos. En algunos casos, el criterio clasificatorio está en función de la respuesta emitida y en otros, por el tipo de explicación que proporcionan los equipos a su respuesta.

RESULTADOS POR PREGUNTA

Para iniciar con la exposición de estos resultados y consecuentes con el esquema de presentación, descrito renglones arriba, se procede a reproducir la primera situación.

Antes de proseguir, cabe señalar que en los rubros de "*respuesta*" y "*explicación*", en algunas ocasiones se anota textualmente lo que emitió algún equipo (bien sea porque es el único que asume determinada posición o porque refleja el sentir de algunos más) y en otras, la esencia o el consenso de lo que manifiestan unos equipos.

1. En el sistema de coordenadas cartesianas que se muestra a continuación, se encuentran los bosquejos de las gráficas que representan la cantidad de agua de dos familias (F_1 y F_2) durante el tiempo que la consumen. En base a los bosquejos contesten las siguientes preguntas.

DESCRIPCIÓN DE LAS GRÁFICAS:

En un sistema de coordenadas cartesianas sin particiones en los ejes; el eje de las abscisas con la leyenda "Tiempo" y el eje de las ordenadas, "Agua en el tinaco"; se localiza, en el primer Cuadrante, el bosquejo de dos rectas con pendiente negativa que se intersecan en un punto de la parte positiva del eje de las ordenadas. El ángulo que forma la recta etiquetada como F_1 con la parte positiva del eje de abscisas (α) es mayor que 90° pero menor que 135° mientras que el de F_2, $135° < \alpha < 180°$. La ordenada del punto extremo de F_1 es mayor que la de F_2.

PREGUNTA a. ¿Cómo era la cantidad original de agua del tinaco en la familia F_1 con respecto a la cantidad de agua de la familia F_2?

Correctas, 18 equipos: Todos.

Respuesta: Igual.

Explicación: Parten del mismo punto.

PREGUNTA b. ¿Qué familia gasta más agua?

Correctas, ocho equipos: el 2, 4, 5, 7, 12, 14, 16 y el 18.

Respuesta: F_2.

Explicación: "Tomando en cuenta el término de cada gráfica y relacionándolo con el eje del agua ..." (Equipo 16).

Incorrectas, diez equipos: el 1, 3, 6, 8, 9, 10, 11, 13, 15 y el 17.

Grupo 1. Equipos 1, 8, 10, 13 y 18.

Respuesta: F_1.

Explicación: Gasta más agua en menos tiempo.

Grupo 2. Equipo 15.

Respuesta: F_1.

Explicación: "Gasta más de la mitad del agua [de toda] en menos tiempo".

Grupo 3. Equipo 6.

Respuesta: F_1.

Explicación: "La gasta [toda] en menos tiempo".

Grupo 4. Equipos 3 y 11.

Respuesta: F_1.

Explicación: "F_1 gasta la misma cantidad de agua en menos tiempo que F_2" (equipo 11).

Grupo 5. Equipo 9.

Respuesta: F_1.

Explicación: "El bosquejo de la gráfica asociada a F_1 está más cerca del EO".

Comentarios: La respuesta a esta pregunta exige que los estudiantes hagan un análisis puntual es decir, deben centrar su atención en el punto extremo de cada gráfica y comparar sus ordenadas. Sin embargo, al parecer, los diez equipos que contestan incorrectamente, no se restringen a dicha lectura. La esencia de las explicaciones revela un análisis global de las gráficas que los conduce a considerar que F_1 *gasta más rápidamente el agua que* F_2 *. La diferencia entre los cuatro primeros grupos estriba en los trazos auxiliares o las proyecciones a los ejes que realizaron (algunos equipos lo hicieron materialmente y otros, al parecer, visualmente) para emitir su respuesta. Al equipo del Grupo 5 le "basta" la inclinación de las rectas (valor de* α*).*

Posiblemente, las respuestas se pueden interpretar desde dos perspectivas que estén operando simultáneamente. La primera, debida al análisis global de las gráficas y la segunda, a los distractores personales: distractor basado en experiencias personales (Janvier 1981, citado en Leinhardt et al., 1990).

Un análisis global de las gráficas (primera perspectiva) conlleva a establecer quién gasta más rápidamente el agua. Esto aunado a su experiencia de que, quien gasta más rápidamente el agua, gasta más agua (distractor personal, segunda perspectiva), puede producir las respuestas en cuestión.

En esta ocasión, al parecer, el enfoque global limita el análisis puntual requerido en la situación planteada y además, tal vez, en estos alumnos se presenta lo que Janvier (citado en Leinhardt et al., 1990) señala en el sentido de que "[c]iertamente para muchos de ellos [de los estudiantes] las memorias vívidas y/o las fuertes imágenes mentales que apoyan su pensamiento entran en conflicto con los aspectos abstractos más básicos del problema. La necesaria abstracción se hace más difícil debido a la base más amplia de información a partir de la cual se deriva." (p. 40)

PREGUNTA c. ¿Qué familia gasta más rápidamente el agua?

Correctas, 18 equipos: todos.

Respuesta: F_1.

Grupo 1. Equipos 3, 7, 8, 11, 14, 15 y 17.

Explicación: "Consume la misma cantidad [de agua] en menor tiempo" (Equipo 7).

Grupo 2. Equipo 6.

Explicación: "El intervalo de tiempo es menor [el de F_1] al intervalo de F_2".

Grupo 3. Equipos 1, 2, 4, 5, 10, 12, 13 y 18.

Explicación: "Consume $[F_1]$ más agua en menos tiempo" (Equipo 1).

Grupo 4. Equipo 16.

Explicación: "Debido al transcurso del tiempo".

Comentarios: Los 17 equipos de estos cuatro grupos, hacen uso de trazos auxiliares o proyecciones a los ejes para emitir su respuesta. En algunos casos éstos se registraron por escrito y en otros, es posible inferirlos a partir de la explicación proporcionada. Algunas de éstas son escuetas y por ejemplo, la del equipo 16 (Grupo 4) hasta imprecisa. Pero, al parecer, los miembros de este equipo no hacen referencia alguna a la cantidad de agua debido a que, al prolongar las rectas hasta que corten al eje de las abscisas la cantidad de agua es cero y, por tal razón, "simplemente" no la incluyen en su explicación.

Grupo 5. Equipo 9.

Explicación: "Porque F_1 es mayor que -1".

Comentarios: Con toda la imprecisión del lenguaje utilizado e inclusive con "problemas" con la relación de orden en los números negativos, este equipo es el único que centra su explicación en el valor del coeficiente de la variable independiente de las ecuaciones asociadas: " F_1 *es mayor que -1". En otras palabras, "traducen" la rapidez con la que las familias gastan el agua en el valor de "*a*" de las ecuaciones asociadas a las rectas que se les presentan. Es decir, con la pendiente. Concepto, que no está por demás recordar, no se abordó en la instrucción.*

En relación a los 18 equipos, es posible afirmar que, independientemente de la estrategia utilizada para dar respuesta a la pregunta, fueron capaces de interpretar adecuadamente las gráficas. Esto, al parecer, nos da elementos para suponer que el recurso de un enfoque global cualitativo puede ayudar a reducir las dificultades que habrá de enfrentar esta población cuando, llegado el momento, estudien formalmente el concepto de pendiente.

PREGUNTA d. ¿Qué familia usa más tiempo el agua?

Correctas, 16 equipos: todos excepto el 1 y el 18.

Respuesta: F_2.

Grupo 1. Equipos 2, 5, 8, 11, 13, 14 y 17.

Explicación: "Porque en el eje de las abscisas que representa el tiempo se observa que F_1 tiene menor tiempo que F_2. Por lo tanto F_2 es mayor" (Equipo 5).

Comentarios: En este grupo se aglutina a los equipos que trazan (unos de una manera más explícita que otros) las proyecciones al eje de las abscisas.

Grupo 2. Equipos 10 y 16.

Explicación: "Porque de acuerdo a los ejes la F_2 se encuentra más alejado del eje de las ordenadas por lo cual respecto al eje de las abscisas, el agua se consume en más tiempo" (Equipo 10).

Comentarios: Los dos equipos trazan las proyecciones al eje de las ordenadas.

Grupo 3. Equipos 3, 4, 6, 7, 9, 12 y 15.

Explicación: "El intervalo de tiempo para F_2 es mayor que para F_1" (Equipo 6).

Comentarios: Los miembros de este grupo, al parecer, resuelven el problema visualmente.

Incorrectas, dos equipos: el 1 y el 18.

Respuesta: F_1.

Explicación: "F_1 por ej. la usa durante todo el día y diario en cambio F_2 la usa solo medio día, por ello le dura más" (Equipo 18).

Comentarios: Posiblemente estos dos equipos, basados en la respuesta que dieron a la pregunta anterior, consideran que, como F_1 gasta más rápidamente el agua que F_2 entonces, la usa más tiempo. Nuevamente parece imponerse un enfoque global de la gráfica a uno puntual. Esto aunado a los distractores personales que pueden estar "tiñendo" la situación, ayuda a dar cuenta de la respuesta.

Por otro lado, es factible afirmar que el desempeño de los 18 equipos en la primera situación es bueno: el porcentaje promedio de respuestas correctas por equipo es de 82.5%; ocho equipos (44.4%) contestan correctamente las cuatro preguntas de esta situación; el número máximo de respuestas incorrectas por equipo es dos y sólo dos equipos (11.1%) están *en ese caso. No obstante lo anterior, se observa que en algunas ocasiones (por ejemplo en la pregunta b) algunos equipos no "logran desprenderse" del enfoque global y ello los limita para afrontar con éxito situaciones que demandan un enfoque puntual. Además, en algunas circunstancias, sus experiencias personales (distractores personales), parecen ser un factor que propicia o "favorece" la utilización de un enfoque global cuando éste no es adecuado. Pero aún con esto, es factible considerar que los estudiantes dan muestras suficientes de que logran una buena comprensión de las representaciones gráficas.*

2. Dos automovilistas (A y B) para dirigirse de su casa al trabajo utilizan únicamente vías rápidas. Las gráficas siguientes representan la distancia recorrida durante el tiempo que tardan en llegar a su trabajo. En base a las gráficas contesta las siguientes preguntas.

DESCRIPCIÓN DE LAS GRÁFICAS:

En un sistema de coordenadas cartesianas con escala en los ejes de diez; el eje de las abscisas con la leyenda "Tiempo (min)" y el eje de las ordenadas, "Distancia (Km)"; se localiza, en el primer Cuadrante, una recta (con la etiqueta "A") con pendiente menor que uno, que parte del origen, la abscisa del punto extremo es 70 y la ordenada es, aproximadamente, 48. La segunda gráfica que se localiza en ese mismo cuadrante está etiquetada como "B". Corresponde a una función creciente cuya forma es "similar" a la rama de una parábola que abre hacia arriba; su punto de intersección con los ejes es (0,0); las coordenadas de su punto extremo son (40,40); el punto de intersección con la recta es, aproximadamente, (25, 28) y en el intervalo de tiempo $<0,25>$ se encuentra por debajo de la recta y a partir de 25 minutos por arriba de ella.

PREGUNTA a. ¿Cuántos Km recorre el automovilista B para llegar a su trabajo?

Correctas, 16 equipos: todos excepto el 15 y el 16.

Respuesta: 40 Km.

Explicación: "En el eje que marca la distancia, la coordenada del punto B, es decir del automovilista, se encuentra en 40 aprox." (Equipo 4).

Comentarios: Estos 16 equipos, al parecer, no tuvieron mayor problema para interpretar adecuadamente la gráfica con un enfoque puntual. Para ello, implícita o explícitamente hacen la proyección del punto extremo de B al eje de las ordenadas.

Incorrectas, dos equipos: el 15 y el 16.

Respuesta: 50 Km.

Explicación: "Aunque en la gráfica no se note, tomando en cuenta la curva, se aproxima a los 50 Km" (Equipo 15). "Debido a la curvatura que hizo B en el camino" (Equipo 16).

Comentarios: La explicación que proporcionan los equipos 15 y 16, deja entrever que, como señala Kerslake (citado en Leinhardt et al., 1990), los estudiantes interpretan las gráficas de movimiento como las trayectorias de los viajes reales. En otras palabras, hacen una interpretación icónica: "(...) los estudiantes a veces interpretan una gráfica de una situación como una imagen literal de esa situación" (Leinhardt et al., 1990, p. 39).

PREGUNTA b. ¿Cuánto tiempo se tarda en llegar el automovilista A a su trabajo?

Correctas, 18 equipos: todos.

Respuesta: 70 min o, 1 hr con 10 min.

Explicación: "Si trazamos una paralela al E.O que pasa por "A" y corte al EA. nos daremos cuenta q' el tiempo es 70 min)" (Equipo 12).

Comentarios: En esta ocasión, los 18 equipos interpretan adecuadamente la gráfica con un enfoque puntual. Algunos equipos trazan la paralela correspondiente y otros, sólo la "visualizan".

PREGUNTA c. ¿Qué automovilista recorre más distancia durante los primeros 30 minutos?

Correctas, 17 equipos: todos excepto el18.

Respuesta: B.

Explicación: "Tomando en cuenta los puntos que marcan la distancia recorrida en determinado tiempo, en este caso 30 min. vemos que A recorrió 20 Km y B, 30 Km" (Equipo 14).

Incorrectas, un equipos: el 18.

Respuesta: "Ninguno".

Explicación: "Porque a ese tiempo los dos automovilistas recorren la misma distancia".

Comentarios: El problema con este equipo es que a pesar de que traza las paralelas a los ejes es decir, el procedimiento seguido es correcto, esos trazos los realizan a pulso y con imprecisión por lo que, la "poca" diferencia entre las distancias "se pierde" por la falta de precisión.

No obstante lo anterior, hasta este momento, en general, la población bajo estudio no ha presentado mayores dificultades en las tres preguntas que se han analizado.

PREGUNTA d. ¿A qué automovilista le queda más lejos su trabajo?

Correctas, 17 equipos: todos excepto el 16.

Respuesta: A.

Explicación: "Porque recorre mayor distancia en Km" (Equipo 3).

Incorrectas, un equipos: el 16.

Respuesta: "Los dos están a la misma distancia".

Explicación: "Debido al camino que recorren ya que "B" tiene que hacer una curvatura y A es constante".

Comentarios: Por segunda ocasión (la primera fue en la pregunta "a" de esta misma situación), el equipo 16 hace una interpretación icónica de las gráficas.

PREGUNTA e. ¿Qué representa el punto de intersección de ambas gráficas?

Correctas, 8 equipos: el 2, 3, 7, 9, 10, 12, 14 y el 18.

Respuesta: "Que en ese tiempo, los 2 automovilistas recorren la misma distancia y por eso las gráficas se juntan en ese punto" (Equipo 18).

Incorrectas, diez equipos: el 1, 4, 5, 6, 8, 11, 13, 15, 16 y 17.

Grupo 1. Equipos 2, 3, 7, 9, 10, 12 y 14.

Respuesta: "El punto donde se cruzan los 2 automovilistas" (Equipo 1).

Grupo 2. Equipo 4.

Respuesta: "Es el momento en que B alcanza a A".

Grupo 3. Equipo 6.

Respuesta: "que en el camino cruzan un punto en común".

Grupo 4. Equipo 11.

Respuesta: "El cambio que sufre B a partir de ese punto".

Comentarios: Los equipos de estos cuatro grupos hacen una interpretación icónica de las gráficas. Su clasificación responde al aspecto de la situación en la cual centran su atención. Los del Grupo 1, cuya respuesta está en el mismo tenor que la que se cita del equipo 1, consideran a los dos automovilistas; el del 2, centra la atención en el automovilista B (sin hacer caso omiso del A); el del 3, en el "camino" y el del 4, en B (sin tomar en cuenta al A) y además, no aclara a qué tipo de cambio se refiere.

Independientemente de cual es el foco de atención de los equipos, el hecho real es que la mayoría de ellos (10 de 18 casi *el 56%), como se menciona renglones arriba, hacen una interpretación icónica de las gráficas lo cual nos deja ver, que al interpretar gráficas en situaciones contextualizadas, la población bajo estudio, comparte la misma dificultad que otras poblaciones: "El error estudiantil citado con más frecuencia con respecto a la interpretación y construcción de gráficas que representan situaciones es la interpretación icónica." (Leinhardt et al., 1990, p. 39). Pero, dicha interpretación no es exclusiva de los estudiantes, también se ha observado en profesores de Bachillerato (Hitt, 1992). Ante este hecho, que ocho equipos (aproximadamente el 44%) hayan interpretado correctamente las gráficas, nos permite considerar que, si bien, el desempeño global del grupo en esta Pregunta e, no es satisfactorio, tampoco se puede decir, que haya sido un rotundo fracaso.*

PREGUNTA f. ¿Qué automovilista crees que maneja más rápido?

OBSERVACIÓN: SI BIEN DESDE EL PUNTO DE VISTA TÉCNICO LO QUE EN ESTA PREGUNTA AFIRMEN LOS ESTUDIANTES NO ES POSIBLE CATALOGARLA COMO CORRECTA O INCORRECTA EN VIRTUD DE QUE NO SE LES FORMULA UNA PREGUNTA DIRECTA SINO MÁS BIEN SE LES CUESTIONA SOBRE SU "CREENCIA", DESDE EL PUNTO DE VISTA MATEMÁTICO ES DECIR, POR EL CONTENIDO MATEMÁTICO QUE ELLA CONTIENE, ES FACTIBLE CLASIFICARLA COMO CORRECTA O INCORRECTA. ES EN ESTE SENTIDO EN EL QUE SE TOMAN LAS AFIRMACIONES DE LOS EQUIPOS PARA ETIQUETARLAS COMO TALES.

Correctas, 14 equipos: el 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 14, 15, 17 y el 18 .

Respuesta: B.

Grupo 1. Equipo 4, 5, 8, 9, 11, 14, 15, 17 y 18.

Explicación: "Ya que a los 40 min. [el B] recorre 40 Km mientras que el A a los 40 min va en el kilómetro 30" (Equipo 9).

Grupo 2. Equipo 6 y 10.

Explicación: "la curva simulada puede representar un cambio y aumento de velocidad" (Equipo 6).

Grupo 3. Equipo 1, 2 y 7.

Explicación: "[El B] lleva aceleración. (se dedujo por la curvatura de la gráfica de B)" (Equipo 2).

Comentarios: Si bien desde el punto de vista formal, la velocidad de B no siempre es mayor que la de A (durante los primeros 15 minutos, aproximadamente, la velocidad de B es menor que la de A), en términos generales, esto es, por un análisis global de las gráficas, se puede decir que, B maneja más rápido que A. Por tal razón, esta respuesta se acepta como correcta. Lo otro, implica un análisis de intervalos, lo cual, naturalmente, no se descarta. Es más, el equipo 12 lo lleva a cabo (ver su respuesta y explicación renglones abajo). Pero, independientemente de que la estrategia seguida por él es sumamente interesante y su análisis "mucho más fino" que el de los demás, no es hasta los 30 minutos (el punto de intersección de las gráficas es, aproximadamente (25,28)) donde A maneja más rápido que B. Esta es la razón por la que fue catalogada como incorrecta.

Por otro lado, al parecer, los equipos del Grupo 1, hacen un análisis global cuantitativo de las gráficas y sus explicaciones están en términos de distancia–tiempo. Los de los Grupos 2 y

3, global cualitativo y las explicaciones giran en torno al concepto de velocidad y aceleración, respectivamente.

Incorrectas, cuatro equipos: el 3, 12, 13 y el 16.

Respuesta: A

Grupo 1. Equipos 13 y 16.

Explicación: ' "A" sigue un camino en línea recta, mientras "B" es un camino en curva' (Equipo 13).

Grupo 2. Equipo 3.

Explicación: "No porque sea más rápido [el A], sino porque su vel. es constante".

Respuesta: ' "A" y "B" '.

Equipo 12.

Explicación: ' "A" porque en un lapso < 30m [minutos] "a" [A] es más rápido que "b" [B]

"B" porque en un lapso de 30m [minutos] "b" [B] acelera y alcanza a "A" '.

Comentarios: En la pregunta anterior, diez equipos incurren en el equívoco de hacer una interpretación icónica de las gráficas. Sin embargo, en la que ahora nos ocupa (última pregunta de la segunda situación), ocho de ellos logran superar esa visión equívoca de las gráficas pero, los equipos 13 y 16 la siguen manteniendo.

El caso más crítico se presentó en el equipo 16. Al parecer, fue el único que, a lo largo de esta segunda situación, siempre la *interpretó icónicamente. Ello implicó que fuera, de los dieciocho, el que tuviera el más bajo rendimiento en esta situación. En franca oposición a él se encuentran los equipos 2, 3, 7, 9, 10, 12, 14 y 18 que en ningún momento "fueron atrapados en las redes de la interpretación icónica".*

Lo anterior nos deja entrever que en una situación contextualizada existen algunos aspectos que son "más favorables" que otros para que los estudiantes los interpreten icónicamente. En nuestro caso, "el talón de Aquiles" fue el punto de intersección de las gráficas.

En términos generales, es posible afirmar que el desempeño de los equipos en la segunda situación es bueno. Cinco equipos (aproximadamente el 28%) contestan correctamente las seis preguntas referidas a esta situación; diez (56%), cinco; dos (11%), cuatro y uno (5%), dos. El promedio de respuestas correctas por equipos es cinco. En otras palabras, los equipos, en promedio, contestan correctamente un poco más del 83% de las preguntas.

3. Las tarifas del transporte público (Metro, trolebús, "pesera", camión) en la Ciudad de México son variables. En un sistema de coordenadas cartesiano haz una gráfica que represente el costo de un recorrido de 12 Km en:

    a) Metro
    b) "Pesera"

"PREGUNTA a". Gráfica que representa el costo de un recorrido de 12 Km en Metro.

Correctas, 12 equipos: el 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 14, 16, 17 y 18.

Grupo 1: Equipos 2, 6, 14, 16 y 18.

Respuesta: Construyen un sistema de coordenadas cartesianas idóneo para la situación: convenientes particiones en los ejes, escalas adecuadas, en el eje de las abscisas representan la distancia en Km y en el de las ordenadas la tarifa o el costo en pesos. Sobre dicho sistema, trazan una recta, o mejor dicho, un segmento de recta paralela al eje de las abscisas que corta al de las ordenadas en 1.50. Las coordenadas del punto extremo del segmento de recta son (12,1.50).

Explicación: "El precio es de $1.50 sin importar la distancia que recorre el metro, asi te vajes [bajes] en la 2ª estación o el [en la] 10ª" (Equipo 16).

Grupo 2: Equipos 1, 3, 5, 9, 10, 12 y 17.

Respuesta: Construyen un sistema de coordenadas cartesianas apropiado para la situación: particiones en los ejes y escalas adecuadas, en el eje de las abscisas representan el costo en pesos y en el de las ordenadas la distancia en kilómetros. Sobre dicho sistema, trazan un segmento de recta paralela al eje de las ordenadas que corta al de las abscisas en 1.50. Las coordenadas del punto extremo del segmento de recta son (1.50,12).

Explicación: "Es una linea paralela al eje de Ordenadas porque el precio es una constante y no importa la distancia" (Equipo 3).

Comentarios: Los doce equipos de los Grupos 1 y 2 (aproximadamente el 67% de la población) construyen, adecuadamente, una gráfica que representa la situación planteada. Tal vez, el nivel de *dificultad de esta situación hubiera aumentado (probablemente un poco más para los del Grupo 2) si en lugar de solicitarles que "hicieran una gráfica que representara el costo de un recorrido de 12 km en Metro", se les pidiera que "hicieran la gráfica de una función que ... ". Esto implicaría, al menos, ser más mucho más cautelosos en la nominación de los ejes.*

Al margen de que no se solicita la construcción de la gráfica de una función, se considera que estos doce equipos cuentan con recursos suficientes para afrontar formalmente el estudio de las funciones constantes incluyendo la conversión de registros de representación: poder "traducir" la información de una situación contextualizada a una gráfica y que ésta sea una paralela a algún eje, no es nada fácil. Kerslake (citado en Leinhardt et al., 1990) encontró que, las "traducciones" que involucran funciones constantes son excepcionalmente difíciles. Esto permite entender el por qué, los seis equipos restantes no superaron la tarea planteada.

Incorrectas, 6 equipos: el 4, 7, 8, 11, 13 y 15.

Grupo 1: Equipo 15.

Respuesta: Construyen un sistema de coordenadas cartesianas adecuado para la situación: convenientes particiones en los ejes, escalas apropiadas, en el eje de las abscisas representan el costo en pesos y en el de las ordenadas la distancia en Km. Sobre dicho sistema, trazan una gráfica que consta de dos partes: un segmento de recta que parte del origen de coordenadas hasta el punto (1.50, 4) y a partir de dicho punto, otro segmento de recta paralela al eje de ordenadas con punto extremo (1.50, 12).

Explicación: "El metro cobra 1.50 el boleto, permitiendo recorrer los Kilómetros deseados. por ello nuestra gráfica va de 0 Km y sube porque $1.50 abarca cualquier cantidad de Km."

Comentarios: Posiblemente la respuesta de este equipo refleja el "conflicto" de los estudiantes en aceptar o reconocer que una recta paralela a los ejes (en este caso, como ellos lo trabajaron, al eje de las ordenadas), puede ser la representación gráfica de la situación planteada. Tal vez, por "no ser usual" para ellos, perciban la gráfica como "ilegítima", a pesar de que consideran que sí la representa y, para "superar dicho conflicto", introducen un segmento de recta creciente que, de todas todas, es "legítima" y con ello, "legitiman" su gráfica. Si este fuera el caso, se acepta que los estudiantes tienen una visión demasiado restringida de las formas que pueden tomar las gráficas de las funciones. Que a decir de Leinhardt y colaboradoras (1990) es lo que sugieren los estudios de Lovell (1971), Markovits et al. (1896), Vinner (1983) y Vinner y Dreyfus (1989).

Grupo 2: Equipos 4, 7, 8, 11 y 13.

Respuesta: Construyen un sistema de coordenadas cartesianas apropiado para la situación: particiones en los ejes y escalas adecuadas. Todos los equipos, excepto el 8, en el eje de las abscisas representan el costo en pesos y en el de las ordenadas la distancia en kilómetros. El 8, procede a la inversa. Sobre dicho sistema, trazan un segmento de recta que parte del origen y el punto final es (1.50,12). El punto extremo del segmento de recta del equipo 8 es (12,1.50).

Explicación: "La hicimos así porque la tarifa es constante a pesar de la distancia que se recorra" (Equipo 11).

Comentarios: Los cinco equipos reconocen explícitamente que la tarifa es constante. Sin embargo, el hecho real es que no pudieron representar gráficamente esa característica correctamente. A lo más que llega, por ejemplo, el equipo 11 es, anexar en el eje de las abscisas la leyenda "TARIFA CONSTANTE" y sólo en el extremo del último intervalo del eje de las abscisas anota 1.50; los otros, no tienen asignado número alguno. El 8 por su parte, al parecer, razona de la forma siguiente: si la gráfica de una recta (donde en el eje de las abscisas se grafica el tiempo y en el de las ordenadas la distancia) representa una velocidad constante entonces, también la grafica de una recta representa una tarifa constante.

El proceder del equipo 11, es un tanto parecido al que reportan Mevarech y Kramarsky (1997) cuando al plantearles una situación similar a sus estudiantes, uno de ellos representa una función constante como una recta con pendiente positiva pero asignando el mismo valor a cada extremo de los intervalos del eje de las ordenadas.

Independientemente de los intentos, las respuestas de estos equipos pueden estar mostrando —lo que a decir de Leinhardt y colaboradoras (1990) varios estudios han puntualizado— "la tendencia de los estudiantes a gravitar hacia la linealidad en una variedad de situaciones" (p.33).

"PREGUNTA b". Gráfica que representa el costo de un recorrido de 12 Km en "pesera".

Correctas, cuatro equipos: el 2, 12, 14 y 16.

Grupo 1: Equipos 2, 14 y 16.

Respuesta: Construyen un sistema de coordenadas cartesianas idóneo para la situación: convenientes particiones en los ejes, escalas adecuadas, en el eje de las abscisas representan la distancia en Km y en el de las ordenadas el costo en pesos. Sobre dicho sistema, trazan una gráfica escalonada. El primer escalón es un segmento de recta pararelo al eje de las abscisas, corta al eje de las ordenadas en (0,2) y su otro punto extremo es (5,2). Los puntos extremos del segundo son (5,2.50) y (12,2.50)

Explicación: "El primer intervalo nos indica los primeros 5 km a partir de donde te subas cobran 2.00 pesos.

El segundo nos indica que a partir de donde te subas si recorres hasta 12 km son 2.50

El 3er intervalo nos indica que si vas a recorrer más de 12 km son 3.50" (Equipo 16).

Grupo 2: Equipo 12.

Respuesta: Construyen un sistema de coordenadas cartesianas apropiado para la situación: particiones en los ejes y escalas adecuadas, en el eje de las abscisas representan el costo en pesos y en el de las ordenadas la distancia en kilómetros. Sobre dicho sistema, trazan dos segmentos de recta paralelos al eje de las ordenadas. El primero, corta al de las abscisas en 2 y las coordenadas de su punto extremo son (2,5) y los puntos extremos del segundo son (2.50,5) y (2.50,12).

Explicación: "Porque el costo varia según la distancia.
0 a 5 Km = $2
5 Km a 12 Km = $2.50"

Comentarios: Si Kerslake (citado en Leinhardt et al., 1990) encontró que, las traducciones que involucran funciones constantes son excepcionalmente difíciles, ¡qué no se puede decir de las que involucran funciones escalonadas! Evidentemente, el nivel de dificultad de esta tarea es extremadamente alto. Sin embargo, y a pesar de todo, cuatro equipos logran superarla.

Por otra parte, cabe señalar que el equipo 16 es uno de los cuatro equipos que muestran un excelente desempeño en esta Situación 3: contestan correctamente las dos preguntas planteadas. Sin embargo, como se recordará, este equipo fue el que mostró el más bajo rendimiento en la situación anterior debido a su interpretación icónica de las gráficas. Esto nos da elementos para suponer que para algunos estudiantes, en algunas circunstancias, les es "más fácil" construir la gráfica de una situación bastante complicada que interpretar la gráfica de otra que, aparentemente, es mucho más simple.

Incorrectas, 14 equipos: el 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 15, 17 y el 18.

Grupo 1: Equipos 10, 15 y 17.

Respuesta: Construyen un sistema de coordenadas cartesianas adecuado para la situación: convenientes particiones en los ejes, escalas apropiadas, en el eje de las abscisas representan el costo en pesos y en el de las ordenadas la distancia en Km. Sobre dicho sistema:

- El equipo 10, traza una gráfica que consta de dos partes: un segmento de recta paralela al eje de las ordenadas que corta al eje de las abscisas en 2 y su punto extremo es (2,5) y a partir de dicho punto, otro segmento de recta, con pendiente positiva, cuyo punto extremo es (2.50, 12).

- Los equipos 15 y 17, también trazan una gráfica que consta de dos partes. Pero, cada una de ellas son segmentos de recta con pendiente positiva. La pendiente del primer segmento es menor que la del segundo; los puntos extremos del primero son (0,0) y (2,5) y los del segundo, (2,5) y (2.50,12).

Explicación: "Es una linea recta de 0 a 5 km ya que cobra 2$ y de 5 a 12 km la linea se inclina hacia la derecha ya que el costo aumenta" (Equipo 10).

"Como va aumentando el kilometraje sube el costo, de 0 a 5 km son $2.00, 6 a 12 km $2.50 y de 12 a adelante $3.50 por ello nuestra gráfica parte del origen y va subiendo porque mientras más km se recorran más cuesta." (Equipo 15).

Grupo 2: Equipo 8.

Respuesta: Construyen un sistema de coordenadas cartesianas apropiado para la situación: particiones en los ejes y escalas adecuadas. En el eje de las abscisas representan la distancia en kilómetros y en el de las ordenadas el costo en pesos. Sobre dicho sistema, trazan tres segmentos de recta. El primero (que ellos llaman F_1), va del origen al punto (5, 2.00); el segundo (F_2), del origen a (12,2.50) y el tercero (F_3), del origen a (12,3.00).

Explicación: 'La gráfica muestra que dependiendo de la distancia recorrida se cobra una cierta tarifa pero "varia"

F_1: 5 km $2.00

F_2: hasta 12 km $2.50

F_3: Más de 12 km $3.50 '.

Comentarios: Al parecer, los equipos de estos dos Grupos perciben que la gráfica debe estar compuesta de "dos partes" porque, si se me permite la expresión, es una función con dominios separados y dos reglas de correspondencia. Sin embargo, sus esfuerzos para representarla resultan infructuosos. Su tendencia a la linealidad y la continuidad se pueden estar mostrando. Esta última, fundamentalmente, por la respuesta del equipo 10 quien construye un segmento de recta paralelo al eje de las ordenadas (mismo proceder que en la pregunta anterior), pero, si de igual forma construyera el segundo segmento de recta entonces, la gráfica ya no sería continua.

Grupo 3: Equipos 1, 4, 5, 6, 9, 11 y 13.

Respuesta: Construyen un sistema de coordenadas cartesianas apropiado para la situación: particiones en los ejes y escalas adecuadas. Los equipos 6 y 9 representan en el eje de las abscisas la distancia en kilómetros y en el de las ordenadas el costo en pesos. El resto de los equipos nominan los ejes en sentido inverso. Sobre dicho sistema, trazan un segmento de recta que parte del origen y termina en el punto (12,2.50) y (2.50,12), respectivamente.

Explicación: 'La tarifa de la "pesera" varia dependiendo el kilometraje utilizado.

0 - 5 km = $2.00

5 - 12 km - $2.50

12 - a más - 3.50'.

Comentarios: Si bien, las respuestas de estos siete equipos nos pueden estar indicando su tendencia hacia la linealidad (con una función lineal creciente consideran estar representando que el costo aumenta con la distancia), las de los equipos 1, 5, 6 y 9, además de esto, es posible que también señalen su propensión a la continuidad. Ellos, en la pregunta anterior, representaron la situación con un segmento de recta paralelo a uno de los ejes. Pero ahora, si procedieran de la misma forma la gráfica sería discontinua. Luego entonces, "mejor" la representan con una recta.

Grupo 4: Equipos 3, 7 y 18.

Respuesta: Construyen un sistema de coordenadas cartesianas apropiado para la situación: particiones en los ejes y escalas adecuadas. El equipo 18 representa la distancia, en kilómetros, en el eje de las abscisas y en el de las ordenadas el costo en pesos. Los otros dos equipos nominan los ejes en sentido inverso. Sobre dicho sistema, trazan un segmento de curva ascendente. La curva de los equipos 3 y 18 es similar a la rama de una parábola que abre hacia arriba; los puntos extremos de la del 3 son (2,5) y (2.50,12) y los de la del 18, (5,2) y (12,2.50). La curva del equipo 7 es parecida a una logarítmica, parte del origen y finaliza en el punto (2.50,12).

Explicación: ‘Porque en la “pesera” sí aumenta el costo de acuerdo a la distancia recorrida por eso sale una curva como gráfica’ (Equipo 18).

Comentarios: Posiblemente estos tres equipos están equiparando esta situación con alguna que involucre distancia–tiempo, en el sentido de que, si la gráfica es una recta, ello indica que la velocidad es constante. Si es una curva (como la que ellos hicieron), la velocidad no es constante. Es decir, aumenta (ver respuestas de la Pregunta f de la Situación 2). Por lo que, en la Situación 3b, como el costo aumenta (no es constante), la gráfica debe ser una curva (i.e. no debe ser recta).

Se desea concluir el análisis de los resultados de esta Situación 3 con algunos señalamientos: matematizar, desde el punto de vista gráfico, una situación cuyo contexto forma parte de la vida cotidiana de los estudiantes, les resultó extremadamente difícil (sobre todo la segunda pregunta): el promedio de respuestas correctas por equipo ni siquiera llega a uno (0.89), lo que implica que, el porcentaje promedio de respuestas correctas es del orden del 44%. Sólo cuatro equipos (22%) contestan correctamente las dos preguntas, seis (33%), ninguna y los otros ocho (45%), únicamente la primera. Claro que, por otro lado, el hecho de que doce equipos (67%) hayan trazado una recta paralela para modelar la situación planteada en la Pregunta a, se considera un resultado bastante bueno.

Finalmente, al parecer, la mayoría de las respuestas incorrectas indican la tendencia de los estudiantes a la linealidad (naturalmente, rectas no paralelas a los ejes) y/o a la continuidad.

En las dos situaciones siguientes se les presentan a los equipos bosquejos de gráficas y se les cuestiona acerca de la información que proporcionan.

4. A continuación se muestra el bosquejo de la gráfica que representa la variación del área de un rectángulo (de perímetro fijo) con respecto a la longitud de uno de sus lados. ¿Qué información proporciona el bosquejo?

DESCRIPCIÓN DE LA GRÁFICA:

En un sistema de coordenadas cartesianas (sin cuadrícula) con dos intervalos en el eje de las abscisa (marcados en su extremo derecho con 20 y 40), uno en el eje de las ordenadas (su extremo denotado por 400); el eje de las abscisas con la leyenda "Lado (m)" y el eje de las ordenadas, "Area (m^2)"; se localiza, en el primer Cuadrante, el bosquejo de una parábola que abre hacia abajo y las coordenadas de su vértice son (20,400).

OBSERVACIÓN: AL IGUAL QUE EN LA PREGUNTA F DE LA SEGUNDA SITUACIÓN Y LA DE LA SITUACIÓN SIGUIENTE (LA 5), DESDE EL PUNTO DE VISTA TÉCNICO LO QUE EN ESTA PREGUNTA AFIRMEN LOS ESTUDIANTES NO ES POSIBLE CATALOGARLA COMO CORRECTA O INCORRECTA EN VIRTUD DE QUE NO SE LES FORMULA UNA PREGUNTA QUE EXIJA UNA RESPUESTA ESPECÍFICA. "LA INFORMACIÓN QUE LE PROPORCIONA EL BOSQUEJO" A UN EQUIPO, NO NECESARIAMENTE ES LA MISMA QUE LA QUE LE PROPORCIONA A OTRO. DE AQUÍ QUE, A ALGUNOS LES "PUEDE DECIR" MUCHAS COSAS MIENTRAS QUE A OTROS CASI NADA. NO OBSTANTE ESTO, LAS AFIRMACIONES QUE ELLOS HAGAN, DESDE EL PUNTO DE VISTA MATEMÁTICO ES DECIR, POR EL CONTENIDO MATEMÁTICO QUE ELLAS CONTIENEN, ES FACTIBLE

CLASIFICARLA COMO CORRECTA O INCORRECTA. ES EN ESTE SENTIDO EN EL QUE SE TOMAN DICHAS AFIRMACIONES DE LOS EQUIPOS PARA ETIQUETARLAS COMO TALES.

POR OTRO LADO, LAS AFIRMACIONES QUE LOS EQUIPOS REGISTRAN EN SUS RESPUESTAS REVELA QUE ANALIZAN LA GRÁFICA CON DISTINTOS ENFOQUES (GLOBAL, DE INTERVALOS Y/O PUNTUAL) E INFIEREN INFORMACIÓN DEL BOSQUEJO. A CONTINUACIÓN, SE HACEN EXPLÍCITOS DICHOS ENFOQUES E INFERENCIAS, SE PROPORCIONA COMO EJEMPLO DE CADA UNO DE ELLOS (ELLAS) LA AFIRMACIÓN DE ALGÚN(OS) EQUIPO(S) Y SE PROCEDE A INDICAR EL RUBRO EN EL QUE SE ENCUENTRAN LAS AFIRMACIONES EMITIDAS POR LOS EQUIPOS. COMO ES COSTUMBRE, LOS RESULTADOS SE MUESTRAN CLASIFICADOS POR GRUPOS.

ENFOQUES

GLOBAL: "LOS CAMBIOS QUE SUFRE EL ÁREA DEL CUADRADO CONFORME AUMENTA LA LONGITUD DE UNO DE SUS LADOS" (EQUIPO 11).

"EL ÁREA DEL RECTÁNGULO ESTÁ ENTRE 0 Y 400 M^2 *MIENTRAS QUE LA LONGITUD DE UNO DE SUS LADOS ESTÁ ENTRE 0 Y 40* M *" (EQUIPO 8).*

INTERVALO: "CUANDO AUMENTA UN LADO DEL RECTÁNGULO, AUMENTA EL ÁREA HASTA LLEGAR A UN PUNTO MÁXIMO EN EL QUE SI UNO DE LOS LADOS AUMENTA EL ÁREA DISMINUYE HASTA LLEGAR A 0 M^2 " (EQUIPO 17).

'CUANDO EL LADO ES MAYOR QUE "0" PERO MENOR QUE 20 EL AREA $0 < A < 400$ M^2. CUANDO EL $20 < L < 40$ M EL $0 < A < 400$ M^2 ' (EQUIPO 2).

PUNTUAL—ÁREA MÁXMA: "CUANDO EL LADO MIDE 20 M EL AREA ES DE 400 M^2 (EL ÁREA MÁXIMA)" (EQUIPO 2).

PUNTUAL–ÁREA MÍNIMA: "CUANDO EL LADO MIDE 40 M ES UNA LÍNEA Y EL AREA ES 0" (EQUIPO 4).

OTRO TIPO DE PUNTUALES: "CUANDO EL LADO MIDE 10 M EL ÁREA ES DE 300 M^2 " (EQUIPO 4).

"CUANDO MIDE [EL LADO] MÁS O MENOS QUE 20 M EL ÁREA SE MANTIENE CONSTANTE [ES LA MISMA] PARA LAS [DOS] ABSCISAS DE LOS PUNTOS" (EQUIPO13).

INFERENCIAS

TIPO 1: "CUANDO EL VALOR DE ESE LADO ES 20 M ... LA FORMA SERÍA UN CUADRADO*" (EQUIPO 12).*

TIPO 2: " ... PERO COMO SIGUE CRECIENDO EL LADO [MAYOR QUE 20 M] Y EL ÁREA DISMINUYENDO [MENOR QUE 400 M^2] SABEMOS QUE SE JUNTAN LOS LADOS FORMANDO UNA LÍNEA RECTA*" (EQUIPO 3).*

TIPO 3: " ... Y EN TODOS [LOS RECTÁNGULOS] EL PERÍMETRO ES DE 80M" *(EQUIPO 4).*

Correctas, 14 equipos: el 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 y el 17

Grupo 1: Equipo 4.

Tipo de afirmaciones: Global; de intervalo; puntual-área máxima; puntual–área mínima; otro tipo de puntuales; inferencia tipo 1, 2 y 3.

Grupo 2: Equipo 12.

Tipo de afirmaciones: Global; de intervalo; puntual-área máxima; puntual─área mínima; inferencia tipo 1, 2 y 3.

Grupo 3: Equipos 3 y14.

Tipo de afirmaciones: Global; de intervalo; puntual─área máxima; puntual─área mínima; inferencia tipo 1 y 2.

Grupo 4: Equipos 13 y 17.

Tipo de afirmaciones: Global; de intervalo; puntual─área máxima; otro tipo de puntuales.

Grupo 5: Equipo 2.

Tipo de afirmaciones: Global; de intervalo; puntual─área máxima.

Grupo 6: Equipo 10.

Tipo de afirmaciones: Global; puntual─área máxima; puntual─área mínima.

Grupo 7: Equipo 9.

Tipo de afirmaciones: Global; inferencia tipo 1.

Grupo 8: Equipos 1, 8 y 11.

Tipo de afirmaciones: Global.

Grupo 9: Equipo 7.

Tipo de afirmaciones: Puntual─área máxima.

Grupo 10: Equipo 5.

Tipo de afirmaciones: Puntual─área máxima. Dan la “forma” de la ecuación asociada y “*la”* ecuación de la parábola. Ellas son: $y = -a(x-b)^2 + c$ y $y = -x(x-20) + 400$, respectivamente.

Comentarios: Este es el único equipo que proporciona la forma y la ecuación asociada a la gráfica que se les muestra. Aunque ambas tienen equívocos, el intento fue bastante bueno. Además, en esta situación, los integrantes del equipo 5 hace uso de lo que "aprendieron" cuando contestaron algunas de las preguntas del !er. Instrumento de Comprensión.

Por otro lado, "la respuesta" está catalogada como correcta sólo por la afirmación de tipo puntual que hicieron y no por lo que se refiere a las representaciones algebraicas. Éstas, naturalmente, son incorrectas.

Incorrectas, 4 equipos: 6, 15, 16 y 18.

Grupo 1: Equipo 6.

Afirmaciones: "el area en m^2 = $400\,m^2$
un lado del rectángulo es 40m
otro lado del rectángulo es 20m
al sacar el area da 800m
concluimos que la parabola esta suscrita [inscrita] en medio rectángulo".

Grupo 2: Equipo 16.

Afirmaciones: "El 20 nos indica la suma de los dos lados pequeños ya que cada lado mide 10m, además nos indica la medida de cada uno de los lados grandes y estos al sumarlos nos da el 40 representativo, es decir, la base.

Por lo tanto con los datos anteriores al sustituirlos en la formula del area del rectangulo bxh nos da

b = 40   h = 10

bxh = 400 m^2

40x10 = 400 m^2 , y es de aquí donde sale el 400 dado en la gráfica."

Grupo 3: Equipos 15 y 18.

Afirmaciones: "Pensamos, que esta gráfica [no tiene] los datos suficientes para comprender el problema.

Porque creemos que no es posible tener un perímetro fijo en una figura, mientras su area esta aumentando" (Equipo18).

Comentarios: La dificultad con la que se enfrentaron los dos equipos de este último grupo, es que consideran, y así lo manifiestan, que si dos o más rectángulos tienen el mismo perímetro entonces, tienen la misma área. Por lo que "no aceptan" la variación de ésta cuando aquél es fijo. Probablemente los equipos 6 y 16 (Grupo 1 y 2, respectivamente), son del mismo pensar (aunque no lo expresen explícitamente como los del Grupo 3). Sus afirmaciones giran en torno de un *rectángulo.*

Por otra parte, en relación al desempeño del grupo en su conjunto, si se consideran únicamente los que contestaron correctamente, el promedio de afirmaciones por equipo es del orden de tres (3.4). El 4 es el que obtiene mayor información de la gráfica: ocho afirmaciones; mientras que, el 1, 5, 7, 8 y 11, sólo una. Pero, si tomamos en cuenta a los dieciocho equipos, el promedio citado es, aproximadamente, dos (2.7).

La interpretación "guiada" de una gráfica (i.e. preguntas específicas sobre algún aspecto de ella) puede proporcionar información sobre algunas dificultades de los estudiantes en el enfoque global, de intervalo o puntual. Sin embargo, la "libre", nos puede indicar si en la población existe o no, una marcada preferencia por alguno de esos tres enfoques.

De las 48 afirmaciones (catalogadas como correctas) que emitieron los 14 equipos; 12 (25%) son globales, 7 (15%) de intervalo, 18 (37%) puntuales y 11 (23%) son inferencias. Si bien, el análisis de intervalo es el más desprotegido de los enfoques, con estos datos, no es posible afirmar que la población bajo estudio es proclive a analizar una gráfica desde una perspectiva en detrimento de las otras. Es más, que las puntuales hayan sido más que las globales, para nosotros, es un resultado muy favorable. Ello nos indica que el dominio en la articulación de registros de representación gráfico y algebraico en funciones polinomiales elementales desde un enfoque global cualitativo, no sólo no limita un análisis puntual sino que al parecer, lo favorece. Lo mismo se puede decir para el caso de las inferencias.

5. Los tres bosquejos que se muestran a continuación representan cómo se reproduce la bacteria B en tres medios distintos (m_1, m_2, m_3). ¿Qué información proporcionan los bosquejos?

DESCRIPCIÓN DE LA GRÁFICA:

En un sistema de coordenadas cartesianas sin particiones; el eje de las abscisas con la leyenda "Tiempo (días)" y el eje de las ordenadas, “Número de bacterias B”; se localizan, en el primer Cuadrante, el bosquejo de una recta (m_3) con pendiente positiva, y la intersección con el eje de las ordenadas es un punto que se localiza en la parte positiva de dicho eje; una curva (m_2) cóncava hacia arriba, que inicia en el mismo punto donde la recta se interseca con el eje de ordenadas; el “último” bosquejo (m_1) también es una curva cóncava hacia arriba que inicia en el mismo punto que m_3 y m_2. Las tres gráficas se intersecan en un punto que se localiza, aproximadamente, a la mitad de la longitud de la recta. Hasta antes de este punto, m_1 está por debajo de m_2. La ordenada de los puntos extremos de las gráficas es, prácticamente, la misma, mientras que la abscisa del de m_1 es menor que la del de m_2 y ésta a su vez, es menor que la de m_3.

OBSERVACIÓN: POR LO EXPUESTO EN LA PREGUNTA F DE LA SITUACIÓN 2 Y EN LA 4, LAS AFIRMACIONES DE LOS EQUIPOS EN TORNO A LO PLANTEADO EN ESTA SITUACIÓN 5, SON CLASIFICADAS, DESDE UN PUNTO DE VISTA MATEMÁTICO, EN CORRECTAS O INCORRECTAS.

CONTINUANDO CON EL ESQUEMA DE LA SITUACIÓN ANTERIOR EN RALACIÓN A LA PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS, A CONTINUACIÓN, SE HACEN EXPLÍCITOS LOS ENFOQUES E INFERENCIAS, SE PROPORCIONA COMO EJEMPLO DE CADA UNO DE ELLOS (ELLAS) LA AFIRMACIÓN DE ALGÚN(OS) EQUIPO(S) Y SE PROCEDE A INDICAR EL RUBRO EN EL QUE SE ENCUENTRAN LAS AFIRMACIONES EMITIDAS POR LOS EQUIPOS. COMO ES COSTUMBRE, LOS RESULTADOS SE MUESTRAN CLASIFICADOS POR GRUPOS.

ENFOQUES

GLOBAL

TIPO 1: “EL AUMENTO DE [LA] POBLACIÓN DE LA BACTERIA B EN DIFERENTES MEDIOS EN TIEMPO DISTINTO (DÍAS)” (EQUIPO 1).

Tipo 2: "En que medio se reproduce esta bacteria más rápido" (Equipo 9).

"[La bacteria] se reproduce más rápido [en] m_1 luego [en] m_2 y tarda más días [en] m_3" (Equipo 7).

Intervalo: "En el medio 1 primero se reprodujeron muy lentamente y después muy rápido, en el medio 2, primero era lento el crecimiento y después más rápido y en el medio 3 el crecimiento era más o menos uniforme" (Equipo 9).

Puntual–punto extremo: "M_1, alcanza el mismo número de bacterias que M_2 pero en menos tiempo. M_3, tarda más días en alcanzar el número de bacterias que M_1 y M_2" (Equipo 4).

Puntual–intersección: "el punto de intersección de las tres gráficas representa que en un cierto tiempo el número de bacterias fue el mismo para M_1 M_2 y M_3" (Equipo 2).

Antes de continuar, cabe señalar que nunca, ningún equipo, hace alguna afirmación en torno al otro punto de intersección de las gráficas: el que se localiza en el eje de las ordenadas. El punto al que se refieren los que hacen una interpretación puntual–intersección es aquél donde el tiempo es diferente de cero.

INFERENCIAS

TIPO 1: "EN m_3 se reprodujeron constantemente pero en más tiempo" (EQUIPO 14).

TIPO 2: "m_1 y m_2 tiene aceleración en su proceso de reproducción mostrandose con un [UNA] CURVATURA" (EQUIPO 10).

Correctas, 17 equipos: todos excepto el 16.

Grupo 1: Equipo 14.

Tipo de afirmaciones: Global tipo 2, de intervalo, puntual–punto extremo, puntual–intersección e inferencia tipo 1 y 2.

Grupo 2: Equipo 2.

Tipo de afirmaciones: Global tipo 1, puntual–intersección e inferencia tipo 1 y 2.

Grupo 3: Equipo 11.

Tipo de afirmaciones: Global tipo 1, de intervalo y puntual–intersección.

Grupo 4: Equipo 9.

Tipo de afirmaciones: Global tipo 2, de intervalo y puntual–intersección.

Grupo 5: Equipo 5.

Tipo de afirmaciones: Global tipo 1 y 2 y puntual–intersección.

Grupo 6: Equipo 12.

Tipo de afirmaciones: Global tipo 2, puntual─intersección e inferencia tipo 1.

Grupo 7: Equipos 3, 7 y 10.

Tipo de afirmaciones: Global tipo 2 e inferencia tipo 1 y 2.

Grupo 8: Equipos 13 y 18.

Tipo de afirmaciones: Global tipo 1 y puntual─intersección.

Grupo 9: Equipo 4.

Tipo de afirmaciones: Global tipo 2 y puntual─punto extremo.

Grupo 10: Equipos 8 y 17.

Tipo de afirmaciones: Global tipo 2 y puntual─intersección.

Grupo 11: Equipo 1.

Tipo de afirmaciones: Global tipo 1 y 2.

Grupo 12: Equipos 6 y 15.

Tipo de afirmaciones: Global tipo 2.

Comentarios: En esta situación, los equipos 5, 8, 13 y 17 interpretan correctamente el punto de intersección de las gráficas. Pero, en la Situación 2 no fue este el caso. En esa ocasión hicieron una interpretación icónica. Esto nos proporciona, un elemento más, para suponer que hay contextos "más favorables" para que los estudiantes incurran en un equívoco de esa naturaleza.

Incorrectas, un equipos: el 16.

Afirmaciones: "En el medio 3 no se reproduce porque la recta es constante
El punto de intersección de las tres gráficas nos indica el fin de la reproducción de la bacteria".

Comentarios: En términos generales, el desempeño de los equipos en esta Situación 5 es bueno. El promedio de afirmaciones, catalogadas como correctas, que hacen los diecisiete equipos de los Grupos 1, ..., 12 es casi tres (2.7). El número total de aseveraciones que hacen estos equipos es 45, de las cuales, 19 (42%) son globales, únicamente 3 (7%) de intervalo, 12 (27%), puntuales y 11 (24%) son inferencias.

A pesar de que, con respecto a la situación anterior, el porcentaje de los globales aumentó 17 puntos, el enfoque de intervalo estuvo más desprotegido (decayó 8 puntos porcentuales); el de los puntuales disminuyó diez puntos y las inferencias son del mismo orden. Los comentarios que se hicieron para aquella situación siguen siendo válidos para ésta. Aunque, al parecer, habría que agregar que un punto débil de la población bajo estudio es la interpretación de una gráfica bajo el enfoque de intervalo.

En este momento, la exposición de los resultados por pregunta se da por terminada.

A fin de contar con una visión más global del desempeño de los equipos en las distintas situaciones que incluye este 3er. Instrumento de Comprensión, a continuación se procede con la segunda parte de la presentación de los resultados: mostrarlos en forma concentrada.

CONCENTRADO DE RESULTADOS

En un primer momento, se presentan los resultados de las tres primeras situaciones. Posteriormente, en un segundo, los de las dos últimas.

Frecuencia de aciertos por equipo

Nº de aciertos (De 12)	Frecuencia (Nº de equipos)
12	2 (Equipos 2 y 14)
11	1 (Equipo 12)
10	5 (Equipos 5, 7, 9, 10 y 17)
9	3 (Equipos 3, 4 y 6)
8	5 (Equipos 1, 8, 11, 16 y 18)
7	2 (Equipos 13 y15)

Frecuencia de aciertos por pregunta

Nº de aciertos (De 18)	Frecuencia (Nº de preguntas)
18	3 (Preguntas 1.a, 1.c y 2.b)
17	2 (Preguntas 2.c y 2.d)
16	2 (Preguntas 1.d y 2.a)
14	1 (Pregunta 2.f)
12	1 (Pregunta 3.a)
8	2 (Preguntas 1.b y 2.e)
4	1 (Pregunta 3.b)

La tabla de la izquierda muestra que de los 18 equipos, el 2 y el 14 son los que enfrenta con un éxito rotundo las tres primeras preguntas de este tercer instrumento y el 13 y 15, el desempeño más deficiente.

Tomando como referencia el número de equipos que contestan correctamente una pregunta, es posible afirmar, a la luz de los datos que contiene la tabla de la derecha, que las preguntas 1.a, 1.c y 2.b no representaron dificultad alguna para los 18 equipos (todos las contestan correctamente) y que la 3.b, fue la más difícil para ellos.

El *promedio* de aciertos *por equipo* es, redondeando al entero más próximo, 9 (de 12) con una desviación de uno y el *promedio* de aciertos *por pregunta* es 14 (de 18) con una desviación de cuatro.

Con el propósito de contar con un elemento que contribuya a valorar el rendimiento de los equipos en las tres primeras situaciones del 3er. Instrumento, a continuación se presenta una tabla con el porcentaje promedio de aciertos que obtiene la población bajo estudio en cada una de dichas situaciones.

Porcentaje promedio de respuestas correctas
que logran los equipos en la Situación 1, 2 y 3 del 3er. Instrumento

Situación	Porcentaje promedio de respuestas correctas
1	82.5%
2	83.3%
3	44%

Por los datos contenidos en esta tabla, es posible afirmar que el rendimiento de los equipos en la Situación 1 y 2 es bueno mientras que, en la tercera es deficiente.

La complicación que implicó para los equipos la Situación 3 salta a la vista. Es más, no sólo fue la más difícil de las tres primeras, sino de las cinco. Para esto, observe las dos tablas siguientes que muestran los resultados concentrados de la Situación 4 y 5.

Frecuencia de características enunciadas por equipo en la Situación 4

Nº de características correctas enunciadas (De 8)*	Frecuencia (Nº de equipos)
8	1 (Equipo 4)
7	1 (Equipo 12)
6	2 (Equipos 3 y 14)
4	2 (Equipos 13 y 17)
3	2 (Equipos 2 y 10)
2	1 (Equipo 9)
1	5 (Equipos 1, 5, 7, 8 y 11)
0	4 (Equipos 6, 15, 16 y 18)

* Número máximo de características enunciadas por al menos un equipo.

Frecuencia de características enunciadas por equipo en la Situación 5

Nº de características correctas enunciadas (De 7)*	Frecuencia (Nº de equipos)
6	1 (Equipo 14)
4	1 (Equipo 2)
3	7 (Equipos 3, 5, 7, 9, 10, 11 y 12)
2	6 (Equipos 1, 4, 8, 13, 17 y 18)
1	2 (Equipos 6 y 15)
0	1 (Equipo 16)

* Número máximo de características enunciadas por al menos un equipo.

Al igual que en los otros instrumentos, en éste, se les asigna una puntuación a los equipos en términos de su desempeño, con la intención de contar con una visión global cuantitativa como un elemento más, para valorar su rendimiento y ayude a establecer comparaciones con los otros Instrumentos.

La puntuación asignada a cada una de las preguntas de la situación 1 y 2 es de 0.4; a las de la 3, un punto y a la 4 y 5, dos puntos. En las dos últimas, la puntuación máxima es para el (los) equipo(s) que haya(n) hecho más afirmaciones correctas y la del resto de los equipos, está en función del número de afirmaciones que haya anotado. En seguida, se presenta una tabla con la puntuación de cada equipo.

Puntuaciones obtenidas por los equipos en el 3er. Instrumento de Comprensión titulado: “*Representaciones gráfica y algebraica en contexto*”

Equipo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Puntuación	6.2	9.5	8	7.2	7.4	5.5	6.8	5.6	7.7	8.1	6	9.4	5.9	9.8	4.1	4.9	7.7	5.4

La puntuación promedio que obtienen los equipos en el 3er. Instrumento es casi 7 (6.96), con una desviación de 1.6.

Conclusiones del 3er. Instrumento de Comprensión

A la luz de todos los resultados expuestos y del análisis que se realiza en cada una de las preguntas de las cinco situaciones contextualizadas, es posible hacer las siguientes consideraciones:

- En términos generales, los equipos enfrentan con “relativo” éxito las situaciones contextualizadas que contiene este instrumento: la puntuación promedio por equipo es casi siete puntos (de diez). Este hecho parece indicar que:

    i) los equipos aplican su conocimiento con “cierta” flexibilidad lo cual, desde el punto de vista de Schoenfeld (1992), es uno de los objetivos de la instrucción matemática y desde el marco de Hiebert y Carpenter (1992), una consecuencia de la comprensión.

ii) las redes de conocimiento de los equipos se hacen más largas y organizadas; esto, de acuerdo a Hiebert y Carpenter (1992), es una muestra del crecimiento de la comprensión.

- No existe una marcada diferencia en el desempeño de los equipos en las gráficas contextualizadas que exigen una interpretación cualitativa de las que requieren una cuantitativa; de tal manera que, por ejemplo, en la primera situación (que demanda una interpretación cualitativa en las cuatro preguntas que contiene) el porcentaje promedio de respuestas correctas por equipo es de 82.5% y en la segunda situación (que reclama una interpretación cuantitativa en sus seis preguntas), dicho porcentaje es de 83.3%. Estos resultados sugieren que:

    i) las redes de conocimiento de los equipos se hacen más largas y organizadas, lo cual es una muestra del crecimiento de la comprensión (Hiebert y Carpenter, 1992);

    ii) el dominio en la conversión de los registros de representación gráfico y algebraico en funciones polinomiales elementales por la vía global cualitativa en contexto puramente matemático, favorece el rendimiento de los equipos cuando deben, por un lado, interpretar una gráfica cuantitativamente y por otro, enfrentar gráficas de situaciones. Esto último parece apoyar la posición de Duval (1992) en el sentido de que la interpretación de gráficas que representan un fenómeno físico, económico o biológico (gráficas contextualizadas) presuponen la aprehensión del funcionamiento del registro gráfico.

- En torno a la otra dimensión mediante la cual es posible analizar una gráfica: de lo puntal a lo global (Leinhardt et al., 1990); es factible señalar que, en términos generales, el desempeño de la población revela que:

i) en las interpretaciones “guiadas” (Situación 1 y 2), en términos generales, los equipos no presentan mayores dificultades al enfocar una gráfica puntualmente es decir, enfocan la gráfica puntualmente cuando es necesario sin que el enfoque global, que ellos dominan, les obstaculice el enfoque puntual que el problema exige (al margen de que dicho problema implique una interpretación cualitativa o cuantitativa de la gráfica que lo representa). Así por ejemplo, 17 equipos contestan correctamente el cuarto problema de la segunda situación (2.d); el cual requiere una interpretación cuantitativa de una gráfica y la lectura de dos de sus puntos;

ii) en las interpretaciones “libres” (Situación 4 y 5), los equipos no muestran una marcada preferencia a interpretar una gráfica en contexto por la vía global en detrimento de la puntual. Por ejemplo, de las 48 afirmaciones (catalogadas como correctas) que emitieron 14 equipos en la Cuarta Situación, 12 son globales, 7 de intervalo y 18 puntuales (las 11 restantes se han etiquetado como “inferencias” y de ellas se hablará en el punto siguiente).

Este comportamiento de los equipos parece indicar, entre otras cosas, que su comprensión crece, de acuerdo a Hiebert y Carpenter (1992) y que el dominio del enfoque global favorece el puntual aún en gráficas contextualizadas.

- Algunos equipos, en las interpretaciones “libres”, analizan más a fondo la gráfica contextualizada (combinan la información que les proporcionan los enfoques global y/o de intervalo y/o puntual) de tal manera que logran extraer información de dicha gráfica sin que aquélla se muestre directamente en ésta. Dicha información se ha denominado, en estas páginas, *inferencia*. Por ejemplo, en la gráfica de la Situación 4 que representa la variación del área de un rectángulo (de perímetro fijo) con respecto a la longitud de uno de sus lados, cinco equipos manifiestan que cuando la longitud del lado es de 20 metros, la forma sería un cuadrado.

- Los equipos dan muestras de que al analizar globalmente dos o tres gráficas y compararlas ente sí, son capaces de ordenarlas, correctamente, según la rapidez de variación que representan; bien sea que dichas gráficas sean dos rectas (Pregunta 1.c.), una recta y una curva (Pregunta 2.f) o una recta y dos curvas (Pregunta 5). En estos tres casos, el número de equipos que interpretan correctamente la rapidez de variación de la gráfica es 18 y 14, respectivamente, para las dos primeras preguntas; en la cinco ─cuya interpretación de la gráfica es "libre"─, los 13 equipos que centran su atención en el referido aspecto, llevan a cabo una adecuada interpretación. Para el caso de las rectas, como es sabido, la pendiente corresponde a la rapidez de variación, conceptos que, no está por demás recordar, no se abordaron durante el proceso de instrucción. El desempeño de la población bajo estudio, en relación al punto a discusión, da la pauta para suponer que:

  i) el conocimiento adquirido por los equipos durante la instrucción, en torno al comportamiento de las gráficas, lo aplican al interpretarlas en contexto; esto es posible considerarlo como una consecuencia de la comprensión, al tomar como parámetro el marco de Hiebert y Carpenter (1992);

  ii) los equipos asocian "lo pronunciado" de la gráfica con la magnitud del cambio; de tal manera que las gráficas más "pronunciadas" representan mayor rapidez de variación; lo cual parece revelar que las redes de conocimiento de los equipos se hacen más largas y organizadas lo que, para Hiebert y Carpenter (1992), es una muestra del crecimiento de la comprensión;

  iii) el dominio en la conversión de los registros de representación gráfico y algebraico en funciones polinomiales elementales con un enfoque global cualitativo al parecer, ayuda a percibir, gráficamente, la magnitud del cambio (cuando se abordan situaciones que involucran rapidez de variación).

- La mayoría de los equipos (12) construyen, “satisfactoriamente”, una gráfica que representa la situación planteada en la Pregunta 3.a: representar gráficamente el costo de un recorrido de 12 Km. en Metro. Cinco equipos trazan una recta paralela al eje de las abscisas y los otros siete, una paralela al eje de las ordenadas. La diferencia entre estos dos grupos de equipos es, naturalmente, la nominación de los ejes; lo cual conlleva a que la primera sea la gráfica de una función y la segunda no. Haciendo a un lado este aspecto ─dado que, en la citada pregunta, a los equinos *no* se les solicitó la gráfica de la función que representara la situación ahí planteada, sino únicamente una gráfica que representara tal situación─, es posible considerar como “bastante bueno” el rendimiento de los equipos bajo la óptica de que representar gráficamente la relación que guardan dos magnitudes (o cantidades) de tal manera que una varíe mientras la otra permanece constante, no es nada fácil. En este sentido, Leinhardt et al. (1990) señalan que “Kerslake [al igual que otros] también encontró que las traducciones que involucran funciones constantes son excepcionalmente difíciles” (pp. 35, 36).

- La complejidad que entrañan las conversiones de registros de representación en las que las gráficas constantes se ven implicadas, se incrementa cuando dichas conversiones están referidas a gráficas escalonadas: gráficas discontinuas y con diferentes reglas en diferentes subdominios. Si ya de por sí estos dos tipos de gráficas (estudiadas por separado) representan dificultades para los estudiantes (por ejemplo, las citadas por Leinhardt et al., 1990), con mayor razón una “combinación” de ellas que además involucra segmentos de rectas paralelas a uno de los ejes y todo esto aunado a la propia complejidad de la conversión del lenguaje natural al registro gráfico; hace que la tarea que enfrentan los equipos en la Pregunta 3.b, sea realmente difícil. A pesar de esto, cuatro equipos la logran superar y, aunque estos representan un poco más del 22% de la población bajo estudio (porcentaje relativamente bajo), en estas páginas, tal resultado se considera “bastante satisfactorio”.

A pesar de que lo señalado en los puntos anteriores refleja, en términos generales, un buen desempeño de los equipos en los aspectos explorados en este instrumento, en ciertas ocasiones algunos de ellos encararon algunas dificultades que no pudieron superar. A continuación se enuncian las que se consideran más relevantes.

- En determinados momentos, algunos equipos emiten su respuesta basados en un análisis global de la gráfica en lugar del puntual que el problema exige. En este sentido, el caso más crítico (dado el número de equipos que contestan incorrectamente) se presenta en la Pregunta 1.b. Ante la pregunta ¿qué familia gasta más agua?, la respuesta de diez equipos sugiere un enfoque global de la gráfica y no el puntual requerido. Posiblemente el proceder de estos diez equipos es factible interpretarlo desde dos perspectivas que pueden estar operando simultáneamente:

  1ª influencia del análisis global de las gráficas, es decir, no logran “desprenderse” del enfoque global y éste los lleva a establecer *quién gasta más rápidamente el agua* en lugar de *quién gasta más agua*;

  2ª interferencia de distractores personales (según la acepción que Janvier ─citado en Leinhardt et al., 1990─ le asigna al término); esto es, en este caso, su experiencia personal en el sentido de que, *quien gasta más rápidamente el agua*, *gasta más agua*

- De acuerdo a Leinhardt y sus colaboradoras (1990), “[e]l error estudiantil citado con más frecuencia con respecto a la interpretación y construcción de gráficas que representan situaciones es la interpretación icónica" (p. 39). En la mayoría de los equipos (17), no se observa una tendencia a interpretar las gráficas contextualizadas icónicamente. Sin embargo, en determinadas ocasiones algunos de ellos no logran mantenerse al margen de interpretar "una gráfica de una situación como una imagen literal de esa situación" (Leinhardt et al., 1990). El caso más relevante en este tenor de ideas se presenta en la Pregunta e de la Segunda Situación (2.e.). La respuesta de diez equipos a esta pregunta, revela que, como lo señala Kerslake (citado por Leinhardt et al., 1990), estos equipos interpretan las gráficas de movimiento como las trayectorias de los viajes reales. En contraste con esto, los ocho equipos restantes nunca incurren en una interpretación icónica pero, innegablemente, el punto de intersección de las gráficas que representan la Segunda Situación es "el talón de Aquiles" de la población bajo estudio. Es posible que en esta circunstancia se esté ante un caso de un aspecto que señalan Leinhardt et al., (1990): "las dificultades no necesariamente proponen un concepto erróneo como la razón de la dificultad. Más bien, es más probable que impliquen que algo acerca de la tarea es lo que la hace especialmente difícil" (p. 30). Desde esta óptica, es probable que el punto de intersección de las gráficas que representan la Segunda Situación es "ese algo" de la tarea (al que se refieren Leinhardt y sus colaboradoras) que la hace especialmente difícil para los equipos que interpretaron icónicamente las mencionadas gráficas. Tal vez la dificultad estriba en que el citado punto "limita" a los equipos a considerar las gráficas simbólicamente, esto es, omitir semejanzas pictóricas con elementos de las trayectorias y los "seduce" a interpretarlas como una imagen literal de la situación. En otras palabras, algunas situaciones contextualizadas resultan ser "más susceptibles" que otras de que sus gráficas sean interpretadas icónicamente. Considerar que el factor principal que ayuda a dar cuenta del rendimiento de los equipos, en la pregunta a discusión, es la propia dificultad de la tarea más que la dificultad que ellos tienen para interpretar adecuadamente gráficas que representen situaciones es, en dado caso, viable para siete de los diez equipos que la contestaron incorrectamente, dado que en ningún otro caso incurren en una interpretación icónica. Sin embargo, de los tres restantes, uno de ellos incurre en este tipo de interpretación en otras tres ocasiones y los otros dos, en una. En estos casos, al parecer, la dificultad está más en los equipos que en la tarea propiamente dicha.

- Como se señala renglones arriba, la construcción de las gráficas que representan la primera y la segunda parte de la Tercera Situación (3.a y 3.b, respectivamente), son "particularmente difíciles": la primera demanda una recta paralela a uno de los ejes y la segunda, una gráfica escalonada. Seis equipos fallan al intentar construir la gráfica que represente lo planteado en la situación 3.a y 14, en lo de la 3.b. En los intentos de construir las mencionadas gráficas se observa, en lo fundamental, una tendencia a la linealidad en la situación 3.a y a la linealidad y continuidad, en la 3.b. Leinhardt et al., (1990) refieren numerosos estudios en los que se han observado dichas tendencias. Estas mismas autoras señalan otros dos hechos, que según refieren, se reportan en diferentes estudios y que en este trabajo se considera pueden estar induciendo a los equipos a las tendencias antes mencionadas. Ellos son: i) las funciones constantes "no son vistas como legítimas" (p. 31); ii) los equipos "tienen una visión demasiado restringida de las formas que pueden tomar las gráficas" (p. 30). Estos dos hechos puede ayudar a dar cuenta de "los intentos fallidos" para construir la gráfica correcta en las referidas situaciones; como son: en la situación 3.a, trazan una recta con pendiente positiva y colocan la leyenda "tarifa constante" o, asignan el mismo valor, o no asignan valor alguno en cada extremo de los intervalos del eje que representa el costo; en la situación 3.b, trazan dos segmentos de recta "unidos" (bien sea uno con pendiente positiva y el otro paralelo a un eje o los dos con pendiente positiva) o, tres segmentos de recta con pendiente positiva de diferente longitud y que parten del origen. Finalmente, cabe señalar que es factible que en los ocho equipos que contestan correctamente la situación 3.a (recta paralela a uno de los ejes) y fallan en la situación 3.b (gráfica escalonada) impere "la visión" de que las gráficas deben ser continuas.

- En las dos últimas situaciones de este Instrumento (Cuarta y Quinta) ─en las cuales la interpretación de las gráficas que las representan es "libre"─, es posible afirmar que la dificultad que enfrentaron los cuatro equipos que interpretan incorrectamente la gráfica de la Cuarta Situación estriba, fundamentalmente, en el hecho de que no conciben que el área de un rectángulo varíe mientras su perímetro permanece fijo; o como lo expresa el equipo 18: "creemos que no es posible tener un perímetro fijo en una figura, mientras su area esta aumentando". De aquí que, ellos consideran que sólo hay *un* rectángulo. En torno a él, dos equipos formulan sus afirmaciones y los otros dos, se limitan a señalar lo antes expuesto. Esto conlleva a suponer que el problema que ellos enfrenaron, de hecho, no radica en la interpretación de la gráfica en sí, sino en el contenido matemático que involucra la propia situación planteada (la situación misma). Por otra parte, "el problema", por así decirlo, que se observa en el desempeño de los 17 equipos que hacen afirmaciones correctas, al interpretar las tres gráficas que representan la Situación 5, es que *ninguno* de ellos establece alguna afirmación que indique que hayan centrado su atención en uno de los dos puntos de intersección de dichas gráficas; a saber, el que se localiza en el eje de las ordenadas, el cual, en la situación que se discute, representa el mismo número de bacterias en cada uno de los tres medios al momento de iniciarse la reproducción (tiempo inicial). Al parecer, el punto pasa inadvertido. Esta omisión de los equipos tal vez, es factible de interpretarla desde tres vertientes que pueden ser convergentes:

  1ª Un análisis puntual un tanto restringido: se fija la atención en unos puntos de la gráfica y no en otros.

  2ª Interferencia, en el análisis de las gráficas, de los distractores personales (según la acepción que Janvier ─citado en Leinhardt et al., 1990— le asigna al término). En el caso que nos ocupa, el distractor puede ser la experiencia de los equipos en el sentido de que, dado que es "común" que los diseños experimentales inicien con el mismo número de elementos (semillas, bacterias, plantas, etc.), ni siquiera vale la pena mencionarlo.

3[a] Ambigüedad en una de las frases que incluye el planteamiento de la situación: "la bacteria B". Ésta puedo haberse entendido como *una* (y sólo una) bacteria. De ser este el caso, tal vez consideran innecesario emitir una afirmación en la que se explicite el número de bacterias que había en cada medio, al momento de iniciar su reproducción, si "ya se sabe que es *una*" (el planteamiento de la situación, así lo indica).

Los resultados de este Instrumento exhiben los logros y desaciertos de los 18 equipos en los aspectos explorados en este Instrumento. El desempeño de la población aporta nuevos elementos (además de los que se tienen de los dos Instrumentos anteriores) que apoyan las declaraciones que a continuación se enuncian. Éstas se presentan desde tres puntos de vista: en relación al proceso de instrucción; en torno a la forma de abordar el contenido en dicha instrucción y en cuanto a la comprensión de los equipos.

1. El proceso de instrucción al que fue sometida la población bajo estudio además de lograr que 17 equipos (de 18) dominen la conversión de registros de representación gráfico y algebraico en funciones de la forma $y = ax^n + b$, *donde* $a, b \in \Re$, $a \neq 0$ y $n = 1, 2$ y 3 por la vía global cualitativa, al parecer, también promueve aprendizajes con comprensión; de tal manera que, en general, los equipos afrontan con "relativo éxito" los aspectos explorados en este Instrumento: interpretación cualitativa y cuantitativa de gráficas contextualizadas; enfoque puntal, por intervalos y globales de gráficas de situaciones; construcción de la gráfica que representa una determina situación de la vida cotidiana (costo de un

recorrido en metro y en “pesera”). En términos generales, en las interpretaciones “guiadas” (i.e. preguntas específicas sobre algún aspecto de la gráfica) no se observa diferencia en el desempeño de los equipos en las gráficas contextualizadas que demandan una interpretación cualitativa de las que requieren una cuantitativa o de aquellas que exigen un enfoque global de las que solicitan un puntual o de intervalos; de igual manera, en las interpretaciones “libres” no se percibe preferencia alguna entre el enfoque global cualitativo, que ellos dominan, sobre el puntual cualitativo o cuantitativo; la mayoría de los equipos (17) no muestran una tendencia a la interpretación icónica en gráficas de situaciones; logran interpretar, adecuadamente, la rapidez de variación en gráficas contextualizadas. Naturalmente, algunos equipos en ciertos casos y en determinados momentos, enfocan globalmente la gráfica cuando la situación demanda un puntual; son “atrapados en las redes” de la interpretación icónica la linealidad y la continuidad. Además, como pocos equipos hacen una interpretación de la gráfica (cuando ésta es “libre”) con un enfoque de intervalos, esto puede indicar que la instrucción recibida (de corte global cualitativo) propicia más el desarrollo del enfoque puntual que el de intervalos; pero, aún con todo esto, parece ser que la estrategia de instrucción es *adecuada*.

2. Abordar el conocimiento en la instrucción con la visión de una “formalización progresiva”, como lo señalan Bransford, Brown y Cocking (1999) o, como lo sugieren Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990), moverse desde lo menos formal, menos abstracto, más global e intuitivo al sistema formal, notacionalmente riguroso ─que en nuestro caso se traduce en iniciar el estudio de la conversión de registros de representación gráfico y algebraico en funciones de la forma $y = ax^n + b$, *donde* $a, b \in \Re, a \neq 0$ y $n = 1, 2$ y 3 por la vía global cualitativa─, al parecer, resulta ser una forma apropiada.

3. El desempeño de los equipos en este Tercer Instrumento, permite considerar que logran un aprendizaje con *buena* comprensión de la citada conversión de tal manera que, les permite enfrentar con “relativo éxito” los aspectos aquí explorados.

5ª Parte

Concentrado del rendimiento de los estudiantes en los cuatro Instrumentos anteriores

Introducción

Con la intención de contar con una visión global cuantitativa del desempeño de cada uno de los equipos y de la población bajo estudio (vista como un todo) en los tres instrumentos utilizados en este trabajo, que tienen como propósito explorar el nivel de comprensión que muestran los estudiantes en los aspectos en ellos referidos, en este apartado se presenta un concentrado de los resultados obtenidos por los dieciocho equipos en torno a sus puntuaciones en los tres instrumentos mencionados. Al mismo tiempo, se proporciona la puntuación promedio obtenida por los equipos en el Instrumento que se utiliza para explorar el dominio de la conversión.

Concentrado de las puntuaciones obtenidas por los equipos en los tres Instrumentos denominados de Comprensión y en el de Dominio

Equipo	Puntuación en el 1er. Instrumento	Puntuación en el 2º Instrumento	Puntuación en el 3er. Instrumento	Puntuación promedio por equipo en los tres Instrumentos de Comprensión	Puntuación promedio por equipo en el Instrumento de Dominio*
1	6.93	9.2	6.2	7.44	9.01
2	7.67	10	9.5	9.06	9.59
3	6.2	7.2	8	7.13	7.12
4	7.67	10	7.2	8.29	9.89
5	5.61	7.2	7.4	6.74	9.34
6	7.23	8	5.5	6.91	9.67
7	4.13	8	6.8	6.31	8.02
8	3.84	5.6	5.6	5.01	5.52
9	6.2	8.8	7.7	7.57	7.77
10	7.23	8.8	8.1	8.04	7.69
11	6.2	7.2	6	6.47	9.34
12	7.97	6.8	9.4	8.06	8.93
13	5.9	8.8	5.9	6.87	8.35
14	9.44	9.2	9.8	9.48	9.92
15	5.02	8.4	4.1	5.84	8.68
16	3.99	8.4	4.9	5.76	9.01
17	6.2	10	7.7	7.97	9.26
18	7.82	7.6	5.4	6.94	7.53
Puntuación promedio de la población	6.4	8.28	6.95	7.21	8.59

* Recuérdese que el Instrumento para explorar el dominio de la conversión fue presentado de manera individual y no por equipo como los Instrumentos de Comprensión. Por lo que, la puntuación señalada en esta columna es el promedio de las puntuaciones individuales de los integrantes de cada equipo.

La tabla anterior muestra, entre otras cosas, que de los dieciocho equipos:

i. El equipo que logra el mejor desempeño en el primer Instrumento es el 14 (9.44) y el más bajo, el 8 (3.84).

ii. Los equipos 4 y el 17 muestran un desempeño excelente (10) en el segundo cuestionario, y el 8, el más deficiente (5.6).

iii. En el tercer conjunto de tareas, el 14, nuevamente, obtiene la más alta puntuación (9.8) y el 15, la más baja (4.1). Aunque el equipo 8, con una puntuación de 5.6, en esta ocasión no estuvo en último lugar, por tercera vez consecutiva obtiene una puntuación inferior a la mínima que se establece (6 puntos) para considerar que superó la prueba.

iv. El equipo que logra el mejor rendimiento promedio es el 14 (9.48) y el peor, el 8 (5.01). Este equipo es el único que su puntuación promedio en el Instrumento para explorar el dominio de la conversión (5.52) no alcanzó la puntuación mínima necesaria (6) para considerar su rendimiento como suficiente.

v. Los equipos 15 y 16 logran una puntuación promedio de los tres Instrumentos inferior a seis puntos (5.84 y 5.76, respectivamente). Por lo cual se considera que su desempeño global en dichos Instrumentos no es satisfactorio.

vi. Hay equipos que se desempeñaron muy bien en todos los Instrumentos (incluyendo el Instrumento para explorar el dominio); otros deficientemente y otros más, bien en alguno(s) y mal en otro(s). En el primer caso se tiene, por ejemplo, al equipo 14 y 18; en el segundo, al 8 y en el tercero al 18 y al 15.

vii. Algunos equipos fueron más o menos consistentes en su rendimiento a lo largo de los mencionados Instrumentos, independientemente de cuál haya sido éste. Por ejemplo el 10, el 11 o el 14. Sin embargo otros, presentan variaciones significativas. Tal es el caso de los equipos 7 y 17, por mencionar algunos.

viii. En relación al grupo (visto éste como un todo), no se puede decir que fue consistente a lo largo de los Instrumentos pero tampoco, que presentó saltos muy abruptos de uno a otro.

ix. El 1er. Instrumento fue el más difícil (la puntuación promedio de los dieciocho equipos es 6.4) mientras que el 2º, el más fácil (8.28).

x. La puntuación promedio de la población en los tres Instrumentos es de 7.21. Más de un punto por debajo de la del Instrumento para explorar el dominio (8.59).

Con todos los resultados hasta aquí analizados es posible decir que, en términos generales, el *nivel de comprensión* que muestra la población bajo estudio en torno al concepto de función es *satisfactorio*.

6ª Parte
Resultados del 4°
Instrumento de Comprensión

Introducción

Este espacio está dedicado a presentar los resultados de la aplicación del denominado “4º Instrumento de Comprensión”; éste tiene la finalidad de explorar, en diez estudiantes, qué recuerdan y cómo llevan a cabo la conversión de registros de representación gráfico y algebraico en funciones polinomiales elementales, después de un año de haberla aprendido y haber mostrado dominio sobre ella. Dicho instrumento es el *mismo Cuestionario* que se les aplicó al concluir el proceso de instrucción (Instrumento para explorar el dominio); su propósito, en aquel entonces, era indagar en qué medida la población bajo estudio (70 alumnos) había logrado el dominio en la mencionada conversión, después de haber sido sometida a un proceso de instrucción para tal fin.

Un año escolar después de la referida instrucción, se logra contactar a *diez* estudiantes (de los 64 que mostraron dominio en la citada articulación) que disponían de un tiempo libre para conceder una entrevista. Ellos desconocían la finalidad de la reunión: enfrentarlos al Cuestionario que habían resuelto un año atrás. Se trabaja de manera individual con cada alumno y la entrevista consistió, fundamentalmente, de los tres momentos que se enuncian a continuación:

1º Aplicar el Cuestionario sobre la conversión de registros de representación que, como se ha citado en distintas ocasiones, consta de dos partes. La primera de ellas (con 15 preguntas) dedicada al proceso *ecuación* $\rightarrow$ *gráfica* y la segunda parte (también con 15 preguntas), al proceso *gráfica* $\rightarrow$ *ecuación*.

2º Conceder el tiempo que los estudiantes estimen necesario para que, con sus propios recursos, intenten disipar las dudas que tuvieron al contestar el Cuestionario.

3º Realizar una *segunda* aplicación del Cuestionario, una vez que los alumnos consideran haber aclarado sus dudas.

En cada uno de estos tres momentos, los estudiantes no reciben ayuda alguna del entrevistador; éste, a lo más, en ciertas ocasiones los cuestiona.

Los diez alumnos con los que se trabajó son referidos en esta sección como 1º, 2º,... y 10º estudiante. Esta designación responde al orden en el que fueron entrevistados.

Los resultados de esta experiencia se presentan en tres apartados. En el primero, se exponen los que se obtienen en el primer momento de la entrevista, citado renglones arriba, desde *tres* perspectivas: global, global─específica y específica; en el segundo, los correspondientes al segundo momento de la entrevista y en el tercero, los que emanan del tercer momento de dicha entrevista. A continuación, se especifica el sentido que se le atribuye, en estas páginas, a las perspectivas bajo las cuales se registran los resultados en el primer apartado.

PERSPECTIVA	SENTIDO QUE SE LE ATRIBUYE
Global:	Qué asociaciones, en lo general, establecen entre los registros de representación gráfico y algebraico en funciones polinomiales de la forma $y = ax^n + b$ donde a, $b \in \Re$, $a \neq 0$ y n = 1, 2, 3; después de un año de haberlo aprendido.
Global-Específica:	Qué del vocabulario, notación y aspectos genéricos de la función lineal, cuadrática y cúbica, utilizados un año atrás para enfrentar las tareas de conversión, reemplazan u omiten los alumnos al abordar, en esta ocasión, el Cuestionario sobre la misma temática.
Específica	Cómo llevan a cabo la conversión de dichos registros de representación.

Al finalizar la presentación de los resultados de la forma antes descrita, se dedica un espacio en el que se plasman las conclusiones a las que se llega después de analizar el desempeño de los estudiantes en este Cuarto Instrumento de Comprensión.

Para finalizar esta Introducción, sólo resta mencionar que en el Anexo 4 se muestran en tablas, en primer lugar, las respuestas que emitieron los estudiantes a las preguntas del mencionado Cuestionario (tanto las de la primera aplicación como las de la segunda) y en segundo, los concentrados de dichos resultados.

RESULTADOS

Antes de proceder a mostrar los resultados de los diez estudiantes que se refieren en la Introducción de esta sección y con los cuales se trabajó en el denominado 4° Instrumento de Comprensión, se considera conveniente señalar que la situación académica de estos alumnos, al momento de ser entrevistados, era, en términos generales, la que se describe a continuación:

i. Nueve de ellos, en principio, no volvieron a tener contacto con la conversión de registros de representación gráfico y algebraico en funciones de la forma $y = ax^n + b$, *donde* $a, b \in \Re$, $a \neq 0$ y $n = 1, 2, 3;$ ni con algo que con ello se relacione directamente en virtud de que los contenidos de las asignaturas que cursaron en ese año escolar que medió entre el término de la instrucción a la que fueron sometidos y la aplicación del Cuestionario en esta ocasión, no están explícitamente relacionados con el contenido matemático que se aborda en este Instrumento. Dichas asignaturas, en el área de matemáticas, fueron Estadística I y II y/o Cibernética y Computación I y II.

ii. El otro estudiante (el 2°), cursó Matemáticas V y VI y aunque, a decir de él, no trabajó con la conversión de registros de representación como objeto de estudio en dichas asignaturas, sí utilizaba, en algunas ocasiones y por iniciativa propia, los conocimientos adquiridos sobre el punto en cuestión como ayuda o soporte para algunos de los temas que se abordaban en sus clases de Matemáticas.

Aclarada la “trayectoria escolar” que tuvieron los alumnos durante el año escolar en el que no se tuvo contacto académico con ellos, en seguida, se inicia la presentación de los resultados.

1ER. APARTADO

(*1ER. MOMENTO DE LA ENTREVISTA*)

Resultados de la 1ª aplicación del Cuestionario desde la Perspectiva Global

En términos generales, es posible afirmar que *ocho* de los diez alumnos entrevistados muestran dominio en *la esencia* de la articulación de registros de representación gráfico y algebraico en funciones polinomiales de la forma $y = ax^n + b$, donde a, $b \in \Re$, $a \neq 0$ y n = 1, 2, 3, después de un año de haberlo aprendido. En otras palabras, estos ocho estudiantes (el 1º, 2º, 3º, 5º, 6º, 7º, 9º y 10º), al momento de ser enfrentados al Cuestionario en cuestión, identifican correcta e *inmediatamente* que:

- "n" determina la forma de la gráfica, en el proceso ecuación $\rightarrow$ gráfica, y recíprocamente, es decir, la forma de la gráfica determina el exponente de la variable independiente, en el proceso gráfica$\rightarrow$ecuación.
- El signo de "a" determina hacia donde se abre la parábola o los cuadrantes por los que necesariamente pasan las rectas y las parábolas cúbicas, según sea el caso, en el proceso ecuación$\rightarrow$gráfica, y recíprocamente, en el proceso inverso.
- "a" determina la inclinación de la recta (α) o la abertura de la parábola y parábola cúbica, en el proceso ecuación$\rightarrow$gráfica, y recíprocamente, en el proceso gráfica$\rightarrow$ecuación.

- "*b*" determina el desplazamiento de la gráfica en el eje de las ordenadas, en el proceso ecuación→gráfica, y recíprocamente, en el proceso inverso.

Cabe señalar que los estudiantes no necesariamente se refieren a estos cuatro aspectos con los mismos términos con los que aquí se han redactado. Esto se aborda en la perspectiva global-específica.

De los otros dos estudiantes, la dificultad que muestra el 4º es que, en las dos primeras preguntas que contesta, prácticamente confunde el rol de "*b*" con el de "*a*". Unos minutos después, aproximadamente cinco, supera la confusión y no vuelve a presentar la más mínima duda en este aspecto. Por su parte, el 8º estudiante considera que "*a*" tiene otra función más de las dos enunciadas renglones arriba: determinar el punto de intersección con el eje de las abscisas. Este hecho, desde la posición de Moschkovich (1999), es un ejemplo de una concepción transitoria.

Esta es la situación de los diez estudiantes, en la primera aplicación del Cuestionario, vista desde la *perspectiva global*. Más adelante, en el 4° Apartado, se muestran las respuestas emitidas por ellos.

Resultados de la 1ª aplicación del Cuestionario desde la Perspectiva Global–Específica

La información que se tiene en esta perspectiva se obtiene, fundamentalmente, de los comentarios o "pensamientos en voz alta" que van realizando los estudiantes conforme resuelven el Cuestionario y de los cuales, el entrevistador toma nota.

Al parecer, el transcurso del tiempo y la falta de contacto con el objeto de estudio provocan que algunos estudiantes, si bien mantienen clara la esencia de la conversión de registros, pierden terreno en aspectos menos globales o un poco más específicos. De tal manera que, lo que meses atrás era común para ellos, como por ejemplo, el nombre de las curvas, después de un año no lo recuerdan. Tal es el caso de tres alumnos (1º, 7º y 8º) quienes dicen, no recordar el nombre de una de ellas (se refieren a las parábolas cúbicas).

Algunos términos, notaciones o expresiones utilizadas por los alumnos un año anterior, son sustituidos (a veces incorrectamente) en esta nueva aplicación del Cuestionario. Así, el 1er. estudiante, para referirse al coeficiente de la variable independiente, utiliza, genéricamente, el término “pendiente” y, el 8º y 9º, “el numerito que está junto a la *x*”. Tres alumnos más (1º, 3º y 4º), cuando registran el punto de intersección (vértice o punto de inflexión) de la gráfica con el eje de las ordenadas, en lugar de anotar, por ejemplo, “(0,8)” escriben, simplemente, “8”. Otros dos (5º y 6º), sustituyen el término de “cuadrantes” por el de “orientación de la gráfica” (el 5º) y “de derecha a izquierda” o de “izquierda a derecha” (el 6º). Cuatro estudiantes (3º, 5º, 6º y 10º) en lugar de decir “α” o “el ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje de las abscisas”, dicen, “pegada al eje de las Ys” y/o “pegada al eje de las Xs”. El 7º entrevistado, en este aspecto, habla del “grado de inclinación”. En este mismo sentido, los alumnos 3º y 7º, en la segunda parte del Cuestionario, consideran el ángulo que forma una recta con la parte positiva del eje de las ordenadas, en lugar de considerarlo con el eje de las abscisas. En esta situación también se encuentra el 8º estudiante, sólo que él, en la primera parte del Cuestionario. Además, éste considera que “*a*” tiene otra función más de las dos enunciadas renglones arriba: determinar el punto de intersección con el eje de las abscisas. Estos son, algunos de los resultados bajo esta perspectiva.

Resultados de la 1ª aplicación del Cuestionario desde la Perspectiva Específica

Para que los estudiantes contesten correctamente las preguntas de la 1ª parte del Cuestionario, dedicadas al proceso ecuación→gráfica, es necesario que:

1º analicen la ecuación, que a saber es de la forma $y = ax^n + b$, a fin de establecer las propiedades de las unidades significantes. Es decir, valor de "*n*", signo de "*a*", valor de "*a*" y valor de "*b*";

2º con base a lo anterior, determinen, para cada una de las unidades significantes de la escritura algebraica, la característica correspondiente de la gráfica asociada y,

3º finalmente, identifiquen, de un conjunto de 54 bosquejos de gráficas, aquella que cumpla con las condiciones establecidas en el punto precedente.

Algo parecido es preciso para la 2ª parte del Cuestionario, cuyas preguntas, están referidas al proceso gráfica → ecuación.

Más concretamente, para llevar a cabo la conversión de registros de representación solicitada en el Cuestionario, requiere que los estudiantes manejen cuatro unidades significantes en la representación algebraica; cuatro variables visuales, en la representación geométrica; 54 posibles combinaciones de los valores de las unidades significantes en la representación algebraica y 54 en la representación geométrica; establezcan las asociaciones correspondientes entre las representaciones algebraica y geométrica; identifiquen una gráfica, de un conjunto de 54 bosquejos, o construyan una ecuación. Ante este complejo proceso, la mayoría de los estudiantes (nueve de diez) producen algunas respuestas incorrectas cuando se enfrentan, en esta 1ª aplicación, al citado Cuestionario.

Un análisis de esas respuestas equívocas, permite identificar *once* posibles fuentes de equívoco. Ellas son consideradas en estas páginas como “formas de ver los objetos matemáticos” que los alumnos “construyen”, a fin de superar las dudas que en algún momento determinado los asaltan y con ello, contestar las preguntas que se les hacen en el Cuestionario. Esas “formas de ver lo objetos matemáticos” son denominadas, en este trabajo, genéricamente *efectos* y los nombres que se les han asignado son: *efecto numérico, numérico con valor absoluto, lineal con valor absoluto, lineal invertido, lineal invertido con valor absoluto, de inversión parcial de roles, de proximidad, cotidiano del racional, cotidiano del racional con valor absoluto, de visión parcial* y *de parámetros libres*. A continuación se describe cada uno de ellos y posteriormente, juzgado a la luz de la perspectiva que ahora nos ocupa, se expone el desempeño de los estudiantes. En otras palabras, los resultados de la *perspectiva específica*, se presentan en dos partes: en la primera, se describen los efectos y en la segunda, se presentan los resultados propiamente dichos.

1ª Parte: Descripción de los efectos

Efecto Numérico. En el entendido de que, en el proceso ecuación→gráfica, el coeficiente de la variable independiente (“a”) determina la abertura de la parábola y parábola cúbica, al parecer, los alumnos que incurren en el *efecto numérico*, consideran que la abertura de dichas gráficas, obedece al orden que guarda “a” con respecto a uno (para el caso cuando $a > 0$). En otras palabras, el razonamiento que llevan a cabo es más o menos el siguiente:

Si $a = 1$, la abertura de la gráfica es “normal”. Luego entonces,

i. si “a” es *más chica* que uno ($a < 1$), la abertura *debe ser* “*más chica*” que la normal; es decir, la gráfica *debe ser* “*cerrada*” y,

ii. si “a” es *más grande* que uno ($a > 1$), la abertura *debe ser* “*más grande*” que la normal; esto es, la gráfica *debe ser* “*abierta*”.

Un razonamiento similar al aquí expuesto, es posible que lleven a cabo los estudiantes cuando trabajan el proceso gráfica $\rightarrow$ ecuación. En éste, las condicionales anteriores son sustituidas por sus recíprocas.

En resumen, los estudiantes que incurren en el *efecto numérico* al enfrentar las preguntas referidas a las funciones cuadrática y/o cúbica, de hecho, trabajan con las tres bicondicionales siguientes:

1ª $a = 1 \Leftrightarrow$ la abertura de la gráfica es “normal”,

2ª $a < 1 \Leftrightarrow$ la gráfica es “*cerrada*” y

3ª $a > 1 \Leftrightarrow$ la gráfica es “*abierta*”;

la primera es verdadera, pero las otras dos no.

Efecto Numérico con valor absoluto. En forma análoga a la anterior, y para el mismo tipo de funciones, se pueden interpretar las respuestas de los estudiantes, en el proceso ecuación$\rightarrow$gráfica, cuando $a < 0$; sólo que en este caso, el proceder de los alumnos que son “atrapados” por el llamado *efecto numérico con valor absoluto*, parece ser el siguiente:

1º Consideran el signo de “a” (que a saber es negativo) y determinan que la parábola abre hacia abajo o, que los cuadrantes por los que necesariamente pasa la parábola cúbica son el II y el IV, según sea el caso.

2º “*Omiten, intencionalmente el signo negativo*” del coeficiente de la variable independiente (como si tomaran *el valor absoluto de* “a”) y, asignan la abertura de la gráfica, según se describe en el *efecto numérico.*

Haciendo las modificaciones pertinentes a estos dos puntos, se obtiene una explicación de los equívocos de los estudiantes en el proceso inverso: gráfica $\rightarrow$ ecuación.

Resumiendo, en el *efecto numérico con valor absoluto*, los alumnos utilizan, prácticamente, las tres bicondicionales que se enuncian en seguida. La primera de ellas es verdadera pero la segunda y la tercera no lo son.

1ª $|a| = 1 \Leftrightarrow$ la abertura de la gráfica es “normal”,

2ª $|a| < 1 \Leftrightarrow$ la gráfica es “*cerrada*” y

3ª $|a| > 1 \Leftrightarrow$ la gráfica es “*abierta*”.

Efecto Lineal con valor absoluto. En virtud de que el razonamiento que llevan a cabo los estudiantes que cometen algún equívoco etiquetado como *efecto lineal con valor absoluto*, al trabajar con las funciones lineales, es muy similar al del *efecto numérico con valor absoluto,* a continuación, sólo se enuncian las bicondicionales que, se considera, utilizan los alumnos y, aquellas de las cuales pudieron haber sido extrapoladas.

Basados en el hecho de que en las funciones lineales se cumplen las bicondicionales

$a = 1 \Leftrightarrow \alpha = \mathbf{45°}$,

$a < 1 \Leftrightarrow 0° < \alpha < \mathbf{45°}$ y

$a > 1 \Leftrightarrow \mathbf{45°} < \alpha < 90°$;

los estudiantes consideran verdaderas las tres bicondicionales siguientes cuando, sólo la primera lo es.

1ª $a = -1 \Leftrightarrow \alpha = \mathbf{135°}$,

2ª $|a| < 1 \Leftrightarrow 90° < \alpha < \mathbf{135°}$ y

3ª $|a| > 1 \Leftrightarrow \mathbf{135°} < \alpha < 180°$.

En las seis bicondicionales anteriores, y en lo subsecuente, "α" representa el ángulo que forma una recta con la parte positiva del eje de las abscisas.

Efecto Lineal invertido. Cuando los alumnos trabajan con funciones lineales que, en su representación algebraica "*a*" es mayor que cero o bien, que en su representación geométrica "α" es agudo, al momento de abordar lo referente al ángulo que forma la recta (bien sea en el proceso ecuación $\rightarrow$ gráfica o en el proceso inverso), éste lo consideran con la *parte positiva del eje de las ordenadas* (en el mismo sentido que las manecillas del reloj), en lugar de hacerlo con la parte positiva del eje de las abscisas (α). Si se representa por "β" dicho ángulo, las bicondicionales que, probablemente, subyacen en el razonamiento de los alumnos son:

1ª $a = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{\beta = 45°}$

2ª $a < 1 \Leftrightarrow 0° < \boldsymbol{\beta < 45°}$ y

3ª $a > 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{45° < \beta} < 90°$.

La relación que existe entre los valores de β y los de α es la siguiente:

Cuando $\beta = 45°$, $\alpha = 45°$;

cuando $0° < \beta < 45°$, $45° < \alpha < 90°$ y

cuando $45° < \beta < 90°$, $0° < \alpha < 45°$.

Efecto Lineal invertido con valor absoluto. Este *efecto* se presenta cuando los estudiantes trabajan con funciones lineales donde "*a*" es negativa en el proceso ecuación $\rightarrow$ gráfica o bien, "α" es obtuso en el proceso gráfica$\rightarrow$ecuación.

En el proceso ecuación $\rightarrow$ gráfica, los alumnos que "caen" en el *efecto lineal invertido con valor absoluto*, al parecer, consideran, por un lado, el signo de "*a*" para asignar los cuadrantes por los que necesariamente pasa la recta. Y por otro, el valor absoluto de "*a*" para determinar el ángulo. Éste, al igual que en el *efecto* anterior, es tomado con respecto a la parte positiva del *eje de las ordenadas*, sólo que en este caso, en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Para dar cuenta de las respuestas etiquetadas con este *efecto* en el proceso gráfica $\rightarrow$ ecuación, basta hacer las modificaciones correspondientes a lo expresado en el párrafo anterior.

Nuevamente, son tres bicondicionales las que, posiblemente, están en el fondo del razonamiento que realizan los estudiantes que caen en el *efecto* que por el momento nos ocupa y que, ellos las aceptan como verdaderas cuando en realidad, ninguna de ellas lo es. Si representamos por "β_1" el ángulo que forma una recta con la parte positiva del eje de las ordenadas y tomado en el sentido inverso a las manecillas del reloj, dichas proposiciones son:

1ª $|a| = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{\beta_1 = 45°}$

2ª $|a| < 1 \Leftrightarrow 0° < \beta_1 \boldsymbol{< 45°}$ y

3ª $|a| > 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{45° < \beta_1} < 90°$.

Considerada β_1 como se describe renglones arriba, la relación entre los valores de ella y los de α es:

Cuando $\beta_1 = 45°$, $\alpha = 135°$;

cuando $0° < \beta_1 < 45°$, $90° < \alpha < 135°$ y

cuando $45° < \beta_1 < 90°$, $135° < \alpha < 180°$

Comentario: Como ya se habrá observado, el *efecto lineal invertido con valor absoluto* produce las mismas respuestas que el *efecto lineal con valor absoluto*. Para diferenciar uno de otro es necesario analizar las respuestas dadas por el estudiante cuando $a > 0$ (en el proceso ecuación $\rightarrow$ gráfica) o bien, cuando las rectas pasan necesariamente por Cuadrantes I y III (en el proceso gráfica $\rightarrow$ ecuación), a fin de identificar el *patrón* de respuestas.

Así por ejemplo, si un estudiante, en el proceso ecuación $\rightarrow$ gráfica, asocia correctamente la gráfica cuando $a > 0$, e incorrectamente (bajo los esquemas enunciados con anterioridad) cuando $a < 0$, se considera que el alumno incurre en el llamado *efecto lineal con valor absoluto*. Pero, si por el contrario, cuando $a > 0$ asocia incorrectamente la gráfica y cuando $a < 0$, también, se juzga que sus respuestas son emitidas bajo el *efecto lineal invertido con valor absoluto*. En estos casos, naturalmente, se está excluyendo otra posible fuente de equívoco.

Más específicamente, en la 1ª parte del Cuestionario, que está dedicado al proceso ecuación $\rightarrow$ gráfica, se distingue el *efecto lineal con valor absoluto* del *lineal invertido con valor absoluto,* al analizar las respuestas que emiten los estudiantes en las preguntas 1, 7, 12 y 14. En las ecuaciones de las preguntas 1 y 14, el coeficiente de la variable independiente es mayor que cero ($a > 0$), mientras que en las de la 7 y 12, $a < 0$. Dependiendo de las respuestas que los alumnos den a las preguntas 1 y 14, es el *efecto* en el que incurren en las respuestas de la 7 y de la 12.

La tabla siguiente muestra el número de gráfica que le es asociada a cada una de las ecuaciones de dichas preguntas y el *efecto* que le es atribuible en las respuestas de la 7 y de la 12.

Patrón de respuestas (números de gráfica)
para diferenciar los efectos en discusión

	Respuestas (Nª de gráfica)			
Efecto/Nº de pregunta	*1*	*7*	*12*	*14*
*Lineal con valor absoluto **	8	11*	18*	7
*Lineal invertido con valor absoluto ***	6	11**	18**	8

Un procedimiento similar al anterior, permite diferenciar los dos *efectos* en cuestión, en el proceso gráfica $\rightarrow$ ecuación.

Efecto de Inversión parcial de roles. Este *efecto* es observado únicamente en dos ocasiones durante el proceso gráfica $\rightarrow$ ecuación y para el caso cuando la gráfica de la función pasa por el origen. El estudiante que incurre en él, considera que: i) hacia donde abre la parábola y los cuadrantes por los que necesariamente pasa la parábola cúbica, determinan, en la ecuación asociada, el signo de “*a*” (esto es correcto); ii) la abertura de la gráfica, el valor de “*b*” (incorrecto) y, iii) el hecho de que la gráfica pase por el origen, implica que el valor del coeficiente de la variable independiente “no se modifique” (incorrecto), es decir, “*a*” debe ser igual a uno o menos uno, según sea el caso.

Efecto de Proximidad. En la representación algebraica de una función, la proximidad o cercanía que tiene “*a*” de “*x*”, parece ser el factor que “conduce” al estudiante a considerar que “*a*”, además de establecer el ángulo de la recta o la abertura de la parábola y parábola cúbica (según sea el caso), determina el *punto de intersección* de la recta y de la parábola cúbica *en el eje de las abscisas*; e inversamente en el proceso gráfica$\rightarrow$ecuación. Esta visión, aunada con:

i. el entendido de que "*b*" determina el punto de intersección (de la recta, parábola y parábola cúbica) en el eje de las ordenadas, en el proceso ecuación$\rightarrow$gráfica y, recíprocamente, en el proceso inverso;

ii. un análisis parcial de los distintos casos que se pueden tener al combinar los diferentes valores de "*a*" y "*b*" (sólo se consideran dos de ellos: $a > 0$ y $b > 0$ y, $a < 0$ y $b > 0$);

lleva a que el estudiante, de hecho, utilice, al dar respuesta a las preguntas del Cuestionario, las dos bicondicionales siguientes:

1ª $a > 0 \Leftrightarrow$ la recta o parábola cúbica pasan necesariamente por Cuadrantes II y IV;

2ª $a < 0 \Leftrightarrow$ la recta o parábola cúbica pasan necesariamente por Cuadrantes I y III;

bicondicionales que, está por demás decirlo, son falsas las dos.

Efecto Cotidiano del racional. Los estudiantes hacen uso de los números racionales positivos de la forma $\frac{m}{n}$ en su quehacer como estudiantes de matemáticas y en su *vida cotidiana*.

En la *vida diaria* es habitual decir o escuchar, por ejemplo, $\frac{1}{2}$ Kg. de limones, $\frac{3}{4}$ de papas, $\frac{1}{4}$ de tocino, etc.; y si de algún producto se desea *más de un Kilogramo*, el lenguaje cotidiano es, por decir algo, *tres kilos y medio* ($3\frac{1}{2}$) de chuleta de puerco; pero, casi nunca, por no decir nunca, se solicita $\frac{7}{2}$ de Kg. de chuleta de puerco. En otras palabras, en la vida cotidiana, el uso del racional en la forma $\frac{m}{n}$ está *limitado* a cantidades *menores que uno* ($\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$); y, cuando se desea expresar una cantidad mayor que *uno* se utiliza una fracción mixta ($3\frac{1}{2}$).

Al parecer, algunos de los estudiantes entrevistados, utilizan el racional en su quehacer matemático como en su vida cotidiana: *cualquier número de la forma* $\frac{m}{n}$ *siempre es menor que uno*, independientemente del valor de "m" y de "n".

Efecto Cotidiano del racional con valor absoluto. En el proceso ecuación$\rightarrow$gráfica, se dice que un alumno incurre en el *efecto cotidiano del racional con valor absoluto* cuando, al trabajar el coeficiente de la variable independiente ("a") con racionales negativos de la forma $\frac{m}{n}$, toma en cuenta el signo negativo de "a" *para* determinar lo correspondiente, después "*hace caso omiso*" del signo negativo y finalmente, asigna el ángulo o la abertura, según sea el caso, considerando que cualquier número (positivo) de la forma $\frac{m}{n}$ es menor que uno.

De manera similar, haciendo los cambios correspondientes, los estudiantes dan respuesta a las preguntas del Cuestionario referidas al proceso inverso.

Efecto de Visión parcial. Para que los estudiantes contesten correctamente las preguntas del Cuestionario, es necesario, como se refiere renglones arriba, que los estudiantes manejen cuatro unidades significantes en la representación algebraica; cuatro variables visuales, en la representación geométrica; 54 posibles combinaciones de los valores de las unidades significantes en la representación algebraica y 54 en la representación geométrica; establezcan las asociaciones correspondientes entre las representaciones algebraica y geométrica; identifiquen una gráfica, de un conjunto de 54 bosquejos, o construyan una ecuación. Ante este complejo proceso, no resulta difícil que, involuntariamente, un alumno "*pierda el control*" o "*se le escape de las manos*" algún o algunos de los elementos que entran en juego al momento de contestar una pregunta. Esto conduce a que él, emita una respuesta con una "*visión parcial*": controla unos elementos pero, otros no.

Efecto de Parámetros libres. Algunos estudiantes "saben" o "recuerdan" que, por ejemplo, en el proceso ecuación $\rightarrow$ gráfica el valor de "a", en la representación algebraica de las funciones cuadráticas y cúbicas, determina la abertura de la gráfica asociada (y recíprocamente en el proceso inverso). Pero, lo que no recuerdan, a decir de ellos, es, cuáles son los valores de "a" para que la gráfica sea cerrada (o abierta, finalmente, si conocen una, automáticamente saben la otra). En otras palabras, manifiestan no recordar, si cuando $a > 1$ la gráfica es cerrada o abierta. Este caso, dicho sea de paso y adelantándonos un poco, fue un problema que enfrentaron, en mayor o menor grado, seis de los diez alumnos entrevistados.

Ante esa incertidumbre, algunos estudiantes, conscientemente, *deciden* no comprometerse con una posición de la que no están seguros y, dejan el *parámetro* en conflicto *"libre"* es decir, en el proceso ecuación $\rightarrow$ gráfica, en lugar de emitir una respuesta única, registran las distintas respuestas factibles que se obtienen al considerar las diferentes posibilidades que tiene el parámetro en cuestión; en el proceso gráfica$\rightarrow$ecuación, dejan "en blanco" el espacio correspondiente al valor de dicho parámetro. Este *efecto* produce respuestas imprecisas o incompletas.

2ª Parte: Resultados de la 1ª aplicación del Cuestionario

De los diez estudiantes que constituyen la población bajo estudio en este Cuarto Instrumento de Comprensión, uno de ellos (el 5°), una vez que ha finalizado la primera aplicación del Cuestionario, manifiesta "estar seguro de que todas sus respuestas están correctas". La verdad de su afirmación conlleva a dar por terminada su entrevista: le bastaron 25 minutos para contestar correctamente las 30 preguntas del Cuestionario (ver Anexo 4) y, de hecho, sin titubeo alguno. El desempeño de los otros nueve alumnos, también estuvo, prácticamente, en concordancia con lo manifestado por ellos: cinco, reconocen, y así lo declaran, que su *principal* problema es "*no recordar bien*" para qué valores de "a" la parábola y parábola cúbica es abierta o cerrada y/o cuáles son los valores de α

para los distintos valores de "a". Cabe hacer notar, que estos cinco estudiantes recuerdan bien los rangos de los valores del coeficiente de la variable independiente ("a") con los que trabajaron un año atrás ($a=1$, $0<a<1$, $a>1$, $a=-1$, $-1<a<0$, $a<-1$) pero, la información es confusa cuando intentan recordar cómo es el ángulo de la recta o la abertura de la parábola y de la parábola cúbica cuando, en la ecuación asociada, "a" es diferente de uno o de menos uno; es decir, por ejemplo, dudan de si la parábola es "abierta" o "cerrada" cuando $a>1$. Los cuatro alumnos restantes (2°, 4º, 6º y 10º), consideran no tener mayores dificultades en estos aspectos, ni con ningún otro, aunque se conceden el beneficio de la duda. El promedio de respuestas correctas de estos cuatro alumnos fue del orden de 25 (de 30) y de los otros cinco, ocho. El tiempo promedio que utilizan estos nueve estudiantes en contestar todo el Cuestionario es de 30 minutos.

El rendimiento de los estudiantes es ligeramente superior en el proceso gráfica $\rightarrow$ ecuación que en el proceso ecuación $\rightarrow$ gráfica (segunda y primera parte del Cuestionario, respectivamente). Este hecho discrepa un poco de lo señalado por Leinhardt et al. (1990) en el sentido de que estudios realizados en la conversión (o traducción, como ellas lo refieren) de los registros de representación gráfico y algebraico apoya la noción de que pasar de una gráfica a una ecuación es más difícil para los estudiantes que el proceso inverso.

Uno de los dos problemas principales que enfrentaron los estudiantes, en esta primera aplicación, fue la "pérdida de control" de algún(os) elemento(s) que entra(n) en juego al momento de asociarle una gráfica a una ecuación dada o bien, construir una ecuación factible de asociársele a una gráfica dada, según sea el proceso que se esté trabajando; esto lo exhiben nueve estudiantes (todos excepto el que contestó correctamente las 30 preguntas), en la primera parte del Cuestionario y cuatro, en la segunda parte. En otras palabras, el *efecto de visión parcial* atrapó materialmente a todos los alumnos. El otro gran problema que afrontaron es, como se refiere renglones arriba, determinar para qué valores de "a"

la parábola y parábola cúbica es abierta o cerrada y/o cuáles son los valores de α para los distintos valores de "a"; esto en el proceso ecuación$\rightarrow$gráfica y, en el proceso inverso, lo correspondiente. Ante esta dificultad, y en aras de contestar "correctamente" las preguntas, incurren en los *efectos numérico*, *numérico con valor absoluto*, *lineal con valor absoluto*, *lineal invertido*, *lineal invertido con valor absoluto* y/o *de parámetros libres*.

En la 1ª parte del Cuestionario (ver Anexo 4), nueve estudiantes (como se menciona renglones arriba), incurren en el *efecto de visión parcial*; cinco, en el *numérico*; cuatro, en el *numérico con valor absoluto*; tres, en el *lineal con valor absoluto*; dos, en el *cotidiano del racional* y un alumno en cada uno de los siguientes efectos: *lineal invertido*, *lineal invertido con valor absoluto*, de *proximidad*, *cotidiano del racional con valor absoluto* y *de parámetros libres*. En la 2ª parte, las cifras son: en el *numérico*, cuatro estudiantes; en el *numérico con valor absoluto* y en el *de visión parcial*, tres en cada uno de ellos; en el *lineal con valor absoluto*, *lineal invertido*, *lineal invertido con valor absoluto* y en el *de parámetros libres*, dos en cada uno y en los *de inversión parcial de roles* y el *de proximidad,* un alumno en cada uno de ellos.

En algunos casos, las respuestas incorrectas de los estudiantes son producidas bajo la influencias de más de un *efecto* (ver Anexo 4). Por ejemplo, un alumno (el 8°) emite su respuesta a la pregunta 7 de la primera parte del Cuestionario, mediante la "combinación" de tres *efectos*: *de proximidad, lineal invertido con valor absoluto y cotidiano del racional*.

En esta primera aplicación del Cuestionario se observa que algunos estudiantes incurren en un(os) *efecto*(*s*) en alguna de sus dos partes pero, en la otra, no (ver Anexo 4). En otras palabras, un *efecto* puede estar presente (o ausente) en el proceso ecuación$\rightarrow$gráfica (1ª parte del Cuestionario) pero en el proceso inverso (2ª parte del Cuestionario) "desaparece" (o "aparece") su influencia. Por ejemplo, dos alumnos(3° y 7°) al trabajar con las funciones lineales consideran, en el proceso ecuación$\rightarrow$gráfica, el ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje de las abscisa y en el proceso gráfica→ecuación, el que forma con la parte positiva del eje de las ordenadas; es decir, en sus respuestas de la 1ª parte del Cuestionario no está presente el efecto *lineal invertido* ni el *lineal invertido con valor absoluto* pero, en la 2ª parte, sí. Es más, se da el caso que, dentro de un mismo proceso, "de una respuesta a otra", el *efecto* "emerge" o se "desvanece". Así por ejemplo, un estudiante (el 7°), en la pregunta siete de la 2ª parte del Cuestionario "cae" en el denominado *efecto numérico* al suponer que si una parábola es abierta entonces, en su ecuación asociada, el coeficiente de la variable independiente debe ser *mayor que uno*; esto lo manifiesta y así lo registra por escrito, a pesar de que momentos antes, en la pregunta uno de esa misma parte del Cuestionario, había asociado correctamente, al construir la ecuación solicitada, la abertura de la parábola con el valor del referido coeficiente.

Lo anterior indica que el *grado de consistencia* que tiene el 3° y el 7° estudiante al abordar la tarea es "bajo"; mientras que, por ejemplo, el 1er. alumno muestra un grado de consistencia "alto": tanto en la 1ª parte del Cuestionario como en la 2ª, incurre, sistemáticamente, en el *efecto numérico* y en el *lineal con valor absoluto*.

Para concluir con la presentación de los resultados de la 1ª aplicación del Cuestionario (1er. momento de la entrevista), desde la perspectiva específica, sólo resta puntualizar que de los diez estudiantes, nueve "pasan" al 2° momento de la entrevista: con el que contesta correctamente las 30 preguntas, se da por terminada su entrevista; los cuatro que consideran haber contestado correctamente pero, que se atribuyen el beneficio de la duda (el entrevistador no les proporciona la información del número de aciertos que obtuvieron: en promedio 25), estiman conveniente continuar a fin de poder contar con un espacio que les permita "hacer lo conducente" para poder ratificar o rectificar sus respuestas y los cinco restantes, juzgan *necesario* pasar al siguiente momento de la entrevista.

2° APARTADO

Resultados del 2° momento de la entrevista

Los nueve alumnos que prosiguen con la entrevista, sostienen que para lograr su propósito basta *tabular y graficar dos o tres ecuaciones*; esto indica que los nueve estudiantes son capaces de plantear el procedimiento que pueden llevar a cabo para "*confirmar*" la (certeza) de sus respuestas (cuatro de ellos) o para *disipar* sus dudas (los cinco restantes).

De los cuatro que tienen la intención de "*confirmar*" sus respuestas, uno, realiza el proceso de tabulación y graficación "mentalmente", es decir, no registra *nada* por escrito; sólo "piensa en voz alta", verbaliza la tabulación de $y = 2x$ y cuál es la posición de la gráfica asociada con respecto a la de $y = x$; esto, a decir de él, "es más que suficiente" para desvanecer cualquier titubeo. Los otros tres llegan a la misma conclusión, después de que llevan a cabo dicho proceso por escrito con dos ecuaciones de recta, uno de ellos; y con tres (también de recta), los dos restantes. Cabe señalar que uno de estos cuatro estudiantes (el 10°) cuando tabula y grafica lo hace con la intención de cerciorarse de cuándo la parábola y la parábola cúbica es cerrada o abierta pero, *nunca* con el propósito de verificar su creencia de que cualquier racional positivo de la forma $\frac{m}{n}$ es menor que uno; de esto, dicho estudiante *está convencido* y, como no tuvo la oportunidad de enfrentarse ─durante el proceso de tabulación y graficación─ con una situación que le permitiera "ver" que no todo racional positivo de esa forma es menor que uno, continuó con esa idea.

De los cinco alumnos que pretenden *disipar* sus dudas en este espacio que se les concede, cuatro lo consiguen al tabular y graficar ecuaciones de recta y/o parábola (dos trabajan con una recta y una parábola; uno, con dos rectas; otro, con dos parábolas y una recta y otro más, con dos rectas y una parábola); sin embargo, el alumno restante (el 8°), pretende tabular pero, no lo logra; y en los distintos intentos que lleva a cabo, manifiesta, reiteradamente, “no me acuerdo cómo se hace”; esto impide que zanje sus dudas por él mismo y, ante esta situación se da por concluida su entrevista.

Por otra parte, los cuatro estudiantes que, prácticamente, están seguros de recordar correctamente “todos los elementos necesarios” para llevar a cabo las asociaciones solicitadas en el Cuestionario y cuadro (de los cinco) que dudan de algunos de ellos, utilizan, en promedio, 30 minutos para “reconstruir” el conocimiento que “consideran esencial” para establecer las citadas asociaciones pero, al parecer, en general, “no se preocupan mucho” por (en) recordar términos, notaciones o expresiones que “no estiman indispensables” para contestar el Cuestionario. Por ejemplo, un año atrás, decían: “el ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje de las abscisas es menor que 45°”; en esta ocasión, para referirse al mismo aspecto, a cuatro estudiantes (el 3º, 5º, 6º y 10º) “les basta” decir, “pegada al eje de las Xs”. En otras palabras, se preocupan por “recuperar” de la memoria o “reconstruir” sólo aquel conocimiento que a su parecer es “el fundamental”.

En resumen, este 2° momento de la entrevista es utilizado por nueve estudiantes; ocho de ellos, son capaces de “*reconstruir*”, por sí solos, en un tiempo promedio de 30 minutos, el conocimiento que “*juzgan necesario*” para contestar, correctamente, el Cuestionario y, el otro, no. Con este último, se da por concluida la entrevista y con los ocho primeros, una vez que expresan su deseo de (por) continuar para ratificar o rectificar sus respuestas, se prosigue al tercer momento de dicha entrevista.

3ER. APARTADO

Resultados del 3er. momento de la entrevista (2ª aplicación del Cuestionario)

El desempeño de los estudiantes en este tercer momento de la entrevista mejora significativamente: cinco logran establecer, adecuadamente, todas las asociaciones que exige la conversión de registros en cuestión y por ende, sus 30 respuestas son correctas; uno más, obtiene 29 aciertos; otro, 25 y el restante, 23 (ver Anexo 4).

De los otros cuatro alumnos que tabularon y graficaron para "*confirmar*" sus respuestas, dos (el 4° y el 6°), se limitan a revisar las respuestas que dieron en la primera aplicación y los otros dos (el 2° y el 10°) llevan a cabo la segunda aplicación. El 4° revisa las dos partes del Cuestionario y modifica lo que juzga pertinente, mientras que el 6°, revisa la primera parte, corrige la única incorrecta y estima que ya no tiene necesidad de verificar la segunda. Estos dos estudiantes, logran, en la revisión, contestar correctamente las 30 preguntas. El 2°, en la segunda aplicación del Cuestionario, también obtiene 30 aciertos y el 10°, 23. Los siete equívocos de este estudiante (seis en la primera parte del Cuestionario y uno, en la segunda) se deben a su "convicción" de que cualquier racional positivo de la forma $\frac{m}{n}$ es menor que uno. Aspecto que, no está por demás señalarlo, no fue objeto de estudio en la instrucción a la que fueron sometidos pero que, habrá que prestarle mayor atención en futuras experiencias.

Los otros cuatro que llevaron a cabo el procedimiento de tabulación y graficación para *disipar* sus dudas (el 1°, 3°, 7° y 9°), elevan considerablemente su rendimiento en esta segunda aplicación del Cuestionario: pasan de 11, 12, 7 y 4 aciertos en la primera aplicación, a 25, 30, 30 y 29, respectivamente, en la segunda. El único equívoco que tuvo el 9° estudiante fue causado por el *efecto de* *visión parcial* (al construir una ecuación "no controló" el exponente de la variable independiente) y de los cinco que cometió el 1°, uno, se debió al *efecto de visión parcial* y cuatro, al *lineal con valor absoluto*. Este alumno, en principio, pudo haber superado la visión que lo inducía al *efecto lineal con valor absoluto* cuando tabuló y graficó pero, como "*no dudó*" de ese saber es decir, "estaba convencido" de que $|a| < 1 \Leftrightarrow 90° < \alpha < \mathbf{135°}$ y $|a| > 1 \Leftrightarrow \mathbf{135°} < \alpha < 180°$, no hizo ni el más mínimo intento para "corroborar" estos hechos; el 2° momento de la entrevista lo utilizó para desvanecer *sus dudas* pero no, para ratificar sus convicciones (creencias).

Por otra parte, al igual que en la 1ª aplicación, el rendimiento de los estudiantes es ligeramente superior en el proceso gráfica $\rightarrow$ ecuación que en el proceso ecuación $\rightarrow$ gráfica (segunda y primera parte del Cuestionario, respectivamente).

En resumen, de los ocho alumnos con los que se trabajó en el tercer momento de la entrevista, en un tiempo promedio de 20 minutos, cinco superan todos los obstáculos que se les presentaron en la primera aplicación del Cuestionario; uno más, prácticamente también (incurrió en una sola ocasión en el *efecto de visión parcial*) pero, los otros dos (1° y 10°), [por estar convencidos de algunas de sus posiciones y ni siquiera dudar de ellas, no logran desprenderse de sus equívocos. El primero sigue incurriendo, en la segunda aplicación, en el *efecto lineal con valor absoluto*, mientras que el décimo, en los *efectos cotidiano del racional* y *cotidiano del racional con valor absoluto*.

A la luz del desempeño de los diez estudiantes con los que se trabajó en esta experiencia, a continuación, se procede a formular las Conclusiones de este 4° Instrumento de Comprensión.

CONCLUSIONES DEL 4° INSTRUMENTO DE COMPRENSIÓN

Apoyados en los resultados de los diez estudiantes con los se trabajó en esta experiencia, y bajo el entendido de que, durante el año escolar que medió entre el término de la instrucción a la que fueron sometido y la aplicación del Cuestionario en esta ocasión,

i. nueve de ellos, en principio, no volvieron a tener contacto con la conversión de registros de representación gráfico y algebraico en funciones de la forma $y = ax^n + b$, *donde a, b* $\in \Re$*, a* $\neq$ *0* y *n = 1, 2, 3;* ni con algo que con ello se relacionara directamente y,

ii. el otro estudiante (el 2°), a decir de él, no trabajó con la conversión de registros de representación como objeto de estudio en las asignaturas que cursó en dicho año, aunque sí utilizaba, en algunas ocasiones y por iniciativa propia, los conocimientos adquiridos sobre el punto en cuestión como ayuda o soporte para algunos de los temas que se abordaban en sus clases de Matemáticas V y VI,

es posible hacer los siguientes señalamientos:

- Desde una perspectiva global, los diez alumnos recuerdan, en términos generales, la *esencia* de la conversión de registros de representación bajo estudio, *después de un año de haberlo aprendido*; es decir, recuerdan que:

  i) "n" determina la forma de la gráfica, en el proceso ecuación→gráfica, y recíprocamente, es decir, la forma de la gráfica determina el exponente de la variable independiente, en el proceso gráfica→ecuación.

  ii) El signo de "*a*" determina hacia donde se abre la parábola o los cuadrantes por los que necesariamente pasan las rectas y las parábolas cúbicas, según sea el caso, en el proceso ecuación→gráfica, y recíprocamente, en el proceso inverso.

iii) "*a*" determina la inclinación de la recta (α) o la abertura de la parábola y parábola cúbica, en el proceso ecuación→gráfica, y recíprocamente, en el proceso gráfica→ecuación.

iv) "*b*" determina el desplazamiento de la gráfica en el eje de las ordenadas, en el proceso ecuación→gráfica, y recíprocamente, en el proceso inverso.

- El rendimiento de los estudiantes, tanto en la primera aplicación del Cuestionario como en la segunda, es ligeramente superior en el proceso gráfica → ecuación que en el proceso ecuación → gráfica (2ª y 1ª parte, respectivamente). Este hecho discrepa un poco de lo señalado por Leinhardt et al. (1990) en el sentido de que estudios realizados apoya la noción de que pasar de una gráfica a una ecuación es más difícil para los estudiantes que el proceso inverso.

- A medida que los aspectos a recordar se van tornando más específicos, es más difícil que algunos estudiantes los recuperen de la memoria. De tal manera que, de todos los elementos que se requiere recordar para llevar a cabo las asociaciones solicitadas en el citado Cuestionario, tres entrevistados, en la primera aplicación, los logran recuperar de la memoria prácticamente todos, aunque con algunos titubeos; otros seis, también en el primer momento de la entrevista, recuerdan bien la mayor parte de ellos incluyendo los rangos de los valores del coeficiente de la variable independiente ("*a*") con los que trabajaron un año atrás ($a = 1$, $0 < a < 1$, $a > 1$, $a = -1$, $-1 < a < 0$, $a < -1$) pero, la información es confusa cuando intentan recordar cómo es el ángulo de la recta o la abertura de la parábola y de la parábola cúbica cuando, en la ecuación asociada, "*a*" es diferente de uno o de menos uno; es decir, por ejemplo, dudan de si la parábola es "abierta" o "cerrada" cuando $a > 1$. Sólo un estudiante recuerda dichos elementos perfectamente bien desde el primer instante que tiene el Cuestionario en sus manos. En el proceso gráfica→ecuación, los diez estudiantes muestran un desempeño similar. Esta situación conlleva a que nueve alumnos continúen con su entrevista y se de por concluida con el otro. Éste, una vez que ha finalizado la primera aplicación del Cuestionario, manifiesta "estar seguro de que todas sus respuestas están correctas". La verdad de su afirmación permite dar por terminada su entrevista.

- Los alumnos "generan" o "construyen" once formas de interpretar geométricamente esos objetos matemáticos que reconocen no recordar (fundamentalmente lo señalado en el punto anterior) y que, a su parecer, son necesarios para llevar a cabo las asociaciones requeridas en el Cuestionario. Esas once formas, ─denominadas en estas páginas, genéricamente, *efectos*─ producen respuestas equívocas, imprecisas o incompletas las cuales, en algunos casos, son emitidas por la influencia de más de un *efecto*. Las once formas referidas responden al nombre de: *efecto numérico, numérico con valor absoluto, lineal con valor absoluto, lineal invertido, lineal invertido con valor absoluto, de inversión parcial de roles, de proximidad, cotidiano del racional, cotidiano del racional con valor absoluto, de visión parcial* y *de parámetros libres*. Éstos surgen cuando los estudiantes abordan las preguntas dedicadas al proceso ecuación→gráfica; pero, también son utilizados al contestar las preguntas de la segunda parte del Cuestionario (proceso gráfica→ecuación).

- Al parecer, el mayor problema que enfrentan los estudiantes en la 1ª aplicación del Cuestionario, es la "*pérdida de control*" de algún o algunos de los elementos que entran en juego al momento de contestar una pregunta: centran su atención en unos pero, en otros no. Esto conduce a que emitan una respuesta con una "*visión parcial*". En este *efecto* incurren nueve alumnos en las preguntas referidas al proceso ecuación→gráfica y tres, en las del proceso inverso.

- Ante la incertidumbre, y concluida la 1ª aplicación del Cuestionario, los estudiantes son capaces de plantear el procedimiento que pueden llevar a cabo para disipar sus dudas: tabular y graficar dos o tres ecuaciones; esto lo sostienen los tres estudiantes que titubearon y los seis que manifiestan no recordar bien algún elemento necesario para llevar a cabo las asociaciones demandadas.

- La mayoría de los estudiantes (ocho de nueve) son capaces de "*reconstruir*", por si solos, el conocimiento esencial que requieren para contestar el Cuestionario y que no logran recuperarlo de la memoria de manera inmediata. Los nueve alumnos hacen uso del espacio que se les concede para que intenten disipar sus dudas y emprenden la tarea de tabular y graficar dos o tres ecuaciones. Uno de ellos, pretende tabular pero, no lo logra; y en los distintos intentos que lleva a cabo, manifiesta, reiteradamente, "no me acuerdo cómo se hace"; esto impide que zanje sus dudas por sí mismo. Ante esta situación, se da por concluida su entrevista. Los ocho restantes, tabulan y grafican las ecuaciones (dos o tres) que a su juicio son adecuadas para su propósito.

- Seis alumnos, de los ocho que tabularon y graficaron, superan sus dudas después de llevar a cabo dicho procedimiento. Los dos restantes, no logran desprenderse de todas sus visiones equívocas. Uno de ellos sigue incurriendo, en la segunda aplicación, en el *efecto lineal con valor absoluto*, mientras que el otro, en los *efectos cotidiano del racional* y *cotidiano del racional con valor absoluto*.

- La mayoría de los entrevistados (nueve) "pierden terreno" en algunas cuestiones tales como: nombre de las curvas, notación del punto de intersección de la gráfica con el eje de las ordenadas, concepto de ángulo de una recta, etc. Por ejemplo, tres alumnos al registrar por escrito el punto de intersección de la gráfica con el eje de las ordenadas anotan “8” en lugar de (0,8); otros dos, se refieren al coeficiente de la variable independiente como “el numerito que está junto a la x”.

- El tiempo promedio que los estudiantes utilizan para recordar y establecer las asociaciones requeridas en el Cuestionario (1er momento de la entrevista), “*reconstruir”* el conocimiento que no recuerdan o del que tienen duda (2° momento) y revisar o contestar, nuevamente, el Cuestionario (3er momento) es, de hecho, bastante breve: 1.30 hrs. En promedio los tiempos son: en la primera aplicación, 30 minutos; en el proceso de tabulación y graficación, 30 y en la segunda aplicación o revisión (según el caso), 20.

A la luz de todo lo hasta aquí expuesto, es posible considerar que los estudiantes logran un “buen” recuerdo de la conversión de los registros de representación gráfico y algebraico en funciones de la forma $y = ax^n + b$*, donde* $a, b \in \Re$, $a \neq 0$ y n = 1, 2, 3; que aprendieron un año atrás; esto, desde el marco de Hiebert y Carpenter (1992), es una consecuencia de la comprensión. Esta situación permite suponer que:

1. El proceso de instrucción al que fue sometida la población bajo estudio promovió aprendizajes con comprensión; ésta juzgada desde la óptica del aspecto aquí explorado: el recuerdo.

2. Abordar la mencionada conversión de registros de representación desde un enfoque global cualitativo es decir, con una visión de “formalización progresiva”, como lo señalan Bransford, Brown y Cocking (1999) o, como lo sugieren Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990), moverse desde lo menos formal, menos abstracto, más global e intuitivo al sistema formal, notacionalmente riguroso,

parecer ser una forma adecuada de presentar el conocimiento a los estudiantes.

3. La comprensión alcanzada por los estudiantes en dicho proceso de instrucción permiten que recuerden prácticamente todos los elementos necesarios para llevar a cabo la conversión de registros de representación antes citada y, aquellos elementos que no logran recuperar de la memoria de manera inmediata, casi todos los alumnos son capaces de “reconstruirlos” con sus propios recursos; esto último, desde el punto de vista de Duffin y Simpson (2000) es una manifestación de la comprensión.

Conclusiones Generales del Estudio

Introducción

A continuación se exponen las Conclusiones Generales a las que se llega después de haber sometido a 70 estudiantes de bachillerato a una instrucción con el fin de promover en ellos el dominio de la conversión de los registros de representación gráfico y algebraico en funciones polinomiales de la forma $y = ax^n + b$, *donde* a, $b \in \Re$, $a \neq 0$ y $n = 1, 2$ y 3, y la comprensión de dichas funciones (ver Capítulo 4); recabar datos a través de la aplicación de cinco instrumentos: uno para explorar el dominio en la mencionada conversión y cuatro para indagar lo referente a la comprensión lograda por los alumnos en dicho tipo de funciones y, analizar los datos obtenidos (ver Capítulo 5) a la luz de las posiciones teóricas que se asumen en este Estudio (ver Capítulo 2).

CONCLUSIONES GENERALES DEL ESTUDIO

El propósito fundamental del Estudio que en estas páginas se reporta es explorar en qué medida una instrucción centrada en el alumno, la evaluación, la comunidad del salón de clases y el conocimiento de la conversión de los registros de representación gráfico y algebraico en funciones polinomiales elementales de la forma $y = ax^n + b$, *donde* a, $b \in \Re$, $a \neq 0$ y $n = 1, 2$ y 3, con un enfoque global cualitativo, promueve, en alumnos de bachillerato, el dominio de dicha conversión y un aprendizaje con comprensión de ese tipo de funciones polinomiales elementales.

En términos del análisis de los datos que proporcionaron los cinco Instrumentos que se aplicaron ─uno para explorar el dominio y cuatro para la comprensión (ver Capítulo 5)─, es posible señalar, que al parecer, la instrucción recibida por los 70 estudiantes de bachillerato, con las características anteriormente señaladas, *logró promover en ellos el dominio de la mencionada conversión y la comprensión de las referidas funciones*; esto último, *al menos en los aspectos aquí explorados*: interpretación puntual cualitativa y cuantitativa de una gráfica; percepción de las funciones polinomiales elementales como proceso y como objeto y la flexibilidad de moverse entre esas perspectivas; discriminación de las unidades significantes de los registros gráfico y algebraico en funciones "un tanto similares" a las estudiadas y establecimiento de una correspondencia asociativa entre dichas unidades significantes, es decir, la conversión de los registros de representación gráfico y algebraico en funciones "parecidas" a las estudiadas; reconocimiento de las variantes e invariantes de una gráfica cuando se alteran las escalas; interpretación cualitativa y cuantitativa de gráficas contextualizadas; construcción de la gráfica que representa una situación contextualizada dada en lenguaje natural; recuerdo de la conversión de la representación gráfica y algebraica en funciones polinomiales con un enfoque global cualitativo; entre otros.

Es posible afirmar lo anterior en virtud de que:

El desempeño de los aprendices en el Instrumento para explorar el dominio de la conversión exhibe, en términos generales, que:

- 64 de los 70 estudiantes (≈91.42%) que participaron en esta experiencia lograron el dominio en la conversión de los registros gráfico y algebraico en funciones polinomiales elementales de la forma $y = ax^n + b$, *donde* $a, b \in \Re$, $a \neq 0$ y n = *1, 2* y *3,* con un enfoque global cualitativo, en virtud de que obtienen una puntuación promedio de 8.94 (sobre 10) en el Instrumento que se utilizó para explorar dicha conversión; en otras palabras, los 64 alumnos, en promedio, contestan correctamente 27 preguntas de las 30 que conformaban el denominado Cuestionario en un tiempo promedio de 28 minutos (ver 1ª Parte del Capítulo 5);

El desempeño de los grupos pequeños en los tres primeros Instrumentos utilizados para explorar la comprensión de las funciones polinomiales elementales revela, en términos generales, que:

- abordan con éxito problemas que demandan un enfoque puntual, por intervalos y global en gráficas que representan una situación contextualizada o en un contexto puramente matemático (ver 2ª, 4ª Parte del Capítulo 5);

- establecen conexiones entre la representación gráfica y algebraica en funciones distintas a las abordadas por ellos en la instrucción (ver 2ª Parte del Capítulo 5);

- utilizan adecuadamente la conexión cartesiana (ver 2ª, 3ª Parte del Capítulo 5);

- se mueven entre la perspectiva proceso y objeto en las representaciones gráfica, algebraica y tabular (ver 2ª, 3ª Parte del Capítulo 5);

- se dan cuenta de qué características visuales de la gráfica no cambian y qué características sí cambian cuando se alteran las longitudes de las unidades de medida y/o la escala en los sistemas de coordenadas donde dicha gráfica es graficada (ver 3ª Parte del Capítulo 5);

- generan un análisis global cualitativo "más fino" que el que ellos aprendieron (ver 3ª Parte del Capítulo 5)

- hacen tratamientos con las gráficas: las desplazan hacia arriba, hacia abajo, a la derecha, a la izquierda, combinan los desplazamientos, las alargan o las contraen (ver 2ª, 3ª Parte del Capítulo 5);

- enfrentan una situación por "diferentes caminos" (tabular y/o algebraico y/o gráfico), sin incurrir en un encasillamiento de los registros de representación (ver 2ª Parte del Capítulo 5);

- aplican los conocimientos adquiridos durante la instrucción con "cierta" flexibilidad (ver 2ª, 3ª y 4ª Parte del Capítulo 5);

- utilizan "el conocimiento matemático que generan" al contestar una determinada pregunta para contestar otra (ver 2ª Parte del Capítulo 5);

- "piensan visualmente" es decir, con sólo visualizar la gráfica emiten su respuesta (ver 2ª Parte del Capítulo 5);

- utilizan un proceso de solución gráfico: "extraen" de la gráfica las coordenadas de puntos requeridos (ver 2ª Parte del Capítulo 5);

- establecen por ellos mismos, aunque no rigurosamente, la condición que deben cumplir dos ecuaciones de recta de la forma $y = ax + b$ para que sus gráficas asociadas sean paralelas (ver 2ª Parte del Capítulo 5);

- reconocen violaciones a las convenciones que se aceptan para la construcción del sistema de coordenadas cartesianas (ver 3ª Parte del Capítulo 5);

- abordan con “relativo éxito” la conversión del registro gráfico al algebraico de funciones lineales en problemas que exigen un enfoque cuantitativo y el manejo de escalas (ver 3ª Parte del Capítulo 5);

- interpretan cualitativa y cuantitativamente gráficas contextualizadas (ver 4ª Parte del Capítulo 5);

- construyen gráficas que representan una situación de la vida cotidiana (ver 4ª Parte del Capítulo 5);

- en las interpretaciones “guiadas” de una gráfica (i.e. preguntas específicas sobre algún aspecto de la gráfica), no se observa diferencia en el desempeño de los equipos en las gráficas contextualizadas que demandan una interpretación cualitativa de las que requieren una cuantitativa o de aquellas que exigen un enfoque global de las que solicitan un puntual o de intervalos (ver 4ª Parte del Capítulo 5);

- en las interpretaciones “libres” de una gráfica, no se percibe preferencia alguna de los equipo entre el enfoque global cualitativo, que ellos dominan, sobre el puntual cualitativo o cuantitativo (ver 4ª Parte del Capítulo 5);

- la mayoría de los equipos (17) no muestran una tendencia a la interpretación icónica en gráficas de situaciones (ver 4ª Parte del Capítulo 5);

- logran interpretar, adecuadamente, la rapidez de variación en gráficas contextualizadas (ver 4ª Parte del Capítulo 5);

- los 18 equipos (vistos como un todo) obtienen una puntuación promedio de 7.21 en los tres primeros Instrumentos de Comprensión; el mejor desempeño lo mostraron en el segundo y el más bajo en el primero: la puntuación promedio que logran es 8.28 y 6.4, respectivamente (ver 5ª Parte del Capítulo 5)

No obstante lo anterior,

- en algunas ocasiones, la visión global cualitativa se impone en algunos equipos limitando su desempeño en problemas que requieren un enfoque cuantitativo o un puntual (ver 2ª, 3ª y 4ª Parte del Capítulo 5);

- en ecuaciones de la forma $y = a(x+b)^2 + c$ e $y = ax^2 + bx + c$, la concepción transitoria (según la acepción que Moschkovich, 1999, le asigna al término) predominante en los equipos está referida al rol del parámetro "*b*": el desplazamiento de la gráfica hacia derecha o izquierda está determinado por el valor de "*b*", de tal manera que si el signo de "*b*" es positivo, se desplaza a la derecha y si es negativo a la izquierda (ver 2ª Parte del Capítulo 5)

- algunos equipos, en ciertas ocasiones, son "atraídos" por las ilusiones visuales gráficas (ver 3ª Parte del Capítulo 5);

- algunos equipos incurren, en lo que aquí se ha denominado, "confusión escala─unidad de medida", "confusión longitud de intervalos─escala" y "confusión longitud de intervalos─unidad de medida" (ver 3ª Parte del Capítulo 5);

- algunos equipos, en ciertos casos, son "atrapados en las redes" de la interpretación icónica, la linealidad o la continuidad (ver 4ª Parte del Capítulo 5);

- en las interpretaciones "libres" de una gráfica contextualizada, pocos equipos hacen una interpretación por intervalos (ver 4ª Parte del Capítulo 5); esto puede indicar que la instrucción recibida (de corte global cualitativo) propicia más el desarrollo del enfoque puntual que el de intervalos;

El desempeño de los diez estudiantes en el Instrumento utilizado para explorar la comprensión de las funciones polinomiales elementales (4°) en lo que se refiere a la memoria, muestra, en términos generales, que:

- los diez alumnos recuerdan la *esencia* de la conversión de registros de representación bajo estudio, *después de un año de haberlo aprendido* (ver 6ª Parte del Capítulo 5);

- la mayoría de los estudiantes (ocho de nueve) son capaces de "*reconstruir*", por sí solos, el conocimiento esencial que requieren para contestar el Cuestionario y que no logran recuperarlo de la memoria de manera inmediata (ver 6ª Parte del Capítulo 5);

- el tiempo promedio que los estudiantes utilizan para recordar y establecer las asociaciones requeridas en el Cuestionario (1er momento de la entrevista), "*reconstruir"* el conocimiento que no recuerdan o del que tienen duda (2° momento) y revisar o contestar, nuevamente, el Cuestionario (3er momento) es, de hecho, bastante breve: 80 minutos: en la primera aplicación, 30 minutos; en el proceso de tabulación y graficación, 30 minutos y en la segunda aplicación o revisión (según el caso), 20 (ver 6ª Parte del Capítulo 5).

Sin embargo,

- a medida que los aspectos a recordar se van tornando más específicos, es más difícil que algunos estudiantes los recuperen de la memoria, así, la información es confusa cuando intentan recordar, por ejemplo, cómo es el ángulo de la recta o la abertura de la parábola y de la parábola cúbica cuando, en la ecuación asociada, "*a*" es diferente de uno o de menos uno (ver 6ª Parte del Capítulo 5);

- los alumnos "generan" o "construyen" once formas de interpretar geométricamente "los objetos matemáticos" que reconocen no recordar y que, a su parecer, son necesarios para llevar a cabo las asociaciones requeridas en el Cuestionario (ver 6ª Parte del Capítulo 5);

- el mayor problema que enfrentan los estudiantes en la 1ª aplicación del Cuestionario, es la "*pérdida de control*" de algún o algunos de los elementos que entran en juego al momento de contestar una pregunta: centran su atención en unos pero, en otros no (ver 6ª Parte del Capítulo 5);

- la mayoría de los entrevistados (nueve) "pierden terreno" en algunas cuestiones tales como: nombre de las curvas, notación del punto de intersección de la gráfica con el eje de las ordenadas, concepto de ángulo de una recta, etc. (ver 6ª Parte del Capítulo 5).

En resumen, el desempeño que exhibió la población estudiada en los distintos Instrumentos que enfrentó, muestra que, al parecer, en términos generales, la instrucción a la que fue sometida logra que la mayoría de los estudiantes: i) dominen la conversión de los registros de representación gráfico y algebraico en funciones polinomiales elementales de la forma $y = ax^n + b$, *donde* a, $b \in \Re$, $a \neq 0$ y n = *1, 2* y *3,* con un enfoque global cualitativo; ii) aborden con "relativo éxito" situaciones que exigen un enfoque puntual; iii) se muevan flexiblemente a través de las representaciones gráfica y algebraica de las funciones estudiadas por ellos y algunas otras "parecidas" a éstas; iv) perciban a las funciones como proceso y como objeto y se muevan entre esas perspectivas; v) identifiquen cuáles son las características de una gráfica que sí cambian cuando se alteran las escalas y cuáles no; vi) realicen, satisfactoriamente, la conversión de los registros gráfico y algebraico en funciones "un tanto similares" a las presentadas en la Instrucción; vii) afronten con "cierto éxito" situaciones contextualizadas que involucran tanto funciones que se trabajaron en la instrucción como algunas que no se estudiaron; viii) recuerden, después de un año, la esencia de la conversión de registros de representación estudiada; ix) "reconstruyan" un procedimiento para recordar o aclarar las dudas que les hayan surgido y, x) recuperen de la memoria, en un tiempo promedio de una hora con 30 minutos, prácticamente todos los elementos que les permiten efectuar exitosamente la citada conversión.

Para finalizar, sólo resta mencionar que el único equipo que en el Instrumento para explorar el dominio de la conversión de los registros gráfico y algebraico en funciones polinomiales elementales, con un enfoque global cualitativo, logró una puntuación promedio de 5.52 (inferior a la mínima requerida para recibir el atributo de que dominaba la referida conversión), obtuvo una puntuación de 3.84 en el 1er. Instrumento de Comprensión; 5.6, en el 2° y 5.6, en el 3° (ver 5ª Parte del Capítulo 5); esto, al parecer, fortalece la idea de que el dominio en la citada conversión favorece la comprensión de dichas funciones

REFERENCIAS

Acuña, S. C. (1998). La ubicación espacial de conjuntos de puntos en el plano. En F. Hitt (Ed.), *Didáctica. Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 203-223). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ainley, J. (1995). Re-viewing Graphing: Traditional and Intuitive Approaches. *For the Learning of Mathematics, 15, 2,* 10-16.

Artzt, A. F., & Newman, C. M. (1990). How to Use Cooperative Learning in the Mathematics Class. Reston, VA: NCTM.

Balacheff, N. (1991). The benefits and limits of social interaction: The case of mathematical proof. En A. Bishop, S. van Dormolen, S. Mellin-Olsen (Eds.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 175-192). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T. & Lesh, R. (1992). Rational Number, Ratio, and Proportion. En D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 296-333). New York: Macmillan Publishing Company.

Borba, M. & Confrey, J. (1996). A Student's constructions of transformations of funtions in a multiple representational environment. *Educational Studies in Mathematics, 31*, 319-337.

Boyer, C. B. (1946). Proportion, Equation, Function: Three Steps in the Development of a Concept. *Scipta Math, 12*, 5-13.

Bransford, J. D., Brown, A. L. & Cocking, R. R. (1999). The Design of Learning Environments. En J. D. Bramsford, A. L. Brown & R. R. Cocking (Eds.), *How People Learn: Brain, Mind, Experience, and School* (119-142). Washington, D.C.: National Academy Press.

Buxkemper, A. C. & Hartfiel D. J. (2003). Understanding. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 34 (6)*, 801-812.

Campos, M. A. y Carlón, A. (1999). Las representaciones matemáticas y la resolución de problemas en alumnos de Bachillerato. En A. Carlón (Ed.), *Memorias del VII Simposio Internacinal en Educación Matemática Elfriede Wenzelburger* (pp. 190-197). México: Editorial Iberoamérica.

Carlón, A. (1990). Elaboración de una Propuesta Metodológica para la Enseñanza de dos Procesos Fundamentales de la Geometría Analítica. Tesis de Licenciatura no publicada. Facultad de Ciencias. UNAM.

Carlón, A. y Cruz, S. (1993a). Funciones, la relación ecuación-gráfica y su enseñanza. En A. Carlón (Ed.), *Memorias del IV Simposio Internacional en Educación Matemática* (pp. 35-46). México: UNAM-UACPyP-CCH.

Carlón, A. y Cruz, S. (1993b). Las Funciones: sus representaciones y enseñanza". En *Memorias del XII Congreso Nacional de la Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas* (pp. 203-206). Querétaro, Qro.: Universidad Autónoma de Querétaro.

Carlón, A. y Cruz, S. (1994). La relación ecuación-gráfica y su enseñanza. En *Livro de Resumos del II Congresso Ibero-Americano de Educacao Matemática* (pp. 189-190). Santa Catarina, Brasil: Universidade Regional de Blumenau.

Carlón, A. y Cruz, S. (1995). Enseñanza de dos procesos fundamentales de la Geometría Analítica: asociar a una ecuación una gráfica y viceversa. En *Memorias de la Novena Reunión Centoamericana y del Caribe sobre*

Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. La Habana, Cuba.

Carlón, A. y Cruz, S. (1997). Comparación entre el aprendizaje de profesores y alumnos de bachillerato del mismo contenido matemático. En *Resúmenes del XXX Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana* (p. 63). Aguascalientes, Ags.

Clement, J. (1985). Misconceptions in grahing. En L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the Ninth International Conference of PME* (pp.413-418). Netherlands.

Cobb, P., Yackel, E. & Wood, T. (1992). Interaction and learning in mathematics classroom situations. *Educational Studies of Mathematics,* 23(1), 99-122.

Cobb, P. (2000). The Importance of a Situated View of Learning to the Design of Research and Instruction. En J. Boaler (Ed.), Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and Learning (pp. 45-82). Westport, London: Ablex Publishing.

Cohen, E. G. (1994). Restructuring the classroom: Conditions for productive small groups. *Review of Educational Research,* 64, 1-35.

Confrey, J. & Smith, E. (1992). A Framework for Functions: Prototypes, Multiple Representations, and Transformations. En *Proceedings of the Sixteenth PME Conference of PME* (pp. 57-63).

Cruz, S. E. (1992). Propuesta didáctica para el tema de ecuaciones de primer grado y función lineal por medio de las microcomputadoras. En E. Filloy, H. J. Herrera y F. Hitt (Eds.), *Memorias del IV Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática*. México: CINVESTAV.

Dreyfus, T. & Eisenberg, T. (1987). On the deep structure of funtions. En J. C. Bergeron et al (Eds.), *Proceedings of the Eleventh International Conference of PME, I,* (pp. 190-196). Montreal, Canada: Université de Montréal.

Duffin, J.M. & Simpson, A. P. (2000). A Search for Understanding. *Journal of Mathematical Behavior, 18 (4)*, 415-427.

Dunham, P. H. & Osborne, A. (1991). Learning How to See: Students' Graphing Difficulties. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 13* (4), 35-49.

Duval, R. (1992). Gráficas y Ecuaciones: la articulación de dos registros. En *Antología en Educación Matemática* (pp. 125-139). México: CINVESTAV.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Didáctica. Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp.173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (1999). Semiosis y Pensamiento Humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Universidad del Valle y Peter Lang S. A. Trad. Myriam Vega Restrepo, 1999. Santiago de Cali, Colombia.

English, L. D. & Halford, G. S. (1995). *Mathematics Education. Models and Processes*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaun Associates, Publishers.

Even, R. (1990). Subject Matter Knowledge for Teaching and the case of functions. *Educational Studies in Mathematics 21*, 521-544.

Even, R. (1998). Factors Involved in Linking Representatios of Functios. *Educational Studies in Mathematics 17(1)*, 105-121.

Forman, E. (1989). The role of peer interaction in the social construction of mathematical knowledge?. *International Journal of Educational Research* 13, 55-70.

Good, T. L.; Mulryan, C., & McCaslin, M. (1992). Grouping for Instruction in Mathematics: A Call for Programmatic Research on Small-Group Processes. in Mathematics. En Douglas A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 165-196). New York: MacMillan Pu. Co.

Goos, M., & Galbraith, P. (1996). Do it this Way! Metacognitive Strategies in Collaborative Mathematical Problem Solving. *Educational Studies in Mathematics, 30*, 229-260.

Goos, M., Galbraith, P., & Renshaw, P. (2002). Socially Mediated Metacognition: Creating Collaborative Zones of Proximal Development in Small Grup Problem Solving. *Educational Studies in Mathematics, 49*, 193-223.

Grevsmühl, U. (1991). Children’s verbal communication in problem solving activities. En F. Furinghetti (Ed.), *Proccedings of the Fifteenth PME Conference,* Vol. 2, (pp. 88-95). Dipartimento di Matematica dell’Universita di Genova.

Guzmán, I. y Consigliere, L. (1997). *Ecuaciones y Gráficos: el rol de los coeficientes*. Manuscrito no publicado.

Heller, P., Ahlgren, A., Post, T., Berh, M., & Lesh, R. (1989). Proportinal reasoning. The effect of two context variables, rate type and problem setting. *Journal for Research in Science Teaching, 26 (3)*, 205-220.

Herscovics, N. (1980). Constructing Meaning for Linear Equations; a problem of Representation. *R. D. M. ,13*, 351-383.

Hershkowitz, R. (1989). Visualization in Geometry:Two Sides of the Coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11* (1), 61-76.

Hiebert, J. & Carpenter, T. P. (1992). Learning and Teaching With Understanding. En D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 65-97). New York: Macmillan Publishing Company.

Hitt, F. E. (1992). Dificultades en el paso de una representación gráfica a un contexto real y viceversa. Evasión de representaciones analíticas. En E. Filloy, H. J. Herrera y F. Hitt (Eds.), *Memorias del IV Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática* (pp. 43-55). México: CINVESTAV.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the Articulation of Different Representations Linked to the Concept of Function. *Journal of Mathematical Behavior, 17 (1)*, 123-134.

Hollar, J. C. & Norwood, K. (1999). The Effects of a Graphing-Approach Intermediate Algebra Curriculum on Students'Understanding of Function. *Journal for Research in Mathematics Education, 30 (2)*, 220-226.

Janvier, C. (1981a). Difficulties related to the concept of variables presented graphically. En C. Comiti (Ed.). *Proceedings of the fifth international conference of the International Group of Psychology of Mathematics of Psychology of Mathematics Education*, 189-193.

Janvier, C. (1981b). Use of situations in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 12,* 113-122.

Janvier, C. (Ed.). (1987). Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Janvier, C. (1987a). Translation Processes in Mathematics Education. En C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 27-32). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E. K. (1983). Early adolescents proportinal reasoning on *"*rate*"* problems. *Educational Studies of Mathematics, 14, 219-233.*

Kleiner, I. (1993). Functions: Historical and Pedagogical Aspects. *Science & Education, 2*, 183-209.

Knuth, E. J. (2000). Student Understanding of the Cartesian Connection: An Exploratory Study. *Journal for Research in Mathematics Education, 31 (4)*, 500-508.

Kramarski, B., Mevarech, Z.R., & Arami, M. (2002). The effects of metacognitive instruction on solving mathematical authentic tasks. *Educational Studies in Mathematics, 49,* 225-250.

Laborde, C. (1994). Working in small groups: A learning situation?. En R. Biehler, R. W. Scholz, R. Sträβer & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Disipline* (pp. 147-158). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Lafourcade, D. P. (1969). Evaluación de los aprendizajes. Buenos Aires: Kapelusz.

Larson, S., Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1989). Proportional reasoning in young adolescents: An analysis of strategies. En C.A. Maher, G. A. Goldin, & R.B. Davis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Annual Meeting of the American Chapter of the Internatonal Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 181-197). New Brunswick, NJ.

Leikin, R., & Zaslavsky, O. (1997). Facilitating Student Interactions in Mathematics in a Cooperative Learning Setting. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(3), 331-354.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research, 60 (1)*, 1-64.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. En J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 93-118). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Mac Gregor, M., & Stacey, K. (1993). Cognitive Models Underlying Students' Formulation of Simple Linear Equations. *Journal for Research in Mathematics Education 24*, 217-232.

MacLane, S. (1986). Mathematics Form and Function. New York: Springer-Verlag.

Mancilla, J. A. P. y Pinto, J. L. T. (1992). Graficación de funciones auxiliada por computadora. En E. Filloy, H. J. Herrera y F. Hitt (Eds.), *Memorias del IV Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática*. México: CINVESTAV.

Mevarech, Z. R., & Kramarsky, B. (1997). From Verbal Descriptions to Graphic Representations and Change in Students' Alternative Conceptions. *Educational Studies in Mathematics 32*, 229-263.

Middleton, J. A., Lesh, R. & Heger, M. (2003). Interest, Identity, and Social Functioning: Central Features of Modeling Activity. En R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism* (pp. 405-431). New Jersey: Lawrence Erbaum Associates, Publishers.

Moschkovich, J. N. (1990). Student′s Interpretations of Linear Equations and Their Graphs. En Booker, G. et al (Eds.), *Proceedings of the Fourteenth International Conference of PME, II*, 109-116. México.

Moschkovich, J. (1999). Students′ use of the X-Intercept as an Instance of a Transitional Conception. *Educational Studies in Mathematics 37*, 169-197.

Moschkovich, J., Schoenfeld, A.H., & Arcavi, A. (1993). Aspects of Undertanding: On Multiple Perspectives and Representations of Linear Relations and Connections Among Them. En A. Romberg, E. Fenema & T. A. Carpenter, (Eds.), *Integrating Research on the Graphical Representation of funtions* (pp. 69-100). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston, VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, Va.: NCTM

Noddings, N. (1989). Theoretical and practical concerns about small groups in mathematics. *Elementary School Journal,* 89, 607-623.

Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the radio concept, part I-Differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics,11*, 217-254.

Pirie, S. & Kieren, T. (1994). Growth in Mathematical Understanding: How Can We Characterise It And How Can We Represent It? *Educational Studies in Mathematics, 26*, 165-190.

Price, J. (1996). President's Report: Building Bridges of Mathematical Understanding for all Children. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*, 603-608.

Resnick, L. B. y Ford, W. W. (1990). La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos. Ediciones Paidós.

Romberg, T. A., Fennema, E., & Carpenter, T. P. (Eds.). (1993). Integrating Research on the Graphical Representation of Functions. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Sánchez, E. S. (1998). La función de graficación de la calculadora para mejorar la comprensión en tareas de factorización. En F. Hitt (Ed.), *Didáctica. Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 411-423). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Methacognition, and Sense Making in Mathematics. En D. A. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan Pu. Co.

Schwarz, B. & Herskowitz, R. (1999). Prototypes: Brakes or Levers in Learning the Function Concept? *Journal for Research in Mathematics Education, 30*, 362-389.

Siegler, R. S., & Vago, S. (1978). The development of a proportional concept: Judging relative fullness. *Journal of Experimental Cild Psychology, 25*, 311-395.

Sierpinska, A. (1988). Epistemological Remarks on Functions. *Proceedings of the 12th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, II*, 568-575.

Slavin, R. (1989a). Cooperative learning and student achievement. En R. Slavin (Ed.), *School and classroom organization (*pp. 129-156). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Slavin, R. (1989b). *School and classroom organization.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Slavin, R. (1990). Research on cooperative learning: Consensus and controversy. *Educational Leadership, 47*, 52-54.

Vygotsky, L. S., (1992). Pensamiento y lenguaje. México: Ediciones Quinto Sol.

Wainer, H. (1992). Understanding graphs and tables. *Educational Research, 21*, 14-23.

Wenzelburger, E. y Cruz, S. E. (1992). El aprendizaje de funciones trigonométricas con apoyo de graficación por microcomputadoras. En E. Filloy, H. J. Herrera y F. Hitt (Eds.), *Memorias del IV Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática*. México: CINVESTAV.

Yackel, E. (1991). The role of peer questioning during class discussion in second grade mathematics. In F. Furinghetti (Ed.), *Proccedings of the Fifteenth PME Conference* (Vol. 3), pp. 364-371. Dipartimento di Matematica dell'Universita di Genova.

Zawojewski, J. S., Lesh, R., & English, L. (2003). A Models and Modeling Perspective on the Role of Small Group Learning Activities. En Richard Lesh & Helen M. Doerr. (Eds.), *Byond Constructivism. Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

ANEXO 1

FORMATO DE LAS TAREAS UTILIZADAS EN LA INSTRUCCIÓN

Introducción

Con el propósito de que los estudiantes dominaran la articulación de los registros de representación gráfico y algebraico en funciones polinomiales elementales se diseñaron 57 tareas. Su contenido se estructuró en base a los lineamientos dados en el Capítulo 3 y los estudiantes las enfrentaron en forma individual, en equipo y/o grupal. En esta sección se muestra:

i. Una tabla en la que se registra el listado de todas las tareas, el título de cada una de ellas, la forma de trabajo en la que se lleva a cabo y la sesión en que se aborda.

ii. Las hojas de trabajo con las que contaron los alumnos para realizar las tareas individuales y en equipo.

Cabe señalar que las tareas cuya forma de trabajo es grupal, no cuentan con alguna hoja impresa. Ellas son, la discusión de las conclusiones individuales o en equipo que los estudiantes han obtenido en tareas realizadas con anterioridad. Por tal razón, las tareas grupales no aparecen en este Anexo. Por otra parte, el propósito de las Tareas y los resultados que se obtienen de ellas, se pueden consultar en el Capítulo 4.

LISTADO DE TAREAS

Nº de Tarea	Título de la Tarea	Forma de trabajo	Nº de sesión
1	*Cuestionario*	Individual	1ª
2	*Tabulaciones*	Individual	1ª
3	*Revisión de las tabulaciones*	Grupal	2ª
4	*Representación gráfica de las 54 representaciones algebraicas*	Individual	3ª
5	*Clasificando ecuaciones*	Individual	4ª
6	*2ª aplicación del Cuestionario*	Individual	5ª
7	*¿Cómo resolví el cuestionario en su segunda aplicación?*	Individual	5ª
8	*Clasificando ecuaciones*	Grupal	5ª
9	*Registrando las clasificaciones. Construcción del Cuadro I*	Individual	5ª
10	*Registrando las clasificaciones. Construcción del Cuadro I*	Grupal	6ª
11	*Analizando Bloques*	Individual	6ª
12	*Analizando Bloques*	Equipo	6ª
13	*Analizando Bloques*	Grupal	6ª
14	*Estableciendo condiciones*	Individual	6ª
15	*Estableciendo condiciones*	Equipo	7ª
16	*Estableciendo condiciones*	Grupal	7ª
17	*Formas de las representaciones algebraicas de las funciones bajo estudio*	Grupal	7ª
18	*Construyendo el Cuadro II*	Grupal	7ª
19	*Analizando Columnas*	Individual	7ª
20	*Analizando Columnas*	Equipo	8ª
21	*Analizando Columnas*	Grupal	8ª
22	*Analizando el 1er. y 2º Plano*	Individual	8ª
23	*Analizando el 1er. y 2º Plano*	Equipo	9ª
24	*Analizando el 1er. y 2º Plano*	Grupal	9ª
25	*Construyendo la 1ª parte del Cuadro III*	Grupal	9ª
26	*Analizando el 3er. y 4º Plano*	Individual	9ª
27	*Analizando el 3er. y 4º Plano*	Equipo	10ª
28	*Analizando el 3er. y 4º Plano*	Grupal	10ª
29	*Construyendo la 2ª parte del Cuadro III*	Grupal	10ª
30	*Construyendo el Cuadro IV*	Individual	10ª
31	*Construyendo el Cuadro IV*	Equipo	11ª
32	*Construyendo el Cuadro IV*	Grupal	11ª
33	*Construyendo el Cuadro V*	Individual	11ª
34	*Construyendo el Cuadro V*	Equipo	12ª
35	*Construyendo el Cuadro V*	Grupal	12ª
36	*Construyendo el Cuadro VI*	Individual	12ª
37	*Construyendo el Cuadro VI*	Equipo	13ª
38	*Construyendo el Cuadro VI*	Grupal	13ª
39	*Construyendo el Cuadro VII*	Individual	13ª
40	*Construyendo el Cuadro VII*	Equipo	14ª
41	*Construyendo el Cuadro VII*	Grupal	14ª
42	*Construyendo el Cuadro VIII*	Individual	13ª
43	*Construyendo el Cuadro VIII*	Equipo	14ª
44	*Construyendo el Cuadro VIII*	Grupal	14ª
45	*Ejercicios: características de la gráfica asociada a una ecuación. 1ª parte*	Individual	15ª
46	*Ejercicios: características de la gráfica asociada a una ecuación. 1ª parte*	Grupal	15ª
47	*Ejercicios: características de la gráfica asociada a una ecuación. 2ª parte*	Individual	15ª
48	*Ejercicios: características de la gráfica asociada a una ecuación. 2ª parte*	Grupal	15ª
49	*Ejercicios: características y bosquejo de la gráfica asociada a una ecuación*	Individual	16ª
50	*Ejercicios: características y bosquejo de la gráfica asociada a una ecuación*	Grupal	16ª
51	*Ejercicios: bosquejo de la gráfica asociada a una ecuación. 1ª parte*	Individual	16ª
52	*Ejercicios: bosquejo de la gráfica asociada a una ecuación. 1ª parte*	Grupal	16ª
53	*Ejercicios: bosquejo de la gráfica asociada a una ecuación. 2ª parte*	Individual	17ª
54	*Ejercicios: bosquejo de la gráfica asociada a una ecuación. 2ª parte*	Grupal	17ª
55	*Ejercicios: ecuación asociada al bosquejo de una gráfica*	Individual	17ª
56	*Ejercicios: ecuación asociada al bosquejo de una gráfica*	Grupal	17ª
57	*Cuestionario*	Individual	18ª

T A R E A 1 : *C U E S T I O N A R I O*

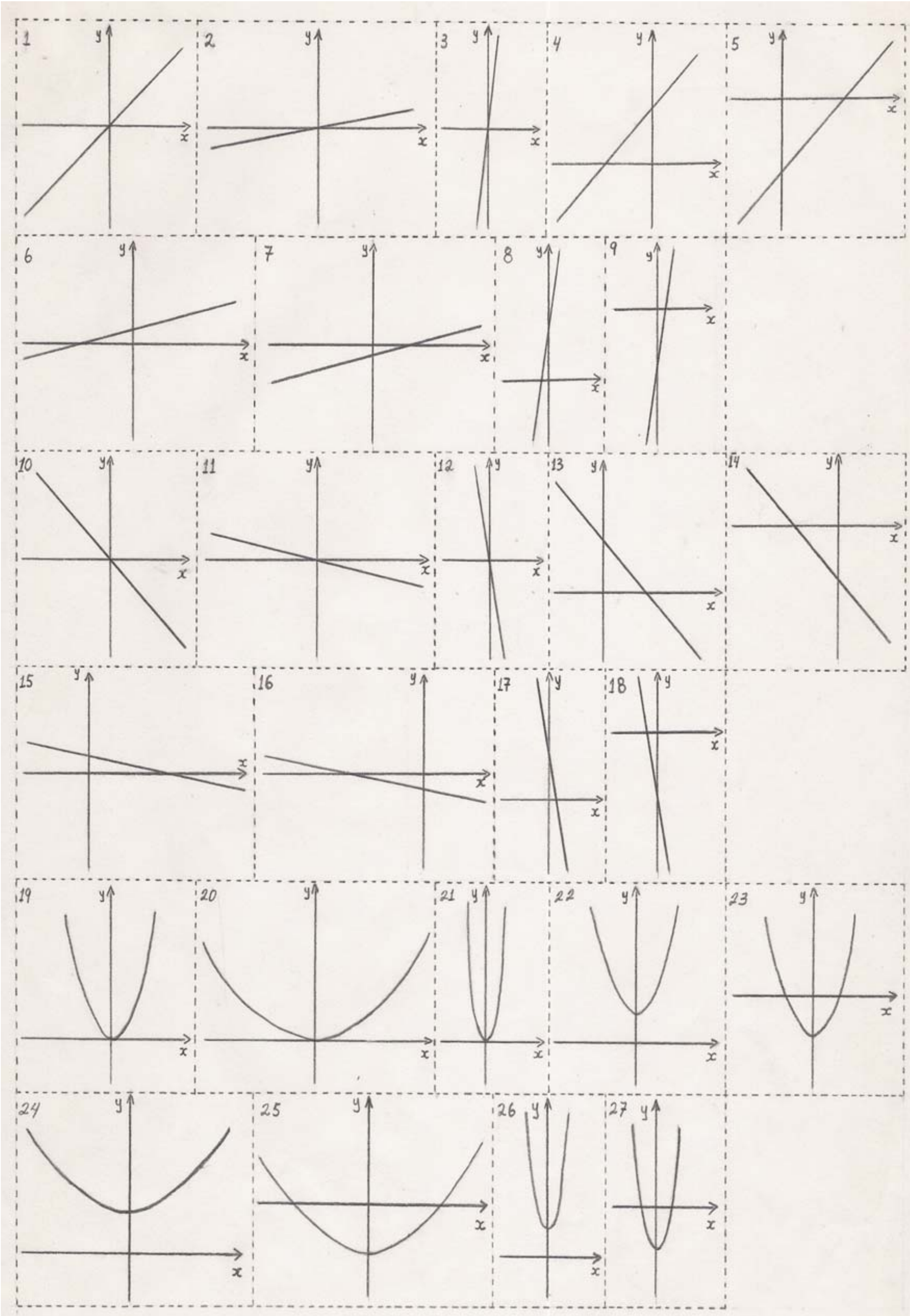
Nombre:____ **Grupo:**_________ **Fecha:**____________

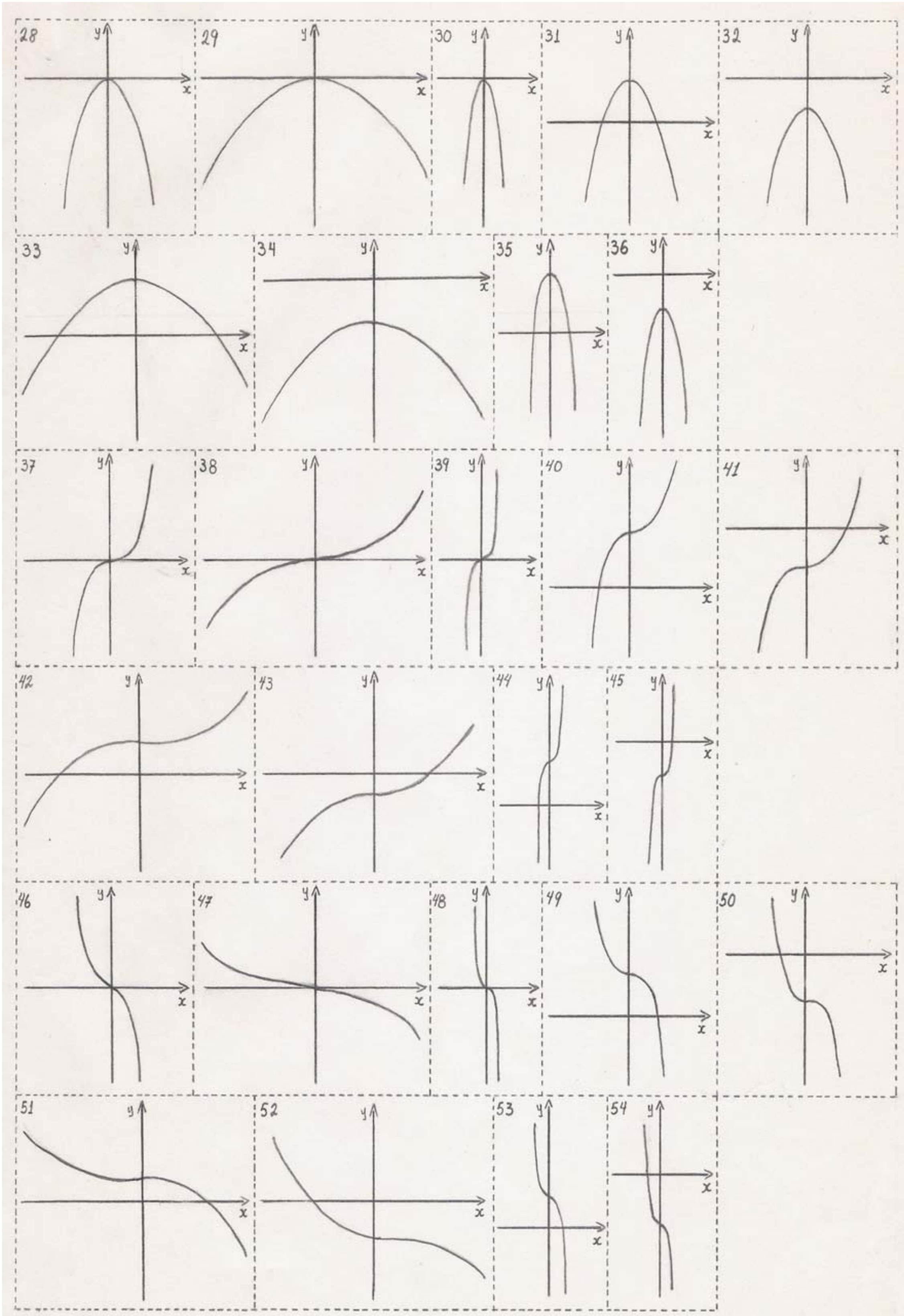
I. Relaciona las gráficas con las ecuaciones, anotando, en el espacio indicado, el número de gráfica factible de asociársele a cada una de las ecuaciones dadas y las coordenadas del vértice, punto de intersección con el Eje de las Ordenadas o punto de intersección con los Ejes, según sea el caso.

ECUACIÓN	NÚMERO DE GRÁFICA	VÉRTICE O PUNTO DE INTERSECCIÓN
1. $y=\frac{9}{4}x+8$	____________	______________________________
2. $y=\frac{5}{9}x^2-3$	____________	______________________________
3. $y=-\frac{11}{4}x^3-2$	____________	______________________________
4. $y=x^3-9$	____________	______________________________
5. $y=-\frac{5}{8}x^2-4$	____________	______________________________
6. $y=-x+5$	____________	______________________________
7. $y=-\frac{8}{3}x$	____________	______________________________
8. $y=-x^2+9$	____________	______________________________
9. $y=\frac{7}{5}x^3$	____________	______________________________
10. $y=\frac{7}{4}x^2+5$	____________	______________________________
11. $y=\frac{2}{9}x^3+7$	____________	______________________________
12. $y=-\frac{4}{7}x-6$	____________	______________________________
13. $y=-\frac{9}{5}x^2$	____________	______________________________
14. $y=\frac{5}{7}x-4$	____________	______________________________
15. $y=-\frac{6}{7}x^3+5$	____________	______________________________

II. Anota, en el espacio indicado, una ecuación factible de asociársele a cada una de las gráficas que se te indican.

NÚMERO DE GRÁFICA	ECUACIÓN
21	______________________
5	______________________
48	______________________
52	______________________
15	______________________
36	______________________
24	______________________
18	______________________
49	______________________
23	______________________
9	______________________
43	______________________
33	______________________
44	______________________
6	______________________


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27


28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54

T A R E A 2

"Tabulaciones"

TRABAJO INDIVIDUAL

Tabula, en tu cuaderno, cada una de las 54 relaciones funcionales siguientes. Asígnale a la variable independiente los valores de -3, -2, -1, 0, 1, 2 y 3. Anota, en el extremo derecho de cada renglón de la tabulación, el par ordenado correspondiente. En las ecuaciones donde el coeficiente de la variable independiente es $\frac{1}{2}$, no lo conviertas a su expresión decimal al realizar las tabulaciones.

1. $y = x$
2. $y = 2x$
3. $y = \frac{1}{2}x$
4. $y = x + 3$
5. $y = x - 3$
6. $y = 2x + 3$
7. $y = 2x - 3$
8. $y = \frac{1}{2}x + 3$
9. $y = \frac{1}{2}x - 3$
10. $y = -x$
11. $y = -2x$
12. $y = -\frac{1}{2}x$
13. $y = -x + 3$
14. $y = -x - 3$
15. $y = -2x + 3$
16. $y = -2x - 3$
17. $y = -\frac{1}{2}x + 3$
18. $y = -\frac{1}{2}x - 3$
19. $y = x^2$
20. $y = 2x^2$
21. $y = \frac{1}{2}x^2$
22. $y = x^2 + 2$
23. $y = x^2 - 2$
24. $y = 2x^2 + 1$
25. $y = 2x^2 - 1$
26. $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$
27. $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$
28. $y = -x^2$
29. $y = -2x^2$
30. $y = -\frac{1}{2}x^2$
31. $y = -x^2 + 2$
32. $y = -x^2 - 2$
33. $y = -2x^2 + 1$
34. $y = -2x^2 - 1$
35. $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3$
36. $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3$
37. $y = x^3$
38. $y = 2x^3$
39. $y = \frac{1}{2}x^3$
40. $y = x^3 + 2$
41. $y = x^3 - 2$
42. $y = 2x^3 + 1$
43. $y = 2x^3 - 1$
44. $y = \frac{1}{2}x^3 + 4$
45. $y = \frac{1}{2}x^3 - 4$
46. $y = -x^3$
47. $y = -2x^3$
48. $y = -\frac{1}{2}x^3$
49. $y = -x^3 + 2$
50. $y = -x^3 - 2$
51. $y = -2x^3 + 1$
52. $y = -2x^3 - 1$
53. $y = -\frac{1}{2}x^3 + 4$
54. $y = -\frac{1}{2}x^3 - 4$

T A R E A 4

"Representación gráfica de las 54 representaciones algebraicas"

TRABAJO INDIVIDUAL

Haz las gráficas asociadas a cada una de las 54 relaciones funcionales que tabulaste considerando los puntos siguientes.

I. Distribuye las gráficas según se indica a continuación.

Número de Plano	Gráficas asociadas a las ecuaciones (*designadas según su número*)	Número de Plano	Gráficas asociadas a las ecuaciones (*designadas según su número*)	Número de Plano	Gráficas asociadas a las ecuaciones (*designadas según su número*)
1º	1, 2 y 3	10º	19, 20 y 21	19º	37, 38 y 39
2º	1, 4 y 5	11º	19, 22 y 23	20º	37, 40 y 41
3º	2, 6 y 7	12º	20, 24 y 25	21º	38, 42 y 43
4º	3, 8 y 9	13º	21, 26 y 27	22º	39, 44 y45
5º	1 y 10	14º	19 y 28	23º	46, 47 y 48
6º	10, 11 y 12	15º	28, 29 y 30	24º	46, 49 y 50
7º	10, 13 y 14	16º	28, 31 y 32	25º	47, 51 y 52
8º	11, 15 y 16	17º	29, 33 y 34	26º	48, 53 y 54
9º	12, 17 y 18	18º	30, 35 y 36		

II. Utiliza colores para graficar. Las gráficas de un mismo plano deben ser de colores distintos.

III. En un extremo (derecho o izquierdo) de cada gráfica anota su ecuación asociada. En un mismo plano, todas las ecuaciones deben estar "alineadas". Es decir, o todas en el extremo izquierdo de sus gráficas asociadas o todas en el extremo derecho.

IV. En el Primer Plano, la unidad de medida en el eje de las abscisas debe ser igual a la unidad de medida en el eje de las ordenadas. En los 25 planos restantes, no hay restricción alguna.

T A R E A 5

"Clasificando ecuaciones"

TRABAJO INDIVIDUAL

Nombre: ___________________________________ Gpo. ______ Nº de lista: ______ Fecha: _________

CLASIFICA las 54 ecuaciones según se indica a continuación:

a) Elige ***un criterio clasificatorio*** (1er. CC) y anótalo claramente.

1er. CC:

b) Indica en ***cuántos subconjuntos*** queda dividido el conjunto original (54 ecuaciones) al aplicarle el 1er. CC, ***denota por* S1, S2,** etc. los subconjuntos que se obtienen y ***describe*** cuál sería cada uno de ellos.

Subconjunto	Descripción
S_1	
S_2	

c) Escribe los ***números de las ecuaciones*** que pertenecen a **cada *subconjunto***

Subconjunto	Números de las ecuaciones
S_1	
S_2	

d) Elige ***otro criterio clasificatorio*** (2º CC) y anótalo claramente.

2ºCC:

e) Indica en ***cuántos subconjuntos*** queda dividido $\mathbf{S_1}$**,** $\mathbf{S_2}$**,** etc. al aplicarles a cada uno de ellos el 2ºCC, ***denota*** por $\mathbf{S_{1,1}}$; $\mathbf{S_{1,2}}$; $\mathbf{S_{1,3}}$**;** etc. los subconjuntos de $\mathbf{S_1}$**;** $\mathbf{S_{2,1}}$; $\mathbf{S_{2,2}}$; $\mathbf{S_{2,3}}$**;** etc. los subconjuntos de $\mathbf{S_2}$ **...** , así sucesivamente y ***describe*** cuál sería cada uno de ellos.

Subconjunto	**Descripción**
$\mathbf{S_{1,1}}$	
$\mathbf{S_{1,2}}$	

f) Escribe los ***números de las ecuaciones*** que pertenecen a ***cada subconjunto***

Subconjunto	**Números de las ecuaciones**
$\mathbf{S_{1,1}}$	
$\mathbf{S_{1,2}}$	

T A R E A 7

"¿Cómo resolví el Cuestionario en su segunda aplicación?"

TRABAJO INDIVIDUAL

Nombre: __________________________________ Gpo. ______ Nº de lista: ______ Fecha: _______

I. ***Completa,*** *en el espacio indicado,* ***las expresiones 1 y 2*** *de acuerdo a lo que hayas realizado para contestar las preguntas correspondientes de las dos partes del Cuestionario.*

1. **Para contestar la primera parte**

2. **Para contestar la segunda parte**

II. ***Elige*** *la opción que consideres* ***más adecuada y JUSTIFÍCALA.***

Mis respuestas al Cuestionario, en su segunda aplicación, comparadas con las de la primera aplicación:

a) Mejoraron significativamente

b) Mejoraron ligeramente

c) Empeoraron significativamente

d) Empeoraron ligeramente

e) Fueron iguales

III. ***Completa*** *la siguiente afirmación:*

Mi autocalificación en la segunda aplicación del Cuestionario es

T A R E A 9

"Registrando las clasificaciones"

TRABAJO INDIVIDUAL

Nombre: ____ Gpo. ____________ Nº de lista: _________ Fecha: ______________________

*Con base a **los dos criterios clasificatorios** que se acordaron en la discusión grupal (1er. CC: Exponente de la variable independiente; 2º CC: Signo del coeficiente de la variable independiente), **construye** el **CUADRO I** de acuerdo a **las siguientes indicaciones:***

a) **Agrupa** en el **Bloque I**, las ecuaciones que pertenecen a **S_1;** en el **Bloque II**, las que pertenecen a **S_2** y en **Bloque III**, las de **S_3**. Escribe las ecuaciones de **$S_{1,1}$** en una columna (**1ª Columna** del Bloque I) y las de **$S_{1,2}$** en otra columna (**2ª Columna** del Bloque I). **Haz lo mismo** para los Bloques restantes.

b) Al anotar las ecuaciones, escribe las **variables** con **lápiz**, el **signo de igual** con **negro**, los **exponentes** con **rojo**, los **coeficientes** con **azul** y el **término independiente** con **verde.**

c) De los 26 Planos que construiste, **determina** cuáles son los que **pertenecen** al **Bloque I**, a la **1ª Columna del Bloque I**, a la **2ª Columna del Bloque I**, etc. y **anota** los **números** de los **Planos** de cada **Bloque** y de cada **Columna.**

C U A D R O I

T A R E A 1 1

"Analizando Bloques"

TRABAJO INDIVIDUAL

Nombre: ____________________________________ Gpo. ______ Nº de lista: ______ Fecha: _________

Contesta cada una de las siguientes preguntas en el espacio indicado:

1. ¿Cuáles son las **diferencias** que existen entre el **Bloque I, II** y **III** del Cuadro I tanto en **ecuaciones** como en **gráficas**?

R E S P U E S T A

Diferencias en ecuaciones	Diferencias en gráficas

2. ¿Cuáles son las **similitudes** que existen entre el **Bloque I, II** y **III** del Cuadro I tanto en **ecuaciones** como en **gráficas**?

R E S P U E S T A

Similitudes en ecuaciones	Similitudes en gráficas

T A R E A 1 2

"Analizando Bloques"

TRABAJO EN EQUIPO

Nombres: ____ Gpo. ______ Nºs. de lista: _______________
Fecha: ________________

Contesten cada una de las siguientes preguntas en el espacio indicado:

1. ¿Cuáles son las **diferencias** que existen entre el **Bloque I, II** y **III** del Cuadro I tanto en **ecuaciones** como en **gráficas**?

R E S P U E S T A

Diferencias en ecuaciones	Diferencias en gráficas

2. ¿Cuáles son las **similitudes** que existen entre el **Bloque I, II** y **III** del Cuadro I tanto en **ecuaciones** como en **gráficas**?

R E S P U E S T A

Similitudes en ecuaciones	Similitudes en gráficas

T A R E A 1 4

“Estableciendo condiciones”

TRABAJO INDIVIDUAL

Nombre: ________________________________ Gpo. ______ Nº de lista: ______ Fecha: _______

Contesta cada una de las siguientes preguntas en el espacio indicado:

3. Dada una ecuación, ¿**de qué depende** la **forma** de su **gráfica** asociada?

4. Dada una gráfica, ¿**de qué depende** el **tipo** de **ecuación** asociada?

5. ¿Cuáles son las **condiciones** que debe cumplir una **ecuación** para que su **gráfica** asociada sea una **recta** (no paralela a los ejes) en el Plano Cartesiano?

6. ¿Cuáles son las **condiciones** que debe cumplir una **ecuación** para que su **gráfica** asociada sea una **parábola** (que se abre hacia arriba o hacia abajo) en el Plano Cartesiano?

7. ¿Cuáles son las **condiciones** que debe cumplir una **ecuación** para que su **gráfica** asociada sea una **parábola cúbica** (con punto de inflexión en el eje de las ordenadas y que se abre sobre dicho eje) en el Plano Cartesiano?

T A R E A 1 5

"Estableciendo condiciones"

TRABAJO EN EQUIPO

Nombres: ____ Gpo. ______ Nºs. de lista: ______________
Fecha: ______________

Contesta cada una de las siguientes preguntas en el espacio indicado:

3. Dada una ecuación, ¿**de qué depende** la **forma** de su **gráfica** asociada?

4. Dada una gráfica, ¿**de qué depende** el **tipo** de **ecuación** asociada?

5. ¿Cuáles son las **condiciones** que debe cumplir una **ecuación** para que su **gráfica** asociada sea una **recta** (no paralela a los ejes) en el Plano Cartesiano?

6. ¿Cuáles son las **condiciones** que debe cumplir una **ecuación** para que su **gráfica** asociada sea una **parábola** (que se abre hacia arriba o hacia abajo) en el Plano Cartesiano?

7. ¿Cuáles son las **condiciones** que debe cumplir una **ecuación** para que su **gráfica** asociada sea una **parábola cúbica** (con punto de inflexión en el eje de las ordenadas y que se abre sobre dicho eje) en el Plano Cartesiano?

T A R E A 1 9

"Analizando Columnas"

TRABAJO INDIVIDUAL

Nombre: ________________________________ Gpo. ______ Nº de lista: ______ Fecha: ___________

Contesta cada una de las siguientes preguntas en el espacio indicado:

8. ¿Cuáles son las **diferencias** que existen entre la **1ª y 2ª columna del Bloque I** del Cuadro I tanto en **ecuaciones** como en **gráficas**?

R E S P U E S T A

Diferencias en ecuaciones	Diferencias en gráficas

9. ¿Cuáles son las **similitudes** que existen entre **1ª y 2ª columna del Bloque I** del Cuadro I tanto en **ecuaciones** como en **gráficas**?

R E S P U E S T A

Similitudes en ecuaciones	Similitudes en gráficas

10. ¿Cuáles son las **diferencias** que existen entre la **1ª y 2ª columna del Bloque II** del Cuadro I tanto en **ecuaciones** como en **gráficas**?

R E S P U E S T A

Diferencias en ecuaciones	**Diferencias en gráficas**

11. ¿Cuáles son las **similitudes** que existen entre **1ª y 2ª columna del Bloque II** del Cuadro I tanto en **ecuaciones** como en **gráficas**?

R E S P U E S T A

Similitudes en ecuaciones	**Similitudes en gráficas**

12. ¿Cuáles son las **diferencias** que existen entre la **1ª y 2ª columna del Bloque III** del Cuadro I tanto en **ecuaciones** como en **gráficas**?

R E S P U E S T A

Diferencias en ecuaciones	**Diferencias en gráficas**

13. ¿Cuáles son las **similitudes** que existen entre **1ª y 2ª columna del Bloque III** del Cuadro I tanto en **ecuaciones** como en **gráficas**?

R E S P U E S T A

Similitudes en ecuaciones	**Similitudes en gráficas**

T A R E A 2 0

"Analizando Columnas"

TRABAJO EN EQUIPO

Nombres: ____ Gpo. ______ Nºs. de lista: _______________
Fecha: _______________

Contesten cada una de las siguientes preguntas en el espacio indicado:

8. ¿Cuáles son las **diferencias** que existen entre **1ª y 2ª columna del Bloque I** del Cuadro I tanto en **ecuaciones** como en **gráficas**?

R E S P U E S T A

Diferencias en ecuaciones	Diferencias en gráficas

9. ¿Cuáles son las **similitudes** que existen entre **1ª y 2ª columna del Bloque I** del Cuadro I tanto en **ecuaciones** como en **gráficas**?

R E S P U E S T A

Similitudes en ecuaciones	Similitudes en gráficas

10. ¿Cuáles son las **diferencias** que existen entre la **1ª y 2ª columna del Bloque II** del Cuadro I tanto en **ecuaciones** como en **gráficas**?

R E S P U E S T A

Diferencias en ecuaciones	Diferencias en gráficas

11. ¿Cuáles son las **similitudes** que existen entre **1ª y 2ª columna del Bloque II** del Cuadro I tanto en **ecuaciones** como en **gráficas**?

R E S P U E S T A

Similitudes en ecuaciones	Similitudes en gráficas

12. ¿Cuáles son las **diferencias** que existen entre la **1ª y 2ª columna del Bloque III** del Cuadro I tanto en **ecuaciones** como en **gráficas**?

R E S P U E S T A

Diferencias en ecuaciones	Diferencias en gráficas

13. ¿Cuáles son las **similitudes** que existen entre **1ª y 2ª columna del Bloque III** del Cuadro I tanto en **ecuaciones** como en **gráficas**?

R E S P U E S T A

Similitudes en ecuaciones	Similitudes en gráficas

T A R E A 2 2

"Analizando el 1er. y 2º Plano"

TRABAJO INDIVIDUAL

Nombre: ________________________________ Gpo. ______ Nº de lista: ______ Fecha: ___________

14. Analiza el 1er. Plano

15. Analiza el 2º Plano

T A R E A 2 3

“Analizando el 1er. y 2º Plano”

TRABAJO EN EQUIPO

Nombres: ____ Gpo. ______ Nºs. de lista: _______________
Fecha: _______________

14. Analicen el 1er. Plano

15. Analicen el 2º Plano

T A R E A 2 6

"Analizando el 3er. y 4º Plano"

TRABAJO INDIVIDUAL

Nombre: ___________________________________ Gpo. ______ Nº de lista: ______ Fecha: ___________

16. Analiza el 3er. Plano

17. Analiza el 4º Plano

T A R E A 2 7

"Analizando el 3er. y 4º Plano"

TRABAJO EN EQUIPO

Nombres: ____ Gpo. ______ Nºs. de lista: _______________
Fecha: _______________

16. Analicen el 3er. Plano

17. Analicen el 4º Plano

T A R E A 3 0

"Construyendo el Cuadro IV"

TRABAJO INDIVIDUAL

Nombre: ___________________________________ Gpo. ______ Nº de lista: ______ Fecha: ___________

18. **Registra**, en el **Cuadro IV**, las **generalizaciones** que obtengas después de **analizar** los **Planos 6º, 7º, 8º** y **9º.**

C U A D R O I V

T A R E A 3 1

"Construyendo el Cuadro IV"

TRABAJO EN EQUIPO

Nombres: ____ Gpo. ______ Nºs. de lista: _______________
Fecha: _______________

18. **Registren**, en el **Cuadro IV**, las **generalizaciones** que obtengan después de **analizar** los **Planos 6º, 7º, 8º** y **9º.**

C U A D R O I V

T A R E A 3 3

"Construyendo el Cuadro V"

TRABAJO INDIVIDUAL

Nombre: ___________________________________ Gpo. ______ Nº de lista: ______ Fecha: ___________

18. **Registra**, en el **Cuadro V**, las **generalizaciones** que obtengas después de **analizar** los **Planos 10º, 11º, 12º** y **13º.**

C U A D R O V

T A R E A 3 4

"Construyendo el Cuadro V"

TRABAJO EN EQUIPO

Nombres: ____ Gpo. ______ Nºs. de lista: _______________
Fecha: _______________

18. **Registren**, en el **Cuadro V**, las **generalizaciones** que obtengan después de **analizar** los **Planos 10º, 11º, 12º** y **13º.**

C U A D R O V

T A R E A 3 6

"Construyendo el Cuadro VI"

TRABAJO INDIVIDUAL

Nombre: __________________________________ Gpo. ______ Nº de lista: ______ Fecha: ___________

18. **Registra**, en el **Cuadro VI**, las **generalizaciones** que obtengas después de **analizar** los **Planos 15º, 16º, 17º** y **18º.**

C U A D R O V I

T A R E A 3 7

"Construyendo el Cuadro VI"

TRABAJO EN EQUIPO

Nombres: ____ Gpo. ______ Nºs. de lista: _______________
Fecha: _______________

18. **Registren**, en el **Cuadro VI**, las **generalizaciones** que obtengan después de **analizar** los **Planos 15º, 16º, 17º** y **18º.**

C U A D R O V I

T A R E A 3 9

"Construyendo el Cuadro VII"

TRABAJO INDIVIDUAL

Nombre: ___________________________________ Gpo. ______ Nº de lista: ______ Fecha: ___________

18. **Registra**, en el **Cuadro VII**, las **generalizaciones** que obtengas después de **analizar** los **Planos 19º, 20º, 21º** y **22º.**

C U A D R O V I I

T A R E A 4 0

"Construyendo el Cuadro VII"

TRABAJO EN EQUIPO

Nombres: ____ Gpo. ______ Nºs. de lista: _______________
Fecha: _______________

18. **Registren**, en el **Cuadro VII**, las **generalizaciones** que obtengan después de **analizar** los **Planos 19º, 20º, 21º** y **22º.**

C U A D R O V I I

T A R E A 4 2

“Construyendo el Cuadro VIII”

TRABAJO INDIVIDUAL

Nombre: ___________________________________ Gpo. ______ Nº de lista: ______ Fecha: ___________

18. **Registra**, en el **Cuadro VIII**, las **generalizaciones** que obtengas después de **analizar** los **Planos 23º, 24º, 25º** y **26º.**

C U A D R O V I I I

T A R E A 4 3

"Construyendo el Cuadro VIII"

TRABAJO EN EQUIPO

Nombres: ____ Gpo. ______ Nºs. de lista: _______________
Fecha: _______________

18. **Registren**, en el **Cuadro VIII**, las **generalizaciones** que obtengan después de **analizar** los **Planos 23º, 24º, 25º** y **26º.**

C U A D R O V I I I

T A R E A 4 5

"Ejercicios: características de la gráfica asociada a una ecuación. 1ª parte"

TRABAJO INDIVIDUAL

Nombre: ____ Gpo. ______________ Nº de lista: __________ Fecha: ______________________________

		RECTA			PARÁBOLA			PARÁBOLA CÚBICA			
ECUACIÓN	**Forma**	**Cuadrantes**	α	**P.I.**	**Abre hacia**	**"Abertura"**	**Vértice**	**Cuadrantes**	**"Abertura"**	**P.In.**	Calif.

T A R E A   4 7

"Ejercicios: características de la gráfica asociada a una ecuación. 2ª parte"

TRABAJO INDIVIDUAL

Nombre: ____ Gpo. _______________ Nº de lista: ___________ Fecha: _________________________________

		RECTA			**PARÁBOLA**			**PARÁBOLA CÚBICA**			
ECUACIÓN	**Forma**	**Cuadrantes**	α	**P.I.**	**Abre hacia**	**"Abertura"**	**Vértice**	**Cuadrantes**	**"Abertura"**	**P.In.**	Calif.

T A R E A 4 9

"Ejercicios: características y bosquejo de la gráfica asociada a una ecuación"

TRABAJO INDIVIDUAL

Nombre: ______________________________________ Gpo. ________ Nº de lista: _______ Fecha: ___________

ECUACIÓN	**Características de la gráfica asociada**				**N° de gráfica**	Calif.

T A R E A 5 1

"Ejercicios: bosquejo de la gráfica asociada a una ecuación. 1ª parte"

TRABAJO INDIVIDUAL

Nombre: ______________________________________ Gpo. ________ Nº de lista: _______ Fecha: ___________

ECUACIÓN	**Nº de gráfica**	Calif.

ECUACIÓN	**Nº de gráfica**	Calif.

T A R E A 5 3

"Ejercicios: bosquejo de la gráfica asociada a una ecuación. 2ª parte"

TRABAJO INDIVIDUAL

Nombre: ______________________________________ Gpo. ________ Nº de lista: _______ Fecha: ___________

ECUACIÓN	**Nº de gráfica**	Calif.

ECUACIÓN	**Nº de gráfica**	Calif.

T A R E A 5 5

"Ejercicios: ecuación asociada al bosquejo de una gráfica"

TRABAJO INDIVIDUAL

Nombre: ______________________________________ Gpo. ________ Nº de lista: _______ Fecha: ___________

Nº de GRÁFICA	**Ecuación**	Calif.

Nº de GRÁFICA	**Ecuación**	Calif.

Anexo 2

Formato de los Instrumentos de Comprensión

Introducción

En seguida se muestran tres formatos correspondientes a los Instrumentos que se utilizaron para explorar la Comprensión, en funciones polinomiales elementales, por los alumnos de bachillerato que conforman la población bajo estudio. Los propósitos de cada uno de ellos y los resultados que producen se exponen en los Capítulos 3 y 5, respectivamente.

Dichos Instrumentos se presentan en el orden en el que fueron aplicados: en primer lugar, el titulado "*Explorando diversos aspectos de la articulación de registros*"; en segundo, "*Explorando algunos aspectos sobre la escala*" y en tercero, "*Representaciones gráfica y algebraica en contexto*". Considerando esta secuencia, éstos también son referidos en las páginas anteriores de este Trabajo como 1er. Instrumento de Comprensión, 2° o 3°, según sea el caso.

A C T I V I D A D

"Explorando diversos aspectos de la articulación de registros"

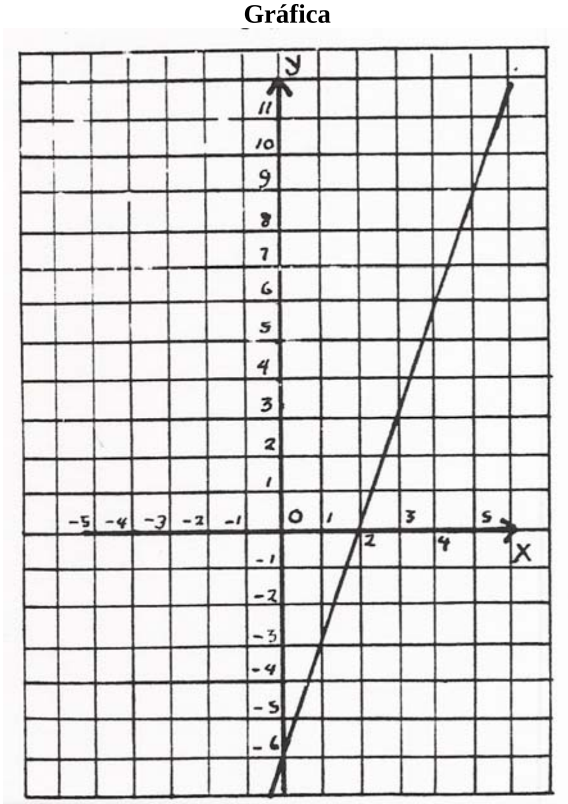
TRABAJO EN EQUIPO

Nombres: ____ Gpo. _______ Nºs. de lista: ________________
Fecha: ________________

1. ¿Cuáles son las **coordenas** del **punto de intersección con el eje de las abscisas** de la gráfica asociada a la ecuación **y = 2*x*-8? Expliquen su respuesta.**

Respuesta	**Explicación**

2. A continuación se muestra **la gráfica** asociada a la ecuación ***y* = 3*x*-6** ¿**El punto** con coordenadas **(4, 10)** pertenece a **la gráfica** asociada a dicha ecuación? **Expliquen su respuesta.**

Gráfica	**Respuesta**
	
	Explicación

3. Bosquejen la gráfica asociada a la ecuación $y = -3(x - 2)^2 + 4$. **Expliquen su respuesta.**

Bosquejo	Explicación

4. Bosquejen la gráfica asociada a la ecuación $y = 2(x + 5)^2$. **Expliquen su respuesta.**

Bosquejo	Explicación

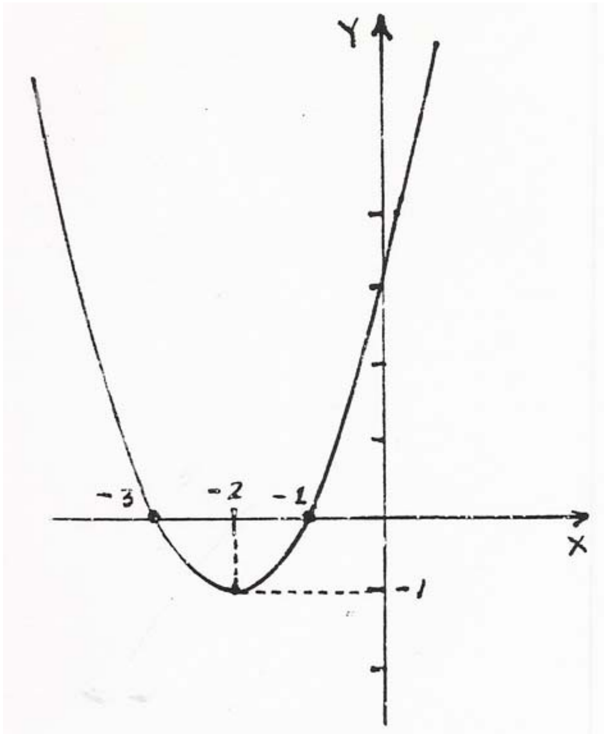
5. **Bosquejen** la gráfica asociada a la ecuación $y = x^2 - 3x$. **Expliquen su respuesta.**

Bosquejo	**Explicación**

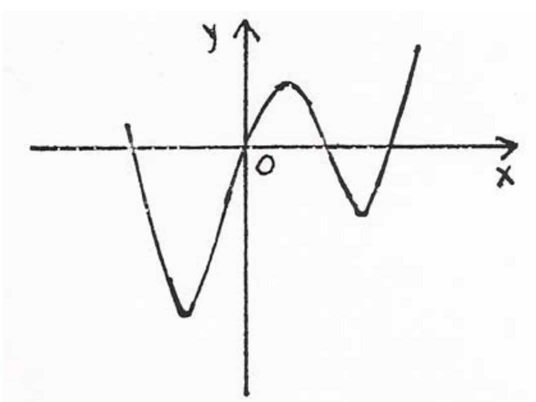
6. **Bosquejen** la gráfica asociada a la ecuación $y = -x^2 + 6x - 5$. **Expliquen su respuesta.**

Bosquejo	**Explicación**

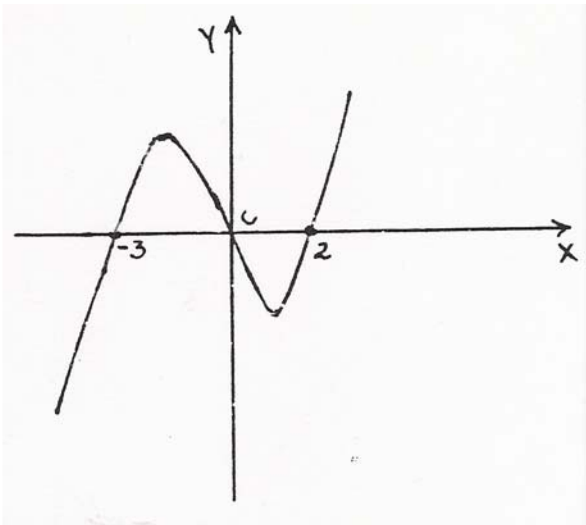
7. A continuación se les presenta **el bosquejo** de una parábola. ¿Cuál **es la ecuación** asociada? **Expliquen su respuesta.**

<table>
<tr><td rowspan="4">Bosquejo

</td><td>Ecuación</td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td>Explicación</td></tr>
<tr><td></td></tr>
</table>

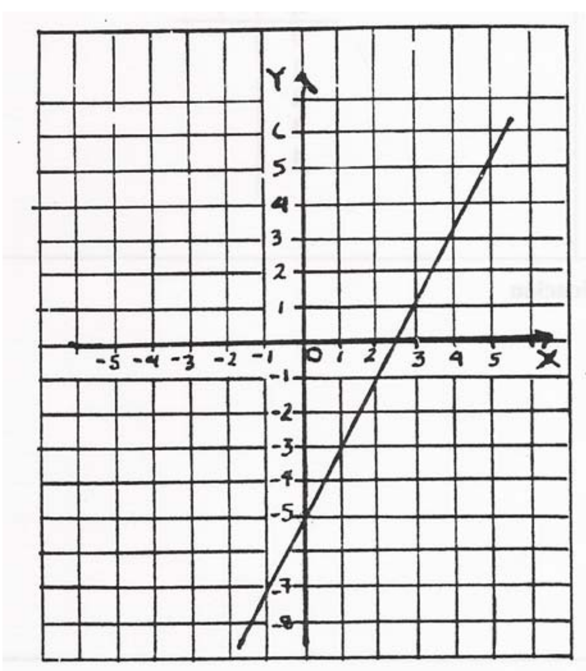
8. El **bosquejo** de la gráfica asociada a la ecuación $\boldsymbol{y = x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 24x}$ se presenta a continuación. ¿Cuál es el **bosquejo** de la gráfica asociada a la ecuación $\boldsymbol{y = x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 24x + 5}$? **Expliquen su respuesta.**

<table>
<tr><td>Bosquejo de la gráfica asociada a la ecuación
$\boldsymbol{y = x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 24x}$

</td><td>Bosquejo de la gráfica asociada a la ecuación
$\boldsymbol{y = x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 24x + 5}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Explicación</td></tr>
</table>

9. El **bosquejo** de la gráfica asociada a la ecuación $y = x^3 + x^2 - 6x$ se presenta a continuación. Si la gráfica se **desplaza cuatro unidades a la derecha**, ¿cuál es su **ecuación** asociada? **Expliquen su respuesta**.

Bosquejo de la gráfica asociada a la ecuación $y = x^3 + x^2 - 6x$	**Ecuación**
	**Explicación**

10. A continuación se da la gráfica asociada a la ecuación ***y*=2*x*-5** . En el mismo sistema de coordenada cartesianas **tracen una recta que pase por el origen y que sea paralela** a la recta dada. ¿Cuál es **la ecuación** de la recta que dibujaron? **Expliquen su respuesta**

Gráfica asociada a la ecuación *y*=2*x*-5	**Ecuación**
	**Explicación**

11. ¿Cuál es **la ecuación** de la **recta paralela** a **$y=3x-4$** y que **pasa por el punto (1,5)**? **Expliquen su respuesta.**

Ecuación	**Explicación**

12. De las dos tablas que se les presentan a continuación, la de la **izquierda** es la **tabulación de la ecuación** $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ **. Completen la tabla de la derecha** si se sabe que **ella corresponde a la ecuación** $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 5$ **. Expliquen su respuesta**

Tabla de $y = x^3 - 3x^2 + 2x$

x	y
0	0
1	0
2	0
3	6
4	24

Tabla de $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 5$

x	y
0	
1	
2	
3	
4	

Explicación

13. Escriban **dos ecuaciones de recta** cuyas gráficas asociadas **se intersequen** y **su punto de intersección** (entre ellas) **se encuentre en el Eje de las Ordenadas. Justifiquen** su respuesta.

Ecuaciones:

Justificación:

14. Escriban **dos ecuaciones de recta** cuyas gráficas asociadas sean **paralelas. Justifiquen** su respuesta.

Ecuaciones:

Justificación:

15. Escriban **dos ecuaciones de parábola** cuyas gráficas asociadas **no se intersequen. Justifiquen** su respuesta.

Ecuaciones:

Justificación:

16. Escriban **dos ecuaciones de parábola cúbica** cuyas gráficas asociadas **se intersequen y su punto de intersección** (entre ellas) **se encuentre fuera del Eje de las Ordenadas. Justifiquen** su respuesta

Ecuaciones:

Justificación:

17. **Expliquen** cuál es la **diferencia** (si es que existe) entre la **expresión** ***"bosquejo de la gráfica asociada a una ecuación"*** y la **expresión** ***"gráfica asociada a una ecuación".***

A C T I V I D A D

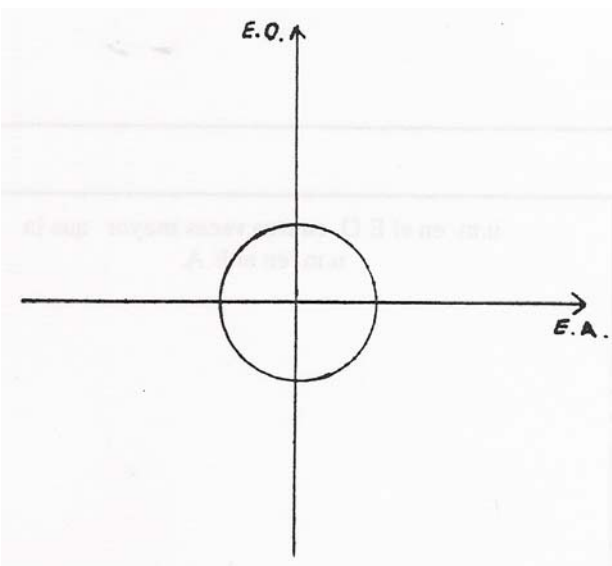
"Explorando algunos aspectos sobre la escala"

TRABAJO EN EQUIPO

Nombres: ____ Gpo. __________ Nºs. de lista: ________________

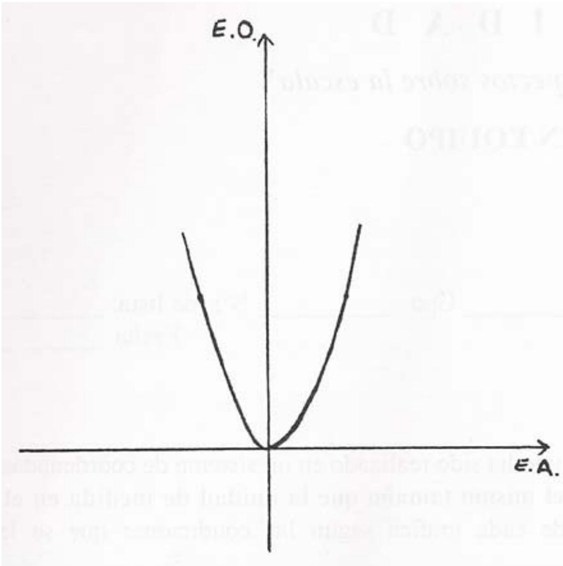
Fecha: ________________

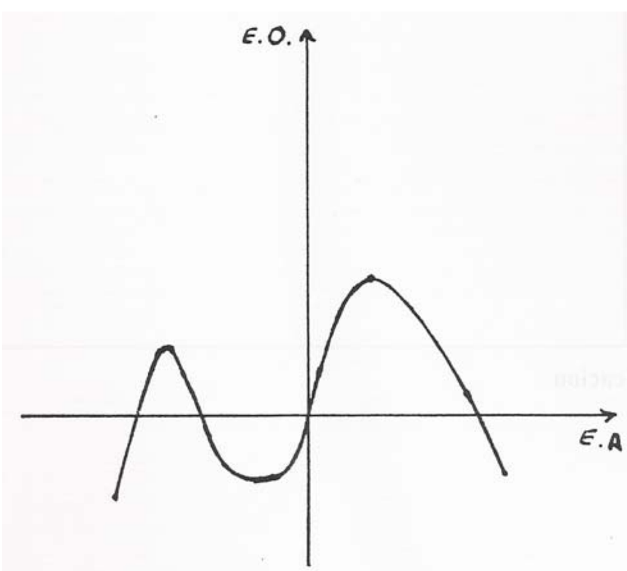
I. A continuación se les presentan bosquejos de gráficas. Cada uno ha sido realizado en un sistema de coordenadas cartesiano donde **la unidad de medida en el eje de las abscisas es del mismo tamaño que la unidad de medida en el eje de las ordenadas**. En el espacio indicado, hagan el bosquejo de cada gráfica según las condiciones que se les indican. **Justifiquen su respuesta.**

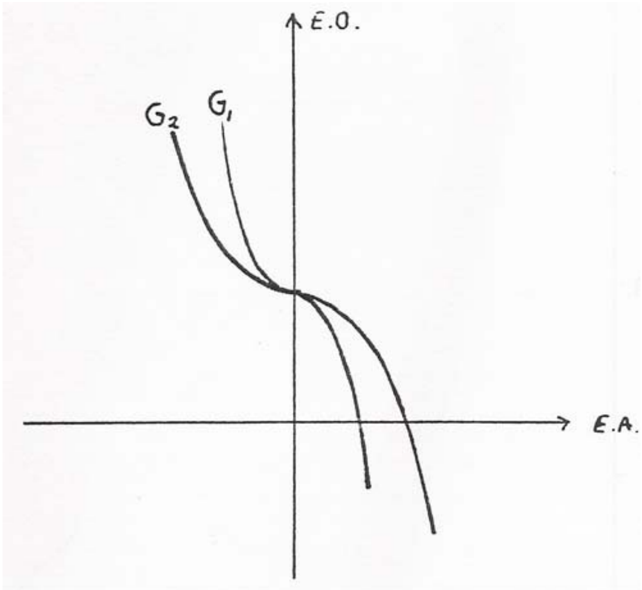
<table>
<tr>
<td>1.
u.m. en el E.A. igual a la u.m. en el E.O.

</td>
<td>u.m. en el E.A. considerablemente mayor que la u.m. en el E.O.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Justificación</td>
</tr>
</table>

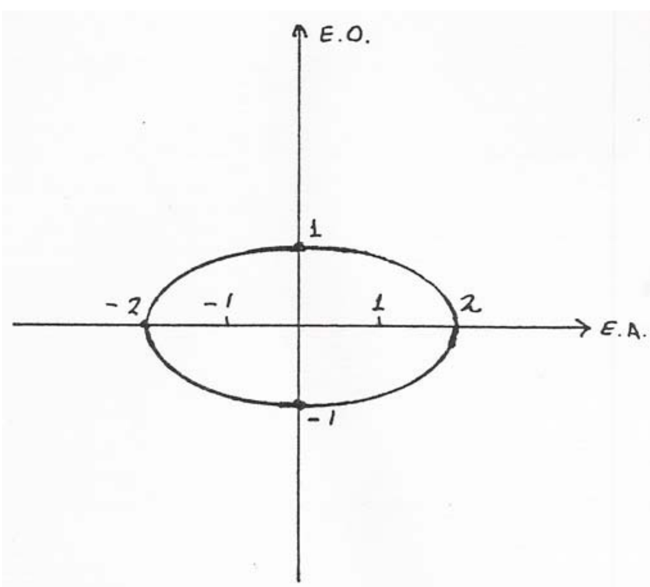
Recuerda que:

u.m.: unidad de medida
E.A.: eje de abscisas
E.O.: eje de ordenadas

<table>
<tr>
<td>2.
u.m. en el E.A. igual a la u.m. en el E.O.

</td>
<td>u.m. en el E.A. considerablemente menor que la u.m. en el E.O.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Justificación</td>
</tr>
</table>

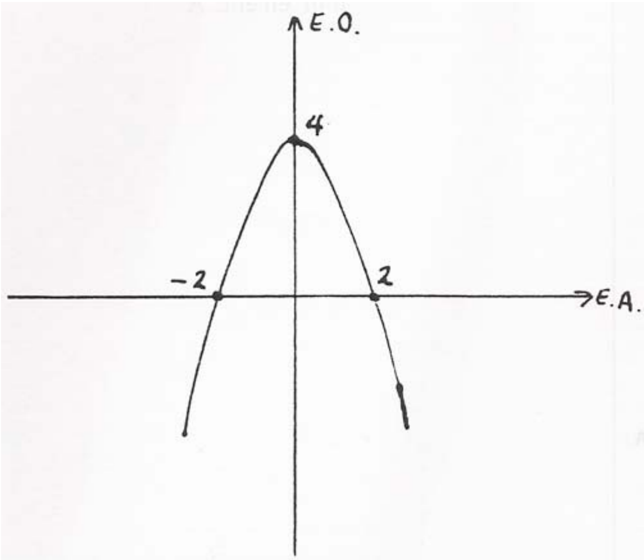
<table>
<tr>
<td>3.
u.m. en el E.A. igual a la u.m. en el E.O.

</td>
<td>u.m. en el E.O. cuatro veces mayor que la u.m. en el E.A.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Justificación</td>
</tr>
</table>

4. u.m. en el E.A. **igual** a la u.m. en el E.O.	u.m. en el E.O. **un tercio** de la u.m. en el E.A.
	
Justificación	

5. u.m. en el E.A. **igual** a la u.m. en el E.O.	u.m. en el E.O. **el doble** de la u.m. en el E.A.
	
Justificación	

6.

u.m. en el E.A. **igual** a la u.m. en el E.O.

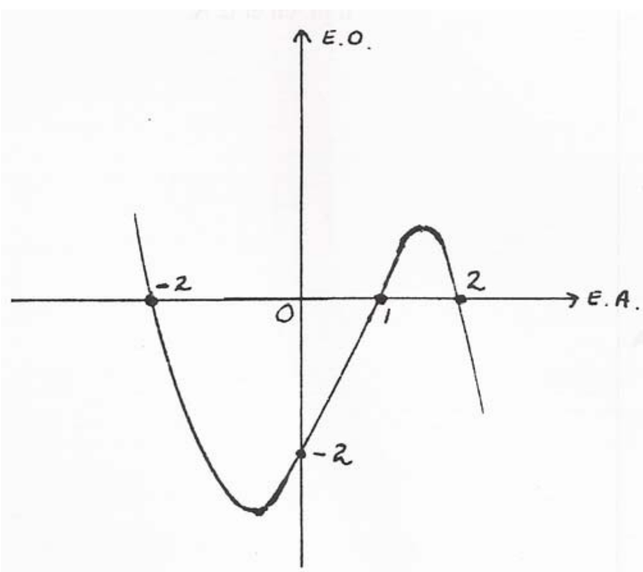


u.m. en el E.A. **el triple** de la u.m. en el E.O.

Justificación

7.

u.m. en el E.A. **igual** a la u.m. en el E.O.



u.m. en el E.A. **un cuarto** de la u.m. en el E.O.

Justificación

II. Contesten cada una de las siguientes preguntas y **expliquen su respuesta lo más detalladamente que les sea posible**.

1. Cuando una gráfica está graficada en **un sistema de coordenadas** cartesianas donde la unidad de medida en el eje de las abscisas **es del mismo tamaño** que la unidad de medida en el eje de las ordenadas **y después, esa misma gráfica** es graficada en **otro sistema de coordenadas** cartesianas donde la unidad de medida en el eje de las abscisas **es mayor** que la unidad de medida en el eje de las ordenadas,

i. ¿qué ***"le sucede"*** a **la gráfica?**

ii. ¿qué ***"le sucede"*** a **la ecuación** asociada a la gráfica?

iii. ¿qué ***"le(s) sucede"*** a **las coordenadas del (de los) punto(s) de intersección** de la gráfica con el **eje de las abscisa**?

iv. ¿qué ***"le(s) sucede"*** a **las coordenadas del (de los) punto(s) de intersección** de la gráfica con el **eje de las ordenadas**?

2. Cuando una gráfica está graficada en **un sistema de coordenadas** cartesianas donde la unidad de medida en el eje de las abscisas **es del mismo tamaño** que la unidad de medida en el eje de las ordenadas **y después, esa misma gráfica** es graficada en **otro sistema de coordenadas** cartesianas donde la unidad de medida en el eje de las abscisas **es menor** que la unidad de medida en el eje de las ordenadas,

i. ¿qué ***"le sucede"*** a **la gráfica?**

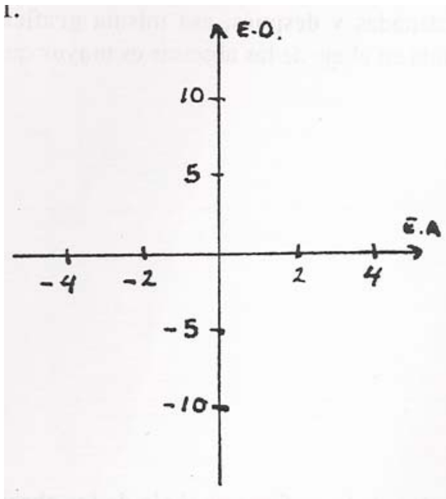
ii. ¿qué ***"le sucede"*** a **la ecuación** asociada a la gráfica?

iii. ¿qué ***"le(s) sucede"*** a **las coordenadas del (de los) punto(s) de intersección** de la gráfica con el **eje de las abscisa**?

iv. ¿qué ***"le(s) sucede"*** a **las coordenadas del (de los) punto(s) de intersección** de la gráfica con el **eje de las ordenadas**?

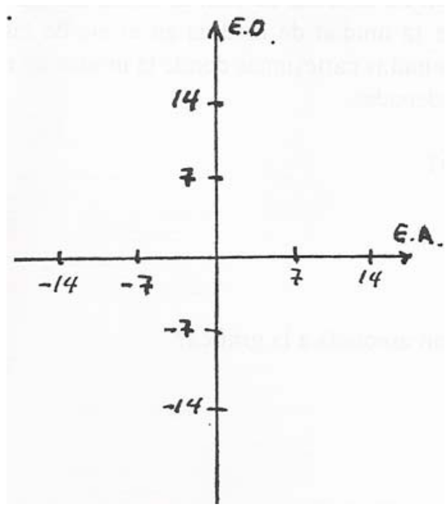
III. Observen **las escalas** de **cada uno** de los siguientes sistemas de coordenadas cartesianas. ¿Qué pueden decir de las **unidades de medida de los ejes** para cada sistema?

1.



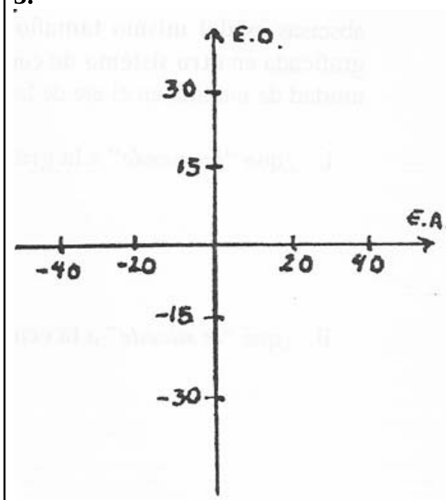
Respuesta

2.



Respuesta

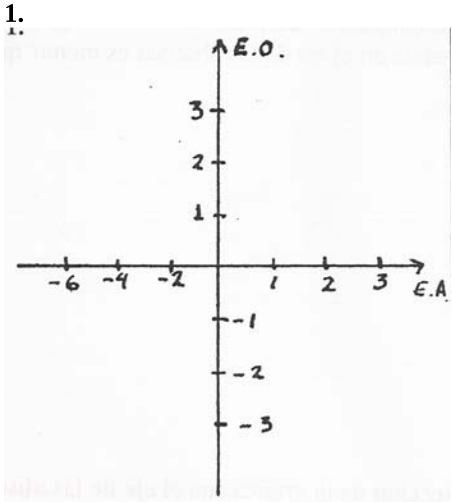
3.



Respuesta

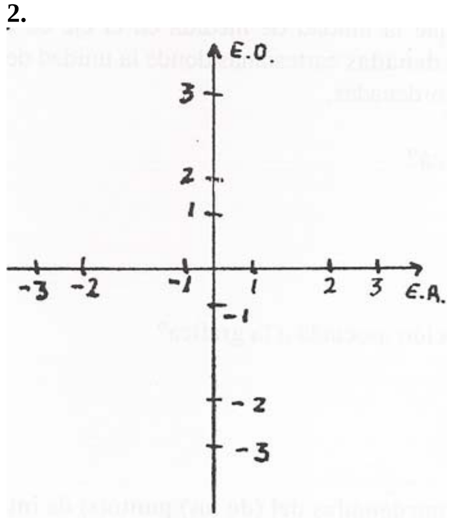
IV. Observen las **escalas** utilizadas en la **construcción** de **cada uno** de los siguientes sistemas de coordenadas. ¿Qué pueden decir **en cada situación**? **Expliquen detalladamente.**

1.



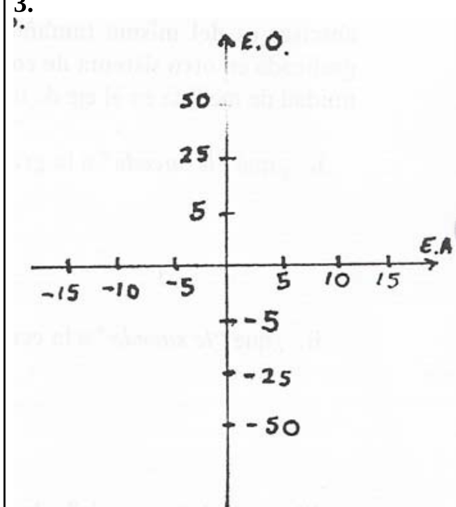
Respuesta

2.



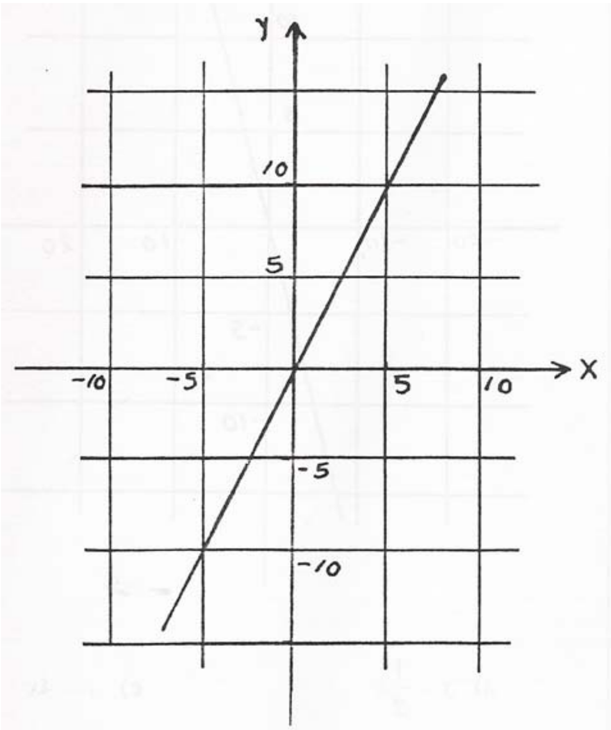
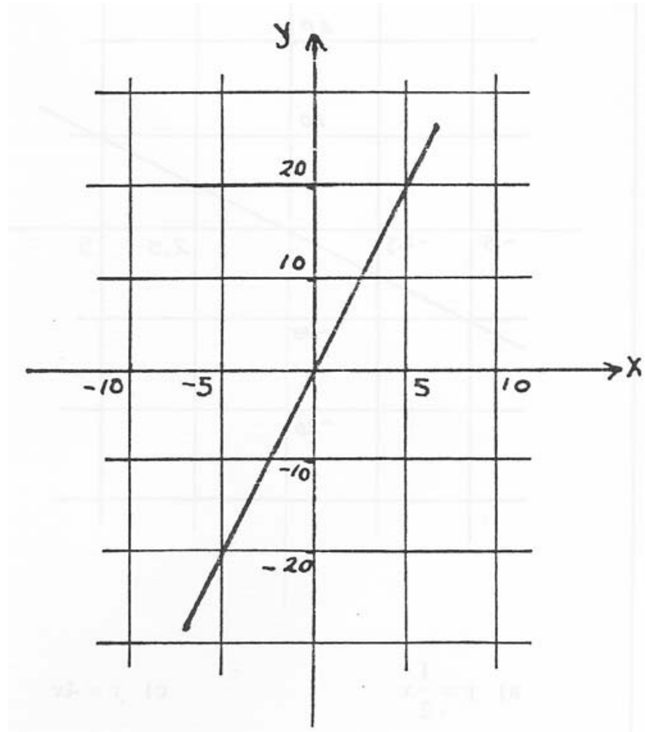
Respuesta

3.

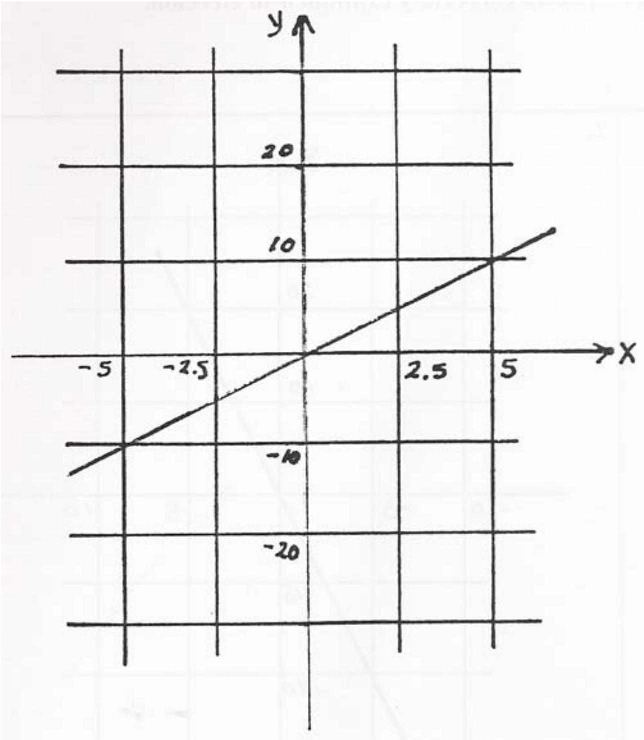


Respuesta

V. Cada una de las siguientes **cuatro rectas** están graficadas en sistemas de coordenadas cartesianas con **escalas diferentes**. ¿Cuál es **la ecuación asociada a cada recta? Tachen la respuesta correcta y expliquen su elección.**

1.	**2.**
	
a) $y = \frac{1}{2}x$ **c)** $y = 4x$	**a)** $y = \frac{1}{2}x$ **c)** $y = 4x$
b) $y = 2x$ **d)** $y = 10x$	**b)** $y = 2x$ **d)** $y = 10x$
Explicación	**Explicación**

3.



a) $y = \frac{1}{2}x$

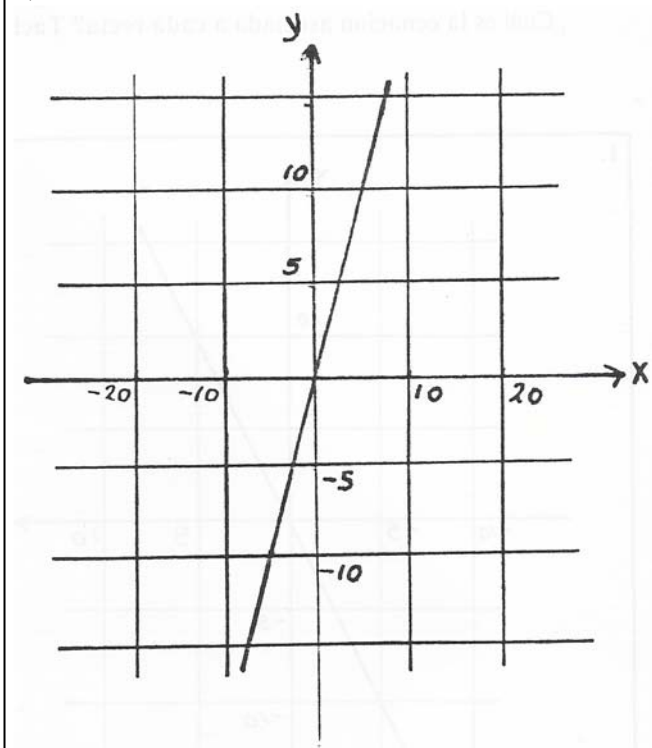
b) $y = 2x$

c) $y = 4x$

d) $y = 10x$

Explicación

4.



a) $y = \frac{1}{2}x$

b) $y = 2x$

c) $y = 4x$

d) $y = 10x$

Explicación

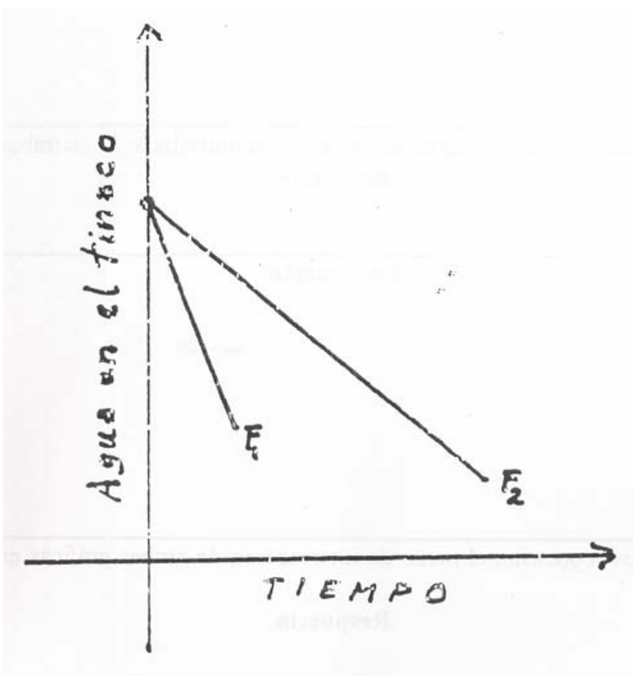
A C T I V I D A D

"Representaciones gráfica y algebraica en contexto"

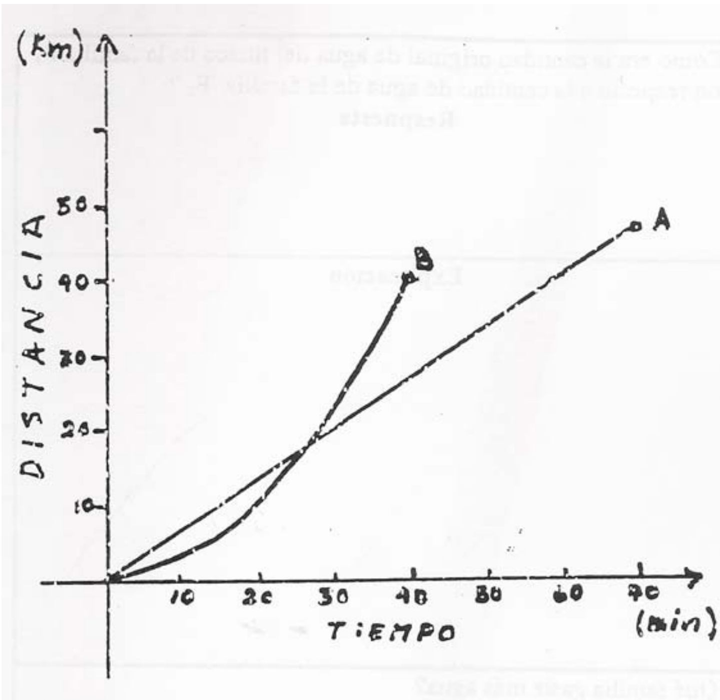
TRABAJO EN EQUIPO

Nombres: ____ Gpo. ________ Nºs. de lista: ______________
Fecha: ______________

1. En el sistema de coordenadas cartesianas que se muestra a continuación, se encuentran los bosquejos de las gráficas que representan la cantidad de agua de dos familias (F_1 y F_2) durante el tiempo que la consumen. Con base a los bosquejos contesta las siguientes preguntas. **Explica tu respuesta**.

<table>
<tr><td rowspan="4">
</td><td>a) ¿Cómo era la cantidad original de agua del tinaco de la familia F_1 con respecto a la cantidad de agua de la familia F_2?
Respuesta</td></tr>
<tr><td>Explicación</td></tr>
<tr><td>b) ¿Qué familia gasta más agua?
Respuesta</td></tr>
<tr><td>Explicación</td></tr>
<tr><td>c) ¿Qué familia gasta más rápidamente el agua?
Respuesta</td><td>d) ¿Qué familia usa más tiempo el agua?</td></tr>
<tr><td>Explicación</td><td>Explicación</td></tr>
</table>

2. Dos automovilistas (A y B) para dirigirse de su casa al trabajo utilizan únicamente vías rápidas. Las gráficas siguientes representan la distancia recorrida durante el tiempo que tardan en llegar a su trabajo. Con base a las gráficas contesta las siguientes preguntas. **Explica tu respuesta**.



a) ¿Cuántos Km recorre el automovilista B para llegar a su trabajo?

Respuesta

Explicación

b) ¿Cuánto tiempo se tarda en llegar el automovilista A a su trabajo?

Respuesta

Explicación

c) ¿Qué automovilista recorre más distancia durante los primeros 30 minutos?

Respuesta

Explicación

e) ¿Qué representa el punto de intersección de ambas gráficas entre sí?

Respuesta

d) ¿A qué automovilista le queda más lejos su trabajo?

Respuesta

Explicación

f) ¿Qué automovilista crees que maneja más rápido?

Respuesta

Explicación

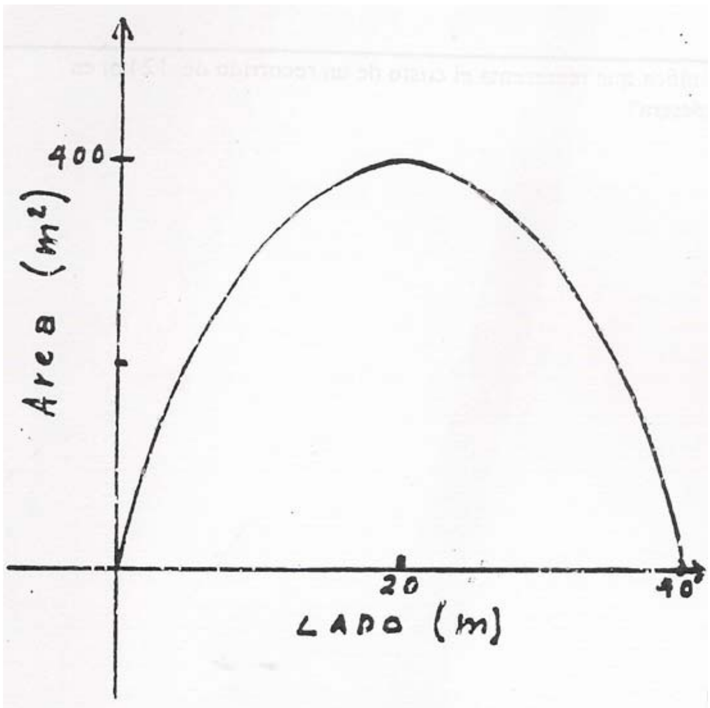
3. Las Tarifas del transporte público (Metro, trolebús, “pesera”, camión) en la Ciudad de México son variables. En un sistema de coordenadas cartesiano haz una gráfica que represente el costo de un recorrido de 12 Km en :

    a) Metro

    b) “Pesera”

a) Gráfica que representa el costo de un recorrido de 12 km en Metro	b) Gráfica que representa el costo de un recorrido de 12 Km en “pesera”
Explicación	**Explicación**

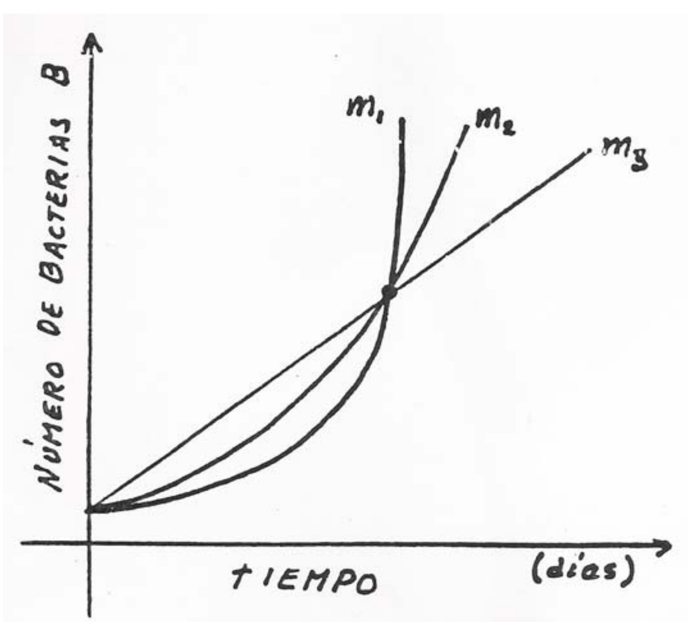
4. A continuación se muestra el bosquejo de la gráfica que representa la variación del área de un rectángulo (de perímetro fijo) con respecto a la longitud de uno de sus lados. ¿Qué información proporciona el bosquejo?



Información

Explicación

5. Los tres bosquejos que se muestran a continuación representan cómo se reproduce la bacteria B en tres medios distintos (m_1, m_2, m_3). ¿Qué información proporcionan los bosquejos?



Información

Explicación

ANEXO 3

ANÁLISIS DE LOS DATOS DE LAS TAREAS 22 Y 23. UN EJEMPLO

Introducción

En este Anexo se ejemplifica, con las Tareas 22 y 23, la forma en que se llevó a cabo el análisis de los datos proporcionados por las Tareas. En términos generales, las respuestas a cada una de las preguntas de dichas tareas se clasificaron, en un primer momento, como correctas y no correctas. Las respuestas fueron etiquetadas como correctas cuando se estimó,

a. por un lado, que la respuesta revelaba que los estudiantes habían centrado su atención en aquellos aspectos que, de acuerdo a la pregunta y por ende a su propósito, eran los elementos relevantes a identificar, en ese momento, en los registros gráfico y algebraico;

b. y por otro, que los términos utilizados al redactar la repuesta eran precisos es decir, sin ambigüedades, imprecisiones o equívocos.

Las respuestas que en una primera instancia fueron etiquetadas como no correctas, se reclasificaron de acuerdo a las categorías que se iban construyendo con base en las respuestas específicas que se estaban analizando en un momento determinado. De esas categorías que se construyeron, las que se presentaron con mayor frecuencia fueron las intituladas *ambiguas*, *imprecisas*, *no relevantes* e *incorrectas*. Una vez clasificadas las respuestas de los estudiantes, se concentran los resultados y se elaboran algunas tablas a fin de comparar dichos resultados.

Las Tareas 22 y 23 responden al nombre de "*Analizando el 1er. y 2° Plano*"; la diferencia entre ellas es la forma de trabajo: la 22 es individual y la 23, en equipo. Por otra parte, como se señala en el Capítulo 4, el término "analizar", en estas dos tareas, tiene la connotación de establecer las diferencias y las similitudes que muestran las ecuaciones y las gráficas (la exigencia del término va en aumento conforme se abordan las Tareas subsecuentes). En el denominado *1er. Plano* se localizan las gráficas asociadas a las ecuaciones $y = x$, $y = 2x$ e $y = \frac{1}{2}x$; mientras que en el *2° Plano*, las asociadas a $y = x$, $y = x + 3$ e $y = x - 3$. Por lo anterior, dichas tarea constan de dos grandes partes; la primera de ellas consiste en establecer las diferencias y las similitudes en las ecuaciones y las gráficas del llamado *1er. Plano* y la segunda, lo mismo pero, para el *2° Plano*; de aquí que, la presentación del análisis de los datos proporcionados por dichas tareas se realiza en estos términos.

1ER. PLANO
PRIMERA PARTE DE LA TAREA 22. INDIVIDUAL

1er. PLANO. Diferencias en ecuaciones

Nº total de alumnos: 58(30+28)

No contestaron: 3 (1+2) *≈5.17%*

Correctas: 50 ≈86.21% (de 58) *o ≈90.91%* (de 55)

“Coeficiente de la v.i.”: 32 (16+🕛 + 14) ≈ 55.17% (de 58) o ≈ 58.18% (de 55) o ≈ 64% (de 50)

“Valor del coeficiente de la v.i.”: 18 (7+11) ≈ 31.03% (de 58) o ≈ 32.73% (de 55) o ≈ 36% (de 50)

Diferentes valores de “a”: 7 ≈ 12.07% (de 58) o ≈ 12.73% (de 55) o ≈ 14% (de 50)

Explícitos: 5 (4+1) ≈ 8.62% (de 58) o ≈ 9.1% (de 55) o ≈ 10% (de 50) o ≈ 71.43% (de 7)

Nota: De los cinco alumnos que hicieron explícitos los tres valores de “*a*”, uno de ellos anotó incorrectamente uno de los valores de “*a*”: $a = 1$ en lugar de $a = 1/2$.

Implícitos: 2 (2+0) ≈ 3.45% (de 58) o ≈ 3.64% (de 55) o ≈ 4% (de 50) o ≈ 28.57% (de 7)

Imprecisas: 4 ≈6.89% (de 58) *o ≈7.27%* (de 55)

“Coeficiente”: 3 (3+0) ≈ 5.17% (de 58) o ≈ 5.45% (de 55) o ≈ 75% (de 4)

“Valor del coeficiente”: 1 (0+1) ≈ 1.72% (de 58) o ≈ 1.82% (de 55) o ≈ 25% (de 4)

Imprecisas-Incorrectas: 1 ≈1.72% (de 58) *o ≈1.82%* (de 55)

“Coeficiente de las ecuaciones”: 1 (0+1) ≈ 1.72% (de 58) o ≈ 1.82% (de 55)

Incorrectas: 3 ≈5.17% (de 58) *o ≈5.45%* (de 55)

“Término independiente”: 2 (1+1) ≈ 3.45% (de 58) o ≈ 3.64% (de 55) o ≈ 66.67% (de 3)

“Signo del la v.i.”: 1 (1+0) ≈ 1.72% (de 58) o ≈ 1.82% (de 55) o ≈ 33.33% (de 3)

Número de diferencias en ecuaciones

Nº de diferencias *enunciadas*	Frecuencia (número de alumnos)
1	45 (21+24)
4	7 (6+1)
2	3 (2+1)
0	3 (1+2)

Nº de diferencias *correctas*	Frecuencia (número de alumnos)
1	44 (20+24)
4	5 (4+1)
3	2 (2+0)
0	4 (3+1)

El número ideal de diferencias en ecuaciones que se esperaría que cada estudiante enunciara correctamente es *cuatro*. De aquí que, teóricamente hablando, si los 58 estudiantes realizaran un trabajo perfecto se tendría un total de 232 diferencias enunciadas y, naturalmente, todas ellas correctas.

El número ideal que se espera que los estudiantes enuncien correctamente se le denomina, de aquí en adelante, *diferencias teóricas* o *similitudes teóricas*, según sea el caso.

1er. Plano. Diferencias en ecuaciones: Concentrado

Total de estudiantes:	58
Estudiantes que contestaron:	55 ≈ 94.83%
Teóricas por cada estudiante:	4
Teóricas de los 58 estudiantes:	232
Teóricas de 55 estudiantes:	220
Enunciadas:	79 ≈ 34.05% (de 232) o ≈ 35.9% (de 220)
Correctas:	70 ≈ 30.17% (de 232) o ≈ 31.82% (de 220) o ≈ 88.61% (de 79)
Imprecisas:	4 ≈ 1.72% (de 232) o ≈ 1.84% (de 220) o ≈ 5.06% (de 79)
Imprecisas-incorrectas:	1 ≈ 0.43% (de 232) o ≈ 0.45% (de 220) o ≈ 1.27% (de 79)
Incorrectas:	4 ≈ 1.72% (de 232) o ≈ 1.84% (de 220) o ≈ 5.06% (de 79)

1er. Plano. Diferencias en gráficas

Nº total de alumnos: 58 (30+28)

No contestaron: 1 *(1+0)* *≈1.72%*

Correctas: 39 ≈ 67.24% (de 58) o ≈ 68.42% (de 57)

“Inclinación”: 35 (17+🕚 + 16) ≈ 60.34% (de 58) o ≈ 61.4% (de 57) o ≈ 89.74% (de 39)

“Grado de inclinación”: 2 (2+0) ≈ 3.45% (de 58) o ≈ 3.51% (de 57) o ≈ 5.13% (de 39)

“Ángulo de inclinación”: 1 (1+0) ≈ 1.72% (de 58) o ≈ 1.75% (de 57) o ≈ 2.56% (de 39)

“Pendiente”: 1 (0+1) ≈ 1.72% (de 58) o ≈ 1.75% (de 57) o ≈ 2.56% (de 39)

Diferentes valores de “α”: 2 ≈ 3.45% (de 58) *o ≈ 3.51%* (de 57) *o ≈ 5.13%* (de 39)

Explícitos: 1 (1+0) ≈ 1.72% (de 58) o ≈1.75% (de 57) o ≈ 2.56% (de 39) o =50% (de 2)

Implícitos: 1 (1+0) ≈ 1.72% (de 58) o ≈1.75% (de 57) o ≈ 2.56% (de 39) o =50% (de 2)

No relevantes: 2 ≈ 3.45% (de 58) o ≈ 3.51% (de 57)

“Puntos por los que atraviesan (excepto el cero)”: 2 (1) (1+1) ≈ 3.45% (de 58) o ≈ 3.51% (de 57)

Imprecisas: 17 ≈ 29.31% (de 58) o ≈ 29.82% (de 57)

“Posición”: 17 (7+10) ≈ 29.31% (de 58) o ≈ 29.82% (de 57)

Utilizan “posición” y justifican: 4 (0+4) ≈ 6.9% (de 58) o ≈ 7.02% (de 57) o ≈ 23.53% (de 17)

Utilizan “posición” y *no* justifican: 13 (7+6) ≈22.41% (de 58) o ≈ 22.81% (de 57) o ≈ 76.47% (de 17)

Ambiguas: 2 ≈ 3.45% (de 58) o ≈ 3.51% (de 57)

“Sentido”: 1 (0+1) ≈ 1.72% (de 58) o ≈ 1.75% (de 57) o =50%(de 2)

“Dirección”: 1 (0+1) ≈ 1.72% (de 58) o ≈ 1.75% (de 57) o =50%(de 2)

Incorrectas: 12 ≈ 20.69% (de 58) o ≈ 21.05% (de 57)

Por “engaño visual”: 10 ≈ 17.24% (de 58) o ≈ 17.54% (de 57) o ≈ 83.33% (de 12)

“Tamaño”: 7 (1+6) ≈ 12.07% (de 58) o ≈ 12.2% (de 57) o ≈ 58.33% (de 12) o ≈ 70% (de 10)

“Distancia del primer al último punto”: 1 (0+1) ≈ 1.72% (de 58) o ≈1.75% (de 57) o ≈8.33% (de 12)

“Punto mínimo y máximo”: 1 (1+0) ≈ 1.72% (de 58) o ≈ 1.75% (de 57) o ≈ 8.33% (de 12)

“A diferente distancia sus puntos”: 1 (1+0) ≈ 1.72% (de 58) o ≈ 1.75% (de 57) o ≈ 8.33% (de 12)

Por “propiedad”: 2 ≈ 3.45% (de 58) o ≈ 3.51% (de 57)

“No paralelas entre si”: 2 (0+2) ≈ 3.45% (de 58) o ≈ 3.51% (de 57)

Número de diferencias en gráficas

Nº de diferencias *enunciadas*	Frecuencia (número de alumnos)
1	40(23+27)
2	15(4+11)
4	2(2+0)
0	1(1+0)

Nº de diferencias *correctas*	Frecuencia (número de alumnos)
1	35(18+17)
0	19(8+11)
4	2(2+0)
2	1(1+0)

1er. Plano. Diferencias en gráficas: Concentrado

Total de estudiantes:	58
Estudiantes que contestaron:	57 ≈ 98.28%
Teóricas por cada estudiante:	4
Teóricas de los 58 estudiantes:	232
Teóricas de 57 estudiantes:	228
Enunciadas:	78 ≈ 33.62% (de 232) o ≈ 34.21% (de 228)
Correctas:	45 ≈ 19.4% (de 232) o ≈ 19.74% (de 228) o ≈ 57.7% (de 78)
No relevantes:	2 ≈ 0.86% (de 232) o ≈ 0.88% (de 228) o ≈ 2.56% (de 78)
Imprecisas:	17 ≈ 7.33% (de 232) o ≈ 7.46% (de 228) o ≈ 21.8% (de 78)
Ambiguas:	2 ≈ 0.86% (de 232) o ≈ 0.88% (de 228) o ≈ 2.56% (de 78)
Incorrectas:	12 ≈ 5.17% (de 232) o ≈ 5.26% (de 228) o ≈ 15.38% (de 78)

1er. Plano. Similitudes en ecuaciones

Nº total de alumnos: 58 (30+28)

No contestaron: 2 (1+1) *≈3.45%*

Correctas

“Dos variables”: 53 (29 + 23+🕘) ≈ 91.38% (de 58) o ≈ 94.64% (de 56)

“Exponente de la v.i. igual a uno”: 48 (20+🕛 + 19+👆) ≈ 82.76% (de 58) o ≈ 85.71% (de 56)

“Variable dependiente despejada”: 45 (22 + 23) ≈ 77.59% (de 58) o ≈ 80.36% (de 56)

“Signo del coeficiente de la v.i.”: 19 (12+🕛 + 5) ≈ 32.76% (de 58) o ≈ 33.93% (de 56)

Referencia al “término independiente”: 19 (7 + 10+🕛) ≈ 32.76% (de 58) o ≈ 33.92% (de 56)

“El término independiente es cero”: 13 (7+6) ≈ 22.41% (de 58) o ≈ 23.21% (de 56)

"Término independiente": 4 (0+4) ≈ 6.9% (de 58) o ≈ 7.14% (de 56)

"Valor del término independiente": 2 (0 + 🕛) ≈ 3.45% (de 58) o ≈ 3.57% (de 56)

No relevantes: 1 ≈ 1.72% (de 58) o ≈ 1.79% (de 56)

"Dominio los Reales": 1 (0+1) ≈ 1.72% (de 58) o ≈ 1.79% (de 56)

"Pleonasmo matemático": 4 ≈ 6.9% (de 58) o ≈ 7.14% (de 56)

"v.d. despejada y exponente de la v.d. y/o coeficiente de la v.d. igual a uno": 4 (1+3) ≈ 6.9% (de 58) o ≈ 7.14% (de 56)

Imprecisas-Incorrectas : 4 ≈ 6.9% (de 58) o ≈ 7.14% (de 56)

"Exponentes de las variables": 1 (0+1) ≈ 1.72% (de 58) o ≈ 1.79% (de 56) o = 25% (de 4)

"No tienen t.i.": 1 (0+1) ≈ 1.72% (de 58) o ≈ 1.79% (de 56) o = 25% (de 4)

"Coeficiente de la v.d. igual a uno": 1 (0+1) ≈ 1.72% (de 58) o ≈ 1.79% (de 56) o = 25% (de 4)

"Exponente de la v.d. igual a uno": 1 (0+1) ≈ 1.72% (de 58) o ≈ 1.79% (de 56) o = 25% (de 4)

Incorrectas: 2 ≈ 3.45% (de 58) o ≈ 3.57% (de 56)

"El t.i. es uno": 1 (1+0) ≈ 1.72% (de 58) o ≈ 1.79% (de 56) o = 50% (de 2)

"El coeficiente de la v.i. es uno": 1 (1+0) ≈ 1.72% (de 58) o ≈ 1.79% (de 56) o = 50% (de 2)

Número de similitudes en ecuaciones

Nº de similitudes *enunciadas*	Frecuencia (número de alumnos)
3	24(12+12)
4	18(7+11)
5	8(5+3)
2	5(4+1)
1	1(1+0)
0	2(1+1)

Nº de similitudes *correctas*	Frecuencia (número de alumnos)
3	22(11+11)
4	16(6+10)
2	8(6+2)
5	7(5+2)
1	3(1+2)

1er. Plano. Similitudes en ecuaciones: CONCENTRADO

Total de estudiantes:	58
Estudiantes que contestaron:	56 ≈ 96.55%
Teóricas por cada estudiante:	5
Teóricas de los 58 estudiantes:	290
Teóricas de 56 estudiantes:	280
Enunciadas:	195 ≈ 67.24% (de 290) o ≈ 69.64% (de 280)
Correctas:	184 ≈ 63.45% (de 290) o ≈ 65.71% (de 280) o ≈94.36% (de 195)
No relevantes:	1 ≈ 0.34% (de 290) o ≈ 0.36% (de 280) o ≈ 0.51% (de 195)
“Pleonasmo matemático”:	4 ≈ 1.38% (de 290) o ≈ 1.43% (de 280) o ≈ 2.05% (de 195)
Imprecisas-incorrectas:	4 ≈ 1.38% (de 290) o ≈ 1.43% (de 280) o ≈ 2.05% (de 195)
Incorrectas:	2 ≈ 0.69% (de 290) o ≈ 0.71% (de 280) o ≈ 1.03% (de 195)

1er. PLANO. Similitudes en gráficas

Nº total de alumnos: 58 (30+28)

No contestaron: 0

Correctas

“Están en un Plano Cartesiano”: 49 (26+23) ≈ 84.48% (de 58)

“Continuas e infinitas”: 46 (20+🕚 + 21+🕛) ≈ 79.31% (de 58)

“Rectas”: 45 (23 + 9+🕛) ≈ 77.59% (de 58)

“Pasan por el origen”: 29 (7+➷ + 12+➷) = 50% (de 58)

“Cuadrantes I y III”: 5 (0 + 2+🕛) ≈ 8.62% (de 58)

“Inclinadas a la derecha”: 1 (1+0) ≈ 1.72% (de 58)

“No paralelas a los ejes”: 1 (0+1) ≈ 1.72% (de 58)

No relevantes: 1 ≈ 1.72% (de 58)

“Tienen como eje de abscisas a ‘x’ y como eje de ordenadas a ‘y’”: 1 (1+0) ≈ 1.72% (de 58)

Por inferencia: 1 ≈ 1.72% (de 58)

“Dominio de la función está en los Reales”: 1 (0+1) ≈ 1.72% (de 58)

Mezcladas: 1 ≈ 1.72% (de 58)

"Tienen una ecuación": 1 (0+1) ≈ 1.72% (de 58)

Imprecisas: 9 ≈ 15.52% (de 58)

"Posición": 2 (1+1) ≈ 3.45% (de 58) o ≈ 22.22% (de 9)

"Se intersectan (en el mismo punto)": 2(1) (0+2) ≈ 3.45% (de 58) o ≈ 22.22% (de 9)

"Inclinadas hacia el mismo lado": 1 (1+0) ≈ 1.72% (de 58) o ≈ 11.11% (de 9)

"Todas se cruzan": 1 (1+0) ≈ 1.72% (de 58) o ≈ 11.11% (de 9)

"Cortan al eje de las ordenadas": 1 (0+1) ≈ 1.72% (de 58) o ≈ 11.11% (de 9)

"Punto de intersección": 1 (0+1) ≈ 1.72% (de 58) o ≈ 11.11% (de 9)

"No paralelas": 1 (0+1) ≈ 1.72% (de 58) o ≈ 11.11% (de 9)

Ambiguas: 7 ≈ 12.07% (de 58)

"Misma dirección": 2 (2+0) ≈ 3.45% (de 58) o ≈ 28.5% (de 7)

"Comienzan en los negativos y terminan en los positivos": 1(1+0) ≈1.72% (de 58) o ≈14.3% (de 7)

"Están en diagonal": 1 (1+0) ≈ 1.72% (de 58) o ≈ 14.3% (de 7)

"Sentido": 1 (0+1) ≈ 1.72% (de 58) o ≈ 14.3% (de 7)

"Tienen un punto igual al coeficiente de la v.i.": 1 (0+1) ≈ 1.72% (de 58) o ≈ 14.3% (de 7)

"Van de un valor positivo a un negativo": 1 (0+1) ≈ 1.72% (de 58) o ≈ 14.3% (de 7)

Incorrectas: 2 ≈ 3.45% (de 58)

"Pasan necesariamente por Cuadrantes II y IV": 1 (1+0) ≈ 1.72% (de 58) o = 50% (de 2)

"Finitas": 1 (0+1) ≈ 1.72% (de 58) o = 50% (de 2)

Número de similitudes en gráficas

Nº de similitudes *enunciadas*	Frecuencia (número de alumnos)
3	25(15+10)
4	13(5+8)
2	9(6+3)
5	9(3+6)
1	1(1+0)
6	1(0+1)

Nº de similitudes *correctas*	Frecuencia (número de alumnos)
3	27(14+13)
4	14(6+8)
2	12(9+3)
5	3(0+3)
0	2(1+1)

1er. Plano. Similitudes en gráficas: CONCENTRADO

Total de estudiantes:	58
Estudiantes que contestaron:	58 = 100%
Teóricas por cada estudiante:	6
Teóricas de los 58 estudiantes:	348
Enunciadas:	197 ≈ 56.61% (de 348)
Correctas:	176 ≈ 50.57% (de 348) o ≈ 89.34% (de 197)
No relevantes:	1 ≈ 0.29% (de 348) o ≈ 0.51% (de 197)
Por inferencia:	1 ≈ 0.29% (de 348) o ≈ 0.51% (de 197)
Imprecisas:	9 ≈ 2.59% (de 348) o ≈ 4.57% (de 197)
Mezcladas:	1 ≈ 0.29% (de 348) o ≈ 0.51% (de 197)
Ambiguas:	7 ≈ 2.01% (de 348) o ≈ 3.55% (de 197)
Incorrectas:	2 ≈ 0.57% (de 348) o ≈ 1.01% (de 197)

1er. PLANO. Diferencias y similitudes en ecuaciones y gráficas.

Nº total de alumnos: 58 (30+28)

Diferencias en ecuaciones vs. diferencias en gráficas

	Ecuaciones	Gráficas
Teóricas	232	232
Enunciadas	79 ≈ 34.05% (de 232)	78 ≈ 33.62% (de 232)
Correctas	70 ≈ 30.17% (de 232) o ≈ 88.61% (de 79)	45 ≈ 19.4% (de 232) o ≈ 57.69% (de 78)
No relevantes	0	2 ≈ 0.86% (de 232) o ≈ 2.56% (de 78)
Imprecisas	4 ≈ 1.72% (de 232) o ≈ 5.06% (de 79)	17 ≈ 7.33% (de 232) o ≈ 21.8% (de 78)
Ambiguas	0	2 ≈ 0.86% (de 232) o ≈ 2.56% (de 78)
Imprecisas-incorrectas	1 ≈ 0.43% (de 232) o ≈ 1.27% (de 79)	0
Incorrectas	4 ≈ 1.72% (de 232) o ≈ 5.06% (de 79)	12 ≈ 5.17% (de 232) o ≈ 15.39% (de 78)

Similitudes en ecuaciones vs. similitudes en gráficas

	Ecuaciones	Gráficas
Teóricas	290	348
Heredadas*	174	174
Nuevas*	116	174
Enunciadas	195 ≈ 67.24% (de 290)	197 ≈ 56.61% (de 348)
Correctas	184 ≈ 63.45% (de 290) o ≈ 94.36% (de 195)	176 ≈ 50.57% (de 348) o ≈ 89.34% (de 197)
Heredadas*	146 ≈ 83.91% (de 174) o ≈ 79.35% (de 184)	141 ≈ 81.03% (de 174) o ≈ 80.11% (de 176)
Nuevas*	38 ≈ 32.76% (de 116) o ≈ 20.65% (de 184)	35 ≈ 20.11% (de 174) o ≈ 19.89% (de 176)
No relevantes	1 ≈ 0.34% (de 290) o ≈ 0.51% (de 195)	1 ≈ 0.29% (de 348) o ≈ 0.51% (de 197)
Por inferencia	0	1 ≈ 0.29% (de 348) o ≈ 0.51% (de 197)
Mezcladas	0	1 ≈ 0.29% (de 348) o ≈ 0.51% (de 197)
“Pleonasmo matemático”	4 ≈ 1.38% (de 290) o ≈ 2.05% (de 195)	0
Imprecisas	0	9 ≈ 2.59% (de 348) o ≈ 4.57% (de 197)
Ambiguas	0	7 ≈ 2.01% (de 348) o ≈ 3.55% (de 197)
Imprecisas-incorrectas	4 ≈ 1.38% (de 290) o ≈ 2.05% (de 195)	0
Incorrectas	2 ≈ 0.69% (de 290) o ≈ 1.03% (de 195)	2 ≈ 0.57% (de 348) o ≈ 1.01% (de 197)

* Las similitudes que presentan tanto las ecuaciones como las gráficas del 1er. Plano se pueden dividir en dos: las que “heredan” de los análisis anteriores (similitudes entre bloques y similitudes entre columnas) y las que son propias de este Plano. Las primeras son denominadas *heredadas* y las segundas, *nuevas*.

A la luz de los resultados mostrados en las dos tablas anteriores, es posible afirmar que, en general, los estudiantes muestran un *mejor desempeño* al trabajar con *ecuaciones* que con *gráficas*. En el caso de las *diferencias* la *mejoría es significativa*: además de los resultados mostrados en la tabla correspondiente a las diferencias, de los 58 estudiantes, 50 (≈ 86.21%) contestaron correctamente las diferencias en *ecuaciones* y 39 alumnos (≈ 67.24%), las diferencias en *gráficas*. En relación a las similitudes, el rendimiento de los alumnos fue *ligeramente mejor* en *ecuaciones* que en *gráficas*.

COMENTARIO: *Probablemente el desempeño que mostraron los estudiantes en ecuaciones y en gráficas sea contrario a lo esperado. Uno pensaría que es "más fácil" visualizar las similitudes y las diferencias en gráficas que en ecuaciones. Pero, al parecer no es así, o tal vez lo sea, y el problema no radique en la visualización sino en la forma de registrar por escrito el producto de su observación. Es decir, probablemente los estudiantes detecten con mayor facilidad las diferencias (o similitudes) en las gráficas pero no cuentan con el vocabulario adecuado para expresar lo observado (véase en las tablas anteriores, por ejemplo, el número de diferencias o similitudes imprecisas en gráficas y compárelas con las de las ecuaciones). De cualquier forma, el hecho real es que los alumnos tienen un mejor rendimiento en ecuaciones que en gráficas.*

Otros resultados que se obtienen del trabajo de los estudiantes son los siguientes:

- *Ninguna* de las similitudes heredadas, en ecuaciones y gráficas, fue enunciada por *todos* los alumnos.

- De los 58 estudiantes, 39 (≈ 67.24%) registraron las tres similitudes heredadas en ecuaciones y 32 (≈ 55.17%), las tres similitudes heredadas en gráficas.

- Las dos nuevas similitudes en ecuaciones sólo fueron registradas por *nueve* estudiantes (≈16.07%), mientras que *ninguno* enunció las tres nuevas similitudes en gráficas y únicamente *cuatro* (≈ 7.14%) anotaron dos de ellas.

- Al comparar las respuestas de los estudiantes en similitudes y diferencias se observa, que de los *siete* alumnos que manifiestan que una de las diferencias en gráficas es el *"tamaño"*, *seis* de ellos registran, en el apartado de similitudes, que las gráficas son infinitas.

  COMENTARIO: *Al parecer, en estos seis estudiantes "pesa más", en un momento determinado, su experiencia inmediata (la observación del dibujo de sus tres gráficas en el denominado 1er. Plano, en las que unas son "más grandes" que otras) que su conocimiento teórico (todas son infinitas) que trasciende la experiencia inmediata.*

- 50 estudiantes (≈ 86.21%) expresan que la diferencia en ecuaciones es "el valor del coeficiente de la v.i." o simplemente, "el coeficiente de la v.i.". Mientras que, sólo 19 alumnos (≈ 32.76%) registran la nueva similitud en ecuaciones referente al "signo del coeficiente de la v.i.".

  COMENTARIO: *El signo del coeficiente de la variable independiente es una similitud importante en las ecuaciones bajo estudio. Ella se correlaciona con los cuadrantes por los que necesariamente pasan las rectas o bien con que el ángulo que forman dichas rectas con la parte positiva del eje de las abscisas es agudo. Sin embargo, es posible que dicha similitud no se detecte como tal debido a que los coeficientes de la variable independiente son numéricamente diferentes (diferencia en ecuaciones). Al parecer, la similitud fue eclipsada por la diferencia.*

- Únicamente *cinco* alumnos (≈ 8.62%) enuncian que una similitud de las gráficas es los cuadrantes por los que pasan y *ninguno* menciona la similitud de que el ángulo que forman las rectas con la parte positiva del eje de las abscisas (α) es agudo.

COMENTARIO: *Estas dos similitudes en gráficas son, como se menciona renglones arriba, la contraparte geométrica del hecho de que el signo del coeficiente de la variable independiente es positivo (similitud en ecuaciones). No registrar dichas similitudes en gráficas, limita la articulación de registros de representación. Al parecer, en esta ocasión, nuevamente, el hecho de que la diferencia en gráficas sea el valor de α eclipsó totalmente la similitud que tienen las gráficas en el sentido de que el ángulo que forman con la parte positiva del eje de las abscisas (α) es agudo.*

- 19 estudiantes (≈ 32.76%) señalan que “el término independiente es cero” como una similitud en ecuaciones. Mientras que 29 (50%), establecen que una similitud en gráficas es que “las rectas pasan por el origen”.

COMENTARIO: *Al parecer, en esta situación es más fácil trabajar en el registro de representación gráfico que en el algebraico.*

- Aunque en la Tarea que nos ocupa en esta ocasión, no se les solicitó a los estudiantes que correlacionaran, *cuatro* (≈ 6.9%) correlacionaron las diferencias y *tres* (≈ 3.53%), las similitudes. De las *siete* correlaciones, *tres* fueron incompletas: *una* en diferencias y *dos* en similitudes.

1ER. PLANO
PRIMERA PARTE DE LA TAREA 23. EQUIPOS

1er. PLANO. Diferencias en ecuaciones

Nº total de equipos: 17 (9+8)

No contestaron: 0

Correctas: 16 ≈ 94.12% (de 17)

"Valor del coeficiente de la v.i.": 11 (5+ 6) ≈ 64.7% (de 17) o ≈ 68.75% (de 16)

"Coeficiente de la v.i.": 5 (4+1) ≈ 29.41% (de 17) o ≈ 31.25% (de 16)

Diferentes valores de "a": 7 ≈ 41.18% (de 17) o ≈ 43.75% (de 16)

Explícitos: 5 (4+1) ≈ 29.41% (de 17) o ≈ 31.25% (de 16) o ≈ 71.43% (de 7)

Implícitos: 2 (2+0) ≈ 11.76% (de 17) o ≈ 12.5% (de 16) o ≈ 28.57% (de 7)

Imprecisas: 1 ≈ 5.88% (de 17)

"Coeficiente de la variable": 1 (0+1) ≈ 5.88% (de 17)

Número de diferencias en ecuaciones

Nº de diferencias *enunciadas*	Frecuencia (número de equipos)
1	10(3+7)
4	7(6+1)

Nº de diferencias *correctas*	Frecuencia (número de equipos)
1	9(3+6)
4	7(6+1)
0	1(0+1)

1er. Plano. Diferencias en ecuaciones. CONCENTRADO

Total de equipos:	17
Equipos que contestaron:	17 = 100%
Teóricas por cada equipo:	4
Teóricas de los 17 equipos:	68
Enunciadas:	38 ≈ 55.88% (de 68)
Correctas:	37 ≈ 54.41% (de 68) o ≈ 97.37% (de 38)
Imprecisas:	1 ≈ 1.47% (de 68) o ≈ 2.63% (de 38)

1er. PLANO. Diferencias en gráficas

Nº total de equipos: 17 (9+8)

No contestaron: 0

Correctas: 17 = 100%

"α": 6 (4+2) ≈ 35.3% (de 17)

"Ángulo de inclinación": 5 (1 + 2+🕚) ≈ 29.41% (de 17)

"Inclinación": 3 (3 +0) ≈ 17.65% (de 17)

"Valor de α": 3 (1+2) ≈ 17.65% (de 17)

"Grado de inclinación": 1 (1+0) ≈ 5.88% (de 17)

Nota: Un equipo dió dos respuestas correctas: "Valor de α" e "inclinación"

Diferentes valores de "α": 5 ≈ 29.41% (de 17)

Explícitos: 4 (3+1) ≈ 23.53% (de 17) o ≈ 80% (de 5)

Implícitos: 1 (1+0) ≈ 5.88% (de 17) o ≈ 20% (de 5)

Imprecisas: 1 ≈5.88% (de 17)

"Posición": 1 (0+1) ≈ 5.88% (de 17)

Nota: Utiliza "posición" y justifica

Incorrectas: 2 ≈11.76% (de 17)

Por "engaño visual": 1 ≈ 5.88% (de 17) o = 50% (de 2)

"Tamaño": 1 (0+1) ≈ 5.88% (de 17) o = 50% (de 2)

Por "similitud": 1 ≈ 5.88% (de 17) o = 50% (de 2)

"Menores de 90° [y] mayores que 0°": 1 (0+1) ≈ 5.88% (de 17) o = 50% (de 2)

Número de diferencias en gráficas

Nº de diferencias *enunciadas*	Frecuencia (número de equipos)
1	8(4+4)
4	5(4+1)
2	4(1+3)

Nº de diferencias *correctas*	Frecuencia (número de equipos)
1	11(4+7)
4	5(4+1)
2	1(1+0)

1er. Plano. Diferencias en gráficas. Concentrado

Total de equipos:	17
Equipos que contestaron:	17 = 100%
Teóricas por cada equipo:	4
Teóricas de los 17 equipos:	68
Enunciadas:	36 ≈ 52.94% (de 68)
Correctas:	33 ≈ 48.53% (de 68) o ≈ 91.67% (de 36)
Imprecisas:	1 ≈ 1.47% (de 68) o ≈ 2.78% (de 36)
Incorrectas:	2 ≈ 2.94% (de 68) o ≈ 5.55% (de 36)

1er. Plano. *Correlaciones* entre *diferencias*

Nota: Las correlaciones en esta Tarea 23 no eran obligatorias.

Nº total de equipos: 17 (9+8)

No correlacionan: 3(1+2) *≈17.65% (de 17)*

Correlacionan: 14 (8+6) (*≈82.35% (de 17)*

Correctas: 13 (7+6) ≈ 76.47% (de 17) o ≈ 92.86% (de 14)

Incorrectas: 1 (1+0) ≈ 5.88% (de 17) o ≈ 7.14% (de 14)

1er. Plano. Similitudes en ecuaciones

Nº total de equipos: 17 (9+8)

No contestaron: 0

Correctas

"Variable dependiente despejada": 17 (9+8) = 100%

"Dos variables": 16 (9+7) ≈ 94.18% (de 17)

"Exponente de la v.i. igual a uno": 13 (6+🕚 + 5+🕚) ≈ 76.47% (de 17)

"Signo del coeficiente de la v.i.": 13 (8+5) ≈ 76.47% (de 17)

Referencia al "término independiente": 12 (4+8) ≈ 70.59% (de 17)

"El término independiente es cero": 10 (4+6) ≈ 58.82% (de 17) o ≈ 83.33% (de 12)

"Valor del término independiente igual a cero": 2 (0 +2) ≈ 11.77% (de 17) o ≈ 16.67% (de 12)

"Valor del coeficiente de la v.i. diferente de cero": 1 (0+1) ≈ 5.88% (de 17)

No relevantes: 1 ≈ 5.88% (de 17)

"Dominio los Reales": 1 (0+1) ≈ 5.88% (de 17)

Imprecisas: 1 ≈ 5.88% (de 17)

"La variable independiente tiene signo positivo": 1 (0+1) ≈ 5.88% (de 17)

Incorrectas: 3 ≈ 17.65% (de 17)

"Coeficiente de la v.i. (igual a) uno": 3 (2) (1+2) ≈ 17.65% (de 17)

Número de similitudes en ecuaciones

Nº de similitudes *enunciadas*	Frecuencia (número de equipos)
5	7(4+3)
4	6(3+3)
3	2(2+0)
6	2(0+2)

Nº de similitudes *correctas*	Frecuencia (número de equipos)
4	7(4+3)
5	6(3+3)
3	2(2+0)
6	1(0+1)
2	1(0+1)

1er. Plano. Similitudes en ecuaciones. Concentrado

Total de equipos:	17
Equipos que contestaron:	17 = 100%
Teóricas por cada equipo:	5
Teóricas de los 17 equipos:	85
Enunciadas:	77 ≈ 90.59% (de 85)
Correctas:	72 ≈ 84.7% (de 85) o ≈ 93.5% (de 77)
No relevantes:	1 ≈ 1.18% (de 85) o ≈ 1.3% (de 77)
Imprecisas:	1 ≈ 1.18% (de 85) o ≈ 1.3% (de 77)
Incorrectas:	3 ≈ 3.53% (de 85) o ≈ 3.9% (de 77)

1er. PLANO. Similitudes en gráficas

Nº total de equipos: 17 (9+8)

No contestaron: 0

Correctas

“Continuas e infinitas”: 17 (8+🕙 + 7+🕙) = 100%)

“Rectas”: 17 (9+8) = 100%

“Están en un Plano Cartesiano”: 16 (9+7) ≈ 94.12% (de 17)

“Necesariamente Cuadrantes I y III”: 13 (6+7) ≈ 76.47% (de 17)

“Pasan por el origen”: 12 (2+🕛 + 7) = 70.59% (de 17)

“0°< α < 90°”: 6 (4+2) ≈ 35.29% (de 17)

“No paralelas a los ejes”: 2 (0+2) ≈ 11.76% (de 17)

Imprecisas: 1 ≈5.88% (de 17)

“El punto de intersección de las gráficas es cero”: 1(0+1) ≈ 5.88% (de 17)

Incorrectas: 1 ≈5.88% (de 17)

Por “propiedad”: 1 ≈ 5.88% (de 17)

“No paralelas entre si”: 1 (0+1) ≈ 5.88% (de 17)

Número de similitudes en gráficas

Nº de similitudes *enunciadas*	Frecuencia (número de alumnos)
5	6(3+3)
4	5(3+2)
6	3(2+1)
7	2(0+2)
3	1(1+0)

Nº de similitudes *correctas*	Frecuencia (número de alumnos)
5	7(3+4)
4	5(3+2)
6	3(2+1)
7	1(0+1)
3	1(1+0)

1er. Plano. Similitudes en gráficas. Concentrado

Total de equipos:	17
Equipos que contestaron:	17 = 100%
Teóricas por cada equipo:	6
Teóricas de los 17 equipos:	102
Enunciadas:	85 ≈ 83.33% (de 102)
Correctas:	83 ≈ 81.37% (de 102) o ≈ 97.6% (de 85)
Imprecisas:	1 ≈ 0.98% (de 102) o ≈ 1.2% (de 85)
Incorrectas:	1 ≈ 0.98% (de 102) o ≈ 1.2% (de 85)

1er. Plano. *Correlaciones* entre *similitudes*

Nota: Las correlaciones en esta Tarea 23 no eran obligatorias.

Nº total de equipos: 17 (9+8)

No correlacionan: 3(1+2) *≈17.65% (de 17)*

Correlacionan: 14 (8+6) *(≈82.35% (de 17)*

Correctas: 13 ≈ 82.35% (de 17) o ≈ 92.86% (de 14)

Completas: 11 (5+6) ≈ 64.71% (de 17) o ≈ 78.57% (de 14) o ≈ 84.62% (de 13)

Incompletas: 2 (2+0) ≈ 11.76% (de 17) o ≈ 14.29% (de 14) o ≈ 15.38% (de 13)

Incorrectas: 1 (1+0) ≈ 5.88% (de 17) o ≈ 7.14% (de 14)

1er. Plano. Diferencias y similitudes en ecuaciones y gráficas.

Nº total de equipos: 17 (9+8)

Diferencias en ecuaciones vs. diferencias en gráficas

	Ecuaciones	Gráficas
Teóricas	68	68
Emunciadas	38 ≈ 55.88% (de 68)	36 ≈ 52.94% (de 68)
Correctas	37 ≈ 54.41% (de 68) o ≈ 97.37% (de 38)	33 ≈ 48.53% (de 68) o ≈ 91.67% (de 36)
Imprecisas	1 ≈ 1.47% (de 68) o ≈ 2.63% (de 38)	1 ≈ 1.47% (de 68) o ≈ 2.78% (de 36)
Incorrectas	0	2 ≈ 2.94% (de 68) o ≈ 5.55% (de 36)

Similitudes en ecuaciones vs. similitudes en gráficas

	Ecuaciones	Gráficas
Teóricas	85	102
Heredadas*	51	51
Nuevas*	34	51
Emunciadas	77 ≈ 90.59% (de 85)	85 ≈ 83.33% (de 102)
Correctas	72 ≈ 84.7% (de 85) o ≈ 93.5% (de 77)	83 ≈ 81.37% (de 102) o ≈ 97.66% (de 85)
Heredadas*	47 ≈ 92.16% (de 51) o ≈ 65.28% (de 72)	50 ≈ 98.04% (de 51) o ≈ 60.24% (de 83)
Nuevas*	25 ≈ 73.53% (de 34) o ≈ 34.72% (de 72)	33 ≈ 64.71% (de 51) o ≈ 39.76% (de 83)
No relevantes	1 ≈ 1.17% (de 85) o ≈ 1.3% (de 77)	0
Imprecisas	1 ≈ 1.17% (de 85) o ≈ 1.3% (de 77)	1 ≈ 0.98% (de 102) o ≈ 1.17% (de 85)
Incorrectas	3 ≈ 3.52% (de 85) o ≈ 3.9% (de 77)	1 ≈ 0.98% (de 102) o ≈ 1.17% (de 85)

* Las similitudes que presentan tanto las ecuaciones como las gráficas del 1er. Plano se pueden dividir en dos: las que "heredan" de los análisis anteriores (similitudes entre bloques y similitudes entre columnas) y las que son propias de este Plano. Las primeras son denominadas *heredadas* y las segundas, *nuevas*.

Las dos tablas anteriores muestran que, en general, por un lado, los equipos tienen un desempeño ligeramente mejor en ecuaciones que en gráficas y por otro, que el rendimiento en similitudes (sean ecuaciones o gráficas) supera *significativamente* al que se tiene en diferencias, si se toma como parámetro las "*teóricas*". Pero si se consideran las "*enunciadas*", el desempeño entre similitudes y diferencias es prácticamente equivalente.

Otros resultados que se obtienen del trabajo en equipo de los estudiantes son los siguientes:

- A pesar de que de los 17 equipos, 16 (≈ 94.12%) contestan correctamente las diferencias en ecuaciones y los 17, las diferencias en gráficas, sólo *siete* (≈ 41.18%) establecen las cuatro diferencias teóricas en ecuaciones y únicamente *cinco* (≈ 29.41%), las cuatro diferencias teóricas en gráficas.

- En relación a las similitudes, *seis* equipos (≈ 35.29%) establecen las cinco teóricas en ecuaciones y *cuatro* (≈ 23.53%), las seis teóricas en gráficas.

- De las tres similitudes heredadas en ecuaciones, sólo una de ellas la registran todos los equipos. Una de las dos restantes, 16 (≈ 94.12%) y la otra, 13 (≈ 76.47%).

- 16 equipos (≈ 94.12%) enuncian las tres similitudes heredadas en gráficas y el equipo restante, dos de ellas.

- *Nueve* equipos (≈ 52.94%), anotan las dos nuevas similitudes en ecuaciones. Únicamente *cuatro* (≈ 23.53%), las tres nuevas en gráficas y *siete* (≈ 41.18%), dos de ellas.

- 16 equipos (≈ 94.12%) manifiestan que la diferencia en ecuaciones es “el coeficiente de la variable independiente” y 13 de ellos (≈ 76.47% de 17) registran que una similitud en ecuaciones es que “el signo del coeficiente de la variable independiente es positivo”.

  COMENTARIO: *Que en 13 equipos, el hecho de que en las ecuaciones bajo estudio, “el coeficiente de la v.i. es diferente” no eclipsara la similitud referente al “signo del coeficiente de la v.i.”, representa un avance significativo en el estudio de la articulación de registros de representación (ver el segundo comentario de la página 14).*

- Los 17 equipos registran que la diferencia en las gráficas del 1er. Plano es el valor de α (en cualquiera de sus versiones) y *seis* (≈ 35.29%), que una similitud en gráficas es que α es agudo.

  COMENTARIO: *Al parecer, en las gráficas, el “efecto eclipse” es mucho más severo que en las ecuaciones.*

- 14 equipos (≈ 82.35%) responden a la *sugerencia* del profesor de correlacionar. Lo llevan a cabo tanto en diferencias como en similitudes.

- 13 equipos (≈ 76.47%) refieren como una similitud en gráficas que “las rectas pasan necesariamente por Cuadrantes I y III”. 10 de ellos (≈ 58.82% de 17) la correlacionan correctamente con la similitud en ecuaciones referente al “signo del coeficiente de la v.i.”. De los tres restantes, dos no establecen la similitud en ecuaciones y por lo tanto no tienen con qué correlacionar y el último, no correlaciona aunque cuenta con todos los elementos para hacerlo: el registro de las similitudes correspondientes.

- *Cuatro* equipos (≈ 23.53%) registran como una similitud en ecuaciones que el “signo del coeficiente de v.i. es positivo” y dentro de las similitudes en gráficas que "$0° < \alpha < 90°$" y que "las rectas pasan por los Cuadrantes I y III". Cuando los equipos correlacionan esta parte, lo hacen correctamente. Es decir, la similitud en ecuaciones la correlacionan con las *dos* similitudes en gráficas.

COMENTARIO: *Tal vez, la parte más difícil de las similitudes, como se menciona renglones arriba, es identificar que una similitud en ecuaciones es "el signo del coeficiente de la v.i." y que una similitud en gráficas es que "el ángulo que forman las rectas con la parte positiva del eje de las abscisas (α) es agudo": estas similitudes pueden ser eclipsadas por las diferencias. Pero, establecer que una similitud en ecuaciones se correlaciona con dos similitudes en gráficas, no es nada fácil.*

- Por otro lado, 12 equipos ($\approx$ 70.59%) enuncian que una similitud en ecuaciones es el hecho de que "el término independiente es cero" (en cualquiera de sus versiones) y también 12 equipos señalan que una similitud en gráficas es que "las rectas pasan por el origen" (en cualquiera de sus versiones). De estos equipos, 11 ($\approx$ 64.71% de 17) registran las dos similitudes, nueve ($\approx$ 52.94% de 17) correlacionan correctamente y los otros dos, no correlacionan.

Para finalizar este apartado, cabe señalar, que a juzgar por el trabajo de los estudiantes, parece ser que el hecho de correlacionar ayuda, obliga o exige encontrar la contraparte algebraica o gráfica, según sea el caso, que en un momento determinado no se ha establecido. Por ejemplo, en el trabajo individual, en el cual *no se pedía correlacionar*, tres estudiantes anotan que "el término independiente es igual a cero" es una similitud en ecuaciones y ninguno tiene registrado algo sobre la contraparte geométrica: que las rectas pasan por el origen. El consenso en esta parte de sus respuestas individuales es evidente. Sin embargo, al momento de trabajar en equipo y *correlacionar,* respondiendo a la *sugerencia del profesor*, establecen la similitud en gráficas requerida para poder llevar a cabo la correlación correspondiente. ¿Qué los “obliga” a establecer la similitud en gráficas? La respuesta a esta pregunta se puede dar en dos sentidos. En el primero, se puede atribuir a la forma de trabajo (individual o por equipo) y en el segundo, a la formulación de la tarea (no pedir correlacionar o sugerir correlacionar).

Si la respuesta está en el primer sentido, conlleva a considerar que el trabajo en equipo “exige” a sus integrantes establecer la similitud requerida. Lo cual, es poco probable, aunque no se descarta, en virtud de que en las respuestas individuales hay consenso y, al momento de trabajar en equipo, ¿qué se discute si se coincide? Luego entonces, al parecer, es posible atribuir el cambio a la formulación de la tarea. Si en ella se va a correlacionar y en algún momento no se tiene la contraparte geométrica (en el caso que se está ilustrando), hay que buscarla y establecerla para poder efectuar la correlación deseada.

La situación planteada renglones arriba se observa claramente en *seis* equipos ($\approx$ 35.3%). No exactamente en la misma situación pero si en el mismo tenor.

1ER. PLANO
PRIMERA PARTE DE LAS TAREAS 22 Y 23. COMPARACIONES

1er. PLANO. Diferencias y similitudes en ecuaciones y gráficas. Individual y en equipos

Nº total de alumnos: 58 (30+28)

Nº total de equipos: 17 (9+8)

Diferencias en ecuaciones vs. diferencias en gráficas e individual vs. equipos

	Ecuaciones		Gráficas	
	Individual	*Equipos*	*Individual*	*Equipos*
Teóricas	232	68	232	68
Enunciadas	79 ≈ 34.05% (de 232)	38 ≈ 55.88% (de 68)	78 ≈ 33.62% (de 232)	36 ≈ 52.94% (de 68)
Correctas	70 ≈ 30.17% (de 232)	37 ≈ 54.41% (de 68)	45 ≈ 19.4% (de 232)	33 ≈ 48.53% (de 68)
No relevantes	0	0	2 ≈ 0.86% (de 232)	0
Imprecisas	4 ≈ 1.72% (de 232)	1 ≈ 1.47% (de 68)	17 ≈ 7.33% (de 232)	1 ≈ 1.47% (de 68)
Ambiguas	0	0	2 ≈ 0.86% (de 232)	0
Imprecisas-incorrectas	1 ≈ 0.43% (de 232)	0	0	0
Incorrectas	4 ≈ 1.72% (de 232)	0	12 ≈ 5.17% (de 232)	2 ≈ 2.94% (de 68)

Nota: Todos los porcentajes contenidos en esta tabla están calculados con respecto a las *teóricas*

Similitudes en ecuaciones vs. similitudes en gráficas e individual vs. equipo

	Ecuaciones		Gráficas	
	Individual	*Equipos*	*Individual*	*Equipos*
Teóricas	290	85	348	102
Heredadas	174	51	174	51
Nuevas	116	34	174	51
Enunciadas	195 ≈ 67.24% (de 290)	77 ≈ 90.59% (de 85)	197 ≈ 56.61% (de 348)	85 ≈ 83.33% (de 102)
Correctas	184 ≈ 63.45% (de 290)	72 ≈ 84.7% (de 85)	176 ≈ 50.57% (de 348)	83 ≈ 81.37% (de 102)
Heredadas	146 ≈ 83.91% (de 174)	47 ≈ 92.16% (de 51)	141 ≈ 81.03% (de 174)	50 ≈ 98.04% (de 51)
Nuevas	38 ≈ 32.76% (de 34)	25 ≈ 73.53% (de 174)	35 ≈ 20.11% (de 174)	33 ≈ 64.71% (de 51)
Por inferencia	0	0	1 ≈ 0.29% (de 348)	0
No relevantes	1 ≈ 0.34% (de 290)	1 ≈ 1.17% (de 85)	1 ≈ 0.29% (de 348)	0
Mezcladas	0	0	1 ≈ 0.29% (de 348)	0
"Pleonasmo matemático"	4 ≈ 1.38% (de 290)	0	0	0
Imprecisas	0	1 ≈ 1.17% (de 85)	9 ≈ 2.59% (de 348)	1 ≈ 0.98% (de 102)
Ambiguas	0	0	7 ≈ 2.01% (de 348)	0
Imprecisas-incorrectas	4 ≈ 1.38% (de 290)	0	0	0
Incorrectas	2 ≈ 0.69% (de 290)	3 ≈ 3.52% (de 85)	2 ≈ 0.57% (de 348)	1 ≈ 0.98% (de 102)

Nota: Todos los porcentajes contenidos en esta tabla están calculados con respecto a los teóricos

Estas dos últimas tablas exhiben las ventajas que para las tareas académicas tiene el trabajo en equipo de los estudiantes: entre otras cosas, la proporción de respuestas correctas mejora significativamente y las incorrectas, ambiguas e imprecisas disminuyen en forma considerable. Además, aunque en el trabajo en grupos pequeños, al igual que en el individual, el rendimiento en ecuaciones es superior al de las gráficas, la diferencia en el rendimiento se reduce con el trabajo en equipo.

Analizando las producciones de los estudiantes se observa que las "bondades" del trabajo en grupos pequeños van más allá de lo enunciado en el párrafo anterior (que ya de por sí es bastante). Algunas de ellas son:

- Las respuestas individuales de los estudiantes se complementan y emerge la respuesta del equipo. Esto se percibe en todos los equipos.

- Especifican algunos aspectos, los diferentes valores de "α", por mencionar alguno, que no estaban presentes en los trabajos individuales. Esto lo registran tres equipos ($\approx$17.65%).

- No se limitan a encontrar la respuesta correcta sino que buscan, desde su punto de vista, la "mejor redacción" en el lenguaje matemático para expresar su observación. Tal es el caso, por ejemplo, de cinco equipos ($\approx$29.41%) que establecen como diferencia en ecuaciones "el valor del coeficiente de la variable independiente" en lugar de "el coeficiente de la variable independiente" que se tiene como respuesta individual de todos o casi todos los miembros del equipo.

Pero, naturalmente, el trabajo en equipo también muestra limitaciones. Tal vez la más severa (por las consecuencias que conlleva) es que algunas producciones individuales, importantes para el tema en discusión, no se rescatan en el trabajo en equipo. Con esto, el equipo pierde la oportunidad de avanzar un poco más. Esta situación se percibe claramente en tres equipos ($\approx$17.65%).

De cualquier modo, las producciones en equipo superan en mucho a las individuales.

2° PLANO
SEGUNDA PARTE DE LA TAREA 22. INDIVIDUAL

2° PLANO. Diferencias en ecuaciones

Nº total de alumnos: 58(30+28)

No contestaron: 5 (2+3) ≈8.62%

Correctas: 43 ≈74.14% (de 58) o ≈81.13% (de 53)

“Término independiente”: 28 (10+🕚 + 16+🕚) ≈ 48.27% (de 58) o ≈ 52.83% (de 53) o ≈ 65.12% (de 43)

“Valor del término independiente”: 15 (8+7) ≈ % 25.86(de 58) o ≈ 28.3% (de 53) o ≈ 34.88% (de 43)

Diferentes valores de “b”: 5(3+2) ≈ 8.62% (de 58) o ≈ 9.43% (de 53) o ≈ 11.63% (de 43)

Nota: De los cinco alumnos que hicieron explícitos los tres valores de “*b*”, uno de ellos anotó que “una [ecuación] no tiene término independiente”. Esta respuesta está considerada en el rubro de “Imprecisas-Incorrectas”.

Imprecisas-Incorrectas: 12 ≈20.69% (de 58) o ≈22.64 % (de 53)

“Signo del término independiente”: 11(8+3) ≈ 18.96% (de 58) o ≈ 20.75% (de 53) o ≈ 91.67% (de 12)

“Una [ecuación] no tiene término independiente”: 1(0+1) ≈ 1.72% (de 58) o ≈ 1.88% (de 53) o ≈ 8.34% (de 12)

Incorrectas: 5 ≈8.62% (de 58) o ≈9.43% (de 53)

“Coeficiente de v.i.”: 5 (4+1) ≈ 8.62% (de 58) o ≈ 9.43% (de 53)

Número de diferencias en ecuaciones

Nº de diferencias *enunciadas*	Frecuencia (número de alumnos)
1	42(22+20)
2	6(3+3)
4	5(3+2)
0	5(2+3)

Nº de diferencias *correctas*	Frecuencia (número de alumnos)
1	38(16+22)
0	10(9+1)
4	4(3+1)
3	1(0+1)

2º Plano. Diferencias en ecuaciones. Concentrado

Total de estudiantes:	58
Estudiantes que contestaron:	53 ≈ 91.38%
Teóricas por cada estudiante:	4
Teóricas de los 58 estudiantes:	232
Teóricas de 53 estudiantes:	212
Enunciadas:	74 ≈ 31.9% (de 232) o ≈ 34.9% (de 212)
Correctas:	57 ≈ 24.57% (de 232) o ≈ 29.89% (de 212) o ≈ 77.03% (de 74)
Imprecisas-incorrectas:	12 ≈ 5.17% (de 232) o ≈ 5.66% (de 212) o ≈ 16.22% (de 74)
Incorrectas:	5 ≈ 2.15% (de 232) o ≈ 2.36% (de 212) o ≈ 6.75% (de 74)

2º Plano. Diferencias en gráficas

Nº total de alumnos: 58 (30+28)

No contestaron: 5 (3+2) ≈ 8.62%

Correctas: 27 ≈ 46.55% (de 58) o ≈ 50.94% (de 53)

“P.I.E.O.”: 10 (3 + 4+🕛) ≈ 17.24% (de 58) o ≈ 18.87% (de 53) o ≈ 37.04% (de 27)

Donde, P.I.E.O. representa el punto de intersección en el eje de las ordenadas.

“Intersección con E.O.”: 7 (🕛 + 2+🕚) ≈ 12.69% (de 58) o ≈ 13.21% (de 53) o ≈ 25.92% (de 27)

“Cuadrantes [da los números]”: 1 (0+1) ≈ 1.72% (de 58) o ≈ 1.89% (de 53) o ≈ 3.7% (de 27)

Diferentes Ps.I.E.O.: 5 ≈ 8.62% (de 58) o ≈ 9.43% (de 53) o ≈ 18.52% (de 27)

Tres Ps.I.E.O.: 2 (1+1) ≈ 3.45% (de 58) o ≈ 3.77% (de 53) o ≈ 7.41% (de 27) o =40% (de 5)

Un P.I.E.O.: 3 (2+1) ≈ 5.17% (de 58) o ≈ 5.66% (de 53) o ≈ 11.11% (de 27) o =60% (de 5)

Parcialmente relevantes: 8 ≈ 13.79% (de 58) o ≈ 15.09% (de 53)

“Ps.I. de cada gráfica con los ejes”: 8(6+2) ≈ 13.79% (de 58) o ≈ 15.09% (de 53)

No relevantes: 5 ≈ 8.62% (de 58) o ≈ 9.43% (de 53)

“P.I.E.A”: 2 (2+0) ≈ 3.45% (de 58) o ≈ 3.77% (de 53)

“Están en diferentes puntos del plano”: 2 (1+1) ≈ 3.45% (de 58) o ≈ 3.77% (de 53)

“Diferente graficación”: 1 (1+0) ≈ 1.72% (de 58) o ≈ 1.88% (de 53)

Imprecisas: 21 ≈ 36.21% (de 58) o ≈ 39.62% (de 53)

"Posición": 14 (7+7) ≈ 24.14% (de 58) o ≈ 26.41% (de 53)

Utilizan "posición" y justifican: 5 (4+1) ≈ 8.62% (de 58) o ≈ 9.43% (de 53) o ≈ 35.71% (de 14)

Utilizan "posición" y *no* justifican: 9 (3+6) ≈ 15.52% (de 58) o ≈ 16.98% (de 53) o ≈ 64.29% (de 14)

"Punto de intersección": 6 (2+4) ≈ 10.34% (de 58) o ≈ 11.32% (de 53)

"Están a los lados [del origen]": 1 (1+0) ≈ 1.72% (de 58) o ≈ 1.88% (de 53)

Ambiguas: 1 ≈ 1.72% (de 58) o ≈ 1.88% (de 53)

"Distancia entre la gráfica al eje de las abscisas": 1 (0+1) ≈ 1.72% (de 58) o ≈ 1.88% (de 53)

Imprecisas-Incorrectas: 2 ≈ 3.45% (de 58) o ≈ 3.77% (de 53)

"Eje de intersección": 2 (0+2) ≈ 3.45% (de 58) o ≈ 3.77% (de 53)

Incorrectas: 10 ≈ 17.24% (de 58) o ≈ 18.87% (de 53)

"Inclinación": 9 (8+1) ≈ 15.52% (de 58) o ≈ 16.98% (de 53) o = 90% (de 10)

"Se abren arriba o abajo": 1 (0+1) ≈ 1.72% (de 58) o ≈ 1.88% (de 53) o = 10% (de 10)

Número de diferencias en gráficas

Nº de diferencias *enunciadas*	Frecuencia (número de alumnos)
1	39(20+19)
2	11(6+5)
3	1(0+1)
4	1(0+1)
6	1(1+0)
0	5(3+2)

Nº de diferencias *correctas*	Frecuencia (número de alumnos)
0	33(19+14)
1	17(7+10)
4	2(1+1)
2	1(0+1)

2º Plano. Diferencias en gráficas. Concentrado

Total de estudiantes:	58
Estudiantes que contestaron:	53 ≈ 91.38%
Teóricas por cada estudiante:	5
Teóricas de los 58 estudiantes:	290
Teóricas de 53 estudiantes:	265
Enunciadas:	74 ≈ 25.52% (de 290) o ≈ 27.92% (de 265)
Correctas:	27 ≈ 9.31% (de 290) o ≈ 10.19% (de 265) o ≈ 36.49% (de 74)
Parcialmente relevantes:	8 ≈ 2.76% (de 290) o ≈ 3.02% (de 265) o ≈ 10.81% (de 74)
No relevantes:	5 ≈ 1.72% (de 290) o ≈ 1.89% (de 265) o ≈ 6.76% (de 74)
Imprecisas:	21 ≈ 7.24% (de 290) o ≈ 7.92% (de 265) o ≈ 28.38% (de 74)
Ambiguas:	1 ≈ 0.34% (de 290) o ≈ 0.37% (de 265) o ≈ 1.35% (de 74)
Imprecisas-Incorrectas:	2 ≈ 0.69% (de 290) o ≈ 0.75% (de 265) o ≈ 2.7% (de 74)
Incorrectas:	10 ≈ 3.45% (de 290) o ≈ 3.77% (de 265) o ≈ 13.51% (de 74)

2º Plano. Similitudes en ecuaciones

Nº total de alumnos: 58 (30+28)

No contestaron: 2 (1+1) *≈3.45%*

Correctas

“Dos variables”: 52 (28+24) ≈ 89.65% (de 58) o ≈ 92.86% (de 56)

“Exponente de la v.i. igual a uno”: 49 (21+🕛 + 18+➦) ≈ 84.48% (de 58) o ≈ 87.5% (de 56)

“Variable dependiente despejada”: 43 (24 + 19) ≈ 74.14% (de 58) o ≈ 76.78% (de 56)

Referencia al “coeficiente de la v.i.”: 27 (10+17) ≈ 46.55% (de 58) o ≈ 48.21% (de 56)

- “El coeficiente de la v.i. es uno”: 17 (7+10) ≈ 29.31% (de 58) o ≈ 30.36% (de 56)
- “Coeficiente de la v.i.”: 5 (1+4) ≈ 8.62% (de 58) o ≈ 8.93% (de 56)
- “Valor del coeficiente de la v.i.”: 4 (2+2) ≈ 6.9% (de 58) o ≈ 7.14% (de 56)
- “El valor del coeficiente de la v.i. es uno”: 1 (0+1) ≈ 1.72% (de 58) o ≈ 1.78% (de 56)

“Signo del coeficiente de la v.i.”: 10 (7+🕚 + 1+🕚) ≈ 17.24% (de 58) o ≈ 17.86% (de 56)

No relevantes: 2 ≈3.45% (de 58) o ≈3.57% (de 56)

“El término independiente está en los Reales”: 2 (1+1) ≈ 3.45% (de 58) o ≈ 3.57% (de 56)

Imprecisas: 3 ≈ 5.17% (de 58) o ≈ 5.36% (de 56)

“El coeficiente y exponente de la v.d. es igual a uno”: 2 (0+2) ≈ 3.45% (de 58) o ≈ 3.57% (de 56)

“El exponente de la v.d. es igual a uno”: 1 (1+0) ≈ 1.72% (de 58) o ≈ 1.79% (de 56)

Imprecisas-Incorrectas : 2 ≈ 3.45% (de 58) o ≈ 3.57% (de 56)

“Exponente uno”: 1 (1+0) ≈ 1.72% (de 58) o ≈ 1.79% (de 56) o = 50% (de 2)

“Exponente de la v.d.”: 1 (1+0) ≈ 1.72% (de 58) o ≈ 1.79% (de 56) o = 50% (de 2)

Incorrectas: 2 ≈ 3.45% (de 58) o ≈ 3.57% (de 56)

“V.i. despejada”: 1 (0+1) ≈ 1.72% (de 58) o ≈ 1.79% (de 56) o = 50% (de 2)

“El signo de la v.i. es positivo”: 1 (1+0) ≈ 1.72% (de 58) o ≈ 1.79% (de 56) o = 50% (de 2)

Número de similitudes en ecuaciones

Nº de similitudes *enunciadas*	Frecuencia (número de alumnos)
4	28(13+15)
3	15(6+9)
2	8(5+3)
5	3(2+1)
1	2(1+1)
0	2(1+1)

Nº de similitudes *correctas*	Frecuencia (número de alumnos)
4	22(11+11)
3	19(9+10)
2	9(6+3)
5	3(2+1)
1	3(1+2)

2º Plano. Similitudes en ecuaciones. Concentrado

Total de estudiantes:	58
Estudiantes que contestaron:	56 ≈ 96.55%
Teóricas por cada estudiante:	5
Teóricas de los 58 estudiantes:	290
Teóricas de 56 estudiantes:	280
Enunciadas:	190 ≈ 65.52% (de 290) o ≈ 67.86% (de 280)
Correctas:	181 ≈ 62.41% (de 290) o ≈ 64.64% (de 280) o ≈95.27% (de 190)
No relevantes:	2 ≈ 0.69% (de 290) o ≈ 0.71% (de 280) o ≈ 1.05% (de 190)
Imprecisas:	3 ≈ 1.03% (de 290) o ≈ 1.07% (de 280) o ≈ 1.58% (de 190)
Imprecisas-incorrectas:	2 ≈ 0.69% (de 290) o ≈ 0.71% (de 280) o ≈ 1.05% (de 190)
Incorrectas:	2 ≈ 0.69% (de 290) o ≈ 0.71% (de 280) o ≈ 1.05% (de 190)

2º PLANO. Similitudes en gráficas

Nº total de alumnos: 58 (30+28)

No contestaron: 0

Correctas

"Rectas": 52 (28 + 18+↰) ≈ 89.65% (de 58)

"Continuas e infinitas": 48 (24 + 20+↲) ≈ 82.76% (de 58)

"Están en un Plano Cartesiano": 44 (26+18) ≈ 75.86% (de 58)

"Misma inclinación (α)": 8 (5+3) ≈ 13.79% (de 58)

"Cuadrantes I y III": 5 (2+3) ≈ 8.62% (de 58)

"Inclinadas a la derecha": 3 (2+1) ≈ 5.17% (de 58)

"α ≈ 45°": 3 (3+0) ≈ 5.17% (de 58)

"No paralelas a los ejes": 3 (0+1) ≈ 5.17% (de 58)

No relevantes: 3 ≈5.17% (de 58)

"Tienen un P.I.E.O.": 2 (0+2) ≈ 3.45% (de 58) o ≈ 66.67% (de 3)

"Cortan al E.O.": 1 (0+1) ≈ 1.72% (de 58) o ≈ 33.33% (de 3)

Por inferencia: 1 ≈1.72% (de 58)

"Dominio de la función está en los Reales": 1 (0+1) ≈ 1.72% (de 58)

Mezcladas: 1 ≈1.72% (de 58)

"Están asociadas a una ecuación": 1 (0+1) ≈ 1.72% (de 58)

Imprecisas: 4 ≈6.9% (de 58)

"Posición": 2 (2+0) ≈ 3.45% (de 58) o = 50% (de 4)

"Inclinadas hacia el mismo lado": 1 (1+0) ≈ 1.72% (de 58) o = 25% (de 4)

"Apuntan a la misma dirección": 1 (0+1) ≈ 1.72% (de 58) o = 25% (de 4)

Ambiguas: 4 ≈6.9% (de 58)

"Sentido": 2 (1+1) ≈ 3.45% (de 58) o = 50% (de 4)

"Dirección": 1(1+0) ≈1.72% (de 58) o = 25% (de 4)

"Están en diagonal": 1 (1+0) ≈ 1.72% (de 58) o = 25% (de 4)

Imprecisas-Incorrectas: 2 ≈3.45% (de 58)

"Comienzan y terminan en los mismos puntos": 1 (1+0) ≈ 1.72% (de 58) o = 50% (de 2)

"Casi los mismos puntos": 1 (1+0) ≈ 1.72% (de 58) o = 50% (de 2)

Incorrectas: 14 ≈3.44% (de 58)

"Son paralelas (entre si)": 11 (2+9) ≈ 18.96% (de 58) o ≈ 78.58% (de 14)

"Se encuentran sobre el eje de las ordenadas": 1 (0+1) ≈ 1.72% (de 58) o ≈ 7.14% (de 14)

"Cuadrantes II y IV": 1 (1+0) ≈ 1.72% (de 58) o ≈ 7.14% (de 14)

"Tamaño": 1 (1+0) ≈ 1.72% (de 58) o ≈ 7.14% (de 14)

Número de similitudes en gráficas

Nº de similitudes *enunciadas*	Frecuencia (número de alumnos)
3	20(11+9)
4	16(11+5)
2	12(5+7)
6	5(0+5)
5	3(3+0)
1	2(0+2)

Nº de similitudes *correctas*	Frecuencia (número de alumnos)
3	21(12+9)
4	15(9+6)
2	14(6+8)
1	5(1+4)
5	2(1+1)
0	1(1+0)

2º Plano. Similitudes en gráficas. Concentrado

Total de estudiantes:	58
Estudiantes que contestaron:	58 = 100%
Teóricas por cada estudiante:	6
Teóricas de los 58 estudiantes:	348
Enunciadas:	195 ≈ 56.03% (de 348)
Correctas:	166 ≈ 47.7% (de 348) o ≈ 85.13% (de 195)
No relevantes:	3 ≈ 0.86% (de 348) o ≈ 1.54% (de 195)
Por inferencia:	1 ≈ 0.29% (de 348) o ≈ 0.51% (de 195)
Mezcladas:	1 ≈ 0.29% (de 348) o ≈ 0.51% (de 195)
Imprecisas:	4 ≈ 1.15% (de 348) o ≈ 2.05% (de 195)
Ambiguas:	4 ≈ 1.15% (de 348) o ≈ 2.05% (de 195)
Imprecisas-Incorrectas:	2 ≈ 0.57% (de 348) o ≈ 1.03% (de 195)
Incorrectas:	14 ≈ 4.02% (de 348) o ≈ 7.18% (de 195)

2º PLANO. Diferencias y similitudes en ecuaciones y gráficas.

Nº total de alumnos: 58 (30+28)

Diferencias en ecuaciones vs. diferencias en gráficas

	Ecuaciones	Gráficas
Teóricas	232	290
Enunciadas	74 ≈ 31.9% (de 232)	74 ≈ 25.52% (de 290)
Correctas	57 ≈ 24.57% (de 232) o ≈ 77.03% (de 74)	27 ≈ 9.31% (de 290) o ≈ 36.49% (de 74)
Parcialmente relevantes	0	8 ≈ 2.76% (de 290) o ≈ 10.81% (de 74)
No relevantes	0	5 ≈ 1.72% (de 290) o ≈ 6.76% (de 74)
Imprecisas	0	21 ≈ 7.24% (de 290) o ≈ 28.38% (de 74)
Ambiguas	0	1 ≈ 0.34% (de 290) o ≈ 1.35% (de 74)
Imprecisas-incorrectas	12 ≈ 5.17% (de 232) o ≈ 16.22% (de 74)	2 ≈ 0.69% (de 290) o ≈ 2.7% (de 74)
Incorrectas	5 ≈ 2.15% (de 232) o ≈ 6.75% (de 74)	10 ≈ 3.45% (de 290) o ≈ 13.51% (de 74)

Similitudes en ecuaciones vs. similitudes en gráficas

	Ecuaciones	Gráficas
Teóricas	290	348
Heredadas*	174	174
Nuevas*	116	174
Enunciadas	190 ≈ 65.52% (de 290)	195 ≈ 56.03% (de 348)
Correctas	181 ≈ 62.41% (de 290) o ≈ 95.27% (de 190)	166 ≈ 47.7% (de 348) o ≈ 85.13% (de 195)
Heredadas*	144 ≈ 82.76% (de 174) o ≈ 79.56% (de 181)	147 ≈ 84.48% (de 174) o ≈ 88.55% (de 166)
Nuevas*	37 ≈ 31.9% (de 116) o ≈ 20.44% (de 181)	19 ≈ 10.92% (de 174) o ≈ 11.45% (de 166)
No relevantes	2 ≈ 0.69% (de 290) o ≈ 1.05% (de 190)	3 ≈ 0.86% (de 348) o ≈ 1.54% (de 195)
Por inferencia	0	1 ≈ 0.29% (de 348) o ≈ 0.51% (de 195)
Mezcladas	0	1 ≈ 0.29% (de 348) o ≈ 0.51% (de 195)
Imprecisas	3 ≈ 1.03% (de 290) o ≈ 1.58% (de 190)	4 ≈ 1.15% (de 348) o ≈ 2.05% (de 195)
Ambiguas	0	4 ≈ 1.15% (de 348) o ≈ 2.05% (de 195)
Imprecisas-incorrectas	2 ≈ 0.69% (de 290) o ≈ 1.05% (de 190)	2 ≈ 0.57% (de 348) o ≈ 1.03% (de 195)
Incorrectas	2 ≈ 0.69% (de 290) o ≈ 1.05% (de 190)	14 ≈ 4.02% (de 348) o ≈ 7.18% (de 195)

* Las similitudes que presentan tanto las ecuaciones como las gráficas del 1er. Plano se pueden dividir en dos: las que “heredan” de los análisis anteriores (similitudes entre bloques y similitudes entre columnas) y las que son propias de este Plano. Las primeras son denominadas *heredadas* y las segundas, *nuevas*.

Las dos últimas tablas permiten comparar el desempeño de los estudiantes desde dos perspectivas. Ecuaciones vs. gráficas en una de ellas y diferencias vs. similitudes en la otra.

En relación a la primera, es posible afirmar que en general, el rendimiento de los alumnos en gráficas es inferior al que tienen en ecuaciones. Además, que 43 estudiantes (≈ 74.14%) contesten correctamente las diferencias en ecuaciones mientras que, sólo 27 (≈ 46.55%), las diferencias en gráficas, es un indicador más de las dificultades que tienen los aprendices al trabajar en el registro de representación gráfico.

COMENTARIO: *En relación a estos resultados y los del 1er. Plano, cabe señalar que, por un lado, el rendimiento de los estudiantes en el 2º Plano es similar al del 1º en el sentido que, se observa un mejor desempeño en ecuaciones que en gráficas. Y por otro, que en forma global, el trabajo con el 1er. Plano es mejor que el realizado con el 2º. Por ejemplo, en el 1er. Plano, 50 estudiantes (≈ 86.21%) contestan correctamente las diferencias en ecuaciones y 39 (≈ 67.24%), las diferencias en gráficas. El desempeño en ecuaciones es superior al de gráficas por casi 19 puntos porcentuales. Sin embargo, en el 2º Plano la diferencia en el desempeño es de aproximadamente 28 puntos porcentuales: 43 estudiantes (≈ 74.14%) contestan correctamente las diferencias en ecuaciones y sólo 27 (≈ 46.55%), las diferencias en gráficas. Además, los resultados obtenidos en el 1er Plano en las diferencias en ecuaciones, superan en 12 puntos porcentuales a los del 2º.*

Estos resultados ponen de manifiesto las dificultades de los estudiantes en su trabajo con gráficas. Dificultades que, al parecer, se agudizan más con unas gráficas que con otras: en el 2º Plano, los alumnos disminuyen su rendimiento en las diferencias en gráficas casi en 21 puntos porcentuales con respecto al del 1º. Esto permite afirmar que los estudiantes enfrentan mayores problemas al trabajar con rectas desplazadas que con rectas rotadas. Recuérdese que en el 1er. Plano se encuentran las gráficas asociadas a las ecuaciones

$y=x$, $y=2x$ *e* $y=\frac{1}{2}x$ *y en el 2º, las asociadas a* $y=x$, $y=x+3$ *e* $y=x-3$.

Considerando la segunda perspectiva, se aprecia que los estudiantes se desempeñan mejor en similitudes que en diferencias. Los porcentajes de respuestas correctas son significativamente superiores tanto si se comparan con las similitudes teóricas como con las enunciadas.

COMENTARIO: Un comportamiento similar tienen los alumnos en el 1er. Plano.

Algunos otros resultados son los siguientes:

- *Ninguna* de las similitudes heredadas en ecuaciones y gráficas, es enunciada por *todos* los estudiantes.

  COMENTARIO: La misma situación se presenta en el 1er. Plano.

- 37 estudiantes (≈ 63.79%), enuncian las tres similitudes heredadas en ecuaciones y también 37, las tres similitudes heredadas en gráficas.

- Las dos nuevas similitudes en ecuaciones son registradas por *cuatro* alumnos (≈ 6.89%), mientras que *ninguno* reporta las tres nuevas similitudes en gráficas.

- De los diez estudiantes (≈ 17.24%) que establecen que una similitud en ecuaciones es “el signo del coeficiente de la variable independiente”, *ocho* (≈ 13.79%), no registran alguna similitud en gráficas que sea la contraparte geométrica; *uno* (≈ 1.72%), enuncia una y, sólo *uno* (≈ 1.72%), hace explícitas las dos similitudes en gráficas correspondientes.

- De los 27 estudiantes (≈ 46.55%), que contestan correctamente la similitud en ecuaciones referente al coeficiente de la variable independiente, *cuatro* (≈ 6.89%), registran la similitud en gráficas necesaria para correlacionar.

- De manera voluntaria *dos* alumnos (≈ 3.44%), registran sus correlaciones en diferencias y, también *dos*, lo hacen para las similitudes.

2° PLANO
SEGUNDA PARTE DE LA TAREA 23. EQUIPO

2° PLANO. Diferencias en ecuaciones

Nº total de equipos: 17 (9+8)

No contestaron: 2 ≈ 11.77% (de 17)

Correctas: 13 ≈ 76.47% (de 17) o ≈ 86.66% (de 15)

“Valor del término independiente”: 7 (3+4) ≈ 41.18% (de 17) o ≈ 46.67% (de 15) o ≈ 53.85% (de 13)

“Término independiente”: 6 (3+3) ≈ 35.29% (de 17) o = 40% (de 15) o ≈ 46.15% (de 13)

Diferentes valores de “b”: 5 ≈ 29.41% (de 17) o ≈ 33.33% (de 15) o ≈ 38.46% (de 13)

Explícitos: 4 (2+2) ≈ 23.53% (de 17) o ≈ 26.67% (de 15) o ≈ 30.77% (de 13) o = 80% (de 5)

Implícitos: 1(1+0) ≈ 5.88% (de 17) o ≈ 6.67% (de 15) o ≈ 7.69% (de 13) o = 20% (de 5)

Imprecisas-Incorrectas: 1 ≈ 5.88% (de 17) o ≈ 6.67% (de 15)

“Signo del término independiente”: 1 (1+0) ≈ 5.88% (de 17) o ≈ 6.67% (de 15)

Incorrectas: 1 ≈ 5.88% (de 17)) o ≈ 6.67% (de 15)

“Coeficiente de la v.i.”: 1 (0+1) ≈ 5.88% (de 17) o ≈ 6.67% (de 15)

Número de diferencias en ecuaciones

Nº de diferencias *enunciadas*	Frecuencia (número de equipos)
1	10(4+6)
4	5(3+2)

Nº de diferencias *correctas*	Frecuencia (número de equipos)
1	8(3+5)
4	5(3+2)
0	2(1+1)

2º Plano. Diferencias en ecuaciones. Concentrado

Total de equipos:	17
Equipos que contestaron:	15 ≈ 88.23%
Teóricas por cada equipo:	4
Teóricas de los 17 equipos:	68
Enunciadas:	30 ≈ 44.12% (de 68)
Correctas:	28 ≈ 41.18% (de 68) o ≈ 93.34% (de 30)
Imprecisas-Incorrectas:	1 ≈ 1.47% (de 68) o ≈ 3.33% (de 30)
Incorrectas:	1 ≈ 1.47% (de 68) o ≈ 3.33% (de 30)

2º Plano. Diferencias en gráficas

Nº total de equipos: 17 (9+8)

No contestaron: 2 ≈ 11.76% (de 17)

Correctas: 11 ≈ 64.71% (de 17) o ≈ 73.33% (de 15)

"P.I.E.O.": 9 (4+5) ≈ 52.94% (de 17) o = 60% (de 15) o ≈ 81.82% (de 11)

Donde, P.I.E.O. representa el punto de intersección en el eje de las ordenadas

"Cuadrantes [especifican los números]": 2 (0+2) ≈ 11.76% (de 17) o ≈ 13.33% (de 15) o ≈ 18.18% (de 11)

Diferentes Ps.I.E.O.: 4 ≈ 23.53% (de 17) o ≈ 26.67% (de 15) o ≈ 36.36% (de 11)

Tres Ps.I.E.O.: 4 (3+1) ≈ 23.53% (de 17) o ≈ 26.67% (de 15) o ≈ 36.36% (de 11)

Parcialmente relevantes: 2 ≈ 11.76% (de 17) o ≈ 13.33% (de 15)

"Ps.I. de cada gráfica con los ejes": 2(2+0) ≈ 11.76% (de 17) o ≈ 13.33% (de 15)

Imprecisas: 3 ≈ 17.65% (de 17) o = 20% (de 15)

"Punto de intersección": 2 (1+1) ≈ 11.76% (de 17) o ≈ 13.33% (de 15)

"Posición": 1 (0+1) ≈ 5.88% (de 17) o ≈ 6.67% (de 15)

Número de diferencias en gráficas

Nº de diferencias *enunciadas*	Frecuencia (número de equipos)
1	10(4+6)
4	4(3+1)
2	1(0+1)

Nº de diferencias *correctas*	Frecuencia (número de equipos)
1	7(1+6)
4	4(3+1)
0	4(3+1)

2º Plano. Diferencias en gráficas. CONCENTRADO

Total de equipos:	17
Equipos que contestaron:	15 ≈ 88.24 %
Teóricas por cada equipo:	5
Teóricas de los 17 equipos:	85
Teóricas de 15 equipos:	75
Enunciadas:	28 ≈ 32.94% (de 85) o ≈ 37.33% (de 75)
Correctas:	23 ≈ 27.06% (de 85) o ≈ 30.67% (de 75) o ≈ 82.14% (de 28)
Parcialmente relevantes:	2 ≈ 2.35% (de 85) o ≈ 2.67% (de 75) o ≈ 7.14% (de 28)
Imprecisas:	3 ≈ 3.53% (de 85) o = 4% (de 75) o ≈ 10.72% (de 28)

2º PLANO. *Correlaciones* entre *diferencias*

Nota: Las correlaciones en esta Tarea no eran obligatorias.

Nº total de equipos: 17 (9+8)

No contestaron: 2 (2+0)

No correlacionan: 6(1+2) ≈ 35.29% (de 17) o 40% (de 15)

Correlacionan: 9 (5+4) (≈ 52.94% (de 17) o 60% (de 15)

Correctas y completas: 8 (4+4) ≈ 47.06% (de 17) o ≈ 53.33% (de 15) o ≈ 88.89% (de 9)

Correctas e incompletas: 1 (1+0) ≈ 5.88% (de 17) o ≈ 6.67% (de 15) o ≈ 11.11% (de 9)

2º Plano. Similitudes en ecuaciones

Nº total de equipos: 17 (9+8)

No contestaron: 1 (1+0) *≈5.88%* *(de 17)*

Correctas

“Variable dependiente despejada”: 16 (8+8) ≈ 94.12% (de 17) o = 100% (de 16)

“Dos variables”: 15 (8+7) ≈ 88.23% (de 17) o ≈ 93.75% (de 16)

“Exponente de la v.i. igual a uno”: 15 (8+7) ≈ 88.23% (de 17) o ≈ 93.75% (de 16)

Referencia al “coeficiente de la v.i.”: 10 (3+7) ≈ 58.82% (de 17) o ≈ 62.5% (de 16)

“El coeficiente de la v.i. es uno”: 7 (3+4) ≈ 41.18% (de 17) o ≈ 46.67% (de 15) o = 70% (de 10)

“El valor del coeficiente de la v.i. es uno”: 3(0 +3) ≈ 17.65% (de 17) o = 20% (de 15) o = 30% (de 10)

“Signo del coeficiente de la v.i.”: 7 (4 + 2+🕛) ≈ 41.18% (de 17) o ≈ 43.75% (de 16)

Número de similitudes en ecuaciones

Nº de similitudes *enunciadas*	Frecuencia (número de equipos)
4	8(5+3)
5	4(1+3)
3	3(2+1)
2	1(0+1)

Nº de similitudes *correctas*	Frecuencia (número de equipos)
4	8(5+3)
5	4(1+3)
3	3(2+1)
2	1(0+1)

2º Plano. Similitudes en ecuaciones. Concentrado

Total de equipos:	17
Equipos que contestaron:	16 ≈ 94.12% (de 17)
Teóricas por cada equipo:	5
Teóricas de los 17 equipos:	85
Teóricas de 16 equipos:	80
Enunciadas:	63 ≈ 74.12% (de 85) o ≈ 78.75% (de 80)
Correctas:	63 ≈ 74.12% (de 85) o ≈ 78.75% (de 80) o = 100% (de 63)

2º PLANO. Similitudes en gráficas

Nº total de equipos: 17 (9+8)

No contestaron: 1 (1+0) *≈5.88% (de 17)*

Correctas

“Continuas e infinitas”: 16 (8+8) ≈ 94.12% (de 17) o = 100% (de 16)

“Rectas”: 16 (8+8) ≈ 94.12% (de 17) o = 100% (de 16)

“Están en un Plano Cartesiano”: 15 (8+7) ≈ 88.24% (de 17) o ≈ 93.75% (de 16)

“Necesariamente Cuadrantes I y III”: 10 (4 + 4+🕚) ≈ 58.82% (de 17) o ≈ 62.5% (de 16)

“El ángulo de inclinación (α)”: 6 (3+3) ≈ 35.29% (de 17) o ≈ 37.5% (de 16)

“0°< α < 90°”: 3 (1 + 1+🕚) ≈ 17.65% (de 17) o ≈ 18.75% (de 16)

“No paralelas a los ejes”: 1 (0+1) ≈ 5.88% (de 17) o ≈ 6.25% (de 16)

No relevantes: 1 ≈5.88% (de 17) o ≈6.25% (de 16)

“Su punto de intersección está en el E.O.”: 1(0+1) ≈ 5.88% (de 17) o ≈ 6.25% (de 16)

Incorrectas: 3 ≈17.65% (de 17) o ≈18.75% (de 16)

Por “propiedad”: 3 ≈ 17.65% (de 17) o ≈ 18.75% (de 16)

“Son paralelas (entre si)”: 3 (0+3) ≈17.65% (de 17) o ≈ 18.75% (de 16)

Número de similitudes en gráficas

Nº de similitudes *enunciadas*	Frecuencia (número de alumnos)
4	7(4+3)
5	3(2+1)
3	3(2+1)
6	2(0+2)
7	1(0+1)

Nº de similitudes *correctas*	Frecuencia (número de alumnos)
4	8(4+4)
5	4(2+2)
3	3(2+1)
6	1(0+1)

2º Plano. Similitudes en gráficas. Concentrado

Total de equipos:	17
Equipos que contestaron:	16 ≈ 94.12% (de 17)
Teóricas por cada equipo:	6
Teóricas de los 17 equipos:	102
Teóricas de 16 equipos	96
Enunciadas:	71 ≈ 69.61% (de 102) o ≈ 73.96% (de 96)
Correctas:	67 ≈ 65.69% (de 102) o ≈ 69.79% (de 96) o ≈ 94.36% (de 71)
No relevantes:	1 ≈ 0.98% (de 102) o ≈ 1.04% (de 96) o ≈ 1.41% (de 71)
Incorrectas:	3 ≈ 2.94% (de 102) o ≈ 3.12% (de 96) o ≈ 4.23% (de 71)

2º Plano. *Correlaciones* entre *similitudes*

Nota: Las correlaciones en esta Tarea no eran obligatorias.

Nº total de equipos: 17 (9+8)

No contestaron: 1(1+0) *≈ 5.88% (de 17)*

No correlacionan: 4(1+3) *≈ 23.53% (de 17) o = 25% (de 16)*

Correlacionan: 12 (7+5) *(≈ 70.59% (de 17) o = 75% (de 16)*

Correctas y completas: 11 (6+5) ≈ 64.7% (de 17) o ≈ 68.75% (de 16) o ≈ 91.67% (de 12)

Correctas e incompletas: 1 (1+0) ≈ 5.88% (de 17) o ≈ 6.25% (de 16) o ≈ 8.33% (de 12)

2º Plano. Diferencias y similitudes en ecuaciones y gráficas.

Nº total de equipos: 17 (9+8)

Equipos que contestaron diferencias: 15 (7+8) *≈ 88.24 %*

Equipos que contestaron similitudes: 16 *(8+8)* *≈ 94.12 %*

Diferencias en ecuaciones vs. diferencias en gráficas

	Ecuaciones	Gráficas
Teóricas (de 17 equipos)	68	85
Emunciadas	30 ≈ 44.12% (de 68)	28 ≈ 32.94% (de 85)
Correctas	28 ≈ 41.18% (de 68) o ≈ 93.34% (de 30)	23 ≈ 27.06% (de 85) o ≈ 82.15% (de 28)
Parcialmente relevantes:	0	2 ≈ 2.35% (de 85) o ≈ 7.14% (de 28)
Imprecisas	0	3 ≈ 3.53% (de 85) o ≈ 10.71% (de 28)
Imprecisas-Incorrectas	1 ≈ 1.47% (de 68) o ≈ 3.33% (de 30)	0
Incorrectas	1 ≈ 1.47% (de 68) o ≈ 3.33% (de 30)	0

Similitudes en ecuaciones vs. similitudes en gráficas

	Ecuaciones	Gráficas
Teóricas (de 17 equipos)	85	102
Heredadas*	51	51
Nuevas*	34	51
Emunciadas	63 ≈ 74.12% (de 85)	71 ≈ 69.61% (de 102)
Correctas	63 ≈ 74.12% (de 85) o =100% (de 63)	67 ≈ 65.69% (de 102) o ≈ 94.37% (de 71)
Heredadas*	46 ≈ 90.2% (de 51) o ≈ 73.02% (de 63)	48 ≈ 94.12% (de 51) o ≈ 71.64% (de 67)
Nuevas*	17 = 50% (de 34) o ≈ 26.98% (de 63)	19 ≈ 37.25% (de 51) o ≈ 28.36% (de 67)
No relevantes	0	1 ≈ 0.98% (de 102) o ≈ 1.41% (de 71)
Incorrectas	0	3 ≈ 2.94% (de 102) o ≈ 4.22% (de 71)

* Las similitudes que presentan tanto las ecuaciones como las gráficas del 1er. Plano se pueden dividir en dos: las que "heredan" de los análisis anteriores (similitudes entre bloques y similitudes entre columnas) y las que son propias de este Plano. Las primeras son denominadas *heredadas* y las segundas, *nuevas*.

Nuevamente, estas dos tablas muestran que, por un lado, los estudiantes logran mayor éxito al trabajar con ecuaciones que con gráficas. Y por otro, que el rendimiento en similitudes es superior al de las diferencias.

Otros resultados que se obtienen del trabajo en equipo son los siguientes:

- De los 13 equipos (≈ 86.66%) que contestaron correctamente las diferencias en ecuaciones, *cinco* (≈ 29.41% de 17) registran las cuatro diferencias teóricas y, de los 11 equipos (≈64.71%) que responden adecuadamente las diferencias en gráficas, *cuatro* (≈23.53% de 17), enuncian las cuatro diferencias teóricas.

- El promedio de diferencias correctas en ecuaciones enunciadas por los equipos es casi dos (1.86). Y el de gráficas, está entre uno y dos (1.53).

- Tanto para las similitudes en ecuaciones como para las similitudes en gráficas, el promedio de respuestas correctas por equipo es, prácticamente cuatro. Dos por debajo de las teóricas en gráficas y una por debajo de las teóricas en ecuaciones.

- De las tres similitudes heredadas en ecuaciones, sólo una de ellas la refieren los 16 equipos (≈ 94.12%) que contestaron. Las otras dos, 15 (≈ 88.24%). En relación a las gráficas, de las tres similitudes heredadas, dos de ellas la registran los 16 equipos y la otra, 15 (≈ 88.24%).

- *Cuatro* equipos (≈ 23.53%) enuncian las dos nuevas similitudes en ecuaciones y sólo *uno* (≈5.88%), las tres en gráficas.

COMENTARIO: *Las dos nuevas similitudes en ecuaciones son: "el signo del coeficiente de la variable independiente" y "el coeficiente de la variable independiente es uno". Que la* *segunda, no haya eclipsado a la primera en cuatro equipos, es una posición que favorece significativamente la discusión grupal que se lleva a cabo después del trabajo en equipo.*

Una de las tres nuevas similitudes en gráficas es "el valor de α" y más específicamente "$\alpha = 45^{\circ}$". Los seis equipos ($\approx$ 35.29%) que la registran lo hacen en el primer sentido. Desaprovechan el trabajo individual de tres compañeros, que explicitan que "$\alpha \approx 45^{\circ}$".

- *Nueve* equipos ($\approx$ 52.94%) correlacionan las diferencias y 12 ($\approx$ 70.59%), las similitudes.

COMENTARIO: *En esta tarea las correlaciones no son obligatorias.*

- *Diez* equipos ($\approx$ 58.82%) refieren que una similitud en gráficas es los Cuadrantes I y III por los que necesariamente pasan las rectas. Tres de ellos ($\approx$ 17.65% de 17) registran otra nueva similitud en gráficas: "$0^{\circ} < \alpha < 90^{\circ}$". La contraparte algebraica de estas dos similitudes es una de las dos nuevas similitudes en ecuaciones. A saber, "el signo del coeficiente de la variable independiente es positivo". Enunciada por *siete* de los diez equipos.

COMENTARIO: *Dos equipos anotan las dos similitudes en gráficas citadas en el párrafo anterior y la correspondiente similitud en ecuaciones. Al momento de correlacionar, lo hacen correctamente. Es decir, "el signo del coeficiente de la variable independiente es positivo" lo correlacionan con "las rectas pasan necesariamente por los Cuadrantes I y III" y con "$0^{\circ} < \alpha < 90^{\circ}$". Problemas difíciles logran superar estos equipos.*

2° PLANO
SEGUNDA PARTE DE LA TAREA 22 Y 23. COMPARACIONES

2° PLANO. Diferencias y similitudes en ecuaciones y gráficas. Individual y en equipo

Nº total de alumnos: 58 (30+28) *Nº total de equipos: 17* (9+8)

Diferencias en ecuaciones vs. diferencias en gráficas e individual vs. equipos

	Ecuaciones		Gráficas	
	Individual	*Equipos*	*Individual*	*Equipos*
Teóricas	232	68	290	85
Enunciadas	74 ≈ 31.9% (de 232)	30 ≈ 44.12% (de 68)	74 ≈ 25.52% (de 290)	28 ≈ 32.94% (de 85)
Correctas	57 ≈ 24.57% (de 232)	28 ≈ 41.18% (de 68)	27 ≈ 9.31% (de 290)	23 ≈ 27.06% (de 85)
Parcialmente relevantes	0	0	8 ≈ 2.76% (de 290)	2 ≈ 2.35% (de 85)
No relevantes	0	0	5 ≈ 1.72% (de 290)	0
Imprecisas	0	0	21 ≈ 7.24% (de 290)	3 ≈ 3.53% (de 85)
Ambiguas	0	0	1 ≈ 0.34% (de 290)	0
Imprecisas-incorrectas	12 ≈ 5.17% (de 232)	1 ≈ 1.47% (de 68)	2 ≈ 0.69% (de 290)	0
Incorrectas	5 ≈ 2.15% (de 232)	1 ≈ 1.47% (de 68)	10 ≈ 3.45% (de 290)	0

Nota: Todos los porcentajes contenidos en esta tabla están calculados con respecto a las *teóricas*

Similitudes en ecuaciones vs. similitudes en gráficas e individual vs. equipo

	Ecuaciones		Gráficas	
	Individual	*Equipos*	*Individual*	*Equipos*
Teóricas	290	85	348	102
Heredadas	174	51	174	51
Nuevas	116	34	174	51
Emunciadas	190 ≈ 65.52% (de 290)	63 ≈ 74.12% (de 85)	195 ≈ 56.03% (de 348)	71 ≈ 69.61% (de 102)
Correctas	181 ≈ 62.41% (de 290)	63 ≈ 74.12% (de 85)	166 ≈ 47.7% (de 348)	67 ≈ 65.69% (de 102)
Heredadas	144 ≈ 82.76% (de 174)	46 ≈ 90.2% (de 51)	147 ≈ 84.48% (de 174)	48 ≈ 94.12% (de 51)
Nuevas	37 ≈ 31.9% (de 116)	17 ≈ = 50% (de 34)	19 ≈ 10.92% (de 174)	19 ≈ 37.25% (de 51)
No relevantes	2 ≈ 0.69% (de 290)	0	3 ≈ 0.86% (de 348)	1 ≈ 0.98% (de 102)
Por inferencia	0	0	1 ≈ 0.29% (de 348)	0
Mezcladas	0	0	1 ≈ 0.29% (de 348)	0
Imprecisas	3 ≈ 1.03% (de 290)	0	4 ≈ 1.15% (de 348)	0
Ambiguas	0	0	4 ≈ 1.15% (de 348)	0
Imprecisas-incorrectas	2 ≈ 0.69% (de 290)	0	2 ≈ 0.57% (de 348)	0
Incorrectas	2 ≈ 0.69% (de 290)	0	14 ≈ 4.02% (de 348)	3 ≈ 2.94% (de 102)

Nota: Todos los porcentajes contenidos en esta tabla están calculados con respecto a los teóricos

Las dos tablas de este apartado hablan por sí mismas. Incrementar el rendimiento individual en 12 puntos porcentuales, en 18, casi duplicando o prácticamente triplicarlo con el trabajo en equipo, es una muestra de las bondades de esta forma de trabajo.

Además, en ellas se observa que el desempeño de los estudiantes, bien sea individual o por equipo, es superior en ecuaciones que en gráficas, independientemente de que se trabajen diferencias o similitudes y que, en éstas últimas, los alumnos logran mayores éxitos que en las diferencias, al margen de que sean ecuaciones o gráficas.

ANEXO 4
RESPUESTAS DEL 4°
INSTRUMENTO DE COMPRENSIÓN

Introducción

El denominado “4º Instrumento de Comprensión”, como se describe en el Capítulo3 y 5, es el mismo Cuestionario que se les aplicó a los 70 estudiantes que fueron sometidos a un proceso de instrucción con la intención de que lograran el dominio en la conversión de registros de representación gráfico y algebraico en funciones polinomiales de la forma $y = ax^n + b$ donde a, $b \in \Re$, $a \neq 0$ y $n = 1, 2, 3$. Dicho Cuestionario, como se ha mencionado en diversas ocasiones se compone de dos partes; la primera, consta de 15 preguntas referidas al proceso ecuación→gráfica y la segunda de ellas, contiene 15 preguntas concernientes al proceso gráfica→ecuación. Este 4° Instrumento de Comprensión se aplica a diez de los 64 estudiantes que mostraron dominio en la citada conversión un año escolar atrás.

El citado Cuestionario se aplica durante la entrevista que se lleva a cabo con cada uno de los estudiantes. Ésta consta de tres momentos: en el primero, se les solicita a los estudiantes que contesten las 30 preguntas de dicho Cuestionario (1ª aplicación), en el segundo, se les concede un tiempo para que por ellos mismos traten de disipar las dudas que les hayan surgido en esa 1ª aplicación y en el tercer momento, algunos alumnos llevan a cabo una 2ª aplicación del Cuestionario y otros, se limitan a revisar las respuestas que habían proporcionado en la 1ª aplicación y corrigen lo que consideran pertinente.

Considerando lo anterior y el hecho de que los diez alumnos son referidos en esta sección como 1°, 2°, …, 10° ─respondiendo al orden en el que fueron entrevistados─ a continuación, se muestran 25 tablas: las 20 primeras (dos para cada alumno) contienen las respuestas individuales de los estudiantes a las dos partes del Cuestionario, tanto en su 1ª aplicación como en la 2ª (o en la revisión, según sea el caso) y en las cinco restantes se concentran algunos resultados: tres tablas se centran en los equívocos de los alumnos y las otras dos, en el tipo de respuestas.

RESPUESTAS DEL 1ER. ESTUDIANTE
PRIMERA Y SEGUNDA APLICACIÓN

Primera parte del Cuestionario
(*ecuación → gráfica)*

		Respuesta dada por el estudiante				
Nº de pregunta	Respuesta correcta (Nº de gráfica)	Nº de aplicación	Correcta	Nº de gráfica incorrecta	Equívoco	Posible fuente de equívoco (Tipo de *Efecto*)
1	8	1ª	Si			
		2ª	Si			
2	25	1ª	No	27	Abertura	*Numérico*
		2ª	Si			
3	54	1ª	Si			
		2ª	Si			
4	41	1ª	No	50	Cuadrantes	*De visión parcial*
		2ª	Si			
5	34	1ª	No	36	Abertura	*Numérico con valor absoluto*
		2ª	Si			
6	13	1ª	Si			
		2ª	Si			
7	12	1ª	No	11	α	*Lineal con valor absoluto*
		2ª	No	11	α	*Lineal con valor absoluto*
8	31	1ª	Si			
		2ª	No	35	Abertura	*De visión parcial*
9	39	1ª	No	38	Abertura	*Numérico*
		2ª	Si			
10	26	1ª	No	24	Abertura	*Numérico*
		2ª	Si			
11	42	1ª	No	44	Abertura	*Numérico*
		2ª	Si			
12	16	1ª	No	18	α	*Lineal con valor absoluto*
		2ª	No	18	α	*Lineal con valor absoluto*
13	30	1ª	No	29	Abertura	*Numérico con valor absoluto*
		2ª	Si			
14	7	1ª	Si			
		2ª	Si			
15	51	1ª	No	53	Abertura	*Numérico con valor absoluto*
		2ª	Si			

RESPUESTAS DEL 1ER. ESTUDIANTE
PRIMERA Y SEGUNDA APLICACIÓN

Segunda parte del Cuestionario
(gráfica $\rightarrow$ *ecuación)*

			Respuesta dada por el estudiante			
Nº de pregunta	Nº de gráfica	Respuesta correcta (características de la ecuación asociada)	Nº de aplicación	Correcta	Característica incorrecta de la ecuación asociada	Posible fuente de equívoco (Tipo de *Efecto*)
1	21	$n = 2,\ a > 1$ y $b = 0$	1ª	No	$0 < a < 1$	*Numérico*
			2ª	Si		
2	5	$n = 1, a = 1$ y $b < 0$	1ª	Si		
			2ª	Si		
3	48	$n = 3, a < -1$ y $b = 0$	1ª	No	$-1 < a < 0$	*Numérico con valor absoluto*
			2ª	Si		
4	52	$n = 3, -1 < a < 0$ y $b < 0$	1ª	No	$a < -1$	*Numérico con valor absoluto*
			2ª	Si		
5	15	$n = 1, -1 < a < 0$ y $b > 0$	1ª	No	$a < -1$	*Lineal con valor absoluto*
			2ª	No	$a < -1$	*Lineal con valor absoluto*
6	36	$n = 2, a < -1$ y $b < 0$	1ª	No	$-1 < a < 0$	*Numérico con valor absoluto*
			2ª	Si		
7	24	$n = 2,\ 0 < a < 1$ y $b > 0$	1ª	No	$a > 1$	*Numérico*
			2ª	Si		
8	18	$n = 1,\ a < -1$ y $b < 0$	1ª	No	$-1 < a < 0$	*Lineal con valor absoluto*
			2ª	No	$-1 < a < 0$	*Lineal con valor absoluto*
9	49	$n = 3,\ a = -1$ y $b > 0$	1ª	Si		
			2ª	Si		
10	23	$n = 2,\ a = 1$ y $b < 0$	1ª	Si		
			2ª	Si		
11	9	$n = 1,\ a > 1$ y $b < 0$	1ª	Si		
			2ª	Si		
12	43	$n = 3,\ 0 < a < 1$ y $b < 0$	1ª	No	$a > 1$	*Numérico*
			2ª	Si		
13	33	$n = 2,\ -1 < a < 0$ y $b > 0$	1ª	No	$a < -1$	*Numérico con valor absoluto*
			2ª	Si		
14	44	$n = 3,\ a > 1$ y $b > 0$	1ª	Si		
			2ª	Si		
15	6	$n = 1,\ 0 < a < 1$ y $b > 0$	1ª	Si		
			2ª	Si		

RESPUESTAS DEL 2º ESTUDIANTE
PRIMERA Y SEGUNDA APLICACIÓN

Primera parte del Cuestionario
(*ecuación → gráfica)*

		Respuesta dada por el estudiante				
Nº de pregunta	Respuesta correcta (Nº de gráfica)	Nº de aplicación	Correcta	Nº de gráfica incorrecta	Equívoco	Posible fuente de equívoco (Tipo de *Efecto*)
1	8	1ª	Si			
		2ª	Si			
2	25	1ª	No	27	Abertura	*Numérico*
		2ª	Si			
3	54	1ª	Si			
		2ª	Si			
4	41	1ª	Si			
		2ª	Si			
5	34	1ª	Si			
		2ª	Si			
6	13	1ª	Si			
		2ª	Si			
7	12	1ª	Si			
		2ª	Si			
8	31	1ª	No	32	Vértice	*De visión parcial*
		2ª	Si			
9	39	1ª	Si			
		2ª	Si			
10	26	1ª	Si			
		2ª	Si			
11	42	1ª	Si			
		2ª	Si			
12	16	1ª	Si			
		2ª	Si			
13	30	1ª	No	29	Abertura	*Numérico con valor absoluto*
		2ª	Si			
14	7	1ª	Si			
		2ª	Si			
15	51	1ª	No	52	Punto de inflexión	*De visión parcial*
		2ª	Si			

RESPUESTAS DEL 2º ESTUDIANTE
PRIMERA Y SEGUNDA APLICACIÓN

Segunda parte del Cuestionario
(gráfica $\rightarrow$ *ecuación)*

			Respuesta dada por el estudiante			
Nº de pregunta	Nº de gráfica	Respuesta correcta (características de la ecuación asociada)	Nº de aplicación	Correcta	Característica incorrecta de la ecuación asociada	Posible fuente de equívoco (Tipo de *Efecto*)
1	21	n = 2, $a > 1$ y $b = 0$	1ª	Si		
			2ª	Si		
2	5	$n = 1$, $a = 1$ y $b < 0$	1ª	Si		
			2ª	Si		
3	48	$n = 3$, $a < -1$ y $b = 0$	1ª	No	$a > 1$	*De visión parcial*
			2ª	Si		
4	52	$n = 3$, $-1 < a < 0$ y $b < 0$	1ª	No	$0 < a < 1$	*De visión parcial*
			2ª	Si		
5	15	$n = 1$, $-1 < a < 0$ y $b > 0$	1ª	Si		
			2ª	Si		
6	36	$n = 2$, $a < -1$ y $b < 0$	1ª	Si		
			2ª	Si		
7	24	$n = 2$, $0 < a < 1$ y $b > 0$	1ª	Si		
			2ª	Si		
8	18	$n = 1$, $a < -1$ y $b < 0$	1ª	Si		
			2ª	Si		
9	49	$n = 3$, $a = -1$ y $b > 0$	1ª	Si		
			2ª	Si		
10	23	$n = 2$, $a = 1$ y $b < 0$	1ª	Si		
			2ª	Si		
11	9	$n = 1$, $a > 1$ y $b < 0$	1ª	Si		
			2ª	Si		
12	43	$n = 3$, $0 < a < 1$ y $b < 0$	1ª	Si		
			2ª	Si		
13	33	$n = 2$, $-1 < a < 0$ y $b > 0$	1ª	No	$0 < a < 1$	*De visión parcial*
			2ª	Si		
14	44	$n = 3$, $a > 1$ y $b > 0$	1ª	Si		
			2ª	Si		
15	6	$n = 1$, $0 < a < 1$ y $b > 0$	1ª	Si		
			2ª	Si		

RESPUESTAS DEL 3ER. ESTUDIANTE
PRIMERA Y SEGUNDA APLICACIÓN

Primera parte del Cuestionario
(*ecuación → gráfica)*

		Respuesta dada por el estudiante				
Nº de pregunta	Respuesta correcta (Nº de gráfica)	Nº de aplicación	Correcta	Nº de gráfica incorrecta	Equívoco	Posible fuente de equívoco (Tipo de *Efecto*)
1	8	1ª	No	4	α	*De visión parcial*
		2ª	Si			
2	25	1ª	No	27	Abertura	*Numérico*
		2ª	Si			
3	54	1ª	No	50	Abertura	*De visión parcial*
		2ª	Si			
4	41	1ª	Si			
		2ª	Si			
5	34	1ª	No	32	Abertura	*De visión parcial*
		2ª	Si			
6	13	1ª	Si			
		2ª	Si			
7	12	1ª	Si			
		2ª	Si			
8	31	1ª	Si			
		2ª	Si			
9	39	1ª	No	38	Abertura	*Numérico*
		2ª	Si			
10	26	1ª	No	24	Abertura	*Numérico*
		2ª	Si			
11	42	1ª	Si			
		2ª	Si			
12	16	1ª	No	18	α	*De visión parcial*
		2ª	Si			
13	30	1ª	Si			
		2ª	Si			
14	7	1ª	No	5	α	*De visión parcial*
		2ª	Si			
15	51	1ª	Si			
		2ª	Si			

RESPUESTAS DEL 3ER. ESTUDIANTE
PRIMERA Y SEGUNDA APLICACIÓN

Segunda parte del Cuestionario
(gráfica $\rightarrow$ *ecuación)*

			Respuesta dada por el estudiante			
Nº de pregunta	Nº de gráfica	Respuesta correcta (características de la ecuación asociada)	Nº de aplicación	Correcta	Característica incorrecta de la ecuación asociada	Posible fuente de equívoco (Tipo de *Efecto*)
1	21	n = 2, $a > 1$ y $b = 0$	1ª	No	$0 < a < 1$	*Numérico*
			2ª	Si		
2	5	$n = 1$, $a = 1$ y $b < 0$	1ª	Si		
			2ª	Si		
3	48	$n = 3$, $a < -1$ y $b = 0$	1ª	No	$a > 1$	*De visión parcial*
			2ª	Si		
4	52	$n = 3$, $-1 < a < 0$ y $b < 0$	1ª	No	$0 < a < 1$	*De visión parcial*
			2ª	Si		
5	15	$n = 1$, $-1 < a < 0$ y $b > 0$	1ª	No	$a < -1$	*Lineal invertido con valor absoluto*
			2ª	Si		
6	36	$n = 2$, $a < -1$ y $b < 0$	1ª	No	$-1 < a < 0$	*Numérico con valor absoluto*
			2ª	Si		
7	24	$n = 2$, $0 < a < 1$ y $b > 0$	1ª	No	$n = 3$	*De visión parcial*
			2ª	Si		
8	18	$n = 1$, $a < -1$ y $b < 0$	1ª	No	$-1 < a < 0$	*Lineal invertido con valor absoluto*
			2ª	Si		
9	49	$n = 3$, $a = -1$ y $b > 0$	1ª	No	$a = 1$	*De visión parcial*
			2ª	Si		
10	23	$n = 2$, $a = 1$ y $b < 0$	1ª	Si		
			2ª	Si		
11	9	$n = 1$, $a > 1$ y $b < 0$	1ª	No	$0 < a < 1$	*Lineal invertido*
			2ª	Si		
12	43	$n = 3$, $0 < a < 1$ y $b < 0$	1ª	Si		
			2ª	Si		
13	33	$n = 2$, $-1 < a < 0$ y $b > 0$	1ª	Si		
			2ª	Si		
14	44	$n = 3$, $a > 1$ y $b > 0$	1ª	Si		
			2ª	Si		
15	6	$n = 1$, $0 < a < 1$ y $b > 0$	1ª	No	$a > 1$	*Lineal invertido*
			2ª	Si		

RESPUESTAS DEL 4º ESTUDIANTE
UNA APLICACIÓN Y SU REVISIÓN

Primera parte del Cuestionario
(ecuación → gráfica)

		Respuesta dada por el estudiante				
Nº de pregunta	Respuesta correcta (Nº de gráfica)	Aplicación y Revisión	Correcta	Nº de gráfica incorrecta	Equívoco	Posible fuente de equívoco (Tipo de *Efecto)*
1	8	1ª	Si			
		Revisión	Si			
2	25	1ª	Si			
		Revisión	Si			
3	54	1ª	Si			
		Revisión	Si			
4	41	1ª	Si			
		Revisión	Si			
5	34	1ª	Si			
		Revisión	Si			
6	13	1ª	Si			
		Revisión	Si			
7	12	1ª	Si			
		Revisión	Si			
8	31	1ª	Si			
		Revisión	Si			
9	39	1ª	Si			
		Revisión	Si			
10	26	1ª	Si			
		Revisión	Si			
11	42	1ª	Si			
		Revisión	Si			
12	16	1ª	No	7	α	*De visión parcial*
		Revisión	Si			
13	30	1ª	Si			
		Revisión	Si			
14	7	1ª	Si			
		Revisión	Si			
15	51	1ª	Si			
		Revisión	Si			

RESPUESTAS DEL 4º ESTUDIANTE
UNA APLICACIÓN Y SU REVISIÓN

Segunda parte del Cuestionario
(gráfica $\rightarrow$ *ecuación)*

Nº de pregunta	Nº de gráfica	Respuesta correcta (características de la ecuación asociada)	Respuesta dada por el estudiante: Aplicación y Revisión	Correcta	Característica(s) incorrecta(s) de la ecuación asociada	Posible fuente de equívoco (Tipo de *Efecto*)
1	21	n = 2, $a>1$ y $b=0$	1ª	No	$a=1$ y $b>1$	*De inversión parcial de roles*
			Revisión	Si		
2	5	$n=1, a=1$ y $b<0$	1ª	Si		
			Revisión	Si		
3	48	$n=3, a<-1$ y $b=0$	1ª	No	$a=-1$ y $b>1$	*De inversión parcial de roles*
			Revisión	Si		
4	52	$n=3, -1<a<0$ y $b<0$	1ª	Si		
			Revisión	Si		
5	15	$n=1, -1<a<0$ y $b>0$	1ª	No	$a>1$	*Lineal con valor absoluto*
			Revisión	Si		
6	36	$n=2, a<-1$ y $b<0$	1ª	Si		
			Revisión	Si		
7	24	$n=2,\ 0<a<1$ y $b>0$	1ª	No	$a>1$	*Numérico*
			Revisión	Si		
8	18	$n=1,\ a<-1$ y $b<0$	1ª	Si		
			Revisión	Si		
9	49	$n=3,\ a=-1$ y $b>0$	1ª	Si		
			Revisión	Si		
10	23	$n=2,\ a=1$ y $b<0$	1ª	Si		
			Revisión	Si		
11	9	$n=1,\ a>1$ y $b<0$	1ª	Si		
			Revisión	Si		
12	43	$n=3,\ 0<a<1$ y $b<0$	1ª	Si		
			Revisión	Si		
13	33	$n=2,\ -1<a<0$ y $b>0$	1ª	Si		
			Revisión	Si		
14	44	$n=3,\ a>1$ y $b>0$	1ª	Si		
			Revisión	Si		
15	6	$n=1,\ 0<a<1$ y $b>0$	1ª	Si		
			Revisión	Si		

RESPUESTAS DEL 5º ESTUDIANTE
SÓLO UNA APLICACIÓN

Primera parte del Cuestionario
(ecuación → gráfica)

Nº de pregunta	Respuesta correcta (Nº de gráfica)	Respuesta dada por el estudiante: Aplicación	Correcta	Nº de gráfica incorrecta	Equívoco	Posible fuente de equívoco (Tipo de *Efecto*)
1	8	1ª	Si			
2	25	1ª	Si			
3	54	1ª	Si			
4	41	1ª	Si			
5	34	1ª	Si			
6	13	1ª	Si			
7	12	1ª	Si			
8	31	1ª	Si			
9	39	1ª	Si			
10	26	1ª	Si			
11	42	1ª	Si			
12	16	1ª	Si			
13	30	1ª	Si			
14	7	1ª	Si			
15	51	1ª	Si			

RESPUESTAS DEL 5º ESTUDIANTE
SÓLO UNA APLICACIÓN

Segunda parte del Cuestionario
(gráfica $\rightarrow$ *ecuación)*

			Respuesta dada por el estudiante			
Nº de pregunta	Nº de gráfica	Respuesta correcta (características de la ecuación asociada)	Nº de aplicación	Correcta	Característica(s) incorrecta(s) de la ecuación asociada	Posible fuente de equívoco (Tipo de *Efecto*)
1	21	n = 2, $a > 1$ y $b = 0$	1ª	Si		
2	5	$n = 1$, $a = 1$ y $b < 0$	1ª	Si		
3	48	$n = 3$, $a < -1$ y $b = 0$	1ª	Si		
4	52	$n = 3$, $-1 < a < 0$ y $b < 0$	1ª	Si		
5	15	$n = 1$, $-1 < a < 0$ y $b > 0$	1ª	Si		
6	36	$n = 2$, $a < -1$ y $b < 0$	1ª	Si		
7	24	$n = 2$, $0 < a < 1$ y $b > 0$	1ª	Si		
8	18	$n = 1$, $a < -1$ y $b < 0$	1ª	Si		
9	49	$n = 3$, $a = -1$ y $b > 0$	1ª	Si		
10	23	$n = 2$, $a = 1$ y $b < 0$	1ª	Si		
11	9	$n = 1$, $a > 1$ y $b < 0$	1ª	Si		
12	43	$n = 3$, $0 < a < 1$ y $b < 0$	1ª	Si		
13	33	$n = 2$, $-1 < a < 0$ y $b > 0$	1ª	Si		
14	44	$n = 3$, $a > 1$ y $b > 0$	1ª	Si		
15	6	$n = 1$, $0 < a < 1$ y $b > 0$	1ª	Si		

RESPUESTAS DEL 6º ESTUDIANTE
UNA APLICACIÓN Y SU REVISIÓN

Primera parte del Cuestionario
(ecuación → gráfica)

Nº de pregunta	Respuesta correcta (Nº de gráfica)	Respuesta dada por el estudiante: Nº de aplicación	Correcta	Nº de gráfica incorrecta	Equívoco	Posible fuente de equívoco (Tipo de *Efecto*)
1	8	1ª	No	4	α	*De visión parcial*
		Revisión	Si			
2	25	1ª	Si			
		Revisión	Si			
3	54	1ª	Si			
		Revisión	Si			
4	41	1ª	Si			
		Revisión	Si			
5	34	1ª	Si			
		Revisión	Si			
6	13	1ª	Si			
		Revisión	Si			
7	12	1ª	Si			
		Revisión	Si			
8	31	1ª	Si			
		Revisión	Si			
9	39	1ª	Si			
		Revisión	Si			
10	26	1ª	Si			
		Revisión	Si			
11	42	1ª	Si			
		Revisión	Si			
12	16	1ª	Si			
		Revisión	Si			
13	30	1ª	Si			
		Revisión	Si			
14	7	1ª	Si			
		Revisión	Si			
15	51	1ª	Si			
		Revisión	Si			

RESPUESTAS DEL 6º ESTUDIANTE
SÓLO UNA APLICACIÓN

Segunda parte del Cuestionario
(gráfica → *ecuación)*

Nº de pregunta	Nº de gráfica	Respuesta correcta (características de la ecuación asociada)	Respuesta dada por el estudiante: Nº de aplicación	Correcta	Característica(s) incorrecta(s) de la ecuación asociada	Posible fuente de equívoco (Tipo de *Efecto*)
1	21	n = 2, $a > 1$ y $b = 0$	1ª	Si		
2	5	$n = 1, a = 1$ y $b < 0$	1ª	Si		
3	48	$n = 3, a < -1$ y $b = 0$	1ª	Si		
4	52	$n = 3, -1 < a < 0$ y $b < 0$	1ª	Si		
5	15	$n = 1, -1 < a < 0$ y $b > 0$	1ª	Si		
6	36	$n = 2, a < -1$ y $b < 0$	1ª	Si		
7	24	$n = 2,\ 0 < a < 1$ y $b > 0$	1ª	Si		
8	18	$n = 1,\ a < -1$ y $b < 0$	1ª	Si		
9	49	$n = 3,\ a = -1$ y $b > 0$	1ª	Si		
10	23	$n = 2,\ a = 1$ y $b < 0$	1ª	Si		
11	9	$n = 1,\ a > 1$ y $b < 0$	1ª	Si		
12	43	$n = 3,\ 0 < a < 1$ y $b < 0$	1ª	Si		
13	33	$n = 2,\ -1 < a < 0$ y $b > 0$	1ª	Si		
14	44	$n = 3,\ a > 1$ y $b > 0$	1ª	Si		
15	6	$n = 1,\ 0 < a < 1$ y $b > 0$	1ª	Si		

RESPUESTAS DEL 7º ESTUDIANTE
PRIMERA Y SEGUNDA APLICACIÓN

Primera parte del Cuestionario
(ecuación → gráfica)

Nº de pregunta	Respuesta correcta (Nº de gráfica)	Respuesta dada por el estudiante: Nº de aplicación	Correcta	Nº de gráfica incorrecta	Equívoco	Posible fuente de equívoco (Tipo de *Efecto*)
1	8	1ª	Si			
		2ª	Si			
2	25	1ª	No	27	Abertura	*Numérico*
		2ª	Si			
3	54	1ª	No	52	Abertura	*Numérico con valor absoluto*
		2ª	Si			
4	41	1ª	No	45	Abertura	*De visión parcial*
		2ª	Si			
5	34	1ª	No	36	Abertura	*Numérico con valor absoluto*
		2ª	Si			
6	13	1ª	Si			
		2ª	Si			
7	12	1ª	No	11	α	*Lineal con valor absoluto*
		2ª	Si			
8	31	1ª	No	22	Hacia donde abre	*De visión parcial*
		2ª	Si			
9	39	1ª	No	38	Abertura	*Numérico*
		2ª	Si			
10	26	1ª	No	24	Abertura	*Numérico*
		2ª	Si			
11	42	1ª	No	44	Abertura	*Numérico*
		2ª	Si			
12	16	1ª	No	18	α	*Lineal con valor absoluto*
		2ª	Si			
13	30	1ª	No	29	Abertura	*Numérico con valor absoluto*
		2ª	Si			
14	7	1ª	Si			
		2ª	Si			
15	51	1ª	No	53	Abertura	*Numérico con valor absoluto*
		2ª	Si			

RESPUESTAS DEL 7º ESTUDIANTE
PRIMERA Y SEGUNDA APLICACIÓN

Segunda parte del Cuestionario
(gráfica $\rightarrow$ *ecuación)*

Nº de pregunta	Nº de gráfica	Respuesta correcta (características de la ecuación asociada)	Respuesta dada por el estudiante: Nº de aplicación	Correcta	Característica incorrecta de la ecuación asociada	Posible fuente de equívoco (Tipo de *Efecto*)
1	21	n = 2, $a > 1$ y $b = 0$	1ª	Si		
			2ª	Si		
2	5	$n = 1$, $a = 1$ y $b < 0$	1ª	Si		
			2ª	Si		
3	48	$n = 3$, $a < -1$ y $b = 0$	1ª	No	$-1 < a < 0$	*Numérico con valor absoluto*
			2ª	Si		
4	52	$n = 3$, $-1 < a < 0$ y $b < 0$	1ª	No	$a < -1$	*Numérico con valor absoluto*
			2ª	Si		
5	15	$n = 1$, $-1 < a < 0$ y $b > 0$	1ª	No	$a < -1$	*Lineal invertido con valor absoluto*
			2ª	Si		
6	36	$n = 2$, $a < -1$ y $b < 0$	1ª	No	$a = -1$	*De visión parcial*
			2ª	Si		
7	24	$n = 2$, $0 < a < 1$ y $b > 0$	1ª	No	$a > 1$	*Numérico*
			2ª	Si		
8	18	$n = 1$, $a < -1$ y $b < 0$	1ª	No	$-1 < a < 0$	*Lineal invertido con valor absoluto*
			2ª	Si		
9	49	$n = 3$, $a = -1$ y $b > 0$	1ª	Si		
			2ª	Si		
10	23	$n = 2$, $a = 1$ y $b < 0$	1ª	Si		
			2ª	Si		
11	9	$n = 1$, $a > 1$ y $b < 0$	1ª	No	$0 < a < 1$	*Lineal invertido*
			2ª	Si		
12	43	$n = 3$, $0 < a < 1$ y $b < 0$	1ª	No	$a > 1$	*Numérico*
			2ª	Si		
13	33	$n = 2$, $-1 < a < 0$ y $b > 0$	1ª	No	$a < -1$	*Numérico con valor absoluto*
			2ª	Si		
14	44	$n = 3$, $a > 1$ y $b > 0$	1ª	No	$0 < a < 1$	*Numérico*
			2ª	Si		
15	6	$n = 1$, $0 < a < 1$ y $b > 0$	1ª	No	$a > 1$	*Lineal invertido*
			2ª	Si		

RESPUESTAS DEL 8º ESTUDIANTE
SÓLO UNA APLICACIÓN

Primera parte del Cuestionario
(ecuación → gráfica)

Nº de pregunta	Respuesta correcta (Nº de gráfica)	Respuesta dada por el estudiante: Aplicación	Correcta	Nº de gráfica incorrecta	Equívoco(s)	Posible fuente de equívoco (Tipo de *Efecto*)
1	8	1ª	No	13	α	*De proximidad* y *visión parcial*
2	25	1ª	No	27	Abertura	*Numérico*
3	54	1ª	No	50	Abertura	*De visión parcial*
4	41	1ª	Si			
5	34	1ª	No	36	Abertura	*Numérico con valor absoluto*
6	13	1ª	No	15	α	*De visión parcial*
7	12	1ª	No	3	α	*De proximidad, lineal invertido con valor absoluto y cotidiano del racional*
8	31	1ª	Si			
9	39	1ª	No	48	Cuadrantes	*De proximidad, numérico y cotidiano del racional*
10	26	1ª	Si			
11	42	1ª	No	53	Cuadrantes y abertura	*De proximidad y numérico*
12	16	1ª	No	9	α	*De proximidad y lineal invertido con valor absoluto*
13	30	1ª	Si			
14	7	1ª	No	18	α	*De proximidad y lineal invertido*
15	51	1ª	No	44	Cuadrantes y abertura	*De proximidad, y numérico con valor absoluto*

RESPUESTAS DEL 8º ESTUDIANTE
SÓLO UNA APLICACIÓN

Segunda parte del Cuestionario
(gráfica $\rightarrow$ *ecuación)*

			Respuesta dada por el estudiante			
Nº de pregunta	Nº de gráfica	Respuesta correcta (características de la ecuación asociada)	Aplicación	Correcta	Característica incompleta e/o incorrecta de la ecuación asociada	Posible fuente de equívoco (Tipo de *Efecto*)
1	21	n = 2, $a > 1$ y $b = 0$	1ª	Incompleta	Sin coeficiente de la v.i.* Sólo el signo positivo	*De parámetros libres*
2	5	$n = 1$, $a = 1$ y $b < 0$	1ª	No	$a = -1$	*De proximidad* y *parámetros libres*
3	48	$n = 3$, $a < -1$ y $b = 0$	1ª	Incompleta	Sin coeficiente de la v.i. Sólo el signo positivo	*De proximidad* y *parámetros libres*
4	52	$n = 3$, $-1 < a < 0$ y $b < 0$	1ª	Incompleta	Sin coeficiente de la v.i. Sólo el signo positivo	*De proximidad* y *parámetros libres*
5	15	$n = 1$, $-1 < a < 0$ y $b > 0$	1ª	Incompleta	Sin coeficiente de la v.i. Sólo el signo positivo	*De proximidad* y *parámetros libres*
6	36	$n = 2$, $a < -1$ y $b < 0$	1ª	Incompleta	Sin coeficiente de la v.i. Sólo el signo negativo	*De parámetros libres*
7	24	$n = 2$, $0 < a < 1$ y $b > 0$	1ª	Incompleta	Sin coeficiente de la v.i. Sólo el signo positivo	*De parámetros libres*
8	18	$n = 1$, $a < -1$ y $b < 0$	1ª	Incompleta	Sin coeficiente de la v.i. Sólo el signo positivo	*De proximidad* y *parámetros libres*
9	49	$n = 3$, $a = -1$ y $b > 0$	1ª	No	$a = 1$	*De proximidad*
10	23	$n = 2$, $a = 1$ y $b < 0$	1ª	Si		
11	9	$n = 1$, $a > 1$ y $b < 0$	1ª	Incompleta	Sin coeficiente de la v.i. Sólo el signo negativo	*De proximidad* y *parámetros libres*
12	43	$n = 3$, $0 < a < 1$ y $b < 0$	1ª	Incompleta	Sin coeficiente de la v.i. Sólo el signo negativo	*De proximidad* y *parámetros libres*
13	33	$n = 2$, $-1 < a < 0$ y $b > 0$	1ª	Incompleta	Sin coeficiente de la v.i. Sólo el signo negativo	*De parámetros libres*
14	44	$n = 3$, $a > 1$ y $b > 0$	1ª	Incompleta	Sin coeficiente de la v.i. Sólo el signo negativo	*De proximidad* y *parámetros libres*
15	6	$n = 1$, $0 < a < 1$ y $b > 0$	1ª	Incompleta	Sin coeficiente de la v.i. Sólo el signo negativo	*De proximidad* y *parámetros libres*

***** v.i.: Variable independiente

RESPUESTAS DEL 9º ESTUDIANTE
PRIMERA Y SEGUNDA APLICACIÓN

Primera parte del Cuestionario
(ecuación → gráfica)

		Respuesta dada por el estudiante				
Nº de pregunta	Respuesta correcta (Nº de gráfica)	Nº de aplicación	Correcta	Nºs de gráficas factibles	Fuente de la imprecisión	Posible fuente de equívoco (Tipo de *Efecto*)
1	8	1ª	Imprecisa	6 u 8	α	*De parámetros libres*
		2ª	Si			
2	25	1ª	Imprecisa	23, 25 o 27	Abertura	*De parámetros libres*
		2ª	Si			
3	54	1ª	Imprecisa	50, 52 o 54	Abertura	*De parámetros libres*
		2ª	Si			
4	41	1ª	No contestó			
		2ª	Si			
5	34	1ª	Imprecisa	32, 34 o 36	Abertura	*De parámetros libres*
		2ª	Si			
6	13	1ª	Si			
		2ª	Si			
7	12	1ª	Imprecisa	11 o12	α	*De parámetros libres*
		2ª	Si			
8	31	1ª	No	35	Abertura	*De visión parcial*
		2ª	Si			
9	39	1ª	Imprecisa	37, 38 o 39	Abertura	*De parámetros libres*
		2ª	Si			
10	26	1ª	Imprecisa	22, 24 o 26	Abertura	*De parámetros libres*
		2ª	Si			
11	42	1ª	Imprecisa	40, 42 o 44	Abertura	*De parámetros libres*
		2ª	Si			
12	16	1ª	Imprecisa	16 o18	α	*De parámetros libres*
		2ª	Si			
13	30	1ª	Imprecisa	28, 29 o 30	Abertura	*De parámetros libres*
		2ª	Si			
14	7	1ª	Imprecisa	7 o 9	α	*De parámetros libres*
		2ª	Si			
15	51	1ª	Imprecisa	51 o 53	Abertura	*De parámetros libres*
		2ª	Si			

RESPUESTAS DEL 9º ESTUDIANTE
PRIMERA Y SEGUNDA APLICACIÓN

Segunda parte del Cuestionario
(gráfica $\rightarrow$ *ecuación)*

Nº de pregunta	Nº de gráfica	Respuesta correcta (características de la ecuación asociada)	Respuesta dada por el estudiante: Nº de aplicación	Correcta	Característica incompleta de la ecuación asociada	Posible fuente de equívoco (Tipo de *Efecto*)
1	21	n = 2, $a > 1$ y $b = 0$	1ª	Incompleta	Sólo signo positivo de "*a*"*	*De parámetros libres*
			2ª	Si		
2	5	$n = 1$, $a = 1$ y $b < 0$	1ª	Si		
			2ª	Si		
3	48	$n = 3$, $a < -1$ y $b = 0$	1ª	Incompleta	Sólo signo negativo de "*a*"	*De parámetros libres*
			2ª	Si		
4	52	$n = 3$, $-1 < a < 0$ y $b < 0$	1ª	Incompleta	Sólo signo negativo de "*a*"	*De parámetros libres*
			2ª	Si		
5	15	$n = 1$, $-1 < a < 0$ y $b > 0$	1ª	Incompleta	Sólo signo negativo de "*a*"	*De parámetros libres*
			2ª	Si		
6	36	$n = 2$, $a < -1$ y $b < 0$	1ª	Incompleta	Sólo signo negativo de "*a*"	*De parámetros libres*
			2ª	Si		
7	24	$n = 2$, $0 < a < 1$ y $b > 0$	1ª	Incompleta	Sólo signo positivo de "*a*"	*De parámetros libres*
			2ª	Si		
8	18	$n = 1$, $a < -1$ y $b < 0$	1ª	Incompleta	Sólo signo negativo de "*a*"	*De parámetros libres*
			2ª	Si		
9	49	$n = 3$, $a = -1$ y $b > 0$	1ª	Si		
			2ª	Si		
10	23	$n = 2$, $a = 1$ y $b < 0$	1ª	Si		
			2ª	No	$n = 3$	*De visión parcial*
11	9	$n = 1$, $a > 1$ y $b < 0$	1ª	Incompleta	Sólo signo positivo de "*a*"	*De parámetros libres*
			2ª	Si		
12	43	$n = 3$, $0 < a < 1$ y $b < 0$	1ª	Incompleta	Sólo signo positivo de "*a*"	*De parámetros libres*
			2ª	Si		
13	33	$n = 2$, $-1 < a < 0$ y $b > 0$	1ª	Incompleta	Sólo signo negativo de "*a*"	*De parámetros libres*
			2ª	Si		
14	44	$n = 3$, $a > 1$ y $b > 0$	1ª	Incompleta	Sólo signo positivo de "*a*"	*De parámetros libres*
			2ª	Si		
15	6	$n = 1$, $0 < a < 1$ y $b > 0$	1ª	Incompleta	Sólo signo positivo de "*a*"	*De parámetros libres*
			2ª	Si		

***** *a*: Coeficiente de la variable independiente

RESPUESTAS DEL 10º ESTUDIANTE
PRIMERA Y SEGUNDA APLICACIÓN

Primera parte del Cuestionario
(*ecuación* $\rightarrow$ *gráfica)*

		Respuesta dada por el estudiante				
Nº de pregunta	Respuesta correcta (Nº de gráfica)	Nº de aplicación	Correcta	Nº de gráfica incorrecta	Equívoco(s)	Posible fuente de equívoco (Tipo de *Efecto*)
1	8	1ª	No	6	α	*Cotidiano del racional*
		2ª	No	6	α	*Cotidiano del racional*
2	25	1ª	Si			
		2ª	Si			
3	54	1ª	No	43	Cuadrantes y abertura	*De visión parcial y cotidiano del racional*
		2ª	No	52	Abertura	*Cotidiano del racional con valor absoluto*
4	41	1ª	Si			
		2ª	Si			
5	34	1ª	Si			
		2ª	Si			
6	13	1ª	Si			
		2ª	Si			
7	12	1ª	Si			
		2ª	No	11	α	*Cotidiano del racional con valor absoluto*
8	31	1ª	No	32	Posición del vértice	*De visión parcial*
		2ª	Si			
9	39	1ª	No	38	Abertura	*Cotidiano del racional*
		2ª	No	38	Abertura	*Cotidiano del racional*
10	26	1ª	No	24	Abertura	*Cotidiano del racional*
		2ª	No	24	Abertura	*Cotidiano del racional*
11	42	1ª	Si			
		2ª	Si			
12	16	1ª	No	18	α	*Lineal con valor absoluto*
		2ª	Si			
13	30	1ª	No	29	Abertura	*Cotidiano del racional con valor absoluto*
		2ª	No	29	Abertura	*Cotidiano del racional con valor absoluto*
14	7	1ª	Si			
		2ª	Si			
15	51	1ª	Si			
		2ª	Si			

RESPUESTAS DEL 10º ESTUDIANTE
PRIMERA Y SEGUNDA APLICACIÓN

Segunda parte del Cuestionario
(gráfica $\rightarrow$ *ecuación)*

Nº de pregunta	Nº de gráfica	Respuesta correcta (características de la ecuación asociada)	Respuesta dada por el estudiante: Nº de aplicación	Respuesta dada por el estudiante: Correcta	Respuesta dada por el estudiante: Característica incorrecta de la ecuación asociada	Posible fuente de equívoco (Tipo de *Efecto*)
1	21	n = 2, $a > 1$ y $b = 0$	1ª	Si		
			2ª	Si		
2	5	$n = 1$, $a = 1$ y $b < 0$	1ª	Si		
			2ª	Si		
3	48	$n = 3$, $a < -1$ y $b = 0$	1ª	Si		
			2ª	Si		
4	52	$n = 3$, $-1 < a < 0$ y $b < 0$	1ª	Si		
			2ª	No	$a < -1$	*Cotidiano del racional con valor absoluto*
5	15	$n = 1$, $-1 < a < 0$ y $b > 0$	1ª	Si		
			2ª	Si		
6	36	$n = 2$, $a < -1$ y $b < 0$	1ª	Si		
			2ª	Si		
7	24	$n = 2$, $0 < a < 1$ y $b > 0$	1ª	Si		
			2ª	Si		
8	18	$n = 1$, $a < -1$ y $b < 0$	1ª	Si		
			2ª	Si		
9	49	$n = 3$, $a = -1$ y $b > 0$	1ª	Si		
			2ª	Si		
10	23	$n = 2$, $a = 1$ y $b < 0$	1ª	Si		
			2ª	Si		
11	9	$n = 1$, $a > 1$ y $b < 0$	1ª	Si		
			2ª	Si		
12	43	$n = 3$, $0 < a < 1$ y $b < 0$	1ª	Si		
			2ª	Si		
13	33	$n = 2$, $-1 < a < 0$ y $b > 0$	1ª	Si		
			2ª	Si		
14	44	$n = 3$, $a > 1$ y $b > 0$	1ª	Si		
			2ª	Si		
15	6	$n = 1$, $0 < a < 1$ y $b > 0$	1ª	Si		
			2ª	Si		

Concentrado de los equívocos de los estudiantes en la(s) aplicación(es) del Cuestionario

Primera parte
(ecuación → gráfica)

	Número de alumno																			
	1º		2º		3º		4º		5º	6º		7º		8º	9º		10º		Totales	
Efecto/Aplicación	1ª	2ª	1ª	2ª	1ª	2ª	1ª	* R	1ª	1ª	R.	1ª	2ª	1ª	1ª	2ª	1ª	2ª	1ª	2ª
Numérico	4	0	1	0	3	0						4	0	3					15	0
Numérico con valor absoluto	3	0	1	0								4	0	2					10	0
Lineal con valor absoluto	2	2										2	0				1	0	5	2
Lineal invertido														1					1	0
Lineal invertido con valor absoluto														2					2	0
De inversión parcial de roles																			0	0
De proximidad														7					7	0
Cotidiano del racional														2			4	3	6	3
Cotidiano del racional con valor absoluto																	1	3	1	3
De visión parcial	1	1	2	0	5	0	1	0		1	0	2	0	3	1	0	2	0	18	1
De parámetros libres															12	0			12	0
Totales	10	3	4	0	8	0	1	0	0	1	0	12	0	20	13	0	8	6	77	9

***** R.: Revisión

Concentrado de los equívocos de los estudiantes en la(s) aplicación(es) del Cuestionario
(Concentrado de los efectos en los que incurren los estudiantes en …)

Segunda parte
(gráfica → ecuación)

	Número de alumno																		
	1º		2º		3º		4º		5º	6º	7º		8º	9º		10º		Totales	
Efecto/Aplicación	1ª	2ª	1ª	2ª	1ª	2ª	1ª	* R.	1ª	1ª	1ª	2ª	1ª	1ª	2ª	1ª	2ª	1ª	2ª
Numérico	3	0			1	0	1	0			3	0						8	0
Numérico con valor absoluto	4	0			1	0					3	0						8	0
Lineal con valor absoluto	2	2					1	0										3	2
Lineal invertido					2	0					2	0						4	0
Lineal invertido con valor absoluto					2	0					2	0						4	0
De inversión parcial de roles							2	0										2	0
De proximidad													10					10	0
Cotidiano del racional																		0	0
Cotidiano del racional con valor absoluto																0	1	0	1
De visión parcial			3	0	4	0					1	0		0	1			8	1
De parámetros libres													13	12	0			25	0
Totales	9	2	3	0	10	0	4	0	0	0	11	0	23	12	1	0	1	72	4

* R.: Revisión

Concentrado del número de estudiantes que incurren en los (distintos) efectos en las dos aplicaciones del Cuestionario

	Frecuencia (número de alumnos de un total de diez)				
	Primera parte del Cuestionario (*ecuación* → *gráfica*)			Segunda parte del Cuestionario (*gráfica* → *ecuación*)	
Efecto/Aplicación	1ª	2ª		1ª	2ª
Numérico	5	0		4	0
Numérico con valor absoluto	4	0		3	0
Lineal con valor absoluto	3	1		2	1
Lineal invertido	1	0		2	0
Lineal invertido con valor absoluto	1	0		2	0
De inversión parcial de roles	0	0		1	0
De proximidad	1	0		1	0
Cotidiano del racional	2	1		0	0
Cotidiano del racional con valor absoluto	1	1		0	1
De visión parcial	9	1		3	1
De parámetros libres	1	0		2	0

Concentrado del tipo de respuestas de los estudiantes en la(s) aplicación(es) del Cuestionario

Primera parte
(ecuación $\rightarrow$ gráfica)

	Número de alumno																			
	1º		2º		3º		4º		5º	6º		7º		8º	9º		10º		Totales	
Respuestas/Aplicación	1ª	2ª	1ª	2ª	1ª	2ª	1ª	R.	1ª	1ª	R.	1ª	2ª	1ª	1ª	2ª	1ª	2ª	1ª	2ª
Correctas	5	12	11	15	7	15	14	15	15	14	15	3	15	4	1	15	8	9	82	111
Incorrectas	10	3	4	0	8	0	1	0	0	1	0	12	0	11	1	0	7	6	55	9
Imprecisas	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12	0	0	0	12	0
Incompletas	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Concentrado del tipo de respuestas de los estudiantes en la(s) aplicación(es) del Cuestionario

Segunda parte
(gráfica $\rightarrow$ ecuación)

	Número de alumno																		
	1º		2º		3º		4º		5º	6º	7º		8º	9º		10º		Totales	
Respuestas/Aplicación	1ª	2ª	1ª	2ª	1ª	2ª	1ª	R.	1ª	1ª	1ª	2ª	1ª	1ª	2ª	1ª	2ª	1ª	2ª
Correctas	6	13	12	15	5	15	11	15	15	15	4	15	1	3	14	15	14	87	101
Incorrectas	9	2	3	0	10	0	4	0	0	0	11	0	2	0	1	0	1	39	4
Imprecisas	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Incompletas	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12	12	0	0	0	24	0