UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

SECRETARÍA ACADÉMICA

COORDINACIÓN DE POSGRADO

DOCTORADO EN EDUCACIÓN

Las praxeologías matemáticas en el programa, los libros de texto y las libretas de los estudiantes de 6° de primaria y 1° de secundaria.

Tesis que para obtener el Grado de
Doctor en Educación. Línea educación matemática

Presenta

Isidro González Molina

Tutora
Dra. Alicia Ávila Storer

Ciudad de México. Octubre de 2018

DEDICATORIAS

A mi familia, por el invaluable cariño
que me prodiga, a pesar de todo.

A la Dra. Alicia Ávila Storer, por el persistente aliento,
por su paciente, sólida y siempre precisa orientación.

A quienes con su apoyo formaron un oasis
en las desiertas horas de desaliento y cansancio
que ponía en riesgo lograr esta meta.

A la Generación de maestros 1983 – 1987 egresados
de la Escuela Normal Rural de Tenería, Tenancingo, Méx.

A quienes, en su momento,
les tendré que contar la tesis más allá del sol:
A Ramón, Juventino, Antonio y Eduardo.

RECONOCIMIENTOS

Al Dr. Luis Manuel Aguayo Rendón de la Unidad 321 de la Universidad Pedagógica Nacional, Zacatecas, México; por la revisión del trabajo y su valiosa orientación.

A los académicos del programa de Doctorado en Educación, Línea: Educación Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional Unidad Ajusco, Ciudad de México.

I N D I C E

INTRODUCCIÓN

Los resultados del trabajo escolar en el área de matemáticas alcanzados por los alumnos de sexto de primaria y primero de secundaria no han sido satisfactorios conforme a los resultados del programa internacional PISA (Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes) 2012. De un total de 65 países, México se ubica junto con otros dos países latinoamericanos en el lugar número 53 (INEE, 2013: 40). Dicha evaluación establece seis niveles de desempeño en relación al desarrollo de la competencia matemática. En este sentido, se menciona que el 55% de los estudiantes mexicanos de quince años de edad a los que les fue aplicado el examen, se ubican en los niveles inferiores, es decir, en nivel uno o menos que uno.

Si se considera que el nivel tres establece como una de las tareas que deben saber hacer los estudiantes el que éstos “Muestren cierta habilidad para el manejo de porcentajes, fracciones, números decimales y proporciones” (INEE, 2013:36), y sobre la cual sólo del 13.1% logra tener cierto dominio, tenemos entonces que casi el 87% de los estudiantes se ubica en un nivel en el que apenas “…pueden realizar operaciones aritméticas con números enteros siguiendo instrucciones claras y bien definidas […]”. (Ídem)

Sobre los alcances de los estudiantes mexicanos que reporta el estudio antes mencionado, han coincidido otras evaluaciones nacionales, como ENLACE, EXCALE y PLANEA, cuyos informes también dan muestra de una debilidad en la formación matemática de los alumnos que concluyen su educación básica. Esta debilidad es propiciada por diversos factores, algunos externos a la institución escolar y otros internos a la misma.

La investigación que aquí se presenta se centra en la indagación de un aspecto interno de la institución escolar vinculado a los procesos de estudio donde se abordan las fracciones y los números decimales. Sobre estos conjuntos numéricos, como se ha comentado en líneas anteriores, los estudiantes presentan escaso dominio. El aspecto interno a la institución escolar que se indagó en esta tesis consiste en el análisis de las praxeologías matemáticas vinculadas a las fracciones y su estructuración en los programas de estudio, libros de texto y libretas de trabajo de alumnos de sexto grado de primaria y primero de secundaria de una región del estado de Puebla.

Los saberes matemáticos relacionados con las fracciones y los números decimales sobre los que se circunscribe esta investigación son analizados desde la noción de praxeología matemática. Chevallard (1999) reconoce a la praxeología como una unidad mínima de análisis de toda actividad humana, constituida por cuatro componentes: tipo de tarea *T,* técnica τ, tecnología θ y teoría Θ. Según esta teorización, la tarea es lo que se hace, la técnica es la manera en que se hace y la tecnología es un discurso que produce, justifica y explica la técnica; la teoría, a su vez, produce, justifica y explica la tecnología.

El objetivo de esta tesis fue conocer los tipos de tareas, las técnicas sugeridas, el discurso tecnológico, así como la teoría correspondiente en las praxeologías matemáticas relacionadas con las fracciones y los decimales contenidos en: los Programas de Estudio 2011, los materiales de apoyo oficiales y las libretas de trabajo de estudiantes de sexto grado y primero de secundaria de la Región antes mencionada. Conviene señalar que incluimos el análisis de las libretas de los estudiantes porque consideramos, en concordancia con otros investigadores, que éstas permiten acceder – así sea de manera inferencial - a la selección de contenidos de una materia, su organización y secuencia, así como su tratamiento en el aula. Este conocimiento permitirá obtener huellas de lo que cotidianamente se hace en las clases y que se registra en las libretas por considerarse relevante en la perspectiva del profesor.

Para llevar a cabo la indagación se seleccionaron instituciones educativas de educación primaria y de secundaria ubicadas en zonas urbanas de la cabecera municipal de Teziutlán, Puebla. En tales instituciones, el trabajo de investigación se realizó analizando algunas libretas de trabajo de los estudiantes y logrando, de los maestros de sexto grado de primaria y de los responsables de la asignatura de matemáticas en secundaria, la contestación de un cuestionario y algunas preguntas a manera de entrevista para conocer sus respectivas concepciones en relación con el enseñar y aprender las matemáticas vinculadas a las fracciones y a los números decimales.

Como ya se dijo, para hacer la revisión de los materiales se tomó la noción de praxeología como categoría que permitió analizar lo propuesto en los materiales distribuidos por la Secretaría de Educación Pública y lo registrado en las libretas de los estudiantes. Con este trabajo se pretende realizar una aportación a la educación en dos sentidos; el primero, hacer evidente que la praxeología matemática puede ser una categoría de análisis útil para examinar los diversos materiales que entran en juego en los procesos de estudio de saberes matemáticos que tienen lugar en las aulas de educación básica.

Esto porque con su aplicación se puede mostrar cuáles son los niveles de atención dados a los diferentes componentes de una praxeología matemática: las tareas, las técnicas, la tecnología y la teoría.

El segundo aporte de esta investigación consiste en exponer un segmento de la realidad de los procesos de estudio de los saberes matemáticos (que se entenderán como praxeologías matemáticas) relacionados con las fracciones y números decimales en términos de la estructuración de las lecciones contenidas en los libros de texto, así como en las libretas de trabajo de los estudiantes de los grados antes mencionados.

Dichos aportes pueden explicar al menos parte de uno de los factores internos que inciden en los bajos logros que los estudiantes mexicanos obtienen en las diversas evaluaciones externas en la materia de matemáticas. Ese factor está relacionado con la organización de los procesos de estudio (en torno a las fracciones y los números decimales) dirigidos por el docente teniendo a la praxeología matemática como categoría de análisis de dicho proceso, y advertir desde esta perspectiva las posibles áreas de mejora en el trabajo con los componentes de la estructura praxeológica.

Es cierto que el enfoque que actualmente se promueve en las escuelas para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es el de resolución de problemas. Sin embargo, se consideró pertinente la utilización de la perspectiva teórica asumida ya que, como se verá adelante, el enfoque de resolución de problemas, y el conocimiento matemático que éste produce como resultado de la actividad matemática, pueden interpretarse mediante la noción de praxeología matemática, identificándose en el conocimiento producido los componentes de la praxeología. La aplicación de la praxeología matemática como categoría de análisis, implicó el conocimiento de la misma y definir la pertinencia de su aplicación en esta indagación sobre los materiales y las libretas de los estudiantes. La búsqueda de comprensión de la noción, llevó a una revisión de otras investigaciones en las que había sido aplicada, y que se describen en el capítulo 1 de esta tesis. En ese capítulo también se hace referencia a los objetivos de la investigación.

En el capítulo 2 se amplía la discusión sobre el objeto de estudio de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de donde deriva la noción de praxeología matemática, cuya estructura se describe pormenorizadamente, además de argumentarse conceptos propios de la TAD, tales como proceso de estudio, praxeología didáctica y momentos didácticos, categorías cuyo análisis es necesario para comprender el contexto teórico de la praxeología matemática.

Las fracciones y los decimales son los saberes matemáticos sobre los que gira esta investigación. Es por tanto indispensable conocer de tales saberes matemáticos aspectos como sus orígenes históricos, sus características y sus propiedades. Al respecto, el capítulo 3 contiene los resultados de una investigación bibliográfica que permite conceptualizar dichos saberes.

La descripción de la metodología se realiza en el capítulo 4, donde se da cuenta del proceder en el análisis de los materiales, motivo de estudio principal de esta investigación. En este capítulo también se presenta la contextualización de la investigación y el proceso de aplicación a docentes de primaria y primero de secundaria de otros instrumentos de recolección de información que permitieron complementar el análisis de los materiales.

Los materiales bibliográficos que son apoyo de los maestros y alumnos de sexto de primaria y primero de secundaria, como los son el programa de estudios y los libros de texto, se analizan en primera instancia para identificar cuáles son las praxeologías matemáticas relacionadas con las fracciones y los números decimales que se encuentran contenidas en tales materiales. Esto con el objeto de conocer lo que se plantea desde la institución educativa como el saber a enseñar en estos rubros. Así mismo, a partir de la consideración de los componentes de la praxeología matemática, se analizan lecciones de los libros de texto de los dos grados seleccionados para el trabajo, con el objetivo de identificar la presencia de esos componentes y advertir la importancia que se le asigna institucionalmente a cada uno de ellos, lo cual podría tener repercusiones en los resultados de aprendizaje de los alumnos; esta revisión de los materiales se expone en el capítulo 5.

La misma tarea descrita en el párrafo anterior se realiza con las libretas de trabajo de los estudiantes. Se analizan aquellas páginas que incluyen praxeologías matemáticas relativas a las fracciones y a los decimales; se detecta en cuáles se centra más el trabajo contenido en las libretas; se realiza un balance entre lo que contienen las libretas y lo que propone el programa y libro de texto. Así mismo se revisa, teniendo a la praxeología matemática como categoría de análisis, la estructura de las páginas seleccionadas para identificar el nivel de atención que se presta a cada uno de los componentes praxeológicos. Tal análisis de presenta en el capítulo 6, donde adicionalmente se incluyen algunas opiniones de los maestros responsables de los grupos visitados, relacionadas con la importancia y el uso que dan a las libretas de los estudiantes.

Finalmente, se exponen las conclusiones donde se contrastan las preguntas de investigación con los resultados obtenidos mediante los análisis realizados. Con esto se pretende mostrar también cómo la praxeología matemática fue pertinente y útil como categoría de análisis en este trabajo de investigación al permitir mostrar evidencias de procesos de estudio que no se observaron directamente y que explican de cierto modo una parte de la problemática en la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones y los números decimales en la educación básica.

CAPÍTULO 1. LA PROBLEMATIZACIÓN DEL OBJETO DE ESTUDIO

El problema de investigación que se aborda en este trabajo se inscribe en el ámbito de la educación matemática en el nivel de educación primaria, así como en el de educación secundaria, específicamente en el ámbito de la enseñanza de las fracciones y los números decimales. Diversos estudios señalan este último tema (las fracciones) como uno de los más difíciles de aprender en la educación primaria (PLANEA, 2017), e incluso en la educación secundaria, también como el que más preocupa a los docentes de educación primaria y a quienes se encargan de la formación de profesores de este nivel. De manera distinta, a pesar de que los números decimales también encierran dificultades importantes para su comprensión, por lo general los profesores no los perciben de esta manera.

A lo largo de este capítulo se expondrán las razones por las que, además de su dificultad como contenidos escolares – sea ésta reconocida o no por los profesores - es válido considerar la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones y los decimales como un problema de investigación.

1.1. Fracciones y decimales, objetos de estudio de esta investigación

Los problemas de aprendizaje y enseñanza de las fracciones en la educación básica (como se sustentará en los párrafos siguientes) derivan en buena medida de la naturaleza polisémica de la expresión de la forma a/b que las representa, donde a y b son números naturales, siendo b diferente de cero.

Respecto de la naturaleza y complejidad de las fracciones, autores como Freudenthal, Streefland, Kieren y Llinares, entre otros, han dedicado algunas de sus obras a desarrollar y explicar las diferentes interpretaciones que pueden tener las expresiones fraccionarias.[1] Dada la variedad un tanto compleja de significados que pueden asociarse a las expresiones de la forma a/b, Mancera (1992) expresa esta propiedad de las fracciones utilizando los términos de homonimia y sinonimia. El primero se refiere a los distintos significados que tiene asociados una expresión del tipo a/b, y el segundo alude a que el concepto de fracción es posible que sea representado de maneras diferentes. En este mismo sentido, Parra y Flores (2008), retomando a Mancera (1992), afirman que:

> Estas propiedades hacen referencia principalmente a cuatro subconstructos de los números racionales propuestos por Kieren (Kieren, 1981, citado en Mancera,1992): *1)* relación parte-todo (dividir un entero en diversas partes o repartir un entero entre un determinado número de elementos) y medición (ubicación de una fracción en una recta numérica); *2)* número racional como razón (como índice de comparación entre dos conjuntos independientes);*3)*números racionales como divisiones indicadas, y *4)* número racional como operador (transformación de una cantidad en otra). Estos subconstructos hacen referencia a lo que otros autores han denominado de manera general como interpretaciones o significados de la fracción. (Mancera, 1992 en Parra y Flores, 2008: 33)

Los diversos sentidos que - nos advierte la cita anterior - toma la noción de fracción, representan un campo amplio del estudio de estos números y de su enseñanza en la educación básica, principalmente en los grados de cuarto, quinto y sexto de educación primaria y primero de secundaria, grados en que se incluye el estudio de estos números. Esto tiene como implicación en primer lugar que los maestros han de poseer claridad respecto de los diversos sentidos que adquiere el concepto de fracción, para poder conducir eficientemente a los estudiantes hacia la construcción de un conocimiento con significatividad de tal noción matemática.

---

[1]En este apartado se hará una explicación sucinta de la problemática de los objetos matemáticos, pero, más adelante, en el capítulo 4 se profundizará sobre ella.

Para dar contexto a la anterior aseveración, se recupera el siguiente dato derivado de la aplicación de las pruebas PISA en 2012 (siglas en inglés del Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes). En el Nivel 3 de los 6 que se consideran para la evaluación de la competencia matemática, en uno de los indicadores que se señalan: “[Los estudiantes deberían mostrar] cierta habilidad para el manejo de porcentajes, fracciones, números decimales y proporciones”, sólo el 13.1% de los estudiantes mexicanos de 15 años que concluyen la educación básica alcanzan este nivel de desempeño (INEE, 2013: 37).

El resultado antes mencionado lleva a cuestionarse sobre las posibles causas y/o razones por las que los temas relacionados con las fracciones y los números decimales no logran permear en los referentes del casi 87% de estudiantes que concluyen su educación secundaria. Es un porcentaje realmente alto que alienta el interés por conocer lo que deberían saber los alumnos de dichos temas de acuerdo con los programas de estudio oficiales y en segunda instancia, conocer sobre la conducción de los procesos de estudio por el director del mismo, que es el maestro de grupo o el profesor de la asignatura. La acción pedagógica de éste se percibe parcialmente en las libretas de trabajo de los estudiantes toda vez que constituyen, en nuestro país, la bitácora de las tareas que se realizan durante esos procesos de estudio.

Por otra parte, los resultados de la Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares (ENLACE) aplicada en el año 2013 a los alumnos de 3° a 6° grado de educación primaria, arrojan que el 51.2% de los estudiantes se encuentran en los primeros dos niveles de logro de los cuatro que se establecen en la escala de evaluación de dicho programa. Lo que significa que los alumnos “requieren fortalecer la mayoría de los conocimientos y desarrollar las habilidades de la asignatura evaluada” (SEP, 2013: 4).

En el año 2015 las autoridades educativas de México decidieron concluir con la aplicación nacional de la prueba ENLACE e iniciar con un nuevo programa de evaluación denominado PLANEA (Programa Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes). Esta nueva modalidad de evaluación se aplicó en junio de 2015 a los egresados de sexto grado del todo el país y se obtuvo que el 60.5 por ciento de los que concluyeron su educación primaria se encuentran en el nivel 1 de los 4 que se establecen en este Programa, lo cual implica que los alumnos "Escriben y comparan números naturales. Sin embargo, no resuelven problemas aritméticos con números naturales" (INEE, 2015:10), lo que los ubica lejos de alcanzar el nivel 4 donde se indica entre unos de los criterios de logro que el alumno "Resuelve problemas aditivos con números naturales, decimales y fraccionarios" (Ídem).

Con respecto a los temas relacionados con los números decimales, contenidos en el currículo de educación básica, la situación sobre su aprendizaje no es diferente de la relacionada con las fracciones. Sobre este rubro Ávila (2013) señala que en México: "[…] en general, los porcentajes de aciertos en cuestiones vinculadas con los decimales no alcanzan el 50% en ninguna de las pruebas nacionales (Ávila, 2013: 32), como son ENLACE y EXCALE aplicadas en las escuelas mexicanas de educación elemental en diferentes grados.

El contexto de la aseveración citada en el párrafo anterior lo conforma la reflexión que hace Ávila (2013) sobre los resultados logrados por los estudiantes mexicanos en los exámenes ENLACE y EXCALE al reportar un estudio realizado con alumnos de sexto grado de una escuela primaria de la Ciudad de México. Este estudio se realizó con el propósito de analizar los conocimientos en construcción sobre los números decimales de un grupo de estudiantes de sexto grado, en donde interviene una docente cuya preparación en la enseñanza de las matemáticas es especial pues ha cursado una maestría en educación matemática. Esta maestra procura llevar a sus alumnos a tener un acercamiento conceptual sobre los números decimales (Ávila, 2013).

Hay dos puntos más que se pueden tomar de dicho estudio para sustentar esta tesis; el primero se refiere a lo que oficialmente se espera que logren aprender los alumnos que egresan de sexto grado de educación primaria quienes de acuerdo con la autora:

> […] los niños que concluyen este nivel educativo (generalmente a la edad de 12 años) deberían lograr un conocimiento adecuado de estos números y algunas de sus propiedades. Deberían saber ordenarlos, entender que entre dos decimales siempre hay otro decimal; también convertir fracciones decimales a escrituras decimales, encontrar equivalencias entre distintos decimales, ubicar estos números en la recta numérica y resolver problemas aditivos y multiplicativos que los impliquen. (Ávila, 2013: 32)

Como segundo punto a considerar, cabe mencionar que los propósitos de los actuales Programas de Estudio oficiales para la enseñanza de las matemáticas con respecto de los números decimales, son los siguientes:

> Utilicen el cálculo mental, la estimación de resultados o las operaciones escritas con números naturales, así como la suma y resta con números fraccionarios y decimales para resolver problemas aditivos y multiplicativos. (SEP, 2011a: 62)

Sin embargo, las investigaciones realizadas por Ávila (2013), reportan que los números decimales, son difíciles de comprender dada la complejidad que representa su aprendizaje para los estudiantes ubicados en el rango de edad entre los 10 y 12 años.

Ante tal situación, Ávila (2013), apoyada en otros autores, afirma "[…] que los decimales implican a la vez pluralidad de sus representaciones y referentes y la unicidad[2] del concepto que subyace en ellas" (Ibid: 33). Por lo anterior uno de los

---

[2] Cabe aclarar que unicidad del concepto se entiende como la definición básica de un término que puede ser expresado mediante distintas formas.

retos en la enseñanza de los números decimales es “hacer comprender a los alumnos que estos diversos registros [escrituras] representan el mismo número, o dicho más formalmente, hacerlos comprender la unicidad del concepto decimal subyacente en esta pluralidad de representaciones” (Ávila, 2013: 33). Sin embargo, esto implicaría hacer algunos ajustes en lo que a la enseñanza de los decimales se refiere, pues con base en lo que la autora menciona, destacan las tres características siguientes: 1) La enseñanza de las fracciones ocupa muchísimo más tiempo que la de los decimales; 2) los decimales comúnmente se trabajan como simple extensión de la escritura decimal de los naturales, y 3) la enseñanza de los decimales toma una orientación “nominalista”, es decir, que se interesa más en hacer aprender los nombres de las *posiciones* y menos el valor de los agrupamientos que cada cifra representa conforme a su posición (Ávila; 2008, en Ávila, 2013).

Otras autoras como Saíz, Gorostegui y Vilotta (2011), hacen referencia de manera indirecta a las dificultades por las que atraviesan los procesos de estudio de los números decimales, así se entiende en la cita siguiente:

> El tema conjuntos numéricos constituye una parte importante de los contenidos por aprender en los primeros años de la escuela media [que en el sistema educativo mexicano corresponde a la escuela secundaria] y con frecuencia se asume que su aprendizaje puede considerarse como concluido después de los dos o tres primeros años de este nivel. Sin embargo, en los alumnos puede detectarse —incluso varios años después— que muchas de las dificultades a las que se enfrentaron durante su estudio, debido en particular a la complejidad del propio conocimiento, no siempre han podido ser superadas. (Saíz *et al*., 2011:124)

La autora y sus colegas revisan la enseñanza de los números decimales, parten de problematizar la relación entre los elementos de otros conjuntos numéricos y el conjunto de los números decimales. Exposición en la que no profundizaremos, pues se trata en este punto sólo de advertir desde diferentes opiniones, las dificultades presentes en la enseñanza y en el aprendizaje de los números decimales.

Centeno (1997) había señalado con anterioridad que el origen de algunos errores que cometen los estudiantes de educación básica, al operar con los números decimales, tiene estrecha relación con la forma en que los docentes se los han presentado. Tradicionalmente se han presentado los números decimales con una tipología similar a la de los números naturales. La autora afirma que "todas las formas de introducir los números decimales que no permitan su aparición como números nuevos, con propiedades distintas de los naturales, pueden ocasionar obstáculos suplementarios para que los estudiantes los manejen adecuadamente en los procesos de estudio" (p.143).

Ahora bien, para el análisis del tema de las fracciones como uno de los dos objetos matemáticos que vertebran la reflexión en esta tesis (los números decimales es el otro), en seguida se hará mención de algunas indagaciones llevadas a cabo con maestros en servicio que laboran en educación básica y con maestros en formación. Posteriormente se hace referencia a la situación que prevalece sobre el mismo tema en el aprendizaje de los estudiantes en cuanto a las fracciones y, en seguida, en torno a los números decimales.

Esto, con el fin de que al revisar los resultados de las investigaciones consultadas se genere un ejercicio de problematización, mismo que se refleje en el planteamiento de preguntas de investigación.

1.2. Problemas sobre la enseñanza de las fracciones

Respecto de los diversos significados de la fracción y las dificultades originadas en el aprendizaje por tal causa, Ávila y Mancera (2003), refieren que: "[…] no obstante ser uno de los objetos de investigación más trabajado durante ya dos décadas, las fracciones y los conceptos asociados a ellas, permanecen como el tema de aritmética que presenta mayores dificultades al finalizar la educación primaria”. (p. 64)

Con base en lo que se ha reportado en algunos estudios orientados a conocer las nociones que los maestros de educación básica en servicio o en formación tienen con relación a las fracciones, se sabe que prevalece una concepción restringida a la idea parte - todo. Mancera (1992) ha manifestado, en cuanto a la dificultad que representa el aprendizaje de las fracciones, que en gran medida esas dificultades se vinculan a los modelos que utilizan los maestros para representar la fracción, y argumenta esta idea de la siguiente manera:

Durante la enseñanza se hace uso de diferentes materiales para representar la fracción (figuras geométricas, rectas numéricas, dibujos que representan a personas y objetos por repartir, etc.), a la par que se plantean problemas con diversos significados que no necesariamente se adaptan a estas formas de representación, por ejemplo, cuando se propone un problema de reparto, pero se ha modelado la fragmentación de una figura geométrica.

La situación se agudiza cuando se utilizan, además, indiferenciadamente los tipos de cantidades en las que se puede presentar la fracción (discreta o continua, por ejemplo). Este uso arbitrario y confuso de los modelos se ha relacionado con la falta de dominio de las diferentes interpretaciones de la fracción por parte de algunos maestros. (Piñón, 1995 en: Parra y Flores. 2008: 33)

Por tanto, de acuerdo con Parra y Flores (2008), esas dos dificultades que consisten en el uso indiscriminado de distintos materiales para representar una fracción y al mismo tiempo plantear problemas que implican los diferentes significados de la expresión fraccionaria, pueden verse como factores importantes que impiden generar en los alumnos el aprendizaje significativo de los temas relacionados con las fracciones.

Respecto del conocimiento y la acción de los docentes, Izquierdo (2006) planteó algunas aseveraciones sobre los profesores y sus concepciones sobre las fracciones y una de sus conclusiones fue la siguiente: “La gran mayoría de los profesores entrevistados consideran que las fracciones es el tema de las matemáticas más difícil de abordar en la escuela primaria, o al menos uno de los más difíciles” (Izquierdo, 2006: 137). La autora agrega además que:

> Destaca [en los maestros] la preocupación por definir algunos aspectos matemáticos para alcanzar el aprendizaje de las fracciones, como comprender el sentido del numerador y denominador, la equivalencia y los algoritmos, así como el logro de la abstracción por parte de los alumnos. (Ibíd:3)

Izquierdo (2006) señala, asimismo, a partir de las respuestas brindadas por los docentes participantes en su estudio, que éstos manifiestan un desconocimiento de la propuesta implementada por la Secretaría de Educación Pública en 1993 con respecto a la enseñanza de las fracciones y sus distintos significados.

La misma autora señala, precisando un tanto más al respecto de los significados de la fracción, lo siguiente:

> En general, podemos observar que las respuestas de los profesores entrevistados denotan desconocimiento sobre los diferentes significados de la fracción; la mayoría de ellos […] refiere al sub-constructo parte-todo en situaciones de reparto […]. (p. 134)

Cabe recordar que la reforma de 1993 introdujo un enfoque de enseñanza de las fracciones en el que se limitó la preocupación por los cálculos con estos números en tareas que implicaran tareas algorítmicas específicas y se propuso “un trabajo más intenso sobre los diferentes significados de la fracción en situaciones de reparto y medición y en el significado de las fracciones como razón y división” (SEP, 1993: 54).

Por su parte, Ávila (2006) con un extenso trabajo de investigación sobre la naturaleza de los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas en educación básica, señala de nuevo que: la fracción es un contenido de enseñanza de la educación primaria reconocido entre los más difíciles; cita para argumentar esta aseveración dos razones; una, que “el número racional implica una relación entre dos números (a/b, con b diferente de cero) y que admite múltiples interpretaciones puesto que puede modelar una amplia variedad de situaciones, y otra, que sus propiedades son distintas de las de los números naturales”. (Ávila, 2006: 182)

La autora da a conocer, como resultado de la observación y análisis de cuatro sesiones áulicas donde una maestra trabaja el tema de fracciones, las siguientes conclusiones: la noción de fracción que es posible derivar de las actividades observadas en las clases es la de un número de la forma a/b en donde *b* representa las partes en que se divide el todo continuo y *a* las partes de ese todo que se consideran; asimismo, que esta es una noción de fracción que ignora el *texto de saber* concretado en los libros de texto y programas oficiales.

La misma autora también reporta evidencias recogidas en las observaciones del trabajo con las fracciones de otra maestra, que permiten entrever la posibilidad de mejora de la práctica docente ligada al tema de las fracciones, siempre y cuando se cumplan determinadas condiciones. Destaca que las participaciones de la profesora encargada de esta clase - siguiendo el enfoque constructivista - son cada vez más breves, más interrogativas, y el espacio dedicado a la puesta en común y validación de las respuestas se amplía de manera importante a medida que la maestra trabaja y se familiariza con los planteamientos y materiales derivados de la reforma educativa introducidos en 1993.

Lo anterior es promovido por la profesora “-aprovechando las situaciones del libro de texto- …” (Ávila, 2006: 260), lo que significa un avance en la correspondencia entre el enfoque de los libros de texto y programas oficiales y la enseñanza de las matemáticas que imparte la profesora.

Aplicar el enfoque de enseñanza introducido en México con la Reforma de 1993 no es sencillo, así lo dijo la propia docente, fue la presión de ser observada la que la obligó a utilizar los planteamientos de la reforma, pero estos no se mantuvieron permanentemente en sus clases. Así, ante los desequilibrios didácticos” (Ídem), se observa que cuando se ve en conflicto, la profesora decide recuperar el control de la clase y volver a sus esquemas de explicación.

El universo matemático es la categoría central incorporada por Ávila y otros (2010) en otra investigación realizada en algunas escuelas de educación primaria del sistema bilingüe de los Estados de Puebla, Michoacán y Chiapas. Dicha categoría es entendida conforme a la noción que establece C. Hache (2001) quien señala que “el universo matemático propuesto por el profesor consiste en un conjunto de características identificadas durante una sesión de clase [de matemáticas], vinculadas a la vez a las prácticas de enseñanza y a las actividades potenciales correspondientes de los alumnos” (Hache, 2001; 83-84 citado en Ávila, 2010).

El autor citado por Ávila y sus colegas, sostiene que el universo matemático se puede analizar desde tres niveles, en el primero se hallan las intenciones y el escenario preparado por el profesor; en el segundo, se enfoca a las características de la tarea y al desarrollo de las actividades, tanto del maestro como del alumno, y en el tercero, el objeto de análisis es el discurso del profesor. El universo matemático, según esta definición, no se constituye sólo de contenidos, se constituye también de conceptos, procedimientos y razonamientos (Ávila, 2010).

Para establecer algunas conclusiones sobre el trabajo realizado por Ávila (2010), se presenta el siguiente fragmento del reporte de la investigación:

> La lección que sirvió de referencia se titula “Más galletas y más niños[3]; de ella se trabajaron las cuatro primeras tareas. En estas cuatro tareas, según el libro de texto, el alumno debe participar de manera activa al buscar la respuesta a las situaciones problemáticas que se plantean y argumentarlas cuando así se solicita. Las preguntas son de alto nivel cognitivo e involucran diversos contenidos: la fracción como división indicada, diferentes maneras de representar una misma fracción (incluyendo la suma de fracciones unitarias), repartos en los que está implícita la proporcionalidad, comparación de fracciones, realización de repartos equivalentes. (Ávila, 2010: 19)

Pero lo anterior es lo que plantea el libro de texto, lo que se analiza en la investigación es el universo matemático propuesto en dicho material y su relación con el propuesto por el profesor. A lo que se llega es que mientras en el libro se trabaja la interpretación de la fracción como división indicada, en la propuesta del maestro predomina la idea de fracción como parte de un todo (Ídem). Esto denota claramente una distancia entre lo que presenta el libro y las concepciones del maestro sobre el tema, distancia que lleva al empobrecimiento del universo matemático que presenta el primero.

En suma, la investigación a la que se hace referencia establece a manera de conclusión que: respecto de las fracciones, se vio no sólo restringir o adaptar, sino modificar por completo el universo matemático sugerido en el libro de texto, incluso cuando supuestamente las tareas a realizar derivaban del texto o tenían por objetivo ayudar a comprender los ejercicios del mismo. A un universo matemático caracterizado por la promoción del razonamiento anticipatorio y la construcción del conocimiento, se le sustituye por otro en el que las explicaciones no son tales, son simples artificios alejados de cualquier basamento de significación.

[3] La lección corresponde al libro de matemáticas para el alumno. Tercer grado.

Nos parece urgente que se les dé a los docentes las condiciones institucionales para que reflexionen sobre el universo matemático en el que introducen a sus alumnos y, sobre todo, que adquieran las herramientas conceptuales de la matemática y su didáctica que permitan adaptarlo sin empobrecerlo y, eventualmente, enriquecerlo. (Ávila, 2010: 39)

En la investigación que se ha venido comentando, la autora señala la raigambre de las concepciones de los docentes, concepciones en torno a dimensiones de la práctica pedagógica y del contenido, la enseñanza y el aprendizaje. Estas concepciones, dice, han sido construidas en la tradición educativa y los profesores noveles las asumen como válidas en buena medida por el contexto de su formación y de su ingreso al trabajo docente.

Los datos citados en las líneas precedentes coinciden con los obtenidos en el estudio que sobre el mismo tópico realizó González (2005), con alumnos y alumnas que en el año 2002 cursaban el cuarto grado de educación normal en el Estado de México y en el de Puebla. En la tesis resultado de dicho estudio, se manifiesta que: “la evidencia recabada lleva a establecer que el término “fracción” es entendido por los estudiantes normalistas interrogados principalmente de dos formas: como la “división de un todo en partes” y como la “parte de un entero” (González, 2005: 81).

Es decir, que quienes se estaban preparando para ser profesores de primaria en ese entonces, tampoco habían incorporado a sus concepciones sobre las fracciones la propuesta introducida desde 1993. Esto no obstante que el plan de estudios vigente en las escuelas Normales en ese entonces, buscaba precisamente que los profesores se formaran en el contexto de lo que conocemos como “distintos significados de las fracciones”.

Conforme al plan de estudios de la Educación Normal, la formación para la enseñanza de las matemáticas de los futuros profesores en la época en que se realizó el estudio comentado descansaba en los cursos "*Matemáticas y su enseñanza I y II*". Estos cursos se insertaban, respectivamente, en el segundo y tercer semestres del trayecto de formación y tenían como propósito que los alumnos de las escuelas normales: "Amplíen y consoliden sus conocimientos sobre los contenidos matemáticos que el maestro de educación primaria requiere dominar, y comprendan en qué consiste el enfoque vigente en primaria para la enseñanza de las matemáticas de esta disciplina" (SEP, 2000: 12).

> En el programa correspondiente a la asignatura *Matemáticas y su enseñanza II,* se destina un bloque de contenidos al tratamiento de los números fraccionarios: *Los números racionales*. En la presentación del bloque se plantea: "La comprensión del sentido de los números racionales implica la construcción de esta diversidad de significados (los que adquieren las fracciones en distintas situaciones)" (SEP, 2002:19).

La referencia básica de los normalistas sobre el tema la constituyó, en el tiempo en que se realizó la investigación citada, el paquete didáctico del curso nacional "*La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Taller para maestros* (Block, 1995). Esto porque el Programa para la asignatura "*Matemáticas y su enseñanza II*" lo proponía como bibliografía básica (SEP, 2002: 20).

El estudio de las fracciones se realiza en el primero de los cuatro capítulos que componen el libro mencionado, por cierto, el más extenso y que se subdivide en los siguientes cinco temas:

Las fracciones en el reparto
Las fracciones en la medición
Las fracciones decimales y la medición
Las fracciones como operadores multiplicativos
Las fracciones como resultados de una división. (Block,1995: 5)

Este paquete didáctico fue el material básico de consulta en el desarrollo de las asignaturas propuestas para la formación de los normalistas en la enseñanza de las matemáticas en esa época. Sin embargo, la noción de fracción, en los alumnos por egresar de la Escuela Normal, tanto como en los alumnos de sexto de primaria y primero de secundaria, por lo general se restringe a la idea parte – todo (González, 2005)

No obstante, debe entender que las fracciones son una representación de los números racionales. Al respecto vale citar a Courant y Robbins (1962) quienes señalan que el número racional emergió cuando *m/n,* donde *m* representa un número de partes determinado de una unidad dividida en *n* partes, al extenderse el concepto de número "*m/n* quedó desposeído de referencias concretas a referencias de medidas y a las cantidades medidas, y fue considerado simplemente como un número, un ente en sí mismo […]" (p. 61)

En otro estudio llevado a cabo por Aguayo (2005) en dos escuelas normales del Estado de Zacatecas, el propósito se estableció en los siguientes términos: "[…] analizar el trayecto que siguen las praxeologías matemáticas y didácticas referidas a los números racionales. Dicho trayecto va desde los programas de estudio de las escuelas normales hasta la conceptualización que de ellas hacen los estudiantes, pasando por las representaciones sociales de los profesores y su reconstrucción en las aulas de las escuelas Normales (Aguayo, 2005: 18).

El propósito de esta investigación fue explorar y analizar el dominio que los profesores en formación habían adquirido luego del estudio de dicho tema en un doble nivel: nivel interno, que tiene que ver con el funcionamiento de una herramienta matemática, y nivel externo, que se refiere al campo de utilización de ese conocimiento y a los límites de ese campo. A partir de la aplicación de instrumentos que implicaban el planteamiento y la resolución de problemas con fracciones, Aguayo (2005) establece importantes conclusiones, algunas de las cuales se refieren a continuación en razón de su aportación al tema en discusión.

Más de la mitad de los estudiantes que participaron en el estudio manifiestan que no se sienten capaces de enseñar las fracciones y los números decimales en la escuela primaria, lo que coincide con el desempeño que mostraron en la realización de algunas tareas matemáticas que implicaban dichos contenidos. Al ir más allá en su análisis, Aguayo (2005) menciona que al ser cuestionados sobre las razones por las que no se sienten capaces de enseñar dichos contenidos, los docentes en formación exponen que les falta más dominio del tema así como de conocimientos didácticos, no obstante se hace evidente que el estilo didáctico de los formadores interviene también en este fenómeno; este investigador agrega que en la realización de algunas tareas del tipo citado, se hace evidente que los estudiantes “reducen sus acciones a una praxis sin logos donde las técnicas son simplemente acciones sin relación con los conceptos de la didáctica” (Aguayo, 2005:143).

Por su parte, Ramírez y Block (2009) reportan un estudio realizado con un grupo de sexto grado en la Ciudad de México. Estos autores hacen una serie de observaciones de los procesos de estudio con el propósito de mostrar que la relación entre las nociones de razón y fracción no está resuelta satisfactoriamente en las matemáticas escolares, por lo que se requiere invertir en la organización curricular un mayor esfuerzo.

Los resultados del trabajo de Ramírez y Block (2009) llevan al establecimiento de algunas conclusiones entre las cuales destaca la siguiente:

> Se manifiestan varias problemáticas en el uso de las fracciones para expresar razones […] el maestro enfoca poco los procedimientos realmente utilizados por sus alumnos y propiciados por el tipo de problemas que él plantea […] La introducción de las fracciones en el proceso de aprender a resolver problemas de proporcionalidad resultó problemática: en ciertos momentos, fue superficial, quedando como una manera más de nombrar las cosas, creándose con ello, en el nivel de representación simbólica, una identidad entre razón y fracción, pero con un significado poco claro para los alumnos. (Ramírez y Block, 2009:85)

Como ha quedado visto en los párrafos anteriores, hay diversas investigaciones enfocadas al estudio de la enseñanza de las fracciones que imparten los docentes de educación básica, aquí sólo se refieren algunas de ellas. Como resultado de estos estudios se detectan problemáticas en las propuestas curriculares, pero principalmente en la dirección de los procesos de estudio.

Ahora bien, el aprendizaje de los alumnos con respecto de los temas que implican el manejo de la expresión a/b tiene también dificultades. Estas dificultades han sido reportadas en investigaciones llevadas a cabo en nuestro país como es el caso del trabajo de investigación realizado por Eudave y Ávila (2004) en el estado de Aguascalientes. En este contexto ratifican que en el tema de las fracciones es en el que los alumnos enfrentan mayores dificultades (Eudave y Ávila, en Ávila, Coord. 2004: 24).

En este mismo sentido Perera y Valdemoros (2009) refieren a investigadores como Figueras (1988, 1996); Valdemoros (1993, 1997, 2001); Pitkethly y Hunting (1996) y Perera y Valdemoros (2002) para sustentar que en la educación básica la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones continúan siendo un tema difícil. Estas autoras le atribuyen dos razones a esta dificultad. Una es que son poco utilizadas en situaciones de la cotidianidad; en consecuencia, los niños tienen escasos conocimientos previos al empezar el estudio de este contenido matemático. La segunda razón, según las autoras, es que posiblemente la dificultad, "se deba a la enseñanza del lenguaje de las fracciones en edad temprana, así como a la implementación de tareas abstractas relacionadas con estos números" (Perera y Valdemoros, 2009: 30).

Perera y Valdemoros (2009) realizan también una investigación en un grupo de cuarto grado de primaria con niños de 9 años de edad dentro de su ambiente escolar. Su objetivo fue conocer cuáles son los cambios que se producen en su pensamiento (relacionados con las fracciones) durante el desarrollo de un programa de enseñanza que recrea experiencias de su propia vida.

Señalan Perera y Valdemoros (2009) que el punto de partida de la investigación que llevaron a cabo fue la aplicación de un cuestionario a 30 alumnos con el propósito de obtener información relativa a los conocimientos con que contaban en cuanto a las fracciones. Mencionan que dicho instrumento permitió seleccionar a tres de ellos para llevar a cabo el estudio de casos, lo cual facilitó la organización de la enseñanza que se experimentó. El cuestionario contenía los siguientes temas: significado de medida, relación parte-todo, situaciones de reparto y operador multiplicativo.

De acuerdo con lo que plantean las autoras en comento, el cuestionario inicial fue un instrumento que aportó información de la situación en la que se encontraba el grupo antes de iniciar el programa de enseñanza; con él se comprobó que los niños (al menos en ese grupo) contaban con escasos conocimientos intuitivos respecto a la noción de fracción. También se propició que se hiciera una exploración de los procesos cognitivos de los alumnos a través de las estrategias de resolución y de los modos de representación que utilizaban para abordar las fracciones (Perera y Valdemoros, 2009).

Esto, según el reporte de la investigación, permitió identificar la tendencia que manifestaron algunos niños a usar tanto números naturales como operaciones aritméticas seleccionadas arbitrariamente, lo cual no fue apropiado para dar respuesta a las tareas planteadas. Además, se hizo notar que la mayoría de los estudiantes no reconocieron el todo como divisible para efectuar su distribución en los problemas de reparto o en las situaciones donde se requería su partición.

Con este cuestionario, dicen las autoras, se observó que los alumnos tuvieron dificultades para nombrar la parte fraccionaria que se generó al partir un todo en dos partes iguales. Además, señalan, no pudieron determinar qué parte de un todo representan las fracciones ½, 1/3, 1 ¼. Así como también la mayoría de los alumnos tuvieron problemas para representar las fracciones en un todo: un medio, un cuarto y un octavo, y para distribuir un todo entre un determinado número de personas.

Dados los datos antes mencionados, las autoras establecen en las conclusiones que “los resultados mostrados en el cuestionario inicial son deficientes, por lo que suponen que el grupo de estudio, cuando cursó el tercer grado de primaria, trabajó muy poco los contenidos vinculados a las nociones de fracción” (Ibíd: 27).

1.3. Los decímales, objeto de investigación en educación básica

Hasta aquí se ha vertido información relativa a la dificultad que representa la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones. El tema de los *números decimales* es otro rubro sobre el cual se focalizó esta investigación por lo que enseguida nos referimos a ellos.

Inicialmente se realizará un acercamiento a la conceptualización de tales números. En este sentido vale comentar que Saiz y otros (Saiz, *et al.,* 2011) señalan que el primer significado que se les asigna en la escuela es el de números con punto, en contraposición de los números naturales “sin punto”. Además, refieren estos investigadores que es común hallar en libros de texto y escuchar en prácticas escolares que número decimal y expresión decimal se utilicen indistintamente. Dichos autores mencionan que esta caracterización define el rasgo fundamental de estos números en la cultura escolar sin que tenga que ponerse en duda en estudios que realicen más adelante por lo que manifiestan lo siguiente:

En este sentido, es importante señalar que el tratamiento posterior —en la escuela media— debería problematizar las relaciones entre los conjuntos y, en particular, se debería aprender que, si bien una de las formas de representación de los números decimales incluye el punto, ni todos los números con punto son decimales ni todos los que no lo tienen no son decimales. (Saiz, *et al.,* 2011: 135)

La aseveración anterior deja claro que la connotación de número decimal es más compleja de lo que puede pensarse cuando sólo se tiene la idea de número con punto. En este sentido, siguiendo a los autores en referencia estos números pueden definirse a partir de dos procesos distintos: a partir de los números enteros, o bien, una vez construido el conjunto de los racionales, como ciertos elementos especiales de éste. Señalan los autores en comento que los decimales pueden entenderse:

> […] como extensión de los enteros, pueden surgir al considerar todas las soluciones de la ecuación $10^n x = a$, donde a es un número entero $\mathbb{Z}$ y n es un número natural $\mathbb{N}$. Para lograr esto, se define en $\mathbb{Z}$ X $\mathbb{N}$ una relación de equivalencia y operaciones de suma y multiplicación, compatibles con esta relación de equivalencia, que prolonguen las ya definidas en los números enteros. (Ibid. 140)

Agregan además Sáiz *et al.,* (2011) acerca de $\mathbb{Q}$ "[…] esta manera de definir los decimales es similar a la que puede darse para los racionales, con la diferencia de que, en lugar de considerar únicamente los enteros de la forma 10*n*, se considera cualquier número entero…" (p. 140)

Los autores señalan también que:

> Otra posibilidad de definir a los números decimales ($\mathbb{D}$) —a partir de los números enteros— es añadir primero a este último conjunto un solo elemento "d", de los números decimales ($\mathbb{D}$) de tal manera que $10 \cdot d = 1$ y, a partir de este nuevo elemento y los enteros, generar todos los números decimales. (p.140)

Así mismo, establecen que "es posible definir $\mathbb{D}$ a partir de una restricción de los racionales definidos por medio del subconjunto de los números racionales cuyo denominador es una potencia de 10, es decir de la forma $a/10^p$ con *p* entero no negativo" (Saíz *et al.,* 2011: 140).

Estas formas de concebir a los números decimales desde la teoría de los conjuntos numéricos, tal como Saiz *et al*., (2011) lo exponen, y como se refiere en los párrafos anteriores, se halla de cierto modo fuera de las concepciones de los maestros de educación primaria, pues como se ha hecho ya mención, los números decimales son para la mayoría de los docentes simplemente números con punto.

Ávila (2008) hace referencia a esta situación cuando reporta los resultados de la investigación que llevó a cabo en escuelas de tres ciudades de la República Mexicana (México, Aguascalientes y Cuernavaca) con el propósito de conocer qué conocimientos y creencias sobre los decimales y su enseñanza tienen los maestros. La autora menciona que la mayoría de los maestros participantes atendían grupos de quinto y sexto grado de educación primaria. Casi todos los maestros laboraban en escuelas públicas ubicadas en medios urbanos contando todos ellos con estudios de licenciatura en educación primaria. Respecto de los resultados, Ávila señala:

> La mayoría de los profesores hacen referencia a que un decimal es: una parte de un todo, o un número con una parte entera y un decimal y que lleva un punto.
> En menor medida se menciona que un decimal es: la décima parte de una unidad o un número que se representa después del punto. (Ávila, 2008:16)

Se advierte aquí que un número considerable de los maestros que contestaron el cuestionario expresan la idea de que los decimales son fracciones, aunque no se especifica el rasgo que los distingue: tener como denominador un número potencia de 10. Ávila señala además que algunos maestros manifiestan la idea de que “los decimales son números con punto”, lo cual implica la centralidad de este concepto en sólo una de sus posibles representaciones.

Sin embargo, hay excepciones, pues se reporta que “[…] dos profesoras expresan en el conjunto de sus respuestas un conocimiento más preciso sobre el tema y se orientan a una definición convencional de número decimal: “Son las fracciones cuyo denominador es una potencia de diez” (Ídem).

Con respecto de la relación que los maestros consideran existe entre los números decimales y las fracciones, cerca de la mitad de los participantes, de acuerdo con el estudio que se refiere, señalan que “son dos formas de representar la misma cantidad”.

Otra buena parte de los docentes proporcionaron respuestas que a criterio de la investigadora “expresan conocimientos difusos sobre el tema” pues las respuestas que dan son del tipo: “bastante”, “mucha” o una relación muy estrecha”, lo cual no dice nada específico sobre la relación entre fracciones y decimales. La excepción nuevamente son dos profesoras que expresaron:

> • Una fracción es una cantidad que se escribe con numerador y denominador, los decimales son una forma de escribir las fracciones.
> • Las fracciones decimales son un subconjunto de las fracciones. (Ávila, 2008: 18)

La autora anota como conclusión del estudio que:

Los números decimales constituyen un contenido de saber *cuasi invisible* en la educación primaria mexicana en el sentido de que la mayoría de los profesores eliminan su tratamiento como subconjunto de los racionales porque consideran válidas las siguientes afirmaciones:

Lo esencial de los decimales lo constituye la escritura después del punto, utilizando los principios del sistema decimal de numeración. Puede lograrse un aprendizaje satisfactorio de estos números mediante estrategias de enseñanza orientadas por la idea de que los decimales son poco más que una escritura (Ibíd: 28).

Pero, agrega la autora, entre los docentes participantes en el estudio existen creencias, tradiciones escolares y cultura escolar muy arraigadas sobre la enseñanza de los números decimales, que están desvinculadas de las innovaciones curriculares sobre el tema. O se toman de estas innovaciones sólo aquello que "encaja" con las antiguas formas de enseñar los números decimales.

En los resultados de dicha investigación se dice también, que la práctica docente realizada para el tratamiento de los números decimales está casi vacía de tareas que hagan evidente la ruptura con la lógica de los números naturales y con el tratamiento de la doble escritura que puede usarse para representar estos números. Como consecuencia de estas creencias reflejadas en la conducción de los procesos de estudio, se tienen bajos niveles de logro académico por parte de los estudiantes.

Ya en 1981, Brosseau planteaba el peso de las significaciones culturales en los procesos de enseñanza, al respecto decía:

> Es necesario agregar que la didáctica de los decimales tiene una larga historia. A partir de Stevin, quien la consideraba con cierta ingenuidad y con principios definitivos, hasta la decisión por parte de los Estados Unidos de adoptar el sistema métrico, y entonces un sistema decimal de medida, pasando por su primera aparición en la enseñanza popular en Francia después de 1792, esta didáctica ha cambiado, no solamente de forma sino también, correlativamente, de inspiración y aún de significación política. Esas significaciones políticas y culturales pesan siempre sobre su enseñanza y se constituyen a veces en verdaderos obstáculos. (Brousseau, 1976, en Brousseau, 1981:14)

En este mismo sentido, Barriendos (2013) da cuenta de algunos resultados que forman parte de una investigación sobre la problemática de la formación de maestros de primaria para la enseñanza de las matemáticas, específicamente para la enseñanza de los números decimales. En la parte de este estudio que se retoma se planteó a los maestros la resolución de problemas que implicaban realizar multiplicaciones y divisiones con decimales utilizando la calculadora. Durante el proceso de resolución de las tareas, dice la autora, los docentes mostraron sus ideas sobre tales operaciones con números decimales. Estas ideas, que trasladan las propiedades de los números naturales al trabajar con números decimales (Barriendos, 2013), no favorecieron la resolución pronta y satisfactoria de las tareas propuestas, pudieron constituirse hasta cierto punto como obstáculos que sólo a través del trabajo colectivo en pequeños grupos pudieron superar mediante el cuestionamiento, discusión y explicación.

Por otra parte, Broitman *et al.* (2003) destacan, refiriendo a otros investigadores como Brousseau (1981 y 1987), Centeno, (1988) y Douady, (1980), que, con base en los trabajos de investigación realizados por tales autores, se reconoce que muchos de los errores cometidos por los alumnos al trabajar "con los números decimales se deben a que extienden a este campo sus conocimientos previamente construidos y válidos, en el campo de los números naturales" (Broitman *et al.*, 2003: 7).

De tal forma que, aunado a los argumentos vertidos en los párrafos anteriores, a la propia experiencia escolar y como observador del desarrollo de algunos procesos de estudio desde la función de supervisor de escuelas, puedo mencionar que, a pesar de las reformas educativas, los números decimales se vienen enseñando de la misma manera que hace cinco décadas.

En efecto, Ávila (2008) ha observado que en los planes y demás materiales de estudio de educación primaria de 1970 "se modifica la introducción de los decimales: se destaca su carácter racional y se señala que el sistema decimal de numeración permite representar valores menores que la unidad utilizando el punto (Ávila, 2008:9)”. Pero puede pensarse que los profesores no consideran esto en la enseñanza del tema. El tipo de práctica de enseñanza prevaleciente se traduce en dificultades de aprendizaje y en bajos niveles de dominio de los temas relacionados con fracciones y números decimales que presentan los alumnos de educación básica, mismos que se han comentado en párrafos anteriores.

1.4. La teoría antropológica de lo didáctico: un enfoque de investigación

Los estudios en educación matemática implican posiciones filosóficas acerca de la propia naturaleza de las matemáticas que raras veces se hacen explícitas (López y Ursini, 2007). López y Ursini (2007) señalan que las posiciones filosóficas que subyacen en algunos de los programas de investigación en Educación Matemática plantean también reflexiones acerca de las posibles implicaciones para la enseñanza de esta disciplina (p. 92).

Las mismas autoras afirman que, considerando el enfoque de carácter filosófico como una clasificación de las investigaciones en Educación Matemática, se pueden observar dos tendencias o programas de estudio en el sentido de Lakatos, “el programa cognitivo y el programa epistemológico” (López y Ursini, 2007: 104).

López y Ursini, de acuerdo con Bosch *et al.,* (2001), señalan que quienes se ubican en el programa cognitivo sostienen que los procesos de aprendizaje de las matemáticas pueden reducirse a fenómenos cognitivos. Asumen que el docente es el mediador entre los conceptos que se van a construir y el proceso cognitivo que permite tal construcción.

Por otra parte, Gascón, Bosch y Bolea (2001, citado por López y Ursini, 2007) aseveran que el programa epistemológico comprende principalmente a la didáctica francesa, también denominada didáctica fundamental, postura en la que se concibe la irreductibilidad de los procesos de aprendizaje a procesos cognitivos, pues implican toda la situación didáctica en la cual se trabajan los contenidos matemáticos.

Se puede agregar, de manera complementaria, que el enfoque de la didáctica fundamental, de acuerdo con Gascón (1998), surge al manifestarse la necesidad para la didáctica de “disponer de un modelo de la actividad matemática y de un modelo del proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas en el que dichos objetos [objetos de estudio convertidos en objetos didácticos] puedan estar debidamente representados” (Gascón, 1998: 19).

Según Gascón (1998), la didáctica fundamental surge con las primeras formulaciones de la *teoría de las situaciones didácticas* de Brousseau en los años 70. En esta teoría, el principio fundamental consiste en definir un conocimiento matemático a través de una situación; es decir, la actividad matemática escolar se modeliza a partir de la noción de situación fundamental a la que subyace un saber matemático.

No obstante, el avance logrado en la ampliación de la problemática de la didáctica, se hizo evidente que la matemática escolar ni la actividad matemática escolar podrían interpretarse correctamente sin considerar los fenómenos relativos a la reconstrucción escolar de las matemáticas que tiene lugar y se genera en la propia institución donde se produce el saber matemático. De esta manera, las actividades matemáticas institucionales se constituyen como el objeto primario de la investigación didáctica (Gascón, 1998). Este desarrollo de la didáctica se formaliza en la teoría de la transposición didáctica de la cual surge el enfoque antropológico en didáctica de las matemáticas.

De manera concreta, entonces, la didáctica fundamental, de acuerdo con López y Ursini (2007), ha sido desarrollada en dos perspectivas teóricas:

La Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau (1997), que en particular destaca que cada conocimiento matemático específico se modela mediante una situación o un conjunto de aspectos situacionales; y la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Chevallard (1991: 45), que señala que los conocimientos matemáticos abordados en el ámbito educativo son específicos de la institución escolar, teniendo como meta el acercamiento a las matemáticas institucionales. Un término clave en esta perspectiva lo constituye la transposición didáctica, es decir, la traducción de los contenidos de la disciplina matemática a la linealidad académica requerida para ser abordados en la institución escolar.

En el ámbito de la Educación Matemática, ha cobrado fuerza desde hace algunos años el enfoque propuesto por Yves Chevallard (1999) conocido como Teoría Antropológica de lo Didáctico (en adelante TAD) y es desde este enfoque teórico que en este trabajo se realiza el análisis de la propuesta curricular relacionada con las fracciones y los números decimales en los grados de 6° de primaria y 1° de secundaria, así como las libretas de trabajo de estudiantes de dichos grados escolares.

Al respecto de este enfoque, D´amore y Godino (2007) señalan que la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) adquiere el adjetivo antropológico “al centrarse casi de manera exclusiva en la dimensión institucional del conocimiento matemático” (2007). Puede advertirse que el punto esencial se haya en que la TAD “pone la actividad matemática y, por tanto, la actividad de estudio de la matemática, en el conjunto de la actividad humana y de las instituciones sociales” (Chevallard, 1999).

Este enfoque se distingue porque tiene sobre todo interés en la relación con el objeto matemático. Con base en esta idea se fundamenta la construcción inicial de la teoría del conocimiento o antropología cognitiva de Chevallard. Al interior de esta postura se puede colocar a la didáctica. Asimismo, para esta perspectiva teórica es elemental la persona o la institución (entendida como conjunto de personas) que se coloca en relación al objeto, no el objeto en sí; es decir, en palabras de Chevallard (1991: 149), "un objeto existe desde que una persona X o una institución I reconoce este objeto como existente (para ella)".

En este sentido, Chevallard (1999) menciona que la TAD sitúa la actividad matemática, y en consecuencia la actividad de estudio de las matemáticas, en el conjunto de las actividades humanas y de las instituciones sociales.

De acuerdo con su creador, la TAD admite que *toda* actividad humana regularmente realizada puede describirse con un modelo *único*, que se resume con la palabra de *praxeología*. Asimismo, Chevallard (1999), señala que en la raíz de la noción de praxeología se encuentran las nociones solidarias de *tarea (t)*, y de *tipo de tareas* (*T)*. Cuando una tarea *t* forma parte de un tipo de tareas *T*, se escribirá *t*/*T*. En la mayoría de casos, una tarea se expresa por un verbo, por ejemplo: *limpiar* la habitación, *desarrollar* la expresión literal dada, *dividir* un entero entre otro, *saludar* a un vecino, *leer* un manual de empleo, *subir* una escalera, integrar una *función*, etc.

En la TAD la noción de tarea empleada es evidentemente *más amplia* que la del lenguaje corriente: rascarse la mejilla, ir del sofá al armario, e incluso sonreír a alguien, *son también tareas*. Se trata de una puesta en práctica particularmente simple del "principio antropológico" que radica en establecer como elemento crucial la actividad matemática y, por tanto la actividad de *estudio*[4] de la matemática, en el conjunto de la actividad humana y de las instituciones sociales (Chevallard, 1999).

En este sentido, la noción de tarea o, mejor, la de *tipo* de tareas, supone un objeto relativamente preciso. *Subir una escalera* es un tipo de tarea, pero *subir*, simplemente, *no lo es*. De la misma manera, *calcular el valor de una función en un punto* es un tipo de tarea, pero *calcular*, simplemente, es lo que se llamará un

[4]En el capítulo 2 abundaremos sobre estos conceptos

género de tareas, que exige un determinativo para pasar de ser un género de tareas a un tipo de tareas.

Por último, dice Chevallard, las tareas, los tipos de tareas y los géneros de tareas *no son* datos de la naturaleza, son “artefactos”, “obras” humanas, *construcciones institucionales*, cuya reconstrucción se puede dar en una determinada institución.

La manera de hacer la reconstrucción de estos tipos de tareas matemáticas en una institución o en una clase específica constituyen un problema completo, y estos problemas *son el objeto mismo de la didáctica* (Chevallard, 1999). Y una primera parte del problema consiste en elucidar, como dice este autor, si los tipos de tareas propuestos en una determinada institución o clase tienen una “razón de ser”, es decir, si en verdad esa tarea requiere inevitablemente la utilización de cierta técnica matemática o si por el contrario puede resolverse mediante otra manera que no requiera de tal técnica.

Autores como Mariana Bosch, Espinoza y Gascón. (2003), explican que la noción de praxeología resulta de la unión de dos términos: praxis y logos, los cuales se desagregan para efectos de análisis y poder decir que una praxeología se constituye mediante tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías. Estas cuatro categorías son los elementos que componen una praxeología o una organización praxeológica matemática.

Es importante también decir que el saber matemático, a partir de la noción de praxeología matemática, aparece organizado en dos niveles. En el primer nivel, el de la praxis, tiene lugar la práctica que se lleva a cabo, es decir, la praxis o el saber hacer, lo que también se puede entender como el despliegue de técnicas que permiten resolver ciertos tipos de problemas o tareas que se “estudian”.

El segundo nivel, el del logos, se refiere a la parte descriptiva, organizadora y justificadora de la actividad, lo que se denominará logos o, simplemente, saber. El logos contiene las descripciones y explicaciones que se construyen para hacer comprensibles las técnicas, esto es, el logos no es sino el discurso tecnológico, lo cual se entiende como la razón, el logos de la técnica y, la teoría, que da sentido a los problemas planteados, además permite interpretar las técnicas y fundamentar las descripciones y las demostraciones tecnológicas (Bosch *et al.,* 2003).

Por otra parte, la Teoría Antropológica de lo Didáctico pone en el centro no a la enseñanza ni al aprendizaje, sino al proceso de estudio, y también a una concepción de las matemáticas: como actividad y como producto a la vez.

El estudio del que se da cuenta en este documento, tomó como perspectiva a la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) pues desde ésta, se parte del principio que el saber matemático se construye como respuesta al estudio de cuestiones problemáticas, apareciendo, así como el resultado de un proceso de estudio. Dicho proceso, en cuanto actividad que conduce a la construcción (o reconstrucción) de conocimiento matemático, forma parte de la actividad matemática.

Así, la TAD identifica lo didáctico con todo lo relativo al estudio, tomando la palabra “estudio” en un sentido muy amplio que engloba las nociones de enseñanza y aprendizaje comúnmente utilizadas en la cultura pedagógica y que se refiere a todo aquello que se hace en una determinada institución para aportar respuestas a las cuestiones o para llevar a cabo las tareas problemáticas que se plantean (Chevallard, 1999).

La TAD es entonces el enfoque que vertebra nuestro análisis respecto de las praxeologías, esto es, de las técnicas que despliegan los alumnos de 6° de primaria y 1° de secundaria cuando intentan cumplir con tareas en las que se involucran las fracciones y los decimales.

El estado de la cuestión que se expone en un apartado posterior[5] muestra, a partir de los resultados de algunas investigaciones, la existencia de serias dificultades en la enseñanza y en el aprendizaje de las fracciones y los números decimales en la educación básica. Estas dificultades se valoran en función de la apropiación por parte de los alumnos de objetos matemáticos que forman parte de una propuesta curricular, que debe ser estudiada en las instituciones escolares.

En este sentido, Chevallard, Bosh y Gascón (1998) plantean la siguiente pregunta, "¿Qué matemáticas deben estudiarse hoy para adquirir la cultura básica que nos reclama el interés social y, pues, nuestro propio interés?", interrogante que, el autor, concreta diciendo: "¿En qué consiste ese algo de matemáticas que todos deberíamos saber?" Estas cuestiones, desde la perspectiva del autor, establecen el problema de la elaboración del currículo escolar de matemáticas (Chevallard *et al.,* 1998: 119).

El mismo autor introduce el concepto de "obra" para definir todo aquello que corresponde a una construcción humana, como lo es incluso la sociedad, en donde coexisten obras de naturaleza más específica, tal como la escuela, en cuyo seno los estudiantes se ponen en contacto con otras obras. Señala además Chevallard que "lo que se enseña en la escuela, es decir, el currículo, son obras abiertas, inacabadas, que evolucionan con la sociedad" (Chevallard *et al.,* 1998: 117). Por esta razón, el currículo de matemáticas no es arbitrario, como tampoco lo es, dice el autor, la manera en que se transforma la matemática al interior de una institución escolar.

Chevallard y sus colegas consideran que:

Una de las características principales que debe poseer una obra para formar parte del currículo obligatorio es, además de que la sociedad considere su estudio

[5] Específicamente en el apartado 1.3 de este capítulo (1).

interesante por sí mismo, la de ayudar a acceder a muchas otras obras de la sociedad. […] Acceder a una obra significa entrar en ella. En la escuela, esta entrada se realiza a través del estudio. Estudiar una obra supone reconocer la disciplina propia de la obra y someterse a ella (Chevallard *et al*.:118).

El autor en referencia enfatiza la cuestión relativa al currículo. En su opinión, el currículo desde la enseñanza escolar se concreta a asumir que una vez seleccionados los contenidos de la educación obligatoria, lo que sigue es sólo la secuenciación y temporalización de estos, de dónde la problemática esencial del currículo se constituiría por las variables vinculadas al ejercicio de la enseñanza, pues también se da por hecho que el maestro conoce las obras matemáticas seleccionadas.

La postura de los autores (Chevallard *et al.,* 1998) considera que desde la Didáctica de las matemáticas, la formulación del problema del currículo, entendido como se menciona en el párrafo anterior, es insuficiente por las siguientes dos razones; primero, porque "el problema del currículo debería poderse plantear en términos del proceso de estudio de las matemáticas y no sólo de proceso de enseñanza"; y segundo, "porque la didáctica de las matemáticas problematiza el conocimiento matemático en lugar de tomarlo como transparente y establecido de una vez por todas" (Chevallard *et al*.,1998:122).

Para Chevallard y sus colegas, el problema que habría que plantear es el de "la reconstrucción de las obras matemáticas seleccionadas en el currículo en cuanto a obras que deben ser estudiadas y no sólo enseñadas". Los autores señalan algo fundamental, en cuanto a que la reconstrucción debe partir de un cuestionamiento previo de las obras designadas, sus elementos y las posibles maneras en que éstos se pueden estructurar.

Al hablar sobre la estructuración de una obra matemática es necesario establecer, de acuerdo con Chevallard *et al.,* (1998), que ésta se construye como respuesta a un tipo de cuestiones, o lo que es equivalente, de tareas problemáticas. Esta respuesta se integra a partir de cuatro elementos fundamentales; el primero de ellos son *los tipos de problemas* que surgen de las cuestiones; en seguida *las técnicas* que permiten resolver estos problemas; posteriormente *las tecnologías* que justifican y hacen comprensibles las técnicas; y *las teorías* que sirven como fundamento a las tecnologías. Siendo estos "los componentes principales de toda obra matemática" (Chevallard *et al.,*1998:125).

En un proceso de estudio donde se pretenda estudiar por sí mismo o ayudar a estudiar una obra matemática, lo más pertinente es tomar como punto de partida el ejercicio de identificación de un tipo de cuestiones en respuesta a las cuales la obra fue creada o podría ser recreada. Tomando como base esta aseveración, se trata de reconstruir la organización matemática en la que la obra se encarna. A esta organización Chevallard le denomina praxeología matemática.

La reconstrucción de las obras (organizaciones o praxeologías) matemáticas que refieren los autores, se realiza en un proceso de estudio donde el docente asume el papel de director. Tal función tiene varias implicaciones, entre ellas está el conocimiento de "la anatomía de las obras matemáticas" que se tienen que estudiar desde sus tres componentes, conceptual, procedimental y actitudinal; el reconocimiento de esas obras matemáticas en los libros de texto que forman parte de los materiales básicos de los estudiantes y la aplicación de las decisiones didácticas pertinentes para guiar el trabajo de los alumnos en el proceso de estudio a fin de que logren entrar en el dominio de la obra matemática en reconstrucción. De dicho proceso se podrán encontrar algunas huellas en las libretas de trabajo de los alumnos como parte de un proceso que Chevallard denomina transposición didáctica (1998)[6]; proceso en el cual intervienen también las representaciones y concepciones sociales de los docentes.

---

[6]En sentido restringido, la transposición didáctica designa pues el paso del saber sabio al saber enseñado (Chevallard, 1998).

El interés de este estudio radica fundamentalmente en la revisión de las obras matemáticas relacionadas con las fracciones y con los números decimales en los libros de texto y en las libretas de estudiantes de sexto grado de primaria y primero de secundaria, mismo que se lleva a cabo desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). De esta teoría se dan algunas referencias en el apartado siguiente y se amplían en el capítulo II de este trabajo.

1.5. El problema de investigación, preguntas y objetivos

Como ya se ha mencionado, la TAD es una teoría integradora que permite analizar el trabajo que realiza el profesor cuando enseña matemáticas y el que realiza el alumno que las aprende en la escuela. Basándose en esta línea teórica, en la investigación que presento se analizan las praxeologías matemáticas en los libros y en las libretas que involucran a profesores y a alumnos con temas de trabajo vinculados a los números decimales y a las fracciones. Esto a través del análisis de los componentes de las praxeologías matemáticas presentes en los libros de texto y en los cuadernos de trabajo de estudiantes de sexto grado de educación primaria y primero de secundaria.

El centro de esta investigación son los materiales educativos distribuidos por el Estado para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y las libretas de los alumnos. Complementariamente se analizan algunas ideas de los profesores que participan en la investigación sobre los mismos temas.

Los problemas detectados a través de diversas investigaciones relativos a las dificultades en la enseñanza y en el aprendizaje de las fracciones y los números decimales en la educación básica son un referente para la investigación.

A partir de las inquietudes planteadas en los párrafos anteriores, este estudio centra su interés de investigación en conocer cuáles son las praxeologias matemáticas relacionadas con las fracciones y los números decimales presentes en los programas, los libros de texto y las libretas de los alumnos de sexto de primaria y primero de secundaria. Esto con el propósito de identificar desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) los alcances y las limitaciones, de la propuesta de enseñanza de los temas mencionados. Por lo anterior, la pregunta principal de investigación, se establece en los siguientes términos:

¿Qué praxeologías matemáticas relativas a las fracciones y los decimales se incluyen en los libros de texto oficiales de sexto de primaria y primero se secundaria, y cuáles se observan en las libretas de los alumnos de estos grados?

Objetivo general:

- Identificar las praxeologías matemáticas relativas a las fracciones y los decimales que se incluyen en los libros de texto oficiales de 6° de primaria y 1° de secundaria y en las libretas de trabajo de los alumnos de dichos grados participantes en esta investigación.

Objetivos específicos:

- Conocer los tipos de tareas, las técnicas sugeridas, así como el discurso tecnológico correspondiente en las praxeologías matemáticas relacionadas con las fracciones y los decimales contenidas en los programas de estudio 2011 y en los materiales de apoyo oficiales de 6° de primaria y 1° de secundaria.

- Revisar las características de los tipos de tareas, las técnicas y los discursos tecnológicos subyacentes en las praxeologías matemáticas relativas a fracciones y decimales contenidas en las libretas de alumnos de 6° de primaria y 1° de secundaria participantes en esta investigación.

Los objetivos planteados delimitan los alcances del presente estudio, cuyo objeto fundamental está constituido por los materiales básicos de trabajo que utilizan tanto maestros como alumnos en los procesos de estudio que implican praxeologías matemáticas vinculadas a las fracciones y a los decimales. La información que se obtenga de esta revisión será útil para advertir cómo se plantea el estudio de las organizaciones matemáticas, en términos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías (componentes agrupados en los bloques práctico y teórico). También para conocer en cuál de esos componentes se centra la atención de los participantes en el proceso de estudio y sus posibles razones.

Yendo más allá, es posible dejar algunas pistas hacia dónde encaminar proyectos vinculados a la formación continua de los docentes de educación básica para el tratamiento de los temas que impliquen fracciones y números decimales.

Con lo anterior se busca contribuir a la investigación en educación matemática, desde la perspectiva de la TAD, mostrando primero la presencia de los componentes de las praxeologías (organizaciones) matemáticas, así como advertir la completitud o incompletitud de las mismas en la revisión de los Programas de estudio, los libros de texto y las libretas de trabajo de los estudiantes. Esto, aunado a los resultados de la aplicación de los recursos metodológicos complementarios (el cuestionario y la entrevista), permitirá establecer algunas conclusiones sobre los problemas que otras investigaciones han mostrado en relación a la enseñanza y al aprendizaje de las fracciones y de los números decimales.

CAPÍTULO 2. LA TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LO DIDÁCTICO (TAD): UN ENFOQUE PARA EL ANÁLISIS DE LOS PROCESOS DE ESTUDIO

A lo largo de este capítulo se exponen los conceptos principales de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) por ser, como se ha venido reiterando, el enfoque teórico que se utiliza en esta tesis. Se inicia exponiendo los principios básicos y el objeto de estudio de la TAD, posteriormente se explican los conceptos propios de este enfoque, los cuales se utilizarán en el análisis de los datos colectados para la elaboración de esta tesis: proceso de estudio, praxeología didáctica y praxeología matemática. De esta última, se abordan con detenimiento cada uno de los elementos que la constituyen, por ser el instrumento básico para el análisis de los materiales curriculares y las libretas de los alumnos.

Chevallard (1991) señala que las didácticas - la de las matemáticas y de cada una de las diferentes áreas de estudio - han tenido un impacto cultural, por lo que se constituyen como un objeto de estudio de la antropología. De esta manera, *lo didáctico* se convierte en una dimensión de la realidad antropológica.

Para Chevallard (1991), el objeto de la antropología de lo didáctico se construye a partir de elementos como las instituciones, los objetos de saber, los sujetos, la relación (personal) de un sujeto con un objeto de saber y la relación (institucional) de una institución con un objeto de saber. Agrega el autor que lo didáctico es “consustancial a la existencia de una intención: una intención didáctica precisamente” (Chevallard, 1991:150).

Menciona además el autor que existe lo didáctico cuando un sujeto *Y* tiene la intención de hacer que nazca, o que cambie de cierta manera, la relación de un sujeto *X* con un objeto *O*, donde $X = Y$. Al ahondar en este punto, Chevallard (1991) menciona:

> Consideremos sobre todo que lo didáctico, […] sobrepasa el territorio familiar de nuestras actuales didácticas, que sin embargo lo reencuentran inevitablemente a cada instante. Puesto que lo didáctico habita en todas partes en la
> antropológica, está enteramente presente, en lo cognitivo y tambié
> antropológico. Es preciso aprender a verlo, puesto que la cultura no n
> para nada en ese sentido: la "sensibilidad didáctica" es aquí la esencia de un oficio nuevo, el de *antropólogo de lo didáctico.* (Chevallard, 1991:151)

Sobre estas ideas básicas que plantea Chevallard (1991), en las siguientes líneas se abordan algunos aspectos de la antropología de lo didáctico retomando como apoyo para la argumentación correspondiente las reflexiones de otros autores sobre el tema.

2.1. El objeto de estudio de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD)

Para Chevallard (1989, en Godino, 2010), "saber" o "conocer" no es un concepto absoluto, sino que depende de la institución en que se encuentra el sujeto. Así, la expresión "sabe probabilidad", mencionada por una persona determinada, puede ser cierta si aludimos a las probabilidades estudiadas en la escuela y falsa si nos referimos al mundo académico, e incluso en éste habría que distinguir si nos referimos al conocimiento necesario para la enseñanza en los primeros cursos de una carrera técnica o al que sería preciso para realizar investigación teórica sobre Cálculo de Probabilidades.

Así pues, es necesario hacer una distinción importante entre relación institucional (saber referido al objeto conceptual, que se considera aceptable dentro de una institución) y relación personal (conocimiento de una persona dada sobre el objeto) que puede estar o no en coincidencia con el saber válido para la institución de la que forma parte. Entonces, para Chevallard el problema central de la Didáctica es:

> El estudio de la relación institucional con el saber, de sus condiciones y de sus efectos. El estudio de la relación personal es en la práctica fundamental, pero epistemológicamente secundario. Este programa, sin embargo, no puede tener éxito sin una toma en consideración del conjunto de condicionantes (cognitivas, culturales, sociales, inconscientes, fisiológicos, etc.) del alumno, que juegan o pueden jugar un papel en la formación de su relación personal con el objeto de saber en cuestión. (Godino, 2010: 16)

De acuerdo con Chevallard (1991) los saberes existen en las instituciones, pero cabe preguntarse: ¿De dónde vienen los saberes que están presentes en una institución determinada? Chevallard (1991) menciona que, en el caso de haber sido creados en ese espacio, puede decirse que se trata de una institución productora de saberes.

El mismo autor expone que en la mayoría de los casos, por la naturaleza de ser instituciones utilizadoras, los saberes ahí existentes son propiamente exógenos. Existen en la institución por la presencia de los agentes que forman parte de ésta, en la cual se forman y se apropian de saberes para formar a otros sujetos en el seno de estos espacios que constituyen el territorio didáctico o, dicho de otro modo, las escuelas.

Derivado de las ideas precedentes surge el enfoque antropológico de la didáctica de las matemáticas denominado Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). Chevallard (1999) señala al respecto de ésta que "sitúa a la actividad matemática, y en consecuencia la actividad del estudio en matemáticas, en el conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales". (Chevallard, 1999: 221)

Por su parte, Gascón (1998) asevera que la TAD propugna porque la actividad matemática debe ser interpretada como una actividad humana junto a las demás, sin limitarse a considerarla exclusivamente como la construcción de un sistema de conceptos, como la utilización de un lenguaje o como un proceso cognitivo. En consecuencia, el enfoque de la TAD incorpora otros enfoques parciales, tanto epistemológicos, lingüísticos, psicológicos, sociológicos como antropológicos. Este mismo autor agrega que el enfoque antropológico de lo didáctico:

> […] precisará de un modelo de las matemáticas institucionales que incluya la matemática escolar como un caso particular y de un modelo de las actividades matemáticas institucionales que incluya la enseñanza aprendizaje escolar de las matemáticas, como una actividad matemática particular. (Gascón,1998: 20)

En esta dirección, respecto del sentido de la TAD se asume que ésta se ha centrado hasta el momento, casi de manera exclusiva, en la dimensión institucional del conocimiento matemático, donde las nociones de obra matemática, praxeología y relación institucional con el objeto se proponen como los instrumentos para describir la actividad matemática y los objetos institucionales emergentes de tal actividad (Godino, *et al.*, 2006: 129). Aguayo (2005) comparte este punto de vista cuando, citando a Chevallard (1994) menciona que “en el seno de la TAD, este último autor asume que la clase ha sido el objeto de estudio privilegiado por la didáctica de las matemáticas pero que el conjunto de instituciones donde aparece una intención didáctica relativo a lo matemático debe ser también un objeto de estudio de esta disciplina (Aguayo, 2005: 61).

2.2. El proceso de estudio en la TAD

2.2.1. El término “estudio”.

Los procesos de estudio implican una serie de relaciones entre las que destacan aquellas en las que Institución y saber pueden tener una relación de manipulación y de enseñanza, ésta última puede considerarse, de acuerdo con Chevallard (1991) una problemática didáctica. Esto implica que los agentes pertenecientes a la institución manipulan el saber al enseñarlo, o más específicamente, para enseñarlo. El mismo autor agrega también que la Institución puede establecer con el saber otro tipo de relación, que puede ser la de producción, donde los agentes de la institución manipulan al saber para producir el saber; de donde se deriva entonces que el saber en una relación con el sujeto o con la institución puede ser utilizado, enseñado o producido.

A este mismo respecto Chevallard (1991) señala que, en el cruce entre la antropología de los saberes y la antropología didáctica del conocimiento, se encuentra la antropología didáctica de los saberes, cuyo propósito es la manipulación de los saberes con intención didáctica y, en particular, la enseñanza de los saberes. Sin embargo, hace la observación de que “la enseñanza de un saber, o lo que implica su manipulación didáctica general, no puede comprenderse en muchos de sus aspectos si se ignoran sus utilizaciones y su producción” (p: 155).

De acuerdo con Chevallard (1999, 34), el término *“Estudio”* debe entenderse “en un sentido más amplio de lo que comúnmente se comprende, en un sentido que engloba tanto el trabajo matemático del alumno, como el del matemático profesional que también estudia problemas de matemáticas”. El autor agrega que el proceso de estudio o proceso didáctico relativo a las matemáticas, tiene lugar cada vez que alguien se ve llevado a estudiar matemáticas o cada vez que alguien ayuda a otro u otros a estudiar matemáticas. Sostiene entonces que lo didáctico se identifica así con todo lo que tiene relación con el estudio y la ayuda al estudio de las matemáticas, por tanto, establece que la didáctica de las matemáticas se define como la ciencia del estudio de esta disciplina. Se entiende a partir de estos argumentos que el proceso de estudio representa entonces una noción más amplia que el *estudio* en sí.

El segundo principio elemental que apuntala a la TAD consiste en “la dualidad del conocimiento matemático”. Esto se entiende, tomando en cuenta los planteamientos de Aguayo (2004), como el hecho de asumir que el saber matemático se construye con la finalidad de dar respuesta a diversas situaciones problemáticas; no obstante, también resulta ser “[…] el producto del estudio que forma parte de la actividad matemática (proceso de estudio) y el saber matemático (producto)” (Aguayo, 2004: 31). Por lo tanto, desde la TAD se considera “…que las matemáticas son una actividad y un producto de la actividad” (Ídem), es decir, un producto del proceso de estudio.

Derivado de lo señalado en los párrafos anteriores, se tiene entonces que la Teoría Antropológica de lo Didáctico implica un proceso de estudio, una concepción de las matemáticas como actividad y producto a la vez, así como una atención a las actuaciones de los sujetos que participan en el proceso de estudio desde una visión antropológica que no omite las condiciones del contexto institucional donde tiene lugar dicho proceso.

2.2.2. El proceso de estudio y las instituciones didácticas.

El ejercicio de la enseñanza, en particular de las matemáticas en la educación básica, implica el desarrollo de un tipo particular de vínculo con el saber a enseñar; que se halla contenido en los programas de estudio y libros de texto oficiales. Este saber debe ser transformado para que cumpla un papel determinado en el proceso didáctico. En este sentido, el saber que está en los programas, y que ha sido puesto en el texto del saber por los integrantes de la noosfera[7] ya ha sido transformado mediante el proceso de transposición externa. En este punto le corresponde al maestro iniciar el proceso de transposición interna en el que el saber volverá a sufrir transformaciones. En este último proceso, cuya

[7] Noosfera, dicho por Chevallard (1991) se encuentra en la periferia del Sistema de Enseñanza, en la noosfera se encuentran todos aquellos que ocupan los puestos principales del funcionamiento didáctico, es la esfera donde se piensa, independientemente de las modalidades, el sistema didáctico.

responsabilidad de gestión la asume el maestro, éste buscará que los alumnos estudien unas determinadas obras matemáticas o, dicho de otro modo, unas praxeologías matemáticas.

Al respecto, resulta pertinente recordar aquí la siguiente aseveración de Chevallard con relación a dicho proceso:

> Hemos de tener en cuenta que los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas son aspectos particulares del proceso de estudio de las matemáticas, entendiendo la palabra estudio en un sentido amplio que engloba tanto el trabajo matemático del alumno, como el del matemático profesional, que también estudia problemas de matemáticas. (Chevallard, 1997:47)

Más adelante el autor amplía la noción de estudio señalando:

Al hablar aquí de estudio no nos referimos únicamente a esa actividad que uno realiza en solitario fuera de clase y que utilizamos en expresiones como: “si estudias mucho aprobarás” o “Tengo que estudiar geometría para el examen de mañana”. Nosotros utilizaremos la palabra estudio en un sentido más amplio, como cuando decimos de alguien que estudia derecho o que quiere estudiar electrónica. En toda escuela, instituto o facultad, se suelen formar grupos de alumnos para que, durante todo el curso escolar, puedan estudiar matemáticas, historia, educación física, etc., con la ayuda de uno o varios profesores. (Chevallard, 1997:58)

Aguayo (2005), siguiendo la línea de Chevallard, plantea en relación a la noción de estudio, lo siguiente:

> […] Es necesario aclarar, que tanto en el caso de un alumno como en el de un investigador, la palabra estudio se utiliza en un sentido muy amplio, engloba las nociones de enseñanza y de aprendizaje, es decir, aquí la enseñanza aparece más como un medio, como la ayuda para el estudio de un determinado objeto

matemático. En términos más generales, el estudio se refiere a todo lo que se hace en una institución para resolver las tareas matemáticas problemáticas que se planteen, sin importar que el estudio se desarrolle en el ámbito escolar o en cualquier otra institución social. [...] En el caso de los alumnos, el estudio alude a todas las acciones que realizan para cumplir con las tareas matemáticas que se les plantean. (Aguayo, 2005: 63)

El proceso de estudio de las matemáticas donde se presume la presencia de alguien que aprende con la ayuda de otra persona, tiene implicaciones de tipo didáctico. Chevallard agrega respecto de esto lo siguiente:

Lo didáctico se identifica con todo lo que tiene relación con el estudio y la ayuda al estudio de las matemáticas, identificándose entonces los fenómenos didácticos con los fenómenos que emergen de cualquier proceso de estudio de las matemáticas, independientemente de que dicho proceso esté dirigido a utilizar las matemáticas, a aprenderlas, a enseñarlas o a crear matemáticas nuevas. La didáctica de las matemáticas se define, por tanto, como la ciencia del estudio de las matemáticas. (Chevallard, 1997: 58)

Para Chevallard (1997), las instituciones didácticas son aquellas en las que tienen lugar procesos de estudio, estas instituciones pueden ser no sólo las escuelas de cualquier nivel educativo, sino todos los espacios donde alguien aprenda matemáticas. No obstante, para este trabajo, se consideran las escuelas de educación básica como las instituciones didácticas donde se llevan a cabo procesos didácticos que se vinculan con la presencia de un profesor o director de estudio encargado institucionalmente de conducir el proceso al que refiere la cita siguiente:

Diremos entonces que hay un proceso didáctico (relativo a las matemáticas) cada vez que alguien se ve llevado a estudiar matemáticas o cada vez que alguien ayuda a otro u otros a estudiar matemáticas. (Chevallard, 1997: 57)

Al interior de las instituciones didácticas se hacen evidentes tendencias a situar la centralidad de estudio en procesos didácticos dirigidos por los profesores. En torno a este punto, Chevallard menciona también:

Es importante señalar que, en este contexto, la enseñanza aparece como un medio para el estudio… en el caso de las asignaturas escolares, existe una tendencia a confundir la actividad de estudio con la enseñanza o, por lo menos, a considerar únicamente como importantes aquellos momentos del estudio en los que el alumno está en clase con un profesor. Se olvida entonces que el aprendizaje, entendido como el efecto perseguido por el estudio, no se produce sólo cuando hay enseñanza. El estudio –o proceso didáctico- es un proceso más amplio que no se restringe, sino que engloba, al proceso de enseñanza y aprendizaje. (Ídem)

De tal manera que, desde los argumentos de Chevallard (1997), el estudio es un proceso mucho más amplio que el conjunto de acciones que el docente realiza con sus alumnos con fines de enseñanza en el seno de una institución. El estudio, como se verá más adelante, implica además la realización de tareas individuales y/o colectivas entre estudiantes con propósitos de aprendizaje.

Centrándonos particularmente en la actividad áulica que tiene lugar en la educación básica, de acuerdo con Chevallard (1997) podemos señalar que:

En el discurso psicopedagógico que domina nuestra cultura escolar, se considera el aprendizaje escolar como un objetivo último de la acción educativa. El análisis se centra en lo que el profesor debe hacer para favorecer el aprendizaje de los alumnos, un aprendizaje que se traduzca en adquisiciones significativas y en interés por la materia. En cambio, nunca se considera necesario un análisis detallado del proceso de estudio del alumno, es decir, del trabajo matemático que éste realiza, considerado como un objetivo en sí mismo.

Se tiende a considerar a la enseñanza como un instrumento para potenciar el desarrollo de las estructuras cognitivas de los alumnos y, en este sentido, el estudio que éstos deben realizar valiéndose de diferentes recursos didácticos (entendidos como un medio auxiliar de la enseñanza) no depende demasiado de la materia particular estudiada. (Chevallard, 1997: 78)

Se pueden derivar dos cuestiones de las citas anteriores; primero, que los planteamientos sobre el proceso de estudio que realiza Chevallard (1997) no se restringen a lo que realizan los estudiantes del nivel de educación básica, sino que aplica en todo nivel que implique la acción de aprender por un individuo. En segundo término, queda claro que el proceso de estudio comprende no sólo la enseñanza que conduce un maestro en un espacio institucional sino todo lo que el alumno realice con el objetivo de aprender.

Sin embargo, son en las instituciones didácticas donde se llevan a cabo los procesos de estudio realizados por una comunidad. Bosch, Espinoza y Gascón (2003) destacan el papel del profesor en esos procesos de estudio de las matemáticas:

> -En las comunidades de estudio-, con la ayuda de uno o varios directores de estudio –el investigador principal o el profesor-, y guiada por un programa de estudio –en forma de un programa de investigación o de currículo-, se realiza la actividad de estudio. En este esquema, el profesor aparece como el director (o como uno de los directores) de una comunidad de estudio formada por él mismo y sus alumnos. Este punto de vista permite, entre otras cosas, considerar la figura del profesor como una más de las figuras integrantes del colectivo que estudia (la comunidad de estudio) y, en particular, atenuar el protagonismo que la cultura pedagógica tradicional suele adjudicarle. (Bosch, Espinoza y Gascón, 2003: 84)

Desde este planteamiento, el protagonismo del profesor y del alumno en el proceso de estudio de las matemáticas, se combinan en el contexto de la escuela de educación básica (institución didáctica), pues a pesar de que el profesor ejerce la dirección de la actividad, el alumno tiene el papel principal en el proceso de estudio.

2.3. Praxeología u organización matemática

Según Chevallard (1999), la TAD "admite que toda actividad humana realizada puede describirse con un modelo único que se representa con el término de Praxeología" (p. 222). Dice también Chevallard, que gran parte de la actividad matemática puede identificarse con una actividad de modelización matemática. Al respecto, Solares (2012) menciona que una praxeología se puede entender como un modelo mediante el cual se caracterizan los conocimientos matemáticos que emergen de prácticas concretas (p. 15).

Ahora bien, en la Teoría Antropológica de lo Didáctico existen dos tipos de praxeologías u organizaciones praxeológicas: las matemáticas, que "corresponden a la concepción del trabajo matemático como estudio de tipos de problemas o tareas problemáticas" y las praxeologías didácticas (Bosch, *et al.*, 2003: 85). Sin embargo, con respecto a las primeras, plantearse y resolver buenos problemas no es la finalidad única en el trabajo matemático, sino que se aspira además a realizar caracterizaciones, así como a delimitar e incluso clasificar los problemas para definir tipos de problemas.

Bosch y sus colegas (Bosch *et al.,* 2003) agregan que en el trabajo matemático se busca también entender, describir y caracterizar las técnicas que se utilizan para resolver diferentes tipos de problemas hasta el punto de controlarlas y normalizar su uso. Así mismo, se propone establecer las condiciones bajo las cuales aquéllas funcionan o dejan de ser aplicables y, en última instancia se aspira a construir argumentos sólidos y eficaces que sostengan la validez de las maneras de proceder en el proceso de resolución de problemas.

Considerando lo anterior, es en dos niveles que aparece organizado el saber matemático. Al primero corresponde la práctica que se lleva a cabo, es decir, la praxis o el saber hacer. En este nivel se hallan los tipos de problemas que se revisan en los procesos de estudio, así como las técnicas que se elaboran y usan para atenderlos.

En el segundo nivel, siguiendo a esos mismos autores, se integra la descripción, la organización y la justificación de la actividad, elementos que constituyen *el logos* o saber. Es en este nivel en el que se elaboran las descripciones y explicaciones de las *técnicas* que conforman el *discurso tecnológico* de la técnica (la razón, el logos) y que en última instancia constituyen el fundamento de la producción de nuevas técnicas; y finalmente la *teoría* que da sentido a los problemas que se plantean y hace posible interpretar las técnicas y fundamentar las descripciones tecnológicas.

De esta manera, la noción de praxeología implica la unidad entre praxis y logos; en este caso, una praxeología u organización matemática, se constituye por las categorías siguientes: tipos de tareas, técnicas, tecnología y teoría.

Para concretar la noción de praxeología, Bosch *et al.,* (2003) señalan que cuando se pone en práctica una praxeología matemática con el objeto de realizar un determinado tipo de tareas, se está haciendo matemáticas y se estudia matemáticas cuando se construyen o reconstruyen ciertos elementos de una praxeología matemática con el propósito de hallar respuesta a un determinado tipo de tarea problemática.

En este sentido, hacer matemáticas implica transitar por los bloques práctico o “saber-hacer” -formado por las categorías tipo de tareas y técnicas- y por el bloque teórico o “saber” -constituido por las categorías a las que pertenece el discurso tecnológico-teórico.

No se puede desestimar la mención sobre la doble relatividad de los elementos de una praxeología matemática que hacen Bosch *et al.,* (2003). Según estos autores, las categorías constitutivas de una praxeología matemática son doblemente relativas debido a que “son relativas a la Institución de referencia”. Es decir, que lo que en una institución es considerado como una tarea puede ser que en otra no lo sea. Por otra parte, alguna de las categorías: -tarea, técnica, tecnología y teoría- también cumplen con un papel relativo en la función que desempeñan. Por ejemplo, en un determinado proceso de estudio, lo que se tiene por técnica puede ser utilizado para integrar un argumento tecnológico que explique un tipo de tareas y técnicas.

2.3.1. Componentes de la praxeología matemática.

No obstante, el desglose ya hecho de la noción de praxeología matemática, es necesario particularizar sobre los rasgos generales de las categorías que la constituyen. Así, para entender el significado de praxeologia matemática, Gascón (1998) desarrolla el concepto de obra matemática acuñado por Chevallard y señala que “una obra matemática”, como toda obra humana, surge siempre como respuesta a un conjunto de cuestiones planteadas en el seno de una institución y como medio para llevar a cabo, en el seno de esa institución, determinadas tareas problemáticas” (p. 20). Gascón (1998) agrega que “las cuestiones y las tareas problemáticas a las que responde una obra matemática se acaban cristalizando en uno o más tipos de problemas” (p.21) lo que en adelante se definen como tipos de tareas.

En síntesis, Gascón establece que:

> […] la matemática institucionalizada y, en particular, la matemática escolar, se organiza en obras matemáticas […] éstas son el resultado final de una actividad matemática que, como toda actividad humana, presenta dos aspectos inseparables: la práctica matemática que consta de tareas (materializadas en tipos

> de problemas) y técnicas útiles para llevar a cabo dichas tareas, y el discurso razonado sobre dicha práctica que está constituido por dos niveles, el de las tecnologías y el de las teorías. Estos son, en definitiva, los elementos constitutivos de toda obra matemática. (Gascón, 1998: 23)

Al integrarse los dos aspectos de una obra matemática (praxis y logos), se tiene entonces la noción de praxeología matemática cuyos elementos se desarrollan en seguida.

2.3.1.1. Tareas.

Chevallard (1999) señala que las tareas, los tipos de tareas, los géneros de tareas no son datos de la naturaleza, las define como artefactos, obras, construcciones institucionales, cuya reconstrucción en tal institución y, por ejemplo, en tal clase, es un problema complejo que constituye el objeto mismo de la didáctica.

Una “tarea”, de acuerdo con Solares (2012) “se expresa de forma precisa mediante un verbo” (p.15), por ejemplo, obtener el área de polígono, ubicar una fracción en la recta numérica, etc. Asimismo, un “tipo de tareas”, dice la misma autora, “da cuenta de las tareas que se resuelven de una misma manera” (Solares, 2012: 15), lo cual implica la aplicación de una técnica determinada como resolver problemas relativos a la obtención de porcentajes.

Desde la perspectiva de la autora en comento, respecto de la especificidad de las tareas, se puede preguntar: ¿En qué consiste la tarea específica y cuál es su propósito?, ¿Quiénes participan y cuáles son las metas de los participantes? La respuesta a estas cuestiones da cuenta de elementos importantes para advertir la complejidad del proceso de estudio.

2.3.1.2. Técnicas.

Sobre la técnica, Chevallard (1999) establece que se designa por *T* un tipo de tareas dado. Una praxeología relativa a *T* requiere en principio, una manera de realizar las tareas *t* £ *T*. A una determinada manera de hacer, Ô, se le da el nombre de técnica. El mismo autor afirma que una técnica Ô tiene tres características esenciales:

1) Una técnica Ô, es decir, una manera de hacer, no tiene más éxito que sobre una parte de las tareas del tipo *T* a la cual es relativa y por lo tanto se define como el alcance de la técnica;

2) Una técnica Ô, no es necesariamente de naturaleza algorítmica o casi algorítmica, y esto se ve en la tarea presentada en la investigación realizada por Solares con niños migrantes agrícolas y que se comentó en el párrafo anterior; y

3) En una institución dada, y a propósito de un tipo de tareas *T*, existe en general una sola técnica, o al menos un pequeño número de técnicas institucionalmente reconocidas. (Chevallard, 1999: 223)

2.3.1.3. Tecnologías.

En cuanto a las tecnologías, Chevallard (1999) sostiene que se indican generalmente por θ y constituyen un discurso racional, el logos sobre la técnica Ô, para asegurarse que permite realizar las tareas del tipo *T*, es decir, realizar lo que se tiene propuesto. Al respecto, el autor les hace a las tecnologías tres observaciones; la primera consiste en que en cualquier institución *I*, cualquiera que sea el tipo de tareas *T*, la técnica Ô relativa a *T* está siempre acompañada de al menos un embrión o más frecuentemente de un vestigio de tecnología θ. Lo anterior lleva a pensar que, en la técnica, por lo general se hallan elementos tecnológicos que desde sí pretenden ya explicar el sentido de dicha técnica.

La segunda observación lleva a admitir que en una determinada institución puede existir una técnica canónica como la única reconocida y empleada, entonces no hay necesidad de justificarla pues se actúa correctamente como parte de su virtud autotecnológica, que se entiende desde la misma afirmación del autor como la “buena manera de actuar en *I*” (Chevallard, 1999: 224); la tercera observación asigna a la tecnología la función de producción de técnicas; esto significa que la evolución de una tecnología puede explotarse para generar otras técnicas. (Ídem)

Gascón (1998) refiere que otros elementos de la tecnología asociada a una técnica son las proposiciones que describen su alcance, su relación con otras técnicas, sus propias generalizaciones y las causas de sus limitaciones. A su vez, Castela, (citada por Solares, 2012) afirma que además de las funciones asignadas por Chevallard a la tecnología, se le pueden atribuir las de describir, facilitar, motivar, favorecer, validar y evaluar la técnica.

2.3.1.4. Teoría.

La Teoría, como último elemento de los que conforman una praxeología matemática, se concibe desde los aportes de Chevallard (1999) como un nivel superior de justificación, explicación y producción, que retoma en relación de la tecnología, el papel que ésta tiene con respecto a la técnica. Gascón (1998) considera que se llama “teoría asociada a una técnica, a la tecnología de su tecnología, esto es, a un discurso matemático suficientemente amplio como para justificar e interpretar la tecnología de dicha técnica” (Gascón, 1998:22); agrega que “la teoría suele mantenerse a mayor distancia de la práctica matemática, y acostumbra a estar ausente de la misma” (Ídem).

2.3.2. La incompletitud de las praxeologías matemáticas.

Una vez revisados los elementos que integran una praxeología matemática, es importante considerar lo que Ávila (2012) señala citando a Gascón (1998) y a Bosch (Bosch *et al.,* 2003) en cuanto a que “un saber matemático debe constituir una organización completa que resulta de la asociación de un saber hacer y un hacer” (p. 51). No obstante, la aseveración anterior, los resultados de algunas investigaciones demuestran que es frecuente que exista una incompletitud en las praxeologías matemáticas que se construyen o se trabajan en las instituciones educativas.

Ávila (2012), refiere los resultados de una investigación realizada en 2008 en una Escuela Nocturna para adultos que ofrece servicios educativos de nivel primaria. La investigación llevada a cabo estuvo orientada hacia el análisis de las prácticas institucionales, así como a los procesos de estudio de las matemáticas.

Los resultados del estudio realizado por Ávila (2012) establecen en primer lugar que existe una discontinuidad entre el saber y el saber hacer de los docentes (entre su logos y su praxis). De acuerdo con la autora, esta discontinuidad se traduce “en otra discontinuidad: la existente entre la simbolización y lo procedimental por un lado, y las situaciones donde el conocimiento matemático funciona, por otro” (Ávila, 2012: 43).

Ávila (2012) argumenta en el reporte de su investigación: “A pesar del logos de los docentes que parece estar constituido con conocimientos e ideas claras en torno de que los estudiantes tienen saberes construidos cotidianamente que hay que recuperar en el proceso de estudio, fue prácticamente nulo el trabajo con problemas matemáticos” (p.51). Es decir, “el objeto de estudio n la escuela nocturna no es la resolución de problemas. Pero además se advierte una desvinculación entre las técnicas y las tareas: los profesores dan las técnicas, pero estas no se asocian a las tareas [de resolución de problemas] en las que son útiles como herramientas” (Ávila, 2012: 51). Por lo anterior, queda a responsabilidad de los estudiantes establecer la vinculación entre las simbolizaciones y procedimientos que se aprenden en el aula con las situaciones de la vida cotidiana donde pueden ser empleadas.

En consecuencia, la investigación muestra que en el proceso de estudio de las matemáticas “se trata de una centración en los procedimientos que lleva a que la técnica se confunda con la tarea o, aún más allá, a que la técnica sea la tarea” (Ávila, 2012: 52), esto debido a que:

El saber matemático permanece en el ámbito de la técnica, desarticulado de la tarea de resolver problemas; en realidad, lo que se aprende es una técnica con poca utilidad, cuyo sentido didáctico se desvanece. (Ídem)

En conclusión, la autora señala:

> Prevalece una enseñanza que transmite técnicas de cálculo, que solicita hacer planas y memorizar procedimientos como ayuda al proceso de estudiar. De este modo, los saberes matemáticos se reducen al aprendizaje de símbolos y procedimientos únicos que no se requiere justificar. (Ibíd: 56)

Otra investigación más que asume a la TAD como enfoque teórico fue la realizada por Solares (2012) con niños jornaleros agrícolas migrantes empleados en un campo de cultivo de uvas y espárragos en el municipio de Caborca, en el Estado de Sonora. La investigación en referencia se enfoca a analizar la puesta en marcha de conocimientos vinculados con la medición en el contexto del trabajo agrícola.

A decir de la autora, en tal contexto se identifican situaciones que implican, entre otras tareas, la medición de diferentes magnitudes. En el recuento de su estudio, Solares (2012) apunta las siguientes apreciaciones:

La exploración realizada en el campo de cultivo de Caborca permitió identificar la presencia de diversos conocimientos matemáticos sobre magnitudes y medición en varias de las tareas que se llevan a cabo en el campo de cultivo [...] esos conocimientos matemáticos se ven afectados por los intereses y expectativas de los distintos participantes. (Solares, 2012: 27)

Es decir, las tareas son realizadas como parte del cumplimiento de un contrato laboral y al llevarlas a cabo, los jornaleros consideran y aplican el conjunto de técnicas, instrumentos y procedimientos que a lo largo de la experiencia se han ido creando al lograr completar una caja de uvas con peso determinado y con características definidas. Así entonces, la parte tecnológica de este proceso queda establecida cuando el supervisor evalúa la efectividad de la técnica empleada por el trabajador tomando como referencia “la extensión, las condiciones y los límites de una técnica” (Ibíd: 26), misma que es susceptible de comparación con otra técnica que otro trabajador emplearía ante la situación.

En el trabajo de investigación que reporta Solares (2012) se manifiesta así mismo la incompletitud de las praxeologías matemáticas, pues se observa que “el conocimiento matemático como un discurso que justifique, explique, facilite o motive la técnica” (p. 26) carece de todo valor en una situación laboral.

Como ya se dijo, el estudio de la incompletitud de las praxeologías matemáticas es un tema que ha sido abordado por algunos investigadores, entre ellos Bosch, Fonseca y Gascón (2004), (Bosch *et al.,* 2004), quienes realizaron en el año 2000 una investigación en España orientada a indagar cómo disminuir las enormes dificultades que encuentran los alumnos cuando pasan de estudiar matemáticas de secundaria a la Universidad.

Para esto, los autores se plantean dos hipótesis fundamentales: en la primera establecen que “la actividad matemática que se lleva a cabo en la secundaria es esencialmente *práctico-técnica* y raramente alcanza el nivel tecnológico” (Bosch *et al*., 2004: 221). Como consecuencia, señalan los autores, las OM (organizaciones matemáticas) que se estudian en ese nivel son generalmente OM puntuales, muy rígidas y aisladas (o poco coordinadas entre sí), lo que dificulta, incluso impide, que en dicha institución se reconstruyan efectivamente organizaciones matemáticas locales (OML) relativamente completas.

En la segunda hipótesis, Bosch y sus colegas mencionan: “la actividad matemática que se lleva a cabo en la Universidad está muy centrada en los componentes teóricos de las OMR (organizaciones matemáticas regionales) que se proponen para ser estudiadas. Se da por supuesto que las OML que integran las citadas OMR han sido construidas como OML relativamente completas” (Ibíd: 222).

Los investigadores en referencia, al llevar a cabo su estudio, aplican algunos instrumentos como cuestionarios y obtienen algunas conclusiones que se establecen de la siguiente manera: 1) Los datos obtenidos del cuestionario en su conjunto muestran dificultades especialmente graves en aquellas tareas en las que interviene el bloque tecnológico- teórico; “es decir, en las que interviene la dimensión de estudio que hace referencia a la necesidad de interpretar, explicar y justificar la actividad matemática que se está realizando” (Ibíd: 238). Agregan además que “parece como si para muchas de las tareas matemáticas que se proponen en secundaria, existiera una única manera de abordarlas” o una manera privilegiada al menos.

Se expone también como resultado de dicha investigación, que los alumnos no realizan comparación de técnicas diferentes. Por tal razón, es evidente que los diferentes tipos de tareas estudiadas presenten poca articulación entre sí pues institucionalmente se asocia a cada tipo de tareas la técnica que le corresponde desde esta perspectiva rígida.

Otra conclusión más de Bosch y sus colegas (2004) es que, como resultado de la ausencia de un ejercicio de cuestionamiento tecnológico a los estudiantes, -y del consecuente empobrecimiento del trabajo de la técnica- se constituye la no reversión de las técnicas. Sostienen también estas autoras que las OM que "se estudian en secundaria se reducen a la manipulación de un modelo matemático dado previamente en el enunciado de la tarea y que la actividad de modelización matemática está ausente" (Bosch *et al*, 2004: 241).[8] Finalmente, aseveran dichos autores, que las dificultades en el paso de estudiar matemáticas en Secundaria a estudiar matemáticas en la Universidad provienen principalmente del choque entre las OM de las dos instituciones, que refleja contradicciones y cambios bruscos entre los respectivos contratos didácticos institucionales (Íbid. 242).

Como se ha podido notar en los párrafos precedentes, los procesos de estudio que implican praxeologías matemáticas se desarrollan de manera parcial en la educación secundaria. Esta parcialidad representa una causal de las dificultades existentes respecto a la enseñanza y al aprendizaje de nociones matemáticas en esta etapa del trayecto escolar de los estudiantes. Se ha aseverado en las tres investigaciones mencionadas una centralidad en la parte que constituye el nivel práctico-técnico de las organizaciones matemáticas y una omisión del desarrollo del nivel teórico que posibilita la construcción de una serie de explicaciones y justificaciones del proceso de estudio en una actividad matemática.

2.4. Praxeología didáctica

[8] Modelizar, de acuerdo a Barbosa (2001), citado por Reid y otros (2010), puede ser entendida como un ambiente de aprendizaje en el cual los alumnos son convidados a indagar y/o investigar, por medio de la matemática, situaciones con referencia a la "realidad". Lo que permite a los estudiantes explorar una situación problemática, plantear hipótesis y encontrar las herramientas apropiadas o teoremas que necesitan usar para resolver situaciones basadas en el mundo real.

Según Bosch, Espinoza y Gascón (2003), “en el caso de que la actividad considerada sea una actividad de estudio (incluido lo que hace el director de estudio) se alude a una praxeología de estudio o praxeología didáctica” (p.88).

Dichos autores señalan además que:

> Todo proceso de estudio de las matemáticas, en cuanto actividad institucional de construcción o reconstrucción de organizaciones matemáticas, consiste en la utilización de una determinada praxeología (u organización) didáctica con sus componentes práctico y teórico. Así, toda praxeología didáctica contiene (al menos) una praxeología matemática y toda praxeología matemática está contenida en (al menos) una praxeología didáctica. (Bosch *et al.,* 2003: 88)

Como se ha de notar en la cita anterior, existe una relación complementaria en un proceso de estudio entre los dos tipos de praxeologías (matemática y didáctica). Al respecto, Aguayo (2005) citando a Chevallard señala:

> […] Las organizaciones “transmisoras”, es decir, didácticas, se configuran de una manera vinculada a la estructura que hay que transmitir. En otros términos, las organizaciones didácticas dependen fuertemente de las OM por enseñar, por esta razón, la enseñanza de las OD debe tomar en cuenta su relación con las organizaciones matemáticas. (Aguayo, 2005:80)

Bosch *et al*., (2003: 88) mencionan que la praxeología didáctica “es utilizada por una persona cada vez que estudia una organización matemática (posición del alumno), o cuando ayuda a estudiar a otros (posición del profesor)”. Señalan estos autores que este tipo de praxeologías se diferencian de las praxeologías matemáticas en razón de que las primeras (las didácticas) están formadas por tareas y técnicas obligadamente cooperativas en las que es necesaria la interacción del profesor y del alumno dado que ocupan posiciones distintas.

Chevallard (1999) establece que “las praxeologías didácticas son respuestas a las cuestiones del tipo ¿Cómo estudiar la cuestión $q = t/T$ (las tareas de un tipo de tareas)? ¿Cómo estudiar la obra (Y)?" (Chevallard, 1999: 237), es decir, las praxeologías didácticas buscan responder a cuestiones que en el papel de profesor le permitan llevar a los estudiantes a la apropiación de una organización matemática.

El profesor, como director de un proceso de estudio, debe plantearse la parte práctica (saber hacer) y la parte teórica (saber) en la planeación didáctica de su práctica. En este sentido toma relevancia el decidir y plantear los tipos de Tareas *T,* las técnicas, la validez de las técnicas (tecnologías) y la justificación mediante elementos teóricos que dan sentido a las tareas. Esto en el ejercicio de una práctica que orienta el proceso de estudio de los estudiantes.

2.4.1. Las praxeologías didácticas y el desarrollo del proceso de estudio.

En el proceso de construcción matemática (proceso de estudio) se requiere de la participación de un director, que podría definirse también como el coordinador o guía de dicho proceso que ha de orientar a la comunidad de estudio en cada una de las fases de esa construcción.

De las ideas expuestas, se deriva que la acción didáctica que realiza el profesor en el desarrollo de todo proceso de estudio se concibe desde el enfoque de la TAD como una praxeología didáctica (Organización didáctica: OD). Aguayo (2005) señala al respecto:

> […] puede decirse que cuando un profesor selecciona y realiza una actividad que le permita responder a la pregunta ¿Cómo hacer para enseñar un contenido matemático?, ha puesto en marcha una praxeología didáctica y cuando esta acción ha sido cumplida podemos decir que el sujeto (estudiante) tiene un saber. (Aguayo, 2005: 65)

En el proceso de estudio en un contexto escolar, un profesor y un grupo de alumnos participan de forma conjunta. El profesor realiza en ese contexto institucional una *acción didáctica* (Higueras y García, 2011) con el propósito de que los estudiantes construyan una organización matemática (OM). Las características de la OM condicionan las posibles maneras de organizar su estudio, es decir, la organización didáctica (OD), y los rasgos del proceso de estudio de la OD condicionan a la OM realmente construida. La TAD concibe a todo proceso de estudio como un par (OM, OD), lo que conforma un proceso conjunto de aprender que manifiesta esta dependencia entre *lo matemático* y *lo didáctico y* que Chevallard denomina co-determinación matemática didáctica.

En consecuencia, al describir un proceso de estudio no debe omitirse vincular la OM en proceso y la OD que guía su construcción en el aula. No obstante, mientras que la descripción de la OM parece relativamente sencilla, la descripción de la OD es mucho más compleja. Sin embargo, una organización didáctica, es decir, una praxeología didáctica se integra al igual que la praxeologia matemática por tareas, que derivan de un tipo de tareas, así como de técnicas; lo que forma el bloque técnico-práctico (praxis); y por tecnologías y teorías, constituyendo el bloque teórico (logos). Sobre este punto Higueras y García (2011), apuntan:

Toda *acción didáctica del profesor* implica la existencia de *tareas didácticas* a las que se tiene que enfrentar, así como la puesta en funcionamiento de determinadas *técnicas didácticas*. *Tareas* y *técnicas didácticas* constituyen la *praxis didáctica* del profesor. Pero, al mismo tiempo, también es posible identificar en toda *acción didáctica* la existencia —más o menos explícita— de discursos que describan y justifiquen la forma de actuar del profesor; estas son sus *tecnologías didácticas* y sus *teorías didácticas*, que integran el *logos didáctico.* (Higueras y García, 2011: 5)

Bosch y Gascón (2001) complementan la idea anterior al señalar:

> […] las prácticas docentes del profesor de matemáticas constituyen una actividad humana institucionalizada que, como todas, tiene dos caras: la técnico-práctica propiamente dicha ("*praxis*") y la cara teórica que se materializa en un *discurso* ("*logos*") que justifica, interpreta, reorienta y hasta modifica dicha práctica y que, en este caso, se expresa en forma de discurso didáctico-matemático. Tenemos, en resumen, una *praxeología* (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997) que podemos denominar provisionalmente *praxeología didáctica del profesor.* (Bosch y Gascón, 2001: 2)

Tanto Higueras y García (2011) como Bosch y Gascón (2001), de manera casi similar, establecen elementos generales como constitutivos de la acción docente cuando éste guía un proceso de estudio en un contexto institucional. Estos autores coinciden en definir dos dimensiones en el quehacer del profesor; la dimensión técnico-práctica y la dimensión teórica. Para los primeros autores, la intervención del profesor en el proceso de construcción o reconstrucción de un objeto matemático se denomina acción didáctica. Los segundos se fundamentan en Chevallard (1999) y generan la noción de praxeología didáctica del profesor.

Optándose por trabajar las implicaciones propias de la acción docente en un proceso de estudio, se adopta la categoría que refieren Bosch y Gascón (2001). Estos autores identifican al menos dos características que distinguen a la categoría praxeología didáctica del profesor.

En primer lugar, mencionan que ésta es una praxeología empírica pues vive en una institución concreta, en un momento histórico concreto con unas características y restricciones específicas. Este rasgo circunstancial será causal de que presente lagunas, redundancias y hasta contradicciones entre sus componentes, lo que admitirá que éstos no sean completamente coherentes entre sí, y estas contradicciones se pueden encontrar principalmente en la coherencia que debe existir entre la dimensión técnico-práctica y la teórica.

La segunda de las características de la praxeología didáctica del profesor es su espontaneidad. Esto debido a que las tareas didácticas que la generan "no están organizadas de antemano en todos sus detalles sino que, por el contrario, muchas de ellas se improvisan dependiendo del curso que tomen los acontecimientos" (Bosch y Gascón, 2001: 3).

No obstante, las características antes mencionadas de las praxeologías didácticas del profesor, es necesario insistir con Bosch y Gascón (2001) que dichas praxeologías requieren de modelizarse para concebirse como un todo ya que la acción docente no puede entenderse al margen de las técnicas didácticas a emplearse; además, la dimensión técnico-práctica no puede desvincularse de la dimensión tecnológica-teórica. Si esta situación ocurre, como es lo común, se tendría una práctica didáctica sin justificaciones y por lo tanto, en un estado de incompletitud.

Sin embargo, a decir de Bosch y Gascón (2011), se debe considerar que los elementos que componen una praxeología didáctica, es decir, las tareas didácticas que aborda junto con los alumnos cada profesor, las técnicas didácticas que aplica y las nociones y principios que le son útiles para interpretar y justificar su práctica docente, "*no los crea el profesor de la nada*, sino que forman parte del conjunto de tareas, técnicas, nociones y principios disponibles en la institución escolar" (p: 4). Se entiende entonces que lo que realiza o puede llevar a cabo un docente, en una actividad que implique la construcción de un objeto matemático particular, procede de un repertorio de diversas construcciones matemáticas institucionales de diferentes estructuras, historias y funciones, lo que se ilustra con la siguiente cita:

Así, las *tareas didácticas* que puede plantearse un profesor son (algunas de) las describibles con las nociones que tienen sentido en dicha institución en un momento histórico dado. Análogamente, las *técnicas didácticas* que utilizan los profesores para realizar dichas tareas, así como los *discursos didáctico-*

matemáticos justificativos e interpretativos de dichas técnicas (que cada profesor puede utilizar de una manera más o menos implícita) no son creaciones "personales" de cada profesor particular sino, a lo sumo, adaptaciones de técnicas y de discursos tecnológicos disponibles en la institución escolar. (Bosch y Gascón. 2001:4)

Una de las tareas del profesor al guiar un proceso de estudio de una determinada praxeología matemática, tomando en cuenta planteamientos de Aguayo (2005: 72), consiste en "conducir […] la transposición de esta praxeología en una clase concreta gestionando los seis momentos didácticos que constituyen un proceso de estudio". Siguiendo al autor, existen diferentes niveles de especificidad en las praxeologías didácticas y para esto propone el siguiente ejemplo:

Hay praxeologías didácticas en un nivel muy general (pedagógico) que responden a la pregunta ¿Cómo enseñar? Pero también las hay en el nivel disciplinar (matemático) cuya razón de ser es la pregunta ¿Cómo enseñar matemáticas? Otro nivel es el de las áreas (la aritmética), los sectores (los números racionales) los temas (las fracciones) y las cuestiones puntuales (la fracción como cociente). (Aguayo, 2005:72)

La descripción hecha en la cita anterior relativa a los niveles de las praxeologías didácticas, tienen en común a los correspondientes de praxeologías matemáticas que Chevallard (1999) designa como praxeologías globales, las cuales se constituyen en una institución dada por la agregación de varias teorías, las organizaciones praxeológicas regionales, que se forman alrededor de una teoría, las organizaciones praxeológicas locales, que se centran sobre una tecnología determinada, y las praxeologías puntuales, aquellas que se refieren a un único tipo de tareas.

Regresando a la reflexión sobre el papel del profesor como guía del proceso de estudio, éste no se halla despojado de las huellas que en su formación profesional han dejado aspectos como la historia personal, la cultura, el ambiente político, social, económico, epistemológico, pedagógico y didáctico. Estos aspectos cobran vida y se manifiestan al seleccionar la integración de la praxeología de estudio, es decir, la praxeología didáctica. Para lo cual ha de realizar una selección de tareas, de técnicas, y de argumentos que justifican tales técnicas; todo con intención didáctica pero permeada de concepciones sobre el proceso que ha de vivir la comunidad de estudio que dirige.

2.5. Momentos didácticos

El proceso de construcción matemática desde la TAD se define en dos niveles. El primero consiste en lo que se puede denominar "hacer matemáticas" lo cual es una actividad orientada hacia la resolución de un cierto tipo de tareas a través de la aplicación de una praxeología matemática, y el segundo nivel, "estudiar matemáticas" que es una actividad cuyo objeto es "construir (en el caso del matemático) o reconstruir (en el caso del alumno) ciertos elementos de una praxeología matemática que permitan dar respuesta a una tarea problemática para la que no existe o no está disponible una praxeología" (Aguayo, 2004: 32).

"El saber matemático se construye como respuesta al estudio de cuestiones problemáticas, apareciendo, así como el resultado o producto de un proceso de estudio" (Bosch *et al;* 2003:84), constituido por seis momentos didácticos, a saber: momento del primer encuentro, el momento exploratorio, el momento del trabajo de la técnica, el momento tecnológico teórico, el momento de la institucionalización, y el momento de la evaluación.

Chevallard (1999) señala al respecto de la organización de los momentos didácticos lo siguiente:

La noción de momento no remite más que en apariencia a la estructura temporal del proceso de estudio. Un momento en el sentido dado a la palabra aquí, es en primer lugar una dimensión en un espacio multidimensional, un factor en un proceso multifactorial. Bien entendido, una sana gestión del estudio exige que cada uno de los momentos didácticos se realice en el buen momento, o más exactamente en los buenos momentos pues “un momento de estudio se realiza generalmente en varias veces… los momentos didácticos son en primer lugar una realidad funcional del estudio, antes de ser una realidad cronológica”. (Chevallard, 1999:242)

Considerando entonces, que los momentos didácticos se presentan en el proceso de estudio no de una forma ordenada sino estructural, éstos se constituyen por algunas características distintivas que permiten ubicarse en alguno de ellos en toda etapa del estudio. En este sentido, el mismo autor describe en qué consiste cada uno de esos momentos didácticos de la siguiente manera:

El primer momento del estudio es el del primer encuentro con la organización *O* que está en juego. Un tal encuentro puede tener lugar de varias maneras, pero un modo de encuentro –o de reencuentro- inevitable, a menos que uno se quede en la superficie de la obra *O*, es el que consiste en encontrar *O* a través de al menos uno de los tipos de tareas *T*, constitutivas de *O.* (Chevallard, 1999: 243)

Una forma en que puede ocurrir el primer encuentro y que compete fundamentalmente a la acción del alumno, es el encuentro en situación, desde este primer encuentro el estudiante se conduce a proponer una definición o interpretación del objeto encontrado.

El segundo momento lo constituye la exploración del tipo de tareas *T*, y de la elaboración de una técnica *t* relativa a este tipo de tareas. Este momento, de acuerdo con el argumento del autor, es el corazón de la actividad matemática.

El tercer momento del estudio, desde esta perspectiva, es el de la constitución del entorno tecnológico-teórico relativo a *O*. Se asume que, desde el primer encuentro con determinado tipo de tareas, comúnmente existe implícitamente una puesta en relación con un entorno tecnológico-teórico elaborado con anterioridad. Esta puede considerarse como la etapa del estudio donde se trata de significar o distinguir del tipo de tarea *T*.

El cuarto momento es el del trabajo de la técnica, que debe al mismo tiempo optimizarla para hacerla más eficaz y confiable, así como mejorar el manejo que se hace de ella. En suma, es en este momento donde ocurre la puesta a prueba de la técnica.

El quinto momento se define como el de la institucionalización, el propósito consiste en establecer y definir puntualmente lo que es la organización matemática elaborada, se delimitan los elementos integrados y los omitidos.

El sexto momento es el de la evaluación; ésta se articula con el momento de la institucionalización a partir de la suposición de relaciones institucionales trascendentes a las personas. Es el momento en el que se debe hacer un balance, se examina lo que vale y lo que se ha aprendido por cuanto es también un momento de verificación.

Como se comentó al inicio de este apartado, los momentos didácticos no responden a un esquema rígido, pues la naturaleza de cada uno de ellos permite reencuentros a lo largo del proceso de estudio.

2.6. La teoría antropológica de lo didáctico en el proceso de investigación

La Teoría Antropológica de lo Didáctico, como un marco para el análisis de las diferentes organizaciones matemáticas que los docentes reconstruyen con los alumnos como actividades escolares - y que se exponen en los libros de texto o se registran en las libretas - permite entender el proceso de estudio desde un sentido mucho más amplio que el tradicional. De esta manera, se asume que un proceso de estudio se constituye por toda actividad que en el área de matemáticas sea realizada por el docente o por el alumno con el fin de reconstruir una praxeología matemática, así como los diferentes momentos didácticos del proceso de estudio mencionado.

La TAD puede ser un enfoque pertinente que oriente el análisis de las organizaciones matemáticas que se plasman en los materiales educativos (guías del maestro, programas y libros de texto) y que guían los procesos de estudio en las aulas. Tal análisis, para el caso del estudio que aquí se reporta, se realiza considerando tanto los materiales mencionados como las libretas de trabajo de los alumnos pues resulta claro que dichas libretas, constituyen la bitácora primaria de registro de las actividades del trabajo escolar.

En orden secuencial, se revisan en primer término todos los programas de estudio de matemáticas de tercer grado de primaria a primero de secundaria, con la finalidad de advertir la secuencia, continuidad y gradualidad que plantea la SEP en torno al estudio de las praxeologías matemáticas relacionadas con los números decimales y las fracciones. Se hace una revisión más exhaustiva de los programas de sexto grado de primaria y primero de secundaria porque es propósito de este estudio, conocer de manera más detallada la organización de los contenidos relacionados con los temas arriba mencionados en estos grados.

Lo anterior permitirá conocer qué se plantea de manera oficial que deben saber los alumnos al término de la educación primaria y al concluir el primer grado de secundaria. Lo anterior tiene también como fin advertir la continuidad en el estudio de praxeologías matemáticas relacionadas con los números decimales y las fracciones entre el final de la primaria y el inicio de la secundaria.

Como se mencionó, otro material a revisar lo constituye el libro de texto gratuito de matemáticas, distribuido a todos los alumnos de sexto grado y los libros de texto de matemáticas autorizados por la SEP para los alumnos de 1° de secundaria. Con la revisión de dichos textos se pretende reconocer las praxeologías matemáticas relacionadas con los temas de números decimales y fracciones para advertir los tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías que se proponen oficialmente en ellos.

El análisis del contenido de las libretas, nos parece, constituye un testimonio de cómo el docente dirige el proceso de aprendizaje de los estudiantes sobre las diferentes praxeologías matemáticas vinculadas a los temas de números decimales y de las fracciones, interés de este trabajo. Y también de qué es lo que se considera relevante de conservar en la memoria del grupo escolar.

Con el análisis del contenido de las libretas, se pretende también identificar los componentes de las praxeologías matemáticas inmersas en el conjunto de actividades de aprendizaje que implican números decimales y fracciones, realizadas en el aula. Es decir, reconocer a partir de la revisión de las actividades plasmadas en las libretas de trabajo de los alumnos, el grado de completitud de las praxeologías matemáticas en un determinado proceso de estudio, permitirá conocer los componentes praxeológicos en los que se centran el maestro y los alumnos en un proceso de estudio. Derivado de lo anterior se pretende identificar aspectos de las acciones didácticas dispuestas por el docente y sus probables consecuencias en el aprendizaje de los alumnos.

La pertinencia de este análisis estriba, además de lo planteado en las líneas anteriores, también en la posibilidad que ofrece para resaltar las diferencias al contrastar el contenido de los libros de texto con el de las libretas de los alumnos al abordar los mismos temas. Esto permitirá vislumbrar la correspondencia entre el planteamiento oficial y la interpretación, manejo de los componentes praxeológicos y dominio de los contenidos por parte del docente.

Chevallard (1999) menciona que en una institución dada es normal que aparezcan nuevas praxeologías, pues algunas envejecen toda vez que sus componentes teóricos y tecnológicos pierden crédito y se vuelven opacos. Sin embargo, la ecología propia de la institución que la importa provoca que la praxeología requerida no pueda ser reproducida allí de forma idéntica, pasará por un proceso de transferencia donde sufrirá algunas modificaciones con fines de adaptación lo cual será una transposición de institución a institución. Este proceso se prolonga hasta los espacios institucionales donde tienen lugar los procesos de estudio, y mediante la transposición didáctica se transforma el saber a enseñar en saber enseñado, lo cual ha de verse reflejado en las tareas que realizan los estudiantes y que son registradas en las libretas de trabajo.

En la enseñanza y en el aprendizaje de temas relacionados con las fracciones y los números decimales en 6° de primaria y 1° de secundaria se generan praxeologías que desde la Teoría Antropológica de la Didáctico pueden ser analizadas, y, en consecuencia, pueden permitir una interpretación de los factores que favorezcan o ayuden a rebasar las dificultades que se presentan en tales temas por parte de los alumnos de los grados mencionados.

CAPÍTULO 3. CARACTERIZACIÓN DE LAS FRACCIONES Y LOS DECIMALES

Las fracciones y los números decimales en los materiales curriculares (programas y libros de texto), así como en las libretas de alumnos de sexto grado y primero de secundaria, constituyen el objeto de estudio de esta tesis. Se considera que es importante explicitar su conceptualización como contenido escolar, así como las dificultades que este contenido implica para su aprendizaje por parte de los alumnos. En virtud de lo anterior, en este capítulo se sintetizan ideas expuestas por diversos autores respecto de la conceptualización de los números mencionados. Se incluyen algunas breves referencias a cuestiones históricas respecto de estos conceptos, bajo el supuesto de que la historia nos ayuda a comprenderlos. Por último, se refieren algunos estudios dedicados al análisis de las dificultades de comprensión de estos contenidos matemáticos.

En los capítulos anteriores se da una descripción amplia de la teoría desde la cual se realizan el análisis y las reflexiones a las que se someten tanto las libretas de trabajo de los alumnos, como los programas y los libros de texto que forman parte del material con el que los profesores y estudiantes construyen cotidianamente praxeologías matemáticas sobre los temas arriba mencionados.

Antes de realizar ese análisis, resulta necesario conocer las particularidades de las fracciones y los números decimales como organizaciones matemáticas, o praxeologías, de tal manera que el conocimiento de su respectiva construcción histórica y su caracterización, se conformen también como un referente para la revisión de los materiales de trabajo mencionados. Este es entonces el propósito del presente capítulo, mismo que se divide en dos grandes apartados: el primero, en el que se desagregan aspectos básicos sobre las fracciones, y el segundo, en el que se hace lo propio con relación a los números decimales.

3.1. El concepto matemático llamado fracción

H. Freudenthal señaló hace tiempo que “Los conceptos, estructuras e ide matemáticas sirven para organizar los fenómenos –fenómenos tanto del mun real como de las matemáticas- … el fenómeno ´número´ se organiza mediante el sistema decimal. Así, dicho número, como concepción en la clase de matemáticas se amplía hasta los más altos niveles: una abstracción continuada da un aspecto similar a los fenómenos matemáticos bajo un concepto, grupo, cuerpo, espacio topológico, deducción, inducción, etc.” (Freudenthal en Puig, 1983: 1).

De acuerdo con Freudenthal (en Puig, 1983), los objetos matemáticos se construyen en la práctica matemática como medios de organización de objetos del mundo. Para él, el describir un concepto u objeto matemático en su relación con aquello para lo que es un medio de organización, es un análisis fenomenológico del concepto u objeto matemático. Se dice, desde la perspectiva de este autor, que hay una abundancia de fenómenos que le dan distintos sentidos al concepto. A partir de esta orientación fenomenológica, se hará también un análisis de las expresiones del tipo a/b, donde a y b son números enteros, siendo b diferente de cero.

Establecer una definición del concepto de fracción conduce a revisar los planteamientos que al respecto han hecho diferentes autores y que remiten a la idea de que es una noción muy compleja. Por ejemplo, Freudenthal (1983, en Mancera, 1992), plantea que “el término fracción es más adecuado que el de números racionales positivos, en tanto que es la fuente fenomenológica del número racional, lo cual adquiere sentido, puesto que el origen de los números racionales se encuentra en la noción de quebrado [*todo* fraccionado] o fracción” (p.38).

Esa fuente fenomenológica del concepto de fracción que menciona Freudenthal, se refiere a los distintos fenómenos con que se vincula la fracción y los diferentes usos que en el lenguaje se hacen de las fracciones, de los que derivan sus diversos significados.

Al respecto de los diferentes significados que puede adquirir la fracción en función del contexto de aplicación, Parra (2005) menciona que un número racional puede:

- ser el resultado de un reparto y quedar, en consecuencia, ligado al cociente entre naturales;
- ser el resultado de una medición y, por tanto, remitirnos a establecer una relación con la unidad;
- expresar una constante de proporcionalidad; en particular esa constante puede tener un significado preciso en función del contexto (escala, porcentaje, densidad, velocidad, etc.)
- ser la manera de indicar la relación entre las partes que forman un todo; etc. (p.11)

Desde el planteamiento que hace Parra (2005), se entiende que el número racional tiene una diversidad de fuentes fenomenológicas que lo generan y expresan a través de una escritura fraccionaria.

3.2. Algunas dificultades en la enseñanza y aprendizaje de las fracciones

Streefland (1984) menciona el manual egipcio llamado “Papiro Rhind”, un libro de aritmética que data del año 1700 a. C. y dedicado a “quienes deseaban entrenarse a sí mismos en las habilidades del escribano real. El libro contenía ochenta problemas prácticos primarios, tales como el que indica dividir seis hogazas entre diez hombres’ y así sucesivamente con siete, ocho y nueve hogazas.

Además, en el Papiro Rhind, dice Streefland, (1984) puede encontrarse una tabla de cocientes obtenidos cuando se divide dos entre un número impar mayor que uno y menor que ciento tres. Este tipo de cocientes se expresan actualmente por medio de fracciones como $2/3, 2/5, 2/7, 2/9$ [...]. Según se sabe por este documento, los egipcios sólo tenían fracciones unitarias tales como $1/2, 1/3, 1/4$... siendo $2/3$ la única excepción.

Cabe destacar que, en este primer vestigio sobre la presencia de las fracciones, su uso estaba relacionado con la división y distribución de alimentos, con el comercio, la agricultura y los oficios, lo que denotaba el sentido práctico de lo que ahora conocemos como fracción; la aplicación de esta noción se generaba al utilizarse como fracturador, es decir, desde la idea parte-todo.

Streefland (1984) refiere también otro documento, El Tratado de Ghent, escrito probablemente por Cristianus Van Varenbraken alrededor de 1530, en el que el estudio de la aritmética primero se aborda desde una perspectiva teórica, dejando para etapas posteriores los usos prácticos de los conceptos. En este caso, la aplicación de la noción de fracción se diferencia de la aplicación que se observa en el Papiro Rhind, donde su uso estaba orientado a problemas de reparto mientras que en el Tratado de Ghent su aplicación se amplió a las prácticas de comercio que implicaban el uso de diversas medidas en problemas de longitud, peso y moneda. El procedimiento privilegiado en esta "aritmética de mercado" fue la "regla de tres" y algunas de las variaciones que sobre ella se hacían.

3.2.1. Fracción y número racional.

Las referencias más remotas sobre el uso de las fracciones hacen suponer su origen en la noción de fracturador, término utilizado por H. Freudenthal (en Puig, 1983) para denominar la idea desde la cual se produce el acto de dividir un todo continuo o discreto en partes congruentes[9]. Esta idea está presente de manera

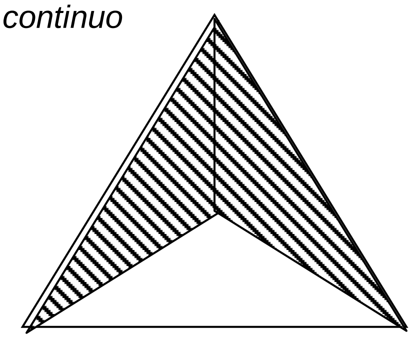
---

[9] De acuerdo con Ivorra (s/f), dos figuras son congruentes si se diferencian a lo sumo en su posición en el espacio, es decir, si una puede convertirse en la otra mediante un movimiento (p. 24).

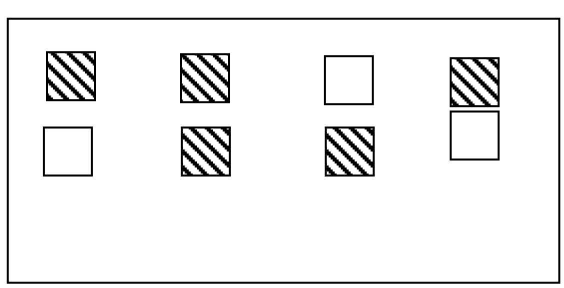
privilegiada en los libros de texto de educación primaria vigentes en México hasta antes de la Reforma Educativa de 1993. Por ejemplo, en el libro “Matemáticas. 5° grado. Auxiliar didáctico” (SEP, 1974) se menciona lo siguiente: “Estudiaremos la fracción como el número que representa: a) partes de una o varias unidades, y b) parte de un conjunto.” Además, el texto mencionado señala que: “Todo número fraccionario se representa en la forma a/b donde *b*, el denominador, indica el número de partes en que se ha dividido la unidad o conjunto y *a*, el numerador, el número de partes consideradas” (s/p). Dicha concepción se traducía en esquemas y problemas que aparecían tanto en el libro para el maestro como en el libro de texto del alumno (al respecto puede verse, por ejemplo, SEP, 1974).

Sobre esta misma línea de interpretación, el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM,1994), establece que una vía de acceso a la noción de número racional se encuentra estimando regiones congruentes en el plano. Las regiones pueden ser, por ejemplo, sub-regiones de una región dada o también pueden ser regiones discretas, es decir, separadas entre sí, lo que puede observarse en las ilustraciones siguientes:

Modelo continuo



Modelo discreto



En el texto del NCTM se menciona que en un todo, conformado por regiones continuas o discretas, en el que algunas de éstas están sombreadas, la forma de expresión fraccionaria correspondiente indica que el número de regiones escogidas se anota sobre un segmento horizontal y el número total de regiones se escribe bajo este segmento.

En otros textos, caracterizados por el predominio de un lenguaje técnico, se define a los números racionales a partir de la relación entre dos números enteros. En relación con esto cito los dos siguientes ejemplos tomados de Fregoso (1972):

"Sean $p\ y\ q$ dos números enteros y supóngase que $q \neq 0$, entonces el axioma M4 (La multiplicación admite operación inversa en el conjunto de los números reales distintos de cero) nos permite encontrar otro número real $1/q$, que multiplicado por cada uno.

Ahora:

Los números reales $p\ y\ 1/q$ forman una pareja de números reales (*p,* $1/q$) y por lo tanto la multiplicación les asocia un número real que se denotará por p/q; esto es:

$$p\ x\frac{1}{q} = p/q$$

A este número p/q le llamaremos número racional o número quebrado, o cociente de dos enteros cuyo denominador no es cero. (Fregoso, 1972: 221)

Fregoso (1972: 222) continúa diciendo: Por lo tanto, el conjunto de los números racionales, "es el subconjunto $\mathbb{Q}$ de los números reales, cuyos elementos sean todos los reales que se pueden escribir como el cociente de dos números, cuyo denominador no sea cero, esto es:"

$$\mathbb{Q} = \frac{P}{q}\ \{p\ y\ q \mid\ \in \mathbb{Z}\ y\ q\ \neq 0\}$$

Se dice también que “Los números racionales pueden expresarse como el producto de un número entero por el inverso multiplicativo de otro número, es decir.

$$\frac{s}{t} = s.1/t$$

y como conjunto se denotan por:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{s}{t} \mid\ s \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{Z}, t \neq 0\right\}$$

(UPN,1982:76).

Aclaramos que en estos ejemplos se ha manejado el término de número racional en lugar de fracción, atendiendo a lo planteado por Freudenthal en cuanto que la fracción da origen o genera fenomenológicamente a los números racionales. Sin embargo, cualquier esfuerzo por definir a las fracciones debe evitar hacerse relacionando simplemente el símbolo con la noción, pues no hay esa asociación inmediata como podría suceder con otras nociones. Como lo señala Mancera (1992: 49), la expresión m/n “indica muchos procesos, relaciones o tipos de números”, que obligan a entenderlo en función del contexto donde se utiliza.

Para los fines de este trabajo, resulta necesario establecer una diferenciación clara entre fracción y número racional, aunque no se pretende separar ambas nociones de manera tajante como si se tratase de dos cuestiones ajenas.

El número racional expresado de la forma m/n, donde m y n son números enteros siendo n diferente de cero, no tiene como fin “advertir la relación entre una cantidad, el número y el contexto, sino el de cumplir una función numérica en una secuencia algorítmica, o ser un elemento de un sistema matemático que cumple con ciertas propiedades” (Mancera, 1992: 51), siendo pues una abstracción en términos numéricos. Esta abstracción numérica regularmente tiene lugar a partir de la aparición de contenidos algebraicos, que en nuestro sistema educativo ocurre en el segundo grado de la secundaria, donde su uso queda sujeto a reglas y a propiedades particulares con respecto a las de los demás conjuntos de números.

Por su parte, la fracción representada en forma general por la expresión m/n, se entiende como la expresión de una relación determinada por el contexto en el que aparece, que no cobra sentido en la abstracción numérica sino en las situaciones que la mantienen atada a la realidad que representa, y siendo ésta diversa, su significado se enriquece al mismo tiempo que su comprensión se complica.

Es aquí precisamente donde se ha dado la reflexión de varios autores con intención de esclarecer las relaciones que puede denotar la expresión m/n. Esta tarea ha permitido correr la cortina que las creencias tradicionales habían colocado frente a la noción de fracción, para ubicarla ahora en un ámbito más amplio, donde la concepción sobre ella emerge en un plano de mayor extensión y complejidad ligada a un contexto determinado antes de ser una abstracción numérica como se asume al número racional.

3.2.2. La fracción como noción a aprender.

La enseñanza y el aprendizaje de las fracciones están influidas por las creencias de los profesores, también por el uso que de manera consciente e inconsciente se hace con de ellas en la vida cotidiana, por lo complejo que resulta abordarlas y por la forma en que se hace la aproximación a ellas. Así pues, la expresión fraccionaria de la forma a/b, representa una noción que preferimos mantener a distancia.

Esa actitud reservada hacia una comprensión más amplia de las fracciones, se sustenta regularmente en la creencia generalizada de su escasa aplicabilidad. Sin embargo, este supuesto sólo trasluce lo limitado de la concepción que se tiene de ella: la idea de que al interpretar la expresión m/n se hace alusión a las partes de un todo y sólo eso. De esto deriva esa equivocada afirmación respecto de la utilidad de las fracciones, misma que entre las décadas de los 70 y 80 del siglo pasado generó un debate sobre la pertinencia de su enseñanza en la escuela elemental (Llinares y Sánchez, 1997). Estos autores, presentan tres argumentos que otros autores dieron a favor de la supresión de la enseñanza de dicho tema:

1° En 1937 Wilson y Dalrympe "[…] A partir de la tabulación de la frecuencia con que se utilizaban las fracciones por distintas personas en su trabajo; concluyeron que <<la necesidad de manejar con soltura las fracciones en la vida ordinaria se limita a las mitades, tercios, cuartos, doceavos,...>> En consecuencia, sugirieron que podría reducirse enormemente la enseñanza de las fracciones en la escuela".

2° Otro argumento es que, en el sistema métrico decimal, las unidades métricas requieren de fracciones decimales pero no de las fracciones comunes, por lo que quienes en esto se apoyan defienden que deben ser suprimidas o reducidas en gran medida.

3° Van Hiele (en Llinares y Sánchez, 1997: 26), desde una perspectiva distinta a la de las necesidades sociales, sugiere que mediante la construcción de lo que él llama una "matriz proporción" se pueden trabajar las proporciones sin utilizar el cálculo de fracciones.

Van Hiele añade que quizás debamos encaminar nuestros esfuerzos a buscar alguna forma de simplificar los cálculos con fracciones y propone, apoyándose en un planteamiento axiomático, la sustitución de a/b por el producto $a.b^{-1}$. Con base en este planteamiento es fácil pensar que si las proporciones se pueden trabajar sin la necesidad de utilizar las fracciones ¿Es posible prescindir de éstas? ¿Cuál es la aplicación práctica de los algoritmos con estos números?

Sin embargo, Llinares y Sánchez (1997) consideran que el argumento de la poca utilización de las fracciones es también en el que se apoyan otros para mantener la permanencia de contenidos relacionados con estos números, señalando que, si no son comprendidas, ¿cómo van a ser utilizadas? Así, según este argumento, una mejor enseñanza del concepto de fracción haría aumentar su utilización en la vida cotidiana.

Llinares y Sánchez (1997) plantean que los argumentos vertidos a favor de una reducción significativa de la enseñanza de las fracciones en la escuela elemental motivada por su supuesta inaplicabilidad serían inadecuados, ya que "no debe limitarse el currículum a las estrictas necesidades de la vida diaria". Al contrario, afirman, debe promoverse en los alumnos un conocimiento intuitivo y profundo de las fracciones, presentándoles contextos significativos tanto para el concepto como para su campo de aplicación, de tal modo que no se siga perpetuando el desconocimiento de su significado, la infrautilización del concepto y la sobrevaloración de los algoritmos.

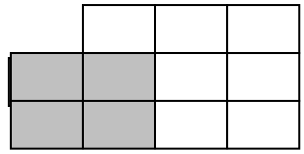
Otros autores han orientado su reflexión hacia la identificación de las dificultades más generales que obstruyen de cierta manera la aprehensión de un significado más amplio de la noción de fracción, así, por ejemplo:

Mancera (1992: 32), menciona que "uno de los problemas en el aprendizaje de las fracciones es que la expresión m/n, donde m y n son números enteros y $n \neq 0$, está asociado a diversos significados (homonimia). En el sentido inverso, el concepto de fracción puede representarse como un cociente de enteros o una expresión decimal (sinonimia)”. Esta aportación nos permite abogar por un necesario reconocimiento, en el trabajo con las fracciones, del significado de su homonimia y su sinonimia.

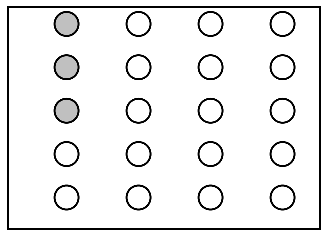
Por su parte L. Streefland (en Mancera, 1992) señala que la enseñanza de las fracciones no parte de un análisis suficiente del concepto, tanto en el sentido matemático como didáctico. Menciona que la subdivisión de cantidades discretas o continuas en partes equivalentes, es casi siempre la única manera a la que se recurre para trabajar las fracciones y la equivalencia de fracciones se aborda casi exclusivamente de manera algorítmica”. Deteniéndonos un poco sobre esta limitante señalada por Streefland, se puede destacar que resultados de investigaciones realizadas en México vienen a apoyar tal aseveración.

Este es el caso ya señalado hace décadas en una investigación realizada por Ávila y Mancera (1989) con 293 niños mexicanos, quienes finalizaban su educación primaria. A estos estudiantes les fue planteada la pregunta “¿Qué quiere decir 4/6?” y al contestar esta cuestión, se obtuvieron por parte de los alumnos datos que denotaron limitaciones en el manejo de la noción de fracción por lo que los investigadores concluyeron: “[…] quienes han logrado interpretar las expresiones de la forma a/b han basado su interpretación no en los distintos significativos que la fracción puede tener, sino en un único significado: la fracción como parte de una figura plana [interpretación parte-todo]”.

Dicho estudio también destaca que al ser presentado un “todo” - continuo o discreto - dividido en un número de partes mayor al que indica el denominador de la fracción señalada, muchos estudiantes muestran que tampoco han logrado interpretar correctamente a la fracción como una relación parte-todo. Se afirma esto porque al tratar de representar algunas, consideran tantas partes u objetos como indica el numerador desvinculado de su relación con el denominador. Este caso se ilustra en las siguientes figuras:

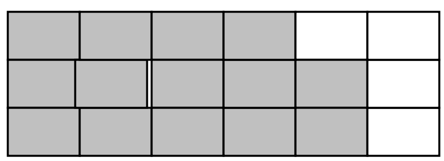


La indicación fue colorear $5/6$, *se han coloreado* $5/12$



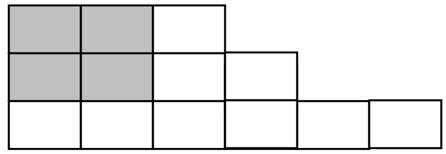
Se indicó sombrear $3/4$ *de la colección*

Otro problema detectado es la yuxtaposición del numerador y del denominador (eliminándose la relación multiplicativa implicada en la fracción), pues al pedirles a los niños que dibujaran una figura cualquiera para representar, por ejemplo $14/4$, muchos lo hicieron de la siguiente forma:



donde se transformó $14/4\ en\ 14/18, (14 + 4 = 18)$

La situación anterior implicó trabajar con fracciones mayores que la unidad. Esta situación también dio paso a otro tipo de representación en la que los elementos de la fracción se invirtieron para expresarla de tal manera que aquélla fuera menor que la unidad. Así, por ejemplo, la representación gráfica de $14/4$ con frecuencia fue realizada como se muestra en la siguiente figura, que en realidad expresa $\underline{4/14}$:



Lo que se entiende con esto es que la experiencia con las fracciones de los niños participantes en el estudio, estuvo encaminada principalmente a situaciones que implican la idea de fracturación de unidades continuas, con base en fracciones menores que la unidad. De este modo, al solicitárseles la representación de fracciones como $14/4$ invirtieron los números para poder lograrlo, ajustando la tarea solicitada a sus esquemas previos de interpretación de las fracciones: estos números representan partes menores que la unidad.

En este punto, el trabajo de Ávila y Mancera coincide con el estudio que K. Hart (1981 en Mancera, 1992: 37), realizó con alumnos de escuelas públicas en Inglaterra. Hart menciona "que las fracciones, en muchos casos, no son vistas como una relación sino como un par de números independientes que pueden manejarse por separado […]"

Los resultados mencionados están relacionados con el hecho de que el trabajo con las fracciones se ha reducido en cierta medida al empleo de expresiones numéricas que expresan cantidades menores que la unidad, también a que la noción que respecto de la fracción se desarrolla en la escuela, generalmente se limita a un solo significado, el de fracturador o parte-todo.

En este último sentido, Arceo (1996) señala que la dificultad para enseñar y para aprender las fracciones está estrechamente vinculada con la pobreza de significados que a través de los años se han estudiado en las escuelas de educación primaria. De acuerdo con la autora, una enseñanza así, se limita involuntariamente la capacidad del alumno y se promueve una concepción de la fracción reducida y con limitado significado, lo cual impide al estudiante comprender que las fracciones adquieren distintos significados en función de las situaciones en las que se apliquen.

Este breve recuento sobre las dificultades que implican la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones nos permite considerar que la conceptualización amplia de la fracción está en función al menos parcialmente de la claridad que el maestro tenga sobre esta noción y de su conocimiento sobre las distintas situaciones en las que puede aparecer una expresión fraccionaria. De esto depende – en parte - que su enseñanza no se restrinja a un solo contexto de aplicación. Tener familiaridad con la extensa significación de la fracción puede generar un diseño más pertinente de situaciones y actividades de aprendizaje que posibiliten en el niño una comprensión más cabal de las fracciones y el desarrollo de la capacidad para advertir las diferentes situaciones a las que se puede asociar la relación m/n y para apreciar el valor que dicho conocimiento puede adquirir por su utilidad en distintos ámbitos de la actividad humana. No obstante, es necesario prever que, en adelante, los estudiantes de sexto de primaria y primero de secundaria, han manejar las expresiones fraccionarias desde una concepción numérica más amplia, de mayor abstracción, los números racionales.

Algunos términos relacionados con la fracción son ya familiares al niño antes de su ingreso a la escuela primaria por el uso que ha visto hacer de ellos en situaciones cotidianas. Tal vez también porque los ha utilizado, pero señalemos que esta utilización en edades tempranas generalmente se reduce al empleo de su significado como parte-todo, por lo que en la escuela deberá ampliar significativamente los referentes que tiene sobre el tema. Sobre esta delicada tarea, Kieren, (en Kilpatrick *et al.*, 1993) plantea que la construcción del conocimiento de la fracción está ligada a dos mecanismos mentales: los constructivos y los de desarrollo.

Según Kieren (en Kilpatrick *et al.,* 1993) los del primer tipo son particularmente específicos; se relacionan con la experiencia y se pueden considerar como los objetivos para la instrucción. Los del segundo tipo son más generales y están más vinculados a la madurez mental. Menciona el autor que, en particular, los mecanismos que se relacionan con el desarrollo son la conservación de número, la compensación, la identidad y la reversibilidad; a su vez, los mecanismos constructivos son el conteo, los relacionados con la numeración y el uso del lenguaje asociado a ella, los de partición y los de equivalencia.

Kieren (en Kilpatrck *et al.*, 1993) señala además algunos aspectos más específicos de la partición y de la equivalencia; plantea que la partición está definida como la equi-división de una cantidad en un número dado de partes y que es también la base para el lenguaje fraccionario de parte-todo. La acción de partición, continúa el autor, es central para la generación y la aplicación del conocimiento de expresiones fraccionarias. Señala cuatro aspectos contenidos en la actividad de partición; primero, menciona el autor, la partición es un tipo de clasificación que toma como base el criterio de igualdad y tiene su génesis en la acción de repartir; segundo, puede estar vinculada a fenómenos discretos o continuos; tercero, tiene relación con el lenguaje que describe el acto y los resultados de dicha acción, y cuarto, es la conexión de partes con la medida o el número.

Con respecto a la equivalencia, Kieren (en Kilpatrick *et al.*, 1983) menciona que ésta surge en el sentido de identidad o de la idea de lo mismo. En un nivel de madurez, el concepto de equivalencia de un niño es de naturaleza multiplicativa y está relacionado muy íntimamente con el razonamiento proporcional. Advierte que hay también nociones de equivalencias menos formales; como, por ejemplo: observar que ¾ es equivalente a (½ y ¼).

El mismo autor señala también que la equivalencia se manifiesta en el uso del lenguaje relacionado con los números fraccionarios por la variedad de formas en que puede expresarse una fracción. Por ejemplo. $¾ = .75 = 12/16 = 75\% = 90\, de\, 120$; esta actividad implica un razonamiento de equivalencia que permite al individuo la aplicación de los conceptos asociados a los números racionales a una gran variedad de situaciones.

Ahora bien, los argumentos de Kieren (en Kilpatrick *et al.,*1983) sobre el proceso de construcción del concepto de número racional nos muestran cómo este proceso tiene lugar a partir del desarrollo de mecanismos previos como lo es la partición y la equivalencia pero que su expresión más fina depende también de la madurez mental del niño por lo que se debe considerar que este complejo proceso ha de acompañarse de una reflexión en torno a cómo aprovechar las experiencias previas del alumno y las condiciones del entorno para facilitar el desarrollo de la noción de fracción.

3.3. La homonimia de la fracción

Mancera (1992), difunde la noción de homonimia de la fracción, luego de destacar la importancia que adquiere dicha comprensión cuando el estudiante se enfrenta a diferentes problemas que implican el uso de las fracciones pero que asimismo esos problemas están vinculados a distintos contextos. La situación problemática que implica el uso de expresiones fraccionarias, les dará entonces a éstas una interpretación particular. La caracterización de tales interpretaciones ha sido tarea de varios autores entre los que destaca Kieren (1976), Streefland (1978), Freudenthal (1983), Vergnaud (1983) y Nesher (1985), autores de los cuales Mancera (1992) recupera sus aportaciones al respecto de la homonimia de la fracción.

La expresión m/n, donde $m\ y\ n$ son números enteros siendo *n* diferente de cero, es aritméticamente entendida como la notación general de un número racional cuya definición puede establecerse en los términos siguientes:

“Los números racionales son los reales que se pueden expresar como razón de dos enteros. Se denota el conjunto de los números racionales por $\mathbb{Q}$” (Lipschutz, 1992: 31).

Esta expresión (m/n) representa una relación entre dos números enteros ($\mathbb{Z}$) ligada a una determinada situación que le va a dotar de significado. Estos significados hoy han sido ya estudiados por varios autores que orientaron sus investigaciones al respecto.

En este apartado referiré la caracterización de los diferentes contextos que dan significado a la noción de fracción. Para esto se toman como referencia los planteamientos desarrollados por Llinares y Sánchez (1997) a partir de los trabajos de Kieren (1976), Behr, et al. (1983) y Dickson, et al. (1984). Asimismo, citaré las aportaciones que Mochón (s/f) hace al respecto en un trabajo de síntesis en donde retoma algunas aportaciones de Freudenthal (1983) y Streefland (1982).

Al abordar los diferentes sub-constructos de la fracción consideraré la estructura propuesta por Llinares y Sánchez (1997):

Relación parte–todo y medida.
Representaciones en contextos continuos y discretos
Decimales.
Recta numérica.
Las fracciones como cociente.
División indicada.
Como elemento de un campo cociente.
La fracción como razón.
Probabilidades.
Porcentajes.
La fracción como operador.

3.3.1. Relación parte–todo y medida.

“Esta situación se presenta cuando un todo (continuo o discreto) se divide en partes congruentes. La fracción indica la relación que existe entre un número de partes y el número total de partes. El todo recibe el nombre de unidad. La fracción aquí es siempre fracción de un objeto” (Llinares y Sánchez, 1997: 55). La relación parte-todo, según los autores mencionados, requiere para su comprensión el desarrollo previo de algunas habilidades tales como:

Tener interiorizada la noción de inclusión de clases (según la terminología de Piaget).

La identificación de la unidad.

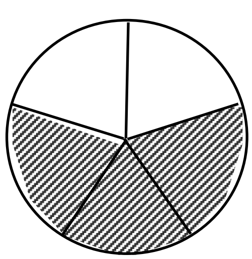
La realización de divisiones y conservación de la cantidad, y

Manejar la idea de área para el caso de las representaciones continuas.

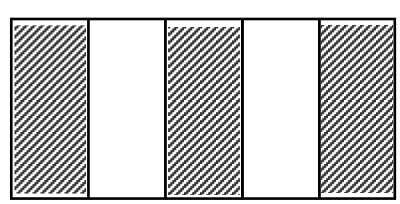
Para Mochón (s/f)*, parte-todo* es la interpretación recurrente de la fracción. Este autor señala que en esta interpretación un todo (continuo o discreto) es subdividido en partes equivalentes, por tal razón la fracción aquí se expresa como un fracturador. Según Mochón, en la escuela al caso continuo es al que más empleo se le da y se descuidan los *todos* de tipo discreto; agrega el autor que, de igual manera no se hace énfasis en el aula en la idea de partes equivalentes pues únicamente se trata el tema mediante el uso de partes idénticas.

3.3.1.1. Representaciones continuas y discretas.

Las representaciones más frecuentes de las fracciones en unidades continuas suelen ser circulares o rectangulares; por ejemplo, las figuras siguientes:

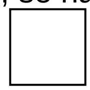


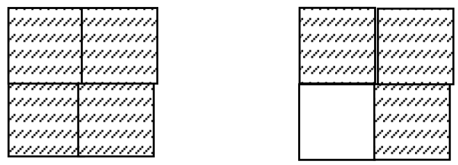
a)



b)

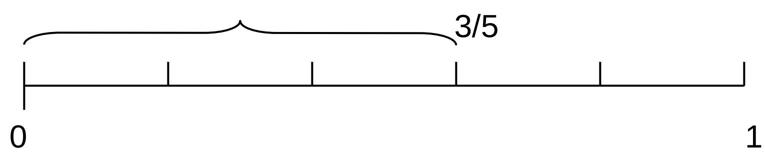
en donde “de las 5 partes del todo, se han sombreado tres: $3\ de\ las\ 5$; $3/5$.”

“Si la unidad es representado por  entonces:



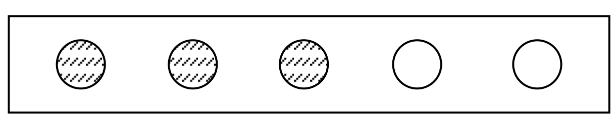
“la parte sombreada [considerando las dos figuras como el todo] es **1** ¾, una forma mixta de la fracción”.

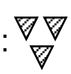
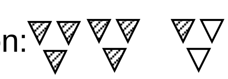
Bien, para los diagramas la magnitud–longitud:



en este caso, la fracción indica las partes que se divide el segmento en relación al número de partes en que se ha dividido éste.

Por otra parte, en un contexto discreto, $3/5$ puede representarse mediante la forma:



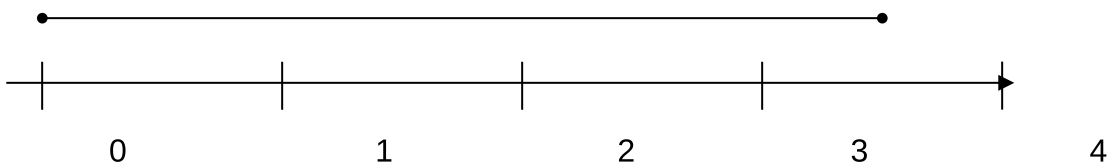
Pero si el todo se representa por: , entonces en la situación: 
la parte sombreada representa $\mathbf{2}\ 1/3$.

Es conveniente señalar aquí que, si se utilizan contextos discretos y no sólo continuos, se fuerza al niño a ampliar su esquema de la relación parte–todo.

3.3.1.2. Medida.

Llinares y Sánchez (1997) mencionan que la recta numérica también sirve para una buena representación de la interpretación de las fracciones como medida pues, identificada una unidad de medida, ésta admite subdivisiones congruentes.

¿Cuánto mide la primera línea?



$$\mathbf{3 + 1/2 = 3\,1/2}$$

Existen dos ventajas desde el punto de vista de estos autores al considerar a las fracciones en la interpretación de medida:

Se proporciona el contexto natural para la suma (unión de dos medidas), y para la introducción de los decimales (notación decimal). Permite la introducción a la noción de equivalencia; es decir, la misma parte de la unidad recibe nombres diferentes en función de número de divisiones.

Por su parte, Mochón (s/f) señala que en situaciones de medida se tiene una cantidad medible y una unidad, y se pretende determinar cuántas veces cabe la unidad en la cantidad que se va a medir. En este tipo de comparación una de las cantidades se toma como unidad de referencia para medir la otra.

Cuando la unidad cabe un número exacto de veces en la cantidad que se va a medir, se tiene el caso más simple; si esto no ocurre, la unidad se va subdividiendo en partes iguales para formar subunidades. Se puede entonces apreciar que el concepto de medida está fundamentado sobre la idea de parte-todo, ya que la formación de subunidades requiere de su relación con la unidad.

Las experiencias concretas con medición pueden proporcionar un ambiente donde las fracciones aparezcan de manera natural y dar al alumno otra lente por medio de la cual pueda ver a la fracción desde otro punto de vista.

La operación de división está asociada a la idea de medida; o sea, para saber cuántas veces cabe algo en algo; por ejemplo, $15 \div 3$ que se puede interpretar como ¿cuántas veces el 3 cabe en el 15? En este caso aparece la idea de medida si pensamos al 3 como nuestra unidad.

Desde este punto de vista, la división de fracciones puede traducirse a una situación de medida, por ejemplo $3/4 \div 1/8 = ?$, se puede interpretar como: cuántas veces un octavo (la unidad de medida) cabe en tres cuartos, y la respuesta sería "cabe seis" ya que por superposición o el procedimiento algorítmico al utilizar $1/8$ como unidad de medida de ¾ se observará que se obtiene 6 como resultado (medida).

Trasladando este razonamiento a divisiones de fracciones más complicadas, por ejemplo: $1/3 \div 2/3 = ?$, inicialmente pensamos a dos tercios como nuestra unidad, entonces la pregunta de ¿cuántas veces cabe...? la transformamos a ¿qué fracción es un tercio de dos tercios? que en forma general sería ¿qué valor es x de y?, en este caso ¿Qué valor es un tercio de dos tercios? La respuesta sería la mitad y podríamos advertir que esta manera de ver a la división, no como dividir en partes iguales, sino como medida (cuantas veces cabe algo en algo) es sumamente importante en la resolución de problemas, pero descuidada en la enseñanza de esta operación.

Como puede observarse, los autores mencionados en las páginas anteriores coinciden al señalar que la interpretación parte –todo expresa la relación entre un número de partes congruentes y el número total de partes en el que un todo continuo o discreto fue dividido. No obstante ser esta interpretación a la que más se recurre cuando se aborda el tema de las fracciones en la escuela primaria, todavía la enseñanza de este tema se dificulta tanto a los maestros como a los estudiantes normalistas.

Se puede afirmar que los maestros en formación hacen evidente algunas dificultades al trabajar con las fracciones en situaciones donde se hacen presentes las unidades discretas, los decimales y problemas de medida, denotando que no se tiene claramente identificada la relación con esta interpretación (González, 2005).

3.3.2. Las fracciones como cociente.

De los planteamientos de Llinares y Sánchez (1997) se retoman también las siguientes interpretaciones que obtiene la expresión fraccionaria a/b en función de la situación en que se genere. Estos autores, para el caso específico de la interpretación de la fracción como cociente, señalan:

> La fracción en esta interpretación se asocia a la operación de dividir un número natural por otro (división indicada a:b = a/b) y se considera que tiene un doble aspecto: Ver a la fracción a/b como una división indicada, y considerar las fracciones como elementos de una estructura algebraica. (Llinares y Sánchez, 1997: 63)

Este doble aspecto que tiene lugar al dividir un número natural por otro, situación que da origen a la fracción como cociente, es desarrollado por Llinares y Sáchez (1997) de la forma que se expone a continuación.

3.3.2.1. División Indicada.

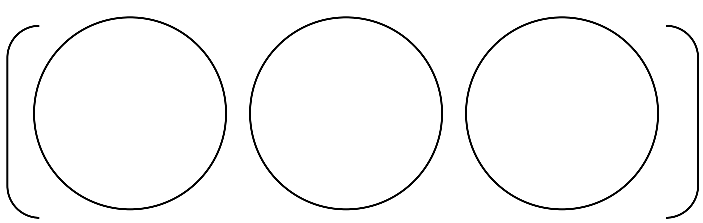
La interpretación de una fracción indicando una división de dos números naturales ($2/3 = 2{:}3$) aparece en un contexto de reparto, por ejemplo: Tenemos dos metros de tela y hay que repartirlas de forma equitativa entre tres personas, ¿Qué parte le tocará a cada una expresada en fracción?

Bajo esta perspectiva, el significado de la fracción y las operaciones están conectados de tal forma que se desarrollan al mismo tiempo.

En la interpretación de división-reparto, la principal habilidad que se refleja es la de dividir un objeto u objetos en un número de partes iguales. Este tipo de actividades se pueden convertir en los pilares sobre los que se fundamente el trabajo con los números racionales como precursor del álgebra pues hay incógnitas cuyo valor debe ser hallado bajo el procedimiento que el alumno pueda diseñar.

Mochón (s/f) refiere que en esta interpretación un todo es subdivido en partes equivalentes. El número de ellas está determinado por la cantidad de objetos a los cuales se les va a hacer la repartición (la fracción aparece aquí nuevamente como un fracturador o como una extensión de esta idea), un ejemplo de esta interpretación es el siguiente:

"Si tres chocolates son repartidos entre cuatro niños, ¿Qué cantidad de chocolate recibe cada uno?"



Paco
Pablo
Ramón
Jesús

De esta forma, la fracción n/d se interpreta como un cociente partitivo $n \div d$, donde el numerador representa la cantidad que se va a repartir, el denominador el número de partes en las cuales se va a subdividir esta cantidad y el valor de la fracción representará la cantidad que cada una de las partes recibe.

Se puede observar que la fracción como cociente puede ser mayor que 1, mientras que en la interpretación parte-todo, la fracción tiene sentido sólo si es menor que o igual a 1.

De acuerdo con Llinares y Sánchez (1997), quienes señalan que contrastando aún más las dos interpretaciones analizadas del tipo fracturador (parte-todo y cociente), se tiene que en parte-todo un octavo es una de ocho partes equivalentes en las que está dividido un todo; y en cociente se indica que "cada uno recibió un octavo de una pizza por ejemplo", sin implicar que sólo se hubiera repartido una pizza entre ocho personas pues se pudieron haber repartido tres pizzas entre veinticuatro personas y el resultado seguiría siendo el mismo: $1/8$.

Estos autores agregan que las situaciones de reparto generan también experiencias didácticas interesantes que pueden desarrollar en el niño la habilidad de la equidivisión, lo cual hace evidente la equivalencia de fracciones, por ejemplo: ¿Qué variedad de particiones se puede obtener al repartir seis galletas entre cuatro niños? ó ¿De cuántas maneras diferentes es posible representar la repartición de seis galletas entre cuatro niños?

Para representar un cociente, el símbolo matemático usado es el signo de la división ($\div$), lo que permite identificar las operaciones con situaciones de reparto propiciando una mejor identificación de la división de fracciones presentada algorítmicamente en clase sin ninguna explicación.

La expresión fraccionaria vista entonces como cociente de dos números naturales puede denotar, según Llinares y Sánchez (1997), una división indicada o una estructura algebraica. Esta última es la que considerando a Kieren (1975 en Llinares y Sáchez. 1997) "no se encuentra vinculada estrechamente al pensamiento natural del niño" (p.67) pues implica un esfuerzo mayor de abstracción para lo cual mentalmente aún no está preparado. De tal modo que el significado de la fracción como cociente puede adquirir sentido para los niños cuando se trabajen problemas que impliquen su uso como una división indicada.

3.3.2.2 Como estructura algebraica.

Streefland (1984) citado por Llinares y Sánchez (1997) establece que “se conciben las fracciones (números racionales) como elementos de la forma a/b, siendo $a\ y\ b$ son números naturales (para $\mathbb{Q}^{+}$) donde ($b = 0$) que representan la solución de la ecuación $b * x = a$” (p. 67).

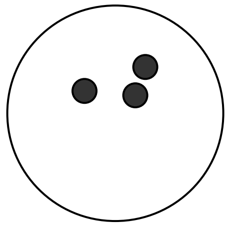
Bajo estas consideraciones, dichos autores mencionan que esta interpretación debe tener un carácter globalizador y ser posterior en la secuencia de enseñanza a las demás interpretaciones por la razón que se expuso líneas antes, en el sentido que se requiere de los alumnos una mayor capacidad de abstracción que aún no alcanzan en grados superiores de la educación primaria.

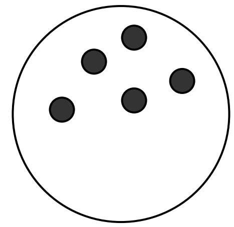
3.3.3. La fracción como razón.

Otra interpretación que Llinares y Sánchez (1997) refieren en relación al uso de las fracciones consiste en su aplicación como razón. Ésta se origina cuando son usadas como un índice comparativo entre dos cantidades de una magnitud (comparación de magnitudes), tomando nueva fuerza en este caso la idea de par ordenado de números naturales.

Llinares y Sánchez (1997) explican que un par ordenado a:b puede establecer dos tipos de relaciones, la relación todo-todo se genera cuando los elementos por relacionarse pertenecen a conjuntos independientes, por ejemplo: tres chocolates y cinco niños. Por otro lado, la relación parte-parte toma forma al relacionarse elementos de un mismo conjunto, por ejemplo: tres niñas y cuatro niños de un mismo equipo de trabajo.

En seguida se describe la relación parte-parte y la relación todo-todo con $a\!:b$, por ejemplo, en los conjuntos:

A 

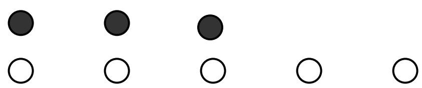
B 

En este ejemplo “todo-todo”

La relación entre los puntos del conjunto A y de B es de 3/5, (3:5).

La relación entre los puntos del conjunto B y de A es de 5/3, (5:3)

En un ejemplo “parte-parte”



Siendo las bolas negras y las bolas blancas partes de un mismo conjunto, la relación (razón) entra bolas negras y blancas es de tres quintos ($3/5$) (Llinares y Sánchez, 1997:67).

Estos autores también señalan que un contexto natural para esta interpretación de las fracciones como razones lo podemos encontrar en la relación generada entre cantidades de una magnitud o de magnitudes diferentes, por ejemplo: en cuanto a magnitudes de la misma especie es el caso de comparación de longitudes y con respecto a magnitudes distintas, cuando comparamos longitudes (kilómetros) con tiempo (horas) apareciendo otra magnitud velocidad (km/h).

De acuerdo con lo dicho en el párrafo anterior, este tipo de situaciones nos llevan a otras en las que se presenta la comparación de razones, por ejemplo: “Un automóvil A recorre un trayecto de 5 km en 7 minutos. Un automóvil B recorre un trayecto de 3 km en 5 minutos. ¿Qué automóvil se desplaza a una velocidad mayor?”. Llinares y Sánchez (1997) agregan además que se puede dar otra situación que consiste en establecer valores adicionales a las razones que se pueden construir (problemas de regla de tres), por ejemplo: Un automóvil A recorre un trayecto de 4 km en 5 minutos. ¿Cuánto tardará en recorrer una distancia de 7 km? Este tipo de problemas, según los autores, constituyen un marco natural para las proporciones (igualdad de razones-equivalencia de fracciones).

Llinares y Sánchez (1997) plantean que hay además interpretaciones de las fracciones como razón vinculadas a situaciones que representan probabilidad y porcentajes. Con relación a probabilidad señalan que "en este contexto, por lo general se le da un carácter de cálculo aritmético sin pensar que la estructura cognitiva subyacente a las relaciones implícitas en contextos de probabilidad está vinculada a los números racionales" (Ibíd. 71). En algunos casos se establece una comparación todo-todo entre el conjunto de casos favorables y el conjunto de casos posibles, como en el lanzamiento de un dado ¿Cuál es la probabilidad de obtener un cinco?

Respecto de la representación de los porcentajes por medio de fracciones, dichos autores mencionan que los porcentajes se pueden entender como el establecimiento de relaciones (razones) entre conjuntos, estableciéndose subconjuntos de 100 partes. "En general, los porcentajes tienen asignado un aspecto de operador, por ejemplo; el 60% de 35 se concibe actuando la fracción 60/100 sobre 35; es decir, dividir 35 en 100 partes y tomar 60 de esas partes" (Llinares y Sánchez, 1997: 71).

Siguiendo a estos autores, se puede decir que la fracción como razón se origina cuando es utilizada como un índice comparativo de dos cantidades de una misma magnitud, y en un nivel más complejo, entre dos cantidades de magnitudes distintas, correspondiendo la primera a una relación parte-parte y la segunda a una relación todo-todo. (Llinares y Sánchez, 1997).

3.3.4. La fracción como operador.

Los autores arriba citados refieren que “bajo esta interpretación las fracciones son vistas en el papel de transformadores: algo que actúa sobre una situación (estado) y la modifica. Se concibe aquí la fracción como una situación de multiplicaciones y divisiones, o a la inversa” (Llinares y Sánchez, 1997: 72).

Ejemplo en un contexto discreto.

ESTADO-UNIDAD (SITUACIÓN DE PARTIDA)	OPERADOR (2/3)	ESTADO FINAL
12 naranjas.	Dividir por 3, multiplicar por 2.	8 naranjas.

Al aplicarse en un ejemplo continuo, tiene lugar esta interpretación cuando actúa la fracción 2/3 considerada como operador sobre un segmento de longitud dada, se obtiene otro segmento de longitud 2/3 del original, lo implica una reducción del segmento en su estado final.

Para concretizar, los autores establecen que las fracciones desde esta interpretación se utilizan considerando los siguientes dos aspectos:

Al describir una orden, una acción a realizar (operador) y

Al describir un estado de cosas, es decir, describiendo una situación.

De esta manera se pueden establecer como ejemplos dos formas de equivalencia de fracciones.

Equivalencia de operadores fraccionarios, se obtiene cuando al actuar sobre el mismo estado inicial resulta el mismo estado final.

ESTADO	OPERADOR	ESTADO
9	X (2/3)	6
9	X (4/6)	6
9	X (8/12)	6

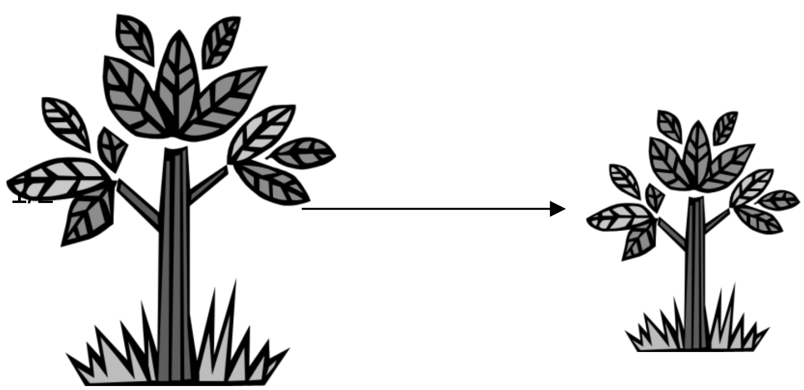
Equivalencia de estados. Tiene lugar al aplicarse un mismo operador y que al actuar sobre estados con unidades diferentes produce la misma transformación, lo que introduce de forma natural la noción de proporción.

ESTADO	OPERADOR	ESTADO
6	X (2/3)	4
9	X (2/3)	6
12	X (2/3)	8

Llinares y Sánchez (1997) mencionan que “esta interpretación enfatiza el papel de las fracciones como elementos del álgebra de funciones (transformaciones) al mismo tiempo que conduce a la idea de que los números racionales forman un grupo (estructura algebraica) con la multiplicación” (p. 74).

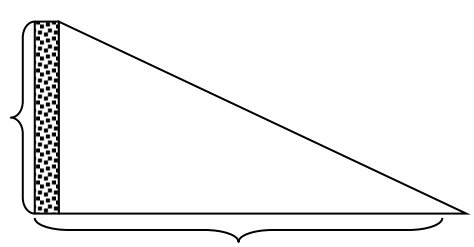
Por su parte Mochón (s/f) señala que la fracción bajo esta interpretación asume la función de transformador multiplicativo de un conjunto respecto a otro similar. Se puede considerar esta transformación como una ampliación o una reducción de los valores de un conjunto. La fracción como operador según este autor puede aparecer en diversos contextos:

Como <u>comparador</u> entre dos conjuntos similares.



Como relación entre dos cantidades diferentes pero del mismo tipo de medida.

1/2
altura

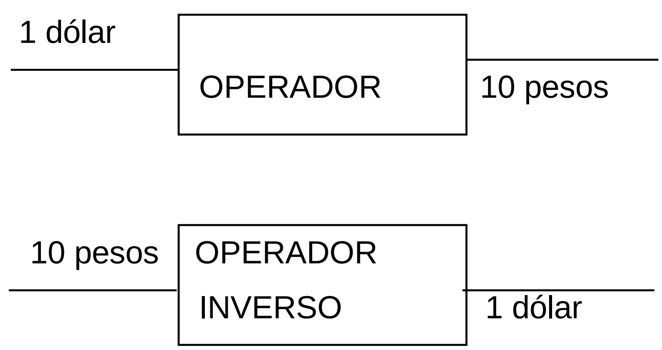


En estos dos contextos la fracción aparece como operador porque ha sido factor de transformación; es decir, la figura del árbol se transforma a ½ de su tamaño original y la longitud de la sombra que proyecta el poste se transforma a medida que el sol cambia de posición.

Según Mochón, un operador tiene dos propiedades fundamentales:

La composición, que es la posibilidad de aplicar un operador sobre un conjunto ya operado, por ejemplo: para reducir una figura a la octava parte puede hacerse reduciendo tres veces a la mitad.

La segunda propiedad garantiza que, dado un operador, se puede encontrar otro, llamado su inverso, que actúa sobre el conjunto operado para regresarnos al conjunto original. Por ejemplo:



Estas propiedades se pueden asociar a dos operaciones sobre fracciones: multiplicación y división. El operador inverso está representado por la fracción invertida del operador original.

Mochón (s/f) también señala que el carácter de operador se ve claramente en una situación de proporcionalidad cuando se advierte la relación de las dos cantidades iniciales. La diferencia entre esta relación y las anteriores es que ésta no es entre valores de la misma cantidad sino entre valores de las dos cantidades distintas. La fracción en esta interpretación asume el papel de transformador multiplicativo de un conjunto hacia otro similar.

Según los autores mencionados, la fracción como operador puede ser una ampliación o una reducción de los valores de un conjunto. En este caso la fracción como operador puede aparecer en diversos contextos que incluye el manejo de ella como razón. Ejemplo: “Reproduce este rectángulo a cuatro quintos de su tamaño actual”. Esta interpretación se asocia a la multiplicación y división de fracciones, y está presente en situaciones de proporcionalidad.

3.3.5. Esquema de los diferentes significados de la fracción.

Como conclusión de lo expuesto podemos mencionar que la fracción se puede comportar como una medida, un operador, una razón, un cociente o una parte de un todo. Cada uno de estos sub-constructos, conceptualiza a la fracción de una manera diferente y contribuye para formar una imagen más amplia y nítida de la fracción, necesaria para la resolución de diversos problemas.

Llinares y Sánchez (1997) mediante un esquema estructurado por Behr (Behr *et al*., 1983, p. 100) conceptualizan las relaciones que se derivan de la noción de fracción, indicando por medio de flechas continuas vínculos directos entre dicha noción y sus significados, y las relaciones que se conjeturan, con flechas discontinuas como se ilustra a continuación (75):

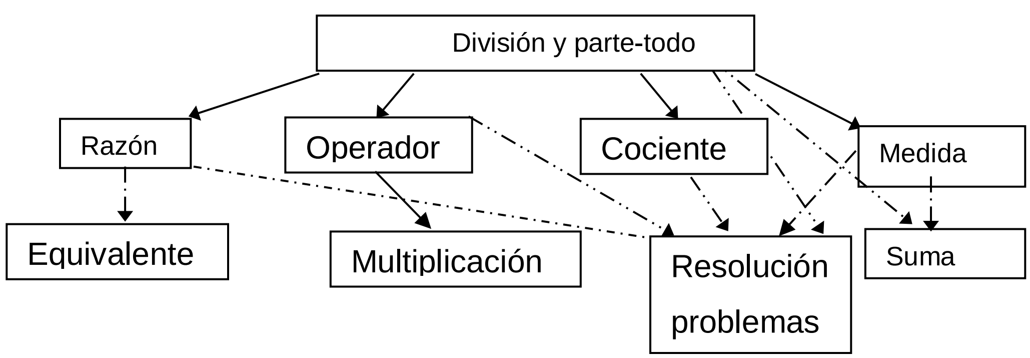


figura 1. Relaciones que se derivan de la noción de fracción.
Fuente: Fracciones. Relación parte.todo de Llinares y Sánchez (1997). España. Síntesis. P. 75

Por su parte, Mochón (s/f) sugiere una clasificación de los subconjuntos aquí discutidos para lo cual se presenta la imagen anterior donde las rectas continuas designan la categoría que le corresponde a cada uno de los sub-constructos de acuerdo a la división como fracturador, comparador o ambas (las dobles rayas sugieren una vinculación más fuerte, mientras que una sola raya sugiere una vinculación más débil). Nótese que el diagrama está cargado fuertemente hacia la parte derecha, indicando que la fracción aparece más frecuentemente como un comparador. Las rectas discontinuas señalan la dependencia de unos sub-constructos con otros. Como ya se mencionó, el sub-constructo de medida se apoya en las ideas de parte-todo. De igual manera, el sub-constructo cociente necesita de los conceptos básicos de parte-todo y medida para su desarrollo. Los sub-constructos de operador y razón que parecen ser más complejos, utilizan las nociones de las interpretaciones de medida y cociente.

Mochón (s/f) toma un argumento de Streefland (1982) como preámbulo al desarrollo de los diferentes aspectos de la fracción, señalando que en el salón de clases se introducen las fracciones sólo como subdivisión de cantidades continuas o discretas en partes equivalentes, aproximación llamada parte-todo que es unidireccional y deja sin explorar una gran variedad de estructuras conectadas a este concepto. Sin embargo, sabemos por las aportaciones de Freudenthal retomadas por Llinares y Sánchez (1997), que la fracción se puede interpretar de dos maneras diferentes: como un fracturador o como un comparador. En la primera, un todo se tiene que subdividir de acuerdo a cierto número especificado por la situación. En la segunda, se tienen dos todos diferentes representados por cantidades o valores de magnitudes, y se quiere hacer una comparación cuantitativa entre ellos. Así mismo estos dos grandes grupos pueden subdividirse cada uno en situaciones distintas como se plantea a continuación:

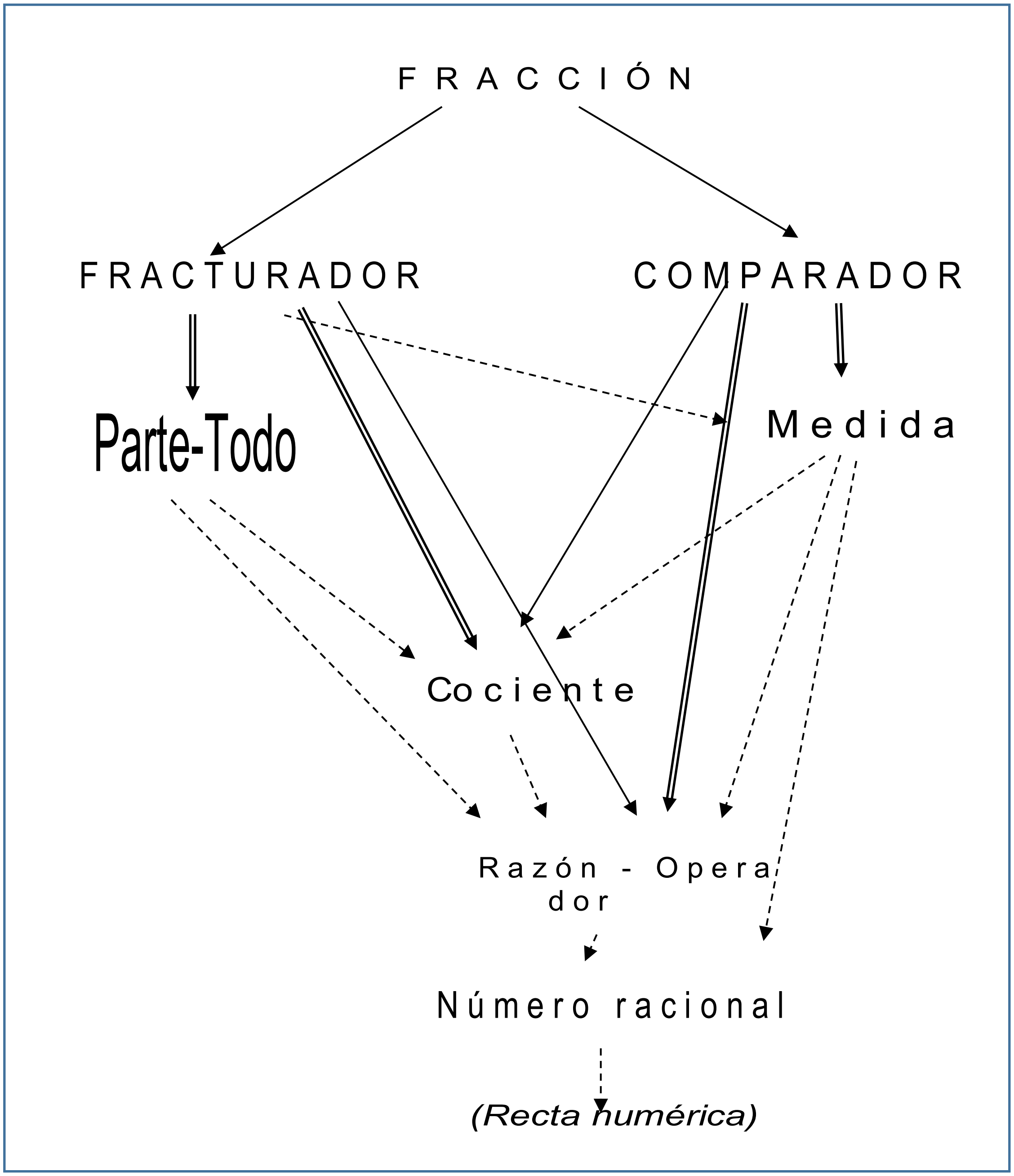


Figura 2. Interpretación de la fracción como fracturador y como comparador de acuerdo a Freudental
Fuente: Fracciones. Relación parte.todo de Llinares y Sánchez (1997). España. Síntesis.

Finalmente, esta revisión de los trabajos de síntesis de Llinares y Sánchez (1997) por un lado; y por otro, de Mochón (s/f), tiene como objeto recuperar las aportaciones de estos autores y las de otros revisados por ellos, en torno a las distintas situaciones que dan origen a la expresión fraccionaria y que le dan un sentido diferente en función del contexto en que aparece, mismos que quienes ejercen la docencia en educación básica, deben conocer para ser efectivamente facilitadores del aprendizaje de esta noción matemática.

3.4. Los números decimales como objeto de saber

3.4.1. Algo de historia sobre los números decimales.

En general, señala Ruíz Cruz (2011), se asume que la numeración decimal se desarrolla en la Edad Media por obra de hindúes y árabes desconociéndose aplicaciones previas. No obstante, no se puede atribuir el mérito exclusivo de su creación a estas culturas dado que de acuerdo con este autor sería erróneo afirmarlo pues hay indicios sobre el uso de sistemas decimales que ya realizaban los chinos antes del periodo medieval.

Al respecto, Centeno (1997) señala que, a partir del siglo VIII, los sabios chinos introdujeron en su numeración de posición un signo especial, representado por un pequeño círculo, para indicar la ausencia de cantidades de un cierto orden. Agrega que, en particular, tales sabios chinos, pudieron representar números inferiores a la unidad de una forma muy próxima a la nuestra (Centeno, 1997: 42).

Como quiera que sea, es sabido, como señala Ruíz Cruz (2011), que el origen de la escritura actual de los números decimales se vincula a la necesidad de facilitar los cálculos con fracciones decimales.

Ruíz Cruz (2011), al referir el origen de los números decimales, hace referencia a Abu'l Hasan Ahmad ibn Ibrahim Al-Uqlidisi, que vivió en el periodo de

920-980 d.C. en Damasco, quien fue un matemático que estuvo activo en Damasco y Bagdad, además de ser un copista de los trabajos de Euclides. Él escribió el libro más antiguo que ha sobrevivido sobre el uso posicional de los numerales árabes “Kitab al-Fusul fi al-Hisab al-Hindi”, hacia el año 952. Berggren señala que las fracciones decimales fueron usadas por Al Uqlidisi hacia el siglo X, esto es aproximadamente quinientos años antes que el matemático Al-Kashi. No obstante, éste último sostenía que él había descubierto las fracciones decimales.

Al-Uqlidisi, refiere Centeno (1997), fue una persona que tuvo el interés y la ambición de recopilar toda la aritmética de su tiempo, donde se incluyera tanto la producción de origen indio como griego o árabe. Centeno destaca que en su obra Al-Uqlidisi usa de forma natural las fracciones decimales y se muestra con experiencia en los cálculos. Empleó una notación muy cercana a la actual, usando un signo de separación entre la parte entera y la parte fraccionaria de un número.

Agrega Centeno (1997) que los investigadores no se ponen de acuerdo sobre quién tiene el mérito de haber trabajado primero con fracciones decimales, pues sus puntos de vista se basan en interpretaciones de textos antiguos. Sin embargo, con base en esos trabajos de investigación, se sabe con certeza que en los siglos X a XV “convivían” las fracciones sexagesimales y los decimales en los países árabes.

En la exposición histórica que realiza Ruíz Cruz (2011) se menciona que Ghiyāth al-Dīn Jamshīd Mas’ūd al-Kāshī (o al-Kāshānī) (1380-1429), fue uno de los mejores matemáticos del mundo islámico. Aparte de sus aportes en Astronomía y Trigonometría, es de resaltar la forma metódica con la cual trata las fracciones decimales, con la visión de establecer un sistema de fracciones en el cual (como en el sistema sexagesimal) todas las operaciones se pudieran hacer como con los enteros. Las operaciones con fracciones decimales finitas[10] son desarrolladas en detalle, pero Al-Kashi no menciona la periodicidad. Para denotar las fracciones decimales, escritas en la misma línea que el entero, a veces separaba la parte entera por una línea vertical o escribía el orden sobre los numerales, pero generalmente nombraba sólo la menor potencia que determinaba las otras. En la segunda mitad del siglo XVI y en el siglo XVII las fracciones de Al-Kashi tuvieron cierta circulación en Turquía. Es posible que las ideas de Al-Kashi tuvieran alguna influencia en la introducción de las fracciones decimales en Europa.

Por otra parte, de acuerdo con los datos históricos sobre los números decimales que recopila Centeno (1997), Al-Kashi escribió un tratado de aritmética - La llave de la aritmética- el cual por su contenido, claridad y elegancia tuvo una fuerte difusión en la Edad Media. En dicho tratado, consagró el primer capítulo del segundo libro al tema de las fracciones. A Al-Kashi - según refiere Centeno (1997)- se le reconoce haber introducido, con base en las fracciones sexagesimales, fracciones compuestas de las potencias sucesivas de un décimo (Centeno, 1997: 46). Denomina a estas potencias: décimas, segundos décimos, terceros décimos, etc., y a las fracciones, fracciones decimales. Al-Kashi da cuenta de la creación de un sistema en el que, como en el conocido sistema sexagesimal, todas las operaciones se realizarán de igual forma que como se procede con los números enteros pero que, apoyándose en la base diez utilizada comúnmente, será ciertamente más accesible que el sistema sexagesimal usado generalmente por los astrónomos.

Según informa la autora en mención, Al-Kashí dedica una parte de su obra a la conversión de fracciones sexagesimales en fracciones decimales y viceversa, y

[10] Al realizar el cociente indicado por una fracción decimal cualquiera “y el residuo final que se obtiene después de varias divisiones es cero, decimos que son expansiones decimales finitas” (Astorga y Rodríguez, 1984: 6).

establece tablas muy concisas a fin de facilitar los cálculos. Cabe decir que se deduce el desconocimiento de Al- Kashi de los trabajos de Al-Uglidisi sobre la utilización de los decimales pues se adjudica plenamente su invención. Sin embargo, sea o no el inventor de los decimales, fue él quien por primera vez explicó con claridad una teoría relativa a las fracciones decimales, de la noción de número y en particular de la noción de número decimal, según afirma Centeno (1997: 47).

Fue en el siglo XVI que ocurrió lo que los historiadores llaman el redescubrimiento de los números decimales, hecho que aparece asociado a una época que destaca por las transformaciones sociales. Apegados al recuento que hace Centeno (1997), los protagonistas de ese redescubrimiento y sobre todo de la extensión de los números decimales en occidente fueron el francés Francois Viète (1540-1603) y el belga Simon Stevin (1548-1620).

Según la autora, Viète, en su *Canon mathematicus seu ad triangula*, obra en la que utiliza en forma sistemática los números decimales, desea promover el uso de estos números y propone que las fracciones sexagesimales deberían ser utilizadas esporádicamente o sencillamente eliminadas de las matemáticas. En cambio, piensa que deberían emplearse casi exclusivamente los múltiplos y submúltiplos de diez. Para escribir los números decimales Viète utiliza diversos métodos, escribe, por ejemplo, el apotema de un polígono regular de 96 lados inscritos en un círculo de diámetro 2000 de esta forma: 99 946/45 875.

Stevin, desde el recuento que hace Centeno (1997), escribe el mismo número (99 946/45 875) con la expresión simbólica: 99 946 $^{45875/10\ 000}$. Y de esta conversión de escritura pasa a 99 946 ^{45875}, que está muy próxima de la que hoy se utiliza y que en este caso sería 99 946.45875 (Centeno, 1997: 48). Y a pesar de las sugerencias que hizo Viète en 1579 para la utilización de los números decimales, estos se extendieron completamente hasta la publicación de la obra de Stevin, *La Disme,* en 1585.

Centeno (1997) también expone que Simón Stevin se planteó como objetivo mostrar que los cálculos y las medidas pueden simplificarse considerablemente con el uso de los decimales. Stevin señaló que la creación y uso de estos números es una cosa tan sencilla que no merece el nombre de invención; no obstante, nota tanto interés en calcular con decimales que requiere “se ordene la dicha décima partición para que todos los que quieran puedan usarla” (p.48). Como resultado de sus investigaciones e ingenio matemático, Stevin publica en 1585 un libro constituido por 36 páginas, “La Disme”, título que significa “la décima”. Es considerado el primer libro de la historia que trata únicamente de los números decimales. Está dirigido, según su autor, “a todos los utilizadores de los números: a los astrólogos, agrimensores, medidores de tapicería y en general a todos los comerciantes, para mostrar que el descubrimiento de los números decimales simplifica numerosas dificultades que existían en el cálculo con fracciones”. (Ídem)

Una aseveración importante que establecía Stevin consistía en asegurar que él enseña a calcular fácilmente sin utilizar ‘números rotos’ o quebrados y que todas las cuentas que se encuentran en los negocios humanos pueden hacerse con la misma facilidad que con los números enteros. Los cuatro principios de la aritmética que se llaman añadir, sustraer, multiplicar y dividir por números enteros pueden hacerse con todos los números. Insiste en que en la “Disme” no hay ningún número roto (fracción).

Con relación al libro de Stevin, comenta Centeno (1997) que éste consta de dos partes. En la primera de ellas, Stevin enuncia cuatro definiciones y en la segunda realiza una explicación sobre cómo se pueden hacer las cuatro operaciones con números decimales, haciendo notar que el único problema consiste en elegir bien, al final de la operación, la parte entera. Por tanto, define la “Disme” como una especie de aritmética que permite efectuar todas las cuentas utilizando únicamente enteros. En seguida, Stevin establece que “cualquier número que vaya al principio se llama “comienzo”, y su signo es 0”. Se refiere así a la parte entera que marca el principio de una progresión decimal en que la razón es 1/10.

Centeno (1997) agrega que Stevin en otras dos definiciones clasifica las proposiciones decimales sucesivas de la progresión: 1/10 se llama “primera” y se designa por ^{1}, 1/100 se llama “segunda” y se designa por ^{2};… y los números representados por $^{o,\ 1,2,}$… se llaman números decimales. Así entonces, a las definiciones siguen las ampliaciones. Por ejemplo $3^{1}\ 7^{2}\ 5^{3}$ que se lee<<3 primeras, 7 segundas, 5 terceras>>; esta escritura, en la actualidad corresponde al número 0.375.

Al respecto otra autora, G. Waldegg (1996) refiere que en algunos pasajes de la “Disme”, Stevin señala cómo se usan los caracteres arábigos, cuando se trata de números enteros y donde se hace evidente que no hay ninguna diferencia con el actual sistema de numeración decimal. Para ilustrar dicha aseveración, Waldegg (1996) hace la siguiente cita que ella misma traduce de la “Disme”:

Sea el número mil ciento once, escrito en caracteres de cifras 1111, en cuya forma aparece que cada 1 es la décima parte de la cifra que le precede, análogamente, en el número 2378, cada unidad del 8 es la décima parte de las unidades del 7, y así para todos los otros. [Stevin s/f p.108 en Waldegg, 1996: 59)]

La misma autora agrega que Stevin, con el propósito de extender los números fraccionarios procede a darles nombre de acuerdo con la cita siguiente:

A todo número entero se le llama PRINCIPIO (*Commencement*) su signo es O … Por ejemplo, el trecientos sesenta y cuatro, nosotros lo llamamos trecientos sesenta y cuatro PRINCIPIOS, la escritura es de esta forma 364O. Y así para todos los otros casos. (Ídem.)

Waldegg (1996) añade que el signo O - del cual Stevin se vale para indicar cuál es la parte entera del número en cuestión - debido a problemas de tipografía y por facilidad en la operación, se transformaría posteriormente en el punto decimal. Sin embargo, Waldegg señala que lo destacable y novedoso es el tratamiento que Stevin da a las fracciones de la unidad y para ilustrar esto la autora hace la siguiente cita de la Disme:

Cada décima parte de la unidad del Principio, la llamamos PRIMA, su signo es ①; la décima parte de la unidad de Primas la llamamos SEGUNDA, su signo es ②. Y así para cada décima parte de la unidad del signo precedente, siempre en orden ascendente... Por ejemplo, en 3①7②5③9④, es decir, en tres primas, siete segundas, cinco terceras y nueve cuartas, así se podría proceder infinitamente, pero considerando sus valores, es evidente de la definición que dichos números son 1/10, 7/100, 5/1000 y 9/10000, que juntos hacen 3759/10000”. (Ídem)

Desde esa época (siglo XVI), las reglas de Stevin utilizadas para calcular con números decimales son las mismas que se aplican en la actualidad. También desde aquel entonces este inventor explica claramente las ventajas que se derivarían de tener un sistema de medidas, pesos y monedas basado en las divisiones decimales, acompañado sus explicaciones con diversos ejemplos.

A partir de 1620, gracias a los trabajos del coinventor de los logaritmos, John Napier, la notación de Stevin fue sustituida por la notación actual. La “coma” que en los países anglosajones es un punto, aparece de este modo como un símbolo que permite separar la parte entera de la parte “decimal”. El uso de los decimales se consolida con Laplace en 1812 cuando publica su tratado sobre Teoría Analítica de las Probabilidades, donde no se detiene a desarrollar tales números sino a aplicarlos como operadores y expresiones de algunos de sus resultados.

A través de su propia historia, los números decimales se fueron constituyendo paulatinamente como un concepto matemático. No obstante, para que esto fuera así se debe mirar desde antes de Al-Huwarizmi, en seguida reconocer los trabajos de Al-Uglishi, de Al-Kashi, de Francois Viéte, de Simón Stevin, John Napier y Laplace que fortalecieron una teoría que introduce a la cultura matemática el concepto de número decimal con status bien logrado, a través de la implementación del Sistema Métrico Decimal.

Waldegg (1996) asevera también, que “Stevin no inventó los números decimales ni siquiera fue el primero en sistematizar su empleo” (Waldegg,1996). Sin embargo, las fracciones decimales sólo se hicieron populares cuando Stevin se propuso explicar el sistema en su conjunto y con sus detalles más elementales.

Es hasta la época en que aparece Stevin en la historia cuando los decimales se convierten en un objeto de conocimiento susceptible de ser enseñado y utilizado en aplicaciones prácticas. Este reconocimiento de los números decimales se alcanza finalmente cuando los números reales llegan a ser objetos matemáticos, pues, según los planteamientos de Centeno (1997), un número decimal es un número real y no puede comprenderse el número decimal si no se comprende el número real (1997:54).

A partir de mediados del siglo XIX se instituye a través de la legislación correspondiente, la obligatoriedad del uso del Sistema Métrico Decimal; inicialmente en Francia, en seguida en España y más tarde les secundaron otros países.

Tal irrupción en el uso oficial de los números decimales en las diferentes actividades humanas, implicó una evolución en el ejercicio de cálculos matemáticos de diferentes magnitudes. Es por eso que Centeno (1997) menciona que la progresiva adaptación del Sistema Métrico Decimal en casi todos los países del mundo favoreció la extensión de los cálculos con decimales por lo que cabe destacar que el interés pedagógico del Sistema Métrico Decimal es el que propone Stevin en el apartado de conclusiones de la "Disme, el cual consiste en disponer de un sistema de cuantificación de magnitudes que no esté disociado de una estrategia de cálculo" (p. 50).

Centeno (1997) afirma que estos números siguen siendo los de Stevin y conservan su carácter práctico sin una condición definida hasta finales del siglo XIX, cuando Cantor y otros matemáticos empezaron a interesarse en los fundamentos de las matemáticas lo que permite que hoy sea un "objeto de saber matemático" asociado a un contexto denso en significado.

Como puede apreciarse, el abordar el tema de los números decimales como saber obliga de alguna manera a ubicarlos con claridad en el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, lo cual implica distinguir la naturaleza de los conjuntos numéricos que lo conforman, es decir, tanto los racionales como los irracionales.

3.4.2. La naturaleza de los números decimales.

Basados en Kónic *et al.,* (2010:58) es posible decir que de manera general entendemos los números decimales como los números racionales para los cuales existe al menos una expresión decimal finita, o de manera equivalente, los racionales expresables mediante una fracción decimal. Conforme a los planteamientos de estos autores los números racionales (y por tanto también los números decimales) se pueden escribir mediante fracciones o con notación decimal y aclaran que es importante no confundir los números con sus posibles formas de expresión.

Por su parte, Ávila y García (2008) recuerdan que "la notación utilizando el punto es sólo una forma de representar las fracciones que surgió con el interés de facilitar los cálculos con ellas. Sin embargo, algunas fracciones son decimales y otras no" (p.33). Para ayudar a comprender mejor que los números decimales no son lo mismo que la notación utilizando el punto decimal, estas autoras establecen las siguientes precisiones:

Los números decimales son aquellos que pueden escribirse en forma de fracciones decimales.

Las fracciones decimales son las que pueden expresarse con un numerador entero y un denominador que es una potencia de diez, por ejemplo $3/10\ y\ 1/100$ son fracciones decimales; también son fracciones decimales ½ y 3/5, ya que se pueden encontrar fracciones equivalentes a un medio y a tres quintos cuyos denominadores sean alguna potencia de diez.

Este tipo de fracciones tienen la particularidad de que pueden representarse de otra manera: utilizando escrituras que llevan punto decimal, dando lugar a las expresiones decimales finitas y que en la escuela simplemente reciben el nombre de *decimales*. A las fracciones $3/10\ y\ 1/1000$ les corresponden, respectivamente, las siguientes escrituras decimales: $0.3\ y\ 0.001$.

Las fracciones que no son decimales (por ejemplo 1/3) no pueden representarse mediante una expresión decimal finita, este tipo de fracciones da lugar a las expresiones decimales periódicas infinitas $(1/3\ =\ 0.3333\ ...)$.

Ambas expresiones, decimales finitas y decimales periódica, forman el conjunto de los números racionales (números que pueden escribirse como fracciones), que son los que se estudian en la Educación Primaria y Secundaria" (Ávila y García, 2008: 33).

Las autoras mencionan también que en la Educación Básica son objeto de estudio las expresiones decimales que representan números racionales, como son las expresiones decimales finitas, así como las expresiones decimales infinitas periódicas. Así mismo, aclaran que hay expresiones decimales que "no corresponden a los números racionales y que son aquellas cuya parte decimal es infinita y no periódica; este tipo de números se llaman irracionales" (p.34). Aseveran que los números irracionales de igual manera pueden expresarse de forma aproximada con una notación con punto decimal, pero subrayan que no son números decimales debido a que no pueden representarse mediante una fracción con denominador potencia de diez.

Sin embargo, prevalece en la educación primaria un uso indistinto de los términos "número decimal" y "expresión decimal" para referirse al mismo concepto, esto lo aseveran Saiz y sus colegas (2011) de quienes se toman algunos planteamientos para establecer la distinción entre "expresión decimal" y "número decimal". Estos autores señalan inicialmente que la palabra decimal procede de la palabra diez y hace referencia a la base de la numeración decimal (Saiz *et al*., 2011: 136). Dichos autores mencionan que un número está escrito en el sistema de numeración decimal cuando su escritura es una yuxtaposición de cifras, que puede incluir punto o no, donde su valor lo constituye el resultado de la sumatoria de cada dígito multiplicado por la potencia de la base, que en este caso es 10, correspondiente a la posición que tiene en el número determinado.

Siguiendo la argumentación de Saiz *et al*., (2011), se establece que "el que todos los números reales se puedan escribir en base 10 nos permite afirmar que todos poseen una expresión decimal" (p.138), lo que corresponde a una escritura con punto o con coma como se hace en algunos países. Aclaran que en el caso de los reales que no son decimales puede darse la imposibilidad de escribir todas las cifras que lo componen o de conocerlas, y para el caso de los números enteros, estos pueden prescindir del punto.

De manera muy específica, Saiz *et al.,* (2011) hacen referencia a una clasificación de las expresiones decimales; las finitas, que corresponden a los números decimales donde pueden incluirse los enteros; y las infinitas, que son números no decimales, pueden ser periódicas, que son racionales no decimales, o no, que son los números irracionales. Advierten los autores que estas “expresiones decimales”, las cuales existen para todo número real, son las que no deberían confundirse con los números decimales (Saiz *et al.,* 2011: 138).

Para acotar la comprensión del objeto matemático “números decimales” Saiz (Saiz *et al.,* 2011) señala que este conjunto de números puede definirse a partir de los números enteros, o bien, ya construido el conjunto de los racionales, se pueden entender como ciertos elementos especiales de este conjunto. Agrega que, como extensión de los números enteros, pueden generarse al considerar todas las soluciones de la ecuación $10n\,X = a$, donde a es un número entero y n es un número natural.

Conforme a la discusión que nos ocupa, se dice entonces que “un número decimal se escribe con una parte entera, un punto y un número finito de cifras decimales” (Saiz *et al.*, 2011: 140).

Los autores en mención, incorporan a sus referencias otra manera de definir a los números decimales ($\mathbb{D}$), a partir de los números enteros, lo cual consiste en añadir primero a este último conjunto sólo un elemento “*d*”, de tal manera que $10 * d = 1$ y, desde este nuevo elemento y los enteros, generar todos los números decimales. Asimismo, es posible definir a los números decimales ($\mathbb{D}$) a partir de una restricción de los racionales, entendidos por medio del subconjunto de los racionales cuyo denominador es una potencia de 10, es decir, de la forma $a/10^{p}$ siendo *p* un número entero no negativo.

Para avanzar en relación a la representación escrita de los números decimales, los autores en referencia mencionan que ésta puede ser de dos tipos: la fraccionaria. $a/10^{p}$ y la decimal - $b.\ b_1.\ b_2 \ldots b_p$ representación que se puede utilizar en función de la tarea a realizarse.

Se muestra en seguida el proceso de construcción directa de los números decimales como extensión de los números naturales ($\mathbb{N}$). Esto apoyado en los planteamientos de Centeno (1997). En el procedimiento que plantea la autora, menciona que los números decimales se generan al encontrar las soluciones de la ecuación $[10n * X = a]$, siendo *a* un número entero ($\mathbb{Z}$) y *n* un número natural ($\mathbb{N}$), donde es necesario definir en $\mathbb{Z} * \mathbb{N}$ la siguiente relación de equivalencia:

$$(a * n) \sim (b * p) = a * 10p = b * 10^{n}$$

Donde la clase del par $(a * n)$ se escribe $a/10^{n}$, entonces, se llama número decimal al conjunto de fracciones equivalentes a la fracción $a/10^{n}$.

Ejemplificando, $[1000x = 56]$ es equivalente a $[x = 56/1000]$. Donde la clase $[56/10^{3}]$ contiene una infinidad de fracciones equivalentes a $56/1000$.

Por lo que se concluye que "el conjunto $\mathbb{D}$ de los números decimales es el conjunto de las clases que la relación de equivalencia $\mathbb{R}$ determina en el conjunto $\mathbb{Z} * \mathbb{N}$; los elementos de $\mathbb{D}$ son los números decimales" (Centeno, 1997: 65).

La autora mencionada hace las precisiones siguientes: 1) Fracción decimal es una fracción cuyo denominador es una potencia de 10; 2) Número decimal es un número racional que posee al menos una escritura en forma de fracción decimal. Un número *a* es decimal si puede escribirse de la forma $n = a/10^{p}$, siendo a y p números enteros. Según esto, un número entero positivo o negativo es también un número decimal.

Centeno advierte que:

La expresión "número decimal" es ambigua porque la palabra número exige un adjetivo, que se refiere a su naturaleza intrínseca. Por ejemplo, los adjetivos natural, racional, real, nos permiten identificar la naturaleza de los números de que hablamos. Naturaleza que es independiente de la forma de representar estos números y en particular del sistema de numeración elegido.

En cambio, la palabra <<decimal>> que procede de la palabra <<diez>> hace referencia a la base de numeración más extendida, llamada también numeración decimal. De la misma forma, si escribiéramos los números en un sistema de numeración de base dos, hablaríamos de números binarios, si escribiéramos en base cinco hablaríamos de números quinarios, etc.

> […] Por otra parte, todo número decimal en base diez, puede tener una escritura con coma. En lenguaje corriente se acostumbra a confundir la expresión <<número racional decimal>> y escritura con coma, empleando la locución ambigua <<número decimal>> porque no se distingue siempre un número de su escritura. (Centeno, 1997: 68)

Por lo que entendemos que no toda expresión con punto, como es el caso del uso del Sistema de Numeración decimal en México, corresponde a un número decimal.

3.4.3. Los números decimales como objeto de enseñanza y aprendizaje.

Una vez expuesta una caracterización de los números decimales, es momento de adentrarse en dicha noción ahora como objeto de enseñanza y aprendizaje. Inicialmente retomo algunas de las aportaciones que Ávila y García (2008) realizan como resultado de una investigación llevada a cabo con alumnos de 5° y 6° de educación primaria. Dichas autoras destacan que la mayoría de los alumnos “tienen dificultades para entender que los valores representados después del punto decimal, son fracciones de la unidad” (p. 38). Uno de los hallazgos que obtuvieron es que para muchos alumnos un milésimo es mayor que un centésimo y éste a su vez es mayor que un décimo.

Además de la confusión mencionada, Ávila y García (2008) explican que la noción de equivalencia subyace “en la posibilidad de representar los decimales de diversas maneras”; aseguran que “construir la noción de equivalencia entre decimales es una tarea compleja. La dificultad se agudiza cuando los alumnos no tienen una comprensión amplia de lo que son las fracciones decimales” (p. 41). Lo anterior requiere para su atención la aplicación de situaciones que les permitan a los estudiantes comprender las relaciones entre décimos, centésimos, milésimos…

En cuanto a la propiedad de densidad, Ávila y García (2008) agregan que “entre dos decimales siempre es posible incorporar otro decimal, esto se conoce como la propiedad de densidad de los decimales, que es válida para todos los racionales” (Ibíd: 51).

Las autoras también comentan que probablemente en esta dificultad de aprendizaje sobre la propiedad de densidad de los números decimales, intervenga de cierto modo la forma de enseñanza de los maestros quienes están fuertemente familiarizados con las propiedades de los naturales y desconocen que los niños (al igual que algunos docentes) – como tendencia natural - extienden la lógica de los números naturales a la interpretación y manejo de los números decimales.

Por cuanto hace a esta propiedad (de densidad) de los números decimales, las autoras señalan:

Los niños tienden a interpretar los decimales desde la lógica de los naturales. Los conocimientos que han construido sobre estos números, son conocimientos que tiene muy arraigados y con base en ellos buscan interpretar los números decimales. (Ávila y García, 2008: 50)

Las autoras, agregan: en los números decimales, el número de cifras no es relevante como elemento para definir el orden […] En los números decimales, al igual que en el conjunto de los racionales, no hay ni antecesor ni sucesor. (Ibíd: 47)

Con base en la cita anterior que expresa de manera concreta una propiedad de los números decimales, se pueden advertir en la revisión del texto multicitado de Ávila y García (2008) algunas dificultades que tienen los alumnos en la comprensión de dicha propiedad; un caso lo es la idea de que el número de cifras después del punto define el orden de los decimales.

Los números decimales también son útiles para la obtención de resultados de cálculos aritméticos de manera fácil. Stevin ya planteaba esto en 1585, al decir que con dichos números se pueden "efectuar todas las cuentas que aparecen en los negocios de los hombres, a saber, las cuatro operaciones elementales, además de raíces, potencias y problemas relacionados con ellas" (Waldegg, 1996: 5). Sin embargo, en la enseñanza escolarizada, los alumnos al operar con los números decimales presentan problemas como el de "decidir dónde colocar el punto decimal en el resultado" (Ávila y García, 2008: 68). En relación a este problema, las autoras antes mencionadas retoman la expresión sentido numérico para referirse a un conjunto de habilidades relacionadas con los números y el cálculo aritmético; concretamente señalan al respecto:

El sentido numérico se refiere a la comprensión general que tiene una persona sobre los números y las operaciones, junto con la habilidad para usar dicha comprensión de forma flexible para hacer juicios matemáticos y para desarrollar estrategias numéricas. (Ávila y García, 2008: 70)

En la educación básica debe entonces procurarse favorecer la comprensión de los números decimales con el propósito de incidir eficientemente en el desarrollo del sentido numérico que los implique.

Ávila y García (2008) proponen los siguientes aspectos necesarios para avanzar en el desarrollo del sentido numérico:

Entender el significado de los números. En el caso de los decimales es importante que el alumno comprenda las reglas que rigen el sistema decimal de numeración, que cada lugar a la derecha implica un valor relativo diez veces menor, que los números escritos a la derecha del punto decimal son menores que uno, que todas las cifras conforman un solo número y que no se trata de dos números separados por el punto. Si se comprende el significado de los decimales no se tiene problema en aceptar que $4.2 = 4.20 = 4.200 = 4.2000 =$ ...

Comprender que distintas maneras de representar un mismo número. Por ejemplo, entender que las siguientes notaciones corresponden todas al mismo número:
$0.15 = 0.1 + 0.05 = 1/10 + 5/100 = 15/100 = 15\%$

Tener idea del tamaño de los números. Por ejemplo, saber que 0.125 es menor que 0.2. También es importante desarrollar la habilidad para identificar un resultado cuya magnitud no corresponde a lo planteado, por ejemplo, $2.1\, x\, 4.5$ no puede ser 94.5 por que 2.1 indica poco más de dos veces 4.5.

Conocer las propiedades de las operaciones y las relaciones entre ellas. Si los alumnos comprenden que $0.5 = ½$ saben que para multiplicar por 0.5 basta con obtener, mediante el cálculo mental, la mitad del número. Por ejemplo, $15\, x\, 0.5$ da como resultado la mitad de 15, es decir 7.5. Un alumno con buen sentido numérico resuelve esta operación sin recurrir al algoritmo convencional de la multiplicación (Ibíd: 71).

Sostienen las autoras multicitadas que con respecto de las propiedades de las operaciones no es preciso que los estudiantes puedan nombrarlas e identificarlas, el que las usen y lo hagan de manera adecuada es lo fundamental. Esto entonces constituye un reto para la educación primaria, más si se consideran los datos que las mismas autoras proporcionan con relación a la aplicación de los Exámenes de la Calidad y el Logro Educativo 2004 – 2005 específicamente con respecto del desempeño de los estudiantes de sexto grado de primaria que implican los números decimales, a saber:

Entre los conocimientos y habilidades que fueron evaluados y que más del 50% de los estudiantes de sexto grado tiene probabilidades de resolver con éxito, no hay ninguno relacionado con el tema de los decimales.

Más del 20 pero menos del 50 por ciento de los alumnos tiene probabilidades de resolver exitosamente tareas como: sumar y restar números decimales; resolver problemas aditivos con dos o más operaciones que impliquen números naturales, fraccionarios y decimales; calcular multiplicaciones con números decimales, y resolver problemas que impliquen una multiplicación usando números naturales y decimales.

Las tareas como leer, escribir y comparar números decimales o calcular divisiones con naturales cuyo cociente es decimal, sólo fueron resueltas por más de diez pero menos de 20 por ciento de los estudiantes; menos del 10% de los estudiantes tiene probabilidad de ordenar correctamente números decimales (Ávila y García, 2008:88).

Este panorama un tanto desalentador que se mantiene a la fecha, mismo que los actuales resultados en evaluaciones sobre el desempeño de los estudiantes en matemáticas (PLANEA, 2015), indica que los alumnos trabajan mejor la parte operatoria de este tipo de números y tienen más problemas para comprender la parte conceptual. Agregan que se puede inferir que el trabajo docente en las clases de matemáticas pone el énfasis en las operaciones, en seguida en la lectura y escritura de números y se desatiende la parte conceptual de los decimales, lo que en suma indica que los alumnos que egresan de sexto grado alcanzan una limitada comprensión de estos números.

Más adelante, Ávila (2013) realiza un estudio en un grupo de alumnos de sexto grado de primaria con el propósito de “identificar los conocimientos sobre los números decimales que pueden construir los niños si se les ofrece un acercamiento conceptual al tema” (p. 34) De acuerdo con la autora, se entiende por conceptual a un acercamiento que destaca la naturaleza de los decimales, la cual implica conocer aspectos como la relación de orden, la de equivalencia, la propiedad de densidad y diversas formas de representación.

Cabe destacar que el grupo de alumnos participantes en la investigación que reporta la autora, es un grupo con un desempeño sobresaliente en matemáticas, que se ha visto fortalecido en sus aprendizajes por tener desde el quinto grado una maestra con estudios de posgrado en el área de la enseñanza de las matemáticas y que realiza una labor docente comprometida. Sin embargo, la maestra reconoce tener dificultades para lograr resultados satisfactorios en la comprensión de la densidad de los números decimales; atribuye esta situación a que “los alumnos insisten en darle el mismo tratamiento de los números naturales a los decimales o a los fraccionarios” (Ávila, 2013:37).

No obstante que la maestra del grupo aplicó un enfoque de enseñanza distinto del tradicional que prevalece en la mayoría de las escuelas de educación básica en México, luego de la aplicación de los instrumentos de recolección de datos (cuestionario) como parte de la investigación realizada por Ávila (2013, los estudiantes mostraron algunas inconsistencias en sus aprendizajes. Por ejemplo, el que la mayoría de los alumnos del grupo considerara que los decimales son los números con punto, como es la creencia general de la mayoría de los docentes de educación básica. También se detecta que, en relación a la utilidad asignada a los números decimales, pocas veces se le vincula al resultado de una medición donde tienen una aplicación importante, asimismo se hace notoria la poca claridad sobre los valores representados en las distintas posiciones y la relación de equivalencia entre ellos (Ávila, 2013).

En México a través de exámenes nacionales se reporta un desempeño muy bajo en la comparación de decimales, no obstante, los alumnos del grupo de estudio, no presentan tantas dificultades en este rubro. Donde muestran más dificultades es en el tránsito entre registros de representación, es decir, en lo que corresponde a representar de distintas formas los números decimales (Ávila: 2013).

Otro aspecto relacionado con los números decimales que se indagó con los alumnos del grupo de sexto grado del estudio que reporta Ávila (2013) es aquel que enfatiza la limitada capacidad de los estudiantes para convertir a escrituras decimales, fracciones decimales representadas mediante superficies fraccionadas, asimismo, se hace notar que existe una comprensión limitada sobre la propiedad de densidad de los números decimales, pues reconocen entre dos de ellos sólo un número limitado de números.

Una conclusión a la que llega Ávila (2013) después de este estudio, es que no obstante que la maestra de grupo aplicó un acercamiento conceptual en la enseñanza de estos números, y haber logrado a través de esta forma de trabajo docente algunos resultados positivos en el aprendizaje en el ámbito de los números decimales y las fracciones, hay dificultades que se expresan en las situaciones comentadas en párrafos anteriores.

Por otra parte, Barriendos (2013), con el propósito de aportar conocimientos sobre la problemática de formación de maestros de primaria para la enseñanza de matemáticas, realiza un estudio realizado con docentes de ese nivel educativo. Como parte de sus conclusiones, hace notar que los maestros aplican las reglas para operar con números naturales al trabajar con decimales.

La autora señala, que, como parte del estudio, se les planteó a cuatro maestros una actividad a realizarse en equipos. A través de la resolución de la actividad se puso en proceso un cambio de significado en la operatoria con números decimales, pues la creencia prevaleciente consistía en asumir que la multiplicación agranda (la cantidad) y la división achica o disminuye el valor de la cantidad resultante.

Sin embargo, la experiencia vivida por los maestros les llevó a modificar esas creencias. La autora se cuestiona sobre cómo un conocimiento perteneciente al campo de las operaciones con números decimales permanece oculto para los docentes aún después de haber continuado con su formación académica más allá de la educación básica. Como una posible respuesta, Barriendos (2013) señala que es necesario cuestionarse sobre la eficiencia de las estrategias didácticas aplicadas tradicionalmente en el abordaje de las operaciones multiplicativas con números decimales. Surge de esta manera la necesidad de pensar en cómo ampliar el significado con relación al tema antes mencionado.

Por otra parte, Valencia (2014), reporta un estudio llevado a cabo con alumnos cuyas edades fluctúan entre los 11 y 12 años en una escuela primaria de la ciudad de México, la cual en la prueba ENLACE 2012 obtiene un resultado muy por debajo del mínimo establecido en tal Entidad Federativa. Valencia aplica un diseño de enseñanza conformado por once sesiones de trabajo, la primera y la última dedicadas a la aplicación de un instrumento de diagnóstico y los nueve restantes orientadas al desarrollo de actividades con el objeto de trabajar distintos aspectos de los números decimales a fin de superar en el grupo de estudiantes algunas dificultades en los temas que los implican.

Valencia (2014), señala que entre los resultados de la aplicación de su proyecto se encontraron dificultades que persisten a pesar de haber pasado por un proceso de intervención pedagógica, por ejemplo, en relación a la equivalencia entre distintos órdenes de la parte fraccionaria de los números decimales, asimismo en cuanto a la comparación y orden de estos números. Constató en dicho estudio que cerca del 25% de los estudiantes asumen que los milésimos son menores que los centésimos y los décimos, sin tomar en cuenta la cantidad que de éstos hay en un número decimal (Valencia, 2014).

En otra situación problemática aplicada por la autora consistente en que los estudiantes relacionaran tres decimales, en su representación con punto con la fracción y el área sombreada de una figura correspondientes a tales decimales, al revisarse los resultados se obtuvo que solo una tercera parte de los estudiantes logró relacionar correctamente los tres decimales con la fracción y la superficie equivalentes, otra tercera parte logró relacionar solamente uno o dos decimales. La tercera parte restante no relacionó ningún decimal con alguna de sus representaciones, estos resultados, de acuerdo con la autora es una evidencia de que siguen existiendo obstáculos para establecer equivalencias en situaciones como las que se aplicaron a los estudiantes que participaron en la investigación.

Probablemente el elemento principal que impidió que los estudiantes establecieran las relaciones adecuadas fue la operatividad con el algoritmo de la división implícito en el procedimiento de conversión de fracción a decimal y viceversa, ya que ese aspecto se había identificado como problemático durante las sesiones (Valencia, 2014:157). De lo anterior resulta que los estudiantes logran dominar el uso de las fracciones decimales (con denominadores 10, 100 o 1000) pero que existe dificultad para hacer uso de fracciones equivalentes con denominadores distintos a los ya mencionados.

Al referirse a las dificultades persistentes en cuanto a la operatividad con los decimales, destaca haber observado que en algunos estudiantes permanece la idea de que la multiplicación siempre agranda y la división achica o, a la inversa. Sin embargo, como resultado de las interacciones sobre esta cuestión aparece en los estudiantes la idea contraria: en los decimales la división siempre agranda y la multiplicación siempre achica sin importar las características de los números involucrados, de acuerdo a los planteamientos de Valencia (2014).

La autora también sostiene que, en relación a la resolución de problemas, en general, persisten dificultades relacionadas con identificar contextos en los que tiene sentido utilizar los decimales, ya que muchos alumnos aún consideran que mientras los datos presentados en el problema permitan realizar alguna de las operaciones, éste es correcto. (Valencia, 2014: 189).

Las conclusiones de Valencia (2014) establecen que a través del proceso de investigación que realizó identificó que el aprendizaje no se da en un proceso lineal. Para el caso de los números decimales, los estudiantes mostraron avances y retrocesos en relación a la comprensión de sus distintas propiedades. Señala como ejemplo, que en la sesión donde se trabajaron las equivalencias entre los distintos órdenes de la parte fraccionaria de los números, los estudiantes habían mostrado haber comprendido con claridad las equivalencias entre décimos, centésimos y milésimos, y la unidad, y sin embargo, en las respuestas proporcionadas en el cuestionario final, se observó que algunos estudiantes retrocedieron en el reconocimiento de tales equivalencias. En este momento algunos llegaron a mencionar que un milésimo es mayor que un centésimo y un décimo y que, por lo tanto, “no puede haber milésimos en los centésimos ni centésimos en los décimos” (Valencia, 2014: 198).

Valencia también hace mención que al trabajar las distintas representaciones de los decimales se presentaron retrocesos, esto se hizo notorio cuando en una sesión anterior los estudiantes habían mostrado relacionar correctamente las expresiones que tienen punto con: a) las fracciones decimales con denominadores 10, 100 y 1000; b) con las superficies fraccionadas y; c) con representaciones que ellos habían propuesto, tales como la descomposición aditiva del decimal (como suma). No obstante, estos aspectos que parecían superados, volvieron a mostrarse complejos para un buen número de estudiantes, según lo reflejado en el cuestionario final que aplicó la autora (Ibid:199).

A lo largo de este capítulo se han revisado primero los aspectos teóricos de las fracciones y de los números decimales con el propósito de hacer notar la complejidad de estos conceptos matemáticos al presentarse a los estudiantes por parte de los profesores quienes en algunos casos conducen los procesos de estudio con importantes limitantes didácticos y pedagógicos. En seguida se han presentado los resultados que diversas investigaciones han reportado en relación a las dificultades que presentan los estudiantes de educación básica en el aprendizaje de los números decimales y de las fracciones.

Esta afirmación se sustenta también en un reporte que se elaboró por la jefatura del Sector III de escuelas oficiales y la jefatura del Sector 13 de escuelas primarias federalizadas del Estado de Puebla ubicados en la Región de Teziutlán, Puebla que agrupa 12 supervisiones y contempla aproximadamente 36, 000 estudiantes de educación primaria. Dicho reporte se integró con la información aportada por las doce supervisiones escolares que forman parte de estos Sectores, en un documento denominado *Aprendizajes esperados no logrados*[11]. En tal reporte aparece que estos temas (fracciones y decimales) son los que representan mayor dificultad a los estudiantes que cursan los grados de cuarto a sexto grado de primaria. Las razones que se exponen se centran en dos aspectos fundamentales: el primero que tiene que ver con el argumento de los maestros de grupo quienes refieren que los estudiantes, en ninguno de esos grados escolares (de cuarto a sexto grado de primaria), cuentan con los elementos básicos de conocimiento sobre fracciones y decimales debido a que no les dan importancia y los han olvidado, o simplemente no vieron satisfactoriamente esos temas en grados anteriores.

La segunda razón - expuesta por los apoyos técnicos y supervisores escolares - consiste en que los docentes carecen de un dominio disciplinar y, en

[11] Consejo Técnico Escolar Intersectorial realizado en Tlatlauquitepec, Pue. Enero 2016.

consecuencia, no utilizan estrategias didácticas pertinentes que les permita conducir eficientemente a los alumnos en el dominio de esos temas.

La situación que se describe en los párrafos anteriores da idea de que los alumnos al término de la educación primaria egresan con un dominio insuficiente sobre los temas que en este capítulo nos han ocupado. Esa limitante en el conocimiento y utilización de las fracciones y de los números decimales por parte de los estudiantes que se incorporan a la educación secundaria se convierte prontamente en un problema de aprendizaje que repercute fuertemente en el trabajo con los temas que se relacionan con dichos objetos matemáticos. Esto se describirá en un capítulo posterior de este trabajo. Por el momento, sólo se puntualiza que desde el enfoque adoptado para la realización de este estudio, -la Teoría Antropológica de los Didáctico (TAD)-, en los procesos de estudio que el docente dirige para el tratamiento de temas matemáticos, el promover el desarrollo de técnicas en los diferentes tipos de tareas debe ir acompañados de los argumentos que las justifique, así como del dominio de la teoría correspondiente sobre los objetos matemáticos que se proponen en los Programas de estudio oficiales.

CAPÍTULO 4. LA METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

En los capítulos precedentes se ha hecho referencia a la perspectiva teórica desde la cual se realizará el análisis de materiales oficiales que coadyuvan, como parte del currículum, en los procesos de estudio de contenidos matemáticos relacionados con las fracciones y los números decimales, así como de lo que sobre estos temas queda registrado en las libretas de los estudiantes.

En este capítulo se sitúa metodológicamente el presente estudio y se exponen sus propósitos y estrategias de investigación. Es decir, se expone la metodología entendida ésta como la perspectiva desde la cual se enfoca el problema de investigación y se buscan las respuestas a las preguntas de estudio (Bogdan y Taylor, 1994) y se incluyen ejemplos de la forma en que se realizará el análisis de los materiales mencionados.

4.1. Perspectiva metodológica

Se pretende analizar los saberes matemáticos relacionados con los números decimales y con las fracciones desde la noción de praxeología matemática; los incorporados tanto en los libros de texto como en los programas de sexto grado de educación primaria y en los de primero de secundaria. Así mismo, se analizarán las libretas de trabajo de los estudiantes de dichos grados escolares.

Conviene mencionar que las investigaciones sobre las libretas de los alumnos y su valor en la clase, o lo que de éstas reflejan, son muy escasos. De hecho, en matemáticas no identificamos más que la realizada por Bosch *et al* (2003) en el que se incluyen como instrumentos de análisis de su trabajo de investigación, los apuntes de los alumnos participantes en los procesos de estudio donde se propuso investigar la práctica docente. Sin embargo, existen algunos otros trabajos – aunque no en el campo de la educación matemática – que nos permiten considerar la relevancia y las aportaciones que pueden hacerse mediante el análisis de este recurso auxiliar en los procesos de estudio de cualquier materia. Por ejemplo, Sanchidrián y Gallego (2009) concluyen que las libretas permiten recuperar la historia del trabajo en el aula. El estudio de S. Finocchio, (2005), a partir del contenido de los cuadernos utilizados en la materia de ciudadanía, identifica las formas de pensar este concepto y las formas de actuar de los docentes para promover su estudio.

Por lo antedicho, [esta autora señala que] es posible sostener que la práctica escolar, “lo que se hace en la escuela, lo que se hace hoy o lo que siempre se hace” (Chartier, 2000) es una dimensión ignorada en la mayor parte de las investigaciones. El trabajo sobre los cuadernos de clase es una de las maneras posibles de acceder, de modo inferencial, a esa dimensión ignorada de la enseñanza.

En acuerdo con estas autoras, creemos que: el análisis de las libretas de los estudiantes permite acceder – de manera inferencial - a la selección de contenidos de una materia, su organización y secuencia, así como su tratamiento en el aula. De ahí que consideremos que se justifica como motivo de análisis el contenido de las libretas de matemáticas de los estudiantes sobre un tema específico, pues en ellas se guardan las “huellas” de lo relevante en las clases.

Adicionalmente, se realizaron entrevista a los profesores de los estudiantes participantes en la investigación, con el fin de comprender mejor el papel que juegan las libretas en los procesos de estudio y tener elementos adicionales para entender las razones de lo que se registra en ellas.

Sustentándome en los planteamientos referidos en párrafos anteriores, puede considerarse que el análisis de las libretas de trabajo de estudiantes de sexto grado de primaria y de primer grado de secundaria, permite identificar acciones concretas llevadas a cabo durante procesos de estudio para la enseñanza y aprendizaje de temas relacionados con las fracciones y los números decimales.

4.1.1. Enfoque de la teoría antropológica de lo didáctico.

La TAD constituye el enfoque desde el cual se analizarán fuentes de información como los programas de estudio y los libros de texto gratuito de matemáticas de sexto grado de primaria y de primero de secundaria, así como las libretas de trabajo de los alumnos de los grados escolares antes mencionados.

El análisis de estos materiales se llevó a cabo considerando los elementos que propone la TAD a partir de las praxeologías matemáticas para poder desde esta perspectiva, obtener algunos datos que den luz sobre los posibles factores que incidan en los bajos niveles de desempeño matemático que los alumnos de los grados referidos logran en las aulas y en la cotidianidad.

Desde este punto de vista, vale decir que el Plan de Estudios 2011 de educación Básica y los Programas de Matemáticas de cada uno de los grados escolares que conforman este nivel de educación básica, presenta un enfoque didáctico particular para ser adoptado por los docentes al dirigir los procesos de estudio de las matemáticas: la resolución de situaciones problemáticas.

Una pregunta que puede hacerse entonces a esta investigación es: ¿por qué utilizar la noción de praxeología para analizar la actividad matemática que se realiza en las escuelas bajo el enfoque de resolución de problemas, o que al menos se propone de ese modo según los programas oficiales? La respuesta que se puede dar a esta interrogante es que, en nuestra perspectiva, la resolución de problemas en matemáticas, implica los siguientes componentes para la realización de la actividad en clase: a) un problema por resolver, es decir, una tarea; b) una estrategia o estrategias (definidas o por construir), para resolver el problema, es decir, una técnica; c) una argumentación o justificación de la estrategia de solución y de la solución obtenida; d) una institucionalización del saber construido al resolver el problema, es decir, una explicitación y formulación del conocimiento producido. Estos elementos, en nuestra opinión, pueden entenderse como correspondientes a los que constituyen una praxeología matemática: tarea, técnica, tecnología y teoría.

4.2. Análisis de los materiales de los alumnos y los docentes

El estudio del cual se da cuenta en este trabajo se centró en la revisión y análisis de materiales con los que están constantemente en contacto el maestro y los alumnos en el momento de aprender matemáticas. En primera instancia se revisa el programa vigente en el momento de hacer el estudio de la asignatura de matemáticas de sexto grado y de primero de secundaria. Esto con el propósito de tener claridad sobre la organización curricular que se plantea en el documento que oficialmente define el contenido de los procesos de estudio de las matemáticas en las escuelas, tal como se expone en dicho texto:

> Los Programas de estudio 2011 contienen los propósitos, enfoques, Estándares Curriculares y aprendizajes esperados, manteniendo su pertinencia, gradualidad y coherencia de sus contenidos, así como el enfoque inclusivo y plural que favorece el conocimiento y aprecio de la diversidad cultural y lingüística de México; además, se centran en el desarrollo de competencias con el fin de que cada estudiante pueda desenvolverse en una sociedad que le demanda nuevos desempeños para relacionarse en un marco de pluralidad y democracia, y en un mundo global e interdependiente. (SEP, 2011b: 8)

Los elementos que se sometieron al análisis fueron los contenidos de la asignatura de matemáticas. Primero para saber qué temas existen en el programa de matemáticas de sexto grado de primaria y de primero de secundaria relativos a las fracciones y a los números decimales; en segundo término, para advertir la intención de cada contenido vinculado a los temas mencionados, conocer si existe continuidad o no entre los contenidos referidos entre un grado escolar y otro, así como observar cómo y en que situaciones se usan esas nociones matemáticas.

Por otra parte, los contenidos también se revisaron en el programa, pero fundamentalmente en los libros de texto de los alumnos de los grados referidos.

Se llevó a cabo en primer término, la detección de los contenidos relacionados con las fracciones y con los números decimales en el programa de estudios para dar respuesta a las cuestiones que en líneas anteriores se mencionaron, toda vez que la organización curricular constituye la propuesta institucional para el trabajo con dichas temáticas.

En segundo término, se identificaron las lecciones que implicaran el tratamiento de contenidos relacionados con los temas multicitados. En esta actividad, la estructura de las praxeologías matemáticas fue la herramienta metodológica para el análisis, el cual se aplicó en las lecciones que se consideraron más representativas.

El libro de texto gratuito de matemáticas de sexto grado de primaria es un material con el que no se suscitó ningún problema de elección, pues este material es distribuido a todos los niños inscritos en este grado. No sucede lo mismo con los libros de los alumnos de primero de secundaria, pues no son libros únicos como en primaria, son adquiridos por los padres de familia en algunos casos y, la mayoría, lo tienen en copias fotostáticas que todos los alumnos de primer grado utilizan como libro de texto. Lo medular, al margen del comentario anterior, es que fue posible realizar la revisión de tales materiales que se usaban en los grupos en que se acudió y de los resultados de esta actividad se da cuenta en el capítulo cinco.

Posteriormente se prosiguió con la revisión de las libretas de trabajo de los alumnos de los grados ya mencionados. Esto se realizó con diferentes propósitos, primero para conocer qué praxeologías matemáticas vinculadas a los temas en referencia están presentes en dichas libretas, es decir, su respectivo grado de completitud; segundo, para saber si estas praxeologías matemáticas son las que se proponen en el programa de estudios correspondiente o no, y si la intención del estudio de dichas praxeologías corresponde a lo planteado en el programa; tercero, para identificar la eventual presencia de los dos bloques (práctico y teórico) en las praxeologías matemáticas registradas en las libretas; cuarto, para advertir la posible diferencia en el estilo de trabajo plasmado en las libretas de los estudiantes entre un nivel educativo y otro de la educación básica, es decir, reconocer en las características de los tipos de tareas realizadas y técnicas aplicadas por los alumnos durante los procesos de estudio de las matemáticas, las coincidencias y diferencias en la realización de tales procesos para la construcción y/o reconstrucción de las praxeologías vinculadas con las fracciones y con los números decimales.

En resumen, el análisis de las libretas de trabajo de los estudiantes se orientó también hacia la identificación de los tipos de praxeologias matemáticas y de los elementos de las mismas que están presentes en esos recursos didácticos. Los resultados de este análisis se presentan en el capítulo seis de este trabajo.

Como material para el análisis, se pudo disponer de libretas de cuatro grupos de sexto grado de primaria; los grupos (uno por Institución educativa) corresponden a escuelas ubicadas en la zona urbana de la Ciudad de Teziutlán, Puebla. No se revisaron las libretas de todo el grupo, sino que se solicitó al maestro o maestra del grupo seleccionar una libreta que considerara que tenía un buen nivel de registro de las actividades realizadas en el transcurso de los procesos de estudio. Por lo tanto, se contó con una libreta de trabajo que probablemente refleja de manera completa los puntos relevantes del proceso de estudio realizado para el aprendizaje de las fracciones y los decimales, según la opinión de los profesores de cada uno de los cuatro grupos que se consideraron para la investigación. De los estudiantes de primero de secundaria se contó con tres libretas, una de cada uno de los grupos donde se llevó a cabo la investigación.

4.3. El proceso de análisis de los materiales desde el modelo praxeológico

Para el caso de los programas de estudio de la asignatura de matemáticas, el análisis implicó la revisión del currículo para conocer, primero, qué praxeologías matemáticas vinculadas a los temas de nuestro interés se encuentran en cada grado escolar de los citados anteriormente, esta revisión da como resultado la identificación de las praxeologías matemáticas institucionalmente consideradas importantes para ser aprehendidas por los estudiantes con relación a los números decimales y a las fracciones. En segundo término, el reconocimiento de los programas de estudio señalados permitió advertir la continuidad (o discontinuidad) de las diferentes praxeologías matemáticas sobre los temas mencionados en ambos grados escolares[12], y en tercer término, conocer la integración o estructuración de las praxeologías contenidas en ellos.

En seguida se procedió a la revisión de los libros de texto. Para llevarla a cabo se consideró la información obtenida en la exploración de los programas de estudio conforme lo planteado en el párrafo anterior. Como resultado de la primera revisión de los libros de texto, se obtuvo que, en los dos grados educativos de nuestro interés, existen muy pocas lecciones donde se plantea el estudio de praxeologías relacionadas exclusivamente con las fracciones. Se tiene el caso, por ejemplo, del libro de sexto grado de primaria distribuido por la SEP, donde sólo se tienen tres de un total de cuarenta y seis que componen el libro. Una de ellas aborda la praxeología “Fracción como cociente” que implica un tipo de tareas donde el estudiante debe realizar repartos entre dos magnitudes y expresar los resultados mediante expresión fraccionaria (SEP, 2011c:12), y en el libro de texto

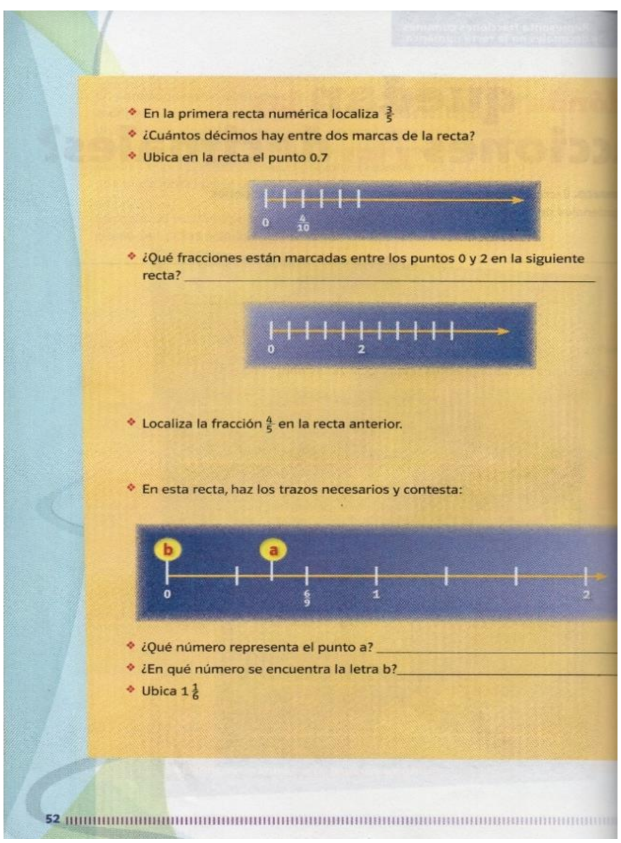
[12] En el capítulo 5 de este trabajo se desagregan las conclusiones al respecto de lo referido.

de secundaria autorizado por oficialmente en las escuela visitadas (Arriaga *et al.,* 2011) y que fue el que se analizó, sólo se tienen dos apartados de un total de treinta y ocho que constituyen el texto, el primero de ellos aborda lo relativo a *Fracciones en la recta numérica* y el segundo trata sobre *Multiplicación y división con fracciones*.

Se observó, así mismo que para el caso de los números decimales existen también muy pocas lecciones en los libros de texto de los grados en referencia, pero más en comparación con las vinculadas a las fracciones. En sexto grado se tienen cuatro, una de ellas aborda la praxeología “orden de los números decimales” y presenta un conjunto de tareas donde se indica ordenar números decimales en forma creciente, así como ubicación de los mismos en la recta numérica y hallar números decimales entre dos decimales (SEP, 2014:15-16). Para el caso de secundaria, se encuentran dos apartados, uno de los cuales trata sobre la praxeología *Los decimales en la recta numérica* y la segunda es relativa a *multiplicación de números decimales* (Arriaga *et al.*, 2011)

La primera revisión de los materiales nos llevó también a reconocer que, en los libros de matemáticas de ambos grados, se tiene una mayor cantidad de lecciones que abordan praxeologías que tratan conjuntamente tanto las fracciones como los números decimales. Cabe hacer la aclaración que se les llama en este trabajo praxeologías matemáticas al tema o contenido de matemáticas presente en el programa, libro de texto y cuaderno de trabajo correspondiente en virtud de implicar un tipo de tarea, una técnica, una tecnología que explica esa técnica y una teoría que generaliza la noción matemática del proceso de estudio. Así se tiene que en el libro de matemáticas de sexto grado se encuentran siete lecciones, en una de ellas se trabaja con la praxeología “representación de fracciones comunes y decimales en la recta numérica” (SEP, 2011c: 51-52); en el libro de primero de secundaria utilizado en los grupos participantes, hay tres apartados que las abordan directamente, se tiene el caso por ejemplo de la praxeología “fracciones y decimales en la recta numérica” (Arriaga *et al.,* 2011: 29). Esta praxeología implica un tipo de tareas que consiste en representar números fraccionarios y decimales en la recta numérica, que además muestra continuidad con lo realizado en sexto grado respecto de la misma praxeología matemática.

En segundo término, el trabajo con los libros se orientó al análisis de la estructura de las praxeologías que implican un determinado tipo de tareas, con la observación de que se someten a dicho análisis sólo algunas de las “lecciones”, pues sería metodológicamente poco pertinente analizar todas por lo que se seleccionaron tres del libro de Matemáticas de sexto grado (SEP, 2011c) y tres del libro *Desafíos matemáticos* del mismo grado (SEP, 2014) considerando que una tratara sólo de fracciones, otra de números decimales y una más sobre ambos temas. Del libro de matemáticas de primer grado de secundaria (Arriaga, *et al., 2011).*) se seleccionaron tres temas, uno que abordara aspectos básicos de fracciones y números decimales, otro relativo a suma y resta de fracciones y decimales y otro más donde se trabajara lo relativo a multiplicación y división de fracciones. Un ejemplo del análisis realizado



- En la primera recta numérica localiza $\frac{3}{5}$
- ¿Cuántos décimos hay entre dos marcas de la recta?
- Ubica en la recta el punto 0.7

- ¿Qué fracciones están marcadas entre los puntos 0 y 2 en la siguiente recta? ______

- Localiza la fracción $\frac{4}{5}$ en la recta anterior.
- En esta recta, haz los trazos necesarios y contesta:

- ¿Qué número representa el punto a? ______
- ¿En qué número se encuentra la letra b? ______
- Ubica $1\frac{1}{6}$

52

Figura 3. Lección 13; Representar fracciones comunes y decimales en la recta numérica.
Fuente: Libro de sexto grado. P. 51. En SEP (2011). Matemáticas. Sexto grado. México.

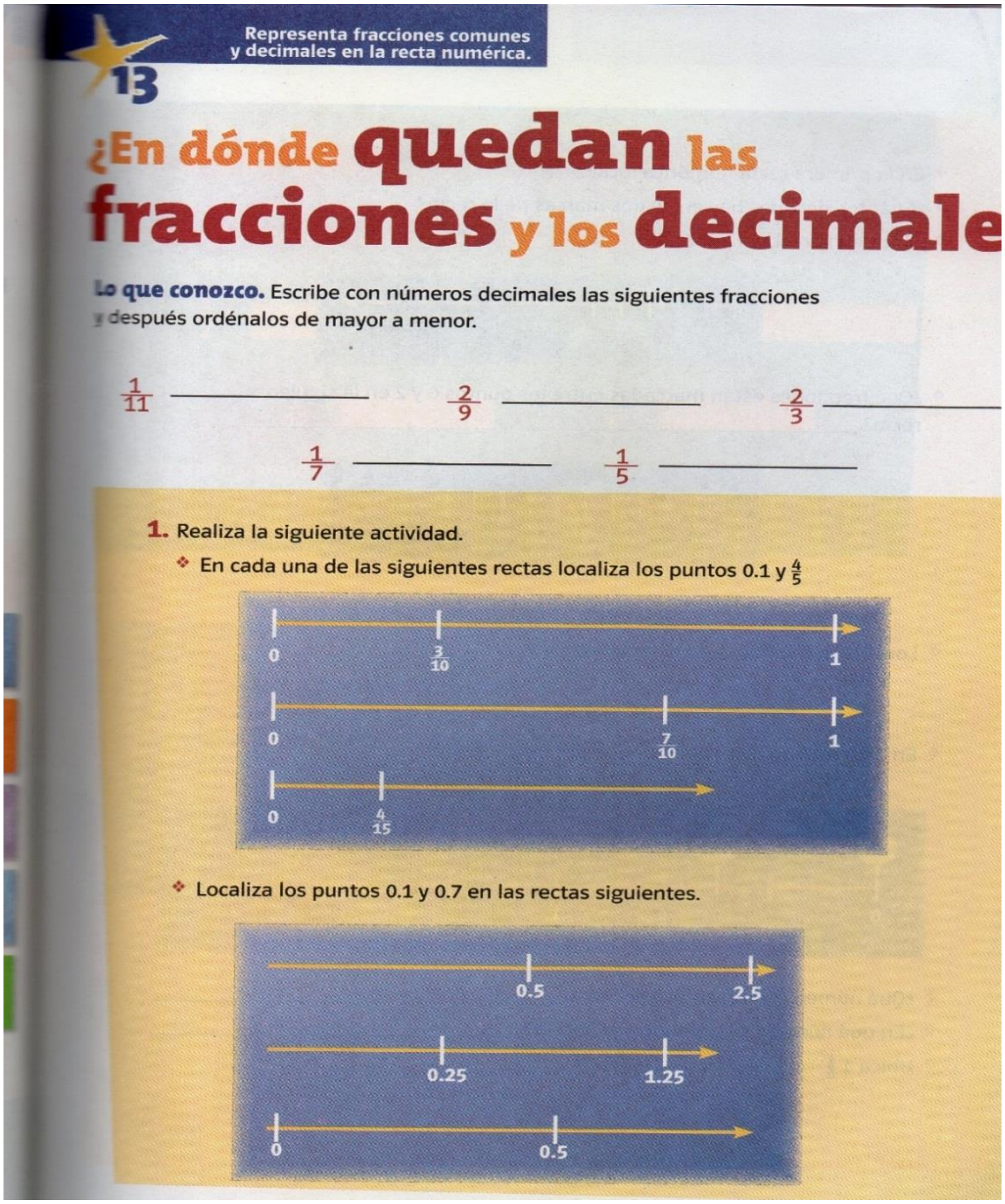


Figura 4. Representar fracciones en la recta numérica.
Fuente: Libro de sexto grado. P. 52. En SEP (2011). Matemáticas. Sexto grado. México.

La lección que se muestra en las figuras 3 y 4 corresponde a la marcada con el número 13 del libro para el alumno de matemáticas, sexto grado (SEP, 2011c: 51-53). Su contenido se inscribe en una praxeología matemática que vincula el estudio de las fracciones y los números decimales.

En primer término, se identifica cuál es la tarea a realizarse en el proceso de estudio. En este caso, el propósito fundamental de esta lección consiste en representar fracciones comunes y decimales en la recta numérica. Para esto, se parte de resolver el primer tipo de tarea que se presenta en la lección, la cual implica que el alumno escriba con números decimales cada una de las cinco fracciones comunes que se le muestran. De acuerdo con el contenido de la consigna, estas primeras tareas tienen el objeto de movilizar los conocimientos previos de los estudiantes con relación a la conversión de una fracción común a número decimal, pues se denomina este apartado como *"lo que conozco"* (figura 3), finalmente tendrán que ordenar esos números decimales de menor a mayor, lo que requiere tener el antecedente de orden de dicho conjunto de números.

En la segunda mitad de la figura 3, las tareas consisten en que, dados dos números, uno decimal y otro fraccionario, estos se ubiquen en tres rectas numéricas graduadas de forma distinta cada una de ellas; al observar la imagen, la técnica a utilizarse ha de tomar en cuenta la fracción que se encuentra previamente anotada en cada recta numérica para que con base en ella se realice la graduación de la recta numérica y se ubiquen los números dados. En estas tareas no se encuentra ningún cuestionamiento que requiera del alumno alguna argumentación sobre la técnica usada para realizar la tarea.

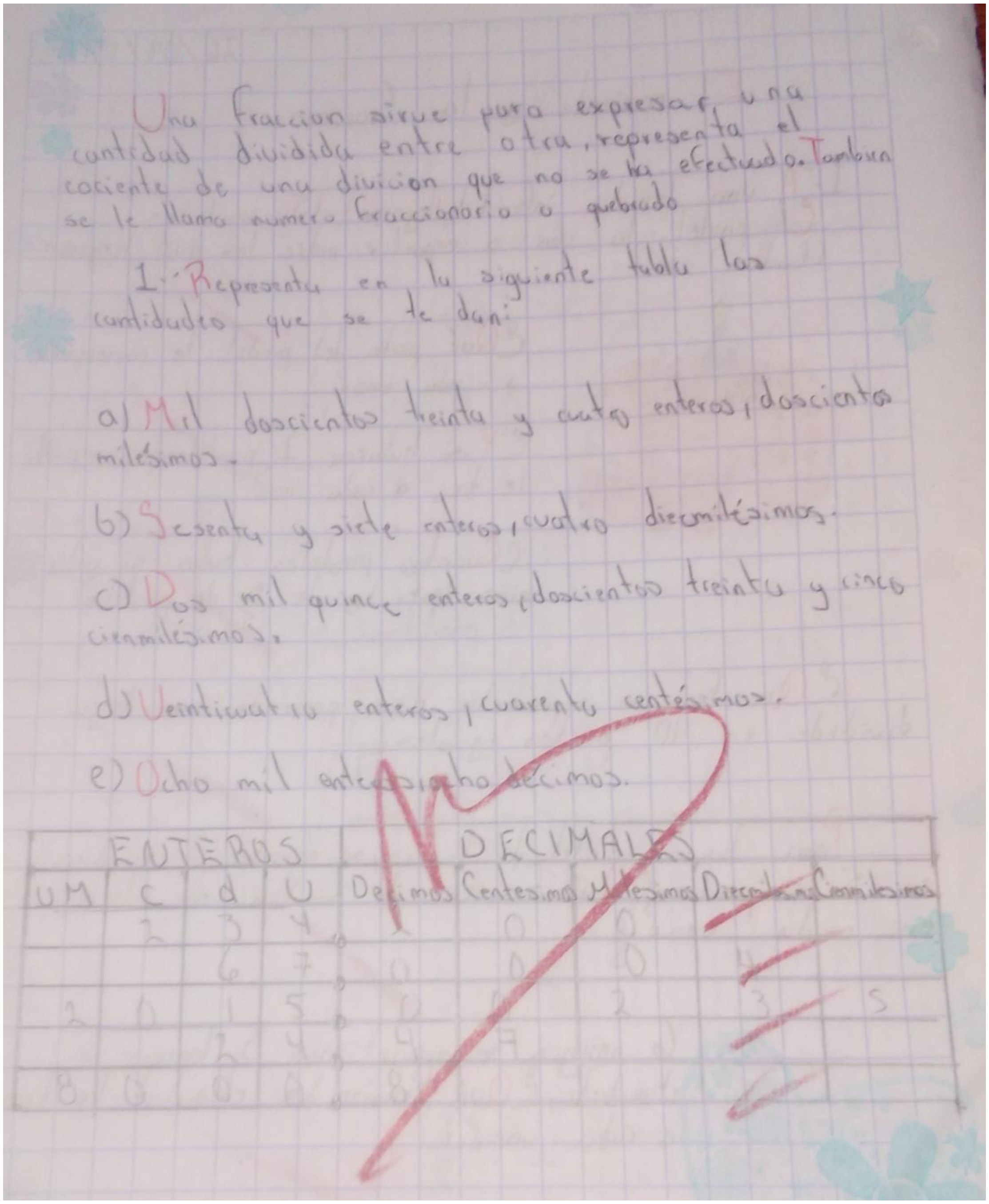
En la figura 4, se continúa con tareas alrededor de la misma praxeología matemática, pero ahora se presenta una fracción común y se pide que el alumno ubique tal fracción en una recta numérica. En seguida se solicita, mediante una pregunta, que se indique cuántos décimos hay entre dos marcas o puntos de graduación de la recta dada y, posteriormente, que se ubiquen números decimales en esa recta numérica. La tarea final pide a los estudiantes que indiquen los números que representan el punto *A* y la letra *b* en una recta numérica dividida en tercios.

El empleo de una técnica específica no se indica, se queda a criterio de los alumnos quienes probablemente bajo la orientación del maestro tendrán que definir el modo de resolver las tareas asignadas. En este sentido, no hay preguntas que inviten a la reflexión a los estudiantes para explicar el cómo resolvieron las tareas, es decir, que argumenten la técnica empleada. Por lo tanto, está ausente la tecnología, así como la teoría, pues el conjunto de tareas se encamina a que el alumno sea capaz de convertir una fracción común en un número decimal, así como poder graduar una recta numérica en segmentos que representen fracciones comunes y que, considerando esta graduación, logren ubicar también números fraccionarios en dicha recta numérica, como una habilitación en el saber hacer.

Haciendo una síntesis acerca de la praxeología que constituye la lección, se puede afirmar que, si bien existen implícitos los elementos praxeológicos en ella, no hay evidencia de una intención por generar en los estudiantes la interpretación de la técnica y la comprensión de los conceptos matemáticos implicados en el proceso de estudio. Lo anterior, no obstante que haya una técnica que se promueve y un argumento institucional que la valida, así como una teoría que aporta sentido a la tecnología.

Se observa luego de este análisis que las praxeologías matemáticas sí pueden ser un referente para el estudio de las lecciones del libro de texto de matemáticas, en este caso, se puede notar que se hallan algunos de sus diferentes componentes, sin embargo, pues el bloque práctico centraliza las acciones del proceso.

El mismo procedimiento se llevó a cabo con relación a la revisión de las libretas de trabajo de los alumnos. Como ejemplo se muestra la siguiente tarea realizada en la libreta por una alumna de sexto grado.



Una fraccion sirve para expresar una cantidad dividida entre otra, representa el cociente de una division que no se ha efectuado. Tambien se le llama numero fraccionario o quebrado

1.- Representa en la siguiente tabla las cantidades que se te dan:

a) Mil doscientos treinta y cuatro enteros, doscientos milésimos.

b) Sesenta y siete enteros, cuatro diezmilésimos.

c) Dos mil quince enteros, doscientos treinta y cinco cienmilésimos.

d) Veinticuatro enteros, cuarenta centésimos.

e) Ocho mil enteros, ocho décimos.

ENTEROS				DECIMALES				
UM	C	d	U	Decimos	Centesimos	Milesimos	Diezmilesimos	Cienmilesimos
	1	3	4	2	0	0		
		6	7	0	0	0	4	
2	0	1	5	0	0	2	3	5
		2	4	4	0			
8	0	0	0	8				

Figura 5*. Definición de fracción y tarea con expresiones decimales*

FUENTE: Libreta de sexto grado, grupo B. En alumno grupo sexto B (2013-2014). Libreta de matemáticas.

Como puede observarse en la figura 5, que corresponde a una página de una libreta de sexto grado, los alumnos anotaron una lista, pero antes hay una definición de cinco cantidades con letra en la primera mitad de la hoja. Estas cantidades corresponden a números decimales, por ejemplo, sesenta y siete enteros, cuatro diezmilésimos. En la parte inferior de la página se halla una tabla con varias columnas correspondientes a los distintos órdenes del sistema decimal de numeración. Se señala también cuál es la parte entera y la parte decimal del número.

La tarea; la tarea consiste en que los estudiantes escriban en las columnas que correspondan las cifras que componen a cada cantidad escrita “con palabras” al inicio de su hoja. Esta tarea, tal como está planteada, implica para el estudiante saber que un número decimal puede estar compuesto por una parte entera y una parte decimal estando estas separadas por el punto y que éstas están separadas por un punto. Así mismo, deberá conocer el valor relativo de cada cifra del número decimal dado, lo que le permitiría ubicar con seguridad dichas cifras en los espacios correctos de acuerdo a las potencias de diez que representen según la posición que ocupan.

El procedimiento o técnica útil para resolver la tarea es básicamente colocar los números en los cuadros que corresponden de acuerdo a su valor relativo. Se remarca el punto decimal como referencia para colocar las cifras de la parte entera y de la parte decimal. No existe una explicación de la técnica, lo que hace pensar que, o bien hay la confianza de que conozcan la técnica o bien que durante el proceso de estudio correspondiente, el director del mismo propone alguna técnica que es reproducida por los estudiantes de la que se puede advertir tan sólo una colocación basada en indicadores espaciales (no conceptuales) de las cifras de acuerdo a su posición con relación al punto decimal. Es decir, está ausente la tecnología (no se observan explicaciones del porqué de las soluciones) así como también la teoría que implícitamente se relaciona con el valor posicional de los números decimales. Esto significa que la estructura praxeológica está incompleta dándose atención en el trabajo de la libreta sólo al bloque práctico de la praxeología que se concreta a resolver la tarea con una técnica ya conocida. No obstante, puede quedarse como una interrogante, si el docente complementa mediante algún discurso algunos aspectos del bloque teórico.

4.4. El contexto de la investigación

En cuanto a la contextualización de la investigación que se presenta, cabe mencionar que el estudio fue realizado en la ciudad de Teziutlán, -lugar enclavado en la Sierra Nororiental del Estado de Puebla- que tiene una población de aproximadamente 93,000 habitantes (INEGI, 2011: 19). El clima de la zona es templado con abundantes lluvias todo el año, principalmente durante los meses de julio, agosto y septiembre, por lo que su nombre significa "lugar junto al cerro lleno de granizo"; también se le conoce con el nombre de la Perla de la Sierra.

La mayoría de la población económicamente activa (56%) se dedica a las actividades terciarias como el comercio, transportes y servicios. Una menor proporción se dedica a las actividades secundarias como la construcción y el trabajo en industrias maquiladoras de textiles. Lo anterior sin descartar al sector de la población que se dedica a las actividades primarias como la agricultura, ganadería y aprovechamiento forestal. No obstante, del total de la población (de acuerdo a los datos del INEGI (2011)) el 52% está en situación de pobreza y el 9.4% en pobreza extrema, además, el 12% de la población es indígena, aunque sólo el 5% habla la lengua náhuatl.

Para llevar a cabo la investigación, se seleccionaron cuatro escuelas primarias urbanas de organización completa del sistema federal (de cada escuela se tomó un grupo) y dos secundarias asentadas también dentro del lugar mencionado (de una secundaria se tomaron dos grupos). El criterio usado para definir las instituciones donde se llevaron a cabo las actividades de investigación, consistió sólo en que estuvieran ubicadas en contextos urbanos y que la población escolar fuera propia de esos contextos.

Se dialogó con los directivos de dichas instituciones para exponerles los objetivos del trabajo, quienes otorgaron sin dificultad la autorización para realizar las tareas de investigación. Se procedió entonces a la selección de los grupos de alumnos que participarían, para solicitar a los maestros responsables de los mismos, facilidades para realizar la revisión de las libretas.

Vale decir que, a pesar de elegirse escuelas que se ubican en la zona urbana de Teziutlán, aproximadamente un cincuenta por ciento de los estudiantes que albergan las escuelas seleccionadas para el estudio tanto en primaria como en secundaria, provienen de localidades aledañas, cuyas características no corresponden en la mayoría de los casos a las de la zona urbana. Son localidades semiurbanas y en algunos casos, comunidades rurales y/o indígenas pero que asisten a tales instituciones principalmente por el prestigio del que gozan en la región.

En el caso de las escuelas primarias, esta situación se presenta en menor proporción dado que tienen un número mayor de alumnos captados en la zona donde están ubicadas. El número de alumnos de estas escuelas está en un rango que va de quinientos a seiscientos estudiantes en cada una de las primarias donde se llevó a cabo este trabajo. En cada grupo hay entre treinta y cuarenta alumnos. Por cuanto hace a las escuelas secundarias, las dos seleccionadas tienen una matrícula de aproximadamente mil o más alumnos considerando los dos turnos en los que funcionan. En este caso los grupos tienen en promedio cuarenta alumnos.

Esta cantidad de alumnos en los grupos de las escuelas donde se llevó a cabo el trabajo que aquí se presenta, muy probablemente tiene implicaciones en la conducción de los procesos de estudio por parte de los docentes, pues puede influir en el tipo de tareas que se propongan a los estudiantes, así como en los aspectos restantes de la estructura praxeológica.

4.5. La entrevista como acercamiento a las concepciones de los docentes sobre decimales y fracciones

Como ha quedado dicho en líneas anteriores, parte de la integración del presente capítulo, consistió en describir cómo se llevó a cabo el proceso para caracterizar las praxeologías matemáticas presentes en los libros de texto y libretas de trabajo de los alumnos en relación con las fracciones y los decimales. Complementariamente fue aplicada una entrevista a los docentes que atienden a los estudiantes de los grupos participantes en el estudio, con el fin de conocer algunos aspectos relacionados con el ámbito disciplinario y elementos didácticos que ponen en juego en los procesos de estudio que dirigen para el tratamiento de las nociones matemáticas de nuestro interés.

Para llevar a cabo la entrevista, se elaboró un instrumento guía con 12 preguntas (Apéndice A) que se aplicó a 7 maestros, cuatro de los cuales atendían el sexto grado de primaria y los tres restantes eran profesores de 1° de secundaria que impartían clases en los grupos participantes, dos de los cuales pertenecían a una misma escuela.

Las entrevistas se desarrollaron en un ambiente natural, por lo regular en las aulas, en momentos de receso o después de clases. Las entrevistas se transcribieron y se ordenó la información recabada. Es de subrayarse que, a través de la entrevista, los profesores hicieron valoraciones, expresaron opiniones y aproximaciones conceptuales con las cuales se pudo complementar el análisis de las libretas y demás materiales educativos.

Las entrevistas se realizaron en horarios fuera de la jornada laboral pero dentro de las instalaciones de las instituciones. Los maestros mostraron una enorme disposición para participar en el trabajo, excepto el caso de una maestra (de secundaria), con quien sólo se pudo realizar una parte de la entrevista ya que su aplicación constaba de dos momentos. No se encontraba o la suspendía o estaba ocupada. En alguna ocasión comentó "¿No será que desea usted hacer algo como la *de panzazo?*" refiriéndose una película mexicana que cuestiona duramente al sistema educativo, en especial a los profesores. No obstante, sí se obtuvieron datos importantes en las conversaciones que sobre el cometido del trabajo se llevaron a cabo.

Cabe destacar que sólo una maestra (de primaria) de los siete docentes entrevistados, ha cursado una maestría en el ámbito educativo, el resto sólo ha participado de los cursos que la SEP ofrece a través de los Centros de Maestros que se encuentran instalados en cada una de las Regiones en que se divide la Entidad Poblana. Dos maestras sólo acreditan estudios de normal básica, una de licenciatura cursada en una Unidad de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN) y los tres maestros de secundaria tienen la licenciatura en esa área.

Hasta aquí ha quedado expuesta la metodología adoptada para el desarrollo de la presente investigación. En los capítulos siguientes se presentan los resultados del análisis de los programas de estudio y de los libros de texto gratuito. La información recogida mediante las entrevistas a los profesores será útil para complementar o apoyar lo que se afirma sobre las praxeologías identificadas en las libretas de los estudiantes.

CAPÍTULO 5. LAS FRACCIONES Y LOS DECIMALES EN LOS PROGRAMAS DE ESTUDIO Y LIBROS DE TEXTO DE 6° DE PRIMARIA Y 1° DE SECUNDARIA

El presente capítulo se divide en dos partes. En la primera parte se exponen los resultados obtenidos mediante el análisis de los programas de matemáticas de sexto grado y primero de secundaria – en lo referente a las fracciones y los números decimales – que se realizó a la luz de la noción de praxeología matemática. En la segunda parte del capítulo, se presentan los resultados del análisis de los libros de texto utilizados en los dos grados mencionados, también centrado en los números ya mencionados.

Cabe señalar que la categoría de análisis, “praxeología matemática”, adoptada en este trabajo, no se restringe a una mera interpretación del contenido sustancial de un componente curricular como puede ser un contenido del programa. Chevallard, Bosch y Gascón (1997), D’Amore y Godino (2007) establecen que una praxeología matemática, es un sistema de prácticas que una institución considera apropiadas para resolver un tipo de tareas.

Con Bosch y Gascón (2009) entendemos a la praxeología como aquella estructura posible entre actividad y conocimiento asumiendo, como afirman los autores antes citados, que desde la perspectiva antropológica, “toda práctica o saber hacer (toda praxis) aparece acompañada de un discurso de “saber” (logos) (Bosch y Gascón. 2009, 92). Sin embargo, en ocasiones parecerá que se confunde o se usa con el mismo sentido que con los términos “contenido” o “tema”, dado que estos últimos corresponden al discurso institucional.

5.1. Organización de la estructura curricular de la asignatura de matemáticas en educación básica

De acuerdo con el Plan de Estudios (SEP, 2011a: 41) de la Educación Básica -preescolar, primaria y secundaria- se establece un trayecto formativo para desarrollar competencias a fin de que, al concluir dicha educación, los estudiantes tengan la capacidad de resolver eficaz y creativamente los problemas cotidianos que enfrenten, por lo que impulsa una multiplicidad de oportunidades de aprendizaje que se articulan y distribuyen a lo largo de dichos niveles educativos y que se expresan en el mapa curricular.

Siguiendo lo que se señala en el plan de estudios, el mapa curricular de la educación básica se configura por espacios organizados en cuatro campos de formación dentro de los que se halla el de pensamiento matemático. Dentro de este campo de formación prevalece la idea de que, en la educación primaria, el estudio de la matemática implica el conocimiento y uso del lenguaje aritmético y geométrico, así como la interpretación de información y los procesos de medición. En el nivel de secundaria se atiende el tránsito del razonamiento intuitivo al deductivo, y de la búsqueda de información al análisis de los recursos que se utilizan para presentarla (SEP, 2011a: 50).

No debe ignorarse que los planes de estudio y programas vigentes establecen el desarrollo de competencias como propósito fundamental a lo largo del trayecto formativo que comprende la educación básica. En el campo formativo *Pensamiento Matemático*, se considera el desarrollo de cuatro competencias disciplinares.

Resolver problemas de manera autónoma. Implica que los alumnos sepan identificar, plantear y resolver diferentes tipos de problemas o situaciones; sean capaces de resolver un problema utilizando más de un procedimiento que puedan probar su eficacia al cambiar uno o más valores de las variables o el contexto del problema, para generalizar procedimientos de resolución.

Comunicar información matemática. Comprende la posibilidad de que los alumnos expresen, representen e interpreten información matemática contenida en una situación o en un fenómeno. Requiere que se comprendan y empleen diferentes formas de representar la información cualitativa y cuantitativa relacionada con la situación; se establezcan relaciones entre estas representaciones; se expongan con claridad las ideas matemáticas encontradas; se deduzca la información derivada de las representaciones, y se infieran propiedades, características o tendencias de la situación o del fenómeno representado.

Validar procedimientos y resultados. Consiste en que los alumnos adquieran la confianza suficiente para explicar y justificar los procedimientos y soluciones encontradas, mediante argumentos a su alcance que se orienten hacia el razonamiento deductivo y la demostración formal.

Manejar técnicas eficientemente. Se refiere al uso eficiente de procedimientos y formas de representación que hacen los alumnos al efectuar cálculos, con o sin apoyo de calculadora. Muchas veces el manejo eficiente o deficiente de técnicas establece la diferencia entre quienes resuelven los problemas de manera óptima y quienes alcanzan una solución incompleta o incorrecta. Esta competencia no se limita a usar mecánicamente las operaciones aritméticas; apunta principalmente al desarrollo del significado y uso de los números y de las operaciones, que se manifiesta en la capacidad de elegir adecuadamente la o las operaciones al resolver un problema; en la utilización del cálculo mental y la estimación, en el empleo de procedimientos abreviados o atajos a partir de las operaciones que se requieren en un problema, y en evaluar la pertinencia de los resultados. Para lograr el manejo eficiente de una técnica es necesario que los alumnos la sometan a prueba en muchos problemas distintos. Así adquirirán confianza en ella y la podrán adaptar a nuevos problemas. (SEP, 2011b: 71)

En este sentido, la articulación curricular de la educación básica define una continuidad más clara en su gradualidad entre los grados y niveles de preescolar, primaria y secundaria con relación al trabajo de las asignaturas que conforman los diferentes campos formativos. Con relación al campo de pensamiento matemático se definen propósitos generales para toda la educación básica al igual que para las otras asignaturas, también se establecen propósitos por niveles que son más específicos; en seguida se citan los que tienen relación con las fracciones y con los números decimales.

5.1.1. Propósitos y esquema curricular de los programas de Matemáticas para la educación primaria y secundaria.

5.1.1.1. Propósitos del estudio de las Matemáticas para la educación primaria.

En esta fase de su educación, como resultado del estudio de las Matemáticas, se espera que los alumnos:

Conozcan y usen las propiedades del sistema decimal de numeración para interpretar o comunicar cantidades en distintas formas. Expliquen las similitudes y diferencias entre las propiedades del sistema decimal de numeración y las de otros sistemas, tanto posicionales como no posicionales.

Utilicen el cálculo mental, la estimación de resultados o las operaciones escritas con números naturales, así como la suma y resta con números fraccionarios y decimales para resolver problemas aditivos y multiplicativos". (SEP, 2011b: 62)

5.1.1.2. Propósitos del estudio de las Matemáticas para la educación secundaria.

En esta fase de su educación, como resultado del estudio de las Matemáticas, se espera que los alumnos:

> Utilicen el cálculo mental, la estimación de resultados o las operaciones escritas con números enteros, fraccionarios o decimales, para resolver problemas aditivos y multiplicativos.

Identifiquen conjuntos de cantidades que varían o no proporcionalmente, y calculen valores faltantes y porcentajes utilizando números naturales y fraccionarios como factores de proporcionalidad.

Calculen la probabilidad de experimentos aleatorios simples, mutuamente excluyentes e independientes. (SEP, 2011d: 14)

Son estos programas de estudio introducidos en 2011 los que se encuentran vigentes en todo el país. En particular, los programas de estudio de la asignatura de matemáticas para la educación primaria y secundaria tienen las características generales que se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 1 Esquema curricular de la asignatura de matemáticas.

PROGRAMA 2011 PRIMARIA	PROGRAMA 2011 SECUNDARIA
ENFOQUE	
Se pretende desarrollar una formación matemática a través del estudio de las matemáticas, y la utilización de secuencias de situaciones problemáticas que despierten el interés de los alumnos y los inviten a reflexionar, a encontrar diferentes formas de resolver los problemas y a formular argumentos que validen los resultados. Al mismo tiempo, las situaciones planteadas deberán implicar justamente los conocimientos y habilidades que se quieren desarrollar	"El planteamiento central en cuanto a la metodología didáctica que se sugiere para el estudio de las Matemáticas, consiste en utilizar secuencias de situaciones problemáticas que despierten el interés de los alumnos y los inviten a reflexionar, a encontrar diferentes formas de resolver los problemas y a formular argumentos que validen los resultados. Al mismo tiempo, las situaciones planteadas deberán implicar justamente los conocimientos y las habilidades que se quieren desarrollar". Con el enfoque didáctico que se sugiere se logra que los alumnos construyan conocimientos y habilidades con sentido y significado de tal forma que se

	pueda convertir a la clase en un espacio social de construcción de conocimiento. (SEP, 2011d: 19 - 22) .
PROPOSITOS	
Se identifican y precisan los 3 propósitos para educación básica. Se especifican solo 7 propósitos para primaria, los cuales se precisan con mayor exactitud y se elimina el correspondiente a los principios básicos de probabilidad.	Se establecen 3 propósitos para educación básica. Se especifican 8 propósitos para la educación secundaria. Además, se agrega el correspondiente al cálculo de probabilidad de experimentos aleatorios. (SEP, 2011d: 14)
	ESTANDARES CURRICULARES
Se organizan en: 1. Sentido numérico y pensamiento algebraico 2. Forma, espacio y medida 3. Manejo de la información 4. Actitud hacia el estudio de las matemáticas	El conjunto de aprendizajes (estándares) que se espera de los alumnos, se organizan en torno a: 1. Sentido numérico y pensamiento algebraico. 2. Forma, espacio y medida. 3. Manejo de la información. 4. Actitud hacia el estudio de las matemáticas. Asimismo, se define la progresión de los mismos en relación a tres aspectos. (SEP, 2011d: 15)
	COMPETENCIAS DE LA ASIGNATURA
Se definen 4 competencias: Resolver problemas de manera autónoma. Comunicar información matemática. Validar procedimientos y resultados.	Se definen 4 competencias: Resolver problemas de manera autónoma. Comunicar información matemática. Validar procedimientos y resultados. Manejar técnicas eficientemente.

Manejar técnicas eficientemente.	(SEP, 2011d: 23).
	ORGANIZACIÓN DEL PROGRAMA
Se organiza en 5 bloques de estudio, en los que se integran temas y contenidos organizados en 3 ejes temáticos: Sentido numérico y pensamiento algebraico. Forma, espacio y medida. Manejo de la información. Cada bloque identifica: Competencias Aprendizajes esperados Eje Tema Contenidos	El Plan de Estudios 2011 menciona que "la asignatura de Matemáticas se organiza para su estudio en tres niveles. El primero corresponde a los ejes, el segundo a los temas y el tercero a los contenidos. Para primaria y secundaria se consideran tres ejes, que son: Sentido numérico y pensamiento algebraico, Forma, espacio y medida, y Manejo de la información". Los temas y contenidos se organizan en cinco bloques secuenciales, identificándose en cada uno de estos: Competencias Aprendizajes esperados Eje Tema Contenidos (SEP, 2011d: 25 – 27).
	MODALIDAD DE TRABAJO
Se sugiere el trabajo por secuencias didácticas problemáticas.	Se sugiere el trabajo por secuencias didácticas problemáticas donde sea posible realizar actividades que impliquen un estudio inter ejes con la finalidad de generar una visión global de las matemáticas. (SEP, 2011d: 27 y 77).

Nota: Se muestra lo que el programa de matemáticas de cada grado establece.

Como se habrá observado, en la propuesta curricular (tabla 1) se incluyen los llamados estándares, los cuales constituyen un elemento que se incorpora en la Reforma Educativa de 2011 y expresan lo que los alumnos deben saber y ser capaces de hacer en cuatro etapas escolares: al concluir el preescolar, al finalizar el tercer grado de primaria, al término de la primaria (sexto grado), y al concluir la educación secundaria. Lo anterior, según las autoridades educativas, se plantea con la finalidad de alcanzar el nivel tres en las pruebas Pisa, lo cual será posible, desde mi punto de vista, cuando los estudiantes logren lo siguiente en relación a las matemáticas, esto de acuerdo a lo que:

> • Llevar a cabo procedimientos de forma clara, incluyendo aquellos que requieren decisiones secuenciadas
> • Seleccionar y aplicar estrategias de solución de problemas simples.
> • Interpretar y utilizar representaciones basadas en diferentes fuentes de información.
> • Elaborar escritos breves exponiendo sus interpretaciones, resultados y razonamientos. (INEE, 2008: 35)

En cuanto a los Estándares Curriculares de Matemáticas, desde el contenido del programa, presentan la visión de una población que sabe utilizar los conocimientos matemáticos. También, incluyen el conjunto de aprendizajes que se espera de los alumnos en los cuatro periodos escolares para conducirlos a altos niveles de alfabetización matemática.

Su progresión, desde la perspectiva de esta propuesta curricular, debe entenderse como:

> Transitar del lenguaje cotidiano a un lenguaje matemático para explicar procedimientos y resultados.
> Ampliar y profundizar los conocimientos, de manera que se favorezca la comprensión y el uso eficiente de las herramientas matemáticas.

> Avanzar desde el requerimiento de ayuda al resolver problemas hacia el trabajo autónomo. (SEP, 2011b; 63)

Los estándares se convirtieron, con los programas de 2011, en los elementos a considerar para valorar el avance en la construcción de las habilidades y los conocimientos matemáticos de cada alumno.

En el Programa de Estudios de secundaria (SEP, 2011b), se argumenta también que los contenidos de matemáticas se organizan por ejes toda vez que éstos se refieren, entre otras cosas, a la dirección o rumbo de una acción, lo que se puede notar en las tablas (2,3,4,5 y 6) que se encuentran en las páginas siguientes.

Por otra parte, el documento oficial que contiene los Programas de Estudio de sexto grado de educación primaria, en la sección correspondiente a la asignatura de matemáticas, establece en relación a la organización curricular lo siguiente:

De cada uno de los ejes se desprenden varios temas, y para cada uno de éstos hay una secuencia de contenidos que van de menor a mayor dificultad. Los temas son grandes ideas matemáticas cuyo estudio requiere un desglose más fino (los contenidos), y varios grados o incluso niveles de escolaridad. En el caso de la educación primaria se consideran ocho temas, con la salvedad de que no todos se inician en primer grado y la mayoría continúa en el nivel de secundaria. Dichos temas son: Números y sistemas de numeración, Problemas aditivos, Problemas multiplicativos, Figuras y cuerpos, Ubicación espacial, Medida, Proporcionalidad y funciones, y Análisis y representación de datos (SEP, 2011b: 74).

Como se puede observar, los primeros tres temas que se mencionan en la cita anterior corresponden al Eje “Sentido numérico y pensamiento algebraico”. Ahora bien, en cuanto a los contenidos, el Programa en cita refiere:

Los contenidos son aspectos muy concretos que se desprenden de los temas, cuyo estudio requiere entre dos y cinco sesiones de clase. El tiempo de estudio hace referencia a la fase de reflexión, análisis, aplicación y construcción del conocimiento en cuestión, pero hay un tiempo más largo en el que dicho conocimiento se usa, se relaciona con otros conocimientos y se consolida para constituirse en saber o saber hacer. (Ídem)

Los contenidos se distribuyen además en cinco bloques que se designan para su estudio durante el ciclo escolar, tal como establece el programa de estudios de matemáticas de sexto grado de educación primaria en la cita siguiente:

A lo largo de los cinco bloques que comprende cada programa, los contenidos se organizaron de manera que los alumnos vayan accediendo a ideas y recursos matemáticos cada vez más complejos, a la vez que puedan relacionar lo que ya saben con lo que están por aprender (SEP, 2011b: 75).

El contenido de la cita anterior hace notar la continuidad y progresión en las praxeologías por revisarse en las clases de matemáticas a lo largo del periodo de estudio anual. Esta organización es pertinente pues permite a los estudiantes conocer paulatinamente con mayor sentido las implicaciones en el estudio de esas praxeologías matemáticas, vistas desde este trabajo de investigación a partir del enfoque de la TAD.

5.2. Distribución de praxeologías por eje curricular

Con base en la categoría de praxeología matemática[13], se tiene lo que sigue:

[13]Praxeologías matemáticas en el sentido de que implican un saber y un hacer como se ha descrito en los dos capítulos anteriores.

Número de praxeologías contenidas en cada eje curricular del programa de matemáticas sexto grado de primaria

Tabla 2

Número de praxeologías contenidas en cada eje curricular.

BLOQUE	NÚMERO Y % DE PRAXEOLOGÍAS (contenidos) POR EJE CURRICULAR					
	SENTIDO NUMÉRICO		FORMA, ESPACIO Y MEDIDA	MANEJO DE LA INFORMACIÓN		TOTAL DE CONTENIDOS
I	3		3	2		8
II	2		1	2		5
III	2		3	2		7
IV	3		3	1		7
V	3		1	1		5
%	13	**40.6%**	11	8	**25%**	32
PROMEDIO			**34.4%**			100%

Nota: Información basada en el Programa de matemáticas 6° grado (SEP. 2011b)

En esta tabla (tabla 2), aparece el número total de praxeologías para 6° de primaria, las cuales implican diferentes tipos de tareas. Las praxeologías se presentan por Eje, con el porcentaje correspondiente en función del total de los tipos de tareas contabilizados en los cinco bloques que componen el Programa de Estudios (pp: 76-79). Al leer los datos de la tabla, se puede señalar lo siguiente:

En el eje “Sentido numérico y pensamiento algebraico” hay una mayor cantidad de praxeologías matemáticas que en los ejes restantes (40.6%).

En el eje “Forma, espacio y medida” se agrupa la tercera parte de las praxeologías matemáticas del programa de matemáticas de sexto grado de primaria.

En lo relativo al eje “Manejo de la información (M.I.)” se hallan sólo la cuarta parte de las praxeologías matemáticas de la asignatura.

En particular, y para el análisis que más adelante se hace del eje Sentido Numérico y pensamiento algebraico, es necesario hacer notar que, de las trece praxeologías agrupadas en dicho eje, nueve de ellas abordan cuestiones específicas relacionadas con los números decimales y las fracciones, lo que representa casi el 70% de las praxeologías matemáticas contenidas en este eje, y a la vez el 28% de toda la malla curricular del programa de matemáticas de sexto grado de primaria. Esto significa que casi una de cada tres praxeologías matemáticas que se estudian en ese grado escolar está relacionada con las fracciones o con los números decimales. De igual forma, en el eje Manejo de la información se detecta una praxeología relacionada con las fracciones y los números decimales.

5.3. Las fracciones y los decimales en el programa de estudios

En el programa oficial, se presenta también la distribución de las praxeologias que aplican un tipo de tareas, correspondientes a los números decimales, a las fracciones y a la relación entre ambos en los cinco bloques que integran el programa de estudio de matemáticas parta sexto grado de educación primaria (SEP, 2011B: 76-79), donde se observa lo siguiente

Tabla 3

Distribución de tipos de tareas sobre fracciones y decimales.

BLOQUE	UBICACIÓN TEMÁTICA* DE TIPOS DE TAREAS, EJE: SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO (*conforme a los 3 temas generales que plantea el Programa de estudios 2011 de 6°)			
	NÚMEROS Y SISTEMAS DE NUMERACIÓN	PROBLEMAS ADITIVOS	PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS	EJE: M.I.
I	Lectura, escritura y	Resolución de	Resolución de	

	comparación de números naturales, fraccionarios y decimales. Explicitación de los criterios de comparación.	problemas aditivos con números naturales, decimales y fraccionarios, variando la estructura de los problemas.	problemas multiplicativos con valores fraccionarios o decimales mediante procedimientos no formales.	
II	Ubicación de fracciones y decimales en la recta numérica en situaciones diversas.			
III	Identificación de una fracción o un decimal entre dos fracciones o decimales dados (Propiedad de densidad).			
IV	Conversión de fracciones decimales a escritura decimal y viceversa. Aproximación de algunas fracciones no decimales usando la notación decimal. Identificación y aplicación de la regularidad de sucesiones con números (naturales, fraccionarios o decimales) que tengan progresión aritmética o geométrica.		Resolución de problemas que impliquen calcular una fracción de un número natural, usando la expresión "*a*/*b* de *n*".	Expresión del valor de la razón mediante un número de veces, una fracción o un porcentaje.
V			Resolución de problemas que impliquen una división de número fraccionario o decimal entre un número natural.	

Nota: Información basada en el Programa de matemáticas 6° grado (SEP. 2011b).

Como se observa en la tabla 3, se presenta una mayor carga de tipos de tareas (6) en el tema “Números y Sistemas de numeración”, en seguida el relativo a “Problemas multiplicativos” (3) y con una atención menor se halla el Tema “Problemas aditivos” (1) que se menciona sólo en el primer bloque. Así mismo, en el eje Manejo de la Información, se tiene un tipo de tareas en el cuarto bloque relacionado con la expresión de una razón.

En los párrafos anteriores se hizo alusión a la organización general de los contenidos implícitos en las praxeologías matemáticas correspondientes en el nivel de primaria; la siguiente cita corresponde a lo que el Programa de Matemáticas del nivel de secundaria establece en cuanto a esa organización:

> De cada uno de los ejes se desprenden varios temas y para cada uno hay una secuencia de contenidos que van de menor a mayor dificultad. Los temas son grandes ideas matemáticas cuyo estudio requiere un desglose más fino (los contenidos), y varios grados o incluso niveles de escolaridad. En el caso de la educación secundaria se consideran nueve temas, y la mayoría inicia desde la educación primaria. Dichos temas son: Números y sistemas de numeración, Problemas aditivos, Problemas multiplicativos, Patrones y ecuaciones, Figuras y cuerpos, Medida, Proporcionalidad y funciones, Nociones de probabilidad, y Análisis y representación de datos. (SEP, 2011d: 26)

Como puede observarse en la cita anterior, el programa contiene elementos similares al de educación primaria con algunas variaciones en cuanto a los temas generales. Obviamente, las praxeologías matemáticas se diversifican e incrementan en nivel de complejidad, como parte del proceso de estudio de la materia.

Para observar de manera esquemática la distribución de las praxeologías matemáticas en ambos niveles educativos, en la tabla siguiente se ejemplifican de acuerdo a los programas de 6° de primaria y 1° de secundaria; esto con el afán de identificar de manera general las praxeologías matemáticas que oficialmente se consideran necesarias en la formación de los estudiantes de los grados antes mencionados. Cabe mencionar que en los programas de estudio de matemáticas de educación básica no se usa el término de praxeología, sin embargo, la malla curricular organizada en tres niveles de desglose (ejes, temas y contenidos) pueden ajustarse a la gradualidad de las praxeologías matemáticas, llamadas también organizaciones matemáticas (regionales, locales y puntuales), identificables dado que en cada una de ellas se encuentran presentes los elementos de la estructura praxeológica (tarea, técnica, tecnología y teoría). Más adelante nos centraremos en las que implican los números decimales y las fracciones:

Tabla 4

Distribución de praxeologías matemáticas en los programas oficiales.

EJE	**6° PRIMARIA**	**1°SECUNDARIA**
Sentido numérico y pensamiento algebraico.	-Números y sistemas de numeración. -Problemas aditivos. -Problemas multiplicativos. 13 Tipos de tareas (41%)	-Números y sistemas de numeración. -Problemas aditivos. -Problemas multiplicativos. -Patrones y ecuaciones. 17 Tipos de tareas (46%)
Forma, espacio y medida.	-Figuras y cuerpos. - Ubicación espacial. -Medida. 11 Tipos de tareas (34%)	-Figuras y cuerpos. -Medida. 9 Tipos de tareas (24%)
Tratamiento de la información.	-Proporcionalidad y funciones. -Análisis y representación de datos. 8 tipos de tareas (25%)	-Proporcionalidad y funciones. -Nociones de probabilidad. -Análisis y representación de datos. 11 Tipos de tareas (30%)
TOTAL:	**8 PRAXEOLOGÍAS. 32 tipos de tareas (SEP, 2011b: 76-79)**	**9 PRAXEOLOGÍAS. 37 Tipos de tareas (SEP, 2011d: 32-36)**

Nota: Por cada praxeología matemática hay 2 o más tipos de tareas.

De acuerdo con la tabla anterior, en el Programa de matemáticas de secundaria, en el eje “Sentido numérico y pensamiento algebraico”, tres de las cuatro praxeologías matemáticas se hallan también en el Programa de la misma asignatura en 6° grado de primaria, excepto la relacionada con “Patrones y ecuaciones”. Asimismo, en el eje “Forma, espacio y medida” en secundaria se omite la praxeología matemática “educación espacial” que se estudió a lo largo de la educación primaria. También puede verse que en el eje “Tratamiento de la información” se agrega la praxeología matemática “Nociones de probabilidad” en el nivel de secundaria.

Hay que destacar también de la tabla precedente, que la atención a cada uno de los ejes en los que se distribuyen los temas y los contenidos en el nivel de primaria está un tanto equilibrada al menos en el sexto grado. Sin embargo, en cierta proporción sobresale el eje “Sentido numérico y pensamiento algebraico” por su carga de praxeologías matemáticas y tipos de tareas; le sigue el eje “Forma, espacio y medida” y finalmente el eje “Tratamiento de la información”.

Por otra parte, en el programa de primer grado de secundaria se acentúa la diferencia en el tratamiento de los ejes de estudio de la asignatura de matemáticas pues en el eje “Sentido numérico y pensamiento algebraico” se encuentran casi la mitad de las praxeologías matemáticas que se ven en dicha asignatura. En seguida se encuentra el eje “Tratamiento de la información” y al final el eje “Forma, espacio y medida”, lo que representa una diferencia con relación a la distribución de las praxeologías matemáticas que se observan en sexto grado de primaria.

Para acotar y adentrarse específicamente en el estudio de las praxeologías matemáticas vinculadas a las fracciones y a los números decimales, es necesario pormenorizar la integración del eje “Sentido numérico y pensamiento algebraico” en términos de praxeologías y tipos de tareas para conocer la atención que se presta al trabajo con las praxeologías referidas.

Tabla 5

Distribución de tipos de tareas en 1° de secundaria.

EJE: SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO			
BLOQUE	TIPOS DE TAREAS EN LAS PRAXEOLOGÍAS		
	Números y sistemas de numeración[14]	**Problemas aditivos**	**Problemas multiplicativos**
I	• Conversión de fracciones decimales y no decimales a su escritura decimal y viceversa[15]. • Representación de números fraccionarios y decimales en la recta numérica a partir de distintas informaciones, analizando las convenciones de esta representación.	• Resolución y planteamiento de problemas que impliquen más de una operación de suma y resta de fracciones.	
II		Resolución de problemas aditivos en los que se combinan números fraccionarios y decimales en distintos contextos, empleando los algoritmos convencionales.	• Resolución de problemas que impliquen la multiplicación y división con números fraccionarios en distintos contextos, utilizando los algoritmos usuales.
III			• Resolución de problemas que impliquen

[14] Los encabezados de cada una de las tres columnas refieren a praxeologías.

[15] Constituyen tipos de tareas que a su vez contienen praxeologías de menor jerarquización.

			la multiplicación de números decimales en distintos contextos, utilizando el algoritmo convencional. • Resolución de problemas que impliquen la división de números decimales en distintos contextos, utilizando el algoritmo convencional.
IV	• Planteamiento y resolución de problemas que impliquen la utilización de números enteros, fraccionarios o decimales positivos y negativos.		
TOTAL	3	2	3

De la información contenida en las tablas 4 y 5, un dato que sale a la luz es que de los 17 tipos de tareas que forman parte del eje sentido numérico y pensamiento algebraico, ocho son los que tratan aspectos relacionados con las fracciones y con los números decimales, es decir, un poco menos de la mitad (47%). En el conjunto de tipos de tareas del curso, ocho de 37, constituyen casi la quinta parte de ellos (21.6%). Estos datos expresan de alguna forma la importancia que tiene el tema en la formación matemática de los estudiantes de primero de secundaria.

Resulta asimismo que seis de los ocho tipos de tareas que tratan los temas en comento (fracciones y números decimales) indican un trabajo centrado en la resolución de problemas con números fraccionarios o decimales, sean aditivos o multiplicativos. En el mismo sentido, los programas de la asignatura de matemáticas de todos los grados, incluidos los de primaria y secundaria, establecen lo siguiente como enfoque didáctico:

> El planteamiento central en cuanto a la metodología didáctica que se sugiere para el estudio de las Matemáticas consiste en utilizar secuencias de situaciones problemáticas que despierten el interés de los alumnos y los inviten a reflexionar, a encontrar diferentes formas de resolver los problemas y a formular argumentos que validen los resultados. Al mismo tiempo, las situaciones planteadas deberán implicar justamente los conocimientos y habilidades que se quieren desarrollar. (SEP, 2011d: 67)

Sin embargo, este planteamiento no es nuevo, ya Ávila (2004) lo refiere con respecto al enfoque de la Reforma Educativa de 1993: “las matemáticas que se pretende llevar a las aulas habrán de permitir que los alumnos construyan los conocimientos mediante la resolución de problemas y actividades que despierten su interés” (Ávila, 2004: 70); lo que desde el enfoque de la TAD corresponde a tipos de tareas y tareas que impliquen a los estudiantes al grado de que estos sean capaces de generar técnicas de resolución y su correspondiente discurso tecnológico.

Queda claro pues, que la orientación del enfoque de enseñanza subyacente en la propuesta curricular de 2011 retoma del de la Reforma anterior (1993) el aspecto relativo a la resolución de problemas. Sólo se sustituye el término de problemas por el de situaciones problemáticas.

Veremos en seguida, desde la TAD, las praxeologías matemáticas y tipos de tareas implicados en los aprendizajes esperados (de acuerdo a los términos usados en el Programa de estudio correspondiente) que se proponen para trabajarse con los alumnos de sexto de primaria y primero de secundaria.

5.3.1. Praxeologías matemáticas locales sobre fracciones y decimales en los programas de 6° de primaria.

Tabla 6

Praxeologías matemáticas locales: fracciones y decimales.

BLOQUE	PROGRAMA 2011 PRIMARIA (APRENDIZAJES ESPERADOS)	PRAXEOLOGÍAS MATEMÁTICAS[16]
I	• Resuelve problemas que impliquen leer, escribir y comparar números naturales, fraccionarios y decimales, explicitando los criterios de comparación. • Resuelve problemas aditivos con números naturales, decimales y fraccionarios que implican dos o más transformaciones	Números y sistemas de numeración [a] • Lectura, escritura y comparación de números naturales, fraccionarios y decimales. Explicitación de los criterios de comparación [b]. Problemas aditivos • Resolución de problemas aditivos con números naturales, decimales y fraccionarios, variando la estructura de los problemas. Estudio o reafirmación de los algoritmos convencionales. Problemas multiplicativos • Resolución de problemas multiplicativos con valores fraccionarios o decimales mediante procedimientos no formales.
II	Calcula porcentajes e	Números y sistemas

[16] Con negrita se indican praxeologías regionales y se desagregan en praxeologías locales.

	identifica distintas formas de representación (fracción común, decimal, %)	de numeración • Ubicación de fracciones y decimales en la recta numérica en situaciones diversas. Por ejemplo, se quieren representar medios y la unidad está dividida en sextos, la unidad no está establecida, etcétera.
III		Números y sistemas de numeración • Identificación de una fracción o un decimal entre dos fracciones o decimales dados. Acercamiento a la propiedad de densidad de los racionales, en contraste con los números naturales.
IV		. Números y sistemas de numeración • Conversión de fracciones decimales a escritura decimal y viceversa. Aproximación de algunas fracciones no decimales usando la notación decimal. • Identificación y aplicación de la regularidad de sucesiones con números (naturales, fraccionarios o decimales) que tengan progresión aritmética o geométrica, así como sucesiones

		especiales. Construcción de sucesiones a partir de la regularidad. Problemas multiplicativos • Resolución de problemas Que impliquen calcular una fracción de un número natural, usando la expresión “a/b de n”.
V	Resuelve problemas que implican multiplicar o dividir números fraccionarios o decimales por números naturales. • Resuelve problemas que implican comparar dos o más razones.	Números y sistemas de numeración • Determinación de divisores o múltiplos comunes a varios números. Identificación, en casos sencillos, del mínimo común múltiplo y máximo común divisor. • Identificación y aplicación de la regularidad de sucesiones con figuras, que tengan progresión aritmética o geométrica, así como sucesiones especiales. Problemas multiplicativos • Resolución de problemas que impliquen una división de número fraccionario o decimal entre un número natural. (SEP, 2011b: 76-79)

Notas: [a] Praxeologías Regionales.

[b] Praxeologías locales.

5.3.2. Praxeologías matemáticas sobre fracciones y decimales en los programas de 1° de secundaria Praxeologías matemáticas: Fracciones y decimales en 1º de secundaria.

Tabla 7

Praxeologías matemáticas: Fracciones y decimales en 1º de secundaria

BLOQUE	PROGRAMA 2011 SECUNDARIA (APRENDIZAJES ESPERADOS)	PRAXEOLOGÍAS MATEMÁTICAS
I	. • Convierte números fraccionarios a decimales y viceversa. • Conoce y utiliza las convenciones para representar números fraccionarios y decimales en la recta numérica	**Números y sistemas de numeración [a].** • Conversión de fracciones decimales y no decimales a su escritura decimal y viceversa.[b] • Representación de números fraccionarios y decimales en la recta numérica a partir de distintas informaciones, analizando las convenciones de esta representación. **Problemas aditivos** • Resolución y planteamiento de problemas que impliquen más de una operación de suma y resta de fracciones.
II	.	**Problemas multiplicativos** • Resolución de problemas que impliquen la multiplicación y división con números fraccionarios en distintos contextos, utilizando los algoritmos usuales.
III	Resuelve problemas que implican efectuar multiplicaciones o	**Problemas multiplicativos** • Resolución de problemas que impliquen

	divisiones con fracciones y números decimales. • Resuelve problemas que impliquen el uso de ecuaciones de las formas: x + a = b; ax = b y ax + b = c, donde a, b y c son números naturales y/o decimales.	la multiplicación de números decimales en distintos contextos, utilizando el algoritmo convencional. • Resolución de problemas que impliquen la división de números decimales en distintos contextos, utilizando el algoritmo convencional. **Patrones y ecuaciones** • Resolución de problemas que impliquen el planteamiento y la resolución de ecuaciones de primer grado de la forma x + a = b; ax = b; ax + b = c, utilizando las propiedades de la igualdad, con a, b y c números naturales, decimales o fraccionarios.
IV		**Números y sistemas de numeración** • Planteamiento y resolución de problemas que impliquen la utilización de números enteros, fraccionarios o decimales positivos y negativos.
V	• Resuelve problemas aditivos que implican el uso de números enteros, fraccionarios o decimales positivos y negativos. • Resuelve problemas que impliquen el cálculo de la raíz cuadrada y potencias de números naturales y decimales. • Resuelve	Problemas multiplicativos • Resolución de problemas que impliquen el cálculo de la raíz cuadrada (diferentes métodos) y la potencia de exponente natural de números naturales y decimales.

	problemas de proporcionalidad directa del tipo "valor faltante", en los que la razón interna o externa es un número fraccionario.	

Notas: [a] Praxeologías Regionales.

[b] Praxeologías locales.

La propuesta de contenidos curriculares incluidos en los Programas de Estudio 2011 de matemáticas para sexto de primaria y primero secundaria, vista desde la noción de praxeología u organización matemática, se trata de un documento que define una serie de organizaciones matemáticas que van desde aquellas más específicas considerándose como praxeologías puntuales, como por ejemplo, *suma de fracciones*[17]; así como algunas de carácter más complejo como las praxeologías locales, tal como *situaciones problemáticas de tipo aditivo que implican a las fracciones y a los números decimales*, y las aún más generales como las praxeologías regionales que de acuerdo al programa de estudios sería *números y sistemas de numeración*. Lo anterior toda vez que se establece una serie de tareas y tipos de tareas implicados en cada uno de los temas y de los aprendizajes esperados. Por otra parte, se establecen para cada uno de esos aprendizajes esperados al menos un procedimiento canónico, mismo que desde la estructura praxeológica corresponde a la técnica.

En relación a la tecnología, los programas referidos señalan al respecto de los procedimientos a aplicarse para el estudio de las nociones matemáticas incluidas en la malla curricular, lo siguiente:

> El conocimiento de reglas, algoritmos, fórmulas y definiciones sólo es importante en la medida en que los alumnos lo puedan usar hábilmente para solucionar problemas y que lo puedan reconstruir en caso de olvido; de ahí que su

[17] Estas praxeologías matemáticas se abordan de manera particular en las lecciones de los libros de texto correspondientes.

> construcción amerite procesos de estudio más o menos largos, que van de lo informal a lo convencional. (SEP, 2011b: 68)

Se define entonces que la pertinencia en el uso de una técnica específica la naturaleza del tipo de tareas que se realicen y su explicación correspondiente toma sentido toda vez que al final sirva para alcanzar la resolución de un problema.

Sobre el siguiente elemento del bloque teórico de toda organización matemática, la teoría, y en el punto especial de la organización matemática regional (OMR), Bosh et al (2004) señalan que ésta se obtiene mediante la coordinación, articulación y posterior integración de diversas organizaciones matemáticas locales (OML) alrededor de una teoría matemática común. Agregan los autores que "la reconstrucción institucional de una teoría matemática requiere elaborar un lenguaje común que permita describir, interpretar, relacionar, justificar y producir las diferentes tecnologías de las OML que integran la OMR" (Bosch *et al.*, 2004: 213).

En los programas de los grados antes citados, se requiere que en los procesos de estudio se genere un ambiente de trabajo que brinde a los alumnos la oportunidad de "aprender a enfrentar diferentes tipos de problemas, a formular argumentos, a usar distintas técnicas en función del problema que se trata de resolver, y a aprovechar el lenguaje matemático para comunicar e interpretar sus ideas" (SEP, 2011b:70). Si se mira desde la TAD, se destaca la importancia de generar procesos de estudio que motiven la completitud de la estructura praxeológica a fin de que con los estudiantes no se omita la definición del bloque teórico correspondiente.

5.4. Libros de texto de 6° grado 2011, un análisis desde la TAD

En páginas anteriores se ha descrito la organización curricular de los programas de matemáticas de educación básica bajo el modelo definido en la implementación de la RIEB. Se hizo notar que los saberes a enseñar se agrupan en ejes, temas y contenidos. Estos saberes se presentan a los alumnos para su estudio en los libros de texto de matemáticas 2011, los cuales en sexto grado contienen las siguientes lecciones distribuidas en cuatro bloques:

5.4.1. Bloque I.

Aprendizajes esperados: Usa fracciones para representar cocientes[18].

Lecciones:

Lección 2 P. 12 -14 *El cociente y la fracción.*

Se indica que los alumnos completen tablas donde se establece el trabajo con la noción de cociente entre dos magnitudes distintas, lo cual implica la realización de repartos equitativos, asimismo se retoman los conceptos de dividendo y divisor además se cuestiona a los alumnos sobre el significado y la utilidad de una fracción.

Lección 3 pág. 15- 18. *Ordeno números después del punto.*

Se pide al alumno ordenar números decimales y ubicar puntos en la recta numérica. También se trabaja la representación de números decimales mediante fracciones decimales y complementación de tablas cuyas columnas corresponden al valor posicional de las cifras.

Lección. 10 pág. 39-40. *La información en los porcentajes.*

Cálculo de porcentajes de acuerdo a las cantidades que se muestran en alguna tabla. Calcular la cantidad que representa un descuento con base en un porcentaje.

5.4.2 Bloque II.

[18] Esta expresión implica una praxeología matemática local.

Aprendizajes esperados: Lee, escribe y compara números naturales y decimales. Conoce el valor de sus cifras en función de su posición.

Lección 12 *Unidades, miles y milésimos*, pág. 49-50.

Se presentan ejercicios donde el alumno tiene que utilizar la noción de valor posicional. Con esta intención se pide que, dado un número entero o decimal, escriban uno menor cambiando de lugar, dentro de la misma cantidad, una de las cifras que constituyan el número.

Lección 13 *¿En dónde quedan las fracciones y los decimales?* Pp. 50-53.

Se solicita a los alumnos que escriban con expresiones decimales las fracciones que se les presentan y en seguida que las ordenen de mayor a menor. Posteriormente se pide a los alumnos que localicen algunos puntos identificados con números decimales y otros identificados mediante fracciones. En seguida se requiere que el alumno indique el número o los números correspondientes a puntos señalados en rectas numéricas. También se pide el uso de fracciones decimales para expresar números decimales.

Lección 18 *¿Qué información hay en las etiquetas?* Pp. 66-68.

Se presentan algunos problemas que implican el manejo de números decimales y porcentajes. Se centran en la elaboración de preguntas y comparación de cantidades.

Lección 19 *¿Cuál es la constante de proporcionalidad?* Pp. 69-71

Son problemas de proporcionalidad que implican el manejo de números decimales y fracciones para complementar y calcular datos faltantes. Se enfoca la actividad a que se identifique el procedimiento para obtener la constante de proporcionalidad.

5.4.3 Bloque III.

Aprendizajes esperados: El alumno calcula porcentajes y los identifica en distintas expresiones (n de cada 100, fracción, decimal).

Lección 23 *Ordeno fracciones y decimales*. Pp. 87-90

Se pide a los alumnos que comparen fracciones y números decimales, también se pide que se localicen fracciones en la recta numérica y posteriormente se solicita que las comparen entre sí. Se solicita también que se halle un número decimal entre un par de ellos (propiedad de densidad).

Lección 29 *Pagué sólo la mitad o 50% de su precio total.*

Se solicita que se expresen porcentajes en fracción decimal y se usen los números decimales para expresar porcentajes.

5.4.4 Bloque IV.

Aprendizajes esperados: Ordena, encuadra, compara y convierte números fraccionarios y decimales.

Lección 32 *De decimales a fracciones*. Pp 126- 128.

Se presenta la escritura, en palabras, de diferentes cantidades para expresarse en números decimales y también se pide que los alumnos localicen en la recta numérica cantidades expresadas en números decimales y en fracciones; también que expresen de manera fraccionaria números decimales y viceversa.

5.4.5 Bloque V.

Aprendizajes esperados. Utiliza las propiedades de la proporcionalidad para resolver problemas con diferentes unidades de medida.

Lección 40 *El producto es más pequeño*. Pp. 158-161.

Se presentan tablas de proporcionalidad que implican el uso de números decimales y de fracciones. La atención no se centra en ellos pero sí se requiere como conocimiento previo el manejar la equivalencia de fracciones y números decimales.

Como ha podido notarse, los libros de texto incluyen praxeologías matemáticas que pueden agruparse en tres tipos, aquellas que se vinculan directamente con las fracciones, otras que se relacionan con los números decimales y otro más con situaciones que implican praxeologías con los dos contenidos. Se advierte también que con relación a las fracciones éstas se presentan en situaciones de cociente, así como en aquellas que implican comparación y ubicación en la recta numérica. Esto último se trabaja de igual forma con los números decimales, pero se agregan praxeologías relacionadas con la propiedad de densidad y orden de tales números.

Con el fin de analizar las praxeologías relacionadas con las fracciones y los números decimales incluidas en los libros de texto, se considerarán los elementos que constituyen esa categoría de análisis:

a) Las tareas que se proponen;
b) La técnica o técnicas utilizadas o promovidas para la realización de las tareas;
c) La tecnología, es decir, la explicación o justificación de las técnicas;
d) La teoría, que es la justificación de esa explicación.

Es necesario reiterar lo planteado en el capítulo cuatro respecto de los criterios de selección de las lecciones de los libros de texto en sexto grado que se analizan: se seleccionaron considerando el contenido matemático que tratan. Una trata específicamente las fracciones, otra aborda los números decimales y una más vincula ambos saberes matemáticos.

5.5. El análisis de lecciones del libro de texto de 6° de primaria

5.5.1. Lección 2 de 6° grado de primaria.

Se analiza en primer término la Lección 2, titulada “El cociente y la fracción” (pp. 12-14 del Bloque I del libro de texto gratuito de matemáticas 6° grado (Figuras 6 y 7 que se hallan en las dos páginas siguientes).

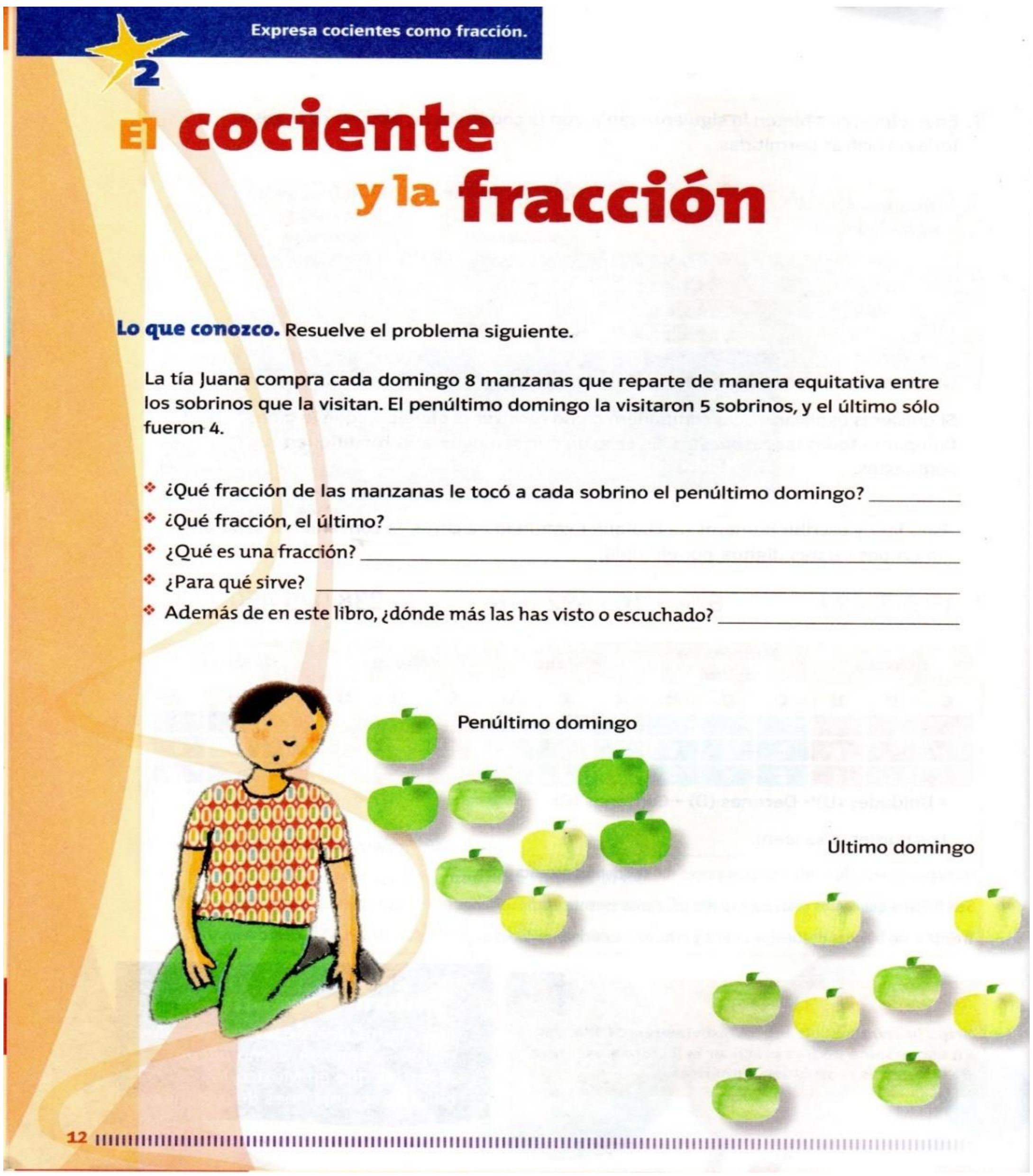
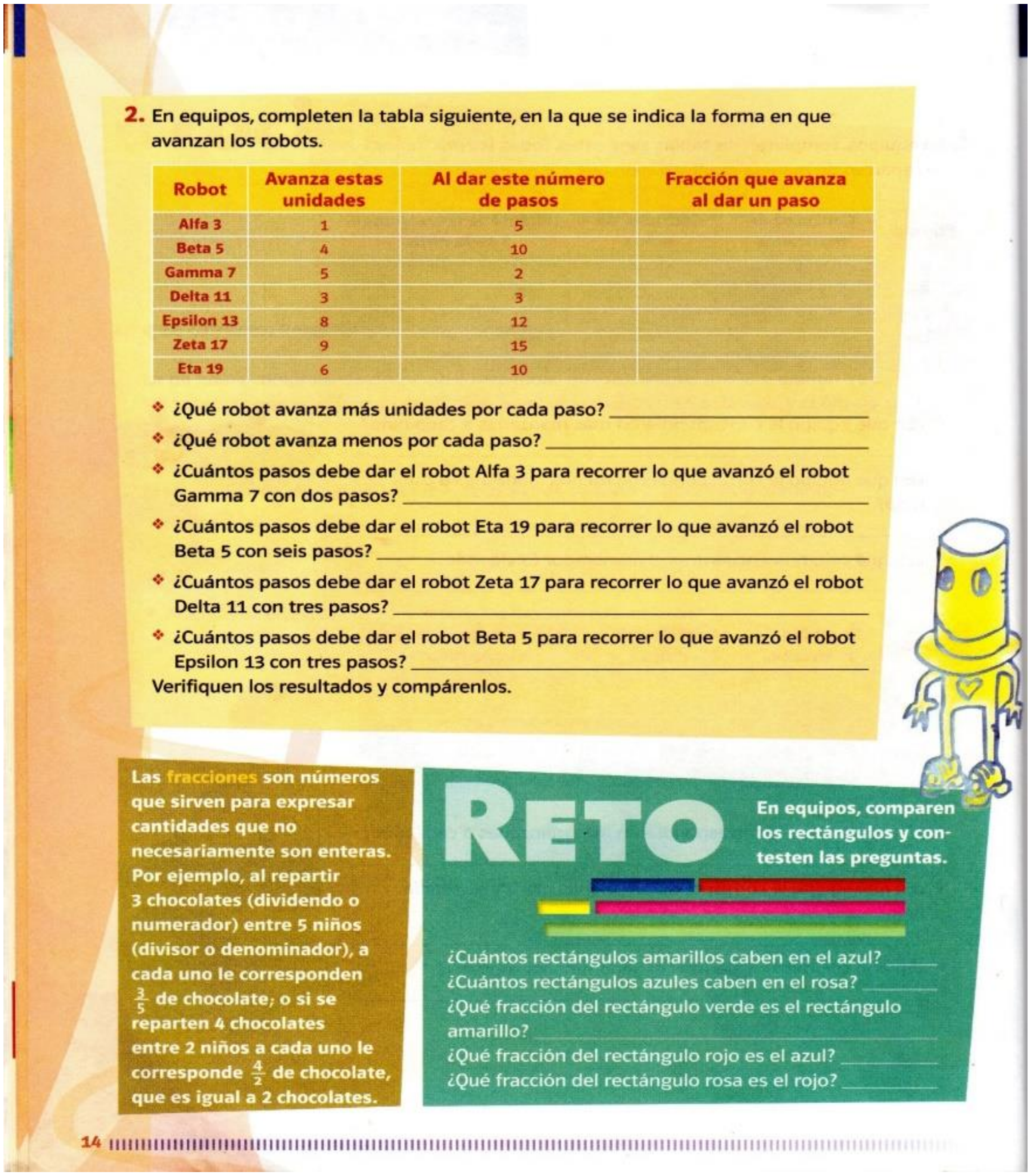


Figura 6. Lección 2. Se pretende que los alumnos expresen cocientes como fracción.
Fuente: Libro de sexto grado. P. 12. En SEP (2011). Matemáticas. Sexto grado. México.



2. En equipos, completen la tabla siguiente, en la que se indica la forma en que avanzan los robots.

Robot	Avanza estas unidades	Al dar este número de pasos	Fracción que avanza al dar un paso
Alfa 3	1	5	
Beta 5	4	10	
Gamma 7	5	2	
Delta 11	3	3	
Epsilon 13	8	12	
Zeta 17	9	15	
Eta 19	6	10	

- ¿Qué robot avanza más unidades por cada paso? ______
- ¿Qué robot avanza menos por cada paso? ______
- ¿Cuántos pasos debe dar el robot Alfa 3 para recorrer lo que avanzó el robot Gamma 7 con dos pasos? ______
- ¿Cuántos pasos debe dar el robot Eta 19 para recorrer lo que avanzó el robot Beta 5 con seis pasos? ______
- ¿Cuántos pasos debe dar el robot Zeta 17 para recorrer lo que avanzó el robot Delta 11 con tres pasos? ______
- ¿Cuántos pasos debe dar el robot Beta 5 para recorrer lo que avanzó el robot Epsilon 13 con tres pasos? ______

Verifiquen los resultados y compárenlos.

Las **fracciones** son números que sirven para expresar cantidades que no necesariamente son enteras. Por ejemplo, al repartir 3 chocolates (dividendo o numerador) entre 5 niños (divisor o denominador), a cada uno le corresponden $\frac{3}{5}$ de chocolate; o si se reparten 4 chocolates entre 2 niños a cada uno le corresponde $\frac{4}{2}$ de chocolate, que es igual a 2 chocolates.

RETO

En equipos, comparen los rectángulos y contesten las preguntas.

¿Cuántos rectángulos amarillos caben en el azul? ______
¿Cuántos rectángulos azules caben en el rosa? ______
¿Qué fracción del rectángulo verde es el rectángulo amarillo? ______
¿Qué fracción del rectángulo rojo es el azul? ______
¿Qué fracción del rectángulo rosa es el rojo? ______

14

Figura 7. Lección 2. Tareas donde los alumnos obtienen fracciones como cociente.
Fuente: Libro de sexto grado. P. 13. En SEP (2011). Matemáticas. Sexto grado. México.

Las tareas y las técnicas. El conjunto de tareas planteadas implica repartir en forma equitativa una cantidad determinada de objetos entre otros de naturaleza distinta (en este caso manzanas y niños) lo que se repite en las siguientes tareas que se proponen. La resolución de estas tareas implica que los estudiantes determinen un procedimiento (una técnica) y que incorporen los conocimientos previos que tengan sobre tareas de reparto, a los cuales se agregará sin duda las ayudas que el docente proporcione. La técnica no está especificada, pero en las primeras tareas, por los dibujos de niños y manzanas que aparecen, se induce a representar gráficamente el reparto de las manzanas entre los niños en las dos situaciones.

Una tarea similar, aunque sin el apoyo de dibujos, es la que se promueve en el resto de los ejercicios: se trata de repartir las manzanas entre los niños, pero con el fin de llenar unas tablas cuya información – en columnas – orientará a formar fracciones resultantes de los repartos (véanse ejercicios 1 y 2 de la Figura 7 en la página anterior).

La tecnología y la teoría. En estas tareas parece incorporarse un ligero asomo de tecnología, mediante la pregunta: "¿en qué columna encuentras el denominador?", que llama a una cierta reflexión sobre el papel que juega en la situación el número de niños entre los que se repartieron las manzanas.

Ahora bien, se destaca por otra parte que, en la primera de las cuatro tareas que contiene la lección, se incorporan algunos cuestionamientos que me parece desvían la atención de la tarea y la técnica previstas. Por una parte, se le pide al estudiante la respuesta a una tarea que implica reparto de objetos y, por otra parte, se le cuestiona sobre *"¿Qué es una fracción, para qué sirve y dónde más la han visto o escuchado?*". Esta pregunta orienta hacia la tecnología y la teoría, pero no a la tecnología y la teoría derivadas directamente de la tarea que se está tratando (repartos equitativos entre dos magnitudes donde una de estas magnitudes puede referir a personas), sino a ideas más generales sobre las fracciones.

Cabe mencionar que la lección contiene muy pocas imágenes vinculadas a las fracciones, pero que éstas tienen la finalidad de ilustrar parte de la situación problemática que se plantea en cada caso, por ejemplo:

1. En equipos, completen las tablas siguientes. Todas las manzanas se reparten de manera equitativa, sin que sobre alguna.

Equipo	Cantidad de manzanas	Cantidad de niños	¿Cuánto le corresponde a cada niño?
A	1	5	
B	2	5	
C	3	5	
D	4	5	
E	5	5	

- ¿En qué equipo le correspondieron más manzanas a cada niño?
  ____
- ¿En qué equipo le correspondieron menos manzanas a cada niño?
  ____
- ¿En qué columna encuentras el numerador (dividendo)?
  ____

Equipo	Cantidad de manzanas	Cantidad de niños	¿Cuánto le corresponde a cada niño?
F	7	3	
G	7	4	
H	7	5	
I	7	6	
J	7	7	

- ¿En qué equipo le correspondieron más manzanas a cada niño?
  ____
- ¿En qué equipo le correspondieron menos manzanas a cada niño?
  ____
- ¿En qué columna encuentras el denominador (divisor)?
  ____

Figura 8. Lección 2. Tareas con fracciones y su definición.
Fuente: Libro de sexto grado. P. 14. En SEP (2011). Matemáticas. Sexto grado. México.

Las tareas que se venían describiendo en el párrafo anterior, de acuerdo a la experiencia que comparten los docentes entrevistados durante la investigación, no logran que la mayoría de los alumnos deduzcan las técnicas que emplean hasta llegar a darle el sentido al uso de la fracción como cociente. Los alumnos, según dicen la mayoría de los maestros consultados, para resolver las tareas se apoyan por lo regular en procedimientos gráficos que no alcanzan a conectar con una expresión fraccionaria.

Dada esta situación, los maestros se sienten obligados a conducir más estrictamente las acciones de los niños, a proponer la técnica que simplifica o deja de lado las producciones gráficas de los estudiantes, también a aplicar la noción de cociente expresada a través de una fracción, la cual ya aparece en la lección en comento.

El tránsito de la técnica realizada en el nivel gráfico hacia el uso comprensivo de expresiones del tipo *a/b* representa un logro importante. Pero este logro se obtiene sólo en una minoría de los alumnos (según pueden observarse en las libretas de trabajo revisadas de cuyo contenido se hablará más adelante tomando como base una muestra de ellas), los que sí advierten el sentido del uso de las expresiones fraccionarias como técnica principal en la resolución de las tareas de reparto, noción implicada en las restantes. Estas tareas, por otra parte, y sin que sea la intención original, se convierten en una serie de ejercicios que favorecen la mecanización de técnicas con un sentido netamente algorítmico pero que institucionalmente gozan de reconocimiento, es lo que se podría denominar, el momento de la técnica.

Bajo estas consideraciones, ese discurso racional sobre la técnica que Chevallard (1999) denomina *Tecnología θ y que puede entenderse como* el conjunto de explicaciones que subyacen en la aplicación de las técnicas, no aparece. Es decir, en este caso, las técnicas propuestas en los libros de texto no tienen argumentación suficiente, por lo que probablemente los alumnos se concretan a reproducir una técnica canónica que institucionalmente se reconoce y emplea.

La Tecnología (θ) entonces no se incorpora, no se exige una explicación de las técnicas en virtud de que la única utilizada se reconoce como válida desde el ámbito de la acción docente en las escuelas. La técnica se asume como el "así se hace". El saber ubicar los datos que corresponderían al dividendo y al divisor en una expresión fraccionaria (según se solicita posteriormente en la lección) es suficiente según el procedimiento propuesto en la lección para considerarse que el conocimiento previsto se alcanzó. No es que ésta técnica no tenga sentido, sino que en el proceso de comprensión del procedimiento de reparto propuesto como tarea, es necesario ahondar en la simplificación de la técnica gráfica empleada. Esto porque es el punto donde la mayoría de los estudiantes le asignan a la técnica un sentido simplemente canónico, sin justificación pues esta seguramente ha sido proporcionada por el libro páginas atrás o quizás por el docente.

Así las cosas, la *Teoría (Θ)*, definida por Chevallard (1999) como la tecnología de la tecnología se expresa en la lección que se revisa en la breve sección de "datos interesantes" (Figura 8) forma parte del contenido de dicha lección. En esta sección se establece:

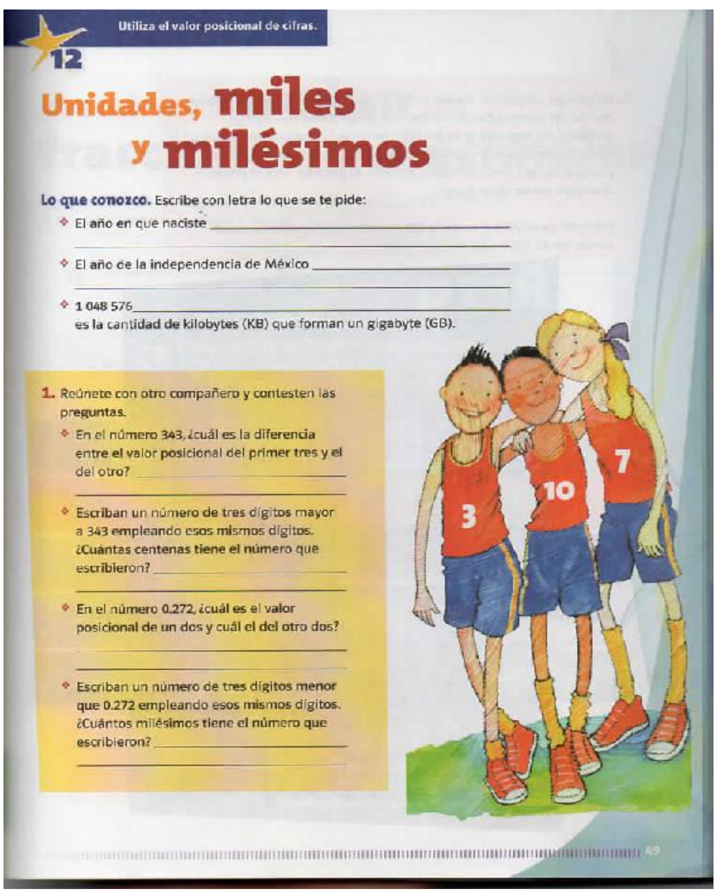
> Las fracciones son números que sirven para expresar cantidades que no necesariamente son enteras. Por ejemplo, al repartir 3 chocolates (dividendo o numerador) entre 5 niños (divisor o denominador), a cada uno le corresponden 3/5 de chocolate. . . (SEP, 2011c: 14)

La "teoría" se expone para sustentar el empleo de una técnica canónica que subyace como procedimiento formal en el cuerpo de la lección. Resalta también la complejidad que representa el tener que ver los números de una expresión fraccionaria de dos maneras distintas: como elementos de una división y a la vez como componentes indisolubles de una fracción. Lo cual corresponde a la teoría de números, pues ésta se encarga del estudio relativo a las características y propiedades de los números. Pero todo esto no se incluye en la lección.

Si como dice Chevallard (1997, en Aguayo, 2004), en una praxeología se debe reconocer la presencia de un saber, y toda acción procede de un saber, esto permite entender que las acciones implicadas en el bloque “técnico-práctico” se supeditan al bloque del “saber” para integrar una praxeología matemática. Estas praxeologías en el ámbito del saber (plasmado en los libros escolares) tienen una estructura y un sentido definido, pero no necesariamente es así en el ámbito del “saber enseñado”, es decir, en lo que se realiza en las aulas y se registra en los diferentes materiales de trabajo, como los son las libretas de los alumnos, puede transformarse e incluso perder su naturaleza original.

5.5.2. Lección 12 de 6° grado de primaria.

La lección 12 “Unidades, miles y milésimos”, pp. 49-50, correspondiente al Bloque II del libro de texto gratuito de 6° grado de primaria también se analizó (Figuras 9 y 10). En este caso, las tareas que se plantean se encaminan al logro del aprendizaje siguiente: *que los alumnos lean, escriban y comparen números naturales y decimales. Conozcan el valor de sus cifras en función de su posición*.


Utiliza el valor posicional de cifras.

12

Unidades, miles y milésimos

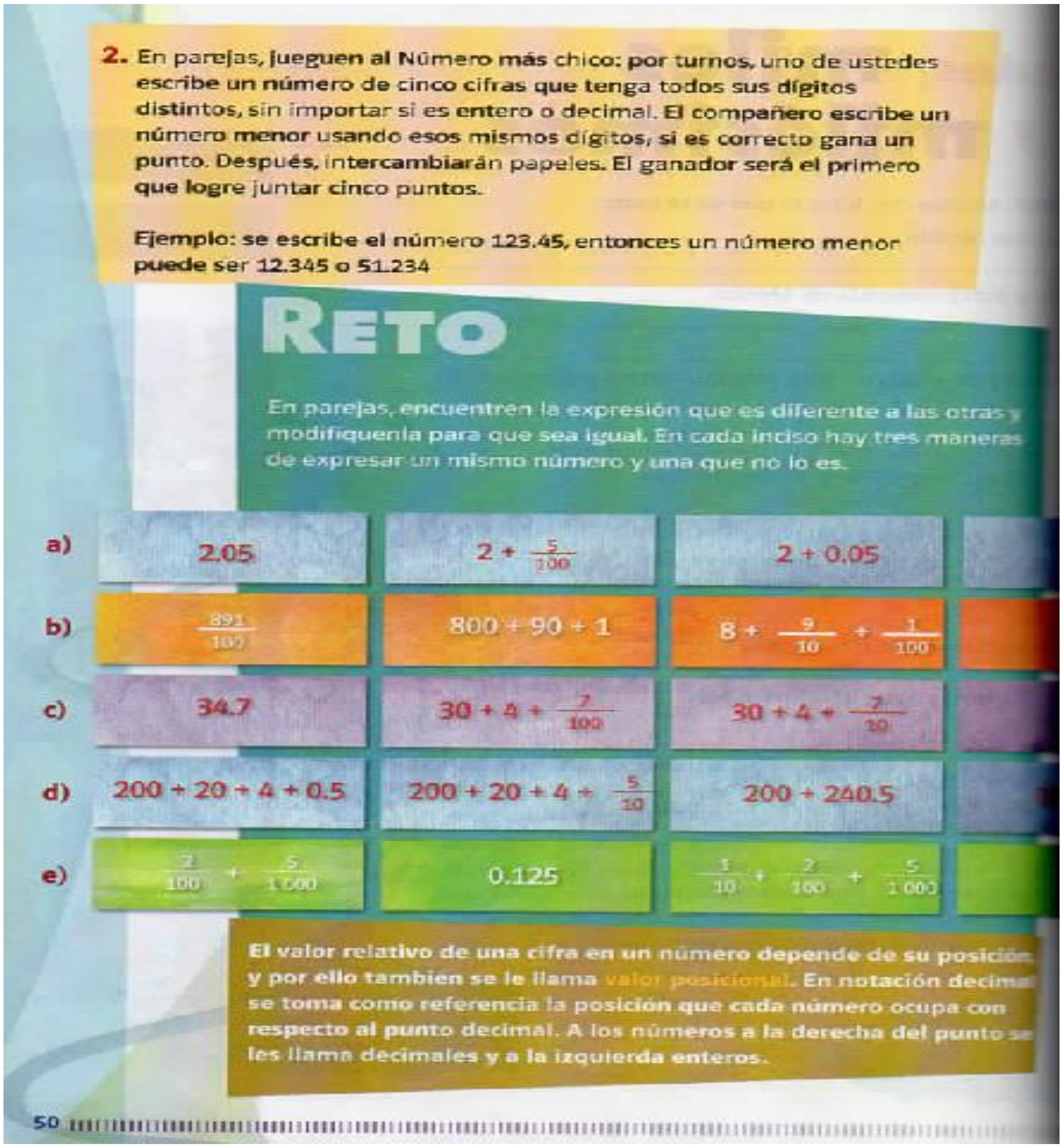
Lo que conozco. Escribe con letra lo que se te pide:

- El año en que naciste ____________________
- El año de la independencia de México ____________________
- 1 048 576 ____________________ es la cantidad de kilobytes (KB) que forman un gigabyte (GB).

1. Reúnete con otro compañero y contesten las preguntas.
   - En el número 343, ¿cuál es la diferencia entre el valor posicional del primer tres y el del otro? ____________________
   - Escriban un número de tres dígitos mayor a 343 empleando esos mismos dígitos. ¿Cuántas centenas tiene el número que escribieron? ____________________
   - En el número 0.272, ¿cuál es el valor posicional de un dos y cuál el del otro dos? ____________________
   - Escriban un número de tres dígitos menor que 0.272 empleando esos mismos dígitos. ¿Cuántos milésimos tiene el número que escribieron? ____________________

49

Figura 9. Lección 12. Se busca que el alumno utilice el valor posicional de cifras.
Fuente: Libro de sexto grado. P. 49. En SEP (2011). Matemáticas. Sexto grado. México.



2. En parejas, jueguen al Número más chico: por turnos, uno de ustedes escribe un número de cinco cifras que tenga todos sus dígitos distintos, sin importar si es entero o decimal. El compañero escribe un número menor usando esos mismos dígitos, si es correcto gana un punto. Después, intercambiarán papeles. El ganador será el primero que logre juntar cinco puntos.

Ejemplo: se escribe el número 123.45, entonces un número menor puede ser 12.345 o 51.234

RETO

En parejas, encuentren la expresión que es diferente a las otras y modifiquenla para que sea igual. En cada inciso hay tres maneras de expresar un mismo número y una que no lo es.

a)	2.05	$2 + \frac{5}{100}$	$2 + 0.05$
b)	$\frac{891}{100}$	$800 + 90 + 1$	$8 + \frac{9}{10} + \frac{1}{100}$
c)	34.7	$30 + 4 + \frac{7}{100}$	$30 + 4 + \frac{7}{10}$
d)	$200 + 20 + 4 + 0.5$	$200 + 20 + 4 + \frac{5}{10}$	$200 + 240.5$
e)	$\frac{2}{100} + \frac{5}{1\,000}$	0.125	$\frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1\,000}$

El valor relativo de una cifra en un número depende de su posición y por ello también se le llama valor posicional. En notación decimal se toma como referencia la posición que cada número ocupa con respecto al punto decimal. A los números a la derecha del punto se les llama decimales y a la izquierda enteros.

50

Figura 10. Lección 12. Tareas que implican adiciones con fracciones y decimales.
Fuente: Libro de sexto grado. P. 50. En SEP (2011). Matemáticas. Sexto grado. México.

Las tareas y las técnicas. Como se puede apreciar, en primer término se observa un tipo de tareas que solicita definir el valor posicional de algunas cifras (enteras o decímales). El mismo título de la lección da cuenta de este manejo: “Unidades, miles y milésimos”. Así, los tipos de tareas que se incluyen en esta lección se agrupan bajo la consigna de determinar el valor posicional de cifras de números enteros o decimales.

La primera parte de la lección consta de cuatro tareas, la tarea uno pregunta sobre el valor posicional que tiene el número tres y que se repite en dos posiciones distintas en una cantidad formada por números naturales. Se espera que los alumnos determinen la diferencia entre el valor del tres ubicado en dos posiciones distintas. Posteriormente la tarea consiste en formar una cantidad mayor con los dígitos utilizados en la tarea anterior.

La tarea que se plantea a continuación sigue el mismo patrón que las dos anteriores, sólo que en lugar de proponer una cantidad con números naturales se presenta una cantidad decimal (0.272). Ahora los estudiantes deben expresar el valor posicional de los números dos. En seguida, habrán de utilizar los dígitos de dicho número para formar una cantidad menor que la ya representada.

En el siguiente bloque de la lección sólo se presenta una tarea que propone realizar en parejas un juego que consiste en lo siguiente: uno de los estudiantes organizados en pares, por turnos, escribe una cantidad formada por cinco dígitos diferentes incluyendo el punto decimal; el otro estudiante debe escribir una cantidad menor a la propuesta por su compañero. Si es correcta la respuesta, se gana un punto, luego se invierten los roles y quien complete primero cinco puntos se declara ganador. Este tipo de tareas alude al orden entre los números decimales y su tecnología (procedimiento) y el discurso teórico es la propiedad de densidad.

La lección finalmente contiene un reto, éste implica una tarea en la cual se requiere que los estudiantes en pareja identifiquen en un conjunto de decimales expresados de manera distinta, la expresión que no sea correcta.

En relación a las técnicas, es decir, a la manera de proceder para elaborar las respuestas a las tareas propuestas, los estudiantes deben recuperar, con apoyo del docente, sus conocimientos previos sobre el valor posicional tanto de números enteros como de números decimales. La técnica o procedimiento o secuencia de pasos realizados para resolver una situación problemática, es simplemente recuperar esa noción y aplicarla al dar respuesta a las tareas de los primeros dos bloques de la lección que en los párrafos anteriores se describieron. La tercera tarea (el juego), también se propone para trabajarse en parejas, consiste en escribir por turnos un número de cinco cifras diferentes, sea este entero o decimal; en su turno, el siguiente jugador deberá formar con esas cifras un número menor que puede incluir el uso del punto decimal.

La técnica, como en la tarea anterior, sigue implicando la aplicación del conocimiento sobre el valor posicional pero en esta última se incorpora la relación de orden entre los números decimales. No obstante, con sólo esas indicaciones la técnica no se induce ni se bosqueja dentro de la consigna, pero no es difícil imaginarse a un estudiante trazando una tabla con los valores posicionales que les ha asignado a los números decimales escritos utilizando punto decimal. La técnica finalmente implica formar diferentes cantidades con cinco cifras distintas entre los que hay que colocar el punto decimal a fin de escribir números decimales cuyo valor absoluto sea menor cada vez, entendiendo por valor absoluto la distancia de un punto A al origen considerando que se esté refiriendo la ubicación de dicho punto en la recta real.

La tercera tarea implica establecer la correspondencia entre fracciones que se escriben con denominador que es potencia de diez y números que contienen punto decimal, específicamente se propone que los alumnos, también por parejas, localicen la que es diferente al resto entre cuatro expresiones. Se requiere del estudiante, al igual que en las tareas anteriores, conocimientos sobre la equivalencia entre fracciones con denominador potencia de diez y expresiones que contienen punto decimal para detectar la que no encaja en la serie propuesta. Esta tarea exige del alumno un manejo ágil de la noción de equivalencia porque debe saber en principio que un decimal se puede representar de diversas maneras. Es decir, la técnica lleva a los alumnos a establecer la equivalencia de las diferentes expresiones que pueden representar a un número decimal.

La tecnología y la técnica. La tecnología en los tres conjuntos de tareas que componen la lección en estudio, no se encuentra explícitamente presente debido a que la técnica utilizada implica sólo una recuperación de aspectos particulares de la praxeología matemática donde tiene que realizarse una comparación del valor posicional de cifras que forman números decimales.

Esta comparación se hace con base en un proceder previamente adquirido: la técnica, que con la conducción didáctica del maestro construyeron él y sus alumnos. La explicación de los procedimientos utilizados por los alumnos estará en función de las experiencias que éstos tengan con relación al estudio de las praxeologías matemáticas vinculadas al conocimiento de las propiedades de orden y el valor posicional de los números decimales. El estudiante no puede omitir la explicación tecnológica que haga de sus respectivas técnicas de resolución de las tareas antes mencionadas, al menos nociones sobre las propiedades referidas de los números decimales lo que, como se argumentó en capítulos anteriores, resulta ser un conocimiento cuya adquisición es complicada.

La teoría incluida en la lección, que se presenta para entender el valor posicional de las cifras que componen a los números decimales implícitos en la lección que se revisa, se establece en los siguientes términos:

> El valor relativo de una cifra en un número depende de su posición, y por ello también se le llama valor posicional. En notación decimal se toma como referencia la posición que cada número ocupa con respecto al punto decimal. A los números a la derecha del punto se les llama decimales y a la izquierda enteros. (SEP, 2011c: 50)

A la cita anterior, misma que se halla en la figura 10, es necesario hacerle una anotación crítica por su falta de rigor conceptual. La crítica con el fin de dejar claro que en un número decimal (en su expresión que utiliza punto) a la parte numérica que se halla a la izquierda del punto se la llama parte entera, así como a los números que están a la derecha suele llamársele “parte fraccionaria”, siendo que al número decimal lo constituyen ambas partes.

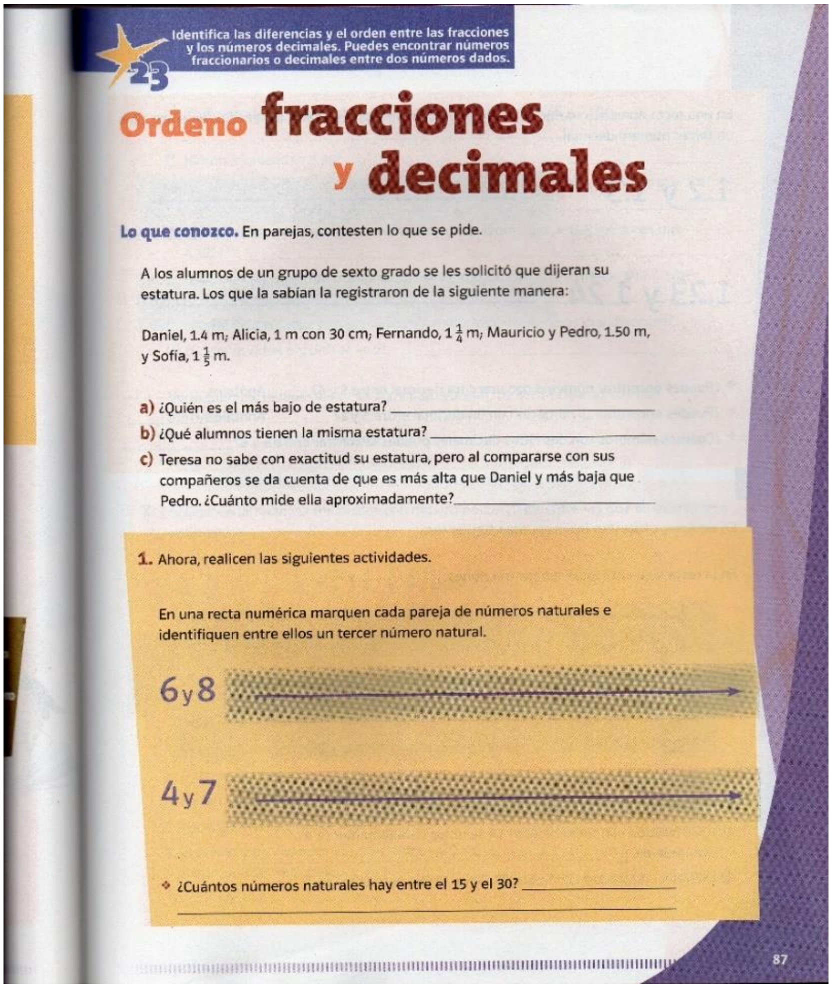
La cita y la aclaración anterior es parte de la teoría que valida la tecnología implicada en estas tareas. Sin embargo, en el caso de la lección que se revisa, puede apreciarse que la teoría no se explicita, subyace sólo como directriz de las tareas y al plantearse éstas se hace evidente la necesaria recuperación de nociones fundamentales en el estudio de los números decimales como la propiedad de orden, la equivalencia y el valor posicional de las cifras.

Desde el enfoque de este trabajo, la técnica y la tecnología no se perciben en la lección, son elementos ausentes en el caso de esta praxeología matemática, lo que la hace incompleta en su estructura. Probablemente se delega en el saber del docente la acción didáctica que ha de conducir con éxito o con limitaciones el proceso de la elección de la técnica (procedimiento) y la argumentación de la técnica empleada (tecnología) por los estudiantes, causa por la cual no se observa en esta lección.

Como se observa, se incluyen en la lección los cuatro elementos de la praxeología matemática, pero todos con serias limitaciones para el trabajo pedagógico que realizan los docentes y más aún para un trabajo autónomo de los alumnos.

5.5.3 Lección 23 de 6° grado de primaria.

También se revisó la lección 23 “Ordeno fracciones y decimales”, (pp. 87-90), correspondiente al Bloque III (Figuras 11, 12, 13 y 14 que se muestran en las páginas siguientes). En esta lección, las tareas que se plantean se encaminan al logro del aprendizaje siguiente: [*El alumno] Identifica las diferencias y el orden entre las fracciones y los números decimales.* Este aprendizaje se relaciona con una praxeología matemática relativa a la relación de orden y la propiedad de densidad de los números fraccionarios y de los decimales.



Identifica las diferencias y el orden entre las fracciones y los números decimales. Puedes encontrar números fraccionarios o decimales entre dos números dados.

23

Ordeno **fracciones y decimales**

Lo que conozco. En parejas, contesten lo que se pide.

A los alumnos de un grupo de sexto grado se les solicitó que dijeran su estatura. Los que la sabían la registraron de la siguiente manera:

Daniel, 1.4 m; Alicia, 1 m con 30 cm; Fernando, $1\frac{1}{4}$ m; Mauricio y Pedro, 1.50 m, y Sofía, $1\frac{1}{5}$ m.

a) ¿Quién es el más bajo de estatura? __________

b) ¿Qué alumnos tienen la misma estatura? __________

c) Teresa no sabe con exactitud su estatura, pero al compararse con sus compañeros se da cuenta de que es más alta que Daniel y más baja que Pedro. ¿Cuánto mide ella aproximadamente? __________

1. Ahora, realicen las siguientes actividades.

En una recta numérica marquen cada pareja de números naturales e identifiquen entre ellos un tercer número natural.

6 y 8

4 y 7

◆ ¿Cuántos números naturales hay entre el 15 y el 30? __________

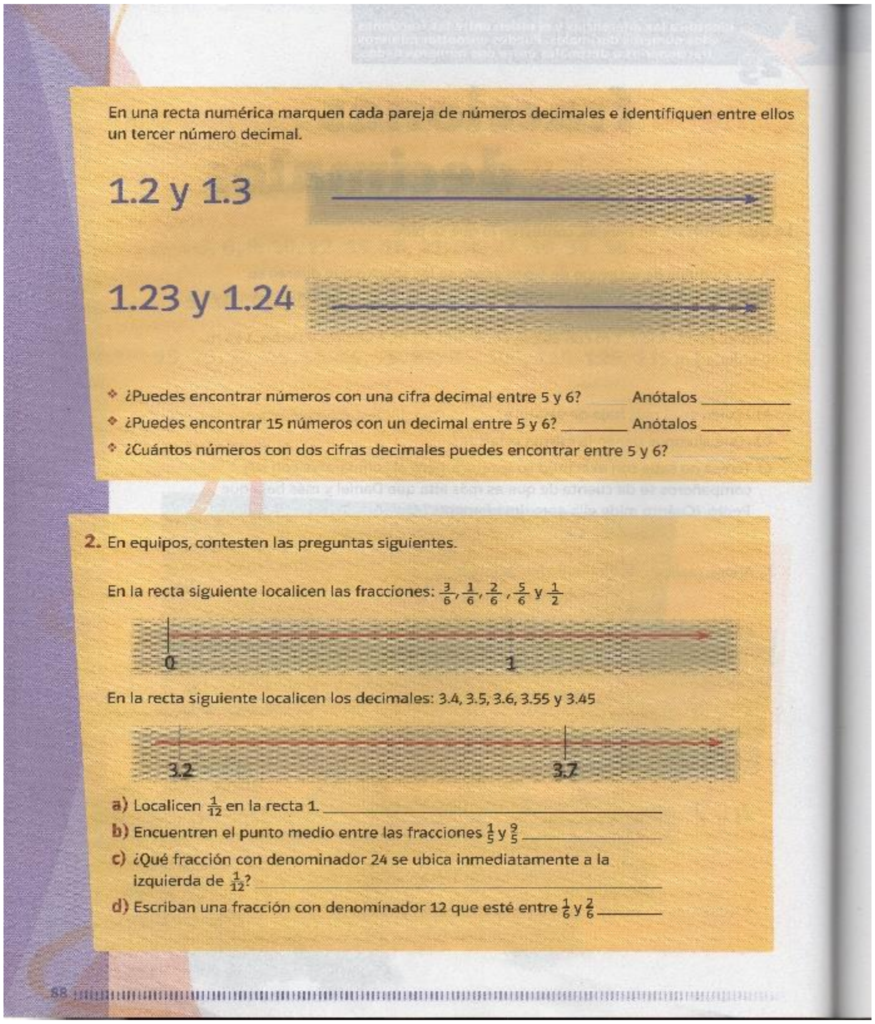
87

Figura 11. Lección 23. Los alumnos encuentren diferencias entre las fracciones y los decimales.
Fuente: Libro de sexto grado. P. 51. En SEP (2011). Matemáticas. Sexto grado. México.

Las tareas y las técnicas. La lección que se analiza incluye cinco tipos de tareas, el primer tipo (Figura 11) consiste en que, a partir de una lista de nombres de niños con sus respectivas estaturas -expresadas con números decimales o con números fraccionarios- se deben contestar 3 preguntas que implican hacer una comparación de las medidas de las estaturas de tres de los niños.

El siguiente tipo de tareas, señalado con el número uno en el libro, trata de que los alumnos ubiquen en cuatro rectas numéricas dadas ocho números, dispuestos de dos en dos; cuatro son enteros y cuatro son decimales.

Posteriormente se procede a contestar preguntas que llevan a los alumnos a determinar qué números (decimales) se encuentran entre dos números dados.



En una recta numérica marquen cada pareja de números decimales e identifiquen entre ellos un tercer número decimal.

1.2 y 1.3

1.23 y 1.24

- ¿Puedes encontrar números con una cifra decimal entre 5 y 6? Anótalos ______
- ¿Puedes encontrar 15 números con un decimal entre 5 y 6? ______ Anótalos ______
- ¿Cuántos números con dos cifras decimales puedes encontrar entre 5 y 6?

2. En equipos, contesten las preguntas siguientes.

En la recta siguiente localicen las fracciones: $\frac{3}{6}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{5}{6}$ y $\frac{1}{2}$

0 1

En la recta siguiente localicen los decimales: 3.4, 3.5, 3.6, 3.55 y 3.45

3.2 3.7

a) Localicen $\frac{1}{12}$ en la recta 1. ______

b) Encuentren el punto medio entre las fracciones $\frac{1}{5}$ y $\frac{2}{5}$ ______

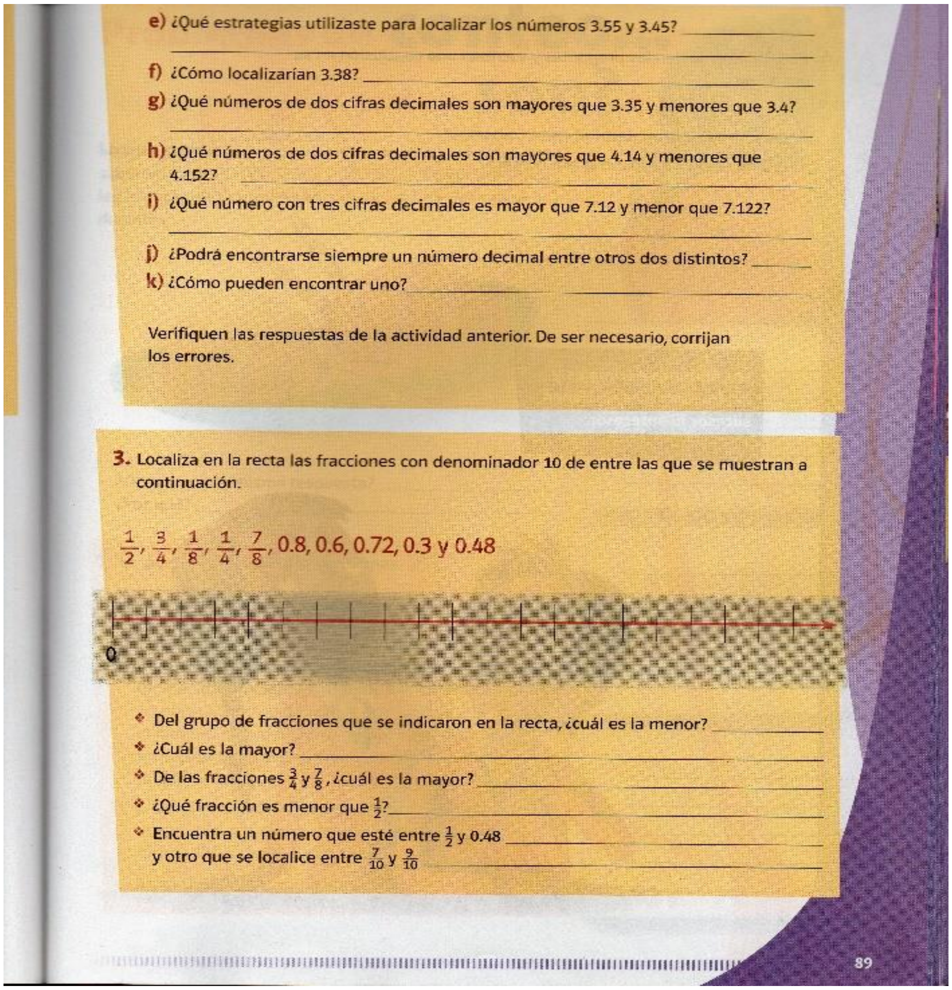
c) ¿Qué fracción con denominador 24 se ubica inmediatamente a la izquierda de $\frac{1}{12}$? ______

d) Escriban una fracción con denominador 12 que esté entre $\frac{1}{6}$ y $\frac{2}{6}$ ______

88

Figura 12. Lección 23. Tarea que implica identificar un número decimal otro número decimal.
Fuente: Libro de sexto grado. P. 88. En SEP (2011). Matemáticas. Sexto grado. México.

Con el número dos está marcado el siguiente tipo de tareas de la lección (Figura 12). Las dos primeras consisten en ubicar en una recta numérica cinco fracciones comunes y, en una segunda recta numérica se deben ubicar cinco números decimales. Posteriormente, se plantean once preguntas, todas orientadas a trabajar la praxeología vinculada con la propiedad de densidad de los números decimales.



e) ¿Qué estrategias utilizaste para localizar los números 3.55 y 3.45?

f) ¿Cómo localizarían 3.38?

g) ¿Qué números de dos cifras decimales son mayores que 3.35 y menores que 3.4?

h) ¿Qué números de dos cifras decimales son mayores que 4.14 y menores que 4.152?

i) ¿Qué número con tres cifras decimales es mayor que 7.12 y menor que 7.122?

j) ¿Podrá encontrarse siempre un número decimal entre otros dos distintos?

k) ¿Cómo pueden encontrar uno?

Verifiquen las respuestas de la actividad anterior. De ser necesario, corrijan los errores.

3. Localiza en la recta las fracciones con denominador 10 de entre las que se muestran a continuación.

$\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{7}{8}$, 0.8, 0.6, 0.72, 0.3 y 0.48

0

- Del grupo de fracciones que se indicaron en la recta, ¿cuál es la menor?
- ¿Cuál es la mayor?
- De las fracciones $\frac{3}{4}$ y $\frac{7}{8}$, ¿cuál es la mayor?
- ¿Qué fracción es menor que $\frac{1}{2}$?
- Encuentra un número que esté entre $\frac{1}{2}$ y 0.48 y otro que se localice entre $\frac{7}{10}$ y $\frac{9}{10}$

89

Figura 13. Lección 23. Tareas sobre ubicación de fracciones y números decimales en la recta numérica.
Fuente: Libro de sexto grado. P. 89. En SEP (2011). Matemáticas. Sexto grado. México.

Otro tipo de tareas señalado con el número tres en la lección (Figura 13), consiste en localizar en una recta numérica dividida en veinte partes iguales, fracciones comunes y números decimales menores que la unidad. Complementariamente se plantean preguntas que tienen como objeto que los estudiantes se introduzcan en la relación de orden entre números fraccionarios expresados en la forma a/b y con punto decimal.

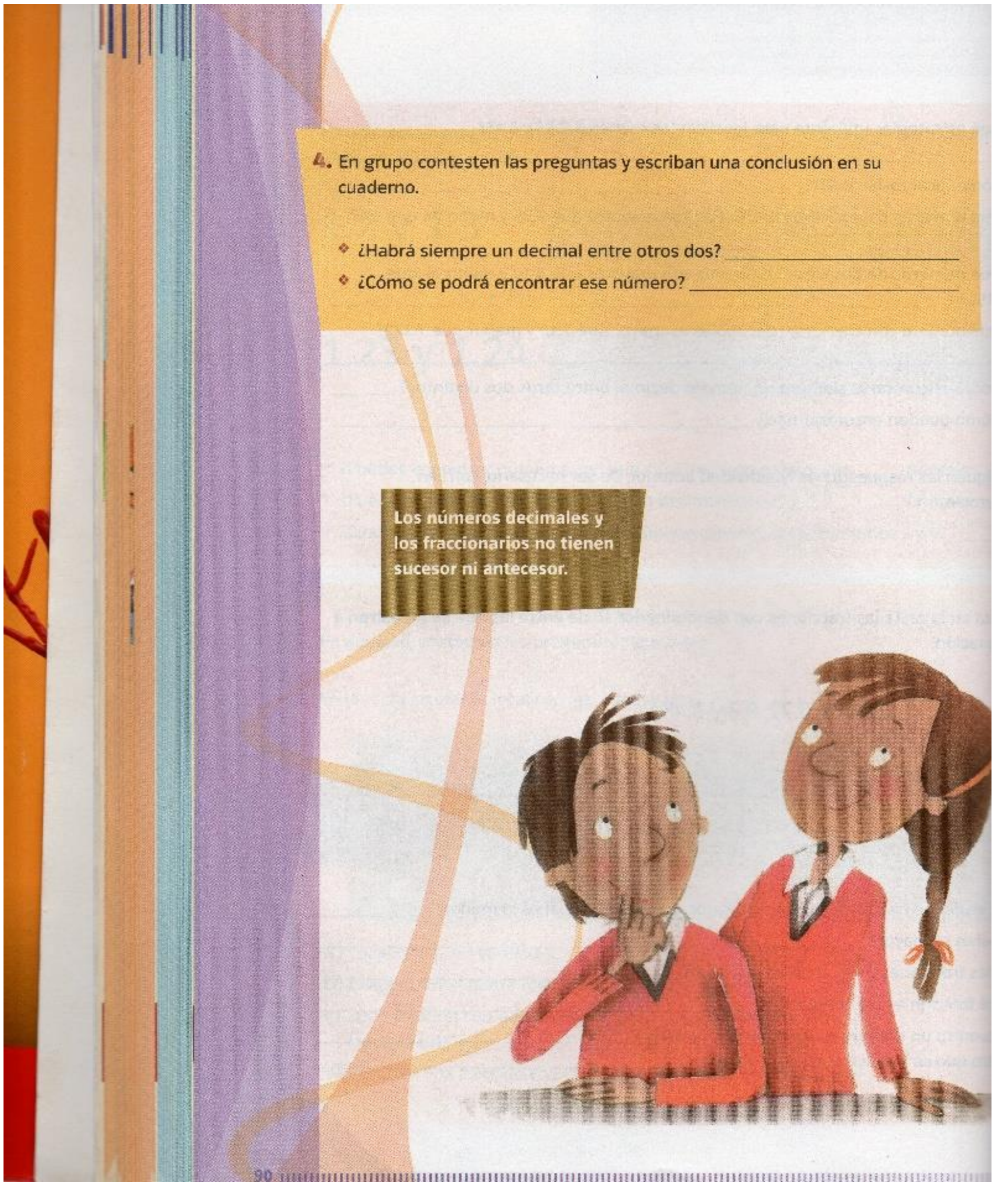


Figura 14. Lección 23. Tarea relativa a la propiedad de densidad de los números decimales. Fuente: Libro de sexto grado. P. 90. En SEP (2011). Matemáticas. Sexto grado. México.

Otro bloque de tareas, indicado con el número cuatro (Figura 14), plantea dos preguntas a manera de conclusión de la lección, lo que implica la realización de un ejercicio de reflexión sobre la propiedad de densidad de los números decimales: *¿Habrá un decimal entre otros dos? ¿Cómo se podrá encontrar ese número?*

Ahora bien, la resolución de cada tipo de tareas implica el empleo de una técnica que el alumno con base a sus conocimientos -pero principalmente a partir de la guía del docente- desarrolla durante el proceso de estudio donde es resuelta la tarea. La técnica que subyace en la resolución del primer tipo de tareas implica que los estudiantes puedan leer e interpretar una relación de equivalencia entre expresiones fraccionarias y decimales. Entonces la técnica es realizar una comparación y establecer equivalencia entre números fraccionarios y números decimales, lo cual posibilitará dar respuesta a las preguntas que se plantean, como: *¿Quién es el más bajo de estatura?*

Para el segundo tipo de tareas, se requiere que el alumno identifique un número o números que se ubican entre un par de ellos; primero naturales y posteriormente fraccionarios; lo anterior también se expresará mediante puntos en rectas numéricas para dar respuesta a preguntas como la siguiente: *¿Puedes encontrar números con una cifra decimal entre 5 y 6?* La técnica consiste en saber ubicar en dos rectas numéricas un par de números, en la primera, naturales y en la segunda decimales para posteriormente identificar números que se ubican entre ellos. El tercer tipo de tareas es similar al anterior, la técnica a emplearse en el segundo y en el tercer tipo de tareas implica que el alumno gradúe las rectas numéricas de acuerdo con los números que se ubicarán en ellas.

La técnica para la resolución del cuarto tipo de tareas requiere que los estudiantes localicen en una recta numérica expresiones numéricas considerando aquellas que tienen denominador diez. Para esto tendrán que realizar un análisis de las expresiones numéricas proporcionadas y definir cuáles de ellas pueden tener denominador diez. Una vez resuelta esta situación los alumnos pueden proceder a la ubicación de tales números en la recta numérica considerando que se encuentra graduada.

La tecnología y la teoría. Ahora bien, el análisis de la lección desde el modelo praxeológico lleva a revisar la argumentación de las técnicas, es decir, a ocuparse de la tecnología que justifica las técnicas. La tecnología correspondiente al primer tipo de tareas, tiene sentido si el alumno cuenta con referentes suficientes para establecer equivalencias entre expresiones fraccionarias y números decimales; el dominio de esta noción permitirá al estudiante ubicar números como por ejemplo, 1.4 m y 1 ¼ m; saber cuál de esos números se ubicará con mayor proximidad al 1, así como definir qué expresión numérica representa una altura mayor.

La tecnología para los tipos de tareas 1, 2 y 3 implica que los estudiantes sepan ubicar en la recta numérica números naturales, así como números fraccionarios y decimales. Para esto, se requiere que los alumnos realicen o interpreten la graduación correspondiente en las rectas numéricas que se presentan en la página del libro de texto, así mismo, deben tener claridad sobre la equivalencia entre expresiones decimales y expresiones fraccionarias de un número. Cabe mencionar que las evidencias de la aplicación de una tecnología que retome los elementos antes dichos no está clara, sólo se deriva de la naturaleza de las tareas que se presentan.

Por otra parte, este conjunto de tareas implica un conocimiento de la teoría que lleva sin duda a desarrollar un procedimiento o técnica con sentido y pertinencia. En relación a la teoría, todos los tipos de tareas planteados en la lección, desde el enfoque praxeológico, implican que el alumno construya, o aplique nociones sobre equivalencia entre números decimales y expresiones fraccionarias. También se introduce al alumno al conocimiento de la densidad de dichos conjuntos de números, así como al establecimiento de cuestiones relativas al principio de orden entre estos conjuntos numéricos. La incorporación de esta teoría se va propiciando a través de preguntas que se plantean a partir de las tareas antes descritas.

De acuerdo al análisis realizado, se puede observar que la estructura praxeológica de la lección se halla parcialmente completa, toda vez que se identifican dos de los cuatro componentes de la misma y los componentes del bloque teórico se encuentran implícitos. No obstante, el trabajo que realiza el director de estudio en el aula con los estudiantes determina en cierta medida que los chicos adquieran o no, las nociones fundamentales en el proceso de estudio correspondiente.

5.6. Análisis de lecciones del libro de texto de 1° de secundaria

Los alumnos participantes en este estudio que cursaban primer grado de secundaria, utilizaban el libro *Matemáticas I. Inducción a las competencias* (Arriaga, Benítez y Cortés, 2011). La selección de las lecciones de este libro se realizó considerando que, en su conjunto, las lecciones se orientan hacia el trabajo con el orden y la densidad, así como los problemas aditivos y multiplicativos con fracciones y decimales, dado que son las praxeologías principales que marca el programa correspondiente a este grado escolar. Entonces, siguiendo el orden del programa de estudio, se eligieron una lección de introducción a las praxeologías relativas a las fracciones y a los números decimales, otra sobre problemas aditivos y una más relativa a problemas multiplicativos.

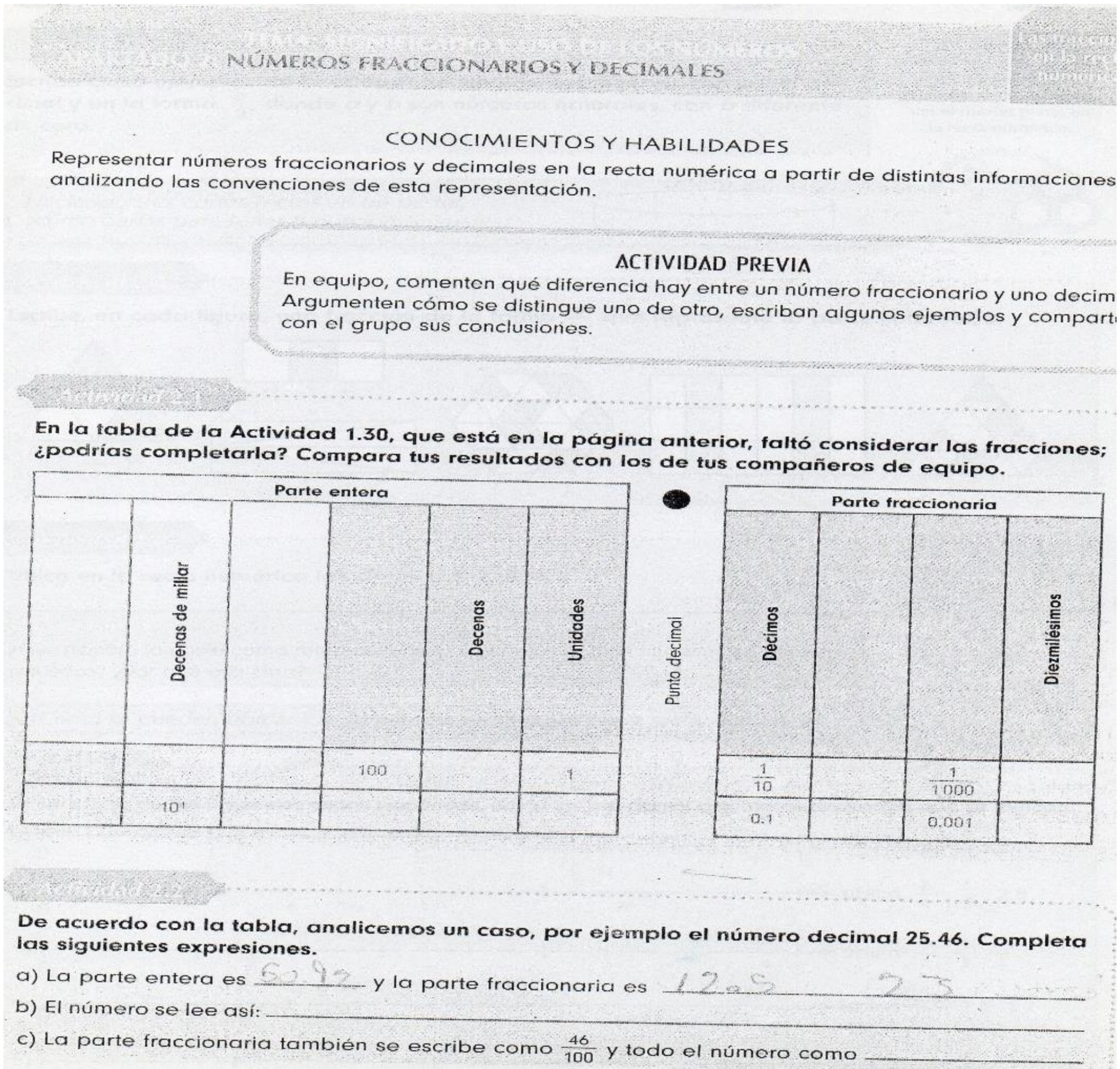
5.6.1. Números fraccionarios y decimales.

En el libro de matemáticas, en la praxeología matemática: *Significado y uso de los números,* donde se integra el *Apartado 2, Números fraccionarios y decimales*, se incluyen trece tipos de tareas (numeradas del 2.1 al 2.13) dedicadas a completar tablas de valor posicional conforme el valor relativo de los números que componen las cantidades dadas. En otros tipos de tareas se solicita ubicar expresiones fraccionarias y decimales en la recta numérica y comparar pares de números fraccionarios.

Veamos de manera específica, los tipos de tareas 2.1 y 2.2 (Figura 15 en la siguiente página). En éstas, los estudiantes deben completar dos tablas. En una, (lado izquierdo de la página) deben colocar las cifras correspondientes a los números enteros y en la tabla de la derecha ubicar los números que corresponden a las cifras decimales del número.

En seguida se plantean algunas preguntas que pretenden que el alumno identifique la parte entera y la parte decimal de una cantidad dada; también se pretende que los estudiantes escriban con letra el número decimal con su parte entera y su parte decimal. Se espera también que los estudiantes consoliden conocimientos para escribir la parte decimal de la cantidad con denominador múltiplo de diez.

La técnica para resolver este tipo de tareas consiste, de acuerdo a las indicaciones o consignas proporcionadas, en que los estudiantes observen el punto decimal como el símbolo que en un número decimal cualquiera, divide la parte entera de la parte decimal. De esta forma, los estudiantes sólo tienen que observar la ubicación del punto decimal para que ubiquen las cantidades, como puede verse, es una técnica inducida de cierta forma, como lo serán todas las que se proponen en esta lección.



NÚMEROS FRACCIONARIOS Y DECIMALES

CONOCIMIENTOS Y HABILIDADES

Representar números fraccionarios y decimales en la recta numérica a partir de distintas informaciones analizando las convenciones de esta representación.

ACTIVIDAD PREVIA

En equipo, comenten qué diferencia hay entre un número fraccionario y uno decim… Argumenten cómo se distingue uno de otro, escriban algunos ejemplos y compart… con el grupo sus conclusiones.

En la tabla de la Actividad 1.30, que está en la página anterior, faltó considerar las fracciones; ¿podrías completarla? Compara tus resultados con los de tus compañeros de equipo.

Parte entera						Punto decimal	Parte fraccionaria			
	Decenas de millar			Decenas	Unidades		Décimos			Diezmilésimos
			100		1		$\frac{1}{10}$		$\frac{1}{1000}$	
	10^1						0.1		0.001	

De acuerdo con la tabla, analicemos un caso, por ejemplo el número decimal 25.46. Completa las siguientes expresiones.

a) La parte entera es 60.92 y la parte fraccionaria es 12.5 23

b) El número se lee así: ______

c) La parte fraccionaria también se escribe como $\frac{46}{100}$ y todo el número como ______

Figura 15*. Tareas 2.1 y 2.2, Identificar la parte entera y la fraccionaria de un número decimal.*

Fuente: Libro de matemáticas. Primer grado. Secundaria, p. 28. En: Arriaga et al., (2011). Matemáticas, Primer grado. Educación secundaria. Pearson. México.

En la tarea 2.3 (Figura 16 en la siguiente página), se pide al alumno que escriba cinco ejemplos de fracciones decimales, expresados con punto decimal y en la forma a/b (ver imagen 5 B_1). Para esto no se proporciona ningún dato o ejemplo, no obstante, en la indicación se plantea una aseveración que indica que dos números son equivalentes si representan el mismo punto en la recta numérica. Con sólo esta información se pide a los alumnos que escriban pares de números que representen el mismo valor como por ejemplo, 1.5 y 1 ½.

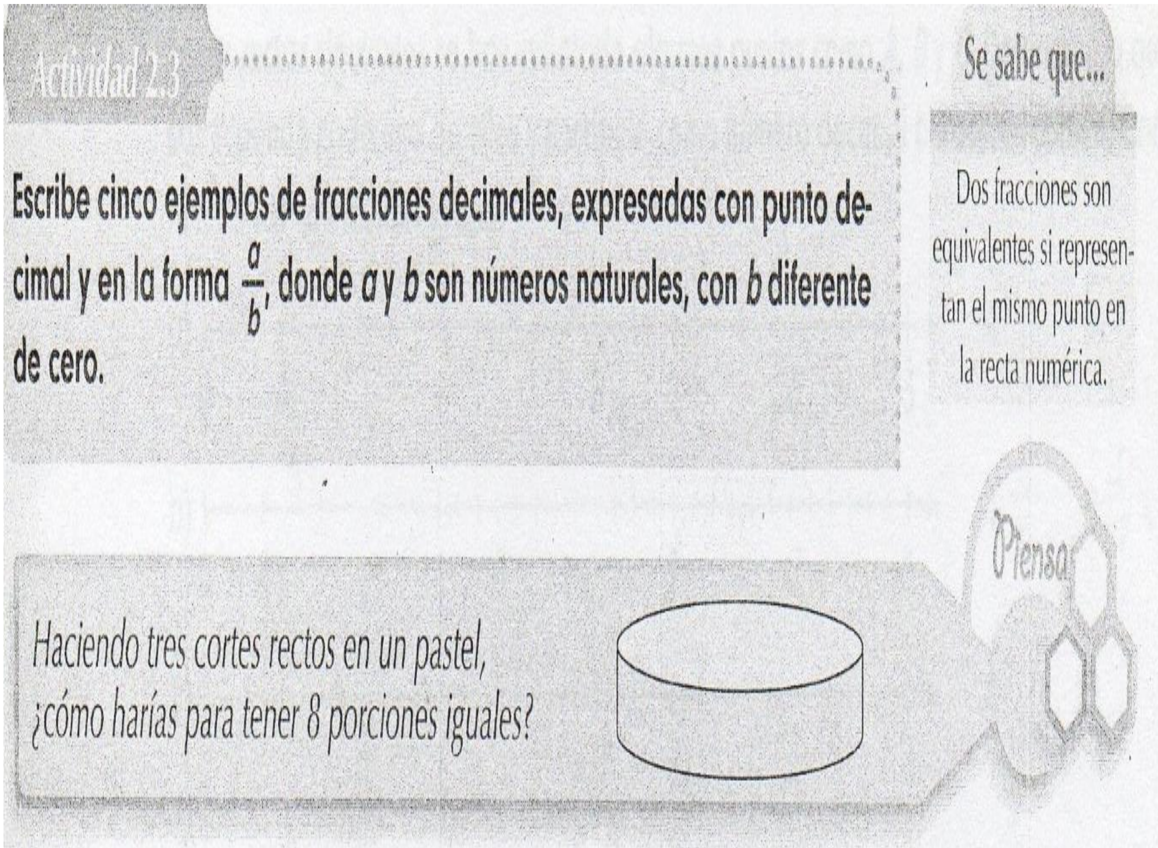
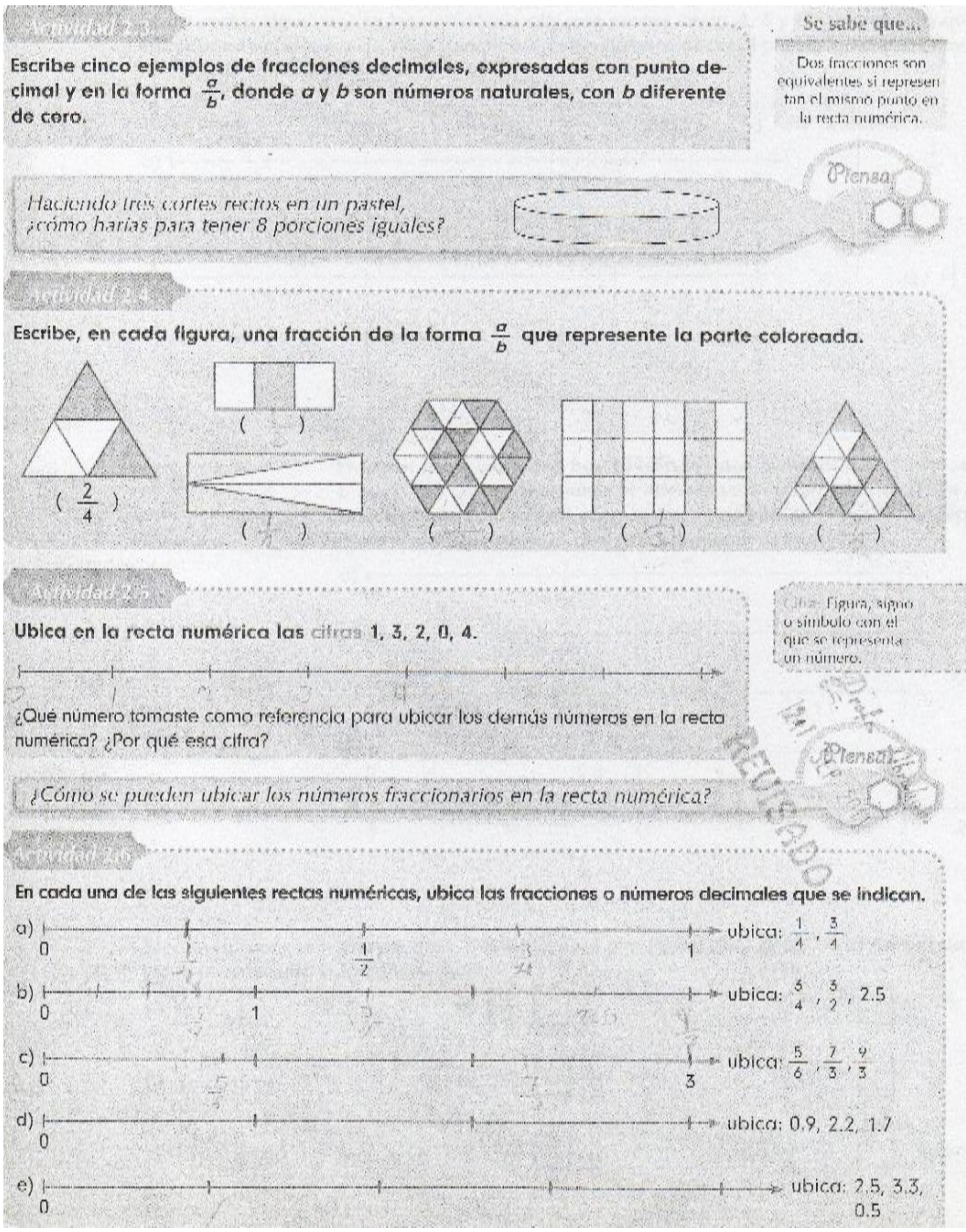


Figura 16. *Tarea 2.3. Representación de un número decimal con punto a expresión a/b.*
Fuente: Libro de matemáticas. Primer grado. Secundaria, p. 29. En: Arriaga et al., (2011). Matemáticas, Primer grado. Educación secundaria. Pearson. México.

La técnica para resolver esta tarea no se encuentra sugerida, se deja al estudiante que él sea quien escriba por ejemplo 2/10 y 0.2 para cumplir con la tarea encomendada.

Por otra parte, en la tarea 2.4 (Figura 16) se presenta una serie de polígonos regulares, triángulos, cuadriláteros y un hexágono, divididos en partes iguales por medio de triángulos en algunos casos y mediante cuadrados en otros. Se le solicita al alumno que anote en cada figura una fracción de la forma a/b que represente la parte coloreada. Para esto se proporciona un ejemplo que consiste en contabilizar las partes en las que está dividida la unidad (una figura geométrica) en relación con el número de estas partes que se encuentran iluminadas, como el caso del ejemplo contenido en la actividad que sirve como modelo, donde se observa un triángulo dividido en cuatro partes iguales de las cuales dos están iluminadas, por lo tanto, corresponde 2/4 como expresión de la relación.



Actividad 2.3

Escribe cinco ejemplos de fracciones decimales, expresadas con punto decimal y en la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son números naturales, con b diferente de cero.

Se sabe que...

Dos fracciones son equivalentes si representan el mismo punto en la recta numérica.

Piensa

Haciendo tres cortes rectos en un pastel, ¿cómo harías para tener 8 porciones iguales?

Actividad 2.4

Escribe, en cada figura, una fracción de la forma $\frac{a}{b}$ que represente la parte coloreada.

($\frac{2}{4}$) ( ) ( ) ( ) ( ) ( )

Actividad 2.5

Ubica en la recta numérica las cifras 1, 3, 2, 0, 4.

Cifra: Figura, signo o símbolo con el que se representa un número.

¿Qué número tomaste como referencia para ubicar los demás números en la recta numérica? ¿Por qué esa cifra?

Piensa

¿Cómo se pueden ubicar los números fraccionarios en la recta numérica?

Actividad 2.6

En cada una de las siguientes rectas numéricas, ubica las fracciones o números decimales que se indican.

a) 0, $\frac{1}{2}$, 1 ubica: $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$

b) 0, 1 ubica: $\frac{5}{4}$, $\frac{3}{2}$, 2.5

c) 0, 3 ubica: $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{9}{3}$

d) 0 ubica: 0.9, 2.2, 1.7

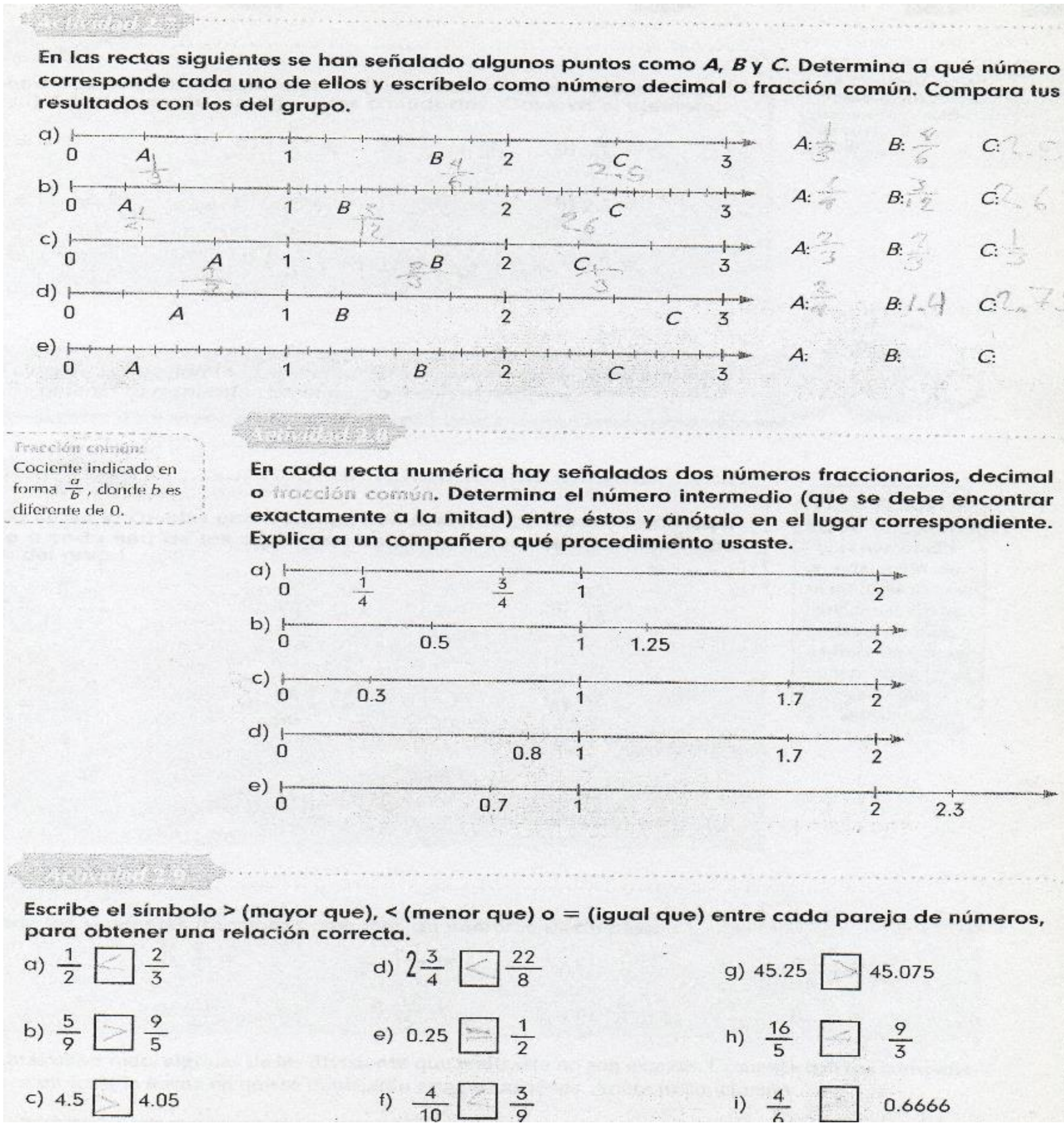
e) 0 ubica: 2.5, 3.3, 0.5

Figura 17.Tareas 2.4, 2.5 y 2.6. Ubicación de números fraccionarios en la recta numérica.
Fuente: Libro de matemáticas. Primer grado. Secundaria, p. 28. En: Arriaga et al., (2011). Matemáticas, Primer grado. Educación secundaria. Pearson. México.

Sin embargo, la figura que consiste en un rectángulo dividido en cuatro partes iguales, tiene anotado por el alumno propietario del libro la fracción ½, lo que implica que el estudiante al escribir una fracción equivalente a 2/4, aplicó un proceso de reducción tal vez inducido por el maestro o director del proceso de estudio en cada uno de los casos de la actividad en referencia. Esto último podría considerarse como la técnica, es decir, con base en el ejemplo dado, se requiere obtener mediante conteo la suma de partes iguales que divide a cada figura y determinar qué parte de la figura representa el área coloreada para expresarla mediante una fracción común irreductible.

La tarea 2.5 (Figura 17 de la página anterior) pide que los alumnos ubiquen en una recta numérica ya subdividida, los números naturales del 0 al 4, lo cual no representa dificultades para los estudiantes. La tarea 2.6 (Figura 17) implica nuevamente trabajo con rectas numéricas, éstas se proporcionan graduadas y a la derecha de cada una de ellas se encuentran anotados tres números; algunos de estos números son decimales, otros son fraccionarios y deben ser ubicados en las rectas numéricas.

La elección de la técnica para resolver estas dos tareas debe apoyarse en la observación de la graduación de cada una de las rectas numéricas dadas. A partir de esto, los alumnos podrían realizar sub-graduaciones necesarias en dichas rectas para facilitar la ubicación de los números asignados. En la tarea 2.7 (Figura 18 en la siguiente página), se presentan cinco rectas numéricas graduadas y en cada una de ellas se ubican tres puntos (A, B y C). Los estudiantes deben determinar la ubicación de tales puntos e indicarla utilizando las fracciones o los números decimales. Concretamente se trata de, dado un punto, determinar su ubicación mediante una expresión fraccionaria o decimal.



Actividad 2.7

En las rectas siguientes se han señalado algunos puntos como *A*, *B* y *C*. Determina a qué número corresponde cada uno de ellos y escríbelo como número decimal o fracción común. Compara tus resultados con los del grupo.

a) 0 *A* 1 *B* 2 *C* 3 — *A*: *B*: *C*:

b) 0 *A* 1 *B* 2 *C* 3 — *A*: *B*: *C*:

c) 0 *A* 1 *B* 2 *C* 3 — *A*: *B*: *C*:

d) 0 *A* 1 *B* 2 *C* 3 — *A*: *B*: *C*:

e) 0 *A* 1 *B* 2 *C* 3 — *A*: *B*: *C*:

Actividad 2.8

Fracción común: Cociente indicado en forma $\frac{a}{b}$, donde *b* es diferente de 0.

En cada recta numérica hay señalados dos números fraccionarios, decimal o fracción común. Determina el número intermedio (que se debe encontrar exactamente a la mitad) entre éstos y anótalo en el lugar correspondiente. Explica a un compañero qué procedimiento usaste.

a) 0 $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$ 1 2

b) 0 0.5 1 1.25 2

c) 0 0.3 1 1.7 2

d) 0 0.8 1 1.7 2

e) 0 0.7 1 2 2.3

Actividad 2.9

Escribe el símbolo > (mayor que), < (menor que) o = (igual que) entre cada pareja de números, para obtener una relación correcta.

a) $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{2}{3}$ d) $2\frac{3}{4}$ ☐ $\frac{22}{8}$ g) 45.25 ☐ 45.075

b) $\frac{5}{9}$ ☐ $\frac{9}{5}$ e) 0.25 ☐ $\frac{1}{2}$ h) $\frac{16}{5}$ ☐ $\frac{9}{3}$

c) 4.5 ☐ 4.05 f) $\frac{4}{10}$ ☐ $\frac{3}{9}$ i) $\frac{4}{6}$ ☐ 0.6666

Figura 18. Tareas 2.7, 2.8 y 2.9. Ubicación de fracciones en la recta numérica y comparación de fracciones.

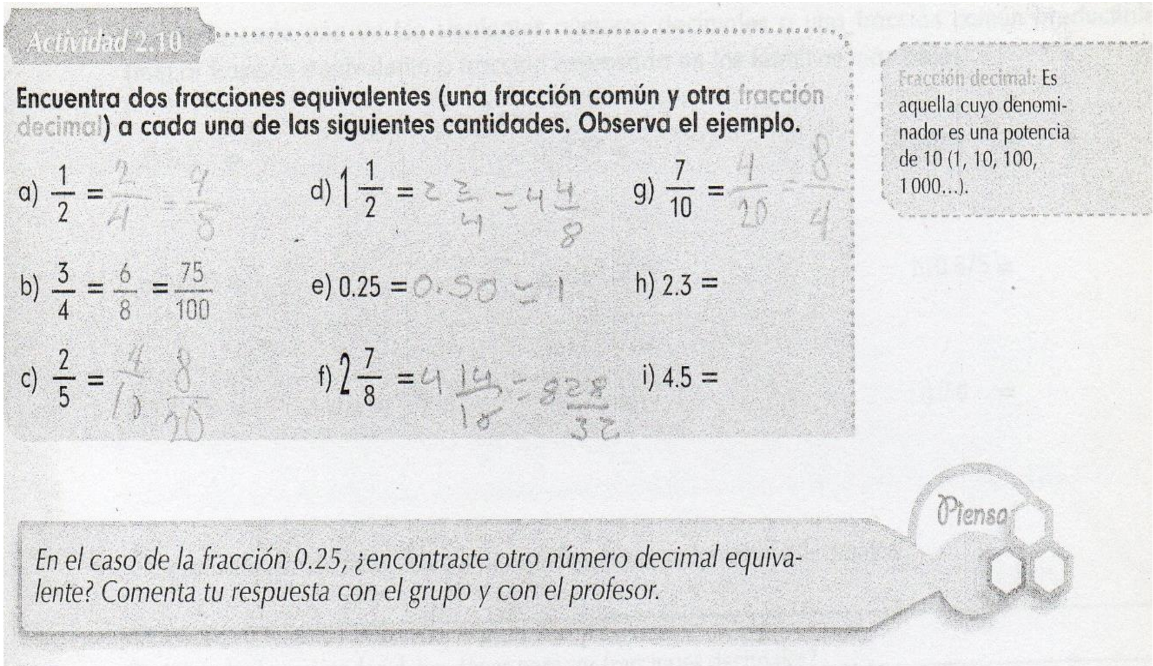
Fuente: Libro de matemáticas. Primer grado. Secundaria, p. 30. En: Arriaga et al., (2011). Matemáticas, Primer grado. Educación secundaria. Pearson. México.

La técnica para esta tarea requiere de observar y de comprender la graduación en cada una de las rectas numéricas, así como establecer relación con los puntos ubicados en ellas y a los cuales se debe hacer corresponder el número adecuado.

En la tarea 2.8 también se plantean cinco rectas numéricas con un par de números colocados en cada una, la mayoría son decimales expresados con punto decimal (Figura 18, página anterior). A los estudiantes se les pide determinar y señalar el número fraccionario o decimal que se halla en medio de cada par de números. La técnica no se sugiere del todo, pues se trata de determinar el punto medio y asignarle el número fraccionario o decimal correspondiente, probablemente hacerlo de manera gráfica sea una opción, pero definir el procedimiento les corresponde a los estudiantes.

En la tarea 2.9 (Figura 18, página anterior) se pide a los estudiantes realizar comparaciones entre pares de números fraccionarios usando los signos, mayor que, menor que o igual. Cabe destacar que algunos pares de números están compuestos por una expresión decimal y una expresión fraccionaria, por lo tanto, será necesario que los estudiantes tengan referencias y/o las experiencias previas sobre la equivalencia y el orden entre esos tipos de números. Esto es básico para aplicar la técnica que permita usar el signo de comparación adecuado.

En cuanto a la tarea 2.10 (Figura 19, página siguiente), en ésta se presentan a los estudiantes nueve números, algunos decimales y otros fraccionarios; la consigna consiste en escribir dos fracciones equivalentes (una decimal y otra fraccionaria) para cada uno.


Actividad 2.10

Encuentra dos fracciones equivalentes (una fracción común y otra fracción decimal) a cada una de las siguientes cantidades. Observa el ejemplo.

a) $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$

d) $1\frac{1}{2} = 2\frac{2}{4} = 4\frac{4}{8}$

g) $\frac{7}{10} = \frac{4}{20} = \frac{8}{4}$

b) $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{75}{100}$

e) $0.25 = 0.50 = 1$

h) $2.3 =$

c) $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}\ \frac{8}{20}$

f) $2\frac{7}{8} = 4\frac{14}{16} = 8\frac{28}{32}$

i) $4.5 =$

Fracción decimal: Es aquella cuyo denominador es una potencia de 10 (1, 10, 100, 1 000...).

Piensa

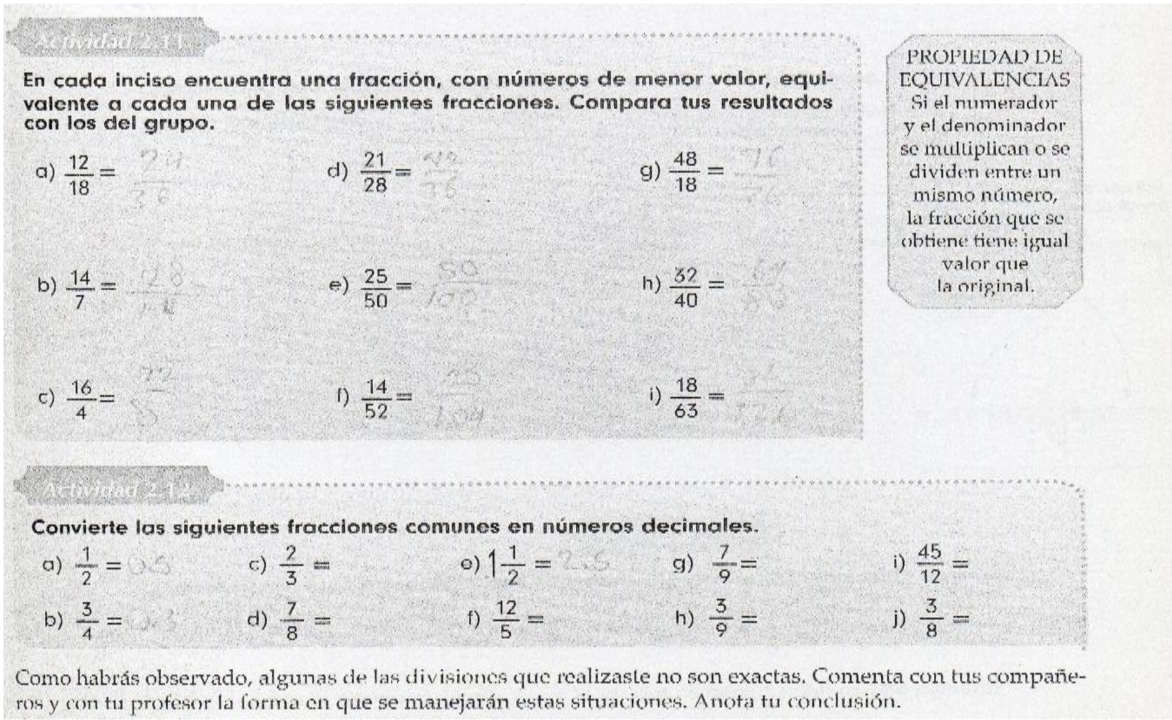
En el caso de la fracción 0.25, ¿encontraste otro número decimal equivalente? Comenta tu respuesta con el grupo y con el profesor.

Figura 19. *Tarea 2.10. Escribir fracciones equivalentes.*

Fuente: Libro de matemáticas. Primer grado. Secundaria, p. 31. En: Arriaga et al., (2011). Matemáticas, Primer grado. Educación secundaria. Pearson. México.

La técnica está orientada por el ejemplo. Como se observa en éste, la fracción común equivalente surge al duplicar numerador y denominador de la fracción dada, y la fracción decimal surge al multiplicar por 25 cada uno de esos números de tal modo que el denominador sea cien.

Así mismo, en la tarea 2.11 (Figura 20, siguiente página) se requiere que los alumnos escriban una fracción equivalente (con numerador y denominador de menor valor) a cada una de las nueve expresiones fraccionarias, algunas propias y otras impropias. Una de las técnicas a utilizarse implicaría una división entre los números que componen la fracción propuesta en el libro del alumno.



Actividad 2.11

En cada inciso encuentra una fracción, con números de menor valor, equivalente a cada una de las siguientes fracciones. Compara tus resultados con los del grupo.

a) $\frac{12}{18} =$ d) $\frac{21}{28} =$ g) $\frac{48}{18} =$

b) $\frac{14}{7} =$ e) $\frac{25}{50} =$ h) $\frac{32}{40} =$

c) $\frac{16}{4} =$ f) $\frac{14}{52} =$ i) $\frac{18}{63} =$

PROPIEDAD DE EQUIVALENCIAS
Si el numerador y el denominador se multiplican o se dividen entre un mismo número, la fracción que se obtiene tiene igual valor que la original.

Actividad 2.12

Convierte las siguientes fracciones comunes en números decimales.

a) $\frac{1}{2} =$ c) $\frac{2}{3} =$ e) $1\frac{1}{2} =$ g) $\frac{7}{9} =$ i) $\frac{45}{12} =$

b) $\frac{3}{4} =$ d) $\frac{7}{8} =$ f) $\frac{12}{5} =$ h) $\frac{3}{9} =$ j) $\frac{3}{8} =$

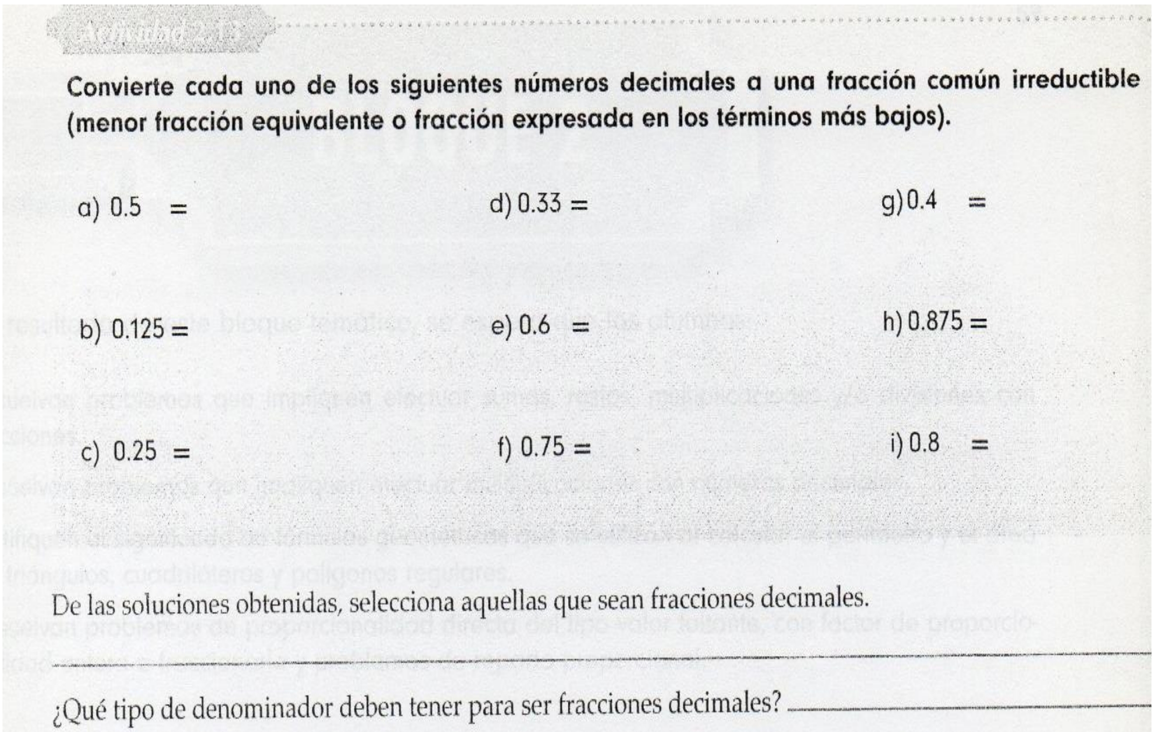
Como habrás observado, algunas de las divisiones que realizaste no son exactas. Comenta con tus compañeros y con tu profesor la forma en que se manejarán estas situaciones. Anota tu conclusión.

Figura 20. Tarea 2.11. Escribir fracciones equivalentes con números decimales.

Fuente: Libro de matemáticas. Primer grado. Secundaria, p. 31. En: Arriaga et al., (2011). Matemáticas, Primer grado. Educación secundaria. Pearson. México.

En la tarea 2.12 (Figura 20) se plantean diez expresiones fraccionarias, unas propias, otras impropias y algunas mixtas, se pide convertir a cada una en fracción decimal. Por la anotación al final de las tareas se deja entrever que se induce la técnica, que orienta al estudiante a resolver la tarea a través de la división del numerador por el denominador.

Finalmente, en la tarea 2.13 (Figura 21, página siguiente) están contenidos nueve números decimales, mismos que se pide se expresen en números fraccionarios, específicamente, en una fracción común irreductible, término que tendría que ser previamente explicado por el mismo texto o por el director del proceso de estudio para iniciar el trabajo de resolución. Para esta tarea no se sugiere ninguna técnica o ejemplo que pudiera guiar el trabajo del alumno, no obstante, puede entenderse conforme a la última pregunta de la tarea, que es posible aplicar la operación inversa a la multiplicación, y así poder expresar cada una como fracciones decimales y posteriormente proceder a la reducción de los números que las compongan para obtener la fracción común.



Actividad 2.13

Convierte cada uno de los siguientes números decimales a una fracción común irreductible (menor fracción equivalente o fracción expresada en los términos más bajos).

a) 0.5 =	d) 0.33 =	g) 0.4 =
b) 0.125 =	e) 0.6 =	h) 0.875 =
c) 0.25 =	f) 0.75 =	i) 0.8 =

De las soluciones obtenidas, selecciona aquellas que sean fracciones decimales.

____

¿Qué tipo de denominador deben tener para ser fracciones decimales? ______________

Figura 21*. Tarea 2.13. Conversión de números decimales a fracción.*

Fuente: Libro de matemáticas. Primer grado. Secundaria, p. 32. En: Arriaga et al., (2011). Matemáticas, Primer grado. Educación secundaria. Pearson. México.

Como ha podido apreciarse a lo largo de la lección revisada, las técnicas que se proponen se basan en modelos gráficos como tablas y rectas numéricas, así como en técnicas algorítmicas. Todo el conjunto de tareas se puede resumir como un repaso apretado de temas revisados en los grados superiores de la educación primaria.

Aunque no es el tema central de este trabajo, no está por demás mencionar el comentario que hace un maestro de matemáticas que atiende un grupo participante en este estudio sobre la carga temática de la lección analizada. Este profesor señala que muchas veces tiene que ayudar a los alumnos porque la lección es extensa, y aunque se las deje de tarea no la terminan debido a que no recuerdan o no saben cómo hacerla, y el problema – dice - es que hay que avanzar en el programa de estudios (Grupo 1 de 2 de primer grado de la secundaria general “Emiliano Zapata” que participaron en este estudio, atendidos por maestros diferentes).

Entonces, se puede inferir que si los estudiantes (o una buena parte de ellos) no trabajaron en los grados escolares anteriores las nociones vinculadas a las praxeologías matemáticas mencionadas, se presentarán serias dificultades para elegir la técnica adecuada para resolver las diferentes tareas que conforman la lección.

En general, ha podido observarse que en la mayoría de los casos está ausente el discurso tecnológico que pudiera explicar el porqué de las técnicas empleadas. Como se observó, el número un tanto excesivo de tareas, promueve la aplicación de técnicas validadas institucionalmente que probablemente no fueron comprendidas correctamente por los estudiantes.

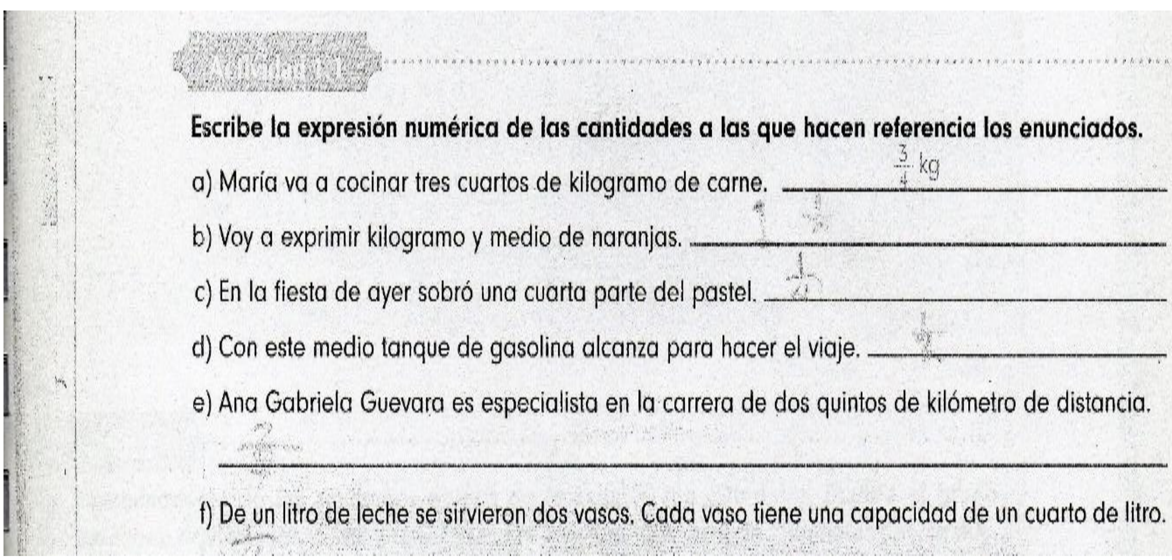
En cuanto a los conceptos centrales de la lección en estudio, cabe destacar que son algunas nociones relacionadas con la equivalencia entre fracciones comunes y fracciones decimales. Así mismo también se aborda la propiedad de densidad y la relación de orden de tales números y su expresión gráfica en la recta numérica.

La conversión entre dichos números, misma que se asume en el programa de estudios, como un conocimiento dominado por los alumnos. Sin embargo, la revisión muestra que no se hace el tránsito por cada uno de los componentes de la estructura praxeológica; quedándose principalmente en el bloque práctico sin avanzar hacia el bloque teórico que permitiría la explicación y justificación de las técnicas, en un discurso tecnológico y la interpretación de la teoría implícita en el conjunto de tareas.

5.6.2. Problemas aditivos con números fraccionarios y decimales.

Las tareas y las técnicas. La praxeología matemática relativa a problemas aditivos con números fraccionarios y decimales se compone de un total de diez tipos de tareas, que por sus características pueden agruparse en tres bloques principales; en el primero se propone al estudiante escribir con números fraccionarios cantidades escritas con letra y en seguida escribir con números decimales los números fraccionarios que se les presentan; el segundo se conforma de tareas que implican la realización de sumas y restas de fracciones; y el tercero, plantea tareas que consisten en la resolución de situaciones problemáticas vinculadas a las fracciones.

En el primer bloque, inicialmente se propone un tipo de tareas mediante seis enunciados breves sobre cuestiones cotidianas referidas a números fraccionarios; se pide que el alumno escriba esas expresiones de forma numérica (Figura 22):


Escribe la expresión numérica de las cantidades a las que hacen referencia los enunciados.

a) María va a cocinar tres cuartos de kilogramo de carne. $\frac{3}{4}$ kg

b) Voy a exprimir kilogramo y medio de naranjas. ______

c) En la fiesta de ayer sobró una cuarta parte del pastel. $\frac{1}{4}$

d) Con este medio tanque de gasolina alcanza para hacer el viaje. ______

e) Ana Gabriela Guevara es especialista en la carrera de dos quintos de kilómetro de distancia.

______

f) De un litro de leche se sirvieron dos vasos. Cada vaso tiene una capacidad de un cuarto de litro.

Figura 22. Tarea 1.1. Expresar en expresión numérica los enunciados.
Fuente: Libro de matemáticas. Primer grado. Secundaria, p. 60. En: Arriaga et al., (2011). Matemáticas, Primer grado. Educación secundaria. Pearson. México.

La técnica consiste en expresar mediante un número fraccionario una cantidad dada verbalmente en un enunciado. Como puede observarse en la Figura

22 (página anterior), hay un ejemplo que orienta al alumno sobre cómo deben escribirse los números fraccionarios correspondientes, por lo que no se promueve el uso de algún otro procedimiento para responder a este tipo de tareas.

La tecnología y la teoría. En este caso, la explicación de la técnica, es decir, la tecnología, se infiere a través del ejemplo que se proporciona en el libro como guía para los alumnos. En consecuencia, la técnica puede distinguirse como la interpretación y expresión de una cantidad, es decir, un enunciado, en una expresión fraccionaria. Por esta razón la teoría se halla oculta para los alumnos en el desarrollo de estas tareas, pues ese discurso explicativo no se atiende; se da por sentado que los estudiantes identifican en un enunciado una cantidad que implica el uso de expresiones fraccionarias y las representan numéricamente.

Para el segundo tipo de tareas de este primer bloque (Figura 23), el alumno debe expresar con números decimales cantidades dadas en números fraccionarios, se presenta un ejemplo y ninguna información más.

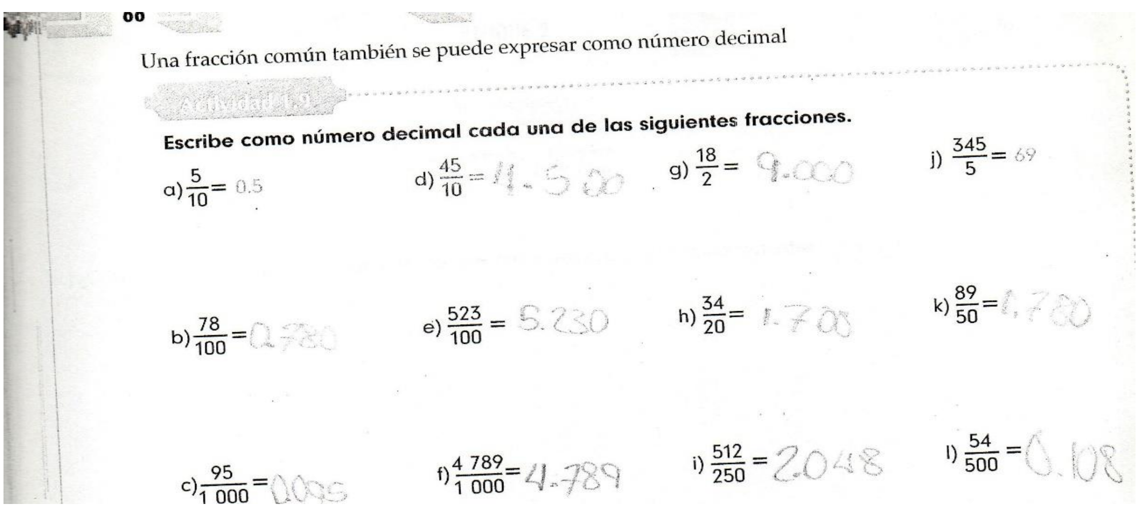
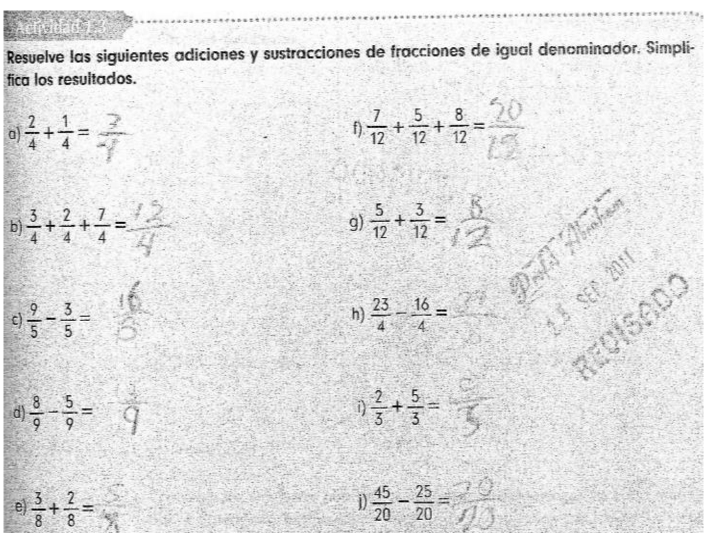


Figura 23. Tarea 1.9. Escribir con número decimal expresiones de la forma a/b, b distinto de cero. Fuente: Libro de matemáticas. Primer grado. Secundaria, p. 66. En: Arriaga et al., (2011). Matemáticas, Primer grado. Educación secundaria. Pearson. México.

La técnica para este tipo de tarea consiste en la aplicación de un procedimiento algorítmico de división (del numerador por el denominador), llevado a cabo manualmente o con el apoyo de algún dispositivo electrónico. Como se advierte en la imagen, se promueve que los estudiantes adquieran habilidad y familiaridad con la aplicación de una técnica sin ninguna reflexión sobre la relación que se establece entre las fracciones y los números decimales involucrados en esas operaciones.

La tecnología y la teoría se quedan al margen del desarrollo de estas tareas toda vez que la centralidad del proceso de estudio se ubica en el bloque práctico. Transitar por el bloque relativo al “logos” llevaría a plantear reflexiones en torno cómo son entre sí los números con los que se opera, entender las relaciones que pueden establecer entre ellos, la viabilidad de las técnicas empleadas para resolver las tareas, etc., en qué situaciones puede generarse este tipo de tareas, y sobre otras cuestiones que permitirían darle un tratamiento más completo y reflexivo al desarrollo de la tarea.

Con respecto al segundo bloque de tareas, donde se encuentran aquellas que plantean la resolución de adiciones y sustracciones de números fraccionarios ubicadas en el apartado I de la lección, se presentan las siguientes imágenes (Figuras 24 y 25) del libro de los alumnos:


Actividad 1.3

Resuelve las siguientes adiciones y sustracciones de fracciones de igual denominador. Simplifica los resultados.

a) $\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=$

b) $\frac{3}{4}+\frac{2}{4}+\frac{7}{4}=$

c) $\frac{9}{5}-\frac{3}{5}=$

d) $\frac{8}{9}-\frac{5}{9}=$

e) $\frac{3}{8}+\frac{2}{8}=$

f) $\frac{7}{12}+\frac{5}{12}+\frac{8}{12}=$

g) $\frac{5}{12}+\frac{3}{12}=$

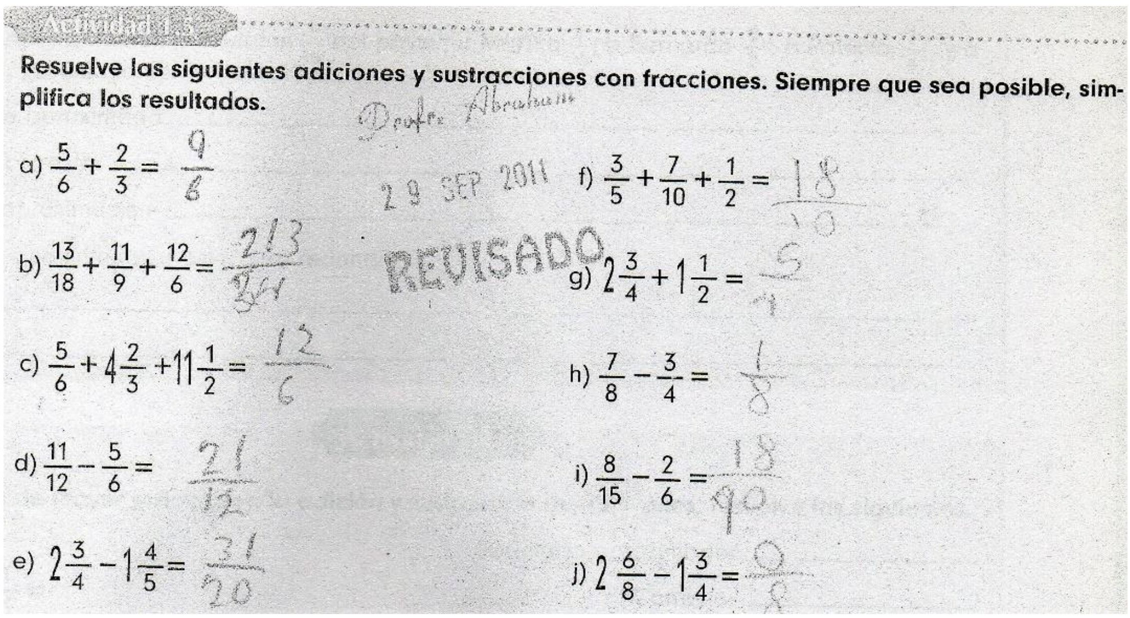
h) $\frac{23}{4}-\frac{16}{4}=$

i) $\frac{2}{3}+\frac{5}{3}=$

j) $\frac{45}{20}-\frac{25}{20}=$

Figura 24. Tarea 1.3. Resolución de adiciones de fracciones con igual denominador.
Fuente: Libro de matemáticas. Primer grado. Secundaria, p. 61. En: Arriaga et al., (2011). Matemáticas, Primer grado. Educación secundaria. Pearson. México.

Se observa en las imágenes anteriores (Figuras 24 y 25) que las tareas consisten en realizar sumas y restas de números fraccionarios, con la diferencia que en la primera imagen las tareas implican fracciones con igual denominador y en la segunda son denominadores diferentes. En ambos casos hay fracciones propias e impropias, y en el segundo se integran también fracciones mixtas; en la mayoría de los casos las operaciones se plantean con dos números fraccionarios, aunque también las hay que incluyen tres.


Actividad 1.5

Resuelve las siguientes adiciones y sustracciones con fracciones. Siempre que sea posible, simplifica los resultados.

Profe. Abraham

29 SEP 2011

REVISADO

a) $\frac{5}{6} + \frac{2}{3} = \frac{9}{6}$

b) $\frac{13}{18} + \frac{11}{9} + \frac{12}{6} = \frac{213}{54}$

c) $\frac{5}{6} + 4\frac{2}{3} + 11\frac{1}{2} = \frac{12}{6}$

d) $\frac{11}{12} - \frac{5}{6} = \frac{21}{12}$

e) $2\frac{3}{4} - 1\frac{4}{5} = \frac{31}{20}$

f) $\frac{3}{5} + \frac{7}{10} + \frac{1}{2} = \frac{18}{10}$

g) $2\frac{3}{4} + 1\frac{1}{2} = \frac{5}{4}$

h) $\frac{7}{8} - \frac{3}{4} = \frac{1}{8}$

i) $\frac{8}{15} - \frac{2}{6} = \frac{18}{90}$

j) $2\frac{6}{8} - 1\frac{3}{4} = \frac{0}{8}$

Figura 25. Tarea 1.5. Resolución de adiciones con fracciones.
Fuente: Libro de matemáticas. Primer grado. Secundaria, p. 62. En: Arriaga et al., (2011). Matemáticas, Primer grado. Educación secundaria. Pearson. México.

Lo descrito nos lleva a pensar que nuevamente la tecnología no constituye parte del proceso de estudio de la praxeología que comentamos, pues ésta iría en el sentido de explicar y de argumentar por qué es viable la técnica usada, por qué no sumar o restar, según sea el caso, los dos componentes de las fracciones dadas, o por qué colocar el mismo denominador de las fracciones involucradas en el resultado de la tarea. Se observa una praxeología incompleta al resolver las tareas a manera de entrenamiento sin la reflexión necesaria en los procesos de aprendizaje. En este sentido, la teoría, tal como en el primer bloque de tareas se mencionó, se invisibiliza dada la centralidad reiterada en el bloque práctico de la praxeología en estudio.

El tercer bloque de tareas contenidas en la lección, consiste en la resolución de situaciones problemáticas relacionadas con las fracciones y con números decimales. Esto se ilustra en la Figura 26, que se presenta en seguida:

i) En la escuela se desarrollan las actividades de acuerdo con el siguiente horario:clases en las primeras $2\frac{1}{2}$ horas, $\frac{1}{2}$ hora de recreo y clases en las últimas $2\frac{1}{4}$ horas. Si las clases inician a las 8:00, ¿a qué hora es la salida de la escuela?

j) Javier tiene $1\frac{1}{2}$ kg de harina y ocupa $\frac{3}{4}$ kg para hacer tortillas. ¿Cuánta harina le falta para preparar un pastel si se requiere 1 kg de harina?

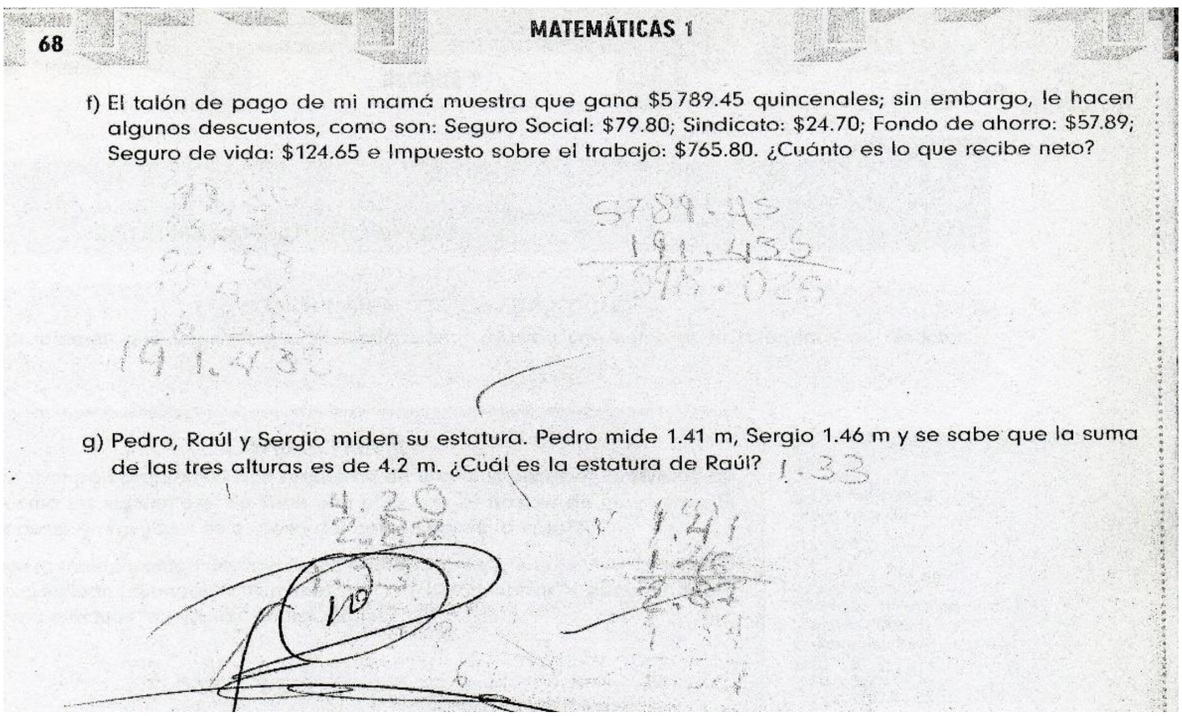
Figura 26*. Tarea 1.8 incisos d) y e). Situaciones problemáticas que implican el uso de fracciones.*
Fuente: Libro de matemáticas. Primer grado. Secundaria, p. 64. En: Arriaga et al., (2011). Matemáticas, Primer grado. Educación secundaria. Pearson. México.

El tipo de tarea que se presenta en esta sección, como ya se mencionó en párrafos anteriores, corresponde a diez planteamientos de diferentes situaciones problemáticas relacionadas con las fracciones; para ejemplificar, se han tomado sólo dos casos.

La técnica no se sugiere a través de algún ejemplo, pero la tarea obliga a los estudiantes a retomar los saberes matemáticos que se desarrollaron con los tipos de tareas planteadas anteriormente. Esto implica que hay apertura para que el alumno aplique el procedimiento que considere pertinente, aunque es muy probable que sólo cuente con uno: la que se ha adoptado como válido en la institución.

La tecnología estaría reforzando el proceso algorítmico a través de su comprensión y justificación. Con la teoría se pretendería llegar a generalizar la explicación de la técnica en situaciones problemáticas similares. Pero esta parte de la praxeología está ausente, aunque puede ser parte del proceso que dirige el maestro más allá del libro.

Entre las tareas que consisten en la resolución de situaciones problemáticas con números decimales (Figura 27), el primero es un problema que plantea el pago quincenal que recibe una persona y las diferentes deducciones que se le realizan, la cuestión es saber cuál es la percepción neta de la persona.


68 **MATEMÁTICAS 1**

f) El talón de pago de mi mamá muestra que gana $5 789.45 quincenales; sin embargo, le hacen algunos descuentos, como son: Seguro Social: $79.80; Sindicato: $24.70; Fondo de ahorro: $57.89; Seguro de vida: $124.65 e Impuesto sobre el trabajo: $765.80. ¿Cuánto es lo que recibe neto?

g) Pedro, Raúl y Sergio miden su estatura. Pedro mide 1.41 m, Sergio 1.46 m y se sabe que la suma de las tres alturas es de 4.2 m. ¿Cuál es la estatura de Raúl? 1.33

Figura 27*. Tarea 1.10 incisos f) y g). Situaciones problemáticas que implican el uso de expresiones decimales.*

Fuente: Libro de matemáticas. Primer grado. Secundaria, p. 68. En: Arriaga et al., (2011). Matemáticas, Primer grado. Educación secundaria. Pearson. México.

El segundo problema (Figura 27, página anterior) plantea tres datos (dos estaturas de tres involucradas y la suma de esas tres estaturas) a partir de estos datos se debe encontrar la tercera estatura (desconocida). Como puede apreciarse, son situaciones similares a las presentadas para trabajar con números fraccionarios.

Tanto la tecnología como la teoría quedan desvinculadas de la técnica, toda vez que se sustraen los datos numéricos del problema planteado para realizar una operación que desplaza en importancia a la interpretación de los resultados pues estos no se utilizan para expresar lo que la situación problemática plantea. Por lo anotado en el libro, lo importante es anotar el resultado numérico, no su significado en función de la situación.

La revisión de los programas y libros de texto de los grados donde se realizó este trabajo permitió observar que existe en tales materiales una variedad de praxeologías matemáticas propuestas para su estudio en ambos grados. En sexto grado se tiene una mayor variedad de ellas; en primero de secundaria se recuperan esas praxeologías para después ir hacia aquellas relacionadas con las operaciones con números fraccionarios y decimales.

En ambos grados, sin embargo, las praxeologías son incompletas. Se da una atención prioritaria al trabajo con el bloque práctico de la estructura praxeológica, aunque esta centración parece agudizarse en el libro de secundaria analizado. Se omiten acciones orientadas hacia la justificación de las técnicas, así como a la identificación de la teoría subyacente en cada una de las praxeologías matemáticas revisadas. Esta omisión nos provoca inquietud o desconcierto en torno a la repercusión de esta ausencia en los procesos de estudio en los que participan los estudiantes y en su logro académico.

CAPÍTULO 6. EL ANÁLISIS DE PRAXEOLOGÍAS MATEMÁTICAS EN LAS LIBRETAS DE LOS ALUMNOS

En este capítulo se exponen los resultados del análisis de las libretas de matemáticas los alumnos, el cual fue uno de los objetivos esenciales de esta tesis. El capítulo se inicia con una exposición de la importancia y el uso que los profesores de los grupos visitados les dan a las libretas de los estudiantes. Este uso y esta importancia se consideraron a partir de las respuestas proporcionadas por los profesores a las preguntas que les hicimos al respecto durante la investigación. El resto del capítulo se dedica a las libretas. Al igual que en el capítulo 5, la exposición se divide en dos partes. La primera de ellas se dedica a las libretas de sexto grado y la segunda a las de primer grado de secundaria.

6.1. Importancia de las libretas según opinión de los profesores.

En el desarrollo de la presente investigación, el análisis de los cuadernos de trabajo de los alumnos es una fuente de información fundamental porque constituye una evidencia fuerte del trabajo que se desarrolla en las clases de matemáticas. Para poder disponer de las libretas, se hizo una solicitud verbal a los maestros de sexto grado y de primero de secundaria previamente contactados con fines de esta investigación. Se solicitaron las libretas de dos alumnos que, consideraran, llevaran todos los apuntes hasta el momento registrados como producto del trabajo de la asignatura.

Los maestros proporcionaron con buena disposición tales materiales. Con la finalidad de establecer la importancia que en el desarrollo de la actividad matemática tienen esas libretas en los grupos participantes en la investigación, se preguntó lo siguiente en una entrevista individual a los docentes:

¿Para qué tipo de actividades ha designado usted el uso de la libreta, para las actividades más difíciles, para todo lo que van ellos estudiando, para algunos ejercicios de reforzamiento de lo que hacen en el libro…?

Mtra. A: (*Gisela. Primaria)*[19]*:* Pues la verdad creo que la hemos usado de manera general... la libreta es como nuestro diario, vamos a anotar en nuestra libreta todo lo que vamos haciendo en la clase, todo.

Mtra. B (Laura. Primaria): Pues es para todo lo que estamos estudiando, para reforzamiento de los ejercicios que vienen en el libro de texto, pero en sí primero trabajo con la libreta y luego me voy con el libro de texto.

Mtra. C (Irma. Primaria): Es para todo, como le comenté hace un momento, es para las tareas, también para las actividades que marcan los libros, como instrumento también de evaluación me sirve.

Mtra. D. (Norma. Primaria): Para todo, va desde lo simple. Para que el niño vaya tomando nota, [que] él vaya sacando su propio conocimiento y vaya haciendo experimentos con los resultados hasta que llegue a él y de la forma que sea puede ser simple pero sí va de lo simple a lo complicado.

Mtro. E. Carlos (Secundaria): Bueno, sí, en la libreta vamos haciendo actividades que vienen en nuestros planes y programas, ahí vamos documentando toda la información que van recibiendo los alumnos, así mismo, si hay alguna actividad del libro de texto pues la vamos añadiendo y si se deja alguna investigación o alguna tarea también ahí es donde lo van documentando.

Mtro. F. Álvaro (Secundaria): De hecho, es en todas [las actividades que se utiliza] es a partir desde lo conceptual a lo procedimental también, porque ahí va uno plasmando cada una de las actividades que llevamos a cabo durante la clase y la utilizamos para todo.

En las aseveraciones anteriores queda constatada la importancia que tienen las libretas de trabajo de los alumnos, no sólo para los maestros que laboran en el nivel de educación primaria, sino también para los que se desempeñan en el de

[19] Se han cambiado los nombres de las maestras y maestros por razones de confidencialidad.

secundaria. Es en estas consideraciones que se basa la pertinencia de asumir dichos materiales como una bitácora escolar de registro y de consulta, cuyo análisis constituye para este trabajo una puerta de ingreso a un espacio institucional donde se da cuenta de la construcción de praxeologías matemáticas en diferentes estados de completitud en relación con los números fraccionarios y decimales.

Para seleccionar las libretas que se analizarían, se contó con las de dos alumnos por grupo, ocho de primaria y seis de secundaria; éstas se revisaron para hacer una comparación entre las del mismo grupo y así advertir su contenido y decidir solo por una de cada grupo: la que estaba más completa. Una vez definidas las libretas por analizar se procedió a la clasificación de los diferentes ejercicios contenidos en las mismas.

De tal manera, en este capítulo, se presenta en primer lugar el resultado de una revisión general de las libretas, resultados que se exponen mediante tablas que muestran cómo se distribuyen los diferentes tipos de tareas que los chicos realizan en ellas para aprender los números decimales y las fracciones. Sin embargo, no es tan sólo la descripción cuantitativa lo que se expone en este apartado sino el análisis e interpretación de lo que esos datos generan en cuanto a la centralidad y atención del trabajo áulico en torno a las praxeologías relacionadas con las fracciones y los números decimales, en función de lo que establecen los programas de estudios de los grados mencionados.

En la segunda parte de este capítulo se expone un análisis más particular de algunas tareas que fueron propuestas por los maestros de grupo para el estudio de contenidos matemáticos específicos, lo que desde el enfoque que vertebra este trabajo se denomina praxeología matemática.

6.2. Los saberes enseñados: evidencias en las libretas de trabajo de 6° grado

De cada libreta se contabilizó el total de tareas incluidas; en la mayoría de los casos cada conjunto de tareas abarca una página o dos. Conviene señalar que hay tipos de tareas que se repiten con mucha frecuencia, por ejemplo, los algoritmos de las operaciones que implican multiplicar y dividir números decimales, tareas que en una de las libretas se realiza aproximadamente unas veinte veces.

Lo anotado en las libretas cuyos datos se desagregan en la tabla 8 abarca un periodo de trabajo escolar comprendido entre el mes de septiembre de 2011 (inicio de ciclo escolar) y el mes de abril de 2012; es decir, contemplan actividades realizadas durante los primeros cuatro bimestres de ciclo escolar. Contenidos por eje curricular en las libretas de los alumnos de 6º grado.

Tabla 8

Contenidos por eje curricular en las libretas de los alumnos de 6º grado.

	NÚMERO Y % DE TAREAS POR EJE CURRICULAR			
LIBRETA	SENTIDO NUMÉRICO	FORMA, ESPACIO Y MEDIDA	MANEJO DE LA INFORMACIÓN	TOTAL
“A”	42 58.3%	13 18.1%	17 23.6%	72 100%
“B”	39 39.4%	41 41.4%	19 19.2%	99 100%
“C”	35 48.6%	26 36.1%	11 15.3%	72 100%
“D”	36 46.7%	28 36.4%	13 16.9%	77 100%
% PROMEDIO	48.25%	33%	18.75%	326 100%

Nota: Cada libreta de trabajo corresponde a un grupo.

La información contenida en la tabla 8 permite ver que alrededor de la mitad de las tareas que realizan los alumnos de 6° grado en las libretas corresponden al eje “Sentido numérico y pensamiento algebraico”. Un ejemplo de esas tareas es la siguiente:

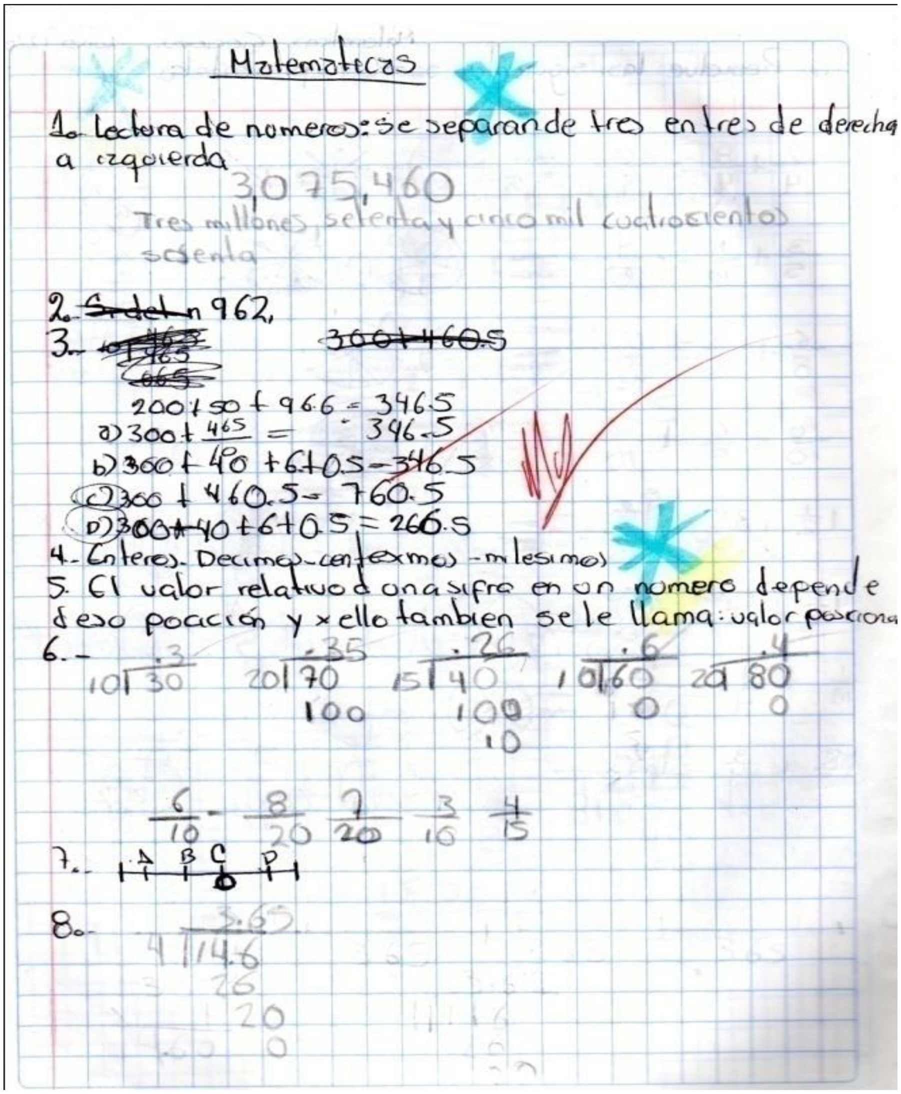


Figura 28. Tarea. Lectura y escritura de expresiones decimales.

FUENTE: Libreta de sexto grado, grupo A. En: alumna del grupo sexto A (2013-2014). Libreta de matemáticas.

En la Figura 28, que corresponde a una hoja de la libreta de una alumna del grupo A de sexto grado, están contenidas tareas relacionadas con la lectura y escritura de números enteros y decimales, así como dedicadas a resolver divisiones y a representar algunos números en la recta. No se profundizará en el análisis de tales tareas por el momento.

Con el propósito de comparar lo que se encuentra en los cuadernos de trabajo con la propuesta del Programa de Estudios de matemáticas de sexto grado de primaria, recuérdese la información contenida en la tabla 2 de este trabajo. Del análisis de los datos que se integran en dicha tabla se establece lo siguiente:

En el eje “Sentido numérico y pensamiento algebraico” hay aproximadamente un 8% de diferencia entre los porcentajes con respecto al número de praxeologías que se incluyen en las libretas y las que se establecen en el Programa de Estudios respectivo. Desde esta perspectiva se hace evidente que en las libretas de los alumnos se destina mayor trabajo escolar a tareas relacionadas con praxeologías de este eje.

En cuanto al eje “Forma, espacio y medida” no hay una diferencia muy significativa entre lo que se encuentra en los materiales analizados.

En lo relativo al eje “Manejo de la información” los porcentajes se alejan por 6 puntos. En las libretas las tareas de este eje se abordan con menor frecuencia a lo indicado en el Programa Oficial. Se entiende entonces, de manera general, que por parte de los profesores hay una menor atención a los contenidos (praxeologías matemáticas) en el eje mencionado.

En particular, y para referencia del presente análisis, hay que tomar en cuenta que, de las trece praxeologías agrupadas en el Eje Sentido numérico y pensamiento algebraico, nueve abordan cuestiones relacionadas con los números decimales y las fracciones.

Esta comparación, permite apreciar que en sexto grado las tareas que los docentes piden con mayor frecuencia realizar a los alumnos en sus libretas tienen que ver con temas relativos al eje “Sentido numérico y pensamiento algebraico”, lo que coincide con las disposiciones oficiales. Destaca también que el eje con menor atención en las libretas es el de “manejo de la información”. Esta diferencia podría estar relacionada con lo que los maestros y maestras con quienes se trabajó señalan: que los mayores problemas de aprendizaje que detectan en sus alumnos son de aritmética, principalmente con aspectos relativos a las fracciones y a los números decimales. Los cuatro maestros de primaria entrevistados coincidieron en esta aseveración, por ejemplo:

> *Investigador: considerando esa experiencia en el servicio que usted comenta ¿En cuál es el tema de matemáticas que advierte que los alumnos de quinto y sexto grado presentan mayor dificultad de aprendizaje?*
>
> *Gisela (Mtra. de Primaria): Bueno en cuanto a la disposición que los niños tienen, me parece que es el tema de las operaciones con fracciones.*
>
> *Irma (Mtra. de Primaria): Bueno pues, es en las fracciones, en la cuestión de aplicación de problemas que impliquen fracciones es en donde se notan más las deficiencias.*

Así mismo, los profesores manifiestan que son las operaciones básicas (aditivas y multiplicativas) las nociones fundamentales que deben adquirirse respecto a los temas de fracciones y decimales durante la educación primaria. En consecuencia, hay una mayor atención en praxeologías centradas en dichos temas.

A continuación, el trabajo de análisis de las libretas se centra en lo relativo al tratamiento de temas relacionados con los decimales, con las fracciones y con los que impliquen la relación de ambos temas. Por lo tanto, en las siguientes cuatro tablas, se mostrará la distribución de los tipos de tareas relacionadas exclusivamente con los temas señalados.

6.2.1. Libreta del grupo A.

El conjunto de tareas contenidas en la libreta A se distribuye como se observa en la tabla Tabla 8, donde destaca una atención sumamente reiterada a tareas que implican multiplicación y división con decimales. Así mismo, se observa que sólo tres de treinta tareas tienen que ver específicamente con fracciones y dos con la relación entre éstas y los números decimales.

Adicionalmente, las tareas que forman parte de praxeologías sobre los números decimales, las fracciones y los que relacionan a ambos números realizadas por los estudiantes del grupo a cargo de la maestra A, se centran en el tema *Problemas multiplicativos* y se orientan hacia la mecanización de los algoritmos para multiplicar y dividir números decimales.

Tabla 9

Análisis de libreta de trabajo de la alumna del grupo A de 6º grado de primaria.

LIBRETA A	UBICACIÓN TEMÁTICA DE LOS TIPOS DE TAREAS, EJE: SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO			
	NÚMEROS Y SISTEMAS DE NUM.	PROBLEMAS ADITIVOS	PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS	
DECIMALES	-Orden de #s decimales (1) -Valor posicional de los decimales (1).		-Multiplicación con decimales (2). -Multiplicación y división con decimales (21).	5
FRACCIONES	-Comparación de fracciones (1). -Ubicación de fracciones en la recta numérica (1).	- Suma de fracciones comunes y mixtas con representación gráfica (1).	-Multiplicación de fracciones (2).	
RELACION FRACCIÓN= DECIMAL	-Representación gráfica de fracción decimal (1). -Ubicación de decimales en la recta numérica (1).			
TOTAL	6	1	25	**32**

Nota: Los totales representan la cantidad de tipos de tareas hallados en la libreta.

Hay tareas que implican a los números decimales, desde la lectura, la escritura y algo de su ubicación en la recta numérica, pero hay una centralidad muy marcada en tareas de ejecución de algoritmos para resolver operaciones, principalmente la multiplicación y división (Figuras 29 y 30, siguientes páginas). En estas tareas, no se halla evidencia de alguna relación con el planteamiento de situaciones problemáticas que le den sentido a la realización de tales tareas y que, en términos de nuestra categoría de análisis, no llaman ni a la tecnología ni a la teoría.

Las tareas con fracciones son muy escasas y en cuanto el contenido matemático de las tareas, se privilegia la interpretación de la fracción como parte – todo en unidades continuas; de tal interpretación, puede percibirse, se parte para la realización de algunas tareas con el objetivo de lograr una mejor comprensión del algoritmo más que del sentido de la operación como recursos para resolver algún problema.

Una actividad matemática de tales características, que se desarrolla desde una perspectiva descontextualizada y sin finalidad, ya que no responde a una pregunta que el alumno haya podido plantearse o que se le hayan planteado, concibe al saber matemático como un desarrollo de habilidades algorítmicas, sin aplicaciones, justificaciones o teorizaciones, tal como puede suponerse al observar las tareas de las siguientes hojas de trabajo que muestran cómo la tarea consiste solamente en resolver operaciones de multiplicación y división cuyos resultados implican números decimales.

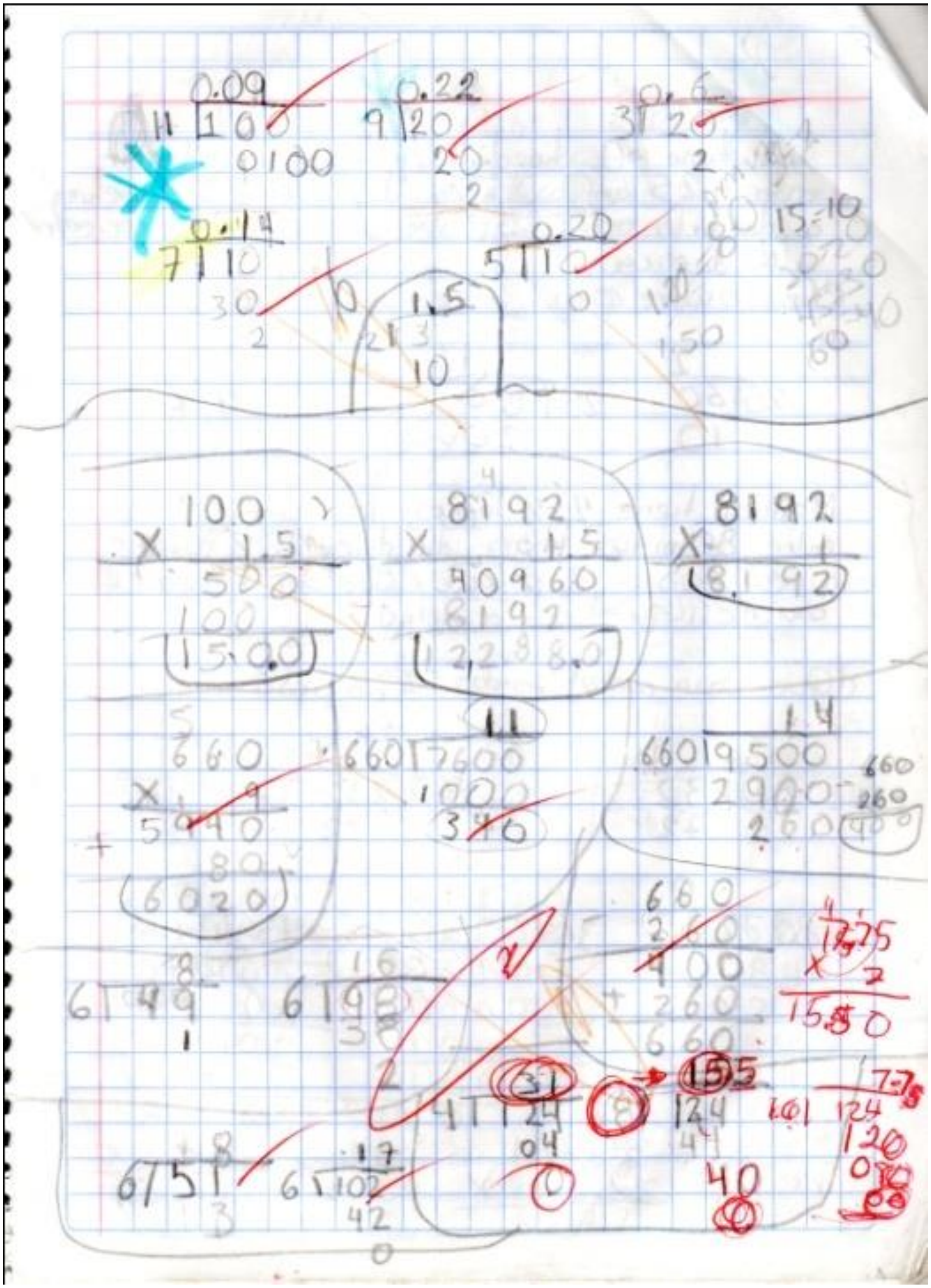


Figura 29. Tarea. Ejercicios algorítmicos con números decimales.
FUENTE: Libreta de sexto grado, grupo A. En: alumna del grupo sexto A (2013-2014). Libreta de matemáticas.

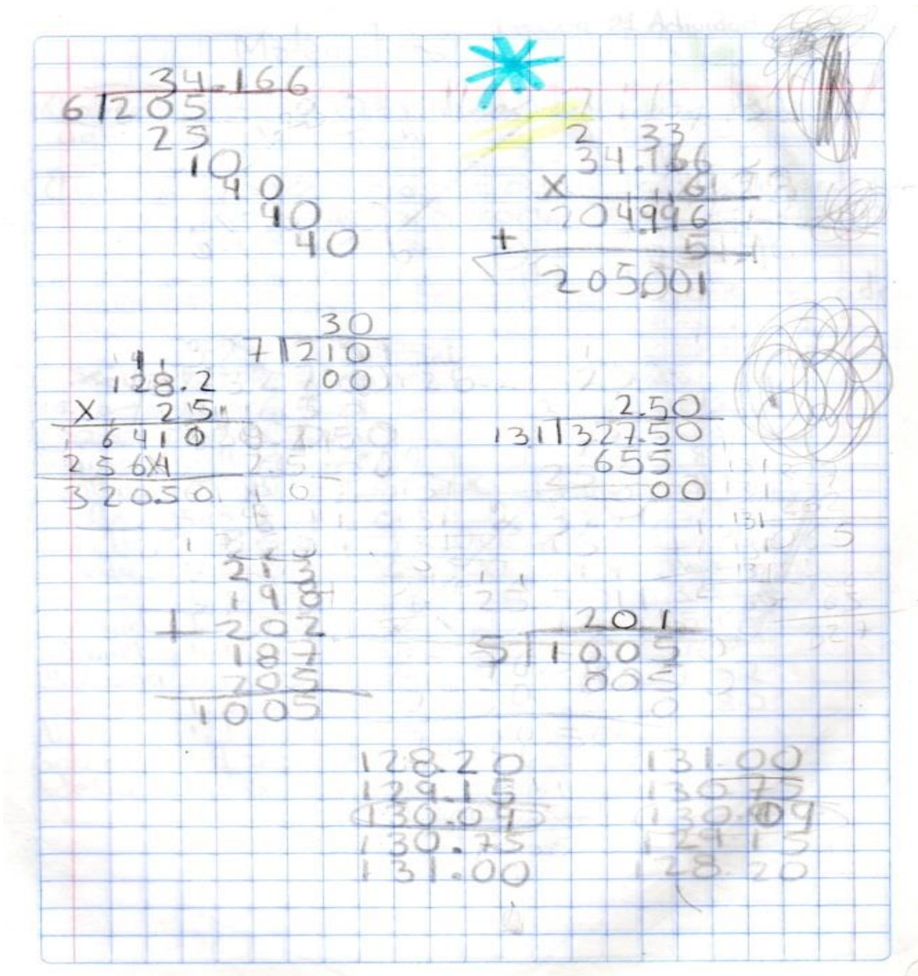


Figura 30. Tarea. Ejercicios algorítmicos con números decimales.
FUENTE: Libreta de sexto grado, grupo A. En: alumna del grupo sexto A (2013-2014). Libreta de matemáticas.

Las tareas que se observan en la Figura 31, consisten en representar gráficamente situaciones que implican adición de fracciones de tipos diferentes (de igual denominador, otras con múltiplo común y unas más mixtas). La consigna es clara: *resuelve y representa*. La técnica que se percibe en el apunte fue recomendada por el maestro y conduce a los alumnos primero a realizar el algoritmo para resolver la operación indicada y en seguida, a representar gráficamente cada uno de los sumandos fraccionarios.

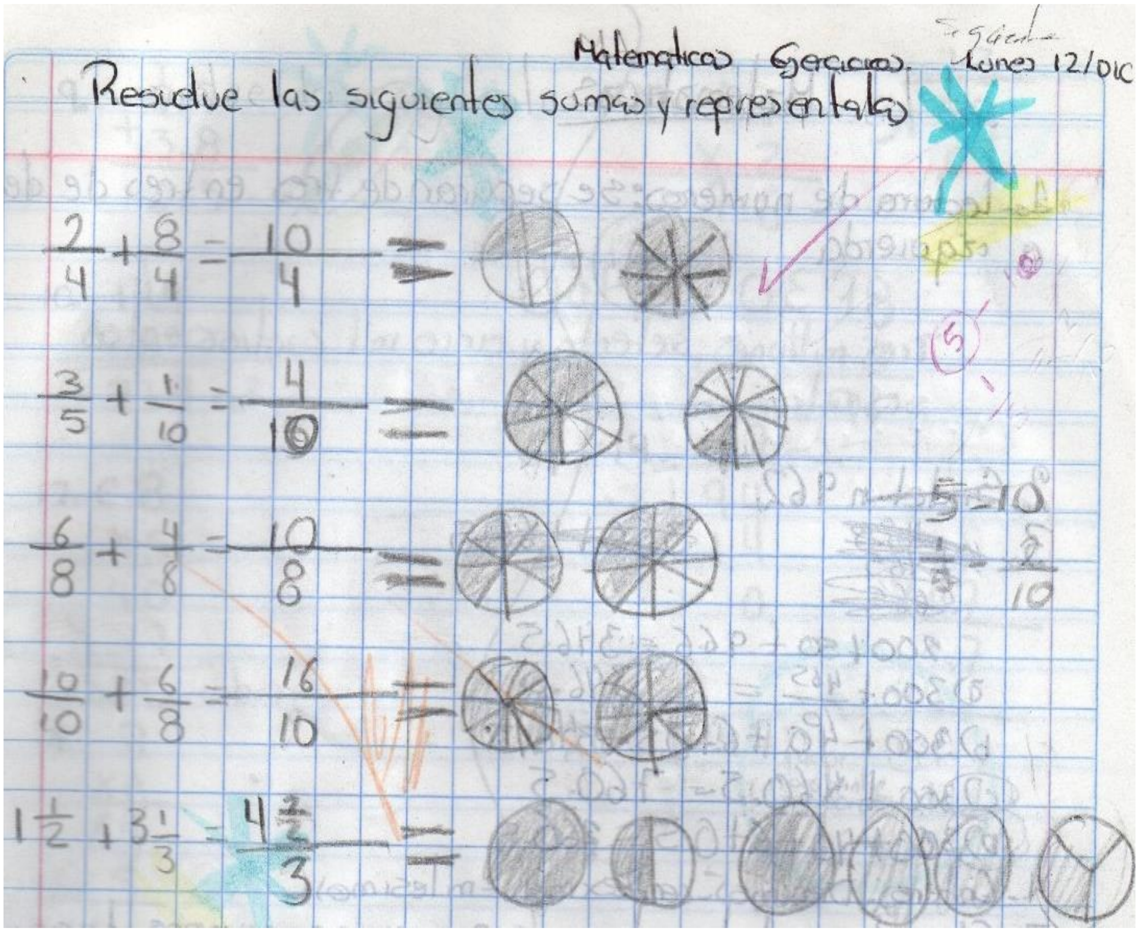


Figura 31. Tarea. Representación gráfica de situaciones que implican adición de fracciones.
FUENTE: Libreta de sexto grado, grupo A. En: alumna del grupo sexto A (2013-2014). Libreta de matemáticas.

Por lo que se observa en la figura 31, los alumnos no tuvieron problemas para resolver las tareas en las que las fracciones tienen igual denominador, no es así cuando éste es diferente. Véase la segunda tarea; ésta se dificultó de tal manera que se distingue una intervención del maestro al margen mostrando la equivalencia entre 1/5 y 2/10, intervención con la que se logra corregir el resultado inicialmente anotado por el alumno. Sin embargo, ya no sucede lo mismo con la cuarta y la quinta tareas donde es evidente que no hubo una clara comprensión de las mismas y, en consecuencia, se presentan resultados que sólo dan cuenta de la necesidad de madurar esta técnica (para la adición de fracciones) a través de "experimentar" dicho elemento praxeológico con los alumnos.

¿Qué se observa en el desarrollo de este tipo de tareas? Que la preocupación del docente es que los alumnos representen gráficamente fracciones, esto hubiera podido ser posible sin lanzar la consigna sumar. Con ello se reducen los alcances que pudo haber logrado con la realización de tales tareas, como afianzar la adición de diferentes tipos de fracciones y la representación gráfica de los resultados alcanzados ya que implicaría conocer la propiedad de equivalencia de fracciones.

Pero el proceso de estudio se corta ahí, en la aplicación de la técnica (representar mediante un modelo continuo vinculado a diferentes tipos de fracciones); la ausencia de la representación gráfica del resultado implica también la limitación del avance por esclarecer la técnica para realizar lo anterior e identificar los alcances en términos de la teoría implícita relativa a la adición y sustracción de fracciones.

Como se ha podido ver en las páginas de la libreta, las praxeologías matemáticas propuestas al grupo A no rebasan el nivel técnico: las tareas (adicionalmente bastante monótonas) van orientadas a resolver cálculos o ejercicios mecánicos, cuya técnica no implica ningún reto o esfuerzo matemático: la técnica se conoce con anticipación y se trata sólo de afianzarla por repetición.

6.2.2. Libreta del grupo B.

En el trabajo realizado en la libreta B cuyo contenido se sintetiza en la siguiente tabla (No. 9), se observa la realización de un trabajo abundante con el tema Números y sistemas de numeración. Se advierte sobre ese respecto que existe una diversidad considerable de tipos de tareas abordadas, lo que se ajusta un tanto a lo señalado por el Programa de estudios correspondiente. En cambio, también se observa que se trabaja poco con praxeologías del tema Problemas multiplicativos y lo que es más significativo, no existe en la libreta revisada evidencia de tareas realizadas que correspondan al tema Problemas aditivos.

Tabla 10

Análisis de libreta de trabajo de la alumna del grupo B de 6º grado de primaria.

LIBRETA B	UBICACIÓN TEMÁTICA* DE LAS TAREAS, EJE: SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO (*conforme a los 3 temas generales que plantea el Programa de estudios 2001 de 6°)			
	NÚMEROS SISTEMAS DE NUM.	PROBLEMAS ADITIVOS	PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS	
DECIMALES	-Orden de #s decimales (1) -Valor posicional de los decimales (2). -Escritura de números decimales (1).		-Multiplicación con decimales (2). -Multiplicación y división con decimales (3).	
FRACCIONES	-Orden de las fracciones comunes (1). -La fracción como cociente (Problemas) (4) -Comparación de fracciones (1). -Fracciones equivalentes (1). -Porcentajes (1).		-División de fracciones (2).	0
RELACION FRACCIÓN=DECIMAL	-Representación gráfica de fracción decimal (1). -Ubicación de decimales en la recta numérica. (2) -Conversión fracciones a decimales y viceversa (1). -Problemas (1).			
TOTAL	17		7	**24**

Nota: Los totales representan la cantidad de tipos de tareas hallados en la libreta.

Por cuanto hace a los números decimales, en la libreta B están contenidas tareas que ejercitan a los alumnos en la lectura y escritura de los mismos. Esto puede observarse en la Figura 32:

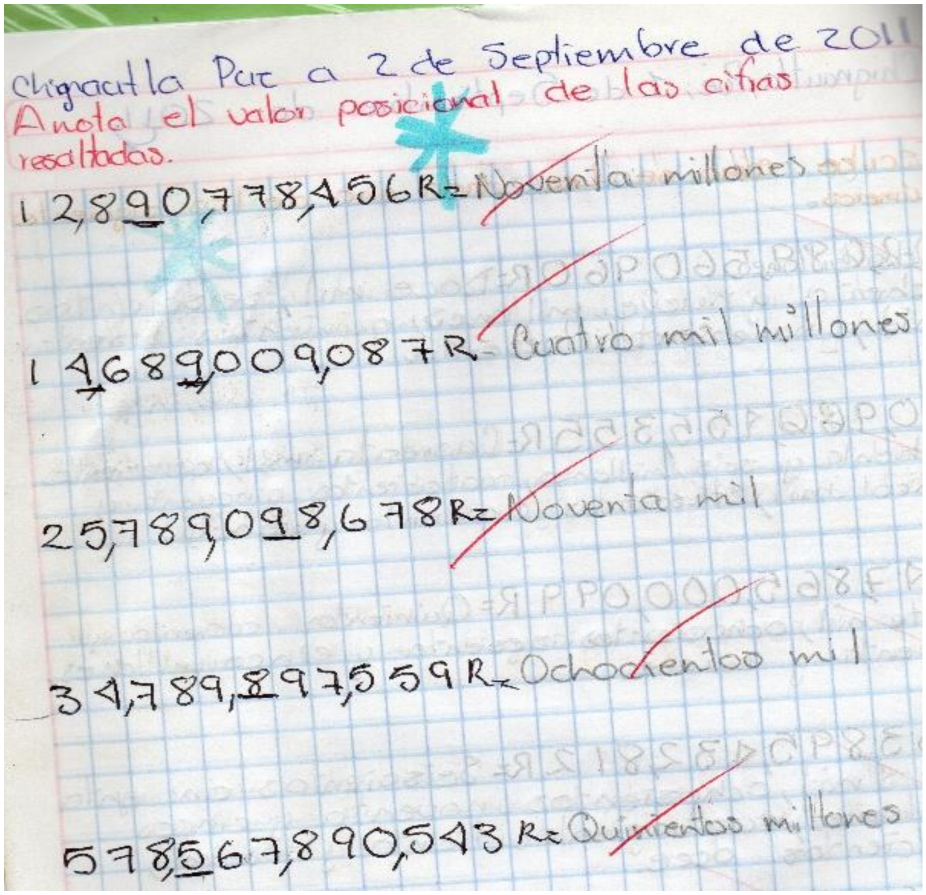


Figura 32. Tarea. Escribir con letra el valor posicional de las cifras resaltadas. FUENTE: Libreta de sexto grado, grupo B. En: alumna del grupo sexto B (2013-2014). Libreta de matemáticas.

Respecto del manejo del valor posicional, se invierte poco en esta libreta pues sólo al inicio del ciclo escolar se realiza la tarea de escribir números decimales con alguna cifra resaltada con color y se pide en seguida anotar el valor relativo de tal cifra sin que haya evidencia de aplicarse a otras tareas orientadas al estudio de esa praxeología (Figura 32).

En este caso, como en el anterior, las operaciones de multiplicación y división contenidas en la libreta en cuestión (Figura 33) no implican relación con situaciones problemáticas que permitan darle sentido a la operación aritmética y que promuevan la posibilidad de utilizar diversas técnicas para realizar la tarea (en este caso la resolución del problema). No obstante, se presentan tareas que implican operaciones de multiplicación y división de números decimales vinculados a tareas que corresponden a otro ámbito de las matemáticas como es la geometría, en este caso, con los tipos de tareas que consisten en obtener el área de polígonos (Figura 33), nuevamente con interés por la mecanización de algoritmos.

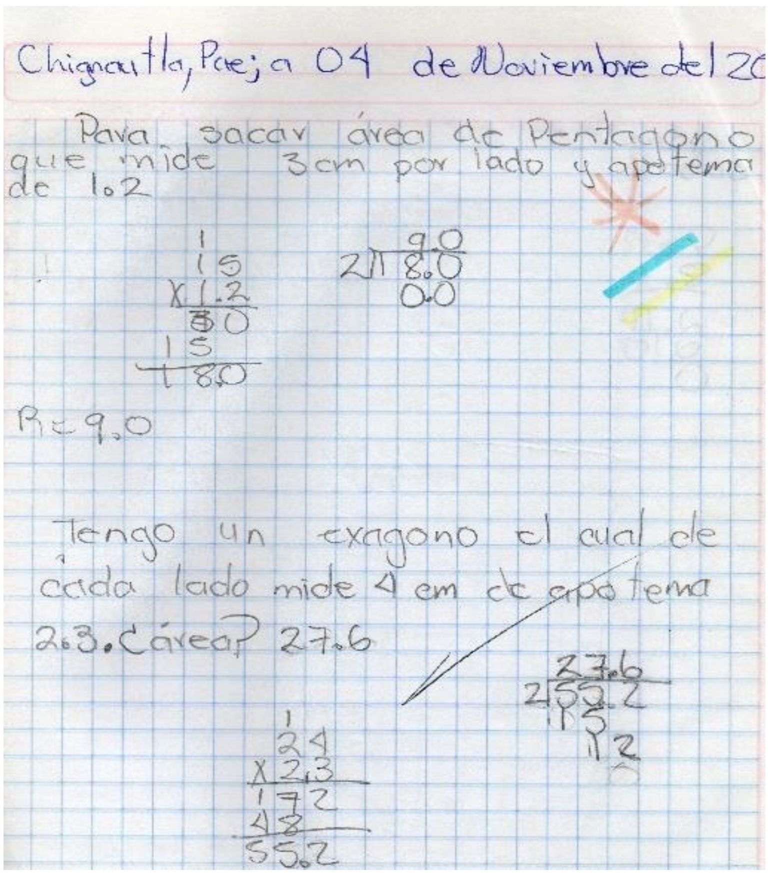


Figura 33. Tarea. Resolución de ejercicios algorítmicos que implican números decimales.
FUENTE: Libreta de sexto grado, grupo B. En: alumna del grupo sexto B (2013-2014). Libreta de matemáticas.

Con los tipos de tareas relativos a las fracciones sucede algo similar que con las dedicadas a los decimales: se valora la habilidad para la ejecución de ejercicios en un nivel algorítmico. Se aprecia además la reproducción de algunas de las tareas propuestas en el libro de texto oficial, aunque cabe hacer notar el uso de fotocopias para reforzar el aprendizaje de los contenidos a través de la realización de tareas mecánicas y repetitivas. En dichas fotocopias se plantean problemas que implican, en el caso de las fracciones, la resolución de problemas poco interesantes, que en realidad no son problemas porque por su simplicidad los estudiantes conocen de antemano la forma de resolverlos, con base en el significado de cociente o parte-todo (véase Figura 34, página siguiente).

La fracción no alcanza a despojarse de la concepción parte – todo, así mismo no hay evidencia de trabajo con problemas aditivos o multiplicativos con fracciones que son algunas de las prioridades que establece el Programa de matemáticas de educación primaria para el sexto grado.

En la Figura 34 (página siguiente), se observa también, una serie de tareas que implican el uso de la fracción en su significado cociente: se trata de situaciones donde se deben repartir ciertas cantidades de galletas entre algunos niños, con resultados siempre fraccionarios. Para la resolución de tales tareas, la propietaria de la libreta se apoya en representaciones gráficas que se trabajan desde que se inicia el estudio de las fracciones (tercer grado) de primaria. Sin embargo, cabe destacar que en las tareas señaladas con los números 2 y 3, las partes (fracciones) en cada uno de ellas no son iguales, lo cual puede significar que no hay una idea clara de la equipartición.

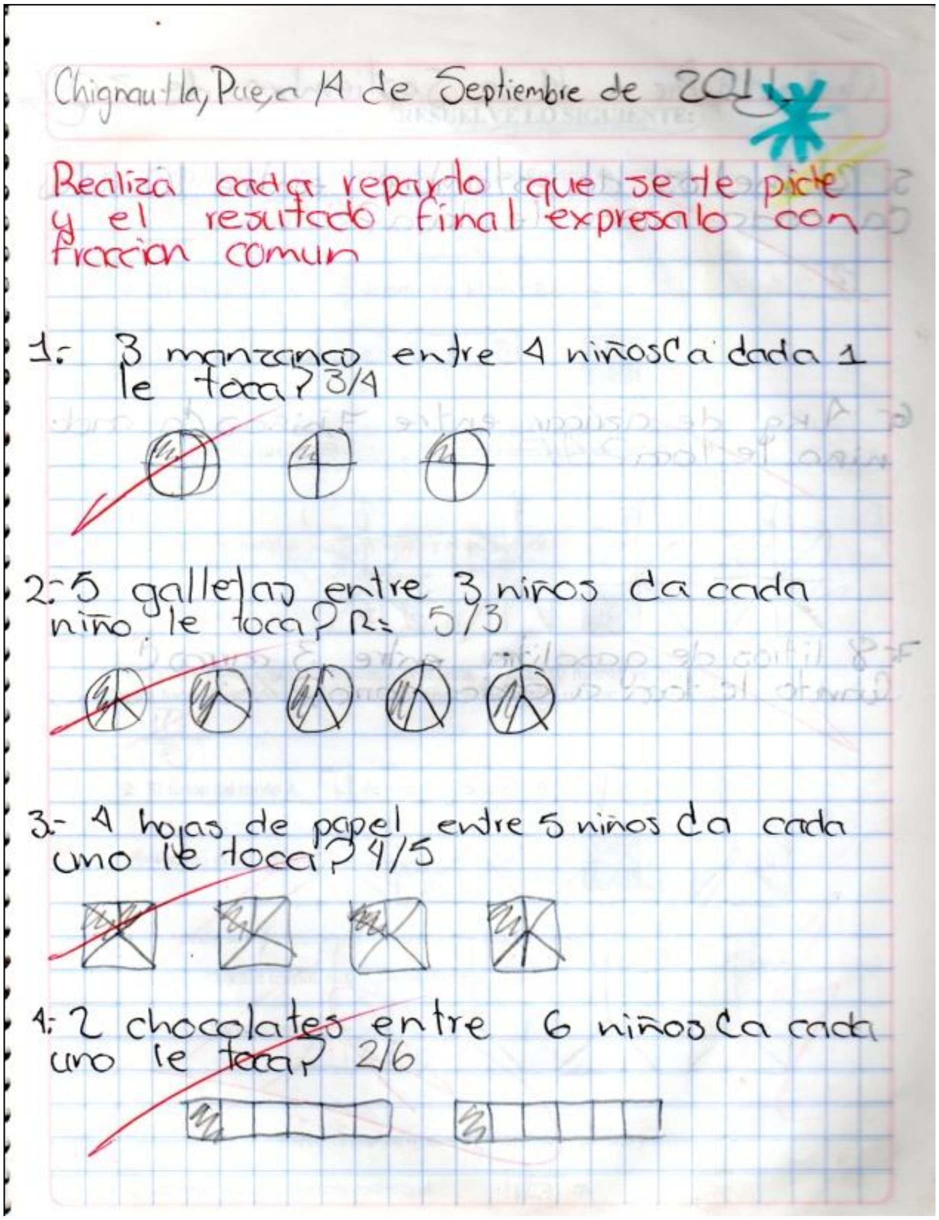


Figura 34. Tarea. Uso de la expresión fraccionaria en situaciones de cociente. FUENTE: Libreta de sexto grado, grupo B. En: alumna del grupo sexto B (2013-2014). Libreta de matemáticas.

Estos detalles conducen a formularse tres consideraciones: primero, se descuida la equidivisión de las unidades a fraccionar; segundo, no se observa un proceso que justifique el resultado que se reporta en cada ejercicio, y tercero, pudiera ser que los alumnos no encuentren sentido al tema de las fracciones en situaciones de este tipo y se favorezca que el tema siga representando una dificultad.

Vayamos ahora al tema de los números decimales (Figura 35). La fracción decimal y su conversión a número decimal se trabaja recurrentemente y la realización de las tareas derivadas del estudio de tal praxeología denota un proceso repetitivo de resolución algorítmica.

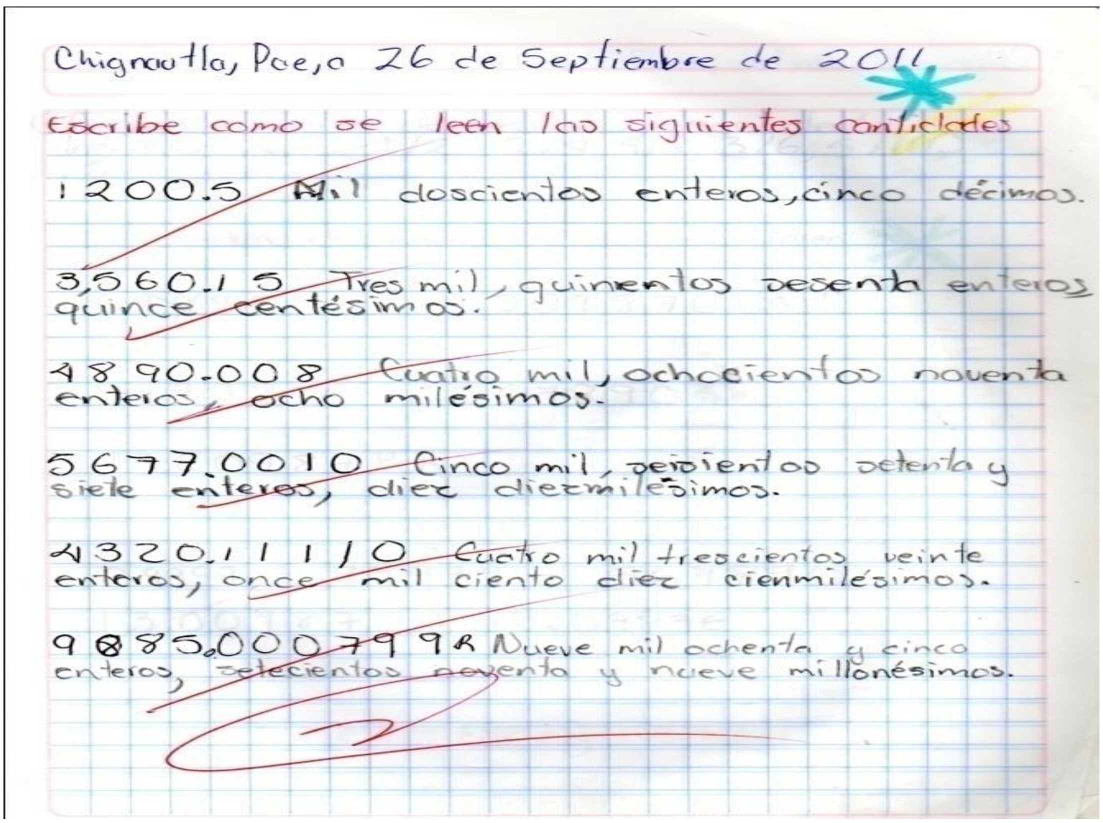


Figura 35. Tarea. Escribir alfabéticamente cantidades expresadas en números decimales. FUENTE: Libreta de sexto grado, grupo B. En: alumna del grupo sexto B (2011-2012). Libreta de matemáticas.

En la Figura 35 se incluyen varias tareas que implican la expresión escrita (con lenguaje natural) de cantidades con decimales: se trata de hacer una conversión del lenguaje numérico al lenguaje común. En ambos casos (Figuras 34 y 35) se trata de la ejecución de tareas retomadas de las praxeologías contenidas en los libros de texto gratuito. Sin embargo, los elementos de la praxeología que se seleccionaron para el trabajo en la libreta, de nuevo orienta la enseñanza de las matemáticas, -y en especial el trabajo pedagógico con los temas de fracciones y decimales- a un nivel algorítmico. La centración en los algoritmos se nota también en que en el libro de texto se trabaja la propiedad de densidad de los números decimales y de este tema no hay ningún registro en la libreta. Lo anterior es un indicativo de la limitada o nula atención que se ha dado a la justificación de las técnicas. Es decir, de la escasísima integración de la tecnología como parte del proceso de estudio de las praxeologías matemáticas; una tecnología que colaboraría en la comprensión del concepto, es decir, de la parte teórica de la praxeología en cuestión.

En la libreta de trabajo se identifican también algunas tareas que consisten en la ubicación de números decimales en la recta numérica; se advierte que muy probablemente se trata de la reproducción de un esquema realizado en el pizarrón pues no se evidencia ningún titubeo en la ubicación de los puntos correspondientes a los números decimales dados. No obstante, se observa que al realizar otra tarea del mismo tipo (Figura 36, página siguiente), (se entiende que ahora sin la orientación del docente), se le complica al estudiante realizarla; esto podría ser consecuencia de no avanzar hacia la justificación de las técnicas por parte de los alumnos quienes dan evidencia en los testimonios contenidos en las libretas de trabajo que tan sólo reproducen procedimientos de alguna forma dados por el director del proceso de estudio. Obsérvense las siguientes imágenes como referencia.

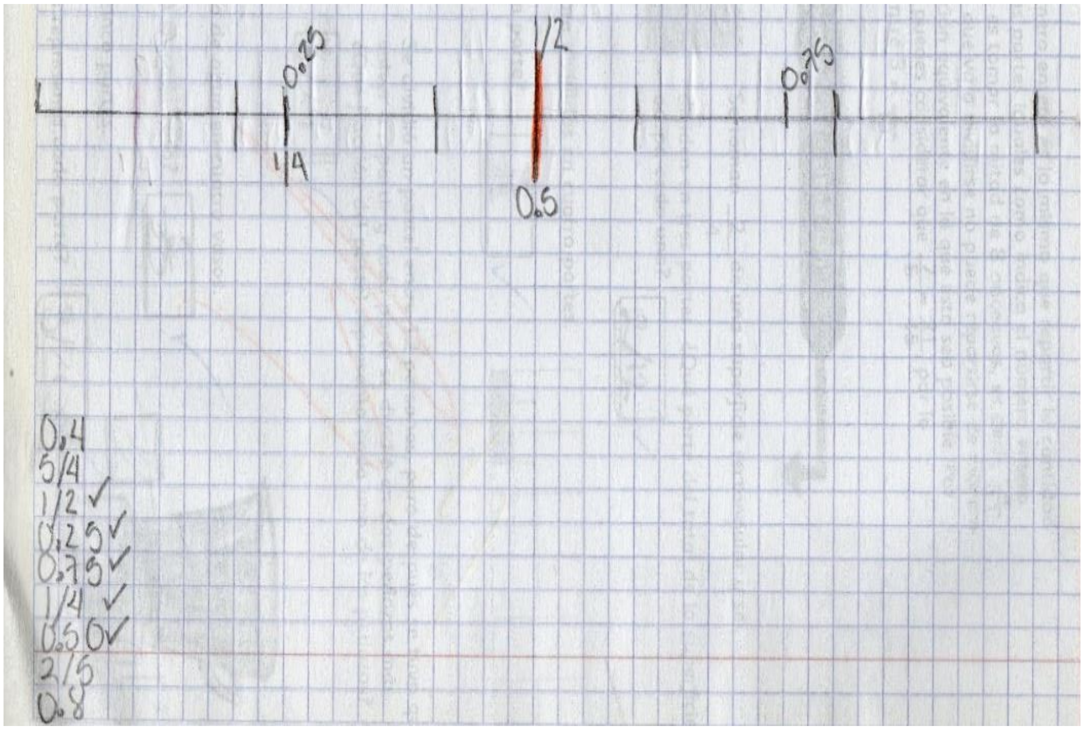


Figura 36.Tarea. Ubicación de números decimales en la recta numérica.
FUENTE: Libreta de sexto grado, grupo B. En: alumna del grupo sexto B (2011-2012). |Libreta de matemáticas.

6.2.3. Libreta del grupo C.

Pasemos ahora a observar en la siguiente tabla lo registrado en la libreta C.

Tabla 11

Análisis de libreta de trabajo de la alumna del grupo C de 6º grado de primaria.

LIBRETA C	UBICACIÓN TEMÁTICA* DE LAS TAREAS, EJE: SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO (*conforme a los 3 temas generales que plantea el Programa de estudios 2001 de 6°)		
	NÚMEROS Y SISTEMAS DE NUM.	PROBLEMAS ADITIVOS	PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS

DECIMALES	-Orden de #s decimales (2). -Valor posicional de los decimales (3). -Lectura y escritura de números decimales (3). -Un problema con números decimales (1)	-Suma y resta de números decimales (2).	-Multiplicación con decimales (3).	4
FRACCIONES	La fracción como cociente (1). La fracción como parte-todo (3) -Fracciones equivalentes (2).			
RELA-CION FRAC-CIÓNES Y DECIMALES	-Notación desarrollada de fracciones decimales (1). -Ubicación de fracciones decimales en la recta numérica (3). -Conversión de decimales a fracciones (1).			
TOTAL	20	2	3	**25**

Nota: Los totales representan la cantidad de tipos de tareas hallados en la libreta.

Los datos que se muestran en la tabla 11 denotan que al igual que en la libreta B, hay mayor actividad con relación al tema *Números y sistemas de numeración,* pero en una proporción mucho mayor a la indicada por el Programa de estudios correspondiente.

En cuanto al tema *Problemas aditivos y Problemas multiplicativos* sólo se encuentra la resolución de tareas con números decimales, no se observan apuntes que impliquen resolución de problemas aditivos o multiplicativos con fracciones.

Con el tema de fracciones hay muy poco trabajo en la libreta revisada: solo una tarea con situaciones que muestran a la fracción como cociente, tres que manejan a la fracción como parte - todo y dos que abordan fracciones equivalentes. Pero en ningún caso se observa que se establezca alguna relación entre el planteamiento de las tareas y situaciones contextualizadas. Menos se observa alguna atención a la parte tecnológica. El desarrollo de habilidades algorítmicas se expresa como una prioridad en el trabajo con las praxeologías matemáticas, mismas que por tal razón, quedan en estado de incompletitud.

El contenido de la Figura 37 (página siguiente), como puede observarse, consiste en establecer una definición de fracción desde la perspectiva de reparto o cociente; “las fracciones expresan cantidades no necesariamente enteras” dice el dictado, el cual se continua con dos ejemplos donde se reparten chocolates entre niños. No obstante, no se plantea ningún otro tipo de tareas en el resto de la página; en la siguiente tarea se continúa con otra definición, que se presenta en la Figura 38 de la misma libreta. Esto hace pensar que el docente da por aprendido el concepto de fracción a partir del planteamiento de los casos de reparto cuyo resultado no se explica. Esto sería insuficiente para entender por qué al repartir tres chocolates entre cinco niños a cada uno le corresponde 3/5. La comprensión de la fracción desde situaciones de reparto o cociente requiere de ampliar y diversificar el tipo de tareas, de comprender la técnica, de explicarla (tecnología) para que se le dé sentido al número fraccionario que se obtiene como resultado de la realización de la tarea.

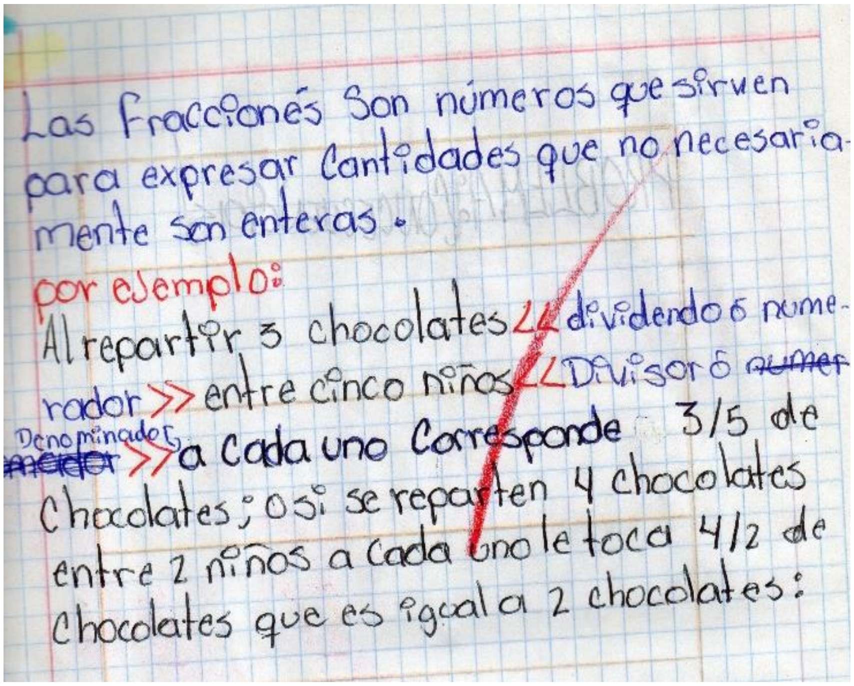


Figura 37. Tarea. Definición de fracción
FUENTE: Libreta de sexto grado, grupo C. En: alumna del grupo sexto C (2011-2012). Libreta de matemáticas.

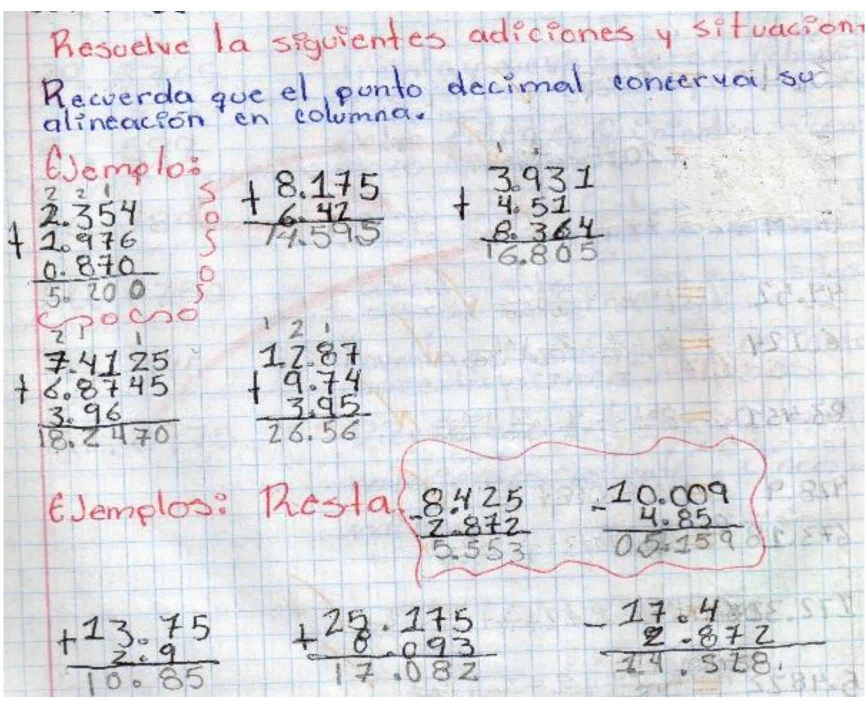


Figura 38. Tarea. Ejercicios algorítmicos que implican adición de números decimales.
FUENTE: Libreta de sexto grado, grupo C. En: alumna del grupo sexto C (2011-2012). Libreta de matemáticas.

Como se puede apreciar, en la Figura 39 sólo se muestra el refuerzo de esa constante algoritmización de la adición y la sustracción que se observa en las libretas de los alumnos de los diferentes grupos de sexto grado participantes en este estudio.

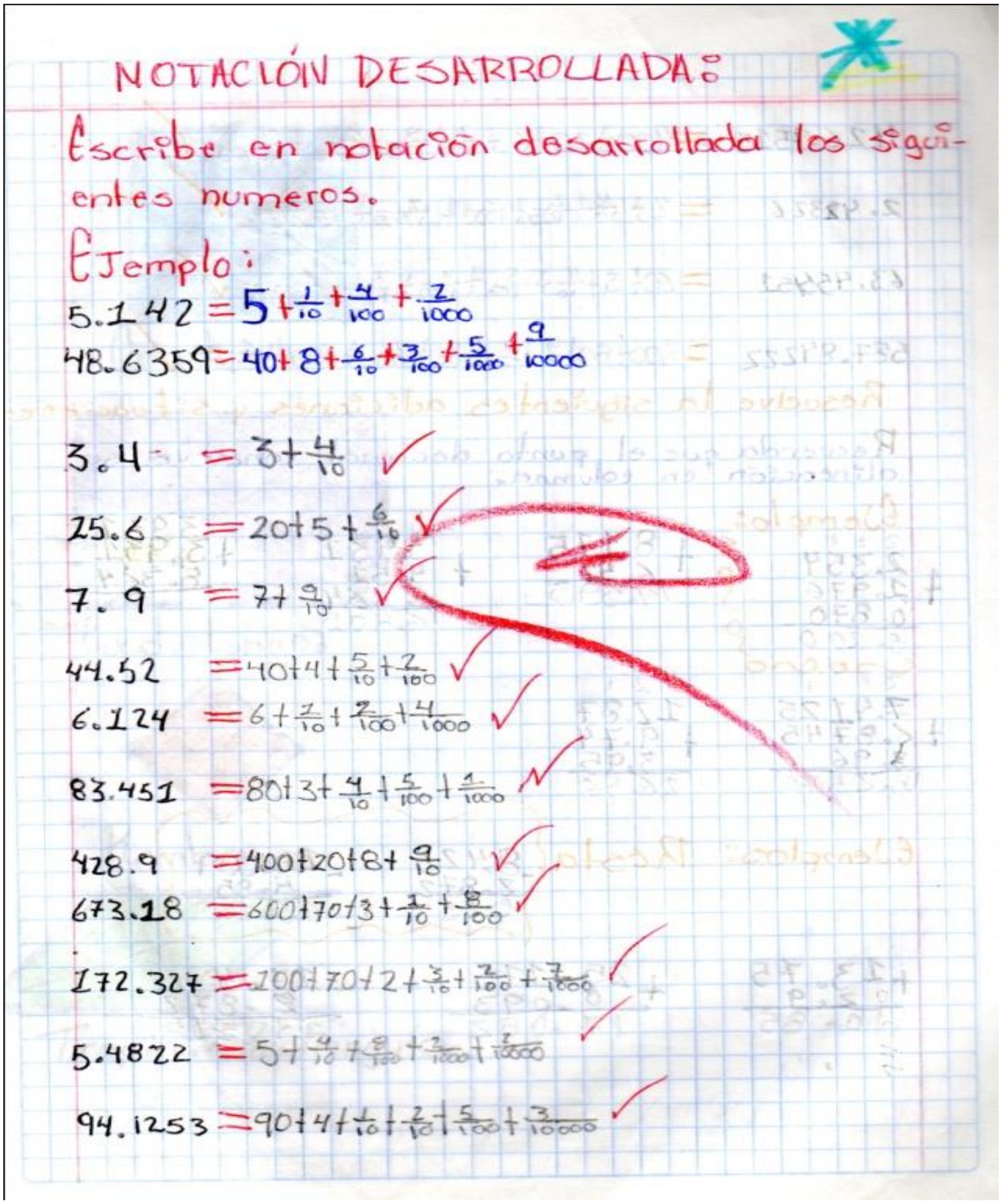


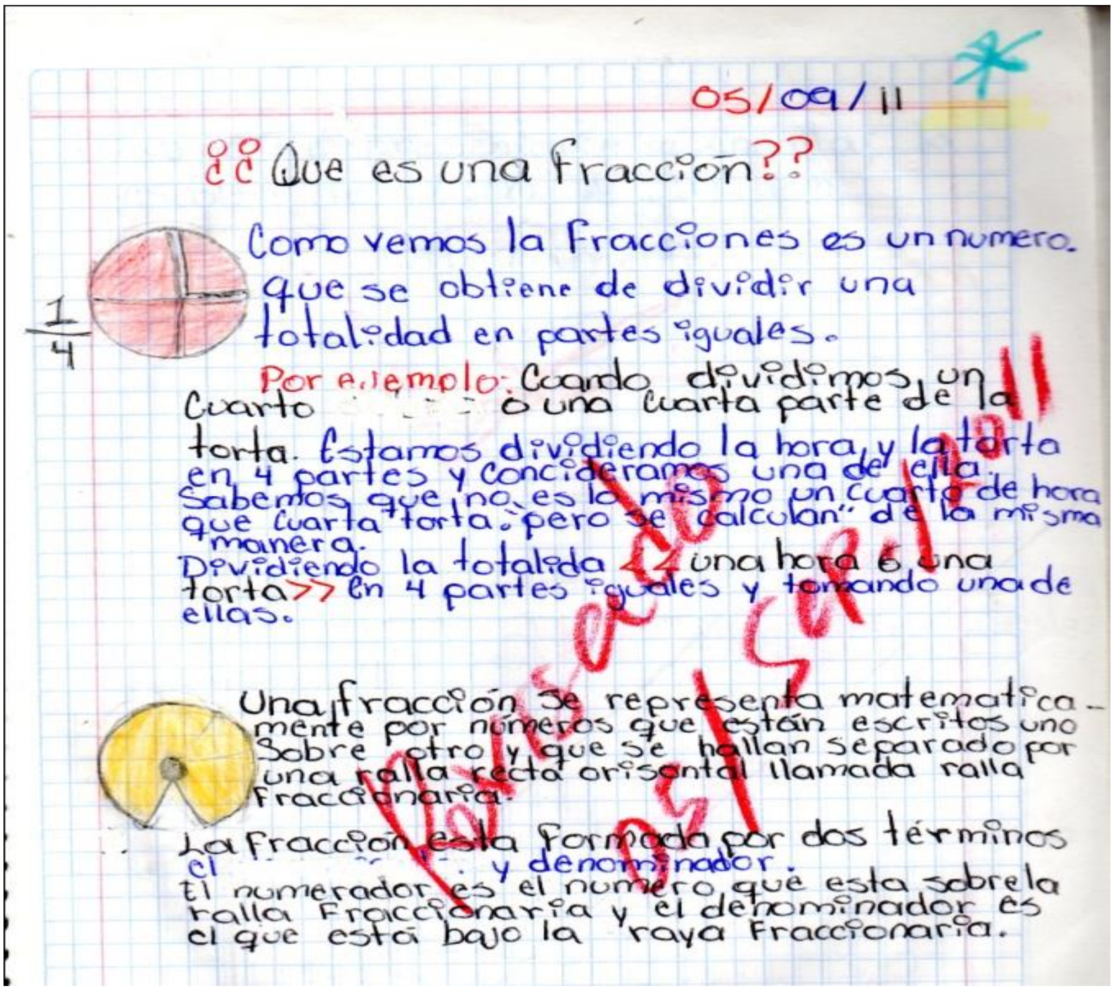
Figura 39. Tarea. Escribir en notación desarrollada de números decimales.
FUENTE: Libreta de sexto grado, grupo C. En: alumna del grupo sexto C (2011-2012). Libreta de matemáticas.

En cuanto a tipos de tareas en donde se trabajan al mismo tiempo las fracciones con los decimales, destaca la ubicación de fracciones decimales en la recta numérica, la notación desarrollada de fracciones decimales (representadas en su forma a/b), y la conversión de decimales a fracciones, pero esto último sin abordarse la igualdad que puede establecerse entre fracciones decimales y números decimales y viceversa.

En el conjunto de tareas que ha realizado el estudiante se ve cómo se ejercita la habilidad de representar números decimales en fracciones decimales (en su forma a/b, donde b es diferente de cero). Es posible que, con este tipo de tareas, si no se acompañan de la parte tecnológica de la praxeología, lo que se consiga sea practicar una conversión mecánica de una forma de expresión a la otra; por ejemplo, mediante procedimientos como: a la cifra inmediatamente después del punto, le corresponde el denominador 10, a la que se encuentra en la segunda columna a la derecha, le corresponde denominador 100. Queda la incertidumbre de si los alumnos ven la tarea que se muestra en la Figura 39 como una secuencia de fracciones o como la expresión de un número decimal dado, o si realmente se identifica la equivalencia entre una y otra expresión, etcétera. Cuestiones que tal vez indicarían el grado de comprensión de los conceptos. En este sentido, y apoyado en los resultados de la entrevista aplicada a los maestros de sexto grado participantes, se puede entender que, en el proceso de estudio correspondiente, se valora el hecho de que los estudiantes logren reproducir el modelo propuesto para expresar esa serie de números decimales en fracciones decimales sin importar mucho si sustentan su aplicación en la comprensión.

En la Figura 40 (página siguiente), se observa que también se trabajan los aspectos vinculados a la parte tecnológica de la praxeología. Se incluye una definición de la fracción, que pudiera considerarse como elemento de la parte teórica: “La fracción es un número que se obtiene de dividir una totalidad en partes iguales”, pero parece más relevante en términos de explicación o argumentación la que se incorpora mediante los ejemplos:

"Por ejemplo, cuando dividimos un cuarto o una cuarta parte de la torta. Estamos dividiendo la hora y la torta en 4 partes y consideramos una de ellas. Sabemos que no es lo mismo un cuarto de hora que un cuarto de torta, "pero se calculan" de la misma manera: dividiendo la totalidad "una hora" o "una torta" en cuatro partes iguales y tomando una de ellas.



05/09/11

¿¿Que es una fraccion??

Como vemos la fracciones es un numero. que se obtiene de dividir una totalidad en partes iguales.

$\frac{1}{4}$

Por ejemplo: Cuando dividimos un Cuarto o una cuarta parte de la torta. Estamos dividiendo la hora y la torta en 4 partes y concideramos una de ella. Sabemos que no es lo mismo un cuarto de hora que cuarta torta. pero se calculan" de la misma manera. Dividiendo la totalida << una hora ó una torta>> en 4 partes iguales y tomando una de ellas.

Una fracción se representa matematicamente por números que están escritos uno Sobre otro y que se hallan separado por una ralla recta orisontal llamada ralla Fraccionaria.

La Fraccion esta formada por dos términos el y denominador.
El numerador es el numero que esta sobre la ralla Fraccionaria y el denominador es el que está bajo la raya Fraccionaria.

Figura 40. Tarea. Definición de fracción con apoyo gráfico.
FUENTE: Libreta de sexto grado, grupo C. En: alumna del grupo sexto C (2011-2012). Libreta de matemáticas.

Como se puede ver en la Figura 40 (página anterior), se lee la definición de fracción y se entiende a ésta desde la concepción parte–todo. Señala la definición que "la fracción es un número que se obtiene de dividir una totalidad en partes iguales". Esta es la idea que prevalece en todas las libretas, en ellas se observa que se llevan a cabo pocas tareas con la noción de fracción en situaciones de reparto (cociente) – que también es parte del programa –ésta es útil para elaborar la composición numérica que expresaría la fracción, la cual se obtiene relacionando dos datos del problema respectivo con el numerador y el denominador. Por ejemplo, cuando escriben "Al repartir 3 chocolates <<dividendo o numerador>> entre 5 niños <<divisor>> a cada uno le corresponde 3/5" (tomado de la libreta C).

En general el trabajo en esta libreta se concentra en su mayoría en tareas relacionadas con los decimales. Los tipos de tareas implican casi en su totalidad tareas como escritura en forma desarrollada, por ejemplo, 5.142 = 5 1/10 + 4/100 + 2/1000 o escribir en lenguaje natural nombres de números decimales como por ejemplo, 6.5432, lo cual se refuerza con tareas similares contenidas en fotocopias que se pegan al interior de la libreta.

6.2.4. Libreta del grupo D

Avanzaremos en seguida en la revisión de la libreta D cuya síntesis se presenta en la siguiente tabla. Análisis de libreta de trabajo de la alumna del grupo C de 6º grado de primaria.

Tabla 12

Análisis de libreta de trabajo de la alumna del grupo D de 6º grado de primaria.

LIBRETA D	UBICACIÓN TEMÁTICA* DE LAS TAREAS, EJE: SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO (*conforme a los 3 temas generales que plantea el Programa de estudios 2001 de 6°)		
	NÚMEROS Y SISTEMAS DE NUM.	PROBLEMAS ADITIVOS	PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS

DECIMALES	-Densidad de los números decimales (2). -Comparación de números decimales (1) -Lectura y escritura de números decimales (1).	-Suma y resta de números decimales (2).	-Multiplicación de números decimales (1). –División de números decimales (2).
FRACCIONES	-La fracción como cociente (2). -La fracción como medida (1) La fracción como parte todo (1). -Ubicación de fracciones en la recta numérica (/2).		-Multiplicación de fracciones: el algoritmo (1). -División de fracciones: el algoritmo (1).
RELA-CION FRAC-CIÓN DECIMAL	-Notación desarrollada de los números decimales utilizando fracciones decimales. (3) -Ubicación de decimales en la recta numérica (2). -Porcentajes (1). -Conversión decimales a fracciones y viceversa.		-Problemas que implican el uso de fracciones y decimales (1).
TOTAL	17	2	6 **25**

Nota: Los totales representan la cantidad de tipos de tareas hallados en la libreta.

El contenido de la Tabla 11 muestra que en cierta medida hay concordancia con lo que establece el Programa de estudios de matemáticas en cuanto al tratamiento de contenidos sobre fracciones, números decimales y aquellos que implican relación entre ambos. Puede observarse también que persiste una mayor recurrencia en el tema *Números y sistemas numéricos,* aunque no se desatienden los otros dos temas (problemas multiplicativos y aditivos) pues se encuentran tareas sobre ellos, aunque en una proporción menor a la indicada en el Programa.

A diferencia de otras libretas revisadas, en ésta las praxeologías específicas relacionadas con los números decimales se abordan atendiendo los siguientes aspectos: propiedad de densidad, ubicación en la recta numérica (Figura 44, ver tres páginas adelante), comparación, lectura y escritura de decimales (Figura 42, página siguiente), así como la resolución de ejercicios aditivos y multiplicativos que se trabajan con poca o casi nula presencia de problemas.

Es decir que, a diferencia de lo que se observa en otras libretas, en ésta se incluyen tareas que refieren a una concepción más amplia de los decimales: la relación de orden, la densidad (que es una propiedad fundamental de los racionales), o su representación en la recta (Figura 41). Estos aspectos no se observaron en las libretas de los otros grupos. Sin embargo, parece que el trabajo se enfoca a la parte técnica de las tareas, la parte tecnológica o teórica – que podría derivarse fácilmente de la introducción de la propiedad de densidad – de nuevo está ausente.

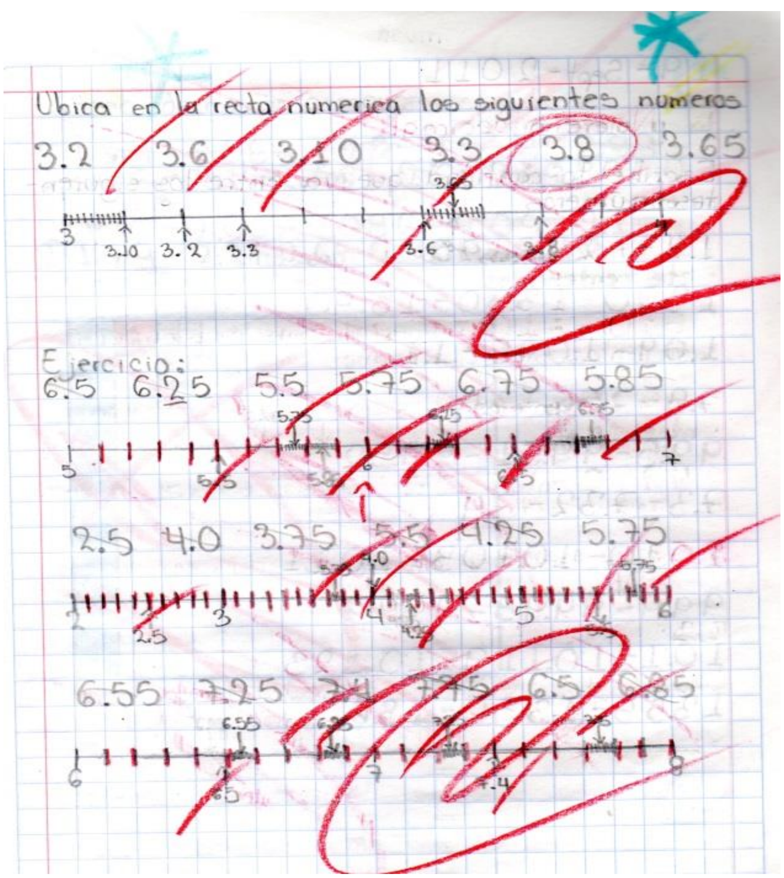


Figura 41. Tarea. Ubicación de números decimales en la recta numérica.
FUENTE: Libreta de sexto grado, grupo D. En: alumna del grupo sexto D (2011-2012). Libreta de matemáticas.

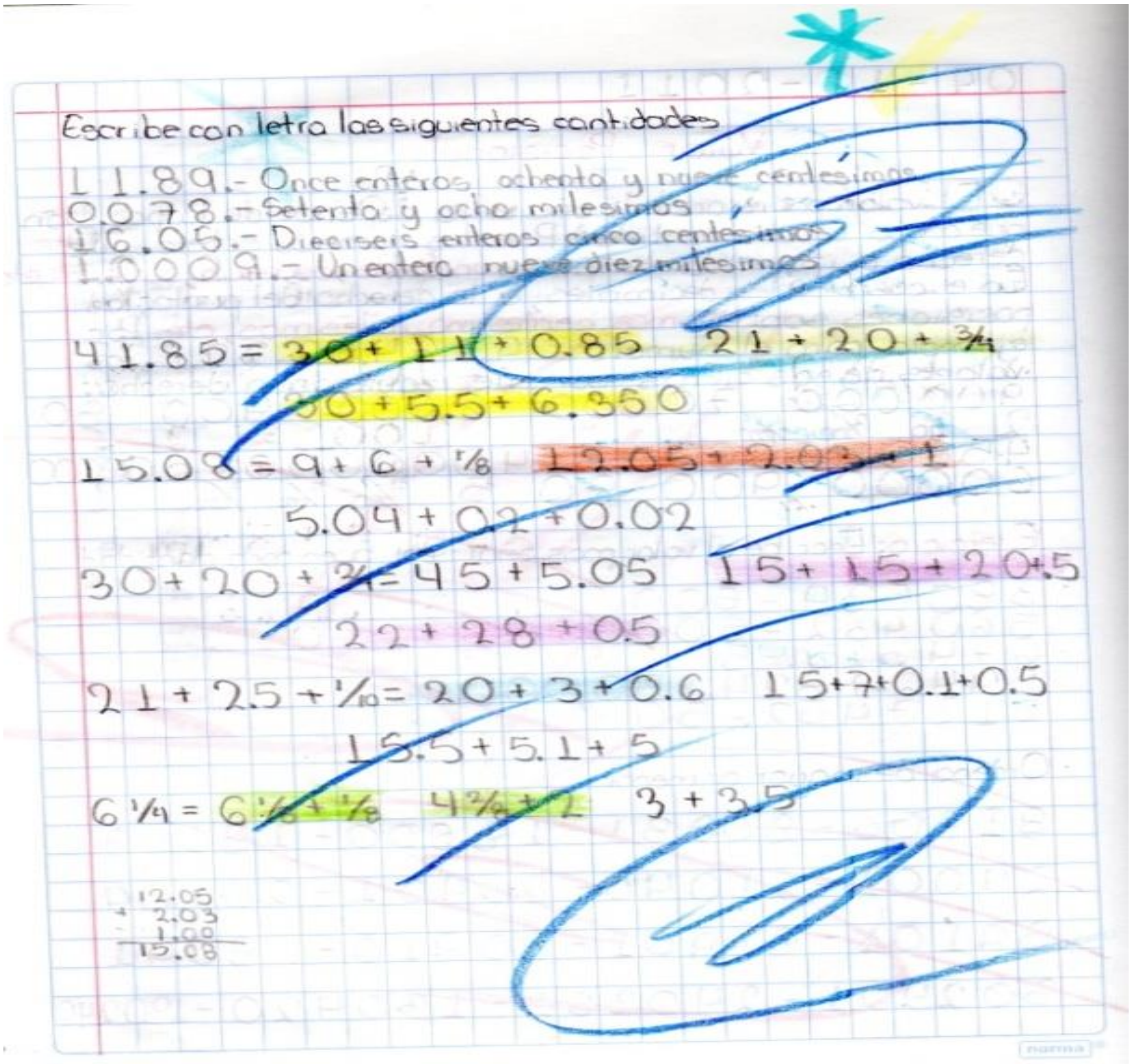


Figura 42. Tarea. Escribir en notación desarrollada números decimales.
FUENTE: Libreta de sexto grado, grupo D. En: alumna del grupo sexto D (2011-2012). Libreta de matemáticas.

En cuanto al ámbito de las fracciones, se pone atención en temas relativos a su uso en situaciones de división (cociente), parte – todo y medida. Cabe señalar, sin embargo, que no se hace una distinción clara de las diferencias que resultan de esas interpretaciones de la fracción.

La tarea que se muestra en la Figura 43, es un caso relacionado con una situación cotidiana que pretende apoyar la comprensión de la teoría relativa a la interpretación de la fracción como cociente, sin embargo, hay una dificultad para expresar gráficamente el sentido de la técnica: las seis rectas numéricas divididas en ocho partes iguales representan los seis metros dividido cada uno en ocho trozos de tela, y los triángulos a los vestidos. No obstante, no se advierte cómo se establece la relación entre los metros divididos y los triángulos.

Esto es, entonces, la técnica gráfica no tuvo una correspondencia directa con el procedimiento canónico involucrado, que consiste en expresar en forma de cociente las magnitudes implicadas en la tarea en cuestión. En la Figura 43 se observa también esa tendencia a dictar algunas definiciones que dentro de la estructura praxeológica tendría que ser parte de la teoría. Pero que, en la forma en que se insertan, tienen muy poca conexión con la parte práctica de la praxeología.

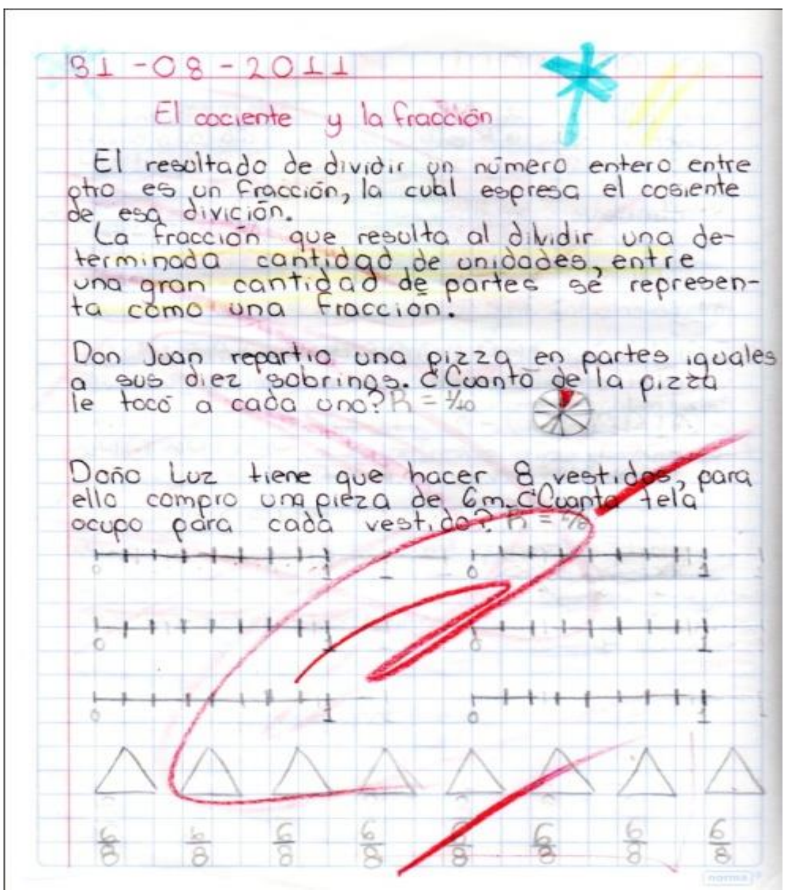


Figura 43. Tarea. Resolución de situaciones problemáticas que implican a la fracción como cociente.
FUENTE: Libreta de sexto grado, grupo D. En: alumna del grupo sexto D (2011-2012). Libreta de matemáticas.

En la Figura 44 donde la primera tarea consiste en determinar cuál de ocho alumnos recorrió una distancia mayor en una longitud de mil metros. Dichos recorridos se indican en forma de expresión fraccionaria, y la segunda tarea requiere que el estudiante ubique tales expresiones fraccionarias en una recta numérica que va de cero a uno. En razón de las características de las dos tareas antes descritas, se puede mencionar que el bloque teórico no se logra integrar en el proceso de estudio como para alcanzar algún grado de completitud.

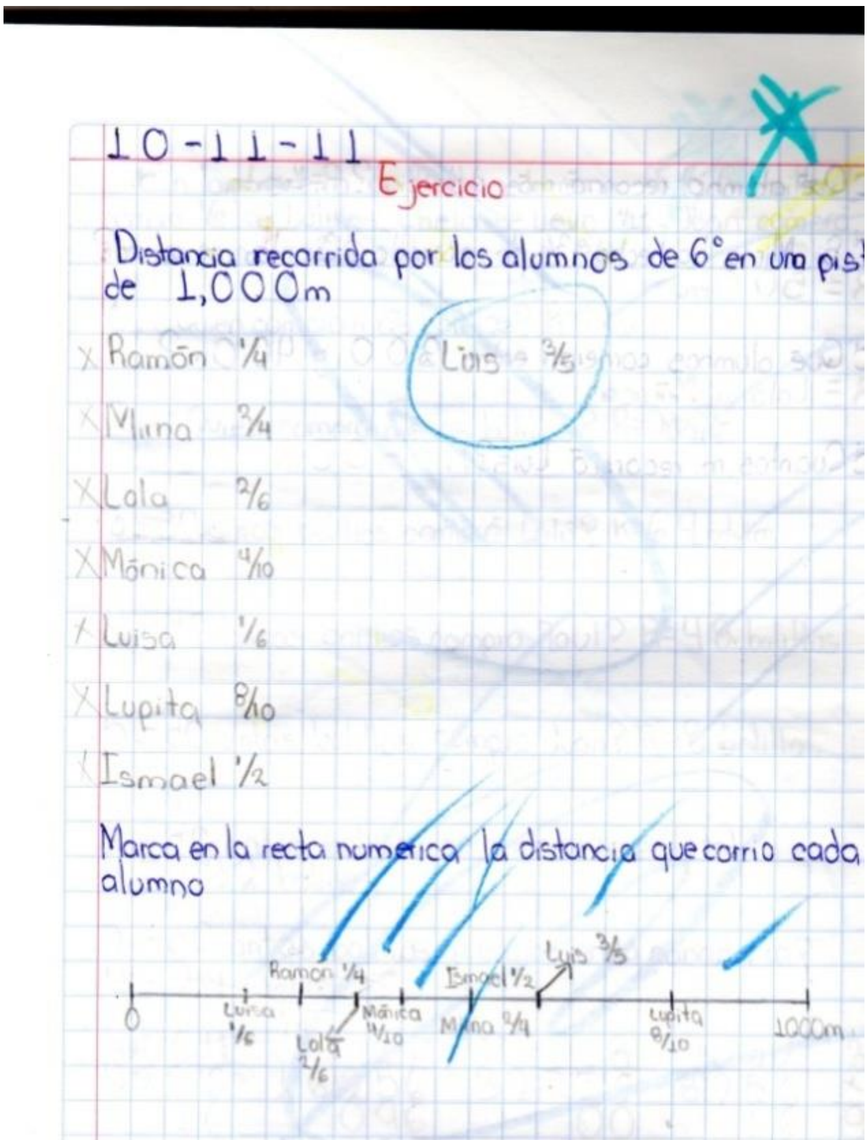


Figura 44. Tarea. Ejercicios de comparación de fracciones en la recta numérica.
FUENTE: Libreta de sexto grado, grupo D. En: alumna del grupo sexto D (2011-2012). Libreta de matemáticas.

6.3. Síntesis de las praxeologías matemáticas en las libretas de 6o grado

Como ha podido observarse en las tablas anteriores (tablas 6 y 7), se distinguen tres tipos de tareas en las praxeologías contenidas en las libretas: las que refieren a los decimales, las que trabajan específicamente fracciones y aquellas que abordan cuestiones donde se establece relación entre las fracciones y los números decimales.

Se observa en las libretas que hay una mayor atención a tareas relacionadas con los números decimales ubicados en su mayoría en el tema "Números y sistemas de numeración", posteriormente se encuentran las que contienen fracciones y al final las que establecen relación entre fracciones y decimales. Se hace evidente también que hay muy poco trabajo con tareas vinculadas a problemas aditivos y problemas multiplicativos, principalmente con fracciones.

Otro rasgo que destaca es que sólo en una de las cuatro libretas revisadas, se realizan tareas directamente relacionadas con el tema "problemas aditivos" con fracciones (libreta B). El trabajo en este tema se centra en tareas que implican la suma y resta de números decimales, como se observa en las libretas C y D; en la libreta A este tema no es objeto de atención al menos en el material revisado.

6.3.1. Praxeologías relativas a los números decimales.

En el tema Números y sistemas de numeración es en el que hay mayor diversidad de tareas y, conforme a la distribución por el tipo de contenidos, en el rubro de los números decimales las tareas corresponden principalmente a las siguientes praxeologías:

Orden de los números decimales [Libretas A (1), B (1), C (2) y D (1)][20].

Esta praxeología matemática se trabaja en los primeros dos bloques a través de tareas en las que el estudiante escribe una serie de números decimales y se le pide posteriormente que los ordene ascendentemente; otra tarea consiste en escribir pares de números decimales y al alumno se le pide que mediante los signos “mayor que (>) y menor que (<)” exprese el resultado de la comparación de los pares de números dados.

Valor posicional [Libretas A (1), B (1) y C (3)]

Para el tratamiento de esta praxeología matemática por lo regular se reproducen tablas que muestran por columnas los valores que adquieren las cifras de acuerdo a la posición que ocupan; los estudiantes escriben en los espacios de esas tablas el valor que le corresponde a cada cifra del número dado.

Lectura y escritura de los números decimales [Libretas A (0), B (1) C (3) y D (1)].

Esta praxeología matemática es frecuente en las libretas revisadas, a excepción de la primera de ellas. Los alumnos reproducen en su cuaderno una lista de números de los que deben anotar el nombre correspondiente a su lectura. Llevar a cabo esta tarea implica primero reconocer la cantidad de cifras de las que está compuesta cada una de las cantidades y en seguida los alumnos tienen que recurrir a los conocimientos que posean sobre el valor posicional.

Es notoria la presencia de ciertas confusiones al escribir el nombre de la parte decimal del número motivo de la tarea. Incluso se detectó un error en una fotocopia trabajada donde el número 0.20 se interpreta como veinte décimos, inconsistencia que se reproduce entre los alumnos e incide en la comprensión del valor de las cifras decimales de un número decimal.

[20] Los números dentro del paréntesis indican la cantidad de veces que se trabaja en contenido en la libreta.

Notación desarrollada de números decimales [Libretas A (1), B (1), C (1) y D (3)].

Poco trabajo se encuentra relacionado con esta praxeología, pero hay alguna presencia en las cuatro libretas. El procedimiento de trabajo (técnica) tiene un patrón similar al de la praxeología mencionada en el punto anterior: en un listado vertical se copia en la libreta una relación de números decimales para luego expresarlos en notación desarrollada con fracciones decimales. Llama la atención que en algunos casos se llega a expresar hasta millonésimos pero su desarrollo no evidencia ni dificultad ni análisis del número. Según como se propone la tarea, sólo hay que agregar un cero a la derecha de la fracción decimal correspondiente - de acuerdo al lugar que ocupe la cifra que se quiere transformar en fracción - por ejemplo: 17.3247 implica la transformación: 17/1 + 3/10 + 2/100 + 4/1000 + 7/10000. Esto, como se ve, es fácil de mecanizar – se trata de ir agregando un cero al denominador, conforme se pasa a la columna de la derecha (Figura 45).

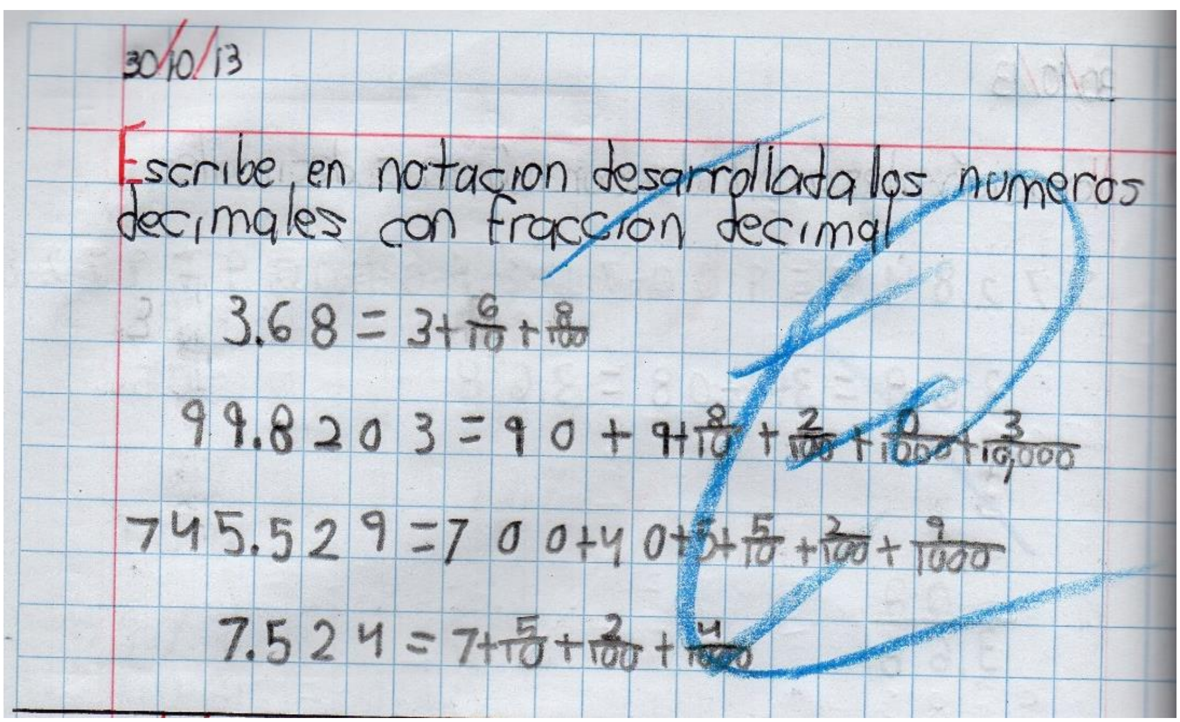


Figura 45. Tarea. Escribir en notación desarrollada números decimales usando fracciones decimales. FUENTE:
Libreta de sexto grado, grupo D. En: alumna del grupo sexto D (2011-2012). Libreta de matemáticas.

Relación de orden [Libreta D (2)].

Como ha podido observarse, los primeros cuatro puntos de la primera lista de praxeologias matemáticas relativas a los números decimales (desarrollada en los párrafos anteriores), se abordan con cierta recurrencia, están presentes en las libretas, lo que refleja la relevancia que los profesores de los grupos participantes les dan. No obstante, el trabajo didáctico que realizan los docentes tiene como rasgo común un enfoque algorítmico. Las praxeologías se mantienen en el ámbito de las tareas con poca demanda cognitiva y técnicas repetitivas para realizarlas. La parte tecnológica está ausente y, por lo general, la parte teórica también.

Persisten en los estilos de enseñanza de los docentes algunos aspectos que se perciben en la conformación del contenido de las libretas, como el dictado, la reproducción de técnicas incluidas en los libros de texto gratuitos y/o en las guías didácticas (libros de editoriales privadas) que utilizan para apoyar su labor pedagógica. Se distingue escasa conexión directa con situaciones problemáticas, como puede verse en la Figura 46.

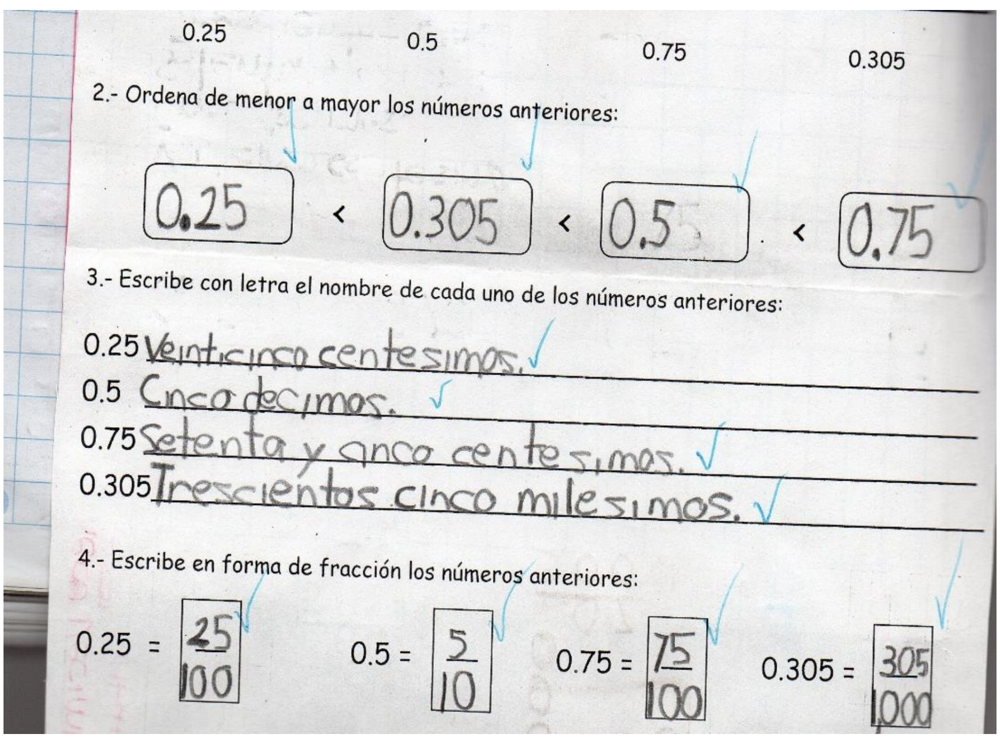


Figura 46. Tarea. Realización de ejercicios diversos con números decimales.
FUENTE: Fotocopia de la libreta de sexto grado, grupo D. En: alumna del grupo sexto D (2011-2012). Libreta de matemáticas.

El aspecto de las praxeologías que vincula el bloque práctico con el saber (la parte tecnológica) está en general ausente en las libretas. En ellas se constata una casi total ausencia de problemas que dirijan la acción hacia la diversificación de técnicas y su posible comparación y discusión; así como tareas constructivas que favorezcan la entrada a este ámbito mediante acciones de los estudiantes tendientes a la resolución de problemas.

6.3.2. Praxeologías relativas a los números fraccionarios.

En cuanto a los números fraccionarios expresados en la forma a/b, se abordan principalmente las praxeologías siguientes:

Fracciones equivalentes [Libretas B (1), y C (2)].
Comparación de fracciones [Libretas A (1) y B (1)].
Orden de las fracciones [Libreta B (1)].
Ubicación de fracciones en la recta numérica [Libretas A (1) y D (2)].
La fracción como parte-todo [Libretas A (1), B (2), C (2) y D (3)]
La fracción como cociente [Libretas C (1) y D (1)].
La fracción en situaciones de medida [Libreta D (1)].

Los aspectos que se trabajan exclusivamente con las fracciones son pocos, en los cuatro grupos de sexto grado. Así mismo, la variedad de las tareas es menor que la que señala el Programa de Matemáticas. Se puede pensar que esto es indicador, entre otras cosas, de que los maestros no tienen claridad acerca de los tipos de problemas que se pueden resolver mediante el uso de fracciones; tal aseveración se deriva de las respuestas que dieron las maestras de sexto grado a la pregunta siguiente: *¿Qué tipos de problemas pueden resolver los alumnos que impliquen el uso de las fracciones?* Las cuatro profesoras interrogadas coinciden en afirmar que se pueden resolver los “problemas de la vida cotidiana”, no obstante, no van más allá ni precisan cuáles serían esos problemas, a pesar de profundizar el interrogatorio al respecto. Por tanto, puede decirse que la idea que subyace a la enseñanza es confusa o muy limitada en este rubro. De este modo, parece que se prefiere trabajar poco el tema, reproducir algunas tareas de ejercitación contenidas en el libro de texto, o recuperar la experiencia que se tiene con el tema hurgando en los recuerdos de la época estudiantil.

Se planteó también la siguiente pregunta a los profesores ¿Qué deberían saber los alumnos al concluir la educación primaria y al término del primer grado de secundaria? Casi la mitad de los docentes encuestados manifiesta que al egresar de la educación primaria los alumnos deberían saber aplicar las fracciones en su vida diaria. Así mismo, un poco menos de la mitad de ellos señala que al egresar de 6° grado los alumnos deben poder realizar las operaciones de suma, resta, multiplicación y división con fracciones. En este punto se advierte una contradicción, pues la revisión de los cuadernos de trabajo de los alumnos de 6° muestra que hay muy poca atención a problemas aditivos y multiplicativos que impliquen uso de fracciones. Lo que se encuentra en los cuadernos revisados son ejercicios de mecanización y desarrollo algorítmico de suma, resta, un poco de multiplicación y mucho menos de división. Entonces se observa que a pesar de no enseñarse las operaciones con fracciones vinculadas a problemas de la vida diaria, se espera que los alumnos sepan aplicarlas. Como ha señalado Brousseau (2000), se celebra un contrato didáctico donde la responsabilidad de utilizar adecuadamente los conocimientos matemáticos en la resolución de problemas corre por cuenta de alumno y no del profesor.

Otros maestros, tal vez apoyados en el programa, señalan con mayor especificidad los contenidos que deberían saber los alumnos de 6° al terminar su educación primaria: leer, escribir y comparar números, así como manejar equivalencias y lo relativo al orden entre fracciones. En seguida algunos comentarios de los docentes:

A. Identificar que las fracciones se presentan de diferente manera y de alguna forma los decimales, también la cuestión de la situación posicional.

B. Primero que nada aquí son las operaciones básicas. Aplicar en la recta numérica.

C. Deben de saber tener el valor de cada fracción y así no se le dificulta ni medirlas ni compararlas y, si es posible, que salgan de una manera manejando perfectamente los números decimales para comparar y todo.

D. Utilizar bien la suma y resta, darle utilidad para resolver problemas.

En cuanto a los saberes que deberían dominar los estudiantes al término de su educación primaria, los docentes de sexto grado coinciden en mencionar que son las operaciones básicas con fracciones y decimales aplicados en problemas del contexto cercano. Estos planteamientos no llegan a concretarse pues el presente estudio ha encontrado que los saberes alcanzados por los estudiantes a la conclusión de sus estudios de educación primaria se constriñen cuando mucho al desarrollo algorítmico de suma y resta de fracciones (cuestión que los profesores de secundaria señalan duramente en sus comentarios). Un número reducido de estudiantes muestra cierto conocimiento en operaciones aditivas y multiplicativas sencillas con números decimales, no así en la resolución de problemas que impliquen este tipo de praxeologías matemáticas.

Estas debilidades que manifiestan los docentes en relación al dominio de las diferentes praxeologías matemáticas contenidas en el programa de estudio y libro de texto oficiales, se expresan en la integración de las organizaciones matemáticas que se hallan en las libretas de trabajo de los alumnos.

6.3.3. Praxeologías sobre la relación entre decimales y fracciones.

Respecto de las tareas donde las praxeologías abordan la relación entre los números decimales y las fracciones, encontramos que principalmente se incluyen las siguientes:

Ubicación de números decimales y fraccionarios en la recta numérica [Libretas A (1), B (3), C (1) y D (2)].

Conversión de fracciones a decimales y viceversa [Libretas B (2) y C (1)].

Notación desarrollada que implique números fraccionarios y decimales [C (2) y D (2)].

Porcentajes y razón [Libretas A (1), B (2), C (2) y D (3)].

Representación gráfica de decimales y números fraccionarios [C (1) y D (1)].

Los tipos de tareas que se enlistan, tal como se observan en las libretas, siguen siendo de naturaleza mecánica. No está presente alguna indicación que no sea realizar puntualmente lo que se plantea, como por ejemplo: “En cada recta ubica el número que se indica” (libreta D).

Ahora bien, también con base en los datos anteriores, se concluye que las seis praxeologías específicas relacionados con las fracciones y con los números decimales que más comúnmente se trabajan en los grupos participantes en esta investigación son:

Lectura y escritura de los números decimales.

Valor posicional y orden de los números en cantidades decimales.

La fracción como parte – todo.

Conversión de fracciones comunes a decimales.

Ubicación en la recta de fracciones y decimales.

Algoritmo de la multiplicación de fracciones y decimales.

La lista anterior corresponde como ya se dijo a las praxeologias que trabajan los maestros de sexto grado, según lo registrado en las libretas. Las tareas, en general, consisten en ejercitar procedimientos (técnicas) canónicos que prácticamente se orientan al desarrollo de habilidades algorítmicas, es evidente que, en términos de praxeologías, éstas se desarrollan sólo en el nivel práctico y el bloque teórico es inexistente.

Las anteriores son praxeologías muy específicas que, me parece, expresan una enseñanza de las matemáticas muy común en las escuelas respecto de esos temas. Se trabajan aislados, con un enfoque algorítmico, sin otro fin explícito que el de cumplir en un nivel eficiente de operatividad con un procedimiento único transmitido por el maestro y los libros de texto y memorización de algunas definiciones.

A la fracción no se le concibe más que desde la idea parte – todo. Sin embargo, adicionalmente hay limitaciones con respecto del manejo del tipo de unidad, entendida ésta como el todo a fracturarse; en este ámbito las tareas se limitan al uso de unidades continuas[21], es decir, a la división de figuras planas en sectores iguales.

Las unidades discretas están ausentes de los trabajos contenidos en las distintas libretas revisadas. Esto puede entenderse como un vacío en el trabajo con fracciones en su concepción parte-todo.

La equivalencia entre fracciones y decimales se aborda en muy pocas ocasiones, yendo en este orden: de fracción a número decimal y en ningún caso al contrario. Cabe destacar que las tareas de conversión mencionadas, carecen de alguna relación con problemas contextualizados.

En cuanto al trabajo con los números decimales observado en las libretas, se encuentra que en el primer plano, en cada una de ellas se pretende desarrollar en los estudiantes la capacidad de escribir y leer dichos números; ubicarlos en la recta numérica, así como realizar ejercicios de adición, multiplicación y división con ellos. La comparación aparece muy escasamente y, la propiedad de densidad

[21] Las unidades continuas no son contables sino medibles, como el agua, una superficie, etc. Esto si seleccionamos una unidad de medida y se observa cuantas veces contiene dicha cantidad la unidad de medida elegida. Por su parte, las unidades discretas son separadas unas de otras, como tres lápices, dos niños, etc., son contables.

está ausente. Las praxeologías registradas hacen evidente un trabajo orientado a la memorización de procedimientos, de reglas y algoritmos. El sentido de los números decimales consiste en dar una mayor aproximación a las diferentes magnitudes medibles que la que se tendría utilizando sólo naturales, con ventaja sobre los racionales porque “permiten que los cálculos sean más sencillos pues se puede operar con ellos como si fueran números enteros” (Centeno, 1997: 24).

Considerando estas aportaciones, y conforme a los testimonios recopilados a través de las libretas, en los grupos participantes en esta investigación hay una parte aún no explorada de los números decimales, indispensable para su comprensión como clase de número con dos tipos de representación: en su forma a/b y utilizando los principios del sistema decimal de numeración. La conexión explícita con la diversidad de problemas que le dan sentido a su aprendizaje y el conocimiento de algunas de sus propiedades, también se echan de menos pues no aparecen en las libretas de los alumnos, evidencias de que los procesos de estudio en los que se abordan tales praxeologías matemáticas, el manejo de los números decimales vaya más allá del trabajo algorítmico que se hace con ellos.

Se ha hecho también destacar, que la atención a cada uno de los ejes en los que se distribuyen las praxeologías, está un tanto equilibrada en el nivel de primaria, al menos en el sexto grado. Sin embargo, en cierta proporción sobresale el eje “Sentido numérico y pensamiento algebraico” por su carga de praxeologías, le sigue el eje “Forma, espacio y medida” y finalmente el eje “Tratamiento de la información” con un menor número de praxeologías.

Para adentrarse en el estudio de las praxeologías vinculadas a las fracciones y a los números decimales, creo conveniente pormenorizar la integración del eje “Sentido numérico y pensamiento algebraico” en términos de temas (praxeologías globales) y contenidos (praxeologías locales) para conocer la atención que se presta al trabajo con los temas referidos.

6.4. Las praxeologías en las libretas de alumnos de 1° de secundaria.

En la tabla 13 puede verse qué tipos de ejercicios son los que pueblan las libretas de trabajo de los alumnos, en ella se presenta un recuento general de los tipos de tareas que se encuentran en las libretas de matemáticas de los alumnos. A simple vista se desprende que hay un trabajo muy abundante con las praxeologías del eje "Sentido numérico y pensamiento algebraico" y una desatención a las correspondientes al eje "Tratamiento de la información".

Tabla 13

Análisis de la libreta de trabajo de matemáticas de alumnos de 1º de secundaria

LIBRETA	UBICACIÓN TEMÁTICA* DE LAS TAREAS, EJE: SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO (*conforme 3 temas generales que plantea el Programa de estudios 2011 de 1° SEC)			
	NÚMEROS Y SISTEMAS DE NUM.	PROBLEMAS ADITIVOS	PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS	T [a]
A	-Ubicación en la recta (1) -Razón y proporción (2). -Representación decimal (1).	-Ejercicios aditivos con decimales (5).	-Multiplicación con decimales (2). -División con decimales (3).	14 de 40
B	-Clasificación de fracciones (1). -Conversión de fracciones (1).	-Ejercicios aditivos con fracciones (4). -Ejercicios aditivos de fracciones y decimales (1).	-Multiplicación de fracciones (1). -División de fracciones (1)	9 de 30
C	-Conversión de fracciones (1) -Frac. Como medida (1). -Frac. Equivalentes (1). -Ubicación en la recta (2) -Frac. Mixtas e impropias (1)	-Ejercicios aditivos con fracciones (3). -Ejercicios aditivos de fracciones y decimales (2).	-Multiplicación de fracciones. (2). -División de fracciones (2) -Multiplicación con decimales (2). -División con decimales (2).	19 de 31

Nota. [a] Tareas.

Si se toma como referencia lo que establece el programa de matemáticas de primer grado de secundaria, se podrá notar que lo que se incluye en las libretas tampoco corresponde a la proporción entre las praxeologías de cada eje. Análisis de libretas de matemáticas de alumnos de 1º de secundaria.

Tabla 14

Análisis de libretas de matemáticas de alumnos de 1º de secundaria.

LIBRETA	NÚMERO DE TAREAS POR EJE CURRICULAR			
	SENTIDO NUMÉRICO Y . . .	FORMA, ESPACIO Y MEDIDA	MANEJO DE LA INFORMACIÓN	TOTAL
"A"	40 67%	13 22%	7 11%	60
"B"	30 64%	14 30%	3 6.%	47
"C"	31 76%	9 22%	1 2%	41

Con base en la información contenida en la tabla 14, es pertinente hacer algunas reflexiones en relación con las características de las tareas que predominan en las libretas de secundaria. En primer lugar, se presenta, al igual que en sexto grado de primaria, un tipo de tareas casi en su totalidad sin relación con cuestiones que den contexto al uso de las nociones matemáticas. Parece que representa para los maestros de ambos grados una dificultad el vincular los conceptos (aunque estos casi no aparecen) o los algoritmos a algún contexto de aplicación.

Mediante el tipo de tareas que se proponen, y las praxeologías que se tejen alrededor de ellas, probablemente se logra generar en cierta medida habilidad algorítmica. Por razones que pueden ser diversas (de tiempo, de tradición, de concepciones o de esfuerzo), y según lo que se observa en las libretas, no se promueve en los alumnos la búsqueda de sentido de las nociones matemáticas vinculándolas a situaciones que la cotidianidad u otros contextos interesantes pueden brindar. De acuerdo con el programa de matemáticas, se establecen tres praxeologías matemáticas con las fracciones y con los números decimales: conversión de los primeros en los segundos y viceversa; planteamiento y resolución de problemas que impliquen la utilización de números enteros, fraccionarios y decimales; resolución de problemas aditivos, multiplicativos y de división en los que se combinan números fraccionarios y decimales en distintos contextos, empleando los algoritmos convencionales.

Sin embargo, las libretas de los alumnos se enfocan principalmente a trabajar praxeologías que implican lo siguiente: la conversión de números decimales a fracciones decimales; la resolución de ejercicios que implican la mecanización de algoritmos de adición; multiplicación y división de números y fracciones decimales; temas todos que carecen de vinculación con situaciones problemáticas. Lo anterior puede apreciarse en las Figuras 47 y 48.

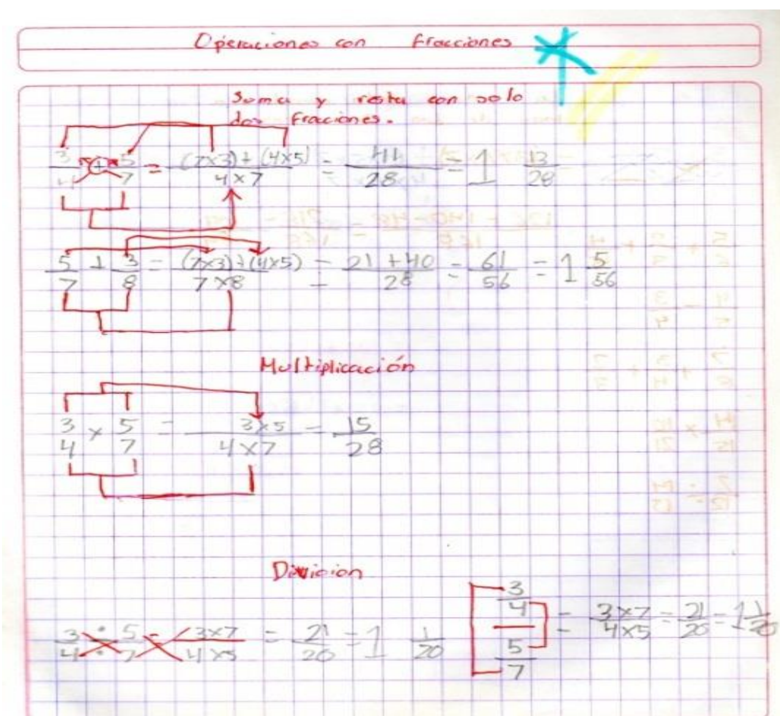


Figura 47. Tarea. Realización de ejercicios de operaciones básicas con fracciones.

FUENTE: Libreta de primer grado de secundaria, grupo B. En: alumna de primero de secundaria. Grupo B (2011-2012). Libreta de matemáticas.

Figura 48. Tarea. Realización de sumas y restas de fracciones.
FUENTE: Libreta de primer grado de secundaria, grupo B. En: alumna de primero de secundaria. Grupo B (2011-2012). Libreta de matemáticas.

6.5. Análisis de tareas de las libretas de 1° de secundaria

Pasamos ahora a revisar tres libretas de matemáticas, cada una de distinto grupo de primero de secundaria.

6.5.1. Del grupo A.

La Figura 49 muestra una libreta que contiene tareas que consisten en la realización por parte de los alumnos de operaciones de suma, resta, multiplicación y división de fracciones. Se presenta inicialmente un ejemplo de cómo realizar la adición de tres fracciones, lo que desde la perspectiva de la estructura praxeológica se entiende como la técnica a emplearse para resolver la tarea. En la figura 48, que se encuentra un poco más arriba, se muestra que el profesor, director del proceso de estudio, presentó de alguna manera a los alumnos las técnicas que posteriormente han de utilizar para resolver las tareas relacionadas con la suma, resta, multiplicación y división de fracciones.

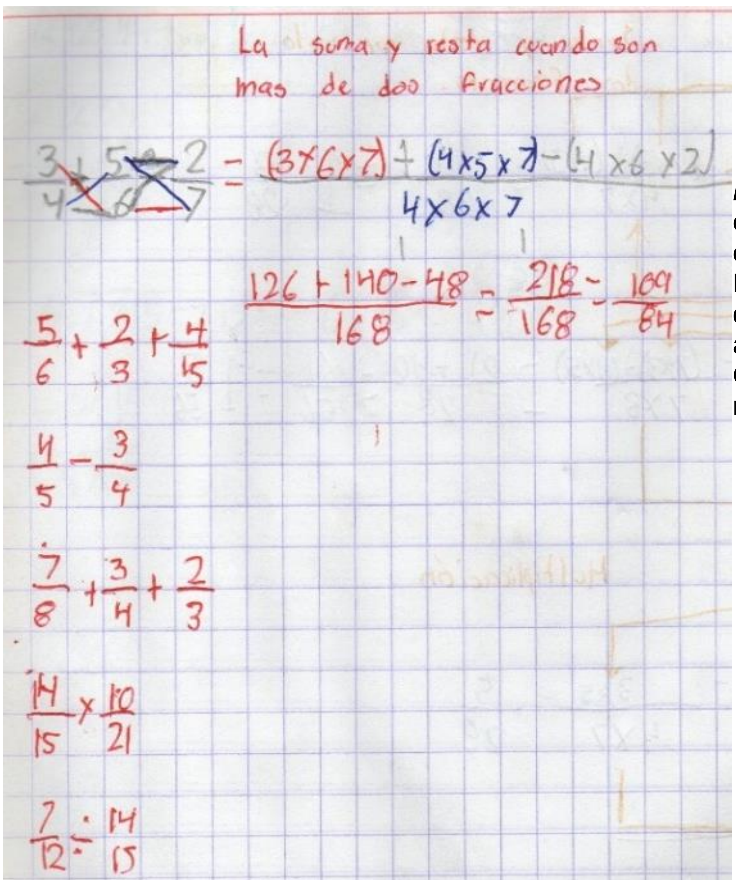


Figura 49. Realización de ejercicios de suma y resta de dos o más fracciones.
FUENTE: Libreta de primer grado de secundaria, grupo A. En: alumna de primero de secundaria. Grupo A (2011-2012). Libreta de matemáticas.

En la figura 49 (página anterior), el procedimiento se describe gráficamente como es típico en las clases de matemáticas del nivel de educación básica, por lo que se consideran técnicas canónicas e institucionalizadas que ayudarán, en la medida en que el alumno las memorice, a realizar con un mínimo de errores, tareas de naturaleza algorítmica que al final es lo que expresará para el profesor (que representa la institución) que el alumno ha aprendido. No obstante, en las tareas que se comentan, éstas se encuentran sin resolución y sin ninguna anotación que pudiera dar alguna pista sobre la razón por la que se dejaron sin atender.

Dado lo anterior, la estructura praxeológica de este caso queda incompleta, pues sólo se atiende el bloque práctico mediante la presentación de las tareas y de las técnicas de manera esquemática, quedando sin atención el bloque teórico.

En la Figura 50 (página siguiente), las tareas son sumas y restas de fracciones comunes con expresiones decimales. Como puede observarse, estas tareas no están vinculadas a ninguna situación problemática, lo que hace más difícil para los alumnos la comprensión del uso de los números fraccionarios y decimales. La técnica que, según se percibe, fue mostrada por el profesor, conduce a que los estudiantes expresen en expresiones decimales los números fraccionarios correspondientes dividiendo el numerador entre el denominador. Una vez que se han expresado mediante escrituras decimales todas las cantidades de la operación indicada pues se interpreta a la fracción como cociente, se realiza la suma de las mismas, esto tal vez mediante una calculadora electrónica dado que no se observa evidencia de haberse realizado las sumas sólo con lápiz y papel.

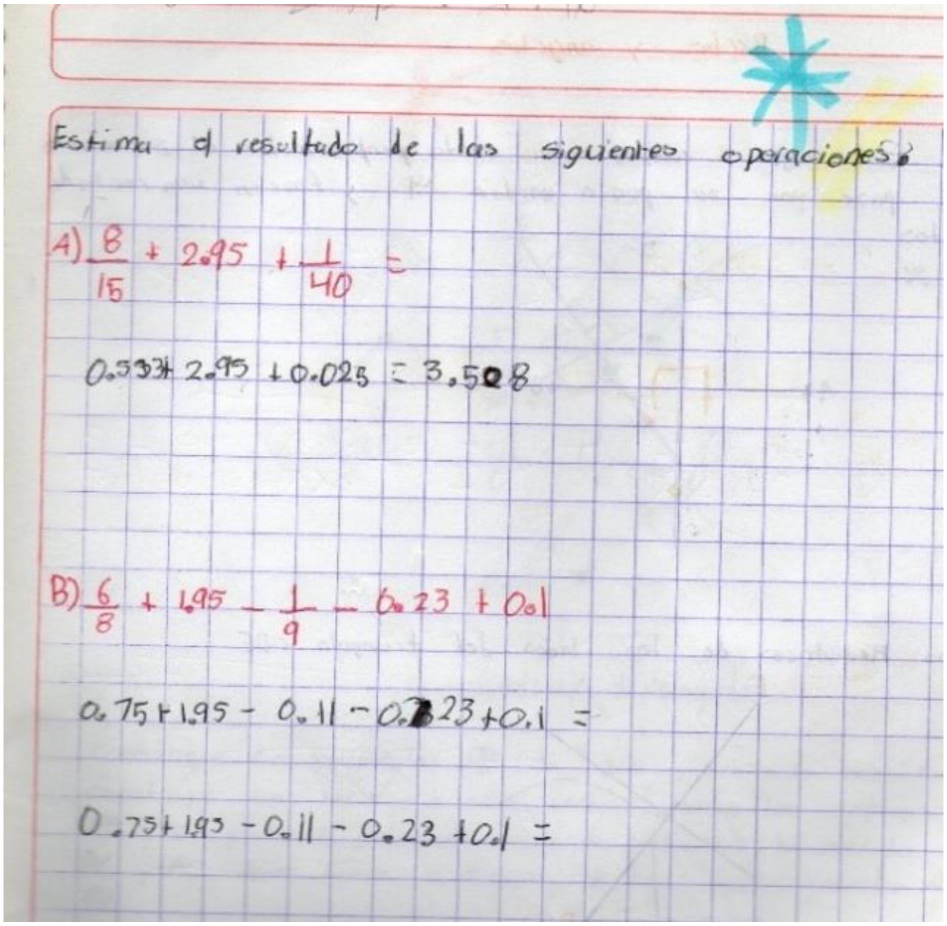


Figura 50. Tarea. Realización de ejercicios aditivos de fracciones comunes con números decimales.
FUENTE: Libreta de primer grado de secundaria, grupo A. En: alumna de primero de secundaria. Grupo A (2011-2012). Libreta de matemáticas.

El que los alumnos realicen las sumas escritas en la Figura 50 no contiene ningún otro propósito más que habilitarlos en el manejo de una técnica o algoritmo institucionalizado al igual que en la Figura 49. Por tal razón, en este caso también existe una omisión, que es recurrente, de trabajo con los componentes del bloque teórico.

6.5.2. Del grupo B.

En las Figuras 51 y 52 (ver página siguiente), se incluye un tipo de tareas que establece como praxeología de estudio “ordenar, comparar y convertir números fraccionarios a decimales y viceversa, mediante métodos propios desarrollando hábitos de pensamiento y utilizando evidencias de orden matemático” (Alumna de primero de secundaria. Grupo B (2011-2012). Libreta de matemáticas).

En la revisión de la libreta se observa que se desarrollan dos tipos de tareas vinculadas a esta praxeología: a manera de ejemplo, la primera es expresar una fracción propia en su escritura decimal, y la segunda, realizar el mismo ejercicio pero con una fracción impropia. Posteriormente, se enuncia la tarea principal para esta lección “Resuelve los siguientes ejercicios convirtiendo de fracción a decimal y viceversa, según sea el caso”.

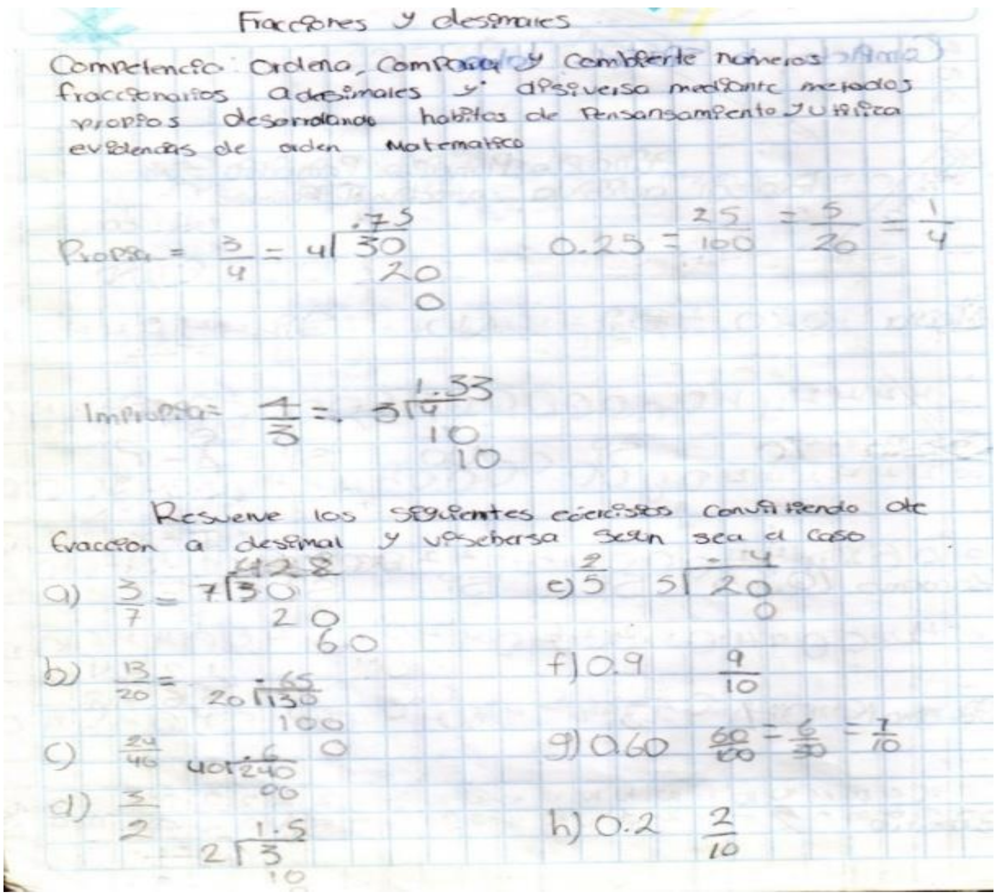


Figura 51. Tarea. Conversión de fracciones a decimales y viceversa.
FUENTE: Libreta de primer grado de secundaria, grupo B. En: alumna de primero de secundaria. Grupo B (2011-2012). Libreta de matemáticas.

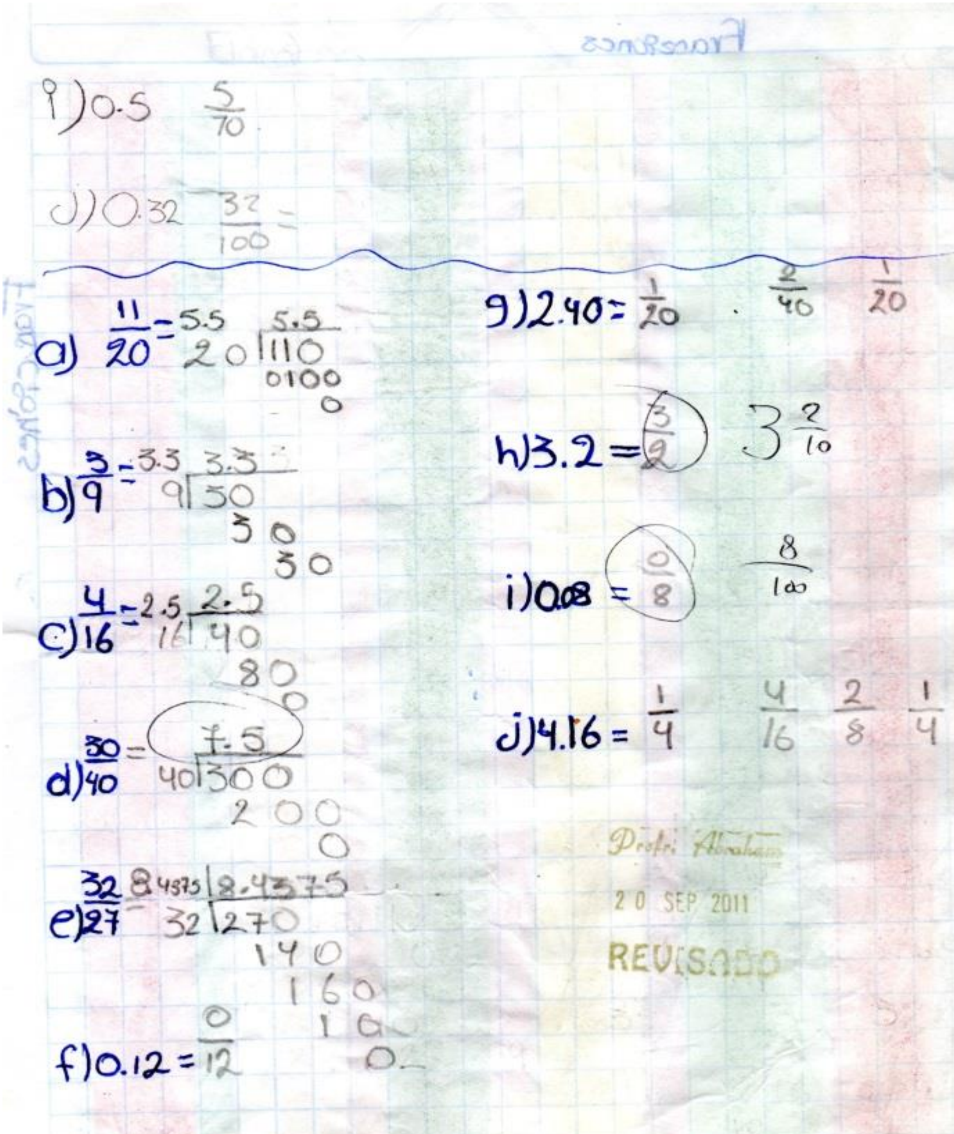


Figura 52. Tarea. Ejercicios de conversión de fracciones a decimales y viceversa. FUENTE: Libreta de primer grado de secundaria, grupo B. En: alumna de primero de secundaria. Grupo B (2011-2012). Libreta de matemáticas.

Posteriormente los alumnos inician los trabajos donde se observan cinco ejercicios de conversión de fracciones a su expresión decimal y otros cinco en los que se pide expresar como fracciones números decimales expresados con punto decimal, aunque no se especifica si el requisito que fuera una fracción común o una fracción decimal.

La falta de claridad en las consignas constituye también un obstáculo para que los alumnos completen de manera adecuada el desarrollo de una organización matemática. Consecuentemente, se realiza un trabajo superficial al abordar los saberes implícitos en la praxeología matemática que es objeto del proceso de estudio y, por lo tanto, se cae también por esta vía en la ejercitación de procesos algorítmicos.

En el caso del contenido de las páginas de las libretas que aparecen en las imágenes que revisamos en este apartado (6.4.2), sin duda, al igual que en la tarea correspondiente a la libreta A que trata sobre adiciones y sustracciones de fracciones, las técnicas son de alguna manera sugeridas a los estudiantes. Es decir, se institucionaliza una serie de técnicas que inhiben en los alumnos el interés por generar técnicas alternas, personales o de equipo para resolver las tareas que impliquen la praxeología matemática del proceso de estudio. Derivado de esto, ni la tecnología ni la teoría aparecen en los casos revisados como componentes de las praxeologías de estudio.

6.5.3. En el grupo C

Del conjunto de tareas contenidas en la libreta C relacionadas con las fracciones y los números decimales, se tomaron las páginas que se muestras en las Figuras 53 y 54. En esta página las tareas consisten en la resolución de situaciones problemáticas que implican multiplicación y división de fracciones. En este caso, los alumnos antes de intentar utilizar alguna técnica informal o formal de resolución de las tareas han sido ya provistos de <u>la técnica</u> a emplearse, situación que es posible observar en la Figura 53 (página siguiente), donde se describe de manera gráfica y escrita el procedimiento que ha de emplearse en tareas que impliquen multiplicación y/o división de fracciones.

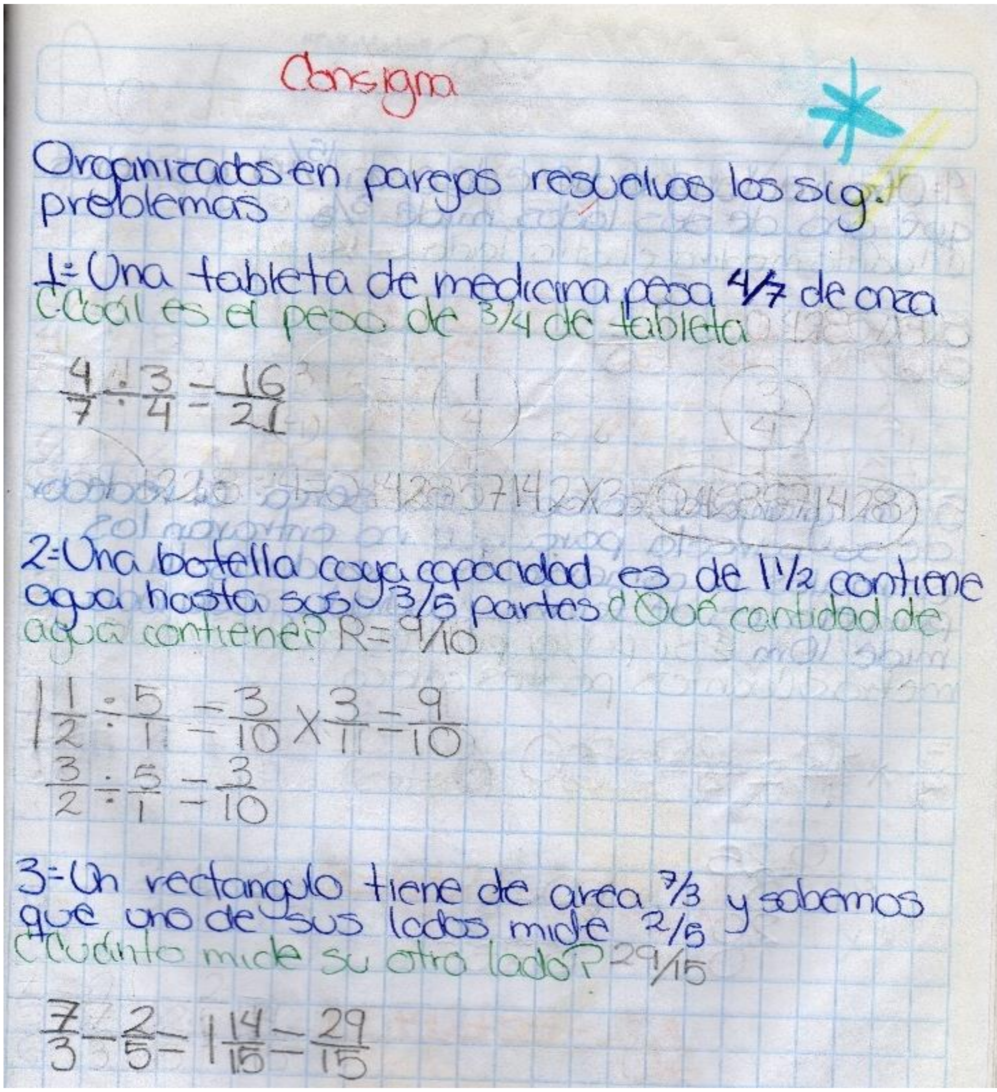


Figura 53. Tarea. Situaciones problemáticas que implican multiplicación y división de fracciones.
FUENTE: Libreta de primer grado de secundaria, grupo B. En: alumna de primero de secundaria. Grupo B (2011-2012). Libreta de matemáticas.

Este ejercicio de proveer a los alumnos la técnica no asegura la resolución correcta de la tarea, como ha de notarse en las tareas que en la Figura 54 (página siguiente), aparecen el primero y tercer lugar, pues se advierte cierta confusión sobre dónde aplicar la técnica canónica de multiplicación y dónde la que corresponde a división. Sin embargo, puede suponerse la intervención del docente para hallar la solución a las tareas, misma que no se cuestiona sobre si es correcta o no. Lo que se pretende destacar es que el docente instruye sobre una técnica, una técnica con arraigo en la institución, que como en los casos anteriores, inhibe la movilización de los conocimientos previos de los alumnos para el acercamiento personal a las tareas y la construcción de estrategias de solución.

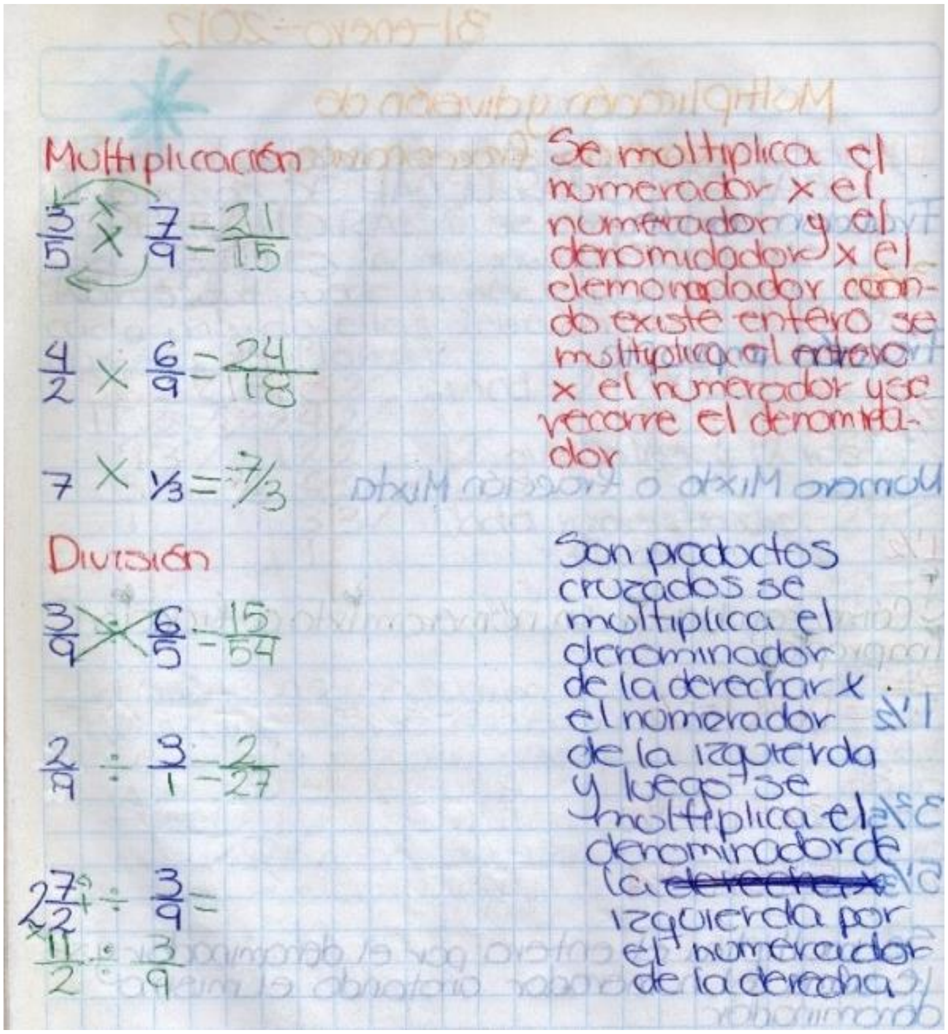


Figura 54. Tarea. Ejercicios que implican multiplicación y división de fracciones. FUENTE: Libreta de primer grado de secundaria, grupo C. En: alumna de primero de secundaria. Grupo C (2011-2012). Libreta de matemáticas.

Lo dicho en las líneas precedentes no significa que la técnica sea incorrecta, lo que es motivo de reflexión es que al proveer desde un inicio a los estudiantes con una única técnica de resolución para determinado tipo de tareas, se les predispone a no emplear otros recursos matemáticos para resolver las tareas en cuestión. De esta manera, el estudiante no puede organizar un discurso que permita explicar o justificar la técnica que está empleando, toda vez que no ha transitado por el proceso que podría haberlo llevado a la "invención", o al menos a la comprensión de la técnica que se le proporciona. Dado esto, no es posible construir una tecnología como tampoco interpretar la teoría implícita en la tarea.

6.6. Síntesis de las praxeologías matemáticas en las libretas de 1er grado de secundaria.

Para establecer una síntesis de las praxeologías matemáticas halladas en las libretas de primero de secundaria, se toman los tres tipos de tareas que se consideraron como eje de análisis en la revisión hecha con las libretas de sexto grado de primaria: las que refieren a los decimales, las que tratan particularmente fracciones y aquellas que implican una relación entre las fracciones y los números decimales.

En las libretas de primero de secundaria, a diferencia de las libretas de sexto grado de primaria que hay una mayor atención a tareas relacionadas con las fracciones, agrupadas en el tema "Problemas aditivos"; enseguida se encuentran las que implican números decimales y hay un menor número de tareas que implican relación entre fracciones y decimales. Se hace notar también que el mayor trabajo que se halla en las libretas de primero de secundaria está vinculado con tareas relativas a los temas "problemas aditivos y a problemas multiplicativos", principalmente con fracciones.

Uno de los tres ejes de la organización curricular de los programas de matemáticas en educación básica es "Sentido numérico y pensamiento algebraico"; éste a su vez se subdivide (como ya se comentó en el capítulo 5) en tres temas generales: Números y Sistemas de Numeración, Problemas aditivos y Problemas Multiplicativos. En sexto grado, presentaron una cantidad mayor de tipos de tareas que corresponden al primer tema general de los antes mencionados, en primero de secundaria la mayor abundancia, pero no de diversidad de tipos de tareas se tiene con relación a Problemas Aditivos.

6.6.1. Praxeologías relativas a los números decimales.

En las libretas de primero de secundaria, las tareas relacionadas con los números decimales se restringen principalmente a las siguientes praxeologías:

Ubicación de números decimales en la recta numérica. Esta praxeología matemática se trabaja en el primer bloque de tipos de tareas. Consiste en que el estudiante escribe una serie de números decimales, dibuja algunas rectas numéricas y se le indica mediante consigna escrita que localice en esas rectas numéricas los números decimales anotados. Esta es una tarea común en el conjunto de libretas revisadas, sin embargo, es notorio que algunos de los estudiantes presentan dificultades para ubicar los números pues se notan tareas inconclusas.

Conversión de números decimales a fracciones. Para el tratamiento de esta praxeología matemática por lo regular se reproduce una técnica que consiste en colocar a los números decimales dados, un denominador que sea 10 o una potencia de 10. No abundan este tipo de tareas, no obstante, si están contenidas en las libretas y corresponden en cierta forma a los saberes instituidos que tienen validez para la institución.

Adición de números decimales. Esta praxeología matemática es hallada frecuentemente en las libretas revisadas. Los alumnos reproducen en ellas un conjunto de tareas de naturaleza algorítmica, pues por lo regular no hay vinculación con alguna situación problemática. Este tipo de tareas consiste en realizar algunas adiciones o sustracciones que implican el uso de expresiones numéricas con punto presentadas en forma horizontal o vertical. Por la frecuencia con que se encuentran tales tareas, es notorio que para los docentes tiene cierta relevancia que los alumnos adquieran habilidad en la resolución de las tareas de esta naturaleza.

Multiplicación de números decimales. Multiplicar y dividir expresiones numéricas con punto corresponde al tipo de tareas que también abundan en las libretas de los estudiantes de primero de secundaria. Tales tareas, como sucede para el caso de las adiciones mencionadas en el párrafo anterior, se presentan sin alguna relación con situaciones problemáticas que le permitan salir del contexto ritinizador de un procedimiento algorítmico.

6.6.2. Praxeologías relativas a los números fraccionarios.

En cuanto a los números fraccionarios expresados en la forma a/b, donde se abordan principalmente las praxeologías siguientes:

Fracciones equivalentes. La equivalencia entre la expresiones fraccionarias se aborda en dos casos, el primero consiste en establecer mediante un procedimiento de duplicación o de reducción de los términos que componen las fracciones dadas, la equivalencia entre expresiones, como por ejemplo, $1/3\ y\ 2/6$, donde el numerador y denominador de la primera fracción se duplican y se obtiene su equivalente $2/6$. También se realizan hallando la fracción equivalente de una fracción impropia en su expresión como fracción mixta, por ejemplo: $22/4 = 5\ 2/4$ y viceversa.

Ubicación de fracciones en la recta numérica. Esta praxeología matemática se trabaja también en el primer bloque de tipos de tareas. Consiste en que el estudiante escribe una serie de fracciones de la forma a/b, enseguida dibuje o reproduzca algunas rectas numéricas y se le indica mediante consigna escrita que localice en esas rectas numéricas las fracciones anotadas. Esta, como ya dijo en lo relativo a los números decimales, es una tarea común en el conjunto de libretas revisadas.

Adición de fracciones. Es común en las libretas de trabajo de los estudiantes de primero de secundaria de la asignatura de matemáticas encontrar con frecuencia tareas que implican adición de fracciones. Esta es la tarea de mayor abundancia en tales materiales. Por lo regular, se trata de tareas que consisten en ejercicios algorítmicos de suma y resta de fracciones de diferentes características, pues en algunos casos se opera con fracciones de igual denominador, en otras con fracciones mixtas, en unas más se presentan sumas de más de dos fracciones. Vale agregar que en pocas ocasiones se plantean tareas con fracciones que estén vinculadas a situaciones problemáticas.

Multiplicación y división de fracciones. A diferencia de lo identificado en las libretas de sexto grado, en las libretas de los estudiantes de primero de secundaria, las tareas que se trabajan exclusivamente con multiplicación y división de fracciones son abundantes, pero un poco menos de las que implican adición de fracciones. Para esto, a los alumnos se les presenta una técnica sencilla para resolver cada caso (si es multiplicación o división); ellos reproducen la técnica al realizar diferentes tipos de tareas por lo regular de naturaleza meramente algorítmica.

También, la variedad de las tareas es menor que la que señala el Programa de Matemáticas. Se puede pensar que esto es indicador, entre otras cosas, de que los maestros abordan lo que institucionalmente consideran necesario. De este modo, parece que se prefiere trabajar reproduciendo algunas tareas de ejercitación contenidas en el libro de texto autorizado por la SEP para su uso en la escuela secundaria.

6.6.3. Praxeologías sobre la relación entre decimales y fracciones

Con relación a las tareas donde las praxeologías implican relación entre los números decimales y las fracciones, encontramos que principalmente se incluyen las siguientes:

Ubicación de números decimales y fraccionarios en la recta numérica. También están contenidas en las libretas de los estudiantes de primero de secundaria, algunas tareas que implican la ubicación de fracciones y de números decimales en rectas numéricas. No se especifica alguna técnica a utilizarse en la ubicación de tales expresiones numéricas, sin embargo, la consigna “ubica las fracciones o números decimales en la recta numérica” hace entender que ya hay trabajo previo sobre ese tipo de tareas, lo que Chevallard denomina *entorno tecnológico*. No obstante, hay tareas de esta naturaleza que no se atendieron por el estudiante, lo que podría significar que tuvo dificultad para llevarla a cabo, es decir, no contó con un entorno tecnológico suficiente que le haya permitido al alumno realizar las tareas indicadas recurriendo a saberes obtenidos en procesos de estudio anteriores.

Conversión de fracciones a decimales y viceversa. Este es otro tipo de tareas que se encuentra en las libretas de los estudiantes de primero de secundaria. Para que el estudiante pueda resolver estas tareas, se puede advertir que el director del proceso de estudio si le presenta y le pide registre en la libreta, una técnica para resolver dicho tipo de tareas. Posterior al registro de la técnica en la libreta de trabajo, se le plantean algunas tareas más de la misma índole con la finalidad de ejercitar la técnica dada por el responsable de dirigir el proceso de estudio, tarea que se lleva a cabo en algunas páginas de las libretas de estudio.

Adición de fracciones y decimales. Algunas tareas requieren que los estudiantes sumen o resten fracciones y números decimales. Este tipo tareas se presentan de manera horizontal intercalando expresiones fraccionarias de la forma a/b, donde a y b son números enteros con be diferente de cero y expresiones numéricas con punto decimal. No hay evidencia escrita de sugerirse por parte del director del proceso de estudio una técnica para la resolución de las tareas encomendadas, no obstante, la intervención del director del proceso de estudio, durante el desarrollo del trabajo en el aula, eminentemente siempre se lleva a cabo para precisar u orientar el uso de alguna técnica que posibilite la resolución de las tareas a los alumnos.

Cabe recordar, que conforme se planteó en el capítulo anterior, en el Programa de matemáticas de secundaria, en el eje “Sentido numérico y pensamiento algebraico”, tres de los cuatro temas de estudio se hallan también en el Programa de la misma asignatura en 6° grado de primaria, excepto el tema “Patrones y ecuaciones”. Así mismo, en el eje “Forma, espacio y medida” en secundaria se omite el tema “educación espacial” que se estudió a lo largo de la educación primaria. También puede verse que en eje “Tratamiento de la información” se agrega el tema “Nociones de probabilidad” en el nivel de secundaria.

En el programa de primer grado de secundaria la diferencia en el tratamiento de los ejes de estudio de la asignatura de matemáticas se acentúa pues en el eje “Sentido numérico y pensamiento algebraico” se encuentran casi la mitad de las praxeologías que se ven en dicha asignatura. En seguida se encuentra el eje “Tratamiento de la información” y al final el eje “Forma, espacio y medida”, lo que representa una diferencia con relación a la distribución de praxeologías matemáticas locales que se observa en sexto grado de primaria.

Ahora, vale mencionar, como ya se ilustró en el capítulo anterior (tabla 5), se observa que el programa de estudios de matemáticas para primero de secundaria, de manera específica en el eje *Sentido numérico y pensamiento algebraico*, 6 de las 8 praxeologías relacionadas con fracciones y números decimales indican un trabajo centrado en la resolución de problemas, sean estos aditivos, multiplicativos o de división de números fraccionarios o decimales. Al respecto, el Plan de Estudios 2011 señala: “El énfasis de este campo se plantea con base en la solución de problemas, en la formulación de argumentos para explicar sus resultados y en el diseño de estrategias y sus procesos para la toma de decisiones” (SEP, 2011a: 49).

Ya Ávila (2004) refería con respecto al enfoque de la Reforma Educativa de 1993 que “las matemáticas que se pretenden llevar a las aulas habrán de permitir que los alumnos construyan los conocimientos mediante la resolución de problemas y actividades que despierten su interés” (p. 70). En consecuencia, queda claro que la orientación del enfoque de enseñanza subyacente en la propuesta curricular retoma el de la Reforma anterior y se expresa en las praxeologías que se establecen para su estudio en el primer grado de educación secundaria como se mencionó unos párrafos atrás.

6.7. Comentario general sobre las praxeologías en las libretas

En general, se observa cierta diversidad en el tipo de tareas que se trabajan en los procesos de estudio y que han quedado registradas en las libretas de los estudiantes. Pero en su mayoría las técnicas usadas se orientan a la mecanización de un procedimiento que permite encontrar el resultado de una tarea y estas tareas permanecen sin conexión con situaciones problemáticas.

De acuerdo con Bosh *et al.*, (2003), como ya se mencionó líneas atrás, el primer nivel de una praxeología matemática lo constituye lo relativo a la praxis, es decir, al saber hacer; este es el nivel donde se definen los tipos de problemas o tareas que se estudian, así como las técnicas que se construyen y se aplican para abordarlos. En los casos que se revisaron, el nivel práctico de las tareas en cuestión queda en el nivel de mecanización de un procedimiento de resolución de una tarea. Se provee a los estudiantes de la técnica que les evita el análisis más cuidadoso de las tareas, - digamos la comprensión de las mismas - con el fin de hallar técnicas o formas de resolución donde apliquen los conocimientos que ya poseen s y esto les lleve a generar técnicas alternas que promuevan también la justificación de dichas técnicas. Ahora bien, en relación con la tecnología, Chevallard (1999) sostiene que ésta constituye un discurso racional, el logos, sobre la técnica Ô, para asegurarse que ésta permite realizar las tareas del tipo *T*.

En la revisión de las tareas incluidas en las libretas de los estudiantes de primero de secundaria, no se alcanza el nivel de justificación de la técnica, lo que se observa es la simple adopción de la técnica. Esta adopción se hace sin intentar su argumentación o justificación, dado que el docente la aporta a los alumnos para que estos la apliquen en la resolución de tareas sin pretender la comprensión y explicación de la técnica; parece que se conforman con su memorización.

Finalmente, si se toma como base que Gascón (1998:22) considera "teoría asociada a una técnica, a la tecnología de su tecnología, esto es, a un discurso matemático suficientemente amplio como para justificar e interpretar la tecnología de dicha técnica..." entonces ésta se halla con frecuencia ausente en las estructuras praxeológicas revisadas. No se encuentra ninguna evidencia de justificación sobre la descripción de la técnica, es decir, de la tecnología pues de igual forma no existe con respecto de la técnica aplicada en la resolución de la tarea, lo que se hallan son conceptos y algunas definiciones que constituyen la referencia teórica de las tareas en contados casos, pero que en general ni derivan ni se vinculan directamente con las tareas realizadas.

En consecuencia, el análisis de las libretas de secundaria permite afirmar que, desde este enfoque, se está ante un estudio de praxeologías matemáticas incompletas que se convierten en actividades de estudio centradas en la parte práctica de aquéllas, y las cuales se abordan de una manera mecánica y unívoca.

CONCLUSIONES

El objetivo de la presente investigación fue conocer y analizar las praxeologías matemáticas vinculadas con las fracciones y los decimales, incluidas en los programas, libros de texto y libretas de trabajo de alumnos de sexto grado de primaria y primero de secundaria. Los resultados de tal objetivo se desagregaron en los capítulos precedentes. Aquí se exponen algunas conclusiones derivadas de la revisión realizada.

Los programas de educación básica, en el caso particular de los de matemáticas de sexto de primaria y primero de secundaria, constituyen un proyecto social de enseñanza y de aprendizaje, a partir de contenidos de saber que son designados como contenidos a enseñar.

En el caso de la investigación que se presenta, los contenidos de saber a enseñar se encuentran en los programas de estudio correspondientes. Ahí se encuentran organizados en ejes curriculares y distribuidos en bloques para su estudio a lo largo del ciclo escolar. Posteriormente, los contenidos se traducen en lecciones y ejercicios en libros de texto y, en una etapa posterior del proceso, se transforman nuevamente y se registran en las libretas de los alumnos.

Al analizar los programas de los grados escolares en mención, es posible identificar praxeologías matemáticas de diferentes niveles de complejidad, según la clasificación de Chevallard. Tomando como base esta clasificación, en los programas se incluyen praxeologías matemáticas regionales que coordinan, articulan e integran alrededor de una teoría matemática común varias praxeologías de los niveles inferiores. Con base en esta jerarquización de praxeologías matemáticas, la revisión de los programas y de los libros de texto permite señalar que en los programas se encuentran las organizaciones regionales (OMR). Así, en sexto de primaria se tiene "[…] *propiedades del sistema decimal de numeración para interpretar o comunicar cantidades en distintas* *formas (SEP. 2011b:62);* también se ubican en los programas las organizaciones matemáticas locales (OML). Con relación a este tipo de praxeología se tiene, por ejemplo, *lectura, escritura y comparación de números naturales, fraccionarios y decimales (SEP, 2011b: 76).*

Si particularizamos estas praxeologías matemáticas, se obtendrán las praxeologías puntuales como, a) lectura y escritura de números naturales, b) lectura y escritura de números fraccionarios, c) Lectura y escritura de números decimales, d) Comparación de números naturales, e) Comparación de números fraccionarios, y f) Comparación de números decimales. Estas praxeologías se desarrollan a través de diversos tipos de tareas en los libros de texto.

En el programa de primero de secundaria, conforme a la revisión realizada, se tiene lo siguiente: *"Números y sistemas de numeración*" como praxeología regional y como praxeologías matemáticas locales: 1) Conversión de fracciones decimales y no decimales a su escritura decimal y viceversa, y 2) Representación de números fraccionarios y decimales en la recta numérica a partir de distintas informaciones, las cuales también se particularizan en praxeologías matemáticas puntuales que se abordan con mayor especificidad en el libro de texto.

En relación con la estructura de las praxeologías matemáticas que contienen los programas y libros de texto, atendiendo a sus componentes, se destacan los relativos al bloque práctico. Las tareas, como ya se mencionó líneas atrás, se trabajan de manera específica al formar la parte principal de las praxeologías matemáticas puntuales incluidas en los libros de texto. En estos materiales se indican la consigna principal y las consignas secundarias, mismas que refieren a las tareas que han de realizar los alumnos.

En cuanto a las técnicas, en el programa de estudios se presenta un enfoque general que consiste en utilizar secuencias de situaciones problemáticas que propicien en los alumnos interés por resolverlos y promuevan en ellos la reflexión para encontrar diferentes formas de resolver dichas situaciones problemáticas. Significa entonces, según lo anotado en los programas, que hay apertura para que el maestro promueva durante los procesos de estudio la búsqueda de diversas técnicas que les permitan resolver las tareas planteadas, las cuales, además, se busca que estén vinculadas a situaciones problemáticas.

En cuanto al bloque teórico, la tecnología se expresa generalmente en algunos apartados de los programas de los grados donde se desarrolló el estudio, específicamente cuando se hace referencia al enfoque de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Lo que podría considerarse como la tecnología en este apartado, implica una descripción del enfoque propuesto (resolución de situaciones problemáticas), mismo que propone que el docente aliente en los alumnos la argumentación de las técnicas empleadas en la resolución de las tareas asignadas durante los procesos de estudio.

Ahora bien, la tecnología en los libros de texto de los alumnos de sexto grado sólo se promueve débilmente a través del planteamiento de algunas preguntas sobre las implicaciones de la resolución de las tareas por parte de los alumnos. Queda a libertad del docente el grado de importancia que le asigne a esta fase del proceso praxeológico donde el estudiante debe clarificar y justificar el empleo de sus procedimientos (técnicas) en la realización de las actividades (tareas).

Por su parte, en los libros de texto autorizados por la SEP para el trabajo de los alumnos en los grupos de primero de secundaria tomados para esta investigación, la promoción de la argumentación de las técnicas (tecnología) tiene muy escasa presencia. Sólo en algunas lecciones se plantean cuestionamientos al alumno relativos a la explicación de sus técnica; La teoría relacionada con las praxeologías sobre fracciones y decimales se encuentra en parte en los libros para el maestro, pero también ocasionalmente, y de manera muy específica, en los libros para el alumno. En este caso se inserta a la manera de definiciones que con frecuencia no corresponden del todo a la naturaleza de las tareas realizadas ni se vinculan directamente con ellas.

Ahora bien, como ya se expuso, otro material analizado fueron las libretas de trabajo de los alumnos. Éstas son consideradas por los maestros como un recurso al que le atribuyen un rol relevante pues de acuerdo a lo que ellos expresan, es el recurso didáctico inseparable del alumno, donde éste realiza todas las consignas derivadas de su participación en los procesos de estudio de las matemáticas. De esta manera, el análisis del contenido de las libretas permite observar en qué aspectos se centra el trabajo áulico.

En el ejercicio de identificar la relación existente entre los elementos de las praxeologías matemáticas identificadas en las libretas de los estudiantes y los momentos del proceso de estudio, se puede advertir de manera general la forma en que éstos ocurren.

El primer momento, el del encuentro, se halla en todas las libretas de los alumnos participantes en este estudio, cuando hay evidencia de que el maestro les hace anotar o leer la consigna o indicación sobre el tipo de tareas que han de realizar en la libreta, por ejemplo, *"Encuentra las siguientes fracciones en la recta numérica".* Al escribir o leer la consigna, el alumno se halla ante el primer momento didáctico del proceso de estudio, al margen de la comprensión o interpretación que haga de dicha consigna. En la investigación que aquí se reporta, al inicio de todo tipo de tareas anotadas por los estudiantes en las libretas, se puede identificar una consigna o indicación que define el tipo de tarea a realizarse. Por lo tanto, estas consignas se constituyen en evidencia de cómo se vive el primer momento del proceso de estudio.

El segundo momento, el de la exploración del tipo de tareas y de la elaboración de una técnica respecto de ese tipo de tareas, tiene una presencia muy sutil en los registros contenidos en las libretas de los estudiantes. Este momento, desde la perspectiva de Chevallard, implica la comprensión y reflexión sobre los límites del tipo de tareas a realizar para que a partir de esta reflexión los alumnos elaboren individual o colectivamente una técnica. En las libretas revisadas hay muy escasos intentos de búsqueda de técnicas. En poquísimas de las páginas revisadas, se pueden observar iniciativas por parte del estudiante para utilizar alguna técnica diferente a la rutinizada con anterioridad para resolver el tipo de tareas indicado en la consigna.

El tercer momento didáctico, el de la construcción del entorno tecnológico – teórico, no se ve reflejado en las libretas revisadas, pues siguiendo a Chevallard (1999), es en este momento cuando el estudiante establece una relación con un entorno tecnológico teórico creado en un proceso de estudio anterior; es decir, el alumno desde el primer encuentro con el tipo de tareas que le se presenten, se ve forzado a movilizar sus conocimientos previos que le permita generar una técnica. Sin embargo, si durante el proceso de estudio no se establece esta relación, entre un entorno tecnológico previamente estudiado, este tercer momento pasa a ser parte de la primera etapa del estudio.

En nuestro estudio, el cuarto momento del proceso de estudio, que se refiere al trabajo con la técnica, se hace presente en las libretas, aunque este trabajo se reduce a la ejercitación de técnicas propias de la institución. Es decir, se ensayan los algoritmos y los procedimientos canónicos para la resolución de diferentes tipos de tareas que implican a las fracciones y a los números decimales, como por ejemplo, la suma de fracciones, la multiplicación de expresiones decimales o la ubicación de fracciones y/o decimales en la recta numérica, etc., en suma, se realiza sólo la rutinización y naturalización de la técnica.

El quinto momento, el de la institucionalización, implica precisar lo que realmente es necesario saber; deriva de un trabajo realizado en los momentos anteriores, pero con avances que definen lo que merece ser preservado como una organización matemática. En el caso que se reporta, el momento de la oficialización implica desvincular a una praxeología matemática relativa a las fracciones o a los números decimales de su historia en los procesos de estudio, para hacerla emerger como lo matemáticamente necesario para generar nuevos marcos tecnológico- teóricos en los procesos de estudio por venir.

Lo dicho en el párrafo anterior, me lleva a afirmar que, en las libretas revisadas, el momento de la oficialización (o institucionalización) tiene sutilmente lugar mediante el planteamiento de definiciones que se encuentran en esas libretas o en las fotocopias de guías didácticas también utilizadas por los docentes en los procesos de estudio. Se trata de un intento no sólo de oficializar la técnica y los tipos de problemas en los que es factible aplicarla, sino también de lograr el dominio algorítmico en los alumnos que permita dar validez a un conjunto de praxeologías matemáticas que institucionalmente tienen pertinencia de entre el total que señala el programa de estudios oficial. Esto se complementa mediante la anotación en algunas libretas, de definiciones con el propósito de que el alumno las estudie y si es posible, las memorice para recordarlas en un examen, se da validez institucional a los tipos de tareas y a las técnicas naturalizadas en los procesos de estudio de las fracciones y de los números decimales.

Sin embargo, en la mayoría de las libretas revisadas, no existen definiciones. Por lo que la institucionalización que tiene lugar es mayoritariamente el de las técnicas. Es en concreto, la institucionalización y rutinización de algoritmos lo que se promueve, no la construcción de un saber implícito en el componente teórico de una praxeología matemática.

Finalmente, respecto del sexto momento, el de la evaluación, al analizar lo que las libretas, se observa que se da como un proceso exento de la participación de los alumnos. Es notorio que es el maestro quien revisa la resolución de las tareas y les asigna una calificación. De esta manera, la institución a través de él, valora lo que los alumnos supuestamente han aprendido, lo cual se expresa en la habilidad manifiesta al resolver las tareas planteadas.

Por otra parte, la revisión de las libretas de trabajo de los estudiantes, tal como se hizo en este trabajo, permitió observar que no se abordan en los procesos de estudio todas las praxeologías matemáticas locales incluidas en los programas y libros de texto, al menos de las que se da testimonio en tales materiales.

En las libretas se da prioridad a tipos de tareas que se circunscriben alrededor de tres praxeologías matemáticas puntuales: una que tiene que ver con leer y escribir números fraccionarios y números decimales; otra relacionada con la ubicación de esos números en la recta numérica sin que se implique la búsqueda de la equivalencia entre los dos tipos de números; y la tercera, vinculada al desarrollo de operaciones de suma, resta y multiplicación con fracciones por un lado, y con números decimales por otro. Esto ocurre principalmente en primaria. En primero de secundaria las tareas son bastante similares a las de primaria, se agregan sólo a lo dicho en líneas precedentes, operaciones de división con fracciones y decimales.

En el programa de matemáticas de sexto grado hay otras praxeologías matemáticas puntuales que no tienen una presencia importante en las libretas de trabajo de los estudiantes. Por ejemplo, las que tienen relación con los diferentes significados que puede adoptar la fracción, como los de cociente, razón, medida o parte- todo. Así mismo, están ausentes las propiedades de densidad y de orden, los procesos de comparación y equivalencia tanto en las fracciones como en los números decimales, y la conversión de fracción a número decimal y viceversa.

Respecto a la integración de la estructura praxeológica, tal como se señaló en el capítulo seis de esta tesis, casi la totalidad de las praxeologías matemáticas desarrolladas en las libretas de trabajo de los estudiantes, se reducen sólo al bloque práctico con sus componentes tipos de tareas y técnicas, donde los tipos de tareas están definidos por el director del proceso de estudio y, al parecer, las técnicas son inducidas por éste.

Las técnicas que se promueven, lo más común es que tengan que ver con una ejercitación algorítmica orientada hacia fines concretos como el aprenderse un procedimiento o técnica para resolver el tipo de tareas que se está trabajando, con escasa vinculación a situaciones problemáticas. Por tal razón, en las libretas de trabajo de los estudiantes se encuentran ausentes elementos que muestren el trabajo realizado con los componentes del bloque teórico (tecnología y teoría).

La ausencia del bloque teórico en las libretas de trabajo de los estudiantes es probablemente un factor que incide negativamente en los resultados de aprendizaje de los alumnos pues se entiende que los procesos de estudio de praxeologías matemáticas – tal como éstas se les presentan - sólo les habilitan en el dominio de un procedimiento o técnica institucionalizada, quedando fuera la posibilidad de utilizar o crear otras técnicas, así como la argumentación de los procedimientos (tecnología), aspectos que plantea el programa de estudios correspondiente. El poder darle sentido a la técnica desarrollando una tecnología, favorecería también la comprensión de la teoría implícita.

Por lo tanto, replantear los procesos de estudio de las praxeologías matemáticas relativas a las fracciones y a los números decimales implicaría configurar una praxeología didáctica que exigiera de los actores principales del proceso de estudio- el maestro y el alumno-, el transitar por cada una de las fases de una praxeología completa. Esto es, que se presenten tareas con sentido y vinculación contextual cuyo procedimiento resolutivo se diversifique tanto como la creatividad de los estudiantes lo permita, sin que la temprana introducción de la técnica canónica inhiba los procedimientos propios de los alumnos. La apertura para presentar formas de resolución disímiles debe propiciar la explicación de las mismas, es decir, puede tender el puente hacia la argumentación de la o de las técnicas empleadas, y más aún, hacer surgir la explicación teórica que subyace en la esencia de todo el conjunto praxeológico.

Ciertamente no es fácil lograr lo anteriormente mencionado, se requiere de un cambio en la cultura escolar, incidir en las representaciones pedagógicas y didácticas de los docentes, las cuales no dejan de ser compartidas, toda vez que involucran a sujetos que interactúan en un espacio enmarcado por lazos institucionales.

La mayoría de los docentes actúa en los procesos de estudio que implican el aprendizaje de objetos matemáticos, bajo un esquema que responde a una cultura escolar donde privan ciertas concepciones sobre el estilo de enseñar y aprender matemáticas. Esos estilos, permeados sólo parcialmente por los dictados pedagógicos de las reformas educativas, conforman un modelo específico, acorde con las representaciones sociales imperantes entre los maestros pero fundamentalmente en las escuelas.

Por su parte, los maestros participantes en este estudio, señalan dos factores que determinan la dificultad que representa para los alumnos el aprendizaje significativo de los objetos matemáticos constituidos por las fracciones y los números decimales. El primero es el bajo nivel de recursos referenciales que tienen los estudiantes al respecto de dichos temas por su falta de atención a las enseñanzas escolares y, por otro lado, se señala que son los mismos profesores quienes tienen vacíos conceptuales que les impiden enseñar con conocimiento pleno del tema las praxeologías matemáticas.

Uno de los resultados de la situación descrita en el párrafo anterior es que al término de la primaria los alumnos no recuerdan prácticamente nada sobre las diferentes praxeologías matemáticas relacionadas con las fracciones y con los decimales. Sin embargo, se agrega otra situación: el hecho de la incompletitud de las praxeologías matemáticas en los procesos de estudio, esto puede ser consecuencia de una atención limitada a la formación docente y a cierto desinterés de los docentes por fortalecer su formación profesional.

El dotar de diversos recursos didácticos a los profesores no es garante de mejora de la enseñanza y del aprendizaje, lo fundamental es generar espacios de formación (inicial o continua) para que los docentes puedan adentrarse en el conocimiento de la didáctica de las matemáticas. Esto ha de permitir que los procesos de estudio se enriquezcan mediante el uso adecuado y creativo de los recursos que el profesor recibe para apoyar su labor. De esta manera, la estructura praxeológica de cada uno de los contenidos considerados en la escuela, podría ser desarrollada en toda su completitud, para lograr con esto una mayor apropiación de las fracciones y de los números decimales como praxeologías matemáticas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aguayo, R. L. (2004) El saber didáctico en las escuelas normales. Un análisis de las praxeologías de formación. *Educación matemática.* Santillana: pp. 29-57. Volumen 16. Núm. 3. Diciembre, 2004.

Aguayo, R. L. (2005). *La trasposición del saber didáctico. Un estudio con profesores en formación en el contexto de los números racionales*. Tesis de doctorado.

Arceo, Esperanza. (1996). El nuevo enfoque matemático en el aprendizaje de las fracciones. En: *El cuaderno de los maestros de Aguascalientes*. México. Año IV. Núm. 18. Septiembre-octubre.

Arriaga, C. A., Benítez, C. M. y Cortés, A. M. (2011). *Matemáticas, Primer grado*. Educación secundaria. Pearson Educación. México.

Astorga y Rodríguez (1984). *El conjunto de los números reales*. Instituto Tecnológico de Costa Rica. Escuela de matemática.

Ávila, A. (2001). El maestro y el contrato en la teoría brousseauniana. *Educación Matemática*. México, D.F.: Santillana: pp. 5-21. Volumen 13. Núm. 3. Diciembre, 2001.

Ávila, A. (2004) *Los maestros y los decimales: sobre la escasa apropiación de una propuesta curricular*. México, D.F. comie.org.mx/congreso/memoriaelectronica/v09/ponencias.

Ávila, A. et al (2004). La reforma realizada*. La resolución de problemas como vía del aprendizaje en nuestras escuelas*. México, D.F. SEP.

Ávila, A. (2006) *Transformaciones y costumbres en la matemática escolar*. México, D.F.: Paidós educador.

Ávila, A. (2008) Los profesores y los decimales. Conocimientos y creencias acerca de un contenido de saber cuasi invisible. *Educación Matemática.* México, D.F.: Santillana. pp. 5-33. Volumen 20. Núm. 2. Agosto, 2008.

Ávila, A. (directora), Silvia García, Yolanda Chávez, Carmen Gutiérrez y Alicia Carvajal. (2010) *Educación matemática en escuelas indígenas. Análisis de sus condiciones y problemas*. México. UPN/DGEI. Reporte de investigación no publicado.

Ávila, A. (2012) Estudiar matemática en una primaria nocturna. Logos y praxis en un proyecto con orientación social. *Educación Matemática*. México, D.F.: Santillana: pp. 37-60. Volumen 24. Núm. 2. Agosto, 2012.

Ávila, A. (2013). Conocimientos en construcción sobre los números decimales: los resultados de un acercamiento conceptual. *Annales de didactique et de Sciences cognitives,* pp. 29-59. Volumen 18.

Ávila, A. y García, S. (2008). *Los decimales: más que una escritura*. México, D.F.: INEE.

Ávila, A. y Mancera, E. (1989). La fracción: una expresión difícil de interpretar. En: *Pedagogía*, revista de la UPN. México. Volumen: 6. Núm. 17. Enero-marzo.

Barriendos, R. A. (2013). *La multiplicación achica y la división agranda. Cuando los decimales contradicen la experiencia*. Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE).

Block, S., David [coord.] (1995). *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. Taller para maestros. Segunda parte, México, SEP.

Block, S., David [coord.] (1995). *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Taller para maestros*. Lecturas, México, SEP.

Bogdan, R. y Taylor, S. J. (1984). *Introducción a los métodos cualitativos*. Ediciones Paidós. España.

Bosch, M., Espinoza, L. y Gascon, J. (2003). El profesor como director de procesos de estudio análisis de organizaciones didácticas espontáneas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Volumen 23. Núm. 1. España. pp. 79-136.

Bosch, M. Espinoza, L. y Gascon, J. (2004) Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. pp. 205-250. Volumen 24. Núm. 2.3. España.

Bosch, M., García, F. Gascón, J. y Higueras, R. L. (2006) La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación Matemática*. México, D.F.: Santillana. pp. 37-74. Volumen: 18. Núm. 2.

Bosch, M. y Gascón, J. (2001) Las prácticas docentes del profesor de matemáticas. *La didáctica de las matemáticas*. Documento de trabajo.

Bosch, M. y Gascón, J. (2009). Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 89113). Santander: SEIEM.

Broitman, C. Itzcovich y Quaranta, M. E. (2003). La enseñanza de los números decimales: el análisis del valor posicional y una aproximación a la densidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* México, D.F. pp. 5-26. Año/volumen 6. Núm. 001.

Brousseau, G. (1981) Problemas de didáctica de los decimales. *Didáctica de las matemáticas.* Argentina. pp. 37-127. Volumen 2. Núm. 1

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*. Volumen 7. Núm.2. pp. 33-115. Francia.

Brousseau, G. (2000). Educación y didáctica de las matemáticas. *Educación Matemática*. México, D.F.: Santillana: pp. 5-38. Volumen 12. Núm. 1. Abril, 2000.

Centeno, P. J. (1997) *Números decimales ¿Por qué? ¿Para qué?*. España: Síntesis.

Chevallard, Y. (1991) *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique. 3ª. Edición. 2ª reimp. (2005).

Chevallard, Y. (1999) El análisis de las practicas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* España. pp. 221-266*.* Volumen 19. Núm. 2.

Chevalard, Y., Bosh, M. y Gascón, B. (1998). *Estudiar matemáticas El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* México, DF.: SEP.

Cortina, J. L., Cardoso, E. y Zúñiga, C. (2012). El significado cuantitativo que tienen las fracciones para estudiantes mexicanos de 6º de primaria. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*. México, D.F. Volumen 14. Núm. 1.

Cortina, J., Zuñiga, C. Y Visnovska, J. (2013) La equipartición como obstáculo didáctico en la enseñanza de las fracciones. *Educación Matemática*. México, D.F. pp. 7-29. Volumen 25. Núm. 2. Agosto, 2013.

Courant, R. y H. Robbins (1962), *¿Qué es la Matemática? Una exposición elemental de sus ideas y métodos*, Madrid, Aguilar.

Covian, C. Olda N. y Romo V. A. (2014) *Modelo Praxeológico Extendido una Herramienta para Analizar las Matemáticas en la Práctica: el caso de la vivienda Maya y levantamiento y trazo topográfico*. Brasil: Bolema. pp. 128-148. Volumen 28. Núm. 48. Abril, 2014.

D´amore, B. y Godino, J. (2007) El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática Educativa*. Mexico, D.F.: Relime. pp. 191-218. Volumen: 10. Núm. 002.

Erickson, Frederik (1997). Métodos cualitativos de investigación sobre la enseñanza. En: Wittrock, Merlin C. (Comp.) (1997). *La investigación de la enseñanza, II. Métodos cualitativos y de observación*. Paidós educador. España.

Eudave, D., Ávila, A. (2004) Los aprendizajes matemáticos escolares. Ponderación mediante la aplicación de un examen. en Avila, A., Aguayo, L.M., Eudave, D., Estrada, J.L., Hermosillo, A., Mendoza, J., Saucedo, M.E. y Beilcerra, E. (2004) *La reforma realizada. La resolución de problemas como* *vía del aprendizaje en nuestras escuelas*. México: Secretaría de Educación Pública

Finocchio, S. (2005). La ciudadanía en los cuadernos de clase*. Enseñanza de las Ciencias Sociales.* Barcelona. Número 4, 2005.

Fonseca, C. Bosch, M. y Gascón, J. (2010). El momento del trabajo de la técnica en la completación de Organizaciones Matemáticas: el caso de la división sintética y la factorización de polinomios. *Educación Matemática*. México, D.F: Santillana. pp. 5-34. Volumen: 22. Núm. 2. Agosto, 2010.

Fonseca, C. y Gascón, J. (2000) *Integración de praxeologías puntuales en una praxeología matemática local. La derivación de funciones en Secundaria*. España. IV simposio de la SEIEM. Huelva, septiembre de 2000.

Fregoso, Arturo. (1972). *Introducción al lenguaje de la matemática*. CEMPAE. México.

Freudenthal, Hans. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: Reidel*. 1 Traducción de Luis Puig, publicada en Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados. México: CINVESTAV, 2001.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Francia. pp. 7-34. Volumen 18, Núm. 1.

Godino, J. (2010). Perspectiva de la didáctica de las matemáticas como disciplina tecnocientífica. *Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Septiembre de 2010.*

Godino, J. Font, V. Contreras, A. y Wilhelmi (2006) Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Revista latinoamericana de la investigación en matemática educativa. México*. D.F. pp. 117-150. Volumen 9. Núm. 1. Marzo.

Higueras, L. y García, F. (2011). Análisis en las praxeologías didácticas en la gestión de procesos de modelización matemática en la escuela infantil. *Revista de investigación en Matemática Educativa*. México. Volumen 14. Núm. 1. Enero, 2011.

INEE. (2008) *PISA en el Aula: Matemáticas*. México, D.F. INEE.

INEE. (2013). *México en PISA 2012*. 1ª Edición. México. INEE.

INEE. (S/F). *Plan Nacional para la Evaluación de los aprendizajes (Planea)*. Resultados nacionales 2015. México. INEE.

INEGI, (2011). *Perspectiva estadística Puebla*. Octubre-diciembre, 2011. México, D.F. INEGI.

Ivorra, C. (s/f). *Geometría*. https://www.uv.es/ivorra/Libros/Geometria2.pdf

Izquierdo, Gloria. (2006). *Las representaciones sociales de 12 profesores de educación primaria sobre las fracciones y su enseñanza*. Tesis de Maestría. Universidad Pedagógica Nacional. México, D.F.

Kilpatrick, Jeremy. (1993). Educación matemática: errores y dificultades de los estudiantes. *Resolución de problemas. Evaluación. Historia* : [Primer Simposio Internacional de Educación Matemática: marzo 1993] / coord. por Jeremy Kilpatrick, Pedro Gómez, Luis Rico Romero. pp. 1-19.

Konic, P., Godino, J. y Rivas, M. (2010) Análisis de la introducción de los números decimales en un libro de texto. España. *La didáctica de las matemáticas*. España: Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas. pp. 57-74.

Llinares, C. S. y Sánchez, G. M. (1997) *Fracciones relación parte-todo*. España: Síntesis, S. A

Lipschutz, S. (1992). *Teoría y problemas de teoría de conjuntos y temas afines*. McGraw-Hill Interamericana de España. España.

López y Mota, Á. D. [Coordinador] (2003). *Saberes científicos, humanísticos y tecnológicos: Procesos de enseñanza aprendizaje.* Ideograma Editores. México.

López, P. A. y Ursini, S. (2007). Investigación en educación matemática y sus fundamentos filosóficos. *Educación Matemática*. México, D.F.: Santillana: pp. 91-113. Volumen 19. Núm. 3. Diciembre, 2007.

Mancera, M. E. (1992) Significados y significantes relativos a las fracciones. México, D.F. *Educación Matemática*. Volumen 4. Número 2. Agosto, 1992.

Moscovici, S. (2002). La representación social: un concepto perdido. Aproximaciones teóricas, nociones de prácticas y representaciones. Lima: Huemul. pp. 27-44. En: Moscovici, S. (1979) *El Psicoanálisis, su imagen y su público*. Buenos Aires. Instituto de estudios peruanos.

Parra, A. M. y Flores, M. R. (2008) Aprendizaje cooperativo en la solución de problemas con fracciones *Educación Matemática*. México, D.F. Santillana: pp. 31-52. Volumen 20. Núm. 1. Abril, 2008.

Parra, C. (2005). *Matemática. Fracciones y números decimales*. 7º grado. Apuntes para la enseñanza. Secretaría de Educación. Buenos Aires.

Perera, P y Valdemoros. E. (2009). Enseñanza experimental de las fracciones en cuarto grado. *Educación Matemática.* México, D.F. Santillana. Pp. 29-61. Volumen 21. Núm. 1. Abril, 2009.

Pruzzo. P. V. (2012*). Las fracciones: ¿Problema de aprendizaje o problemas de la enseñanza?* Argentina. Revista Pilquen. Año 14. Núm. 8.

Quiroz, R. S. y Rodríguez, G. R. (2015) Análisis de praxeologías de modelación matemática en libros de texto de educación primaria. *Educación Matemática.* México, D.F. pp. 45-80. Volumen 27. Número 3. Diciembre, 2015.

Ramírez, M. y Block, D. (2009) La razón y la fracción: un vínculo difícil en las matemáticas escolares. *Educación Matemática,* México, D.F.: Santillana. pp. 63-90. Volumen 21. Núm. 1. Abril, 2009.

Ruiz Cruz, C. (2011). *Sobre el origen de los números decimales*. Ensayo centrado en Europa y Oriente medio. Universidad Nacional de Colombia. Colombia.

Saíz, I.; Gorostegui, E. y Vilotta, D. (2001). Problematizar los conjuntos numéricos para repensar su enseñanza entre las expresiones decimales y los números decimales. *Educación matemática*. México, D.F. Santillana. Pp. 123-151. Volumen 23. Núm. 1. Agosto- abril, 2011.

Sanchindrián, C. y Gallego, M. (2009). Los cuadernos escolares como fuente y tema de investigación en Historia de la Educación. *La Educación especial y social del siglo XIX hasta nuestros días: XV Coloquio de Historia de la Educación.* Plamplona-Iruñea. Volumen 2, 2009.

Sensevy, G. (2007). Categorías para describir y comprender la acción didáctica. España. En: Sensevy, G & A. Mercier (2007). *Agir ensemble: l'action didactique conjointe du professeur et des élèves*. Rennes: PUR.

SEP. (1974). *Matemáticas. Quinto grado*. Auxiliar didáctico. SEP.

SEP (1993). *Plan y programas de estudio. Educación básica primaria*. México, D.F.

SEP. (2000). *Matemáticas y su enseñanza I*. *Programa y materiales de apoyo para su estudio*. Licenciatura en Educación Primaria. Segundo semestre. México. SEP.

SEP. (2002). *Matemáticas y su enseñanza II*. *Programa y materiales de apoyo para su estudio*. Licenciatura en Educación Primaria. Tercer semestre. México. SEP.

SEP, (2006). *Matemáticas* I. Volumen I. Primer grado. Telesecundaria. ILCE. México, D.F. SEP.

SEP, (2011a). *Plan de estudios 2011.* Educación Básica. Primaria. México, DF. SEP.

SEP, (2011b). *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación Básica. Primaria.* Sexto grado. México, D.F. SEP.

SEP, (2011c). *Matemáticas. Sexto grado*. México, D.F. SEP.

SEP, (2011d). *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro.* Educación Básica. Secundaria. Matemáticas. México, D.F. SEP.

SEP (2013). ENLACE 2013. *Evaluar para aprender. Información básica*. México. SEP.

SEP, (2014). *Desafíos matemáticos*. Libro para el alumno. Sexto grado. Primaria. México, D.F. SEP.

Solares, P. D. (2012) Conocimientos matemáticos en situaciones extraescolares. *Educación matemática*. México, D.F. pp. 5-33. Volumen 24. Núm.1. Junio, 2012.

Streefland, L. (1993). Las fracciones: un enfoque realista. *In rational numbers: An integration of research*. Edited by Carpenter, Th, et al, L. Erlbaum, 1993.

Thompson, A. G. (1992) *Creencias y concepciones de los maestros; una síntesis de la investigación*, Nueva York: Macmillan.

Universidad Pedagógica Nacional. (1982). *Matemáticas 1. Volumen 2. Sistema de educación a distancia*. UPN. México.

Waldegg, G. (1996). Sobre el origen y significado de los números decimales. *Básica*. México. Pp. 54-60. Volumen 3. Núm. 11. Mayo-junio.