RECTA NUMÉRICA, PLANO CARTESIANO
Nociones básicas para estudiantes de Ciencias Sociales

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

POLVO DE GIS

Silvia Alatorre Frenk
Lydia López Amador
Elsa Mendiola Sanz

Profesoras de la Universidad Pedagógica Nacional
Área Académica Aprendizaje y Enseñanza en Ciencias,
Humanidades y Artes
C. A. Concepciones y Saberes Matemáticos

RECTA NUMÉRICA, PLANO CARTESIANO
Nociones básicas para estudiantes de Ciencias Sociales

Silvia Alatorre Frenk
Lydia López Amador
Elsa Mendiola Sanz

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

POLVO DE GIS

RECTA NUMÉRICA, PLANO CARTESIANO
Nociones básicas para estudiantes de Ciencias Sociales
Silvia Alatorre Frenk
Lydia López Amador
Elsa Mendiola Sanz

Diseño de colección: Margarita Morales Sánchez
Revisión: Alma Velázquez López Tello
Portada: Margarita Morales Sánchez
Formación: María Eugenia Hernández Arriola

Primera edición, junio de 2015

Esta edición es propiedad de la Universidad Pedagógica Nacional, Carretera al Ajusco, núm. 24, col. Héroes de Padierna, Tlalpan, cp 14200, México, df *www.upn.mx*
Esta obra fue dictaminada por pares académicos

isbn 978-607-413-209-0

QA141.15
A4.7 Alatorre Frenk, Silvia
Recta numérica, plano cartesiano: Nociones básicas para estudiantes de Ciencias Sociales / Silvia Alatorre Frenk, Lydia López Amador, Elsa Mendiola Sanz. - - México: upn, 2015
84 p. (Polvo de gis)
isbn 978-607-413-209-0

1. Número (Concepto matemático) 2. Matemáticas - Problemas, Ejercicios, etc. I t. II. López Amador, Lydia, coaut. III. Mendiola Sanz, Elsa, coaut.

ÍNDICE

Introducción • 7
Estructura y uso del manual

1. El plano cartesiano • 9
Recta numérica
Números enteros positivos y el cero
Números enteros positivos y negativos
Números decimales positivos
Números reales
Sistema de dos ejes

2. Relaciones y gráficas • 31
Caracterización
Algunas gráficas y su interpretación
Gráficas surgidas de modelos algebraicos
Gráficas surgidas de datos reales

3. La recta • 49
Caracterización
¿Cómo se traza una recta conociendo su ecuación?
Interpretación
El signo de la pendiente, b
El valor de la pendiente, b
El valor de la ordenada al origen, a

Ejercicios • 65

Respuestas a los ejercicios • 75

INTRODUCCIÓN

El presente manual trata el tema del plano cartesiano y está dedicado a estudiantes de Ciencias Sociales. Los usos del plano cartesiano son muchos y variados. Aquí se verá como un sistema de referencia que permite ubicar puntos. Fundamentalmente, nos enfocaremos en el plano cartesiano en sí y, de manera breve, en la gráfica de rectas y en algunos ejemplos sencillos de descripciones estadísticas, que pueden ser de utilidad para los profesionales en áreas sociales.

Estructura y uso del manual

Este manual está organizado en tres secciones:

- La primera consiste en una caracterización del plano cartesiano, comenzando por las rectas numéricas, y después se describe el sistema de dos rectas numéricas que conforman el plano cartesiano.
- La segunda contiene una breve descripción de las relaciones y sus gráficas, y algunas sugerencias para la interpretación de estas últimas.
- La tercera aborda las rectas, tanto desde el punto de vista de su expresión algebraica como desde el de su gráfica en un plano cartesiano, con énfasis en algunos aspectos de la interpretación.

Hemos intentado que la lectura del manual sea sencilla y que esté ilustrado con ejemplos y ejercicios. Queremos hacer un breve comentario acerca de dos características del texto:

a) Incorporamos sólo aquellas explicaciones que consideramos fundamentales para entender lo que se está haciendo. Sin embargo, el lector con deseos de profundizar puede acudir a un manual de Geometría Analítica.

b) El manual concluye con un conjunto de ejercicios, cuyas respuestas aparecen al final. Para realizarlos proponemos lo siguiente: los ejercicios que corresponden a la parte del texto recién cubierta están marcados con una estrella, como la que aparece a la derecha. Recomendamos hacer estos ejercicios en ese momento y que inmediatamente después se consulte las respuestas. Si éstas coinciden con las que se dan, continuar con el siguiente ejercicio o con la lectura del manual. Si no coinciden, antes de seguir es conveniente comprender dónde estuvo el error. Para ello, puede ayudar que se vuelva a leer la sección respectiva y rehacer los ejemplos que vienen ahí. Después, resolver de nuevo los incisos donde hubo algún error. Si éste persiste, tratar de recurrir a una ayuda externa (un maestro o un compañero).

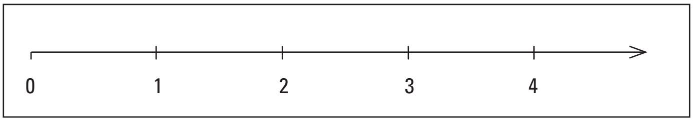
1. EL PLANO CARTESIANO

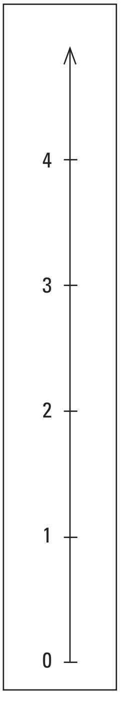
En esta primera sección estudiaremos el plano cartesiano como un sistema de referencia para ubicar puntos en el plano. Ya que un plano cartesiano puede verse como un sistema compuesto por dos rectas numéricas, iniciaremos este estudio observando cómo son las rectas numéricas.

Recta numérica

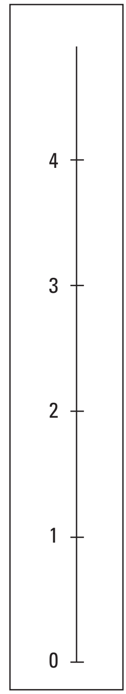
Empezaremos con un breve repaso de lo que es una **recta numérica**: una manera de representar números. En la recta se determinan un punto de referencia, que puede ser el correspondiente al 0 o a otro número, y un segmento que represente a la unidad, es decir, a la distancia entre dos números consecutivos, por ejemplo entre 0 y 1, 3 y 4, 10 y 11, etc. También puede considerarse como referencia un segmento que represente 2, 5, 10, 100,… unidades; la elección depende de los números que se quiera representar. Sin embargo, una vez elegido un segmento de referencia debe mantenerse constante mientras se utilice esa recta numérica.

La recta puede ser horizontal o vertical.

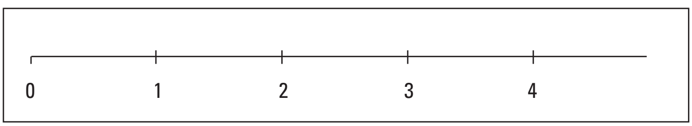




- Si es horizontal, los números menores se representan a la izquierda y los mayores a la derecha (mientras más grande sea un número, más hacia la derecha estará).
- Si la recta es vertical, los números menores se representan abajo y los mayores arriba (mientras más grande sea el número, más hacia arriba estará).



En general, las rectas numéricas se representan con una flecha que indica hacia dónde se encuentran los números mayores, como en las dos rectas de arriba, pero también pueden representarse sin la flecha:



Para representar que un número es menor o mayor que otro suelen utilizarse los símbolos < y >. Observa cómo se pueden usar:

$1 < 3$ se puede leer como “1 es menor que 3”, pero también (leyendo de derecha a izquierda) como “3 es mayor que 1”

$3 > 1$ se puede leer como “3 es mayor que 1”, pero también (leyendo de derecha a izquierda) como “1 es menor que 3”

A continuación, veremos poco a poco cómo se representan en una recta numérica los números enteros positivos; luego, los números enteros negativos y positivos; en seguida, las fracciones decimales positivas, y terminaremos con los números reales, que agrupan todos los anteriores y otros más, como:

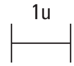
π = 3.14159265358979323846... y
$\sqrt{2}$ = 1.41421356237309504880...,

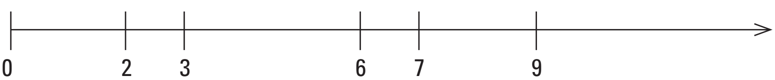
que ubicaremos en forma aproximada.

Números enteros positivos y el cero

Veamos cuatro ejemplos.

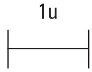
a) Representación de los números: 0, 2, 3, 6, 7, 9:

- Punto de referencia: 0
- Segmento de referencia: una unidad: 

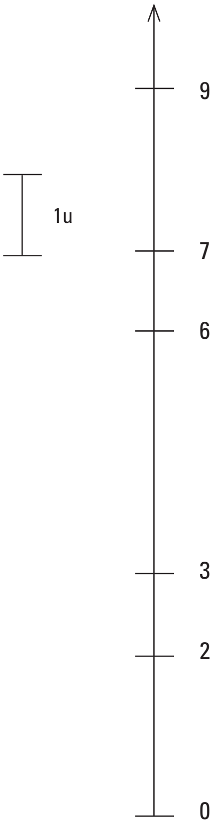


Observa que aunque no representamos los números 1, 4, 5 y 8, les estamos “dejando su lugar”; así, la distancia entre 2 y 6 es cuatro veces la distancia entre 2 y 3.

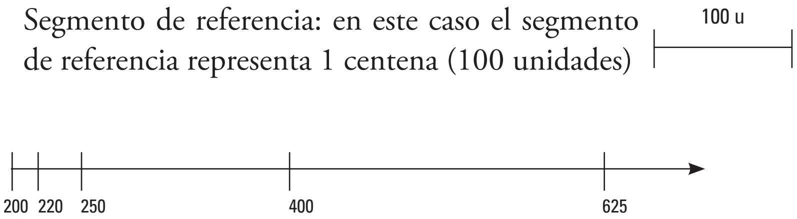
b) Otra representación de los números: 0, 2, 3, 6, 7, 9, cambiando la escala (es decir, con otro segmento de referencia):

- Punto de referencia: 0
- Segmento de referencia: 

c) Si utilizamos una recta vertical, manteniendo la misma escala, es decir, con el mismo segmento de referencia, la representación anterior queda del siguiente modo:



d) Representación de los números: 220, 250, 400, 625:
- Punto de referencia: 200
- Segmento de referencia: en este caso el segmento de referencia representa 1 centena (100 unidades)



Números enteros: positivos, negativos y el cero

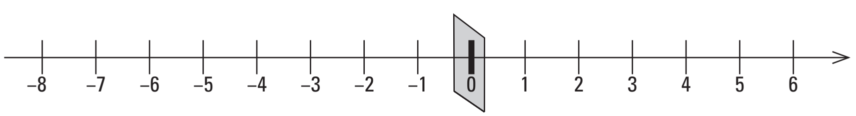
También hay números menores que 0; se llaman números **negativos** y se escriben antecedidos por el signo – (menos). En cuanto al 0, no es ni positivo ni negativo.

- Los números negativos permiten expresar cantidades menores que 0. Por ejemplo, sabemos que 0º C indica la temperatura en la que el agua se congela (cero grados centígrados), pero también sabemos que la temperatura alcanza valores inferiores. En los meses de invierno, es común escuchar que la temperatura mínima en ciertas zonas del país fue de 2, 3 o 5 grados bajo cero; estos valores se pueden expresar respectivamente como –2, –3, y –5.

  Observa que en estos casos la temperatura deberá incrementarse respectivamente en 2, 3 o 5 grados para llegar al 0. En este ejemplo es claro también que –5° es una temperatura más baja (menor) que –3°; eso se escribe así –5 <–3.

Cuando un número no tiene signo, se entiende que es positivo. Cuando se habla de números positivos y negativos, es frecuente que se enfatice la diferencia poniendo el signo + ante un número positivo: +8 = 8.

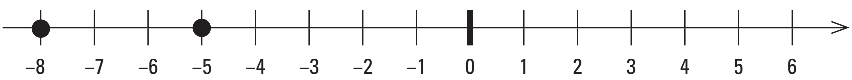
Podemos imaginar la recta numérica de los números enteros positivos y negativos como si tuviera un espejo en el cero:



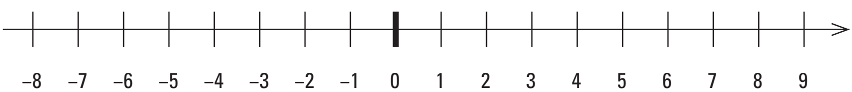
Con esta imagen se pueden resaltar las principales características de los números enteros en la recta numérica:

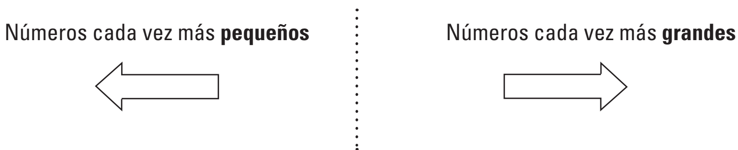
- Todos los negativos están a la izquierda del 0 (o, si la recta es vertical, abajo del 0) y todos los posittivos están a la derecha (o arriba).
- Si dos números están representados en la recta numérica, el menor es el de la izquierda (o el de abajo).

Observa, por ejemplo, la ubicación de los números –8 y –5 en la recta numérica:



Es decir, si nos ubicamos en el número cero de la recta, al ir hacia la derecha tenemos números cada vez más grandes (como entre los números naturales), y al ir hacia la izquierda tenemos números cada vez más pequeños. Los números enteros pueden entonces representarse con el siguiente esquema:





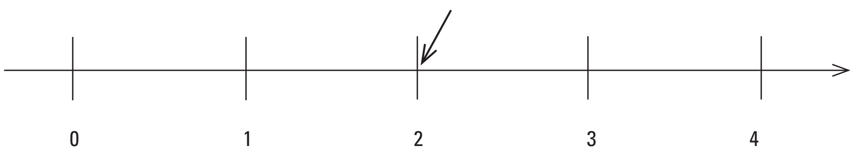
Observa entonces cómo son las relaciones entre los números 8 y 5 y entre los números –8 y –5:

Números negativos	**Números positivos**
–8 es menor que –5 –8 es más pequeño que –5 –8 es el pequeño, –5 es el grande –8 está a la izquierda de –5 en la recta –8 < –5 –5 > –8	8 es mayor que 5 8 es más grande que 5 8 es el grande, 5 es el pequeño 8 está a la derecha de 5 en la recta 8 > 5 5 < 8

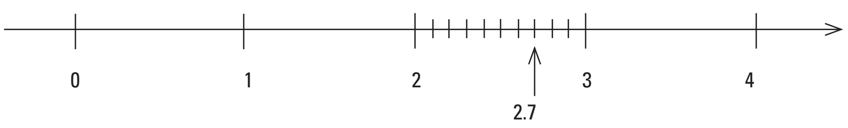
Números decimales positivos

Los números decimales positivos se pueden ubicar en la recta numérica de manera similar a como se ubican los números naturales. Para ello, se consideran sucesivamente el valor de las unidades, los décimos, los centésimos, etc. En una recta numérica se marca el cero y también se indica cuál es la unidad. Por ejemplo, ubiquemos en la recta numérica el número 2.74.

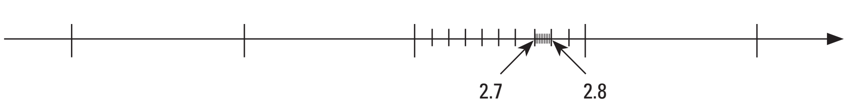
Empezamos ubicando el 2 en las unidades de la recta:



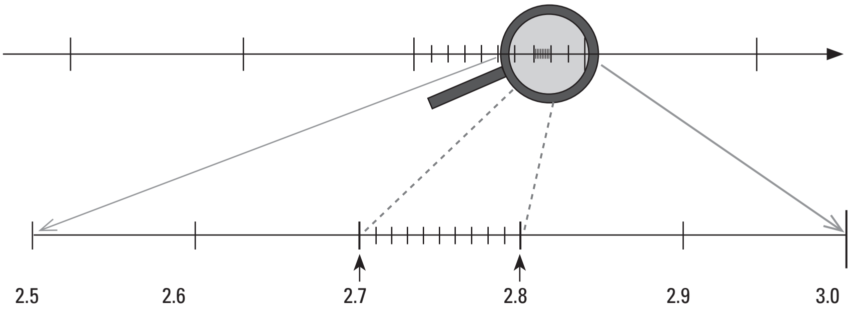
Después, partimos en 10 porciones (es decir, en 10 décimos) la unidad entre el 2 y el 3, y ubicamos ahí el 7; se obtiene el punto correspondiente a 2.7:



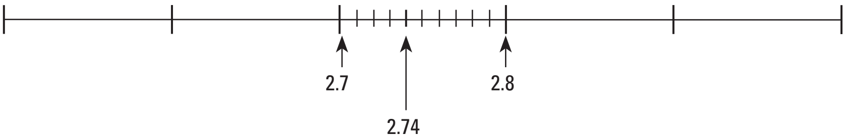
A continuación, partimos en 10 porciones (es decir, en 10 centésimos) el décimo entre 2.7 y 2.8, con el fin de ubicar dónde queda el 4.



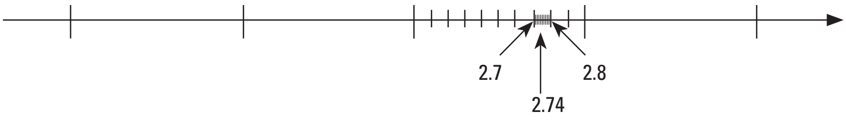
Ahora las 10 divisiones, es decir los centésimos, quedaron muy cerca unas de otras y ya es difícil ubicar el 4 que buscamos. Imaginemos entonces que colocamos una lupa sobre la recta para ver con mayor detalle el intervalo entre 2.7 y 2.8:



La lupa ya nos permite ubicar el cuarto centésimo; con ello tenemos ahora ubicado el número 2.74:



Si regresamos a la escala original (sin la lupa), la representación se ve así:



Podríamos seguir este proceso indefinidamente, partiendo cada vez en 10 y ubicando la siguiente cifra. Claro, cada vez que partimos en 10, las porciones se hacen más y más chicas, y necesitaríamos lupas cada vez más poderosas.

Números reales

Los números reales son aquellos que se utilizan para hacer la mayor parte de las mediciones y los cálculos en ciencia y en la vida cotidiana. En general, los números reales se expresan como decimales positivos o negativos. He aquí algunos ejemplos de números reales:

$$2,\quad 0,\quad -3,\quad 0.5,\quad -2.333\ldots,\quad 58.6201,\quad -0.1,\quad 3,\quad 52.171717\ldots$$
$$\pi = 3.141592653589793\ldots,\quad \sqrt{2} = 1.414213562\ldots,\ -1.01001000100001\ldots$$

Los números reales tienen muchas propiedades matemáticas. Aquí sólo nos interesa destacar que los números reales "llenan" toda la recta numérica: cualquier número real se puede representar por un punto en la recta y viceversa, cualquier punto de la recta corresponde a un número real.

La ubicación en la recta numérica está fuertemente relacionada con el orden entre los números, ya que los más pequeños se sitúan a la izquierda (o abajo, si el eje es vertical) y los mayores se sitúan a la derecha (o arriba), por lo que haremos un breve repaso de cómo ordenar los números, sean positivos o negativos, y sean enteros o decimales:[1]

- Cualquier número positivo es mayor que cualquier número negativo.
- El cero es menor que cualquier número positivo y mayor que cualquier número negativo.
- Para comparar dos números positivos, se compara primero la parte entera; si una de ellas es mayor que la del otro, ése es el número más grande. Si las dos partes enteras son iguales, se comparan décimos con décimos, centésimos con centésimos, etcétera, hasta que haya una diferencia, y esa diferencia es la que marca cuál de los dos números es mayor.

[1]No se comparan números que tienen nueve periódico (es decir, los que tienen sucesiones infinitas de nueves decimales, como 5.2399999.....), sino los números que resultan de sumarle 1 a la cifra anterior al primer 9 de la serie, como 5.24; se puede demostrar que 5.2399999.... y 5.24 son dos expresiones distintas del mismo número.

- Para comparar dos números negativos, se procede como si fueran positivos y el resultado final se invierte, por el "efecto espejo".

También puedes utilizar la calculadora para hacer la resta entre los dos números y observar el resultado: si éste es positivo, significa que el primer número que tecleaste es el mayor, si es negativo significa que es el menor, y si es cero, significa que los dos son iguales. Por ejemplo

- Como $1.570 - 1.57 = 0$,
  concluimos que $1.570 = 1.57$

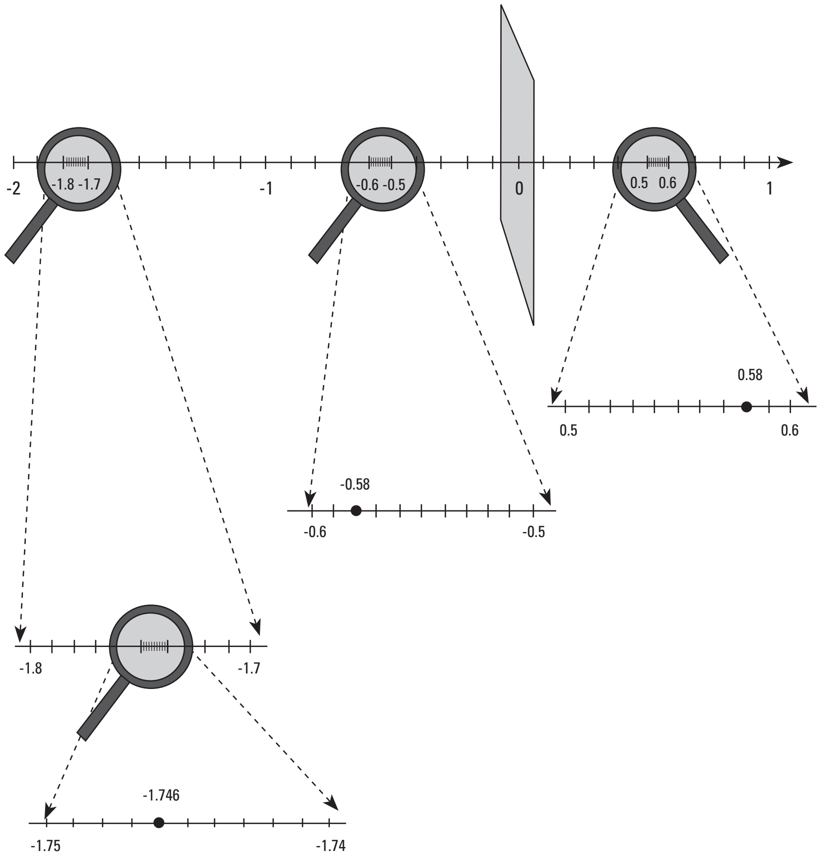
Veamos ahora dos maneras de hacer la resta entre un número negativo (-2.1) y uno positivo (0.483). Observa que para teclear el signo $-$ del número -2.1 se usa la tecla $\boxed{(-)}$ mientras que para teclear la resta se usa la tecla $\boxed{-}$

- Como $(-2.1) - 0.483 = -2.583$,
  concluimos que $-2.1 < 0.483$
- Como $0.483 - (-2.1\ ) = 2.583$,
  concluimos que $0.483 > -2.1$

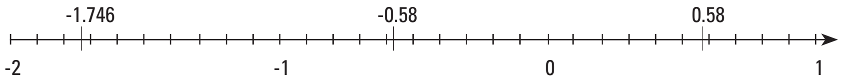
Ahora veamos cómo comparar los números -1.572 y -1.53 haciendo la resta de dos maneras distintas:

- Como $(-1.572) - (-1.53) = -0.042$,
  concluimos que $-1.572 < -1.53$
- Como $(-1.53) - (-1.572) = 0.042$,
  concluimos que $-1.53 > -1.572$

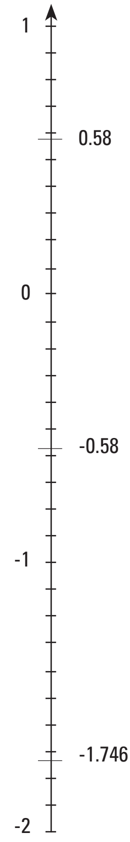
En la recta numérica es donde más claramente se puede apreciar el "efecto espejo", que vimos por primera vez con los números enteros. Pero con muchos números decimales nos conviene también recurrir a la otra ayuda visual que hemos utilizado: la lupa. Veamos entonces cómo recurrir a ambas ayudas para ubicar en la recta numérica, por ejemplo, los números 0.58, -0.58 y -1.746



Y los tres números se representan así en la recta numérica:



O bien, si el eje es vertical, se representan así:



En resumen, una vez que tenemos un número podemos ubicarlo en la recta numérica; inversamente, también puede asociarse un número a un punto que veamos en la recta. Es decir, entre los números y los puntos hay una relación de uno a uno: a cada número le corresponde un punto y viceversa, a cada punto le corresponde un número. Esto puede interpretarse así: cada número indica la distancia entre el punto y el 0; cuando el número es positivo el punto está a la derecha del 0 (o arriba, si el eje es vertical), y cuando es negativo el punto está a la izquierda del 0 (o abajo).

Un comentario final acerca de esta correspondencia entre los puntos de una recta numérica y los números. En la práctica, la precisión con la que colocamos los puntos en la recta o con la que leemos los números a los que corresponden está sujeta a muchos condicionantes: el tamaño de la unidad de referencia, la cantidad de cifras decimales que tiene el número, el grosor del lápiz y de la propia recta, etc. Es por ello que en la práctica la recta se convierte en una herramienta que permite mucha visualización y la percepción gráfica de las relaciones de orden entre diversos números, pero no se puede pretender que tenga mucha precisión. Claro, tenemos más precisión al marcar un punto como el cruce de una rayita sobre el eje (como lo hemos hecho en esta página) que cuando lo hacemos con un punto gordo (como en la página 14), pero aun así hay un margen de imprecisión. Además, en general, cuando la gráfica está hecha en computadora se llega a mayor precisión de la que se alcanza al elaborarla a mano.

Sistema de dos ejes

Algo similar a la correspondencia entre la recta numérica y los números puede hacerse con el plano y parejas de números. Lo usual para ello es colocar dos rectas numéricas perpendiculares, una horizontal y la otra vertical, que dividen al plano en cuatro partes. A esas rectas las denominamos **ejes** o **ejes cartesianos**; forman un sistema de referencia que permite ubicar puntos en el plano.

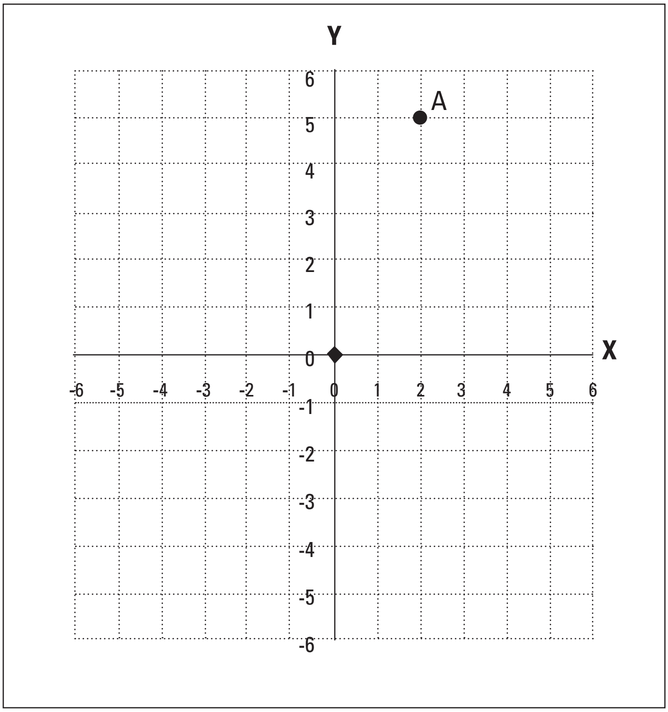
Recuerda que cuando hablamos de recta numérica, nos referimos a una recta en la que hay un punto de referencia y una unidad. También aquí necesitamos puntos de referencia y unidades. Usualmente, se considera un solo punto de referencia para las dos rectas, que es el punto donde se cortan, y que éste sea el **0** (cero) de cada una; ese punto también recibe el nombre de **origen**.

Como en el caso de la recta numérica, por convención, en el eje horizontal se colocan los números negativos a la izquierda del cruce de los dos ejes, y los positivos a la derecha; en el eje vertical la convención es colocar los negativos abajo del cruce de los ejes, y los positivos se ubican arriba. El plano, con sus dos ejes y sus unidades, se conoce con el nombre de **plano cartesiano**.

Al eje horizontal se lo conoce como "eje de las equis (X)" o "eje de las abscisas", y al vertical como "eje de las yes (Y)" o "eje de las ordenadas". También es frecuente, sobre todo cuando las variables consideradas tienen sentido en un contexto real, que se utilicen otras letras o incluso palabras completas para describir los ejes.

Aquí queremos hacer una acotación. Las letras X y Y no son obligatorias: podríamos usar otras, como a y b, o como K y Z, pero X y Y (o x y y) son, con mucho, las más usuales en contextos matemáticos para denominar los dos ejes. Sin embargo, pueden dar lugar a confusiones. Por una parte, en algunos contextos matemáticos hay una diferencia en el uso de mayúsculas y minúsculas; por ejemplo, en estadística es común utilizar las mayúsculas para denotar las variables (por ejemplo X = *estatura*, Y = *peso*) y las minúsculas para denotar los valores de esas variables (por ejemplo, $x = 1.65$ m o $x = 172$ cm, así como y = 45 kg o y = 58.4 kg). Esto hace indispensable prestar atención al tamaño de las letras, porque justamente la X y la Y son similares en las mayúsculas y las minúsculas. Por otra parte, en lengua española tenemos el problema de que cuando escribimos "x y y" (lo que usualmente se lee: "equis y ye") estamos poniendo juntas dos 'y' (i griegas) que tienen distinto significado: la primera es la conjunción copulativa del español, y la segunda suele ser la representación de una variable o de un valor de una variable. Estas dos confusiones son inevitables, la primera, porque el uso de las dos letras para denominar los ejes es universal y la segunda se debe a nuestra lengua: no podemos evitarlas, solamente advertir al lector que observe con cuidado.

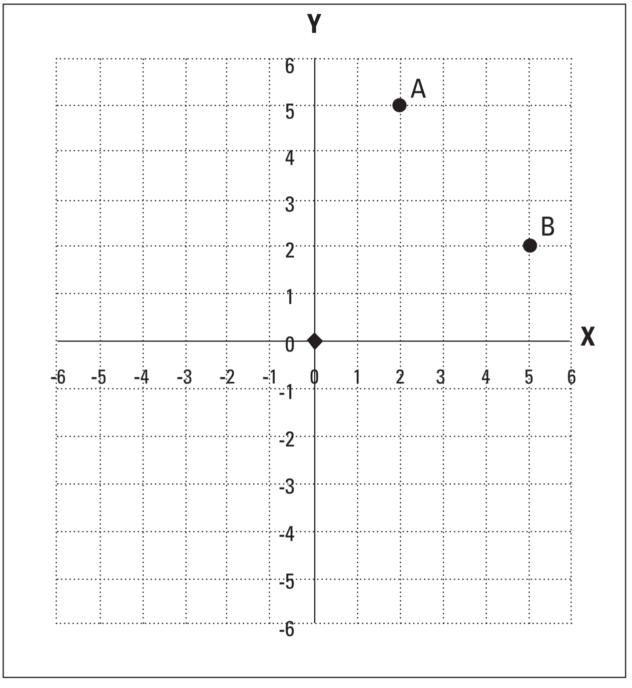
Veamos cómo un sistema de dos ejes puede servir para describir y ubicar puntos en el plano. Para ello, considera el siguiente ejemplo, en el que hemos denominado un punto con la letra A:



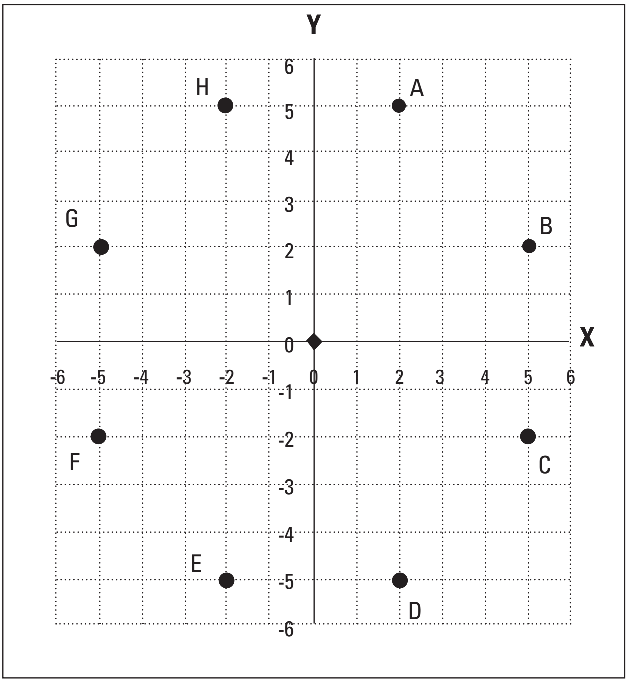
Imagina que en el plano tenemos una cuadrícula como en la gráfica anterior, y que solamente nos movemos sobre ella. Entonces, para ir del 0 (origen) al punto A es posible recorrer dos caminos: podemos ir 2 unidades hacia la derecha y luego 5 unidades hacia arriba, o bien, podemos ir primero 5 hacia arriba y luego 2 a la derecha. *Por convención*, señalaremos primero el desplazamiento horizontal y después, el vertical. Es decir, el punto A está caracterizado por los números 2 y 5, en ese orden. Esto lo abreviaremos así:

$$A = (2, 5).$$

Tenemos entonces dos referencias para describir la ubicación de A: 2 es la referencia al eje horizontal y 5 es la referencia al eje vertical; cada una de estas referencias se llama **coordenada**, y la pareja (2, 5) es una **pareja ordenada**. Efectivamente, el orden importa: no es lo mismo (2, 5) que (5, 2); esto lo podemos ver en la siguiente gráfica, en la que A = (2, 5) y B = (5, 2).



En una pareja ordenada del estilo (x, y), el valor x indica qué tan a la derecha (números positivos) o a la izquierda (números negativos) del 0 está el punto; mientras que el valor y indica qué tan arriba (números positivos) o abajo (números negativos) del 0 se localiza. Podemos pensar en ocho puntos distintos que se encuentran a dos y cinco unidades del origen, y que corresponden a distintas parejas ordenadas:

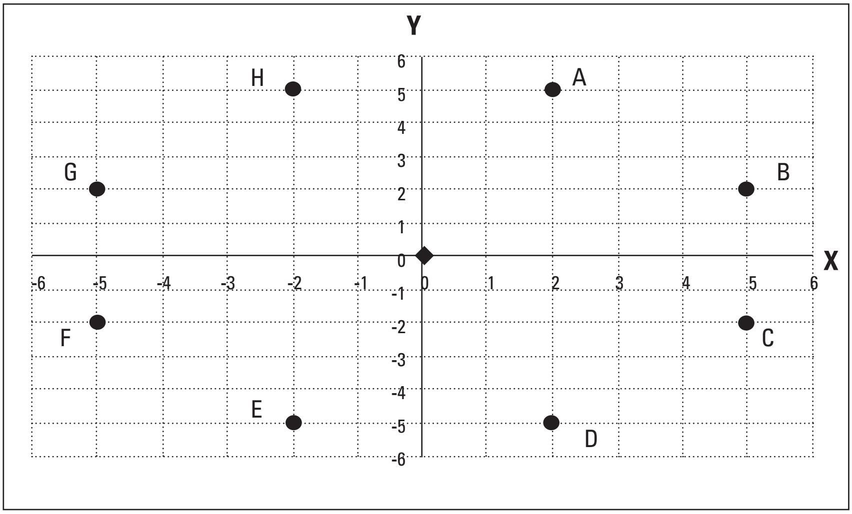


A = (2, 5)
B = (5, 2)
C = (5, −2)
D = (2, −5)
E = (−2, −5)
F = (−5, −2)
G = (−5, 2)
H = (−2, 5)

Como se dijo anteriormente, los dos ejes parten el plano en cuatro partes. A esas partes se les llama **cuadrantes** y, por lo general, se denotan con los números I, II, III y IV. En la gráfica anterior los puntos A y B están en el cuadrante I, los puntos H y G en el cuadrante II, los puntos F y E en el cuadrante III, y los puntos C y D en el cuadrante IV.[2]

[2] Los cuadrantes se numeran en sentido contrario a las manecillas del reloj, empezando con el I, en el que están los puntos con ambas coordenadas positivas (es

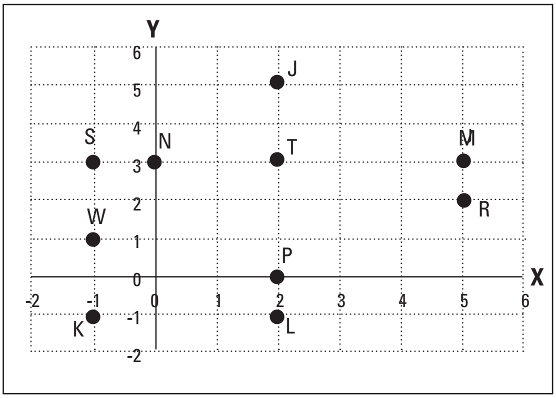
Hasta ahora hemos considerado la misma unidad en los dos ejes. Sin embargo, como tenemos dos rectas numéricas, sus unidades pueden ser distintas entre sí, aunque en cada recta la unidad elegida debe mantenerse constante. Veamos, por ejemplo, otra posible representación de los puntos A, …. H, del ejemplo anterior:



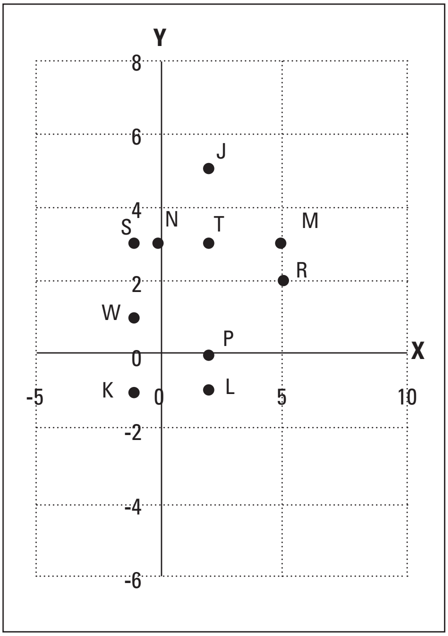
En cualquiera de las dos gráficas anteriores podemos pasar del punto a las coordenadas o de las coordenadas al punto. Por ejemplo, si sabemos que un punto tiene las coordenadas (–2, 5), vemos que es H, y si nos preguntamos acerca de las coordenadas del punto D, las reconocemos como (2, –5). Es decir, como en el caso de la recta numérica, hay una correspondencia entre puntos en el plano y las parejas de números que son sus coordenadas.

---

decir X>0, Y>0). En el cuadrante II están los puntos con coordenadas X negativas y coordenadas Y positivas (X<0, Y>0). En el III están los puntos con ambas coordenadas negativas (X<0, Y<0). En el IV están los puntos con coordenadas X positivas y coordenadas Y negativas (X>0, Y<0). En general, las gráficas relacionadas con la vida cotidiana utilizan el cuadrante I.



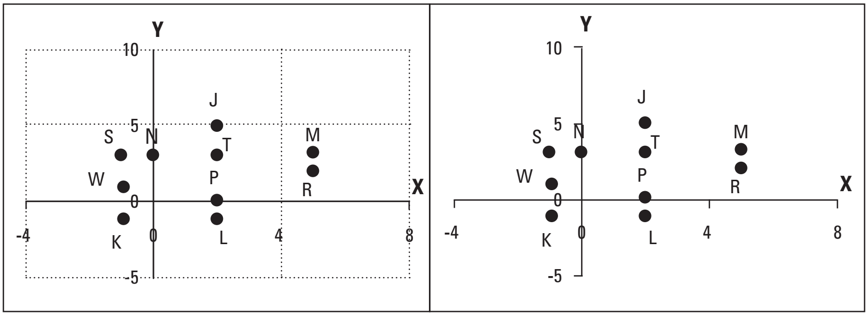
Observa ahora el plano cartesiano de la derecha, y después el que se encuentra abajo, en el que también hay 10 puntos con las mismas letras. ¿Puedes encontrar las coordenadas de estos puntos en ambas gráficas? ¿Qué similitudes y qué diferencias encuentras entre las dos gráficas?



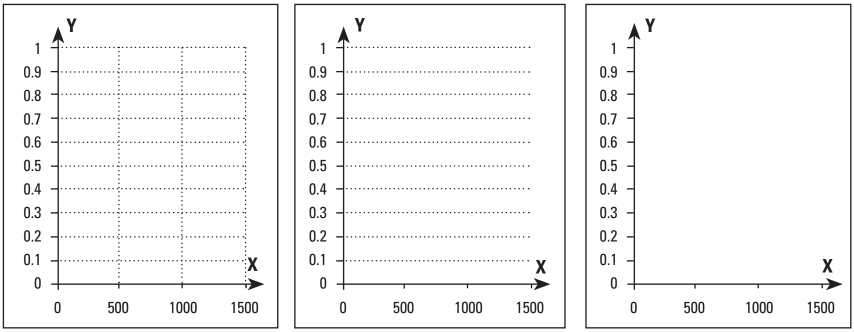
Sin duda llegaste a esta conclusión: las coordenadas de todos los puntos son exactamente las mismas en ambas gráficas, pero en la segunda el eje *X* va de 5 en 5 y el eje *Y* va de 2 en 2, y en la primera, ambos van de 1 en 1; y las longitudes de los segmentos de referencia también cambiaron. Sin embargo, la relación entre los puntos sigue siendo la misma; por ejemplo, los puntos que estaban alineados siguen estándolo.

Aunque a simple vista parece que se trata de dos gráficas totalmente distintas, lo que tenemos son dos representaciones distintas de los mismos puntos.

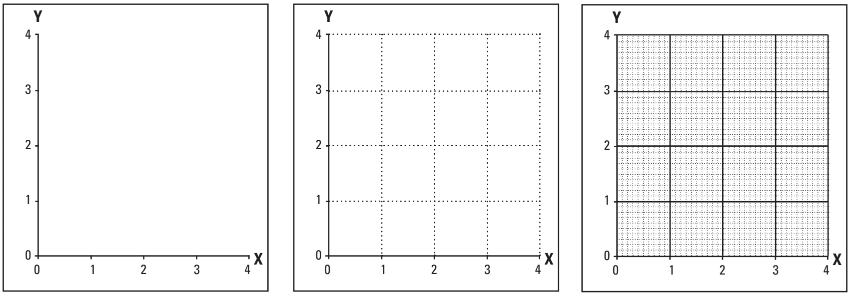
Observa que no necesariamente cada punto queda sobre el cruce de dos líneas de la cuadrícula. Por ejemplo, he aquí dos representaciones más del mismo conjunto de 10 puntos. Estas dos últimas son iguales, salvo por el hecho de que en la última no hay una cuadrícula explícita.

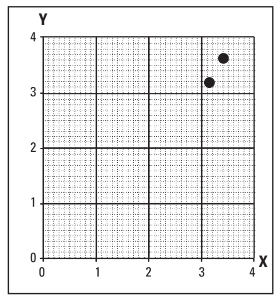


En la práctica, muchas veces se prescinde totalmente de la cuadrícula (a menos que se quiera enfatizar la ubicación de algún punto). Como dijimos anteriormente, *el objetivo de una representación en la recta o en el plano es el de una visualización, no el de una precisión absoluta*. Por ejemplo, podríamos utilizar indistintamente cualquiera de los siguientes planos cartesianos para números con valores de X entre 0 y 1500 y con valores de Y entre 0 y 1:



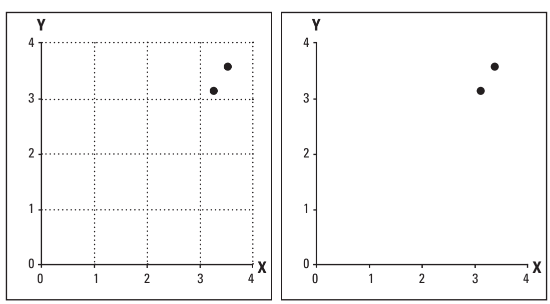
¿Cuándo usar cuadrículas explícitas y cuándo no? Cuando queremos *ubicar* puntos en el plano es más cómodo tener una cuadrícula, y mientras más fina sea, mejor (por ejemplo, para ese propósito, es preferible el papel milimétrico). Por ejemplo, si queremos ubicar en alguno de los siguientes planos cartesianos los puntos (3.4, 3.6) y (π, π).





Resultará más fácil ubicar esos dos puntos en el plano de la derecha. El punto (3.4, 3.6) está en el cruce de dos líneas punteadas. En cuanto al punto (π, π), aunque no está en el cruce de dos líneas, podemos ubicarlo de manera *aproximada*.

Ahora bien, cuando queremos *ver* una gráfica, la cuadrícula demasiado fina puede ser un factor de confusión, por lo que si no importa la precisión de los valores podemos usar cualquiera de las siguientes dos gráficas. En ninguna de ellas podremos reconocer, al ver los puntos, que se trata de los que tienen coordenadas (3.4, 3.6) y (π, π); sin embargo, sí lo podemos hacer de manera *aproximada*.



En general, lo que se desea al ver una gráfica es reconocer relaciones entre valores y no los valores exactos. Por ejemplo, en las dos gráficas es claro que ambos puntos tienen sus dos coordenadas mayores que 3, y que uno de los dos puntos tiene sus dos coordenadas mayores que las del otro.

En general, una gráfica es una herramienta de comunicación, la persona que la construye lo hace con el fin de que otras personas puedan verla fácilmente, y por ello, lo más usual es prescindir de la cuadrícula.

En resumen: si conocemos una pareja ordenada, podemos encontrar de manera aproximada el punto en el plano cartesiano; y si conocemos la ubicación de un punto en el plano cartesiano, podemos encontrar de manera aproximada sus coordenadas.

> Antes de seguir adelante, te recomendamos que realices los ejercicios 1, 2 y 3.

2. RELACIONES Y GRÁFICAS

Aunque un par ordenado puede construirse con dos números cualesquiera, en algunos casos interesan los puntos en los que los valores de X y de Y están relacionados entre sí.

A X y Y se les llama **variables**; cuando se estudian las relaciones entre variables se suele designar a X la "variable independiente" y a Y la "variable dependiente". Hay muchas formas en que dos variables pueden estar relacionadas; aquí nos interesan las llamadas **funciones**. En una función, para cada valor de X hay un valor de Y, y sólo uno. Veamos algunos ejemplos; en el primer caso hablaremos de relaciones entre personas, y en el segundo de relaciones entre números:

- Entre los humanos "Y es madre de X" es una función, porque cada persona (X) tiene una sola progenitora (Y). Sin embargo, "Y es hermano gemelo de X" no es una función, porque hay personas (X) que no tienen ningún hermano gemelo. Otro ejemplo: "Y es abuelo de X" tampoco es una función, porque las personas (X) tienen *dos* abuelos.
- Entre los números reales, "$Y = X + 2$" es una función, porque para cada X siempre hay un número Y (y sólo uno) que es dos unidades mayor que X. Pero por ejemplo "$Y = \frac{1}{X}$" no es función, porque hay un número ($X = 0$) para el que no podemos calcular $\frac{1}{X}$ (porque no se puede dividir entre 0). Tampoco "$Y = \sqrt{X}$" es función, porque cada número positivo (X) tiene dos raíces

(por ejemplo, si X vale 4, los números $Y = 2$ y $Y = -2$ son iguales a $\sqrt{4}$) y además porque los números negativos no tienen raíz cuadrada (por ejemplo, no existe un real que sea igual a $\sqrt{-4}$).

A partir de este momento, hablaremos de funciones entre variables numéricas. En general expresamos esas funciones con lenguaje algebraico; cuando se tiene una expresión algebraica para una función, al fijar el valor de la variable X, el valor de la variable Y queda determinado.

En el primer apartado de esta sección hablaremos muy brevemente de cómo se pueden caracterizar algunas funciones y cómo son las gráficas que les corresponden, en un plano cartesiano. En un segundo apartado, también muy brevemente, hablaremos de cómo interpretar algunas gráficas en un plano cartesiano.

Caracterización

Para cualquier relación entre dos variables podemos encontrar puntos cuyas coordenadas cumplan con la relación indicada. Veamos algunos ejemplos:

Si queremos que el valor de Y sea el doble del valor de X, escribimos $Y = 2X$. Para encontrar puntos cuyas coordenadas cumplan con la relación establecida, le damos a X los valores que queramos y los multiplicamos por 2 para encontrar el valor correspondiente de la variable Y. Es común que se construyan tablas como la de la derecha para indicar los valores de X y de Y.

X	$Y = 2X$
5	$2 \times 5 = 10$
1	$2 \times 1 = 2$
-2	$2 \times (-2) = -4$
0	$2 \times 0 = 0$
4.6	$2 \times 4.6 = 9.2$
½	$2 \times$ ½$= 1$
2.8	$2 \times 2.8 = 5.6$

Otros ejemplos:

- La expresión algebraica $Y = X^2$ indica que al valor que le demos a X hay que elevarlo al cuadrado para encontrar el valor correspondiente de Y. La tabla de la derecha muestra los valores de Y para siete valores de X. Como recordarás, el número 2 de la expresión X^2 se llama **exponente**, y elevar X al cuadrado también se puede expresar como "elevar X a la **potencia** 2".

X	$Y = X^2$
−2	4
−1.5	2.25
−0.75	0.5625
0	0
0.75	0.5625
1.5	2.25
2	4

- La expresión algebraica $Y = X^3 - X$ indica que al valor que le demos a X hay que elevarlo al cubo y luego restarle el valor de X. En esta expresión el 3 indica que se eleva X a la tercera potencia o a la potencia 3 (es decir, el valor de X se multiplica por sí mismo tres veces).

X	$Y = X^3 - X$
−2	$(-2^3) - (-2) = -6$
−1	$(-1^3) - (-1) = 0$
0	$0^3 - 0 = 0$
1	$1^3 - 1 = 0$
2	$2^3 - 2 = 6$
3	$3^3 - 3 = 24$
4	$4^3 - 4 = 60$

- La expresión algebraica $Y = 2 + 3X$. Observa con cuidado la tabla de la derecha, ahí se señala cómo se debe hacer este cálculo: indica que a 2 se le suma el producto de 3 por el valor que toma en cada caso la variable X (recuerda que X puede ser cualquier número). Es decir, estas operaciones no se hacen en el orden en el que están escritas, sino que hay un orden o jerarquía establecidos. Este orden es el que siguen, por ejemplo, las calculadoras científicas y las computadoras. El siguiente recuadro te puede recordar cómo es esa jerarquía.

X	$Y = 2 + 3X$
5	$2 + 3 \times 5 = 2 + 15 = 17$
1	$2 + 3 \times 1 = 2 + 3 = 5$
−2	$2 + 3 \times (-2) = 2 - 6 = -4$
0	$2 + 3 \times 0 = 2 + 0 = 2$
4	$2 + 3 \times 4 = 2 + 122 = 14$
½	$2 + 3 \times \frac{1}{2} = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2} = 3.5$
2.8	$2 + 3 \times 2.8 = 2 + 8.4 = 10.4$

JERARQUÍA DE LAS OPERACIONES

- Distinguimos tres familias de operaciones:
  - las sumas y restas
  - las multiplicaciones y divisiones
  - las potencias y raíces

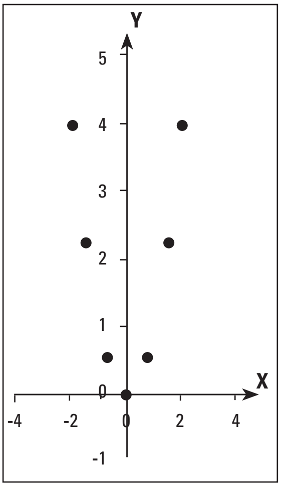
- Si para hacer un cálculo sólo hay operaciones de una misma familia, se realizan en el orden en el que están escritas.

- Si para hacer un cálculo hay operaciones de dos o más familias:
  - en primer lugar, se calculan las potencias y raíces;
  - en segundo lugar, se efectúan las multiplicaciones y divisiones;
  - en tercer lugar, se hacen las sumas y restas.

- Cuando hay paréntesis, se resuelven primero las operaciones que están dentro de ellos, siguiendo las mismas reglas (incluso si hay paréntesis dentro de los paréntesis).

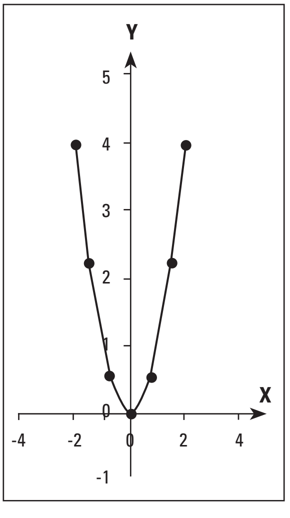
En vista de la jerarquía de las operaciones, la expresión "$Y = 2 + 3X$" es equivalente a la expresión "$Y = 3X + 2$".

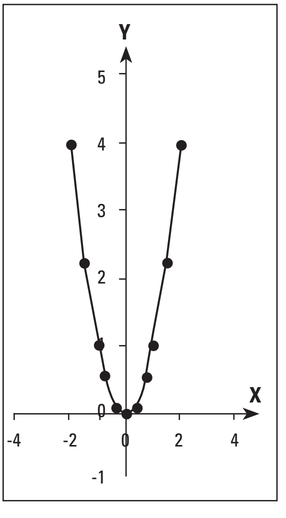
Tú puedes verificar los cálculos con tu calculadora científica; por ejemplo teclea "$2 + 3 \times 5 =$" y comprueba que el resultado es 17. También puedes verificar que "$3 \times 5 + 2 =$" da el mismo resultado.

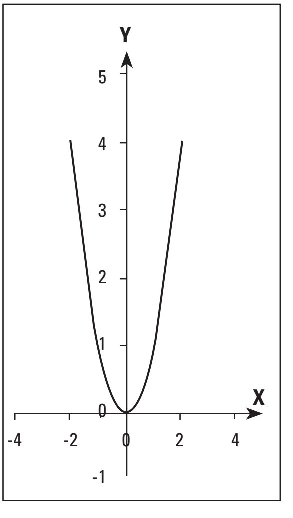


Cuando se tienen algunos puntos de una función, se les puede representar gráficamente. Por ejemplo, consideremos la función $Y = X^2$ y los siete valores que ejemplificamos en la primera tabla de la página 33. Si consideramos esas parejas de números (X, Y) como coordenadas, obtendremos los siete puntos que se muestran en la gráfica de la derecha.

Si después unimos los puntos obtenemos una representación gráfica de la función, como se muestra en la primera gráfica de abajo. Para tener una mejor idea podemos agregar más puntos. Por ejemplo, si a la lista original agregamos los puntos correspondientes a los valores −1, −0.25, 0.25 y 1, y luego unimos los puntos, obtenemos la segunda gráfica de abajo. Y si agregamos más podemos obtener una gráfica como la tercera (que es una parábola).







Como puedes apreciar, mientras más puntos incorporamos a la gráfica, ésta se va "suavizando". Dependiendo de la relación, se necesitan más o menos puntos para que la gráfica nos dé una buena idea de cómo se comporta la función. En general, cuando la variable X aparece elevada a un exponente distinto de 1, hay que encontrar varios puntos para que la gráfica que representa a la función nos dé una buena idea, como en el ejemplo anterior.

Antes de seguir adelante, te recomendamos que realices los ejercicios 4 y 5.

Algunas gráficas y su interpretación

En la vida cotidiana, por ejemplo en periódicos y revistas, es frecuente encontrar gráficas en planos cartesianos cuyos datos tienen dos clases de fuentes: o bien, relaciones matemáticas como las anteriores, surgidas de modelos algebraicos, o bien, datos surgidos de observaciones estadísticas de algún aspecto de la realidad. Aquí presentaremos algunos ejemplos de cada una de ellas.

Gráficas surgidas de modelos algebraicos

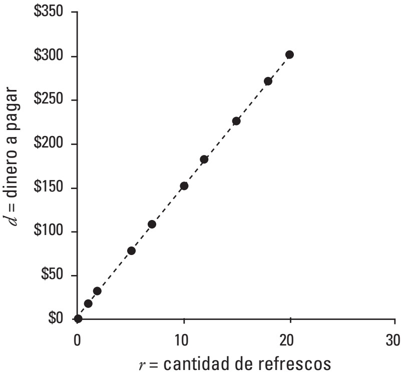
Ejemplo 1

Supongamos que en una cafetería sólo venden una clase de refrescos, cuyo precio es \$15.00. Llamemos r a la cantidad de refrescos que diversos clientes consumen en la cafetería, y d a la cantidad de dinero que deben pagar por esos refrescos. La relación entre r y d se puede expresar como:

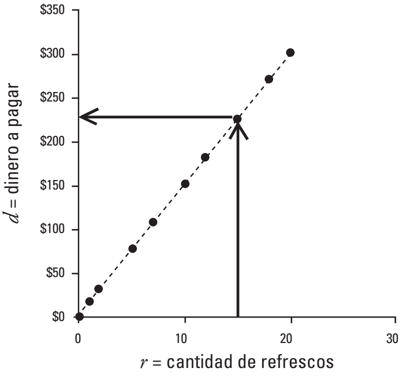
$$d = 15 \times r$$

r	d
0	0
1	15
2	30
5	75
7	105
10	150
12	180
18	270
20	300

Para hacer la gráfica de la relación podríamos considerar las parejas de datos de la tabla de la derecha, con lo que obtenemos la siguiente figura. Observa que:



- Les hemos colocado a los ejes sus nombres completos. Hacer esto es importante siempre que se trate de variables que tienen un sentido en un contexto determinado.
- Los puntos están alineados sobre una recta, y esa recta pasa por el origen, es decir el punto (0, 0). ¡Claro, por 0 refrescos no hay que pagar dinero!
- Vemos que mientras más refrescos se consuman, más dinero hay que pagar (no era necesaria una gráfica en este ejemplo, pero en otros contextos puede ocurrir que la relación no sea tan clara antes de ver la gráfica). A esto lo llamamos una relación **creciente**.
- Los puntos que hemos puesto en la gráfica tienen un sentido en el contexto. Por ejemplo, por 10 refrescos hay que pagar $150.00
- Incluso si no supiéramos el precio de cada refresco, esta gráfica podría indicarnos cuánto pagar por alguna cantidad de refrescos. Por ejemplo, podríamos encontrar cuánto pagar por 15 refrescos ubicando 15 en el eje horizontal y luego procediendo como lo indican las flechas para llegar a la cantidad de $225.00



- En algunos casos no podríamos llegar a tanta precisión. Por ejemplo, si nos preguntamos cuánto habría que pagar por 13 refrescos no sería tan sencillo ubicar el 13, y luego, al llegar al eje vertical tampoco sería tan sencillo ubicar la cantidad exacta de dinero, pero podríamos llegar a una respuesta como ésta: "por 13 refrescos habría que pagar aproximadamente $200.00".
- ¡Pero no todos los puntos de la recta tienen sentido! Por ejemplo, podríamos leer que cuando $r = 0.5$, $d = 7.5$. Esto significa que por una cantidad de refrescos igual a 0.5 (o sea, medio refresco) hay que pagar $7.50. Pero, ¿podemos hablar de medio refresco? ¡No tiene sentido comprar en una tienda medio refresco! Por lo tanto, ese punto de la recta así como todos los que correspondan a valores no enteros del eje horizontal, carecen de sentido en este contexto. Por supuesto, en otros contextos sí podría tener sentido hablar de fracciones de la unidad, por ejemplo si r corresponde a los kilogramos de requesón que se están comprando.
- Sin embargo, y pese a lo anterior, la recta sí nos da información porque se trata de un **modelo**: una representación estilizada de la realidad. Nos dice que por 0 refrescos se pagan 0 pesos; que mientras más refrescos se compran, hay que pagar más dinero, y cómo crece esa relación.

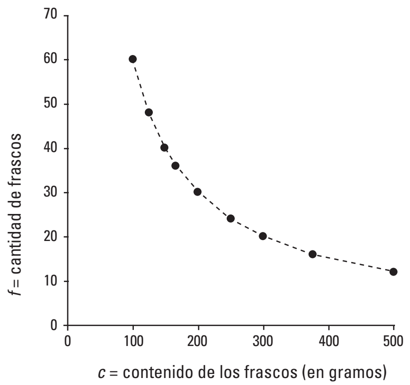
Ejemplo 2

Supongamos que van a envasarse 6 kg de mermelada en frascos del mismo tamaño; nos interesa conocer cuántos frascos se necesitan según la cantidad (en gramos) que podemos meter en cada uno, o sea, según su contenido. Llamemos c a este contenido de los frascos medido en gramos, y f a la cantidad de frascos. Ya que envasaremos 6 kg (6000 gramos), para encontrar la cantidad de frascos tenemos que dividir los 6000 g entre lo que pondremos de mermelada en cada frasco; es decir:

$$f = \frac{6000}{c}$$

y entonces tendremos una tabla y la gráfica correspondiente, que se muestran a continuación:

c	f
100	60
125	48
150	40
166.5	36
200	30
250	24
300	20
375	16
500	12



Observa que:

- Nuevamente les hemos puesto nombres a los ejes, para facilitar la lectura de la gráfica.
- Esta gráfica no es una recta.
- La gráfica nos muestra que mientras más le cabe a un frasco, menos frascos necesitamos (esto también lo sabíamos antes de ver la gráfica). A esto lo llamamos una relación **decreciente**.
- La gráfica también nos muestra que en la parte izquierda de la gráfica (contenidos pequeños; por ejemplo menos de 200 gramos por frasco), la cantidad de frascos necesarios disminuye muy rápidamente; y después sigue disminuyendo pero cada vez más gradualmente (eso tal vez no lo hubiéramos podido predecir antes de ver la gráfica).
- También nos muestra cuántos frascos se necesitan para cada contenido; por ejemplo, si usamos frascos en los que ponemos 120 gramos de mermelada, podemos llegar de manera similar al ejemplo anterior a la cantidad de $f = 50$ frascos.
- En este contexto, todos los puntos del eje horizontal podrían tener un sentido (porque podemos hablar de fracciones en el

contenido de mermelada de los frascos); sin embargo, ahora no todos los puntos en el eje vertical tienen sentido (porque sólo se puede hablar de cantidades enteras de frascos). Por ejemplo, supongamos que por razones comerciales queremos poner 10 onzas en cada frasco, es decir, 283.5 gramos de mermelada; si lo leyéramos en la gráfica tal vez podríamos decir que a 283.5 gramos le corresponde una cantidad entre 20 y 22 frascos. Si lo calculamos a partir de la fórmula obtenemos una cantidad de frascos igual a

$$f = \frac{6000}{283.5} = 21.16$$

Veamos cómo interpretar este resultado. Si usamos 21 frascos, sólo vamos a poder envasar 21 × 283.5 = 5953.5 gramos de mermelada: algo menos de la cantidad de mermelada que tenemos. Si usamos 22 frascos, todos menos uno tendrán las 10 onzas deseadas, pero al último le faltará mermelada. Es decir, si usamos 21 frascos, tenemos la ventaja de completar todos los frascos y la desventaja de no poder envasar toda la mermelada; si usamos 22 tenemos la ventaja de envasar toda la mermelada y la desventaja de que el último frasco no va completo. ¡Hay que decidir…!

En los dos ejemplos mostrados lo que tenemos es un **modelo**, y para interpretarlo hay que tener en cuenta el contexto real en el que estamos y el sentido que tienen los números que se manejan: a veces no tienen sentido las fracciones, a veces no tienen sentido los números demasiado grandes o demasiado pequeños, etcétera.

Gráficas surgidas de datos reales

Una de las aplicaciones más frecuentes del plano cartesiano se da en las gráficas con las que se representan datos reales de diversos campos (sociológicos, psicológicos, demográficos, económicos, etcétera), y en diversos medios (periódicos, televisión, revistas de circulación amplia, revistas especializadas, internet, etc.).

Es muy importante que al ver una gráfica las personas inviertan algo de tiempo para estudiarla con detalle. La interpretación de una gráfica, y sobre todo la interpretación crítica, depende de que cada persona comprenda lo que ésta significa. Cuando vemos una gráfica acompañada de un texto y buscamos su interpretación en él, sin detenernos a hacer una lectura de la gráfica, estamos supeditados a lo que digan los autores; por desgracia, frecuentemente ocurre que se presentan gráficas basadas en datos reales pero con interpretaciones sesgadas.

No puede haber un "recetario" que diga la manera de interpretar una gráfica, pero los siguientes lineamientos pueden ser útiles. Observa:

- cuál es la fuente de los datos; ésta puede estar indicada en la gráfica misma o en el texto circundante. ¿Qué tan creíble es esa fuente?
- qué representa cada uno de los ejes: cada una de las variables debe estar claramente indicada, ya sea junto al eje, como lo hemos estado haciendo en este capítulo, o en el título de la gráfica.
- cómo es la escala de cada eje; cómo es y ve con detenimiento de qué orden de magnitud son las unidades (por ejemplo, hablando de dinero, el número 1 puede representar $1.00 pero también $1,000.00 o $1,000,000.00 y la escala debe precisarlo).
- cómo está representada la relación entre las dos variables implicadas en los ejes: pueden ser puntos, barras, figuras, entre otros.
- cómo es esa relación, de manera global qué tendencias hay en lo general. Por ejemplo, si las dos variables son numéricas, puedes observar si hay una tendencia a que la gráfica sea creciente o decreciente. Interpreta qué quieren decir las tendencias observadas en términos de las dos variables de las que se esté tratando.
- a qué valores de una variable corresponden los valores más altos y los más bajos de la otra. ¿Qué información te dan esos valores particulares acerca del fenómeno representado?
- si se están presentando datos de varios grupos o de varias categorías en una misma gráfica. Esto debe estar dicho claramente en la leyenda (un cuadrito explicando cómo está representado

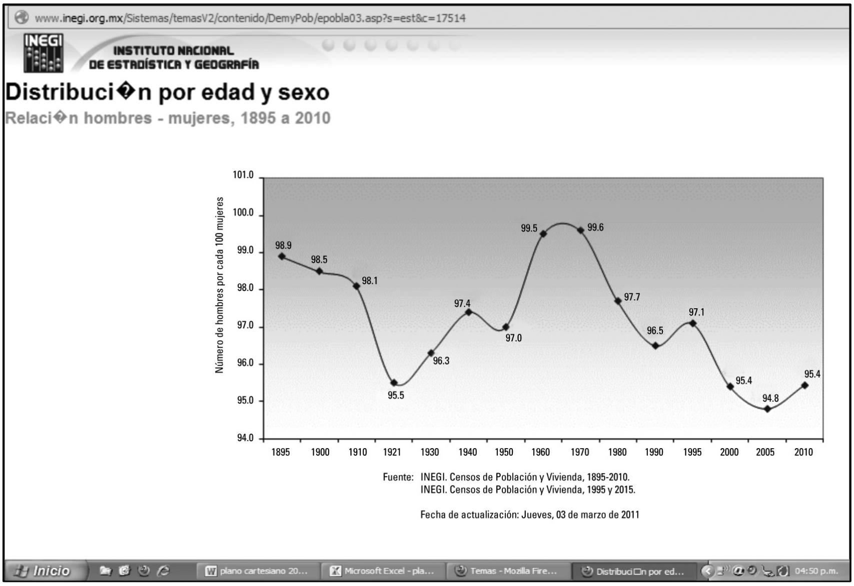
cada grupo). Observa qué similitudes y diferencias hay entre los diversos grupos.

Hay muchos tipos de gráficas que se pueden presentar. Tal vez los más frecuentes son estos dos tipos:

- Son comunes las gráficas donde la variable X es el tiempo, y la variable Y es lo que se está midiendo. Estas gráficas se llaman "**series de tiempo**"; suelen representar la relación entre ambas variables con un punto, y unir los puntos sucesivos. Así se muestra la evolución de Y en el tiempo representado en X.
- También son comunes las gráficas en las que una de las dos variables es algo que se ha medido, y la otra variable representa la *frecuencia* con la que ocurre cada uno de los valores de la primera. También puede representarse la *frecuencia relativa* (es decir, la frecuencia dividida entre la cantidad de observaciones) o el *porcentaje* con el que ocurre cada valor. Éstas se llaman "**gráficas de frecuencias**", y suelen representar la relación entre ambas variables con una barra.

A continuación te presentamos un par de ejemplos de cada una de ellas. Como pretendemos que obtengas tus propias conclusiones al ver una gráfica, no ofrecemos una interpretación aquí, pero te invitamos a que discutas con tus compañeros qué información dan. Solamente presentamos algunas observaciones y preguntas que pueden guiarte en la interpretación en cada caso; recuerda siempre que como primer paso puedes considerar los lineamientos que dimos arriba. En cada caso podrás pensar en más preguntas que completen la interpretación.

Ejemplo 3



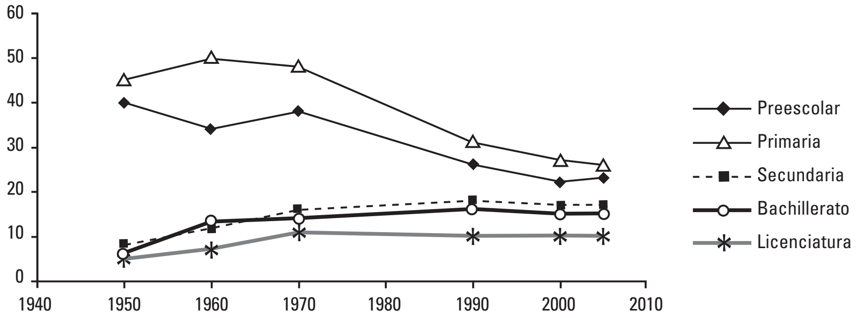
Fuente: Gráfica tomada directamente de la página web del INEGI.

- Observa que el eje horizontal no empieza con 0, sino con 1895, que es el primer año qtue se considera en la gráfica. Tampoco el eje vertical empieza con 0, debido a que para visualizar mejor las fluctuaciones de la variable Y a lo largo del tiempo no es necesario dejar el espacio en blanco correspondiente a los valores menores de 94. Esto suele ocurrir en las gráficas de datos reales y, aunque parece contradecir nuestra aseveración inicial en el sentido de que los ejes cartesianos se cruzan en el 0 de ambas rectas numéricas, no debe causar ningún problema. Simplemente es un factor más a observar con cuidado al ver una gráfica.
- ¿Entre qué valores fluctúa el número de hombres por cada 100 mujeres?
- ¿Qué significa, por ejemplo, 98.9?
- ¿Qué observas con respecto a la “unidad” considerada en el eje vertical? ¿Se puede considerar que el eje vertical es una recta numérica?

- ¿Qué observas respecto a la "unidad" considerada en el eje horizontal? ¿Se puede afirmar que el eje horizontal es una recta numérica?
- ¿En qué años la cantidad de hombres por cada 100 mujeres tuvo los valores más bajos? ¿Puedes encontrar alguna relación con la historia nacional? ¿Y los valores más altos?

Ejemplo 4

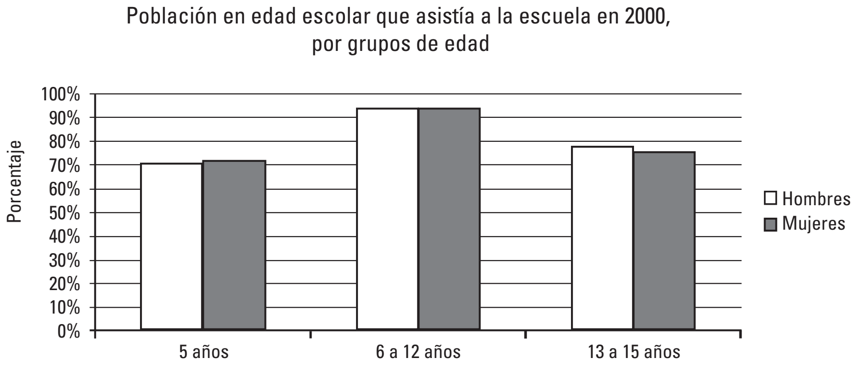
Alumnos por maestro en distintos niveles educativos



Fuente: INEGI
(*http://www.inegi.org.mx/est/contenidos/espanol/rutinas/ept.asp?t=medu03&c=5674*)

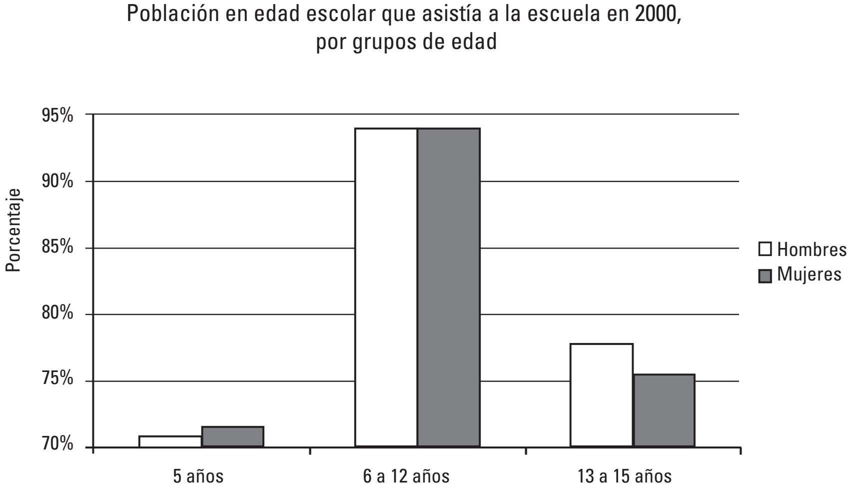
- ¿En qué nivel o niveles es mayor la cantidad de alumnos por maestro?
- ¿Siempre ocurre que a un nivel educativo más alto le corresponden menos alumnos por maestro? ¿Por qué?
- ¿Para qué niveles educativos la tendencia es creciente? ¿Para cuáles es decreciente? ¿Qué significa eso?
- ¿En qué nivel o niveles ha habido cambios más notables en el periodo considerado?

Ejemplo 5

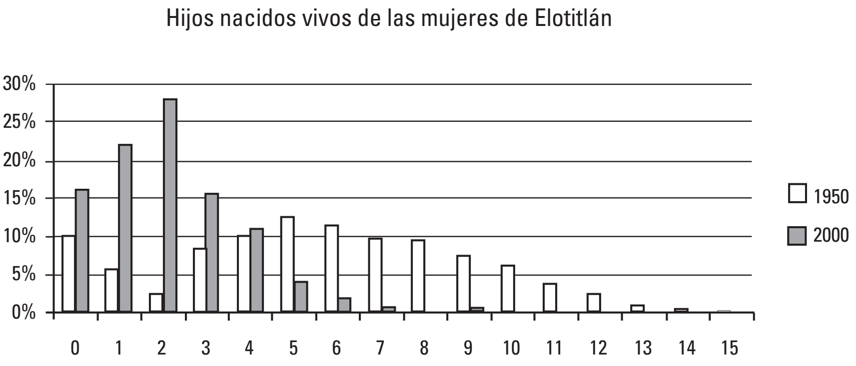


Fuente: INEGI
(*http://www.inegi.org.mx/est/contenidos/espanol/rutinas/ept.asp?t= medu06&s=est&c=3273*)

- Observa que el eje horizontal no es una recta numérica, y que no aparecen puntos, sino barras. Esto es característico de las gráficas de frecuencias.
- ¿Qué relación hay entre los números del eje horizontal y los niveles educativos del Sistema Educativo Nacional?
- ¿Qué significa la altura de cada barra?
- ¿A qué grupo de niños hace alusión '70%' de las primeras barras? Es decir, se está hablando de 70% ¿de qué?
- ¿Podemos afirmar que hay muy pocos alumnos de 5 años? ¿Por qué?
- ¿Hay mucha diferencia entre los hombres y las mujeres? ¿Dónde es menor la diferencia? ¿Dónde es mayor? ¿Qué interpretación le das a esto?
- En las gráficas de frecuencias es necesario que el eje en el que se marcan las frecuencias o los porcentajes sí empiece en el 0; de lo contrario, la gráfica puede dar impresiones erróneas. Por ejemplo, aunque la gráfica siguiente se refiere a la misma información, parece indicar que las diferencias entre hombres y mujeres son más importantes de lo que son en realidad, y lo mismo ocurre con las diferencias entre las categorías de edad.

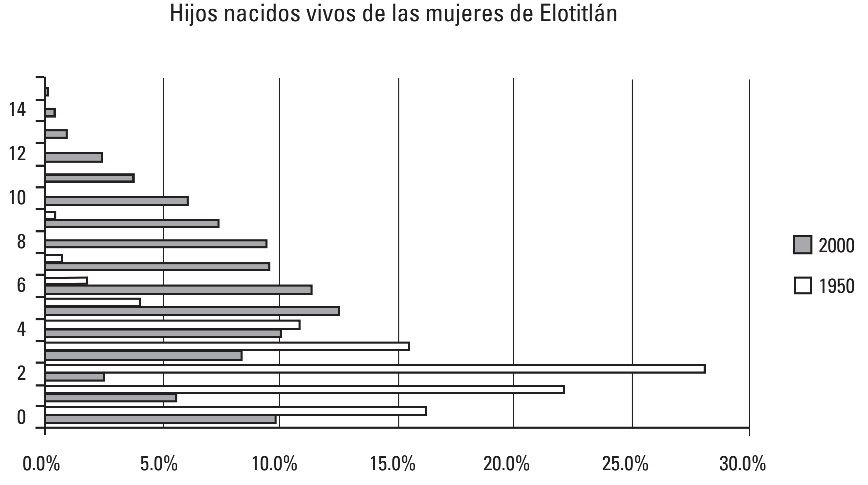


Ejemplo 6



- Contrariamente a los ejemplos anteriores, esta gráfica no corresponde a datos reales; se ha elaborado a partir de la información demográfica proporcionada por el INEGI, imaginando una región ficticia.
- ¿Qué significa la altura de las barras?

- ¿Aproximadamente qué porcentaje de las mujeres en 2000 no tenían hijos? ¿Aproximadamente qué porcentaje tenían cuatro hijos? ¿Y ocho hijos?
- ¿Qué significa que en la parte de la derecha de la gráfica no haya barras correspondientes a 2000?
- ¿Qué cantidad de hijos tuvieron típicamente las mujeres en 1950? ¿Y en 2000? ¿Puedes relacionar esta diferencia con algo ocurrido entre esos dos años?
- ¿En qué año las mujeres habían tenido más hijos como tendencia? ¿De qué característica de la gráfica se deduce esto?
- Suele ocurrir que las gráficas de frecuencias presenten la información con las barras horizontales. Por ejemplo, la siguiente gráfica reporta exactamente la misma información que la anterior. Obsérvala con cuidado y constata que las preguntas anteriores se pueden contestar también a partir de ella.



Antes de seguir adelante, te recomendamos que realices los ejercicios 6 y 7.

3. LA RECTA

En esta sección trabajaremos con un tipo de relación muy especial: la que tiene gráficas que son líneas rectas.

Caracterización

Habrás advertido que en algunos de los ejemplos y ejercicios que hemos presentado hasta ahora los puntos de las funciones quedan sobre una línea recta. Esta situación se presenta siempre que se tienen expresiones del tipo:

$$\boldsymbol{Y} = \mathbf{a} + \mathbf{b}\boldsymbol{X},$$

donde **a** y **b** son números que pueden ser positivos o negativos. La expresión anterior también se puede presentar de esta forma:

$$\boldsymbol{Y} = \mathbf{b}\boldsymbol{X} + \mathbf{a}$$

En ambas expresiones el número **b** multiplica los valores de *X*, mientras que el número **a** es un término independiente.

Los valores de **a** y de **b** para las rectas del ejercicio 4 se muestran en la siguiente tabla:

$Y = -2X + 1$	a = 1	b = –2
$Y = -2 - 3X$	a = –2	b = –3
$Y = -X - 3$	a = –3	b = –1
$Y = \frac{1}{2}X + 2$	a = 2	b = $\frac{1}{2}$
$Y = \frac{1}{2} + 2X$	a = $\frac{1}{2}$	b = 2
$Y = 2X - \frac{1}{2}$	a = $-\frac{1}{2}$	b = 2

Hay una correspondencia entre estas expresiones y las rectas en el plano:

- cada expresión de la forma $\boldsymbol{Y = a + bX}$ corresponde a una recta; y
- para cada recta podemos encontrar la expresión $\boldsymbol{Y = a + bX}$ correspondiente.

A la expresión $\boldsymbol{Y = a + bX}$ se la llama "**ecuación de la recta**". Al número **a** se le suele llamar "**ordenada al origen**". El número **b** recibe el nombre de "**pendiente**" (en la función es el número que multiplica a X).[3]

Es posible que en el transcurso de tu secundaria o tu bachillerato hayas estudiado estos conceptos con otra notación o con otros nombres. Por ejemplo, es frecuente que en lugar de darle a la ecuación la forma general de $Y = a + bX$ se le dé la forma $Y = m\,X + b$ (donde la pendiente es m, y b es la ordenada al origen). Hemos elegido la forma $Y = a + bX$ porque es la usual en Estadística.

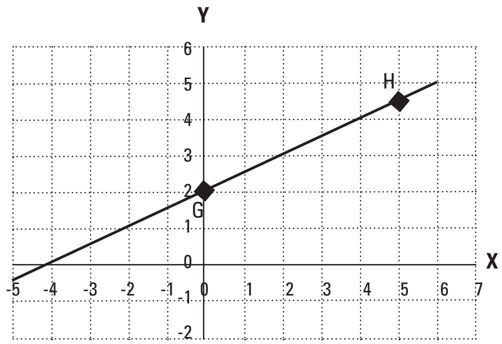
[3] En el programa de cómputo Excel el valor **a** se llama "intersección eje" y el valor **b** se llama "pendiente".

¿Cómo se traza una recta conociendo su ecuación?

Ya que por dos puntos sólo pasa una recta, cuando queremos encontrar la gráfica, basta con encontrar dos puntos que estén en ella.

Veamos cómo representar la recta correspondiente a

$$Y = \frac{1}{2} X + 2.$$



Podemos tomar dos valores cualesquiera de X, y encontrar sus valores Y correspondientes. Por ejemplo, tomemos $X = 0$ y $X = 5$. Al sustituir estos dos valores de X en la expresión $Y = \frac{1}{2} X + 2$ tenemos:

$$X = 0 \rightarrow Y = 2 + \frac{1}{2} \times 0 = 2$$

$$X = 5 \rightarrow Y = 2 + \frac{1}{2} \times 5 = 4.5$$

Entonces tenemos dos parejas de valores: la primera es (0, 2) y la segunda es (5, 4.5). Si llamamos G y H a los puntos correspondientes, tenemos G = (0, 2) y H = (5, 4.5). Ubicamos los dos puntos en el plano cartesiano y por ellos trazamos la recta.

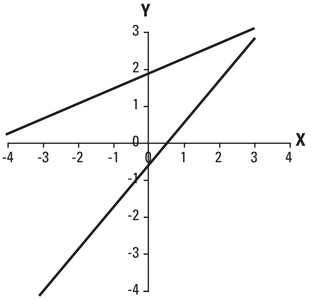
Como hemos visto, conociendo su ecuación se puede trazar la recta en un plano cartesiano. El proceso inverso también es factible: al ver la gráfica de una recta es posible conocer su ecuación. Sin embargo, no trataremos aquí ese proceso, y la razón de ello es que muy rara vez se utiliza en Ciencias Sociales.

Antes de seguir adelante, te recomendamos que realices el ejercicio 8.

Al hacer el ejercicio 8, habrás observado algunas características que relacionan los valores de **a** y **b** con las representaciones gráficas. El siguiente apartado está dedicado a ver cómo son estas relaciones, y cómo pueden interpretarse los números **a** y **b**.

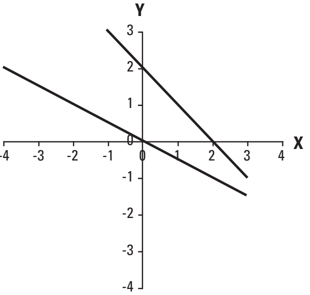
Interpretación

En una recta pueden tener una interpretación interesante el **signo** y el **valor numérico** de la pendiente, así como el valor de **a**.

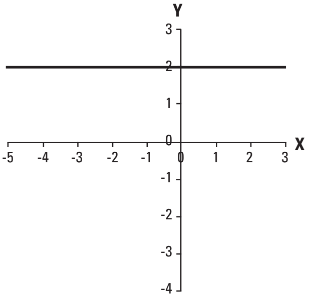


El signo de la pendiente, b

Si **b** (la pendiente) **es positiva** (mayor que 0), la recta "sube" hacia la derecha, es decir, **cuando aumenta el valor de *X*** también **aumenta el valor de *Y***, la función es **creciente**.



Si **b** (la pendiente) **es negativa**, la recta "baja" hacia la derecha, es decir, **cuando aumenta el valor de *X* disminuye el valor de *Y***, la función es **decreciente**.



Si **b es igual a 0**, **la función es constante** (ni crece ni decrece). La recta es paralela al eje horizontal.

En general:

> ➷ Cuando **b** es **positiva** la gráfica es **creciente**.
> ➷ Cuando **b** es **negativa** la gráfica es **decreciente**.
> ➷ Cuando **b = 0** la gráfica es **paralela al eje horizontal**.

Cuando X y Y son variables con las que se están midiendo características de la vida real, el signo de la pendiente tiene una interpretación en el contexto del que se trate:

- Si la pendiente es *positiva*, eso quiere decir que:

  a *mayores* valores de X, se tienen *mayores* valores de Y también.

  – Por ejemplo, si un taxi cobra \$11.50 por el "banderazo" y después \$4.00 por cada kilómetro, entonces la cantidad a cobrar Y está en función de la cantidad X de kilómetros recorridos, según la siguiente expresión:

  $$Y = 11.50 + 4X$$

  El hecho de que 4 sea positivo se puede interpretar como "mientras más kilómetros recorridos, más cobra el taxi".

- Si la pendiente es *negativa*, eso quiere decir que:

  a *mayores* valores de X, se tienen *menores* valores de Y.

  – Por ejemplo, de un tinaco lleno con 1000 litros de agua se extrae el líquido a razón de 67 litros cada hora. Entonces, la cantidad Y de agua en el tinaco está en función de las horas X, según la siguiente expresión:

  $$Y = 1000 + (-67)\,X$$

que a su vez, puede reescribirse sin paréntesis, de la siguiente manera:

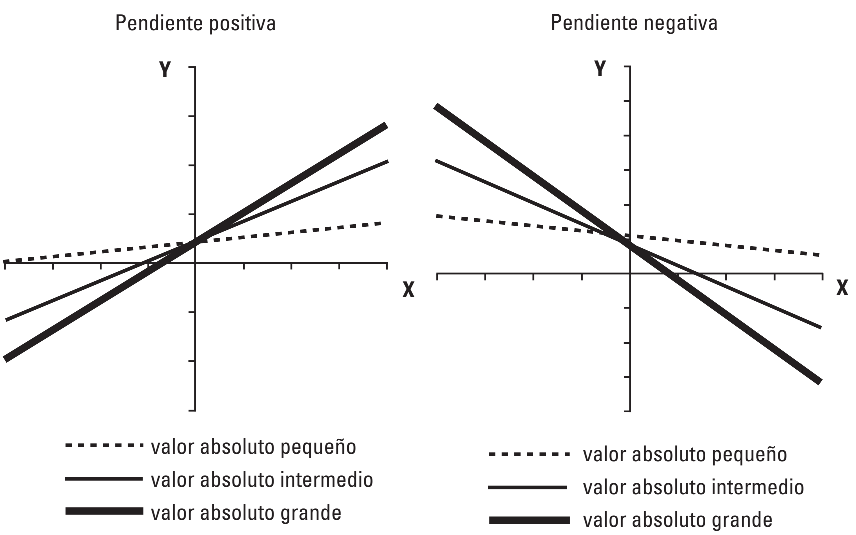
$$Y = 1000 - 67\,X$$

El hecho de que –67 sea negativo se puede interpretar como que “mientras más horas pasan, menos agua queda en el tinaco”.

El valor de la pendiente, b

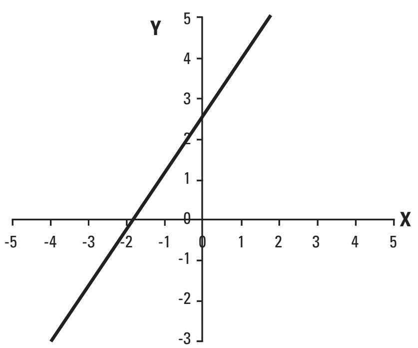
Al realizar el ejercicio 8 puedes haber observado que mientras más grande sea el valor absoluto de **b** (el valor de **b** sin considerar el signo) más pronunciada es la subida o bajada de la recta, es decir, crece o decrece más “rápido”.

Las siguientes gráficas muestran cómo cambian las rectas cuando varía la pendiente.

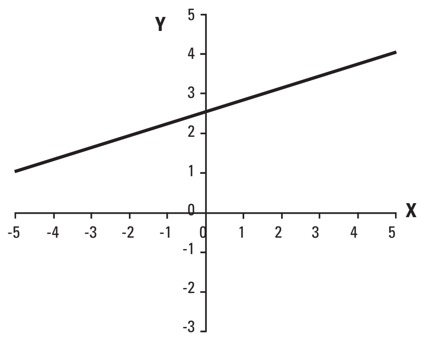


En las gráficas anteriores no hicimos explícitas las ecuaciones de las rectas. Veamos ahora unos ejemplos con las ecuaciones explícitas.

Gráfica P. $Y = 2.5 + 1.4X$



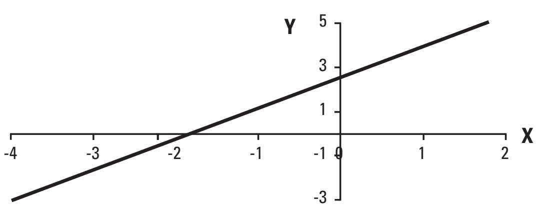
Gráfica Q. $Y = 2.5 + 0.4X$



Observa que las dos gráficas tienen el mismo sistema de ejes cartesianos, con la misma escala. Las dos tienen la misma ordenada al origen (**a** = 2.5), pero la recta de la gráfica P tiene pendiente **b** = 1.4, y la de Q tiene pendiente **b** = 0.4. P es mucho más inclinada que Q.

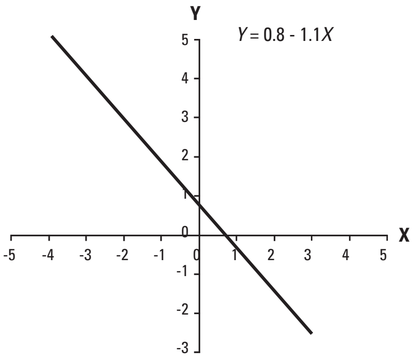
Sin embargo, esa comparación la podemos hacer justamente porque ambas gráficas tienen el mismo sistema de ejes. Observa ahora la gráfica T:

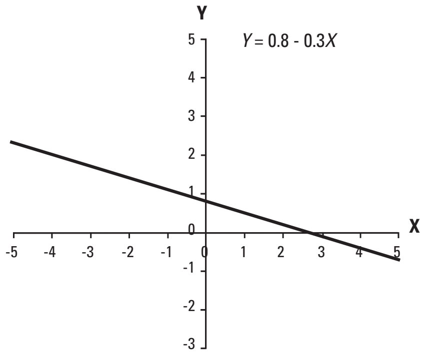
Gráfica T. $Y = 2.5 + 1.4X$



se trata de la misma recta que P, sólo que ahora cambiamos la escala de los ejes, y la recta parece tener mucha menor inclinación y ya no podemos comparar Q con T. Esto implica que comparar dos gráficas solamente es posible cuando la escala de ambas es la misma.

Los siguientes dos ejemplos corresponden a rectas con pendiente negativa. Observa que la escala es la misma en las dos gráficas.

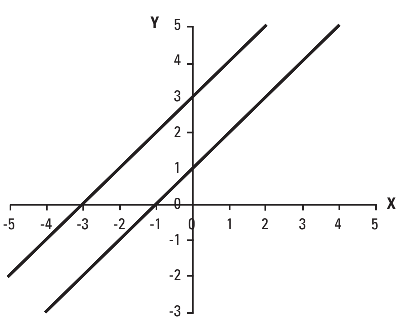




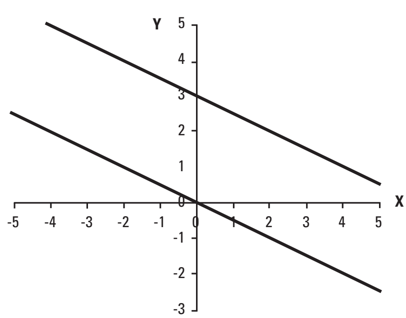
Las dos rectas tienen la misma ordenada al origen (**a** = 0.8), pero la recta de la izquierda tiene pendiente **b** = −1.1 y la de la derecha tiene pendiente **b** = −0.3. La recta de la izquierda es mucho más inclinada que la de la derecha.

Por otra parte, si dos rectas tienen la misma pendiente son paralelas (están igualmente inclinadas). Esto se ilustra en las siguientes dos gráficas.

Dos rectas con la misma pendiente positiva



Dos rectas con la misma pendiente negativa



Además de lo que acabamos de decir respecto a **b**, este valor tiene otra característica que es útil conocer:

> ⇘ **b** indica **cuánto crece o decrece el valor de *Y*** al aumentar el valor de *X* **en una unidad**.

Para ejemplificar lo que acabamos de decir, consideremos dos ecuaciones de rectas que vimos antes: la del taxi y la del tinaco.

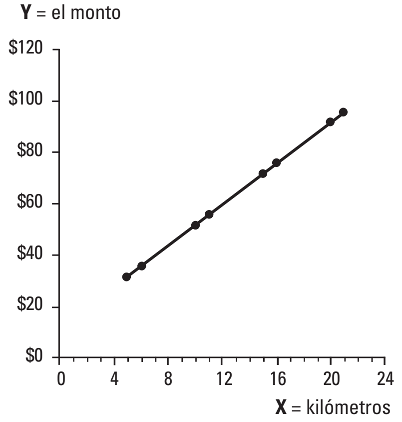
- En el caso del taxi habíamos dicho que la ecuación era

$$Y = 11.50 + 4X$$

donde X es la cantidad de kilómetros recorridos, y Y es lo que cobra el taxi por el trayecto. En la tabla de la derecha mostramos algunos valores de X y de Y, y en seguida se encuentra una gráfica en la que esos mismos valores están marcados como puntos. Observa que en la tabla se han separado con líneas diversas parejas de valores que tienen una diferencia de 1 kilómetro recorrido, y que en las cuatro parejas así marcadas hay una diferencia de \$4.00 en lo que cobra el taxi: \$35.50 es \$4.00 más que \$31.50; \$55.50 es \$4 más que \$51.50, etc. Es decir, después del "banderazo" el taxi cobra \$4.00 *por cada* kilómetro recorrido. La interpretación de la pendiente es justamente esa: el taxi cobra *\$4.00 <u>más</u> por cada kilómetro <u>más</u>*.

X	Y
5	\$31.50
6	\$35.50
10	\$51.50
11	\$55.50
15	\$71.50
16	\$75.50
20	\$91.50
21	\$95.50

El taxi: $Y = 11.50 + 4X$



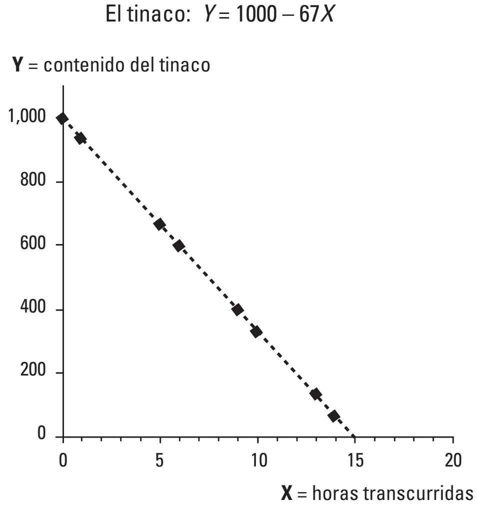
- En el caso del tinaco la ecuación era

$$Y = 1000 - 67X$$

X	Y
0	1,000
1	933
5	665
6	598
9	397
10	330
13	129
14	62

donde X es la cantidad de horas transcurridas desde que se inició el vaciado, y Y es el contenido de agua en el tinaco. La tabla de la derecha muestra algunos valores de X y de Y, en la gráfica de abajo esos mismos valores están marcados con puntos. También en esta tabla hemos separado, con líneas, parejas de valores entre los que hay una diferencia de 1 hora, y en cada una de las cuatro, el segundo valor de Y corresponde a 67 litros menos. La interpretación de la pendiente es justamente ésta: en el tinaco hay *67 litros menos por cada hora más*.

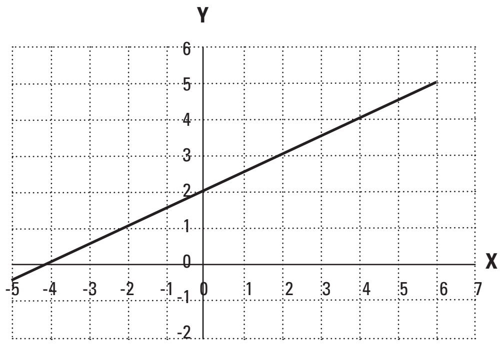
Para ver de una una manera más cotidiana ese resultado, pensemos que 67 litros son aproximadamente tres cubetas de agua, o sea que 67 litros en una hora es más o menos lo mismo que una cubeta cada 20 minutos o que un litro por minuto. No parece mucho, ¿verdad? Sin embargo, como puedes ver en la gráfica, a ese paso "lento", ¡en 15 horas se vacía el tinaco!



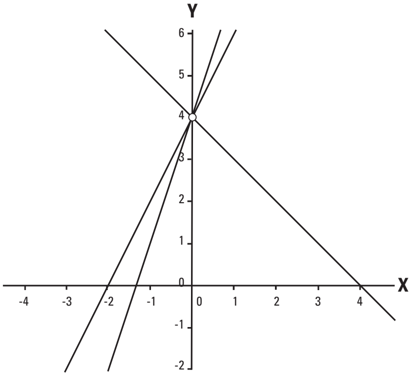
El valor de la ordenada al origen, a

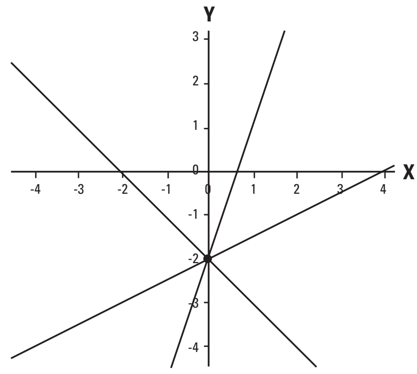
Se puede observar que en cualquier ecuación $\boldsymbol{Y} = \mathbf{a} + \mathbf{b}\,\boldsymbol{X}$, cuando X vale cero, Y vale **a**. Es decir, cuando $X = 0$, entonces $Y =$ **a**. Esto significa que la recta pasa por el punto (0, **a**), es decir, la recta corta al eje vertical en **a**.

Por ejemplo, vimos ya la gráfica de la recta cuya ecuación es $Y = 2 + 0.5\,X$, que repetimos a un lado. Aquí vemos que la recta y el eje vertical se cruzan en el punto (0, 2). Efectivamente, cuando $X = 0$, $Y = 2 + 0.5 \times 0 = 2$, o sea $Y =$ **a**. Ésa es, justamente, la razón por la que **a** se llama "ordenada al origen": es la ordenada (valor en el eje Y) cuando en el eje X estamos en el origen, o sea en $X = 0$.



Veamos en un par de ejemplos cómo pueden ser diversas rectas en cuyas ecuaciones coincide el valor de a. En todas las rectas de la primera gráfica se tiene **a** = 4 y en todas las de la segunda se tiene **a** = −2:





La interpretación del valor de **a** sólo tiene sentido cuando la variable *X* puede tomar el valor cero.

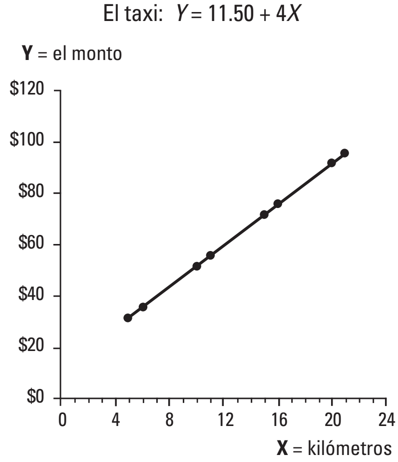
> Cuando se puede hablar de $X = 0$, entonces **a** indica **cuánto vale *Y* cuando *X* vale cero**.

Veamos cómo sería esto en los ejemplos del taxi y el tinaco.

- En el caso del taxi habíamos dicho que la ecuación era:

$$Y = 11.50 + 4X$$

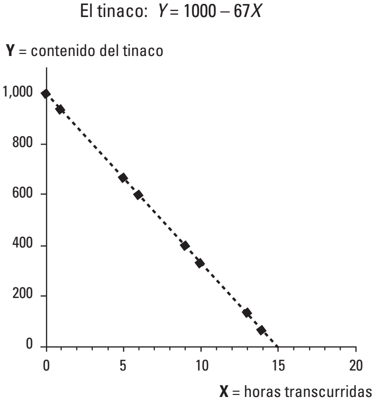
donde *X* es la cantidad de kilómetros recorridos, y *Y* es lo que cobra el taxi por el trayecto. Reproducimos ahora la gráfica que antes presentamos. ¿Qué significa aquí **a** = 11.50? Querría decir que por cero kilómetros el taxi cobra \$11.50, ¡pero eso prácticamente no tiene sentido, porque no hay trayectos de cero kilómetros! El mismo propósito de un viaje en taxi es trasladarse... Claro, a menos que nos subamos al taxi y antes de que arranque volvamos a bajarnos, entonces el taxista nos cobraría solamente el "banderazo": **a** = $11.50



- En el caso del tinaco la ecuación era

$$Y = 1000 - 67X$$

donde X es la cantidad de horas transcurridas desde que se empezó a vaciar el tinaco y Y es el contenido de agua en el tinaco. La gráfica que habíamos presentado es la que reproducimos aquí. ¿Qué significa ahora **a** = 1000? Es lo que hay en el tinaco justo antes del momento en que se empieza a vaciar. Aquí tiene más sentido hablar del valor de la ordenada al origen.



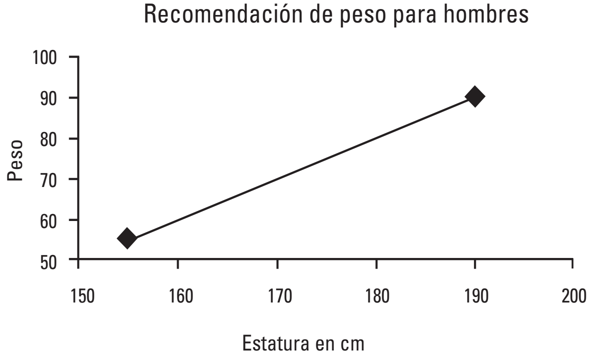
Como siempre que se trata de interpretar un resultado matemático, lo más importante es tener en cuenta en qué contexto estamos.

Ahora bien, cuando el valor $X = 0$ no tiene sentido, suele ocurrir que el eje Y no se grafique desde 0, sino desde los valores correspondientes a las X con sentido. Veamos un ejemplo.

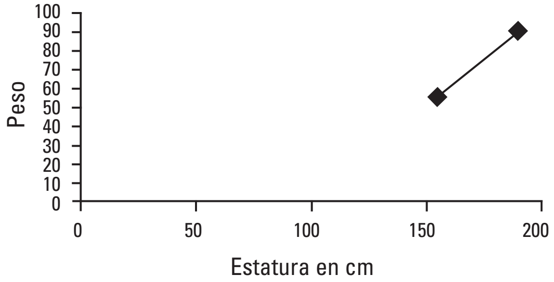
- Una recomendación usual para saber cuánto debe pesar un hombre adulto es "tantos kilos como los centímetros que excedan al metro en su estatura". Es decir, si Y es el peso y X es la estatura en centímetros de un hombre adulto, la recomendación se puede expresar con la ecuación

$$Y = X - 100$$

(es decir, **a** = −100 y **b** = 1). El valor de **a** no tiene sentido (sería algo como "el peso de un adulto que mida 0 cm es de −100 kg": ¡un absurdo!), pero para hombres adultos de, digamos, entre 155 cm y 190 cm, la relación sí tiene sentido, porque un hombre de 155 cm puede pesar aproximadamente 55 kg y uno de 190 cm puede pesar aproximadamente 90 kg, como se puede ver en la gráfica.



Observa que la gráfica anterior empieza en 150 cm y en 50 kg porque son los valores en los que tiene sentido la ecuación; si empezáramos en 0 cm y 0 kg esa misma gráfica se vería como se ilustra a continuación: con un innecesario espacio blanco porque la regla no se aplica a adultos de menor estatura y con poca precisión en los valores donde la regla sí se aplica.



Aquí te recomendamos que realices el ejercicio 9.

EJERCICIOS

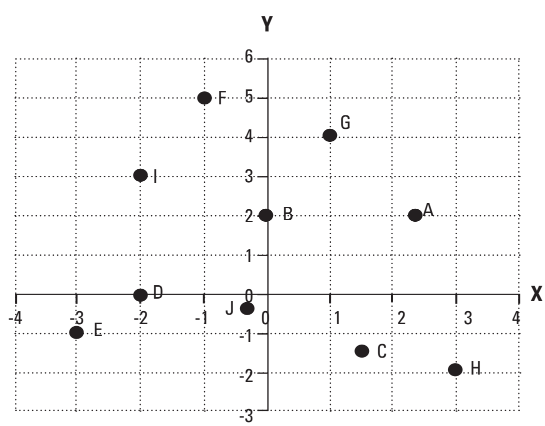
Ejercicio 1

Resuelve las siguientes situaciones.

a) Traza en papel cuadriculado un par de ejes cartesianos y toma como unidad la medida de “dos cuadritos”. Representa los puntos que se dan a continuación:

A = (1.5, 2)	B = (2.5, 0.75)	C = (2.33, 0)	D = (–1.5, –1.25)	E = (–2.25, 3)
F = (–3, 2)	G = (1, –3)	H = (0, 2.48)	I = (–2.6, 0)	J = (–3, 0.75)

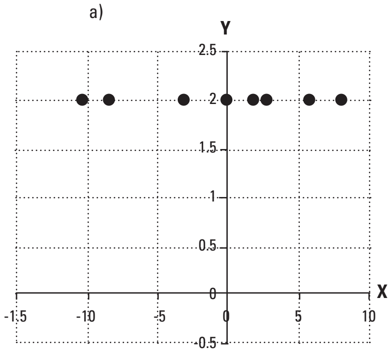
b) Indica las coordenadas de cada uno de los puntos que se dan en la gráfica de la derecha.



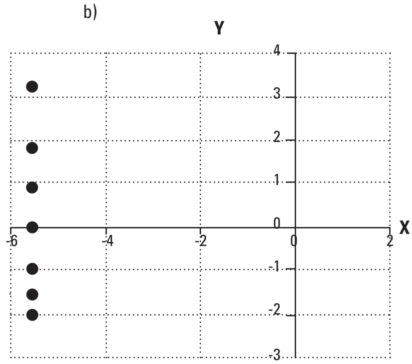
Ejercicio 2

En cada uno de los siguientes incisos, observa los puntos que se representan en la gráfica e indica qué tienen en común sus coordenadas y en qué se diferencian:

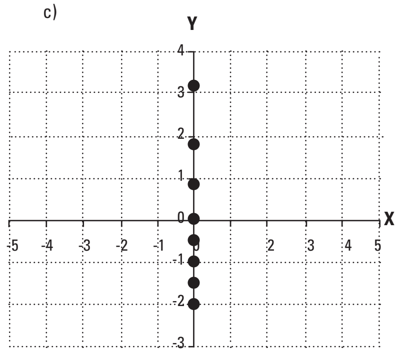
a)



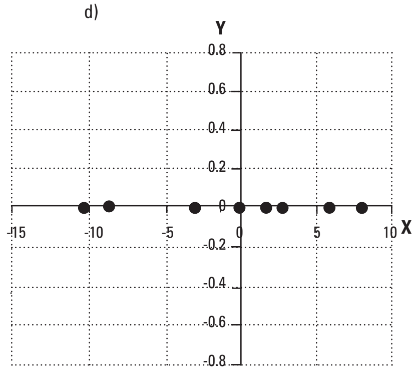
b)



c)



d)



Ejercicio 3

Resuelve las siguientes situaciones. Hazlo primero sin un plano, y luego verifica los resultados con uno.

a) Un punto tiene el siguiente desplazamiento en un plano cartesiano:

- Empieza en el origen.
- Se desplaza 4 unidades a la derecha.
- Se desplaza 3 unidades hacia abajo.
- Se desplaza 2 unidades hacia la derecha.
- Se desplaza 7 unidades hacia la izquierda.
- Se desplaza 5 unidades hacia arriba.
- Se desplaza 20 unidades hacia abajo.
- Se desplaza 9 unidades hacia la izquierda.
- Se desplaza 2.6 unidades hacia abajo.
- Se desplaza 1.8 unidades hacia la izquierda.
- Se desplaza 3.8 unidades hacia arriba.
- Se desplaza 3.5 unidades hacia la derecha.

¿Cuáles son las coordenadas de su punto de llegada?

b) Imagina otra trayectoria de cinco movimientos que empiece y termine en los mismos dos puntos.

c) Imagina otra trayectoria de un solo movimiento que empiece y termine en los mismos dos puntos.

d) Imagina una trayectoria para que un punto empiece en el punto de llegada de los tres incisos anteriores y termine en el origen.

Ejercicio 4

Resuelve las siguientes situaciones.

a) Completa la siguiente tabla.

X	1	−2	0	−1	2	½	−½	0.75
$Y = 2 + 3X$	$3(1) + 2 = 5$	$3(-2) + 2 = -4$						

b) Para cada una de las relaciones que se indican a continuación haz una tabla como la anterior considerando los mismos valores para X.

i) $Y = -2X + 1$
ii) $Y = -2 - 3X$
iii) $Y = -X - 3$
iv) $Y = X^3$
v) $Y = X^2 + 1$
vi) $Y = 1 + 2X^2$
vii) $Y = \frac{1}{2}X + 2$
viii) $Y = \frac{1}{2} + 2X$
ix) $Y = 2X - \frac{1}{2}$

c) Representa gráficamente las funciones de los dos incisos anteriores.

d) Considera nuevamente las expresiones iii) y iv) del inciso b) y repite la gráfica, pero ahora utilizando otros ejes, con otras unidades.

e) En las gráficas que realizaste en el inciso c), une los puntos con segmentos. Si se agregaran valores de X a las tablas de los incisos a) y b), ¿cuáles gráficas se "suavizarían"?

Ejercicio 5

Para cada una de las siguientes situaciones haz una tabla de valores y represéntalos gráficamente.

a) Si un rectángulo mide el doble de largo que de ancho, ¿cuál es su área?

b) Una bacteria se reproduce cada dos minutos, por lo que la cantidad de bacterias en el minuto x es 2^x. ¿Cómo varía la cantidad de bacterias a lo largo del tiempo?

c) El perímetro de un cuadrado que mide a cm de lado es $4a$ cm. ¿Cómo varía el perímetro conforme se incrementa la medida del lado? (Observa que el eje horizontal ahora se llama a).

d) El área de un cuadrado que mide a cm de lado es a^2 cm^2. ¿Cómo varía el área conforme se incrementa la medida del lado?

e) El volumen de un cubo que mide a cm de arista es a^3 cm^3. ¿Cómo varía el volumen conforme se incrementa la medida de la arista?

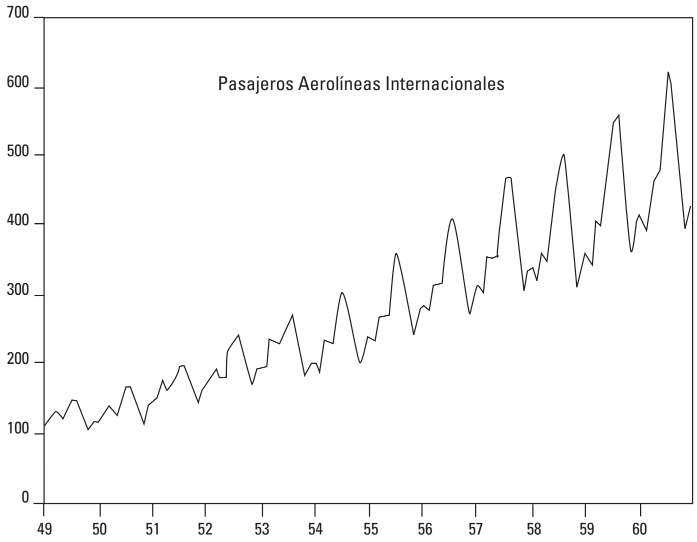
Ejercicio 6

Interpreta las gráficas de los tres últimos incisos del ejercicio 5, comparándolas.

Ejercicio 7

Interpreta las siguientes gráficas:

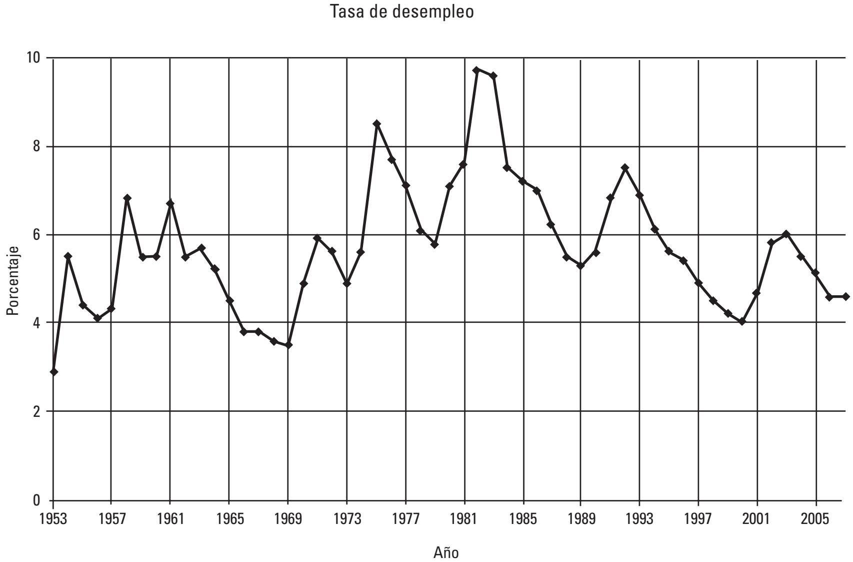
a) Número de pasajeros de Aerolíneas Internacionales, para el periodo enero de 1949 a diciembre de 1960



Fuente: *http://www.ccee.edu.uy/ensenian/catectr/material/*

¿Puedes decir a qué corresponden los "picos" periódicos de la gráfica?

b) Evolución de la tasa de desempleo en Estados Unidos de Norteamérica[4]



[4] Fuente: *http://www.google.com.mx/imgres?hl=es-419&client= firefox-a&hs=X3Y&sa=X&rls=org.mozilla:en-US:official&biw=1024&bih=653&tbm=isch&prmd=imvns&tbnid=LPYjTDCVaglUJM:&imgrefurl=http://www.qtau.com/contents/20080905-jobs-jobs-jobs.html&docid=3tNaPCoz_kVRmM&imgurl=http://i.qtau.com/usa-unemployment-rate.png&w=911&h=623&ei=N2RwUJaZOKLq2QXCloDIAQ&zoom=1&iact=hc&vpx=108&vpy=157&dur=4149&hovh=186&hovw=272&tx=153&ty=209&sig=101590435207801135037&page=1&tbnh=142&tbnw=208&start=0&ndsp=12&ved=1t:429,r:0,s:0,i:68*

Ejercicio 8

Resuelve las siguientes situaciones.

a) En papel cuadriculado, representa gráficamente las rectas que se piden a continuación. Las correspondientes a cada inciso trázalas en el mismo par de ejes.

i) $Y = 1 + 2X$ $\quad Y = 3 + 2X$ $\quad Y = -4 + 2X$

ii) $Y = \frac{1}{2} + (-3)X$ $\quad Y = -2 + (-3)X$ $\quad Y = 4 - 3X$

iii) $Y = 3 + X$ $\quad Y = 3 - X$ $\quad Y = 3 + 2X$ $\quad Y = 3 - 2X$

iv) $Y = -4 + \frac{1}{2}X$ $\quad Y = -4 - \frac{1}{2}X$ $\quad Y = -4 + 3X$ $\quad Y = -4 + -3X$

b) Compara las rectas que trazaste relacionando la gráfica con los valores de **a** y de **b**. ¿Qué observas?

Ejercicio 9

Escribe las ecuaciones correspondientes a cada una de las situaciones siguientes y represéntalas gráficamente. Interpreta el valor de la pendiente y, cuando tenga sentido, el de la ordenada al origen.

a) Un empleado recibe un salario mensual de $1850.00 y una comisión de 5% sobre las ventas que realice en el mes. Si X son las ventas y Y es el ingreso mensual, ¿cuánto recibe en un mes?

b) La cuota mensual de un gimnasio es de $200.00 más $50.00 la hora. ¿Cuánto cuesta ir al gimnasio?

c) En un parque de diversiones la entrada cuesta $160.00 pero se descuentan $5.00 por cada envase vacío de refresco que se lleve. Si se llevan X envases, ¿cuánto hay que pagar por entrar al parque?

d) Los alumnos de una escuela quedaron de verse en la plaza central del pueblo para recorrer desde ahí los 10 km de distancia al lugar donde van a ir de excursión. ¿Cuántos kilómetros recorre cada alumno desde su casa al sitio de la excursión?

e) Un automóvil se mueve a una velocidad de 70 km/h. ¿Qué distancia recorre a lo largo del tiempo?

f) Para convertir los grados centígrados a grados Fahrenheit se multiplican los grados centígrados por 1.8 y se suma 32. ¿Cómo varía la temperatura en grados Fahrenheit para distintas temperaturas de grados centígrados?

g) La dosis recomendada de cierta medicina pediátrica es de 5 mg por cada kilo de peso. ¿Qué dosis se debe administrar conociendo el peso del niño?

h) Una panga para cruzar un río cobra $40.00 por un vehículo más $7.50 por cada persona. ¿Cuánto se debe pagar por cruzar con un vehículo con X pasajeros?

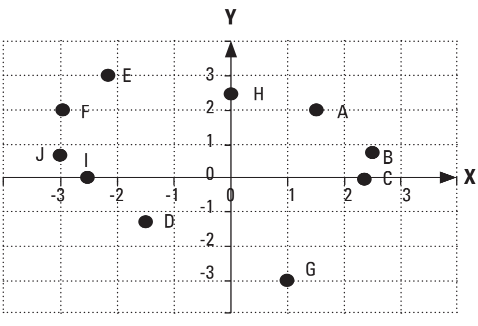
RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS

En esta sección del manual se presenta la solución a la mayoría de los ejercicios. Cuando no esté la solución aquí es porque el ejercicio debe ser comentado y discutido en grupo.

Ejercicio 1

a) La gráfica se encuentra abajo a la derecha.

b) A = (2.3, 2);
B = (0, 2);
C = (1.5, –1.5);
D = (–2, 0);
E = (–3, –1);
F = (–1, 5);
G = (1, 4);
H = (3, –2);
I = (–2, 3);
J = (–0.3, –0.3)



Nota: en el caso del punto J, es difícil leer con exactitud los valores -0.3 y -0.3. Pero pueden aproximarse; por ejemplo una respuesta como J = (-0.2, -0.2) es correcta.

Ejercicio 2

a) Todos los puntos tienen en común el valor $y = 2$, y varía el valor correspondiente a X.

b) Todos los puntos tienen en común el valor $x = -5.5$, y varía el valor correspondiente a Y.

c) Todos los puntos tienen en común el valor $x = 0$, y varía el valor correspondiente a Y.

d) Todos los puntos tienen en común el valor $y = 0$, y varía el valor correspondiente a X.

Ejercicio 3

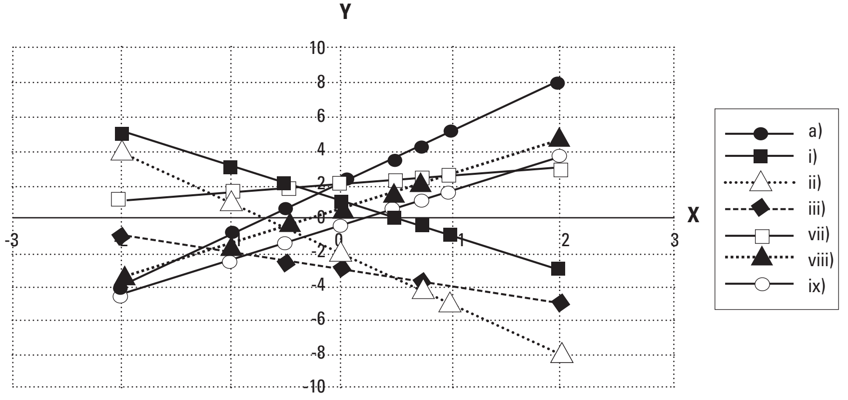
a) Las coordenadas del punto de llegada son (–8.3, –16.8).

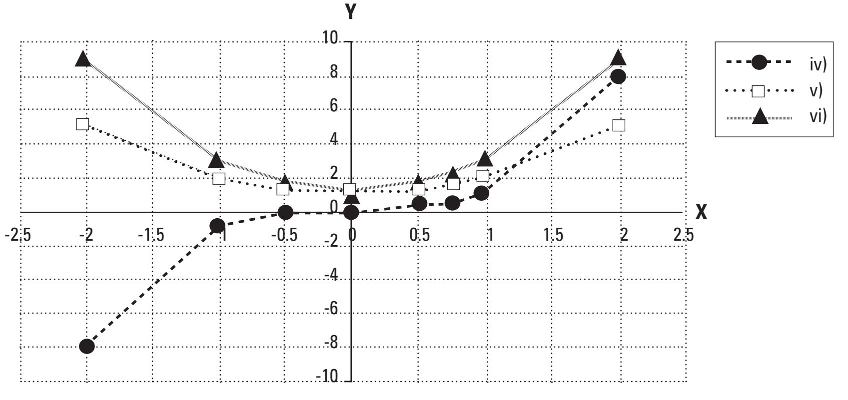
Ejercicio 4

a)	*X*	1	–2	0	–1	2	0.5	–0.5	0.75
	Y	5	–4	2	–1	8	3.5	0.5	4.25

b)	*X*	1	–2	0	–1	2	0.5	–0.5	0.75
i)	*Y*	–1	5	1	3	–3	0	2	–0.5
ii)	*Y*	–5	4	–2	1	–8	–3.5	–0.5	–4.25
iii)	*Y*	–4	–1	–3	–2	–5	–3.5	–2.5	–3.75
iv)	*Y*	1	–8	0	–1	8	0.125	–0.125	0.421875
v)	*Y*	2	5	1	2	5	1.25	1.25	1.5625
vi)	*Y*	3	9	1	3	9	1.5	1.5	2.125
vii)	*Y*	2.5	1	2	1.5	3	2.25	1.75	2.375
viii)	*Y*	2.5	–3.5	0.5	–1.5	4.5	1.5	–0.5	2
ix)	*Y*	1.5	–4.5	–0.5	–2.5	3.5	0.5	–1.5	1

c) En las siguientes dos figuras las funciones están separadas según si corresponden a rectas o no. Se han unido los puntos consecutivos de cada una, como se indica en el inciso e).





d) Al graficar con otros sistemas obtienes la misma relación entre los puntos de cada función, pero con apariencia distinta.

e) Las gráficas de rectas (primera figura) no se suavizan más aunque se agreguen más puntos. De hecho, bastaría con poner en cada caso los dos puntos correspondientes a los valores extremos de X; en este caso, $X = -2$ y $X = 2$. En cambio, las gráficas de la segunda figura sí se suavizarían si se agregaran más puntos entre -2 y 2.

Ejercicio 5

En todos los incisos hemos elegido (arbitrariamente) los mismos valores de *X*.

a)	X =	medida del ancho	0.5	1	2	4	6	8	10	13	15
	Y =	área del rectángulo	0.5	2	8	32	72	128	200	338	450

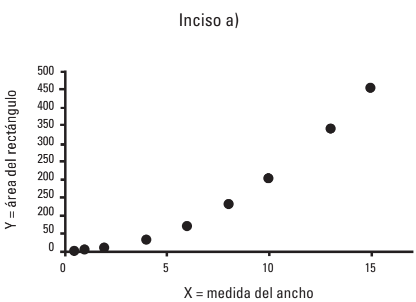
b)	X =	minutos desde el inicio	0.5	1	2	4	6	8	10	13	15
	Y =	cantidad de bacterias	1.4142	2	4	16	64	256	1024	8192	32768

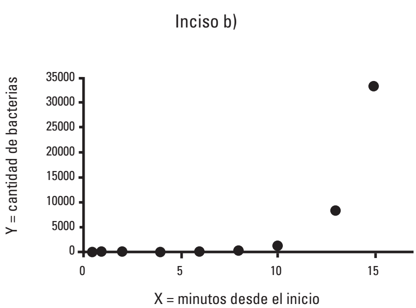
c)	a =	lado del cuadrado	0.5	1	2	4	6	8	10	13	15
	P =	perímetro del cuadrado	2	4	8	16	24	32	40	52	60

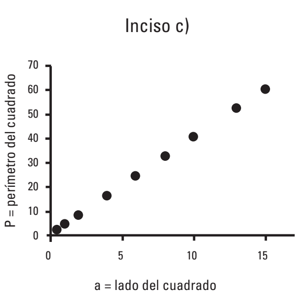
c)	a =	lado del cuadrado	0.5	1	2	4	6	8	10	13	15
	A =	área del cuadrado	0.25	1	4	16	36	64	100	169	225

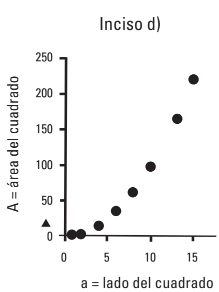
d)	a =	arista del cubo	0.5	1	2	4	6	8	10	13	15
	V =	volumen del cubo	0.125	1	8	64	216	512	1000	2197	3375

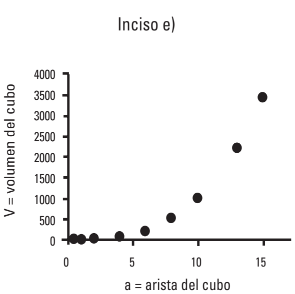
Las gráficas son:











Ejercicio 6

Una de los aspectos que se pueden observar en las tres gráficas es que en la medida en que aumenta la longitud del lado o el arista, el volumen del cubo crece mucho más rápidamente que el área del cuadrado, y ésta crece mucho más rápidamente que su perímetro. El resto de la interpretación es conveniente hacerla en grupo.

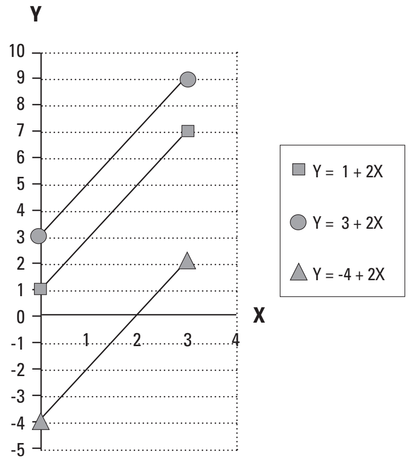
Ejercicio 7

En el inciso a), los "picos" corresponden a los viajeros del verano del hemisferio norte terrestre. El resto de la interpretación conviene hacerla en grupo.

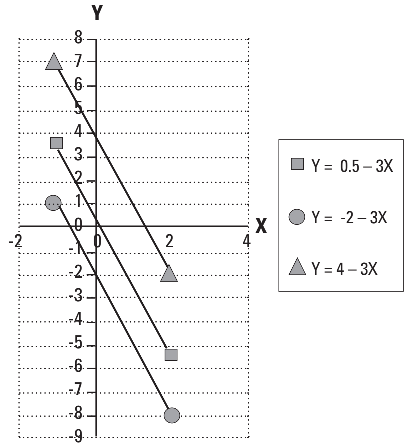
Ejercicio 8

a)

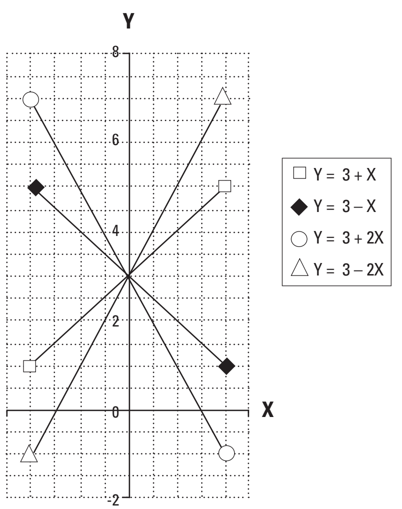
Subinciso i)



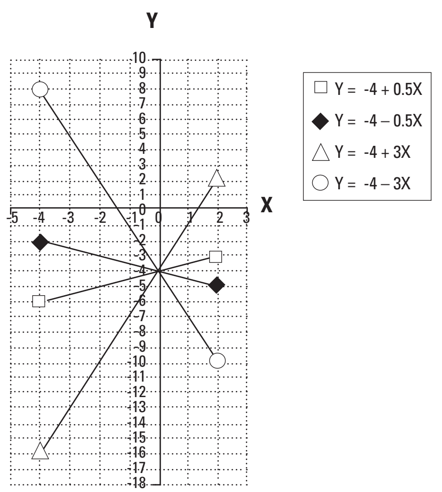
Subinciso ii)



Subinciso i)



Subinciso iv)



Ejercicio 9

a) Como calcular 5% de una cantidad X se escribe como $0.05X$, la ecuación es $Y = 1850 + 0.05\ X$. La pendiente **b** = 0.05 significa que por cada peso de venta más que haga el empleado, gana \$0.05 más; para tener una mejor interpretación podemos multiplicar, por ejemplo, por 1000: por cada \$1000.00 más de venta, el empleado recibe \$50.00. La ordenada al origen **a** = 1850 tiene sentido: \$1850.00 es lo que gana el empleado si durante ese mes no hizo ninguna venta.

b) Si X es el tiempo pasado en el gimnasio y Y es lo que se paga, la ecuación es $Y = 200 + 50\ X$. La pendiente **b** = 50 es lo que se cobra por hora: por cada hora más de uso del gimnasio, hay que pagar \$50.00 más. La ordenada al origen **a** = 200 tiene sentido: \$200.00 es lo que hay que pagar al gimnasio si no se usó durante un mes.

c) Si X es la cantidad de envases que se llevan y Y es lo que cuesta entrar al parque, la ecuación es $Y = 160 - 5\ X$. La pendiente **b** = –5 es lo que descuentan: por cada envase vacío más de refresco, se pagan \$5.00 menos. La ordenada al origen **a** = 160 tiene sentido: \$160.00 es lo que hay que pagar al entrar al parque si no llevamos ningún envase.

d) Si X es la distancia de la casa de cada niño a la plaza y Y es la distancia total recorrida, la ecuación es $Y = 10 + X$. La pendiente **b** = 1 tiene un sentido que es trivial: por cada kilómetro más lejos que viva un niño de la plaza, camina en total 1 km más. La ordenada al origen **a** = 10 sólo tendría sentido si un niño viviera en la plaza, lo que en general no ocurre.

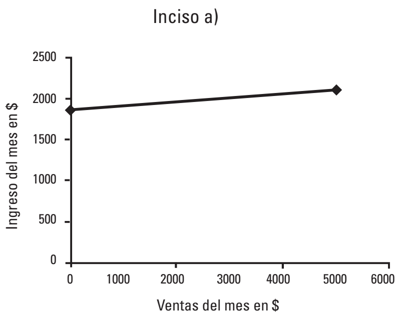
e) Si X es el tiempo en horas y Y es la distancia recorrida, la ecuación es $Y = 70\ X$. La pendiente **b** = 70 significa que por cada hora más, el automóvil recorre 70 km más. La pendiente **a** = 0 tiene un sentido trivial: si no transcurre tiempo, tampoco hay distancia recorrida.

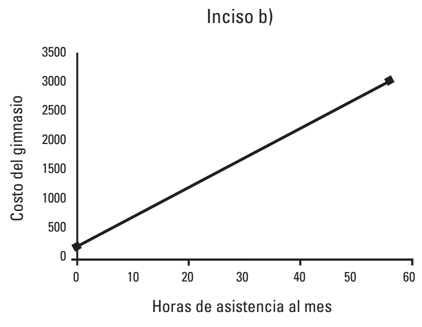
f) Si X son los grados centígrados y Y son los grados Fahrenheit, la ecuación es $Y = 32 + 1.8\ X$. La pendiente **b** = 1.8 significa que por cada grado centígrado más, hay 1.8 grados Fahrenheit más. La ordenada al origen tiene este sentido: **a** = 32 es la temperatura Fahrenheit a 0º C.

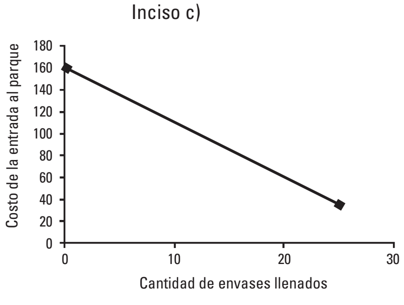
g) Si X es el peso y Y es la dosis, la ecuación es $Y = 5X$. La pendiente **b** = 5 significa que por cada kilogramo más, hay que administrar 5 mg más. La ordenada al origen **a** = 0 no tiene sentido porque no hay niños que pesen 0 kilogramos.

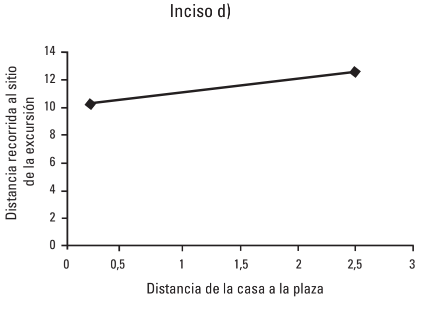
h) Si X es la cantidad de pasajeros y Y es lo que hay que pagar por cruzar el río, la ecuación es $Y = 40 + 7.50\ X$. La pendiente **b** = 7.50 es lo que hay que pagar por cada pasajero; la ordenada al origen **a** = 40 no tiene sentido porque un vehículo no puede cruzar sin al menos un pasajero (el que conduce).

Las gráficas se muestran en seguida:

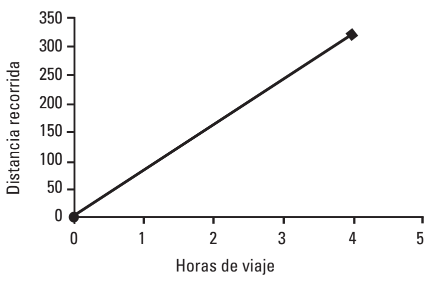




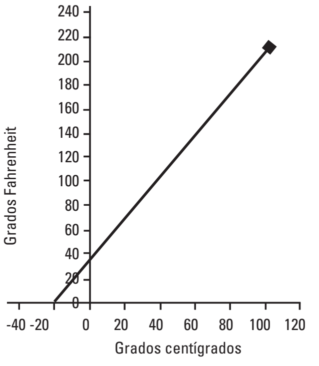




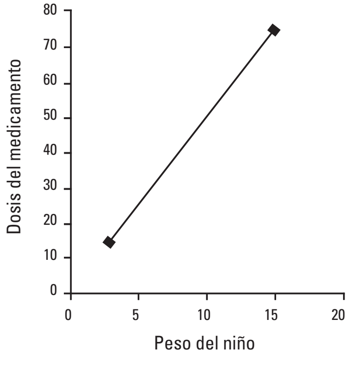
Inciso e)



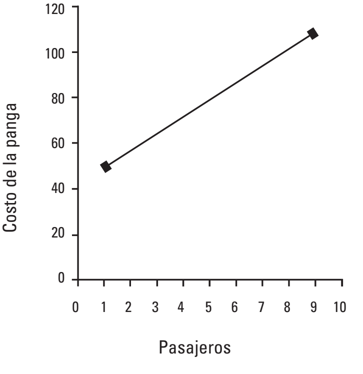
Inciso f)



Inciso g)



Inciso h)



Esta primera edición de ***Recta numérica, plano cartesiano.*** *Nociones básicas para estudiantes de Ciencias Sociales* estuvo a cargo de la Subdirección de Fomento Editorial de la Dirección de Difusión y Extensión Universitaria de la Universidad Pedagógica Nacional y se terminó de imprimir el 23 de junio de 2015 en los Talleres Gráficos de Croma Di Press, ubicado en Doctor Durán núm. 48, col. Doctores, CP 06720, México, DF. El tiraje fue de 500 ejemplares.