SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
UNIDAD AJUSCO

LICENCIATURA EN PEDAGOGÍA

ANÁLISIS DEL TRATAMIENTO DE LOS DIAGRAMAS DE ÁRBOL EN EL PROGRAMA DE ESTUDIO DE MATEMÁTICAS 2017 DE EDUCACIÓN SECUNDARIA EN MÉXICO

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO

DE LICENCIADA EN PEDAGOGÍA

PRESENTA:

DIANA LILIA RUIZ JIMÉNEZ

ASESOR:

PROF. ARTURO BAZÁN ZURITA

CIUDAD DE MÉXICO, OCTUBRE 2024

EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

Secretaría Académica
Área Académica 5
Teoría Pedagógica y
Formación Docente
Programa Educativo:
Licenciatura en Pedagogía

Ciudad de México, agosto 07 de 2024

TURNO VESPERTINO
F(01) S(22)

DESIGNACIÓN DE JURADO DE EXAMEN PROFESIONAL

La Coordinación del Área Académica Teoría Pedagógica y Formación Docente, tiene el agrado de comunicarle que a propuesta de la Comisión de Titulación ha sido designado **SINODAL** del Jurado del Examen Profesional de: **DIANA LILIA RUIZ JIMÉNEZ,** pasante de esta Licenciatura, quien presenta la **TESIS:** titulada: **"ANÁLISIS DEL TRATAMIENTO DE LOS DIAGRAMAS DE ÁRBOL EN EL PROGRAMA DE ESTUDIO DE MATEMÁTICAS 2017 DE EDUCACIÓN SECUNDARIA EN MÉXICO"**, para obtener el título de Licenciada en Pedagogía.

Reciba un ejemplar de la misma para su revisión y DICTAMINACIÓN. Se le recuerda que con base en el Artículo 39 del Reglamento General de Titulación Profesional de Licenciatura, dispone de un plazo no mayor de 20 días hábiles, a partir de la fecha de recibido, para emitir el dictamen por escrito correspondiente.

JURADO	NOMBRE
Presidente (a)	VICTOR JAVIER RAGGI CÁRDENAS
Secretaria (o)	ARTURO BAZÁN ZURITA
Vocal	ENRIQUE VEGA RAMÍREZ
Suplente	VICENTE CARRIÓN VELÁZQUEZ

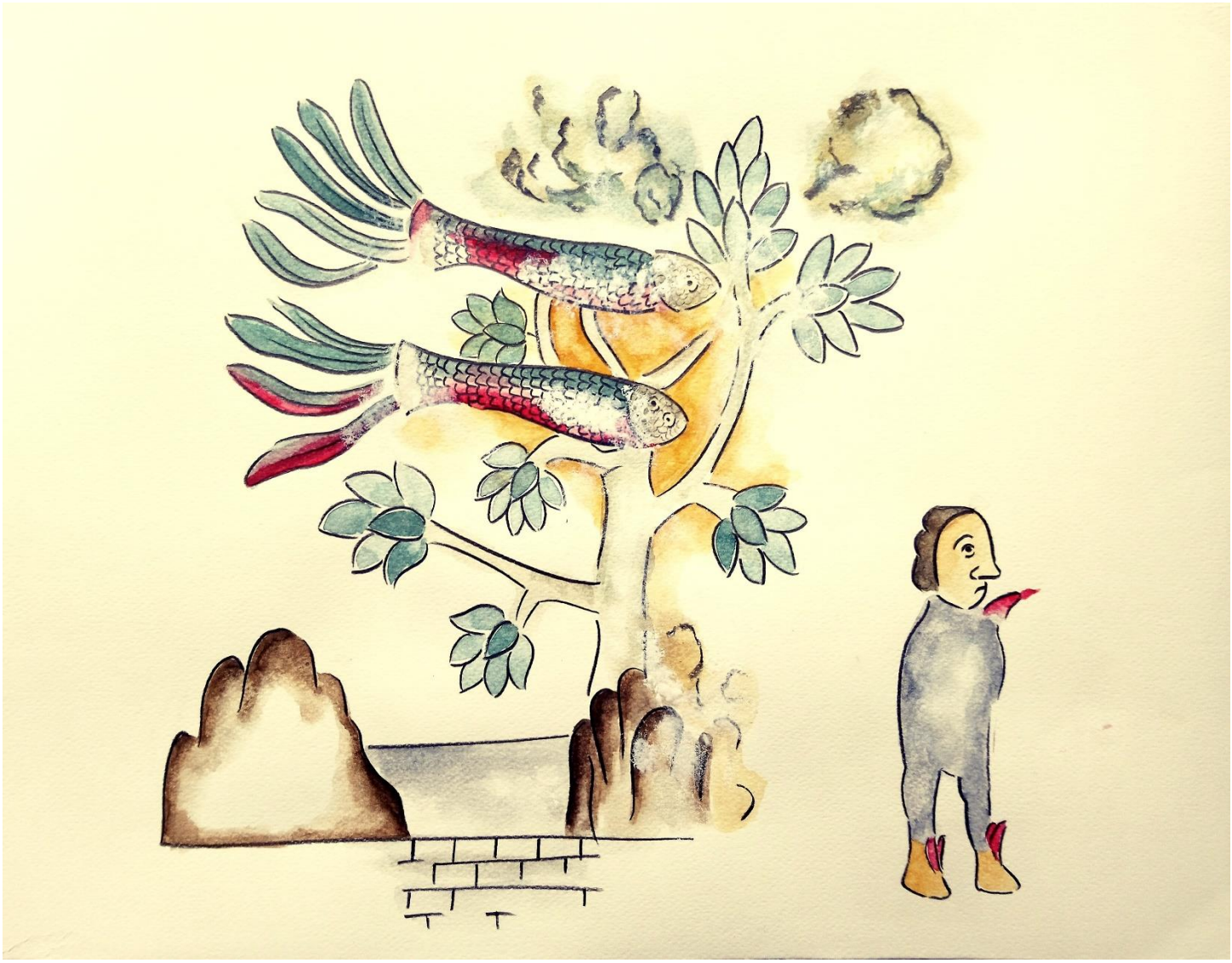
Atentamente

"EDUCAR PARA TRANSFORMAR"

EVA FRANCISCA RAUTENBERG Y PETERSEN

Coordinadora del Área Académica:
Teoría Pedagógica y Formación Docente
Programa Educativo: Licenciatura en Pedagogía

NOTA: Oficio revisado y aprobado por el Consejo de la Licenciatura en Pedagogía el 03/10/14 y por el Consejo Interno del Área Académica 5: Teoría Pedagógica y Formación Docente el 23/10/14 y entró en vigor el 05/11/14.
c.c.p.- Comisión de Titulación.
Alumnas.
ERP/JPOD/eco



Nota sobre la ilustración de la cubierta

Códice Dehesa. Antigüedades Mexicanas. Publicada por la Junta Colombina de México en el cuarto centenario DEL DESCUBRIMIENTO DE AMÉRICA. TEXTO MÉXICO. OFICINA TIPOGRÁFICA DE LA SECRETARÍA DE FOMENTO. 1892.

Láminas XVII y XV, líneas 45 y 46. Hay una expedición que emprende probablemente 8 Venado, en el día 1 Águila o 2 Viento. Si es él, aquí aparece solo cubierto con el *maxtlatl* y con el cuerpo pintado de negro.

La peregrinación se significa por el camino con huellas que llegan el lugar citado; esto indica que la tribu fue a establecerse ahí, procedente de la región.

Los elementos componentes del nombre jeroglífico del lugar son un firmamento, un árbol de zapote entre dos peñas, una casa en el agua y, en el centro del grupo, dos pescados.

El árbol nos da el nombre *zapotl* y el del lugar Zapotlán. Firmamento es *ilhuicatl,* pero en pueblos adoradores de los astros, daba naturalmente la idea de la suprema divinidad, del dios por excelencia, del *teotl.* Esta y la palabra anterior forman el nombre de lugar Teozapotlan: en el códice, se trata de la peregrinación de los zapotecas.

Pero ¿en dónde estaba este Teozapotlan? Según la pintura, en una barranca entre dos montañas; sin embargo, de ahí bajaron sus habitantes a ubicarlo en otro lugar, al lado de una laguna.

Los dos pescados del grupo jeroglífico nos dan el nombre de la región: Michuacan, de *michi*, pescados. Se trata, pues, de un Teozapotlan de la región de Michuacan. No hay duda de que los mexicanos llamaban así al territorio de los tarascos, por sus muchos lagos y la gran cantidad de peces que había en ellos. No obstante, la región de los lagos se extendía más al norte del actual estado de Michoacán, hasta la gran laguna de Chapala y la de Sayula. El Michuacan antiguo abarcaba todos esos terrenos, y dentro de ellos está el Zapotlán de Jalisco, que aparece en la presente pintura.

Por cortesía de la Biblioteca Nacional de Antropología e Historia

ÍNDICE

Pág.

Introducción..……1
Capítulo I. Antecedentes históricos de los diagramas de árbol.
I.1. Justificación, formulación del problema y objetivos ……..……..……..4
I.2. Marco teórico. Bruner, Heitele, Fischbein, Piaget, Gal, GALT-Matemáticas.……11
I.3. La combinatoria y los diagramas de árbol en los siglos XVI–XIX.……28
Capítulo II. Metodología.……63
Capítulo III. La enseñanza de los diagramas de árbol en la educación básica en México en el periodo 1927–2017.
III.1. La enseñanza de los diagramas de árbol en la educación primaria en el periodo 1959-2017……68
III.2. La enseñanza de los diagramas de árbol en la educación secundaria en el periodo 1927-2017……..……..119
Capítulo IV. La enseñanza de los diagramas de árbol en los Programas de Estudio de Matemáticas 2006, 2011 y 2017. Educación secundaria.
IV.1. Análisis de las orientaciones didácticas vinculadas con los diagramas de árbol..……..……..……..173
IV.2. Los diagramas de árbol en los libros de texto de matemáticas de educación secundaria edición 2021……202
IV.3. Los diagramas de árbol en las evaluaciones del aprendizaje a gran escala. Pruebas PISA, TIMSS, EXCALE, ENLACE y PLANEA.……242
Capítulo V. El tratamiento de los diagramas de árbol en los Programas de Estudio de Matemáticas en la educación primaria y secundaria de Brasil, Canadá, Chile, China, India y Rusia.……...……282
Capítulo VI. Conclusiones..……...…… 318
Referencias ……..328
Anexos……..……344

Introducción

En su libro *The Development of Mathematics*, E. T. Bell (1940) afirma que la matemática moderna tuvo su punto de partida en cinco progresos que ocurrieron en el siglo XVII: la geometría analítica, de Fermat y Descartes; el cálculo diferencial e integral, de Newton y Leibnitz; el análisis combinatorio y la teoría matemática de probabilidad, de Fermat y Pascal; la aritmética superior, de Fermat; la dinámica, de Galileo y de Newton, y la gravitación universal, de Newton. El análisis combinatorio se dedica, entre otras cosas, a las interacciones de las permutaciones y las combinaciones de los elementos de un conjunto que se pueda contar.

La perspectiva del aprendizaje del análisis combinatorio se fundamenta en que los estudiantes deberían estar mejor preparados para tomar decisiones en el mundo real. La enseñanza de la combinatoria y la probabilidad es fundamental para desarrollar intuiciones; por ejemplo, se podría recurrir en forma gradual al diagrama de árbol como un modelo generador para prefigurar intuitivamente el espacio muestral de fenómenos aleatorios.

La probabilidad es uno de los temas que se estudian en secundaria; sin embargo, en el Programa de Matemáticas 2017, el contenido del tema omite la enseñanza de la combinatoria.

El propósito de este trabajo es exponer las razones para estudiar combinatoria en la educación secundaria e identificar los diagramas de árbol como una herramienta para el estudio de esta disciplina. Aunque este trabajo se enfoca en el tratamiento de los diagramas de árbol, el estudio de este recurso se enmarca en una instrucción cuyo objetivo es promover el desarrollo del pensamiento combinatorio.

El lector encontrará este trabajo dividido en seis capítulos. En el I, se presentan los objetivos generales y particulares; se explica algunas de las causas por las que es importante incluir en la currícula de educación básica los temas de combinatoria y diagramas de árbol; se describen secciones de las obras de Pierre de Fermat, Blas Pascal y Christiaan Huygens, relacionadas con el origen de la combinatoria y de los

diagramas de árbol (siglo XVII); se reseña la *Disertación sobre el arte de las combinaciones*, de Gottfied Leibnitz (XVII), y el *Arte de las conjeturas*, de Jacobo Bernoulli (siglo XVII), además de las contribuciones de Archibald Couper y Arthur Cayley a los diagramas de árbol (siglo XIX).

Para finalizar este capítulo, se sintetiza la propuesta epistemológica para el currículo de la enseñanza de los diagramas de árbol de Jerome Bruner y Dietger Heitele, así como las observaciones de Efraím Fischbein, Jean Piaget y Bärbel Inhelder en relación con la evolución de la idea de azar. La metodología que guía este trabajo se expone en el capítulo II.

En el capítulo III, se reseñan los Programas de Estudio de Matemáticas de Educación Primaria, especialmente las unidades relacionadas con la enseñanza de la probabilidad y de los diagramas de árbol durante el periodo 1959-2017; se compilan los Programas de Estudio de Matemáticas de Educación Secundaria del periodo 1927-2017, y se examinan las unidades referentes a probabilidad y diagramas de árbol. Lo anterior con la finalidad de evidenciar el momento en el que surgieron los temas de combinatoria y diagramas de árbol en los programas de estudio de educación primaria y secundaria en México.

El capítulo IV detalla cómo se ha considerado el estudio de los diagramas de árbol en los tres Programas de Estudio (SEP 2006, SEP 2011 y SEP 2017). También se examina el contenido del Programa de Matemáticas 2017 para el tema de probabilidad y se exhiben situaciones de enseñanza relacionadas con la probabilidad y con los diagramas de árbol, propuestas en los textos de educación secundaria proveídos por la Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuito (CONALITEG)[1].

Este capítulo concluye destacando el formato de presentación de los problemas de probabilidad, el cual puede promover o coartar razonamientos probabilísticos específicos, por medio de los reactivos liberados de las siguientes pruebas: el Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes (por sus siglas en inglés,

[1] En el Anexo II se presenta una selección de ejercicios sobre combinatoria y diagramas de árbol incluidos en libros de texto de educación secundaria en la etapa 1977-2013.

PISA), el Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias (por sus siglas en inglés, TIMSS), los Exámenes de la Calidad y el Logro Educativo (EXCALE), la Evaluación Nacional de Logros Académicos en Centros Escolares (ENLACE) y el Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA).

El capítulo V se enfoca en el análisis comparativo de la propuesta curricular de probabilidad, específicamente de los diagramas de árbol en la educación obligatoria en Brasil, Canadá, China, India y Rusia. En el capítulo VI, se exponen las conclusiones y sugerencias que se desprenden de este análisis. En el Anexo I se presenta la serie de ejercicios y problemas que construí acerca de la combinatoria y los diagramas de árbol.

Capítulo I

Es notable que una ciencia que empezó con consideraciones acerca de juegos de azar se haya elevado al nivel de las temáticas más importantes del conocimiento humano.

Pierre Simon Laplace (1749-1827)

Antecedentes históricos de los diagramas de árbol.

I.1. Justificación, formulación del problema y objetivos.

Justificación.

Si ahondamos históricamente en las raíces de los principales resultados de la combinatoria llegamos a preguntas relacionadas con el mundo real, con el comportamiento de la naturaleza. Hacemos uso de ella al resolver problemas de transporte, elaborar horarios, determinar las características genéticas de razas de maíz o las diferentes formas de distribuir una serie de objetos en cajas.

La combinatoria es la matemática de las siguientes preguntas: enumeración (¿cuántos?), existencia (¿es posible?), construcción (¿se puede construir?), optimización (¿cuál es la mejor manera?) y preguntas relacionadas con conjuntos finitos. Aquí hay algunos ejemplos.

a) ¿Cuántos tableros de Sudoku de 9x9 diferentes hay? Este número ha sido calculado exactamente; es 6 670 903 752 021 072 936 960. La combinatoria implica técnicas matemáticas para determinar la respuesta a una pregunta de conteo sin enumerar los objetos que se cuentan.

b) El proceso del descubrimiento de medicamentos es largo y muy costoso, sin embargo, la capacidad demostrada por la química combinatoria en la disminución del tiempo para lanzar un medicamento al mercado explica la importancia que ha adquirido esta disciplina.

c) Su reproductor de CD puede reproducir un disco sin problemas a pesar de los rayones en la superficie del disco. Esta aplicación implica un código de corrección

de errores que transmiten información con un 100% de precisión. Los métodos de construcción para muchos códigos de corrección usan combinatoria.

d) El sistema de navegación GPS de su automóvil encuentra la ruta más rápida del punto A al punto B. Esencialmente, resuelve instancias de un problema de optimización combinatoria llamado el problema de la ruta más corta.

Quienes han estudiado la combinatoria coinciden con que es una de las más útiles creaciones del ser humano. En el pasado reciente, la combinatoria se consideraba un conjunto útil de herramientas y, en el mejor de los casos, un apoyo para otras matemáticas. El advenimiento de las computadoras y la búsqueda de algoritmos eficientes revolucionaron la combinatoria y dieron origen al campo de las matemáticas discretas. Actualmente, es interesante ver cómo conceptos de combinatoria pueden usarse como herramientas para resolver problemas de cálculo, análisis, teoría de números, álgebra lineal y ecuaciones diferenciales.

El análisis combinatorio es el elemento principal de la matemática discreta. Dos de las sociedades profesionales más grandes en los campos de las matemáticas y las ciencias de la computación: la Asociación Matemática de América (MAA) y la Asociación para la Maquinaria Informática (ACM) recomiendan que los estudiantes tomen cursos que incluyan matemáticas discretas y combinatoria.

Por su parte, es relevante mencionar al Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM) en cuyo documento *Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares* (2002) se menciona que la combinatoria puede desarrollarse sistemáticamente desde el nivel preescolar hasta el nivel 12. En particular, en el Estándar de Contenido *Análisis de datos y probabilidad* para los niveles de 6-8 y en el objetivo *Comprender y aplicar conceptos básicos de probabilidad*, se indica el uso de los diagramas de árbol.

En los estudios internacionales comparativos y periódicos de evaluaciones de los aprendizajes de los estudiantes, entre ellos el Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes (PISA por sus siglas en inglés), hay reactivos en los cuales pueden aplicarse contenidos combinatorios. La media de aciertos obtenida por

México en la prueba PISA 2022 en la asignatura de matemáticas se ubicó debajo de la media de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OECD por sus siglas en inglés).

La enseñanza de la combinatoria es propuesta en los currículos de educación básica en la mayoría de los países, porque se reconoce que los esquemas cognitivos combinatorios son un componente principal del pensamiento formal, por lo que es importante ir construyendo gradualmente estos esquemas desde los primeros niveles de enseñanza. Los problemas combinatorios forman un recurso para que los alumnos realicen actividades como modelación, representación, formulación, abstracción, validación, generalización, entre otras, y para dar sentido a otras herramientas conceptuales básicas en matemáticas.

Las operaciones combinatorias básicas brindan una comprensión de la estructura de los experimentos aleatorios y del enlace con experimentos sucesivos dentro de un complejo mayor, en particular en sus formas de representación icónicas como los diagramas de árbol. Sin embargo, los diagramas de árbol han sido utilizados en la resolución de problemas de conteo de manera rutinaria, estereotipada. Los enfoques pedagógicos propuestos no han propiciado que los alumnos empleen los diagramas de árbol para interpretar información matemática y tampoco los ha inducido a emplear este recurso en la resolución de problemas de otras asignaturas. A continuación, se muestra un ejemplo.

La interpretación de los diagramas de árbol no se consolida como lo demuestran las respuestas de los estudiantes de tercer grado de secundaria en escuelas públicas de las Alcaldías Benito Juárez y Gustavo A. Madero en la Ciudad de México en la prueba Planea 2017. En seguida, se exhiben cuatro ejemplos:

Aspecto Evaluado Manejo de la información								
Reactivo	Alcaldía Benito Juárez Escuela				Alcaldía Gustavo A. Madero Escuela			
48	1	2	3	4	1	2	3	4
	76%	80%	70%	40%	32%	30%	22%	31%

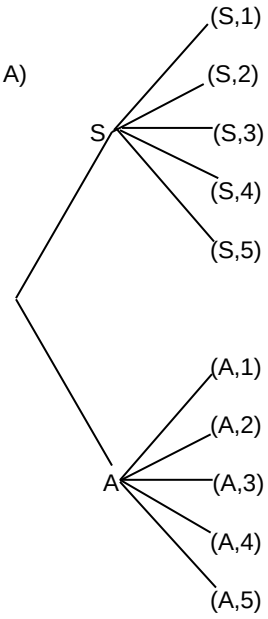
048 ← Número de reactivo relacionado con los diagramas de árbol

76% ← Porcentaje de alumnos de la escuela que contestó correctamente

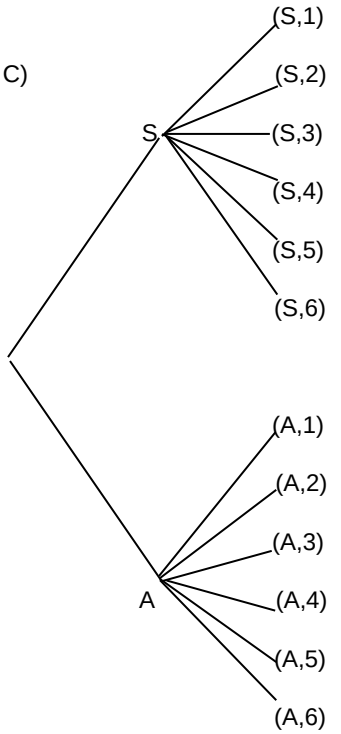
Reactivo 48.

Se tiene una moneda con las caras sol (S) y águila (A) y un dado de 6 caras numeradas del 1 al 6, ¿cuál de los siguientes diagramas representa las diferentes maneras como pueden caer los dos objetos al ser lanzados al aire?

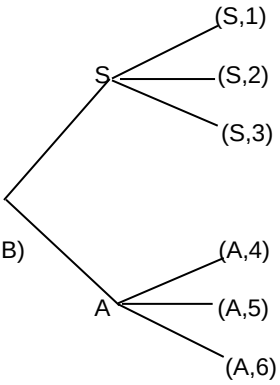
○ A)



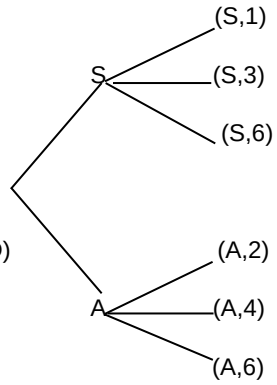
○ C)



○ B)



○ D)



Este reactivo se ubica en un nivel de desempeño elemental porque para responder el estudiante solo debe extraer información de un modelo de representación sencillo. Se espera que el porcentaje de alumnos que conteste correctamente sea superior al 80% en todos los casos. Esta problemática, requiere no sólo investigarla y documentarla, sino establecer una propuesta adecuada de enseñanza de los diagramas de árbol y la combinatoria en las escuelas de nivel básico.

Formulación del problema.

El documento *Aprendizajes clave para la educación integral. Matemáticas. Educación secundaria. Plan y programas de estudio, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación*, en la sección *Campo de Formación Académica Pensamiento Matemático. Matemáticas 2017*, no menciona explícitamente ningún contenido específico relacionado con la combinatoria.

En el libro *Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro. Secundaria. Matemáticas*, en el fragmento *Estándares de Matemáticas*, se establece en el eje temático Manejo de la información que el alumno “Calcula la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes. Lee y representa información en diferentes tipos de gráficas; calcula y explica el significado del rango y la desviación media” (SEP, 2011b, p. 18).

Si uno de los propósitos es que los alumnos aprendan a calcular probabilidades en el sentido laplaciano, habrá que considerar el número de casos totales, lo que necesita de técnicas de conteo. Entonces se admite que el razonamiento combinatorio y por lo tanto los diagramas de árbol son una herramienta útil en el conjunto de esquemas de representación de los estudiantes, pues el proceso de razonamiento debe implicar algo más que “fórmulas”.

Los diagramas de árbol son representaciones que ayudan a introducir la idea de experimento aleatorio, a comprender las situaciones de enumeración y a encontrar con facilidad la regla del producto en los problemas de probabilidad condicional. Los árboles corresponden a un tipo de configuración particularmente simple y económica;

son un componente de los contenidos de la Teoría de Grafos. Las ideas esenciales de esta Teoría son accesibles y no requieren de conocimientos previos complicados, ya que se emplean desde el jardín de niños hasta la universidad.

Si en México el tema de combinatoria ha sido eliminado del programa, entonces ¿Qué recursos se ofrecen a los estudiantes para resolver problemas de probabilidad? ¿Qué repercusiones tiene en la enseñanza de los temas de probabilidad excluir la enseñanza de los diagramas de árbol? ¿Cómo se presenta el concepto del diagrama de árbol en los libros de texto? ¿Cómo se expone el tema diagramas de árbol en el currículum de otros países? ¿El enfoque pedagógico es el pertinente?

El tema de combinatoria es considerado difícil por los profesores. En un estudio sobre probabilidad, Salinas (2007) encontró que, en el Estado de Chiapas, los problemas de un grupo de profesores examinados se relacionaban esencialmente con la combinatoria. Por su parte, Antequera y Espinel (2013) investigaron sobre el uso de los diagramas de árbol como apoyo visual para interpretar y predecir datos, observando las estrategias que utilizaron futuros profesores de educación primaria y alumnos de educación secundaria. Los resultados mostraron que en los dos grupos la media de las puntuaciones obtenidas es casi la misma apenas superada por los alumnos de secundaria.

Por lo anterior, en el modelo educativo 2017, se diluyen los elementos pedagógicos centrales de una propuesta pedagógica estrechamente relacionada con la didáctica. Es necesario que se precisen algunos de los elementos centrales porque propone un tránsito que no es de aprendizaje, pues en realidad es un tránsito didáctico. Se debe discutir la perspectiva pedagógica y didáctica. A continuación, expongo los objetivos generales y los objetivos particulares que orientan esta investigación.

Objetivos Generales

1. Exponer la importancia de conocer algunos conceptos elementales de la combinatoria, entre ellos los diagramas de árbol.

2. Examinar el tratamiento de la enseñanza de los diagramas de árbol en educación básica especialmente en el plan y programas de estudio 2017 de educación secundaria en México y comparar esta propuesta con su equivalente en los programas vigentes en otros países.

3. Estudiar ejemplos, ejercicios o problemas donde se aplica un diagrama de árbol en su solución en una muestra de libros de matemáticas empleados en los currículums recientes en la educación básica en México, Brasil, Canadá, Chile, China, India y Rusia.

4. Crear una unidad temática en torno a los diagramas de árbol para educación secundaria.

Objetivos Particulares

1. Mostrar el valor de la combinatoria y de los diagramas de árbol en la literatura de didáctica de las matemáticas.

2. Indagar acerca del tratamiento de la enseñanza de los diagramas de árbol en los planes y programas de estudio de educación básica en particular en los programas 2006, 2011 y 2017 para la educación secundaria en México. Investigar en los currículums de matemáticas de los países elegidos el tema de diagramas de árbol.

3. Comparar el tratamiento de los diagramas de árbol en los libros de texto autorizados por la Secretaría de Educación Pública para educación secundaria y también revisar el tratamiento de los diagramas de árbol en los libros de texto empleados en los países elegidos.

4. Elaborar una propuesta de enseñanza de los diagramas de árbol para educación secundaria.

I.2 Marco teórico. Bruner, Heitele, Fischbein, Piaget, Gal, GALT-Matemáticas

En los juegos de azar se ha querido encontrar el principio de las reflexiones probabilísticas; sin embargo, estos juegos son elementos culturales que podemos encontrar en la mayoría de las sociedades, además de que sus orígenes son muy remotos. ¿Por qué no se plantearon los problemas matemáticos en torno a estos juegos sino hasta la segunda mitad del siglo XVII en Europa? Algo tiene que decirse con respecto a por qué estas ideas tan importantes surgieron en una fecha aparentemente tan exacta y de manera tan tardía.

Algunos autores, como Ian Hacking (1995), han descartado el probabilismo moral como parte o componente de la génesis de la probabilidad. La reflexión de Hacking sobre el surgimiento de las primeras ideas de probabilidad se desarrolla en función del concepto de evidencia interna de la naturaleza. La evidencia interna consiste en inferir una cosa de otra. Según este autor, faltaba un tipo de pensamiento que no se había desarrollado: la evidencia inductiva. Otros como Schneider y Shafer afirman que solo se podría desarrollar la moderna teoría de probabilidad cuando se pusieran en relación los conceptos y análisis utilizados por las doctrinas filosóficas y teológicas que tratan sobre la probabilidad de opiniones y el contenido de lo que Pascal llamó “geometría del azar”.

Por su parte, Mayer (2015) trata de probar que la discusión teológica fue clave para la comprensión y para los primeros desarrollos de la probabilidad, e insiste en que es necesario agregar a la discusión la importancia, para Europa, del descubrimiento de América y de las misiones en Oriente que introdujeron la otredad (durante el siglo XVII, la otredad cuestionaba las bases mismas de la cultura occidental) y el problema de la incertidumbre moral. Esta autora plantea que antes de llegar a la probabilidad aleatoria, se inició la probabilidad epistémica. Al parecer, cuando Mayer afirma que “en un primer momento podría parecer aberrante buscar los orígenes de la probabilidad en la teología, pero parece que la telaraña de conocimientos así se fue construyendo” comete un error, pues excluye el desarrollo matemático alcanzado en esa época.

Considérese que los autores que escribieron sobre probabilidad alrededor de 1660 lo hicieron tanto sobre la probabilidad aleatoria como epistémica. Como ya ha sido expuesto, Christiaan Huygens escribió sobre problemas aleatorios y Gottfried Leibniz pensó en problemas epistémicos al aplicar la probabilidad a problemas legales; apuntó que la probabilidad está en función de lo que sabemos. A la muerte de Bernoulli, la concepción amplia de la probabilidad que incluía no solo la teoría de los juegos de azar, sino también la probabilidad epistemológica basada en los argumentos desapareció prácticamente, reduciéndose a la probabilidad aleatoria.

El análisis de los fragmentos de las obras de destacados matemáticos de los siglos XVII y XVIII conduce a la idea de que los objetos y conceptos complejos surgen de las combinaciones de cosas más básicas, por lo que las preguntas matemáticas aparecen naturalmente en su esquema de descubrimiento.

Una vez que la probabilidad se convirtió en una rama aceptada de aprendizaje, la combinatoria dejó de ser un tipo de subcultura matemática; si bien es cierto que su desarrollo no fue paralelo al de disciplinas como la aritmética, el álgebra o la geometría, o que a menudo se le asoció con aspectos inusuales o no convencionales de conocimiento. Sin embargo, la combinatoria ha encontrado una gran variedad de aplicaciones que la han convertido en una rama identificable de las matemáticas con sus definiciones y teoremas propios.

El trabajo de J. S. Bruner, *The process of education* (1960) ha influenciado fuertemente el desarrollo del currículum, en particular, en matemáticas. Bruner progresó en las siguientes tesis:

1. El principio decisivo de la instrucción en materia de estudio es la transmisión de las ideas fundamentales.

2. “La hipótesis general que acaba de presentarse tiene sus premisas en el juicio ponderado de que cualquier idea puede representarse honrada y útilmente en las formas de pensamiento del niño en edad escolar, y que esas primeras representaciones pueden hacerse más fácilmente potentes y precisas en virtud del primer aprendizaje” (1960, p. 33) implica que las ideas fundamentales son necesarias

como un hilo conductor desde el jardín de niños hasta la universidad, con el objetivo de garantizar una cierta continuidad.

3. Las ideas y los conceptos fundamentales serán tratados a diferentes niveles cognitivos y lingüísticos a través de la espiral del currículum[2].

4. La transición hacia un mayor nivel cognoscitivo es facilitada si la materia de estudio fue preparada mediante una representación apropiada en etapas cognitivas anteriores. En particular, la comprensión intuitiva de relaciones concretas debe ser cultivada en la escuela primaria en la medida en que el niño no sea capaz de aprehenderlas en una forma analítica más elaborada: el principio de prefiguración.

Bruner (1960) aportó la hipótesis de que una estructura puede ser concretizada en cada uno de tres modos de representación (enactiva, icónica y simbólica), sin cambiar las características esenciales de la estructura, y que usando métodos adecuados de representación es posible, no sólo preparar el próximo estadio de desarrollo, sino acelerar el desarrollo hacia el nuevo estadio. En la concepción bruniana, los modelos explicativos intuitivos tienen dos funciones:

a) Como modelos rudimentarios en una etapa temprana presentan un valor explicativo autónomo y le permiten al niño comprender su contexto por sus propios medios, mucho antes de que entienda la complejidad lingüística y la sofisticación de los modelos matemáticos subyacentes en su forma analítica.
b) Establecen el conocimiento analítico en una manera en la que el maestro de un nivel más alto pueda presuponer un dominio intuitivo favorable cuando utilice operaciones combinatorias.

Los modelos intuitivos son usualmente utilizados para la enseñanza; por ejemplo, cuando las operaciones combinatorias son visualizadas por los diagramas de árbol. A Dietger Heitele, la contribución de Bruner le pareció de particular interés para

[3] Bruner señala la importancia del desarrollo curricular con una directriz de instrucción basada en las ideas fundamentales, estas ideas deberán articular los programas desde el nivel básico hasta el superior a lo largo del currículo en espiral que permitirá que el acercamiento a los temas sea gradual y circular, reduciendo los saltos entre un conocimiento intuitivo y uno formal.

la enseñanza de la estocástica[3]; encontró un primer marco relacional por sus posturas con respecto a la exposición de Bruner. Así, por ideas fundamentales entiende:

> Aquellas ideas que proveen al individuo en cada nivel de su desarrollo con modelos explicativos, los cuales son eficientes en la medida de lo posible pero que difieren a través de los diferentes niveles cognoscitivos, aunque no de manera estructural, sino sólo por su forma lingüística y en sus niveles de elaboración (1975, p.188).

Heitele trata de enfocarse en la estocástica para encontrar sus ideas fundamentales respecto a lo siguiente:

1. Considera como "el objetivo más importante de la instrucción en estocástica que el alumno pueda tratar de manera más segura las pretensiones científicas de afirmaciones estadísticas en la vida cotidiana".

2. Considera que "la didáctica matemática moderna ya no cultiva una perspectiva piagetiana en el desarrollo cognitivo, el valor de la investigación en la psicología del desarrollo no ha disminuido. Es una plataforma a partir de la cual uno puede aventurarse hacia la enseñanza".

3. Asegura que "hay tanto ideas fundamentales, así como errores fundamentales, y ambos son sus contrapartes mutuas. Dichos errores abarcan siglos, épocas y estratos culturales y pueden conformar los criterios de lo que sea realmente considerado como fundamental" (1975, pp.190-191).

4. Usa la hipótesis de trabajo en la que las ideas que cimentan al progreso histórico de la estocástica son también relevantes para los enfoques didácticos.

La lista resultante se asemeja a un modelo para construir currículos relacionados con la estocástica. En opinión de Heitele, la relación entre el modelo y la realidad es una de las ideas básicas de las matemáticas en general y de la estocástica en particular. A juicio de Heitele, la primera idea fundamental de la estocástica (normar

[3] Estocástica: 1) Perteneciente o relativo al azar. 2) Teoría estadística de los procesos cuya evolución en el tiempo es aleatoria tal como la secuencia de las tiradas de un dado.

las expresiones de nuestra creencia) consiste en que nuestras creencias intuitivas, como las expresadas en el lenguaje cotidiano mediante formulaciones como “yo creo que…”, “es más bien cierto que…”, etc., son normadas de una manera en la cual los eventos imposibles obtienen la probabilidad de 0, y los otros, de plena certidumbre, la probabilidad de 1, mientras que la relación de “más probable que” es traducida como la relación de orden entre los números reales.

La postura hegemónica de la racionalidad implica que sobre los experimentos aleatorios en la lección no se pregunte ¿qué es lo que ocurrirá?, sino ¿qué se espera que ocurra? o ¿qué esperas tú que ocurra? No menos fundamental, en opinión de Heitele, es la idea de asignar un espacio muestral de resultados observables a experimentos aleatorios y a un conjunto de espacio-σ al espacio de eventos observables. Los diagramas de árbol, que son indudablemente una herramienta importante, pueden ser aprendidos como espacios muestrales estructurados en una representación icónica.

Es una característica general de las matemáticas elaborar modelos más complejos a partir de unos más simples o de reducir aquellos complejos a otros sencillos; estos procedimientos se aplican también a la estocástica. Sin embargo, la postura de algunos maestros es enseñar de una manera en la que tratan a cada problema como si le correspondiera una respuesta única y bien definida.

La idea de independencia es fundamental, a pesar de que matemáticamente se pueda reducir hacia una probabilidad condicional. Es una idea fundamental considerar los experimentos aleatorios sin relación causal física como estocásticamente independientes. Si la equidistribución no es evidente desde el inicio, esta puede ser construida redefiniendo el espacio muestral y descubriendo sus simetrías. Así, la conexión entre los experimentos aleatorios multiniveles y las permutaciones se visualiza en el diagrama de árbol[4].

[4] Heitele afirma que el vínculo entre la combinatoria y los experimentos aleatorios se aclara con un diagrama de árbol.

Heitele afirma que el diagrama de árbol es una representación icónica de importancia fundamental porque visualiza la estructura multinivel del experimento, así como los posibles resultados, permitiendo trabajar con otras operaciones combinatorias. Las operaciones combinatorias básicas proporcionan una profunda comprensión (en particular en su forma icónica-interpretativa) de la estructura interior de experimentos aleatorios y del encadenamiento de experimentos sucesivos dentro de un complejo mayor.

El aporte de la combinatoria es la clasificación de los experimentos aleatorios complejos de acuerdo con su composición a partir de unos más simples dentro de cierta tipología estándar, y, por este medio, proporciona al matemático modelos estándar para análisis numéricos. Las ideas secundarias más fundamentales conducen hacia estos modelos estándar de permutaciones, variaciones y combinaciones.

La idea de "conteo combinatorio" es necesaria para la adquisición de conceptos numéricos aplicables diversamente, aunque posiblemente no encaje muy bien con la imagen de las matemáticas de escuela primaria, donde se enfatiza el aspecto cardinal. Para niños pequeños, todas las variables estocásticas son, en principio, equidistribuidas. Esto exige preguntarse si las variables estocásticas deben ser aproximadas a través del caso especial de la equidistribución, o, en su lugar, mediante las distribuciones generales de acuerdo con el principio del extremo profundo propuesto por Dienes[5].

Las oportunidades didácticas de las experiencias empíricas en el caso de la ley de los grandes números se encuentran más limitadas de lo que los libros de texto nos harían creer. Respecto a las secuencias aleatorias, una oportunidad para introducir dichas series es a través de juegos.

[5] Dienes propone cuatro principios del aprendizaje matemático: 1) el de construcción (que aboga por el uso de materiales físicos manipulables), 2) el de concretización múltiple (que estipula la abstracción matemática en diversos contextos con algún denominador común), 3) el dinámico (que propone que las transformaciones en un modelo corresponden a otro isomórfico) y 4) de variabilidad de percepción (que recuerda uso de detalles que distingan cada ejemplo).

La lista de Heitele de ideas fundamentales es una muestra de modelos estocásticos, prescripciones y hechos. Se pregunta: ¿es representativa?; se responde: depende del punto de vista.

Su punto de partida eran las preguntas ¿cuáles situaciones estocásticas cumplirá preponderantemente el individuo?, y ¿por medio de cuál modelo pueden ser cubiertas? Este autor afirma: "La utilidad de dicho modelo solamente puede ser demostrada aplicándolo en todos los niveles de enseñanza. El mayor reto de la didáctica de la probabilidad … es … integrar actividades estocásticas tan pronto como sea posible con actividades de aritmética e incluso geométricas, y en todos los casos, respetar y desarrollar relaciones significativas con la realidad, con el mundo del alumno. Para ello, se necesitan maestros que entiendan lo que es verdaderamente fundamental en estocástica" (1975, p. 203)[6].

En su libro *El origen de la idea de azar en los niños*, Inhelder y Piaget (1955) consideran la capacidad combinatoria como un constituyente fundamental del razonamiento formal, puesto que es una condición previa de elaboración de la lógica proposicional de los adolescentes, la cual explica los recursos combinatorios de su pensamiento. Piaget llega a la conclusión de que la formación de las ideas de azar y probabilidad depende, de manera muy estricta, de la evolución de las operaciones combinatorias en sí mismas. Considerando las reacciones de los niños en función de su edad, se ha encontrado la existencia de tres etapas sucesivas: esta es la correlación directa entre la formación de las nociones de azar y probabilidad, y la formación de las diferentes operaciones[7].

Según estos autores, durante la primera de tres etapas (antes de los siete u ocho años), el niño no distingue lo posible de lo necesario. Su pensamiento oscila entre lo predecible y lo imprevisto, pero nada para él es predecible con certeza, o absolutamente imprevisto, es decir, fortuito. Sus anticipaciones no se consideran como

[6] De acuerdo con Heitele lo fundamental de una idea radica en la medida que ésta proporciona al sujeto un modelo explicativo que lo auxilie en el tránsito de un nivel de comprensión a otro y que sea identificable en cualquier etapa de la instrucción.
[7] Para Inhelder y Piaget el descubrimiento del azar es progresivo; para ello se sigue un camino reversible en relación con las operaciones lógicas y aritméticas.

juicios de probabilidad. A esta edad no hay azar ni probabilidad, porque falta el sistema de referencia basado en operaciones deductivas.

En el curso de esta etapa (hasta aproximadamente siete años como mediana), el niño llega solo a un descubrimiento empírico de las combinaciones, sin sistema; en otras palabras, no procede por el uso de un plan que, incluso si es inadecuado, daría las primeras combinaciones. El niño no sospecha de la verdadera naturaleza de la mezcla aleatoria e intenta constantemente encontrar en el desorden, que él considera solo aparente, un orden oculto de algún tipo, basado en las propiedades comunes de los elementos, en sus arreglos antes de que la mezcla tenga lugar.

Las reacciones de los sujetos se basan también en una relación de naturaleza probabilística: la compensación. Si, por ejemplo, tenemos dos eventos A y B, y A aparece con más frecuencia, el sujeto apostará a B porque se ha omitido hasta entonces. Esta es una noción intuitiva explicable por el carácter preoperatorio de esta etapa, e incluye en su estado indiferenciado ciertas relaciones subjetivas o egocéntricas unidas con ciertas observaciones objetivas. Esta compensación es la manifestación de un orden de cosas anterior a la idea de azar, y no una composición probabilística.

Dado un conjunto B, formado por un solo elemento $\{a\}$, y dos elementos $\{b, c\}$, ocurre frecuentemente que el niño juzga que será más seguro extraer a, si es sorteado un solo elemento, porque el sorteo es para un solo elemento y $\{a\}$ es el elemento único en la mezcla. Tal comportamiento se explica solo por el hecho de no establecer una relación entre las partes y el todo. Porque el sujeto no logra hacer la adición inclusiva $\{a\} \cup \{b, c\} = B$ y que en tal caso la eventualidad de obtener $\{b, c\}$ es mayor porque la parte $\{b, c\}$ está representada por dos elementos. El niño considera la parte $\{b, c\}$ como dada independientemente, y elige sin tener en cuenta $\{b, c\}$ o todo el conjunto B.

Si la ausencia de operaciones explica la falta de comprensión del azar como todo un grupo de eventos irreversibles e incomprensibles, la ausencia de uniones

operativas explica que las predicciones del niño aún no presentan ninguna estructura probabilística que pueda relacionar la parte (casos favorables) con el todo (casos posibles). En el curso de la etapa II, aparece la búsqueda de un sistema de asociaciones, pero el niño todavía no logra descubrir un sistema completo. La razón de esto es que el niño vacila entre yuxtaposición (AB, CD, o AB, BC, CD) y simetría porque no puede sintetizarlos en un solo método de intersecciones directas por el cual cada término será asociado sucesivamente con todos los demás (AB, AC, AD, … y BC, BD, … etc.).

Las ordenaciones son vistas por Piaget como la síntesis de las operaciones de combinación y permutación. Por ejemplo, las ordenaciones[8] de dos objetos A y B tomados dos a dos son AA, AB, BA, BB, e intervienen simultáneamente las combinaciones AA, AB, BB y las permutaciones AB, BA.

Si concebimos la intuición como una representación de acciones interiorizadas, la operación se desplaza desde la intuición tan pronto como las relaciones en juego estén suficientemente determinadas para que sea posible invertirlas. La idea de azar se impone cuando las condiciones presentes permanecen indeterminadas, que puede ser desde dos puntos de vista distintos: por comparación con las operaciones espacio temporales (posibilidad física) o por comparación con operaciones lógico- aritméticas (sorteo a ciegas o posibilidad lógica aritmética). El niño quien se ha vuelto capaz de deducir tiene en cuenta la indeterminación, y este descubrimiento es la fuente de la idea de azar. Para él, los movimientos indeterminados son concebidos como incomparables e irreversibles.

Consideremos el mismo ejemplo de la etapa anterior: un conjunto B formado por un elemento $\{a\}$ y dos elementos $\{b, c\}$. Mientras que el niño de la etapa anterior no era capaz de incluir $\{a\}$ y $\{b, c\}$ en una totalidad permanente B, el sujeto de este nivel sabe muy bien como unir $\{a\}$ y $\{b, c\}$ en la forma $\{a\} \cup \{b, c\}$ = B. Se deduce

[8] En algunos textos se emplea la palabra variación como sinónimo de ordenación. Ordenaciones de n elementos tomados de m en m quiere decir expresiones formadas cada una con el mismo número m de elementos tomados entre los del conjunto n de modo que se distinguen una de otra en alguno de los elementos o en el orden de ellos.

que para pensar en $\{a\}$ o $\{b, c\}$ él encuentra que está obligado (y es aquí donde reside la novedad del pensamiento operativo a diferencia del pensamiento intuitivo) a proceder por operaciones inversas: $\{a\}$ = B – $\{b, c\}$ y $\{b, c\}$ = B – $\{a\}$.

El descubrimiento de la indeterminación es lo que caracteriza el azar e implica la disociación de dos modalidades o planos de la realidad (lo posible y lo necesario), que en un nivel intuitivo permanecen indiferenciados en la realidad o en el ser. Con el azar se presenta la pregunta de describir el espacio muestral, es decir, todas las posibilidades, de modo que, por una parte, la distribución del número total de casos se vuelve predecible y, por otra parte, cada caso aislado adquiere una probabilidad expresada como una fracción del total. Para llegar a esta etapa, se deben cumplir dos condiciones.

En primer lugar, el sujeto debe construir las operaciones combinatorias (formar todas las posibles asociaciones); en segundo, debe entender las proporciones; en otras palabras, debe lograr ver las relaciones de dos sistemas conectados a la vez. En esta etapa se efectuará una nueva síntesis entre las operaciones y el azar, y esta síntesis caracterizará la noción de probabilidad de una manera distinta del simple reconocimiento de lo fortuito y lo indeterminable. La característica de esta segunda etapa de evolución es el descubrimiento del azar y la diferenciación de lo indeterminado y lo determinado operativamente.

Esta etapa generalmente comienza con una fase escéptica en la que el niño se limita a observar la imprevisibilidad de los casos aislados como la única fuente de probabilidad sin poder considerar todos los casos posibles. A continuación, logra en algunos casos ver la totalidad de los casos posibles, pero solo aquellos relacionados con los que conciernen a composiciones aditivas, a diferencia de las composiciones combinatorias.

Piaget define lo formal como la capacidad de razonar sobre varios sistemas al mismo tiempo; esta capacidad es necesaria también para las operaciones combinatorias y las proporciones. En contraste con las operaciones, el azar se

descubre gradualmente, y es por referencia constante a las estructuras de las operaciones que el azar se entiende y produce un sistema de probabilidades.

En la tercera etapa, los inicios del pensamiento formal permiten el descubrimiento de algunos sistemas combinatorios completos para un pequeño número de elementos. En esta etapa (operaciones formales), el niño llega a combinaciones metódicas y completas. En el curso de dicho periodo, hay una síntesis entre el azar y las operaciones deductivas. La construcción de sistemas operatorios lleva al niño a concebir una mezcla aleatoria como resultado de transformaciones, pero ejecutando sin orden y realizando solo una parte de las posibilidades totales[9].

El problema consiste en entender cómo el sujeto, para asimilar el azar, utilizará las operaciones con el fin de comprender la determinación relativa que constituye la probabilidad. Lo anterior significa que, en lugar de dejar que el azar mantenga su carácter impredecible o incomprensible, la mente lo traduce en la forma de un sistema de operaciones que se encuentran incompletas y se efectúan sin orden.

Dos mecanismos caracterizan al tercer periodo: estructuración de las totalidades que conducen a la ley de los grandes números y la probabilidad de casos aislados en función del todo. Los sujetos de la segunda etapa descubren, tan pronto como anticipan, una probabilidad de manera intuitiva, lo que Piaget ha llamado “la ley de los grandes números pequeños”, pero no son capaces de generalizar más allá de veinte o treinta elementos. La ley de los grandes números marca el punto de equilibrio de la composición probabilística. La ley significa que el límite de la frecuencia relativa es igual a la probabilidad. Cuando el niño entiende la ley de los grandes números, demuestra un dominio tanto de la naturaleza probabilística como de la posible composición combinatoria en la distribución del todo.

La cuestión de la probabilidad aislada permite suponer que para analizar un problema es posible describir un segundo procedimiento analítico si se distinguen los

[9] Lo encontrado por los estudios de Maher y sus colegas indican que, con apropiada instrucción, el pensamiento combinatorio de los estudiantes puede desarrollarse en el periodo de 7 a 8 años.

Existen trabajos donde se constata que es posible trabajar contenidos de topología y teoría de graficas a nivel comprensible para estudiantes de educación básica, garantizando la comprensión de los contenidos por parte de estos (Revista EMA, 2005, Vol.10, No. 2,-Vol.10, No. 3, 440-451)

siguientes tres pasos: (a) una esquematización apropiada para el fenómeno que se estudiará; (b) un análisis de las probabilidades que conducen a una construcción de todas las posibilidades en juego, y (c) una consideración de este conjunto de todas las posibilidades. La referencia a una visualización de todas las posibilidades es necesaria porque no podríamos esquematizar un fenómeno nuevo ni establecer una tabla cualitativa o cuantitativa de las posibilidades de la cual se deriva sin basarnos en un grupo de esquemas previamente dados, más o menos generales, y suponer un sistema de frecuencias.

Efraím Fischbein (1975), en su libro *Las fuentes intuitivas del pensamiento probabilístico en los niños*, afirma que las operaciones combinatorias representan un esquema con un carácter tan general como los esquemas de la proporcionalidad y la correlación que aparecen simultáneamente después de los 12 o 13 años. Sin embargo, Fischbein analiza los resultados obtenidos en las investigaciones de Piaget e Inhelder para la tercera etapa, y llega a las siguientes conclusiones: Los sujetos de la tercera etapa son capaces de descubrir el método de construir las ordenaciones hasta la edad de 13 años, y el de las permutaciones hasta la edad de 14 a 15 años. El desarrollo de la capacidad requerida para las operaciones combinatorias se realiza de forma gradual, pero no es completado en la tercera etapa.

Fischbein duda de la validez de la afirmación de Piaget de que existe un desfase de varios años en la adquisición de las permutaciones en relación con las combinaciones. Asimismo, Fischbein considera que, en el caso de las permutaciones, Piaget incorporó un factor de aprendizaje en el diseño experimental que usó, ya que el aumento gradual en el tamaño del conjunto de elementos sugirió un método particular a los sujetos.

Fischbein entiende las intuiciones como procesos cognitivos que intervienen directamente en las acciones de las personas. Sus características como la globalidad, la inmediatez, la aparente facilidad para ser empleadas en otras circunstancias, su estructura y la autoevidencia las hacen difíciles de cambiar una vez que se adquieren. Asimismo, afirmó que las estructuras matemáticas pueden describirse no solo de forma simbólica, sino también icónica, sin cambiar las características propias de dicha

estructura, y que la práctica de métodos adecuados de representación ayuda y activa a transitar desde un nivel de conocimiento hacia otro nivel superior.

Este autor, clasifica las intuiciones en primarias y secundarias. Las intuiciones primarias son adquisiciones cognitivas que proceden de la experiencia del individuo. Las intuiciones secundarias son adquisiciones que se forman principalmente en la escuela. También clasifica a las intuiciones en afirmatorias y anticipatorias. Las intuiciones afirmatorias comprenden el conocimiento del mundo externo que aceptamos como evidente. Las intuiciones anticipatorias son estructuras que anticipan la solución a un problema antes de llevar a cabo el procedimiento; parecen mezclarse con una serie de conjeturas cuya validez guía cada paso del programa de acción.

La intuición del diagrama de árbol es una intuición primaria y al mismo tiempo, una intuición anticipatoria. Fischbein (1975, 99-116) observó que las actividades interpretativas-icónicas dominan solamente en el plano intuitivo, y las representaciones simbólicas en el plano formal. El papel de las representaciones mediante modelos figurativos, como el diagrama de árbol, en el desarrollo hacia niveles cognitivos superiores es analizado por Fischbein. El diagrama de árbol se presenta como un modelo generativo que sugiere e inculca la generalización iterativa, es decir, la extensión sin límite a cualquier número de elementos, como ocurre con la inducción matemática y la generalización constructiva; en otras palabras, la adaptación a nuevos problemas derivados del primero que es la cualidad del razonamiento recursivo[10].

En 1970, Fischbein y sus colaboradores realizaron dos investigaciones con adolescentes de edades comprendidas entre 10 y 15 años sobre combinatoria. La intención fue estudiar el papel de la instrucción, basada en el uso metódico del diagrama de árbol. En el nivel de las operaciones formales, las técnicas combinatorias no son adquiridas de manera espontánea. El pensamiento combinatorio no siempre se

[11] Fischbein consideró el diagrama de árbol como un recurso productivo y útil en la visualización de la estructura de la solución de los problemas combinatorios y, además, dota de sentido intuitivo a las operaciones combinatorias.

desarrolla lo suficiente sin una preparación específica en este campo[11]. En el nivel de las operaciones concretas, es posible inducir en los niños la asimilación de técnicas combinatorias, además de la constitución de nuevas intuiciones secundarias; en particular, la relacionada con las colecciones de las diferentes ordenaciones y permutaciones es creada multiplicando sucesivamente.

Asimismo analizaron el efecto de la enseñanza individualizada sobre la capacidad combinatoria. En la sesión experimental, la primera fase se dedicó a la formación de las ordenaciones con repetición de dos letras en grupos de tres y en grupos de cuatro. El alumno debía construir el diagrama de árbol e interpretarlo. De secuencia en secuencia, se observó una mejora, lo que confirmó el objetivo de los autores: el aprendizaje por descubrimiento. La regla del producto 2 x 2 x 2 aparecía de forma espontánea en algunos niños después de haber dibujado el primer diagrama de árbol.

Para las permutaciones también emplearon el diagrama de árbol. Casi todos los niños construyeron el diagrama de árbol sin ningún tipo de ayuda; sin embargo, el número de niños que descubre la regla del producto es menor que el de aquellos que la obtienen a partir del diagrama. El mayor porcentaje de éxito se obtuvo con los adolescentes de 14 a 15 años.

Entre las conclusiones de ese trabajo, se muestra que puede enseñarse con éxito un cierto número de procedimientos combinatorios, usando diagramas de árbol como recurso didáctico a los adolescentes de edades entre 10-11, 12-13 y 14-15. Se encontró que niños de 10 años eran capaces de asimilar el uso de diagramas de árbol para resolver problemas de ordenaciones con repetición y permutaciones[12].

En su artículo *La capacidad de resolución combinatoria en niños y adolescentes*, Efraím Fischbein y Avikam Gazit (1988) describen un experimento de enseñanza realizado con niños de 11-12 años y de 13-14 años, quienes recibieron seis lecciones

[12] Según Fischbein el razonamiento combinatorio no se adquiere espontáneamente, sino que se requiere la instrucción específica, con ayuda de material manipulativo y del diagrama de árbol. Para este autor, el diagrama de árbol facilita la generalización constructiva, permitiendo desarrollar el pensamiento recursivo, típico de la combinatoria.
[13] Fischbein sugirió que la enseñanza del razonamiento combinatorio puede iniciar entre los 8 a 10 años.

de 45 minutos cada una, distribuidas en cuatro semanas. Mediante el empleo del diagrama de árbol, el niño debía crear y contar grupos de elementos, y, a partir de él, obtener la regla de los diferentes conceptos combinatorios enseñados que se llevaron a cabo en el siguiente orden: ordenaciones con repetición, permutaciones, ordenaciones y combinaciones.

Los autores eligen las ordenaciones con repetición como el primer concepto que debe enseñarse, debido a que consideran que el diagrama de árbol de las permutaciones incluye un número de restricciones que no tiene el de las ordenaciones con repetición; en éstas, todas las posibilidades vuelven a aparecer y, por consiguiente, su regla puede obtenerse a partir del diagrama mediante una secuencia de multiplicaciones repetidas.

En opinión de dichos autores, una vez introducido el concepto de ordenaciones con repetición, por medio del empleo del diagrama de árbol, es aconsejable continuar con las permutaciones, puesto que el concepto es más fácil de asimilar, ya que solo debe cambiarse el orden de los elementos. El camino para deducir su regla y la relación con el diagrama pueden ser entendidos con mayor facilidad.

En la prueba previa a la instrucción, la estrategia más usual de los sujetos consistió en generar grupos de elementos. No hay un uso espontáneo del diagrama de árbol. Inmediatamente después de terminar la enseñanza, se aplicó una prueba; seis meses después, se aplicó otra. Hubo alumnos que, después de la instrucción, emplearon los diagramas y las fórmulas.

Con respecto a la dificultad de las operaciones combinatorias, los autores manifiestan que, en el periodo intuitivo, previo a la instrucción, los problemas que ofrecen mayor dificultad son las permutaciones y las ordenaciones con repetición. No obstante, las permutaciones llegaron a ser las mejor comprendidas después de que los estudiantes aprendieran un proceso sistemático de solución con el uso del diagrama de árbol. Según estos investigadores, existe una dificultad relativa en los problemas del análisis combinatorio en función de la naturaleza y número de

elementos que deben combinarse: los alumnos presentan dificultades cuando aumenta el número de elementos a combinar.

El texto *Hacia la "alfabetización en probabilidad" para todos los ciudadanos: construyendo bloques y dilemas instruccionales* de Iddo Gal fue consultado porque aborda los conocimientos y actitudes que los estudiantes deben desarrollar para ser considerados alfabetizados en temas de probabilidad en la vida cotidiana. Este autor examina cinco componentes (grandes ideas de la probabilidad, cálculo de probabilidades, lenguaje, contextos y preguntas críticas) que considera esenciales para el conocimiento de la probabilidad. Además, resalta algunas disposiciones necesarias para que los adultos puedan interpretar y participar de manera efectiva en situaciones probabilísticas en la vida real.

Para el análisis de los libros de texto se utiliza la *Guía de Análisis de Lecciones de libros de Texto de Matemáticas (GALT-Matemáticas)*, elaborado por María Burgos, María José Castillo y Juan D. Godino, basada en la Teoría de la Idoneidad Didáctica y su desglose operativo en componentes, subcomponentes e indicadores. La Guía de Análisis es una herramienta que ayuda al profesor a valorar la idoneidad didáctica de una lección y a tomar decisiones sobre cómo utilizarla en el aula para optimizar el aprendizaje.

Por otra parte, para identificar los componentes de las habilidades matemáticas, las tareas se dividen en dos partes: selección del elemento de la asignatura que debe probarse, en este caso la combinatoria, y categorizar los comportamientos asociados a este elemento. Se utilizó como punto de partida la clasificación de comportamientos enumerados en *Taxonomía de los comportamientos educativos*, Manual I, *Dominio Cognitivo*, editado por Benjamín Bloom. Se consideraron siete niveles de comportamiento cognitivo en matemáticas, agrupados en dos categorías básicas bajo-cognitivo y alto-cognitivo.

Los comportamientos bajo-cognitivo se identificaron como conocer, manipular, traducir y aplicar. Los comportamientos de alto nivel cognitivo son analizar, sintetizar y evaluar. Tomando la clasificación de contenido como filas de una matriz y los niveles

de comportamiento cognitivo como columnas, las celdas aproximan a una definición de los componentes de la habilidad matemática. Los dos sistemas de clasificación tal y como fueron especificados en la sección de desarrollo de pruebas se exponen a continuación:

Tabla I.2.1 Nivel de comportamiento cognitivo en matemáticas

Conocer	Conocimiento de la terminología, datos, propiedades, razones, principios, estructura
Manipular	Realizar algoritmos
Traducir	Cambiar de un idioma a otro
Aplicar	Hacer comparaciones
Analizar	Analizar datos Identificar información relevante e irrelevante Observar patrones, isomorfismos
Sintetizar	Especializándose y generalizar Formular problemas Construir una demostración o un problema
Evaluar	Validar respuestas

En un trabajo por realizar, podrían responderse preguntas como las siguientes:

¿Qué estrategias utilizan los estudiantes de educación secundaria para resolver problemas combinatorios? ¿Qué tan eficientes son? ¿Las estrategias involucradas o su eficacia son diferentes para los estudiantes antes y después de la enseñanza que formaliza las operaciones combinatorias? ¿Es posible que los estudiantes de educación secundaria resuelvan problemas combinatorios empleando de manera espontánea los diagramas de árbol?

I.3. La combinatoria y los diagramas de árbol en los siglos XVI - XIX

Los juegos de azar son un elemento universal de la cultura; aparecen en todas las sociedades, puesto que el ser humano ha sido capaz de construir cultura a través de las habilidades lúdicas. Para explorar el origen de los diagramas de árbol, he seguido el estudio de un problema de juego —el "problema de los puntos"— denominado también "de las partidas inacabadas" o "del reparto", que fue abordado por diversos matemáticos de los siglos XVI y XVII.

Un amigo de Leonardo da Vinci (1452-1519), Luca Pacioli (1445-1514), monje franciscano, publicó en 1494 su S*umma de arithmetica*, *geometria, proportioni et proportionalita* (*Lo esencial de aritmética, geometría, relaciones y analogías*) (1494), en la que reflexiona sobre los juegos de azar y propone el problema de los puntos, que radica en repartir equitativamente la apuesta entre jugadores con igual destreza que deciden abandonar la partida antes de que termine, a condición de que, para ganarla, el primero debe conseguir un determinado número de puntos, diferente para cada uno de los jugadores[13].

A lo largo del siglo XVII, dos científicos italianos investigaron las probabilidades[14] en relación con el juego de dados. En 1663, se publicó *Liber de Ludo Aleae (El libro sobre juegos de azar)*, de Girolamo Cardano (1501-1576), quien expone el conjunto de los posibles resultados asociados al lanzamiento de dados (espacio muestral). Él observó que, si todos los elementos de este conjunto son igualmente posibles, entonces la razón entre el número de casos favorables y el número total de casos da un resultado de acuerdo con la experiencia. En dicho libro, se muestran reglas para resolver problemas de dados y recomendaciones de prudencia y honestidad en el juego.

[13] Desde el punto de vista de probabilidad, Luca es interesante por uno de sus ejemplos en la *Summa*: "A y B están jugando un juego justo de *balla*. Acuerdan continuar hasta que uno haya ganado seis rondas. El juego realmente se detiene cuando A ha ganado cinco y B tres. ¿Cómo se deben dividir la apuesta?".

[14] El concepto de probabilidad al que me refiero es el conocido como objetivo, aleatorio o estadístico.

Según Ore (1960), el resultado más avanzado de Cardano es la regla de multiplicación para encontrar las posibilidades a favor y en contra de la repetición de un evento en un número dado de repeticiones de un juego. Cardano entendió, en cierta medida, la ley de los grandes números y formuló la condición fundamental para aplicar la teoría de la probabilidad en la práctica: las observaciones deben ser tomadas esencialmente en las mismas condiciones.

Por su parte, Galileo Galilei (1564-1642), en *Sopra le Scoperte dei Dadi (Sobre los descubrimientos de los dados)*[15], solucionó el siguiente problema: con tres dados, demostrar que el número 10 aparece más frecuentemente que el 9. En los 216 casos posibles, Galileo encontró que 27 son los favorables al número 10, contra 25 favorables al número 9.

Entre el verano y el otoño de 1654, dos matemáticos franceses, Pierre de Fermat (1601-1665) y Blaise Pascal (1623-1662), mantuvieron un intercambio epistolar, donde aportaron soluciones originales, relacionadas con el análisis combinatorio. La solución de Fermat al problema de los puntos (enunciado por Pacioli) está basada en las combinaciones y se extiende a un número de jugadores superior a dos.

Ninguno de los dos usó el término probabilidad y tampoco publicaron sus resultados sobre el cálculo de probabilidades. Ambos utilizaron el principio básico de enumeración de los casos igualmente posibles y entre ellos los casos favorables para cada jugador; tenían una teoría combinatoria a su disposición. Así, asentaron las bases de lo que más tarde se denominó probabilidad combinatoria.

Collette (1998) afirma que Fermat halla, antes de 1636, la expresión que se emplea para encontrar el número de combinaciones de los n elementos de un conjunto A tomados de m en m, la cual se muestra a continuación.

$$C_m^n = \frac{n(n-1)\bullet\bullet\bullet(n-m+1)}{m!}$$

[15] El documento posiblemente fue escrito entre 1613 y 1623.

La afirmación anterior tiene como evidencia la observación escrita en el Tomo III de *Oeuvres* de P. Fermat*,* en *Observations sur Diophante*, donde se lee[16]:

47. – Bachet, Apéndice, II, 27.

Así es como haré la siguiente proposición más general:

[…] 1) Que la progresión aritmética comience en la unidad y la razón.

K – 2 : 1, 1 + (k -2), 1 + 2(k – 2), …, 1 + (n – 1)(k -2), 1 + n(k -2), … , el n ésimo polígono de k ángulos es la suma de los primeros n términos

$$P_n^k = \frac{n}{2}\left(n\,(k-2) - (k-4)\right) = n + \frac{n\,(n-1)\,(k-2)}{2}$$

El siguiente problema fue propuesto por Fermat en una carta de Junio de1656:

A apuesta a B que, dadas 40 cartas de las cuales 10 son de un color, 10 de otro color, 10 de otro y 10 de otro, extraerá 4 a fin de tener una de cada color. ¿Cómo se relacionan las esperanzas de ambos?[17].

En tanto que Pascal concluye diversos trabajos geométricos, su amigo, Antoine Gombaud, señor de Baussay, caballero de Méré, un rico terrateniente muy conocido en los círculos aristocráticos parisinos, le interroga con respecto a dos problemas: el problema de los puntos (enunciado por Pacioli) y el del juego de dados. En su *Traité du triangle arithmétique, avec quelques autres petits traités sur la même matière* (*Tratado del triángulo aritmético, con algunos otros pequeños tratados sobre el mismo asunto*), impreso en 1654, Pascal había estudiado un arreglo de números conocido

[17] En 1621, Claude Gaspar Bachet tradujo del griego al latín *Arithmetica Diophante. A*parece en 1670 la edición de Samuel de Fermat de la traducción de Bachet de *Arithmetica Diophante con observaciones de Pierre de Fermat.* Paul Tannery y Charles Henry publicaron *Oeuvres de Fermat* en el año de 1894. Por otra parte, Bachet expuso en 1612, en su obra *Problèmes plaisants et delectables,* problemas relacionados con combinatoria.

[18] Más tarde, Huygens lo resolverá en su tratado *De Ratiociniis in Aleae Ludo*. Si la esperanza de A es e_n, se sigue $e_o = \frac{(10)(20)(30)(40)}{37\ 38\ 39\ 40} = \frac{1000}{9139}$.

La solución de este problema por el método combinatorio correspondería a $\frac{10^4}{C_4^{40}} = \frac{1000}{9139}$.

La esperanza de A es a la de B como $\frac{1000}{8139}$, de modo que uno puede apostar 8 contra 1 que A no conseguirá ganar la apuesta.

como el Triángulo Aritmético, pero no fue el autor. El Triángulo empieza con la unidad, de manera que, para cada conjunto triangular de los números, la suma de los dos primeros en una diagonal es igual al tercero en la diagonal siguiente.

Hérigone en su *Cours mathématique* (1634) construyó una tabla de números con la idea de calcular los coeficientes de las potencias enteras de un binomio. Sin embargo, el Triángulo Aritmético ya había aparecido impreso más de un siglo antes en la portada de la *Aritmética* de Apiano (1527).

En China, en la cubierta del libro *Ssu Yuan Yü Chien* (Precioso espejo de los cuatro elementos) (1303), Chu Shih Chien describe este Triángulo hasta la octava potencia. Sin pretender ser el inventor, lo llama el *Ku fa chni chhengfang thu* (La tabla del Método Antiguo de los Siete Cuadrados). Un poco antes, Yang Hui en su libro *Hsiang Chieh Chiu Chang Sua Fa* (1261), había descrito una tabla de coeficientes binomiales hasta la sexta potencia. Una vez más, sin pretender la originalidad, explicó que el procedimiento se remonta a Jian Xian (1050) (Martzloff, 1997)[18]. Chia Hsien lo expuso aproximadamente en el año 1100 (Needham, 1959).

Con respecto a los matemáticos hindúes, la primera afirmación que debemos examinar es la de Jean-Claude Martzloff (1997), quien dice que el erudito sánscrito Pingala conocía el Triángulo Aritmético alrededor del año 200 a. C. En el *Chandah-Sütra*, Pingala discutió preguntas sobre métricas poéticas, o las formas de combinar sílabas largas y cortas para producir los ritmos requeridos (expone el método para determinar el número de combinaciones de un número dado de letras tomadas una a la vez, dos a la vez, etc.). La fórmula para el número de combinaciones ya era conocida por los hindúes en el siglo VI d. C. La evidencia de esto viene de la *Brhatsamhita* de Varahamihira.

Este conocimiento fue muchas veces descubierto y redescubierto hasta que se comprendió íntegramente. Pascal infirió del Triángulo, propiedades nuevas y

[18] De acuerdo con Jean-Claude Martzloff, “autores de los siglos XI y XII, como Jia Xian y Liu Yi parecen haber estado al tanto del Triángulo Aritmético. Sin embargo, el conocimiento de este tema es muy impreciso, ya que se basa en información indirecta, incluyendo extractos de obras del siglo XIII como las de Yang Hui o Chu Shih-chieh”.

aplicaciones a la teoría de las combinaciones y a la teoría de probabilidades. Algunas de estas propiedades fueron demostradas por su método de inducción.

En *Usage du Triangle Arithmètique pour les Combinaisons* (*Uso del triángulo aritmético para combinaciones*), Pascal define primero las diferentes combinaciones de k elementos de un conjunto de n elementos, como todos los diferentes conjuntos de k elementos sin tener en cuenta el orden. Pascal no introduce una notación para el número de combinaciones. He aquí dos proposiciones esenciales extraídas del *Tratado del Triángulo Aritmético:*

> *Tratado del Triángulo Aritmético.*
>
> Llamo Triángulo Aritmético a una figura construida como sigue:
>
> Desde cualquier punto, G, dibujo dos líneas perpendiculares entre sí, GV, Gζ, en cada una de las cuales tomo partes iguales contiguas a partir de G, que numero 1, 2, 3, 4, etc., y estos números son los *exponentes* de las secciones de estas líneas.
>
> A continuación, uno los puntos de la primera sección con cada una de las dos líneas, que es la base del triángulo resultante.
>
> De la misma manera, uno los dos puntos de la segunda sección con otra línea, haciendo un segundo triángulo, que es la *base*.

Y de esta manera, uno todos los puntos de la sección con el mismo exponente, y construyo tantos triángulos y bases como exponentes hay.

A través de cada uno de los puntos de la sección y paralelo a los lados dibujo líneas cuyas intersecciones hacen cuadritos que llamo *celda*[19].

En la primera parte del *Tratado*, se exponen 19 proposiciones. Una demostración explícita por inducción de la Duodécima Consecuencia permite hallar cada número a partir del vecino de la misma base; esta demostración termina con una expresión general para obtener los números de cada celda. Con la solución del siguiente problema, concluye la primera parte del *Tratado sobre el Triángulo Aritmético*.

[19] Al número situado en la primera celda (1) Pascal le llamó “número generador”. A la diagonal principal, le llamó “dividente”.

Problema

Dados los exponentes perpendicular y paralelo de una celda, encontrar el número de la celda sin hacer uso del Triángulo Aritmético.

En la segunda parte del *Tratado* se aplica el Triángulo Aritmético a la teoría de las combinaciones. A continuación, se expone un fragmento.

Uso del triángulo aritmético para combinaciones

La palabra combinación se ha utilizado en varios sentidos diferentes, de modo que para evitar ambigüedad estoy obligado a explicar cómo la entiendo.

Cuando de muchas cosas podemos elegir un número, todas las formas de tomar tantas como se nos permita, de las que se ofrecen a nuestra elección, se llaman las “diferentes combinaciones”.

Por ejemplo, si de cuatro cosas expresadas por las cuatro letras (A, B, C, D), se nos permite tomar, digamos dos, a todas las maneras diferentes de tomar dos de las cuatro puestas antes las llamamos “combinaciones”.

Entonces, descubriremos por experiencia que hay seis maneras diferentes de elegir dos entre cuatro porque podemos tomar A y B, o A y C, o A y D, o B y C, o B y D, o C y D. No cuento A y A como una de las maneras de tomar dos porque no son cosas diferentes, son solo una cosa repetida. Tampoco considero A y B, ni B y A como dos formas diferentes porque en ambos sentidos tomamos solo las mismas cosas, pero en un orden diferente, y no me preocupa el orden para poder darme a entender, al menos una vez, por quienes están acostumbrados a considerar las combinaciones, simplemente diciendo que hablo solo de combinaciones hechas sin cambiar el orden.

Además, veremos por experiencia que hay cuatro maneras de tomar tres de cuatro porque podemos tomar ABC o ABD o ACD o BCD.

Finalmente encontraremos que podemos tomar cuatro de cuatro de una sola manera: ABCD.

Pascal determina aplicar el Triángulo Aritmético para obtener la solución del problema de los puntos. Su método está incluido en un anexo del *Tratado* bajo el título “Método para dividir las utilidades entre dos jugadores quienes están jugando varias partidas por medio del triángulo aritmético”. Este apartado se compone de un primer

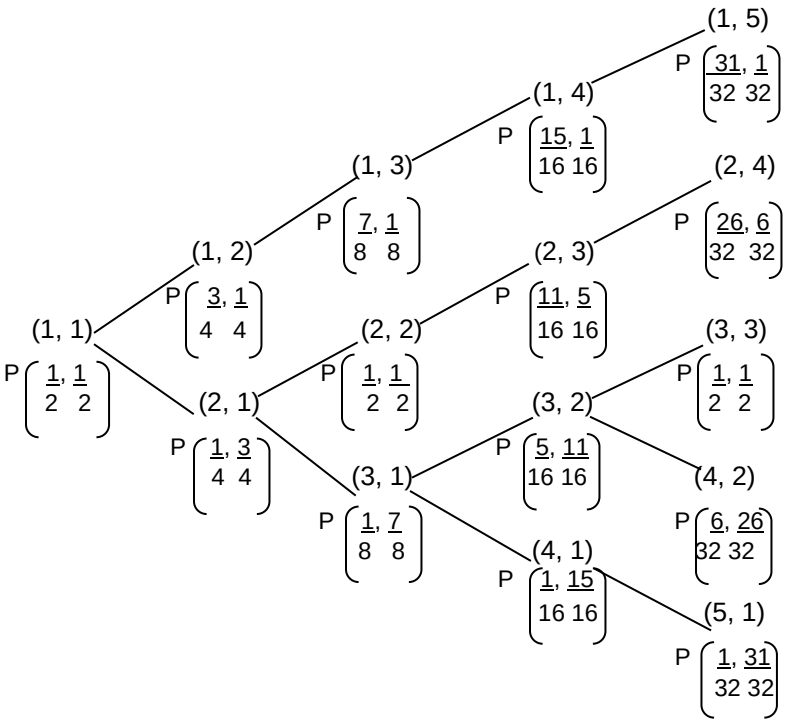
lema, tres problemas, un corolario, un cuarto problema y una conclusión. El primer problema, que Pascal presenta también como proposición, dice lo siguiente:

Problema I, Proposición I

> III. En un juego de dos jugadores, a cada uno de los cuales le falta un cierto número de partidas para terminar el juego (**al primer jugador le falta a partidas y al otro b partidas**)[20]. Encontrar mediante el Triángulo Aritmético el reparto que habría que hacer (si quieren separarse sin jugar), teniendo en cuenta las partidas que le faltan a cada uno.
>
> Tómese en el triángulo, la base en la que haya tantas celdas como partidas les falten a los dos juntos (**tomar la base n = a + b**); a continuación, tómese en esta base tantas celdas seguidas, comenzando por la primera, como partidas le falten al primer jugador (**a**), y tómese la suma de sus números. Quedan tantas celdas como partidas le faltan al otro jugador (**b**). Tómese de nuevo la suma de sus números. Estas sumas son la una a la otra como las ventajas recíprocas de los jugadores, así que si la suma en juego es igual a la suma de los números de todas las celdas de la base, pertenecerá a cada jugador la parte contenida en tantas celdas como las partidas que faltan. Y si están jugando otras apuestas, sus partes serán proporcionales.

En el siguiente diagrama de árbol, se representa la solución que da Pascal.

[20] Las negritas son mías.



Considerando el caso del juego (2,4), en el que al primer jugador le faltan 2 partidas, y al segundo, 4 partidas, la base del triángulo es n = 6, y la suma de los valores de las 4 primeras celdas situadas en la base n = 6 es igual a

$C(6, 2) = \Sigma^{4}_{r = 1}\, f(r, 6 - r + 1) = f(1,6) + f(2,5) + f(3,4) + f(4,3) = 1 + 5 + 10 + 10 = 26$

Sumando los valores de las 2 últimas celdas de esta base, se obtiene:

$C(6, 4) = \Sigma^{6}_{r = 5}\, f(r, 6 - r + 1) = f(5,2) + f(6,1) = 5 + 1 = 6$

La suma de los números de la base n = 6, por

$C(6) = \Sigma^{6}_{r = 1}\, f(r, 6 - r + 1) = f(1,6) + f(2,5) + f(3,4) + f(4,3) + f(5,2) + f(6,1) = 2^5 = 32$

(2,4)

A $\quad \dfrac{C(6,2)}{C(6)} = \dfrac{\Sigma^{4}_{r = 1}\, f(r, 6 - r + 1)}{\Sigma^{6}_{r = 1}\, f(r, 6 - r + 1)} = \dfrac{26}{32} = \dfrac{13}{16}$

B $\quad \dfrac{C(6,4)}{C(6)} = \dfrac{\Sigma^{6}_{r = 5}\, f(r, 6 - r + 1)}{\Sigma^{6}_{r = 1}\, f(r, 6 - r + 1)} = \dfrac{6}{32} = \dfrac{3}{16}$

Pascal se dirigió a Fermat en 1654, recordándole su amistad con su fallecido padre (Étienne Pascal), para plantearle una pregunta. Para entonces, Fermat había guardado años de silencio epistolar que lo mantenía en un profundo aislamiento que la carta de Pascal vino a romper.

CARTA DE PASCAL A FERMAT

Julio 29, 1654

Señor,

[…] Admiro mucho más el método de las partidas que el de los dados; como el señor caballero de Méré, que es quien me ha propuesto estas cuestiones […]

He aquí, aproximadamente, cómo hice para saber el valor de cada una de las partidas cuando dos jugadores juegan, por ejemplo, en tres partidas, y cada uno pone 32 pistole[21] en juego:

Supongamos que el primero gana 2 y el otro 1; juegan ahora una partida cuya suerte es tal que, si el primero la gana, gana todo el dinero que está en juego, a saber, 64 pistole; si el otro la gana, están dos partidas a dos y, en consecuencia, si quieren separarse, es necesario que cada uno retire su apuesta, a saber, 32 pistole cada uno.

Considere ahora, señor que, si el primero gana, le pertenecen 64; si pierde, le pertenecen 32. Así si no quieren arriesgar esta partida y quieren separarse sin jugarla, el primero debe decir "estoy seguro de tener 32 pistole pues la pérdida misma me las da; en cuanto a las otras 32, posiblemente las tendré o posiblemente usted las tendrá, el azar es igual; repartamos pues estas 32 pistole en mitades y deme, además, mis 32 que están aseguradas". Tendrá, por lo tanto, 48 pistole y el otro 16.

Supongamos ahora que el primero ha ganado dos partidas y el otro ninguna, y que comienzan a jugar una partida. La suerte de esta partida es tal que si el primero la gana, saca todo el dinero, 64 pistole; si el otro la gana, helos ahí de regreso en el caso precedente en el que el primero habrá ganado dos partidas y el otro una.

Ahora bien, hemos ya demostrado que, en este caso, a quien ha ganado dos partidas, pertenecen 48 pistole; por lo tanto, si no quieren jugar esta partida dirá: "si yo la gano, ganaré todo, que es 64; si yo la pierdo, me pertenecerán legítimamente 48, por lo tanto, deme las 48 que son seguras, incluso si pierdo, y dividamos las otras 16 a la mitad,

[21] Cualquiera de varias monedas de oro usadas en Europa en los siglos XVII y XVIII

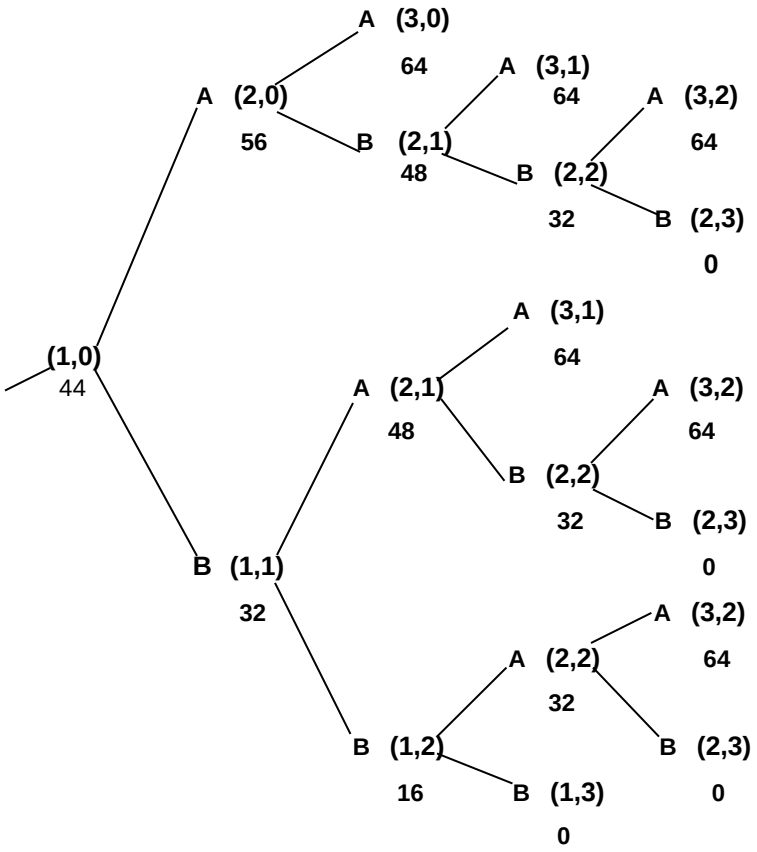
puesto que hay tanto azar en que usted las gane como en que yo lo haga". Así, tendrá 48 y 8, que son 56 pistole.

Supongamos, en fin, que el primero no tiene más que una partida y el otro ninguna. Usted ve, señor que, si comienzan una nueva partida, la suerte es tal que si el primero la gana estará dos partidas a cero y, entonces, por el caso precedente, le pertenecen 56; si la pierde, están uno a uno, por lo tanto, le pertenecen 32 pistole. Debe decir en consecuencia: "si usted no la quiere jugar, deme 32 pistole que me son seguras y repartamos el resto de 56 a la mitad. De 56 quite 32, quedan 24; repartamos pues 24 por mitades, tome 12 y yo 12, que con 32, hacen 44".

Ahora bien, por este medio, usted ve por simples restas que para la primera partida le pertenecen, del dinero del otro, 12 pistole, para la segunda, otras 12 y para la última 8. […] Sea el número de partidas dado, por ejemplo 8. Tómense los 8 primeros números pares y los 8 primeros números impares, a saber: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 y 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15. Dado el número de partidas que se quiera, encontrar el valor de la primera. Multiplíquense los números pares de esta manera: el primero por el segundo, el producto por el tercero, el producto por el cuarto, el producto por el quinto, etc.; multiplique los números impares de la misma manera: el primero por el segundo, el producto por el tercero, etc.

El último producto de los pares es el denominador y el último producto de los impares es el numerador de la fracción que expresa el valor de la primera partida de ocho, es decir, que, si cada uno juega el número de pistole expresado por el producto de los pares, le pertenecerán, del dinero del otro, el número expresado por el producto de los impares.

Una vez dado el argumento para justificar la solución para estos casos, Pascal aplicó un procedimiento inductivo para mostrar su validez en el caso que el primer jugador siga estando a un solo punto de ganar y el segundo esté a dos, tres, cuatro…; luego, para el caso que el primer jugador esté a dos puntos y el segundo a tres, cuatro, cinco…y así indefinidamente para cualquier caso. Algunas de las fases del diagrama a que da lugar este juego se muestran a continuación.



Enseguida, se presenta el problema para dos jugadores por el método de combinaciones donde Pascal describe el método de las combinaciones de Fermat.

CARTA DE PASCAL A FERMAT

Agosto 24, 1654

Señor,

[…] Este es su procedimiento cuando hay dos jugadores:

Si la situación de dos jugadores jugando varias partidas es tal que al primer jugador (**A**) le faltan dos partidas y al segundo jugador tres (**B**), para encontrar el reparto debemos (dice usted) ver en cuántas partidas del juego el jugador tendrá que decidir.

Es fácil reconocer que se jugará en cuatro partidas, de donde usted concluye que debemos ver cuántas combinaciones hay de cuatro partidas entre dos jugadores y ver en cuántas combinaciones ganaría el primer jugador y en cuántas el segundo, y repartir el dinero en esa proporción. […] Para ver cuántas veces se combinan cuatro partidas entre dos jugadores, debemos imaginar que juegan con un dado que tiene dos caras

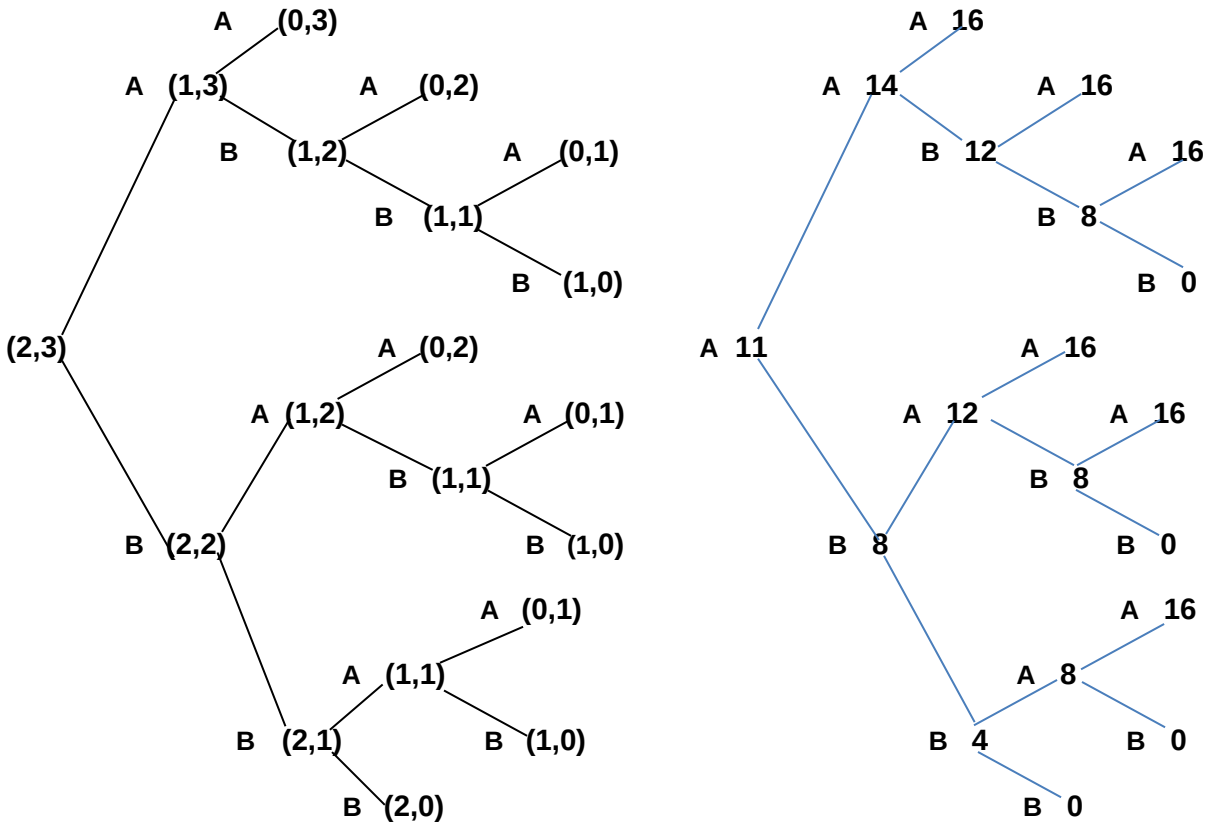
(ya que son solo dos jugadores), como en cabezas y colas, y que lanzan cuatro de estos dados (porque están jugando cuatro partidas); y ahora debemos ver en cuántas maneras diferentes pueden caer estos dados. Esto es fácil de calcular; pueden caer de dieciséis maneras, ya que dieciséis es la segunda potencia de cuatro, esto es el cuadrado. Imaginemos que una de las caras está marcada con *a*, favorable para el primer jugador, y la otra con *b*, favorable para el segundo jugador; por lo tanto, los cuatro dados pueden caer en cualquiera de las dieciséis formas indicadas: *aaaa*,…, *bbbb*.

Y debido a que le faltan dos partidas al primer jugador, todos los lanzamientos con dos *a*'s le dan el juego; por lo tanto, hay 11 para él.

Y porque le faltan tres partidas al segundo jugador, todos los lanzamientos con tres *b*'s pueden darle el juego; por lo tanto, hay 5. Así pues, deben compartir la suma en la proporción de 11 a 5.

Este es su método cuando hay dos jugadores. Con lo cual usted dice que si hay más no será difícil determinar el reparto por el mismo método.

Los siguientes árboles de eventos corresponden al problema de los puntos cuando A necesita dos puntos para ganar y B tres. Una apuesta de 16 está disponible para el ganador. El árbol de la derecha muestra, en sus nodos terminales, las ganancias de A y, en sus nodos intermedios, las ganancias esperadas de A calculadas por el argumento de Pascal. Por lo tanto, tal como está el juego, la apuesta debe dividirse 11 a A y 5 a B.

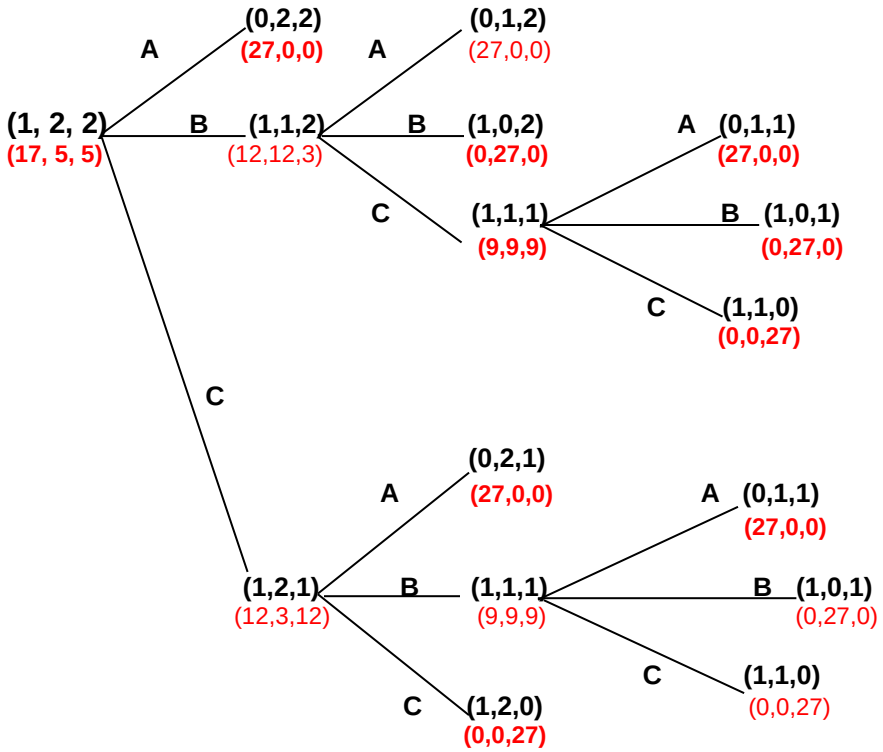


Al final de cada rama, se muestra lo que obtendría el jugador A de terminar el juego en esa circunstancia. En cada partida, se señala con A o B si esta ha sido ganada por uno u otro jugador. Después de esta descripción, Pascal sigue exponiendo en su carta:

> Consideremos ahora a tres jugadores de la misma manera y supongamos que al primer jugador le falta un juego, al segundo y al tercero dos a cada uno. Para determinar el reparto, siguiendo el mismo método de las combinaciones, primero debemos averiguar cuántas partidas decidirán el juego como lo hicimos cuando eran dos jugadores. Será en tres, porque no podían jugar tres partidas sin que haya necesariamente una decisión.
>
> Ahora debemos ver cuántas combinaciones hay de tres partidas entre tres jugadores y cuántas son favorables para el primero, segundo y tercer jugador, respectivamente, y de acuerdo con esta proporción, distribuir el dinero como se hizo anteriormente en la hipótesis de los dos jugadores.

En cuanto a ver cuántas combinaciones hay en todo eso, es fácil: es la tercera potencia de 3, es decir, su cubo, 27. Porque si lanzamos tres dados juntos (ya que hay que jugar tres partidas) cada una de los cuales tiene tres caras (ya que hay tres jugadores), una marcada con una a, favorable al primer jugador, otra con una b para el segundo jugador, y la otra con una c para el tercer jugador, es obvio que estos tres dados lanzados juntos pueden caer de 27 maneras diferentes, a saber:

A continuación, se presenta el diagrama de árbol para este juego, exponiéndose al final de cada rama la ganancia que correspondería al primer jugador. En cada partida, se indica con A, B o C si esta es ganada por el primer jugador, el segundo o el tercero.



[…] Esto se muestra en mi método general, que también determina que en la situación anterior el primer jugador debe tener 17; el segundo y el tercero, 5 cada uno, sin el uso de combinaciones, ya que este método es universal (**empleando la esperanza matemática**) y siempre es posible.

Pascal concluyó que, si al jugador A le faltan *i* rondas para ganar la partida y al jugador B le faltan *j*, la cantidad apostada deberá repartirse de modo que al jugador A le corresponda la parte proporcional dada por el cociente (en notación actual):

$$\frac{\sum_{k=0}^{j-1} \binom{i+j-1}{k}}{\sum_{k=j}^{i+j-1} \binom{i+j-1}{k}}$$

Fermat respondió en la carta del 25 de septiembre de 1654, con la que se restaura el entendimiento entre ambos autores. Para el problema de los puntos con tres jugadores, la solución de Fermat está basada en las combinaciones y se extiende a un número de jugadores superior a dos. La tradición ha sido considerar que la teoría de la probabilidad y, por lo tanto, la combinatoria nacieron con seis cartas intercambiadas entre Pascal y Fermat. Existe también una correspondencia indirecta entre Fermat y Pascal, iniciada a finales de 1654 y que continuó hasta 1656, incitada por la aparición en escena de Christiaan Huygens (1629-1695).

Nacido en La Haya, Huygens gozó de fama internacional como astrónomo y físico. En 1665, visitó París; esta visita hizo posible que conociera a los principales hombres de ciencia franceses, pero no pudo ver a Pascal, quien estaba retirado en el monasterio de Port-Royal, aunque tuvo conocimiento de los problemas en relación con el cálculo de probabilidades que se deliberaban en esos ambientes.

En 1656 Huygens regresó a los Países Bajos y empezó a escribir un tratado de probabilidad que titularía *De ratiociniis in ludo aleae* (*Del razonamiento en los juegos de azar*), publicado en 1657 y considerado el primer tratado de probabilidad de la historia. Esta obra incluye el concepto de esperanza matemática[22], y problemas de cálculo de probabilidad como el de los puntos, el de los dados y el de la ruina del

[22] Huygens y su profesor Frans van Schooten acordaron que con *De ratiociniis in ludo aleae* se completaría los cinco volúmenes de los que constaba *Exercitationes mathematicae libri quinque*, de su maestro, y que la primera edición sería en latín y posteriormente en holandés. A solicitud de Van Schooten, Huygens remitió a su profesor un texto latino de su obra con frases en holandés. En esta obra, Huygens escribió la palabra *expectatio*, que después se tradujo con la palabra esperanza.

jugador, en el que **¡utilizó por primera vez un diagrama de árbol en su demostración!** Es muy posible que haya sido la primera vez en la historia de la probabilidad en que se introdujeron explícitamente los diagramas de árbol para la demostración de un resultado.

La publicación *De ratiociniis in ludo aleae* fortaleció la combinatoria como una herramienta para asir la incertidumbre en los juegos de azar y se distingue como la ciencia apropiada para estudiar los hechos sociales. De un axioma sobre el valor de un juego justo, Huygens obtiene tres teoremas sobre la esperanza. El tratado *De ratiociniis in ludo aleae* está formado por cuatro partes; la cuarta y última está compuesta por cinco problemas, y solo se da solución a tres. Los tres teoremas y once problemas suelen llamarse las catorce proposiciones de Huygens.

En la edición de la Real Sociedad Científica de Holanda de las *Oeuvres complètes (22 denle)* de Christiaan Huygens, Tomo I, se expone la correspondencia de Huygens entre los años 1638 y 1656. A cada carta le fue asignado un número; en la carta clasificada con el número 309 (p.446), figura la siguiente demostración de Huygens:

> N° 309
>
> Christiaan Huygens a P. de Carcavy
> Apéndice *au* No. 308
> La minuta y la copia se encuentra en Leiden, *coll*. Huygens.
>
> Propuesto por el señor De Fermat
>
> A y B juegan un *piquete*[23]. A se compromete a tener 3 ases en sus primeras doce cartas. B garantiza que no. ¿Cuál es su partido?
>
> En el post hay 36 cartas de las cuales 4 son ases. 36 *calculi*, 32 de los cuales eran negras, 4 blancas. 12 estudios ciegos, en la que un 3 blanco en particular.

[23] Juego muy antiguo, disputado entre dos, y a veces, tres o cuatro jugadores, el cual tenía treinta y dos cartas y se sumaban puntos según las combinaciones logradas.

Es cierto que A tiene la oportunidad, si le damos todas sus cartas a la vez o uno por uno, y que no importa donde se lleven.

Al tomar la tarjeta 12° (cuando todavía hay 25) se tiene *desia* 2 ases, entonces tendrá

2 para (1) c´elf $\frac{2}{25}$

o

23 para 0

¡emplea un diagrama de árbol! Se trata de la primera vez en la historia de la probabilidad que se incluye un diagrama de árbol en la demostración del resultado.

Tomando la tarjeta 11° cuando tiene 10 (cuando tenía 26) si tiene dos dados, tendrá

2 para (1)

24 para tener $\frac{2}{25}$ c´elf 2 como en 11 cartas es

98/650 es m pero se toma la 11 cuando tiene 10 cartas, solo ha tenido 1 as que tendrá

3 —— $\frac{2}{25}$ c´eft 2 ases en 11 cartas

23 —— 0 c' eft 1 as en 11 cartas si es n

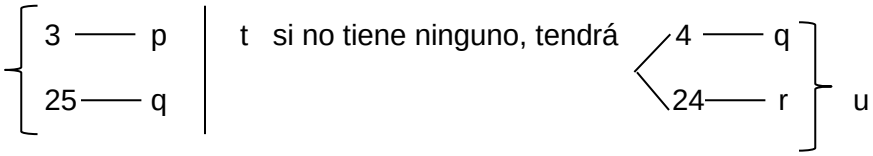
Al tomar la 10° cuando tiene 9 cartas, (hay 27) si tiene 2 ases,

Tendrá [2 —— (1) / 25 —— (m)] ∞ p

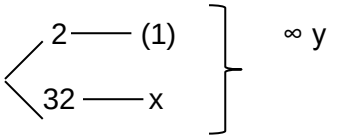
Si cuando tiene 9 cartas ha tenido 1 as, tendrá [3 —— m / 24 —— n] ∞ q

Pero teniendo 9 cartas si todavía no tiene ases, tendrá { 4 —— n / 23 —— 0 } ∞ r

Teniendo 8 cartas (quedan 28) si tiene 2 ases, tendrá { 2 —— (1) / 26 —— p } ∞ s

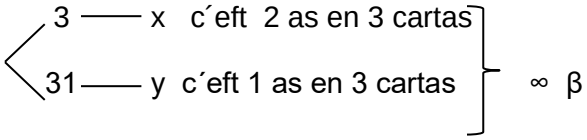


Después de haber asignado 2 cartas (quedan 34) si tiene 2 ases, tendrá

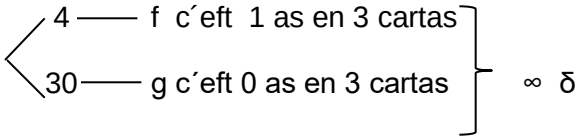


c'eft 2 ases en 3 cartas

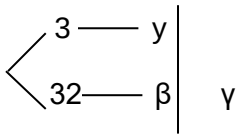
Si tuviera 1 as, tendrá



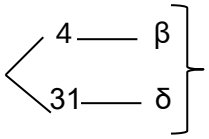
Si no tiene un as, tendrá



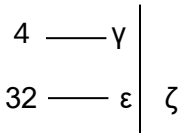
Entonces, teniendo 1 carta (quedan 35), si tuviera 1 as, tendrá



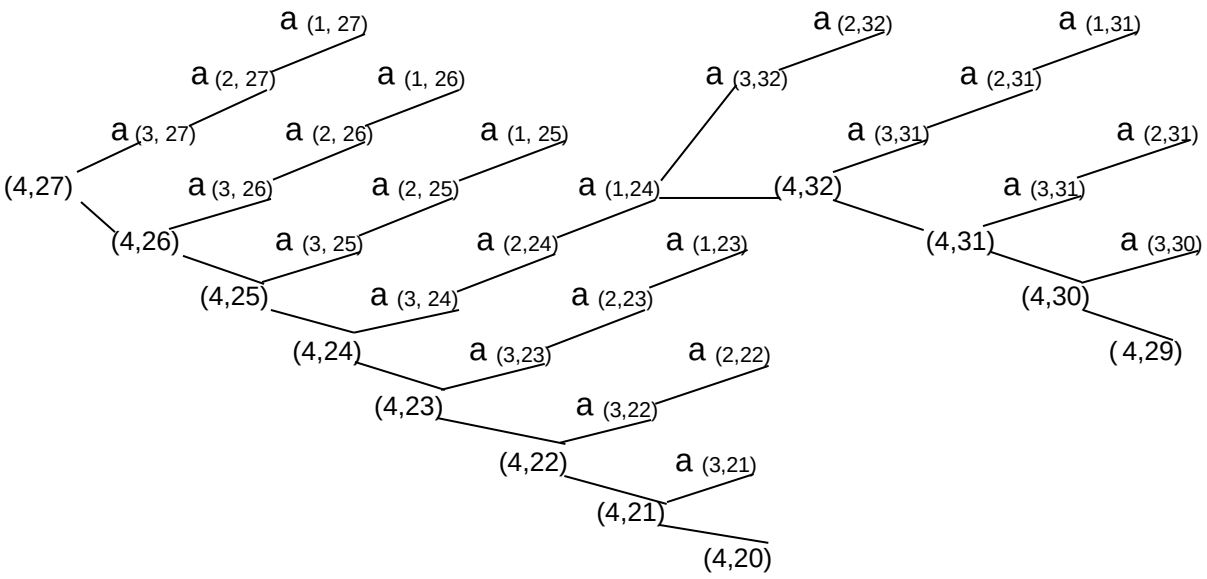
Si no tiene ases, tendrá



así que delante de eso para tomar la primera carta que tiene objeción



A continuación, se exhibe un fragmento del árbol que representa los distintos rumbos que podría haber tomado el juego.



El quinto problema se conoce como el problema de la ruina del jugador. Huygens empieza examinando el caso en que el juego termina cuando uno de los jugadores llega a dos puntos. Él dio una lista de todos los resultados posibles y sus probabilidades **nuevamente en un diagrama de árbol** según se registra en el Tomo VIII de las *Oeuvres complètes* de Christiaan Huygens[24]. Huygens obtiene todos sus resultados por recursión; su método es claro y fácilmente comprensible. Sin embargo, numéricamente es muy engorroso. Llama la atención que no use métodos combinatorios.

En el otoño de 1672, en París, Christiaan Huygens recibió la visita de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). En esa primera reunión, Leibniz le mostró un método para sumar series infinitas, el cual consistía en considerar diferencias entre los términos de la sucesión. También le mostró el primer modelo de la máquina aritmética que había construido; a partir de entonces, Huygens se hará cargo de la formación matemática del joven Leibniz.

La primera vez que se utilizó la palabra *combinatoria* en el sentido que la utilizamos actualmente fue en 1666, en la obra *Dissertatio de arte combinatoria*, de

[24] Entre los escritos de Huygens está el *Tratado acerca de los juegos de azar* escrita en 1676 puede encontrarse en *Oeuvres complètes*.

Leibniz. En esta obra, el autor presentó nuevos resultados en lógica y matemáticas, y desarrolló una idea de escuela: usar la combinatoria para conseguir un alfabeto del pensamiento humano, lo que más tarde llamaría *Scientia generalis*. Leibniz pensaba que, partiendo del alfabeto, mediante combinaciones y permutaciones, se podían obtener cualquier palabra o frase; consideraba que, a partir de conceptos simples y fundamentales, se podía conseguir todas las verdades surgidas de esas relaciones; intentó crear un método con el que todas las verdades de la razón debían reducirse a una especie de cálculo.

En su obra, aparecen aplicaciones de la combinatoria al derecho, a la música y a la teoría aristotélica de la generación de los elementos. A continuación, reviso el contenido de la *Dissertatio De Arte Combinatoria* en relación con la combinatoria.

DISERTACIÓN SOBRE EL ARTE DE LAS COMBINACIONES

1666

Definiciones

1. *Variación* aquí significa cambio de relación.

2. La *Variabilidad* es la cantidad de todas las variaciones.

3. *Situs* es la ubicación de las partes.

[…] 5. Y por último la *vecindad*. La primera es la disposición; la última, la composición. Así, por razón de orden, los siguiente *situses* son diferentes: *abcd*, *bcda*, *cdab*, *dabc.*

6. En general, nos referiremos a la variabilidad de orden cuando tomamos variaciones por excelencia; por ejemplo, 4 cosas se pueden arreglar de 24 maneras.

7. La variabilidad de un complejo recibe el nombre de complexiones (**las combinaciones, en general, eran nombradas por Leibniz con la palabra complexiones**); por ejemplo, 4 cosas se pueden juntar de 15 maneras diferentes.

8. El número de cosas que varían se llamarán simplemente *número*; por ejemplo, 4 en el caso propuesto.

[…] 10. Llamamos al número de partes o unidades que se conectarán juntas al mismo tiempo el *exponente*, tras el ejemplo de una progresión geométrica. Por ejemplo, que el Todo sea *ABCD*. Si el Todo menor consiste en dos partes, por ejemplo, *AB, AC, AD*,

BC, *BD*, *CD*, el exponente será 2; si consiste en tres partes, por ejemplo, *ABC*, *ABD*, *ACD*, *BCD*, el exponente será 3.

11. Escribiremos las complexiones con un exponente dado de la siguiente manera: si el exponente es 2, com2binación (combinación) (**combinación de dos en dos**); si es 3, con3nación (conternación) (**combinación de tres en tres**); si es 4, con4nación; etc.

12. Las complexiones tomadas simplemente son todas las complexiones calculadas para todos los exponentes; por ejemplo, 15 del número 4. Estas consisten en 4 unidades **(a, b, c, d)**, 6 com2binaciones **(ab, ac, ad, bc, bd, cd)**, 4 con3ternaciones **(abc, abd, acd, bcd)**, 1 com4binaciones **(abcd)**.

PROBLEMAS

Tres cosas deben ser consideradas: problemas, teoremas y aplicaciones. Hemos agregado la aplicación a los problemas donde parecía que valía la pena, y también a los teoremas. En algunos de los problemas, sin embargo, hemos añadido una demostración.

Problema I

Para descubrir las complexiones de un número dado y exponente

[…] 3. Dado que las complexiones del número anterior son necesarias para esta solución, la Tabla א debe ser construida. En ella, la línea superior contiene los *números* del 0 al 12 incluso de izquierda a derecha (creemos que esto es suficiente, ya que se extiende fácilmente); la línea vertical a la izquierda contiene los exponentes de 0 a 12, leyendo de arriba abajo, y la línea inferior, de izquierda a derecha, contiene las complexiones totales (complexiones simples). Entre las líneas están contenidas las complexiones para el número dado a la cabeza de la columna correspondiente y para el exponente dado a la izquierda.

4. La razón de esta solución y la base de la tabla será clara si demostramos que

Exponentes	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	Complexiones
	1	0	1	2	3	4	5	6	7n	8u	9m	10b	11e	12r	
	2	0	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	
	3	0	0	0	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	
	4	0	0	0	0	1	5	15	35	70	126	210	330	495	
	5	0	0	0	0	0	1	6	21	56	126	252	462	792	
	6	0	0	0	0	0	0	1	7	28	84	210	462	924	
	7	0	0	0	0	0	0	0	1	8	36	120	330	792	
	8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	8	45	165	495	
	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	10	55	220	
	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	11	66	
	11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	12	
	12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	
	*	0	1.	3.	7.	15.	31.	63.	127.	255.	511.	1023.	2047.	4095.	
	+	1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.	512.	1024.	2048.	4096.	

* Las complexiones se toman simplemente (o la suma de las complexiones de todos los exponentes) y se agrega 1, igual al total de una progresión geométrica con base 2^{+}.

las complexiones para un número y exponente dados surgen de la suma de las complexiones del número anterior, tanto para el exponente dado como para el anterior. Tomando el número dado como 5 y el exponente dado como 3, el número antecedente será 4; tendrá 4 con3naciones y 6 com2binaciones, por la Tabla א. Ahora el número 5 tiene todas las con3naciones del número anterior (ya que la parte está contenida en el Todo), a saber, 4, y tiene además tantas con3naciones como el número anterior tiene com2binaciones, ya que la unidad por la que el número 5 excede a 4, sumada a cada una de las com2binaciones individuales de 4, hará el mismo número de con3ternaciones. Así 6 + 4 = 10. Por lo tanto, las complexiones para un número dado, etc. Q.E.D.

Problema II

Para descubrir las complexiones tomadas simples por un número dado

Busca el número dado entre los exponentes de una progresión geométrica con base 2; entonces el total de complexiones buscadas será el número o término de la progresión cuyo exponente es el número dado, menos 1. Es difícil entender la razón o demostración de esto, o explicar si se entiende. El hecho, sin embargo, es evidente en la Tabla א.

En 1684 Leibniz escribió *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangetibus, qua nec irrationales quatitates moratur* (Nuevo método para los máximos y mínimos, así como para las tangentes, el cual puede también aplicarse a las cantidades fraccionarias e irracionales). También publicó otras memorias en la revista *Acta Eruditorum* en 1692 y 1694, además de mantener correspondencia con Jakob y Johann Bernoulli.

En 1713, ocho años después de la muerte de Jakob Bernoulli (1654-1705), fue publicada su obra *Ars conjectandi (El Arte de las Conjeturas)*. De las cuatro partes de esta obra, la primera comprende el tratado de Huygens *De ratiociniis in ludo a leae* acompañado de comentarios de Bernoulli donde demuestra los teoremas de Huygens de una manera diferente o da nuevos métodos para la solución de proposiciones. Es precisamente en las anotaciones de Bernoulli a dicho tratado donde por primera vez aparece el término probabilidad (*probabilitas*).

La segunda está dedicada a la teoría de permutaciones y combinaciones[25] en donde se encuentra la fórmula que da el número de permutaciones de un conjunto con n elementos. Dicha fórmula se expresa a continuación:

> Regla. Para encontrar el número de todas las permutaciones para cualquier número de cosas:
>
> Multiplica todos los números enteros del 1 al número dado en su orden natural; el producto proporciona el número que buscas.
>
> Por ejemplo, si el número de las cosas es n, entonces el número de todas las permutaciones es[26] 1. 2. 3. 4. 5… n o también (porque la unidad no se multiplica) 2. 3. 4. 5. … n donde los puntos entre 5 y n indican los números intermedios. Entonces para n = 7 el número de permutaciones es 2. 3. 4. 5. 6. 7 = 5040

[25] Bernoulli define tres diferentes categorías de problemas combinatorios: problemas de existencia, problemas de conteo y problemas de optimización.

[26] El matemático alemán Christian Kramp (1760-1826) propuso utilizar el signo de admiración después de n, es decir, $n!$

En esta segunda parte, Bernoulli expone una demostración del teorema del binomio para potencias enteras mediante inducción matemática.

> Los números arábigos en el borde izquierdo de la tabla designan las filas horizontales y al mismo tiempo el número de cosas a combinar, mientras que los números romanos en la parte superior indican las columnas verticales y al mismo tiempo las clases de combinaciones.

La primera columna contiene la serie de unidades, la segunda la serie de números naturales que comienza con cero, la tercera la serie de números triangulares que empieza con dos ceros y así sucesivamente.

Tabla de combinaciones o números figurados[27]

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
1	a								1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	b	ab							2	1	1	0	0	0	0	0	0
3	c	ac bc	abc						3	1	2	1	0	0	0	0	0
4	d	ad bd cd	abd acd bcd	abcd					4	1	3	3	1	0	0	0	0

> Conclusión. Con la ayuda de la propiedad que acabamos de demostrar, ahora es fácil encontrar cualquier término, así como la suma de cualquier serie. Los primeros n miembros pueden tomarse de varias columnas consecutivas de modo que de la segunda columna n – 1, de la tercera n – 2, de la cuarta n -3 términos distintos de cero que están debajo (según la propiedad 1). Entonces la suma de los primeros n términos de la primera columna es igual a $n \bullet 1 = \frac{n}{1}$ pero (según la propiedad 4) el miembro de la segunda columna $(n + 1)^{te}$ tiene el mismo valor.

> En consecuencia (por la propiedad 12) la suma de los n -1 términos de la segunda columna tomados desde 1 (inclusive) es igual a $\frac{n \,.\, \overline{n - 1}}{1 \bullet 2} = \binom{n}{2}$; pero

[27] La tabla de la izquierda es mi interpretación de la tabla de Jakob Bernoulli

el miembro $(n + 1)^{te}$ de la tercera columna tiene el mismo valor. La tercera parte de este valor se multiplica por $\overline{n - 2}$ –el número de miembros en la tercera columna de 1 en adelante– es decir[28] $\frac{n \cdot \overline{n-1} \cdot \overline{n-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \binom{n}{3}$

es (nuevamente por la propiedad 12) igual a la suma de los términos tomados de la tercera columna y también iguales a (n + 1) término de la cuarta columna. Del mismo modo, para los términos tomados de la cuarta columna y para el término $(n + 1)^{te}$ de la quinta columna.

Los ejercicios del *Ars Conjectandi* son interesantes porque posiblemente sea la primera vez que el muestreo con y sin reemplazo ocurre en la literatura.

La tercera parte comprende las soluciones a veinticuatro problemas diversos sobre juegos de azar. En la cuarta, Bernoulli se propone aplicar la teoría de probabilidades a temas de interés general (asuntos civiles, morales y económicos); contiene el teorema de Bernoulli y representa el marco de referencia fundamental de la probabilidad. Además, estableció la regla del producto para el caso de eventos independientes, obtuvo la distribución binomial y encontró la probabilidad de ganar un juego con un número infinito de lanzamientos como la suma de una serie infinita.

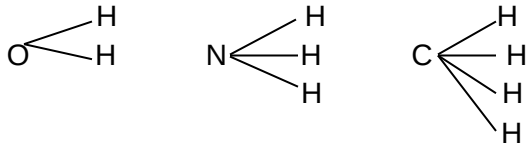
Jacques Bernoulli presentó un nuevo concepto de probabilidad, definido como una medida de nuestro conocimiento de la verdad de una proposición, “un grado de certeza”, es decir, medir la probabilidad de un suceso consiste en realizar una evaluación del número y peso de los argumentos (considera que la probabilidad depende del grado de conocimientos que tengamos sobre cierto fenómeno, en cuyo caso la probabilidad aumentará a medida que aumente el grado de conocimiento acerca del fenómeno en cuestión), a favor o en contra, o de modo más preciso y adaptado a nuestro lenguaje actual, se entenderían como casos favorables y casos no favorables.

[28] En su libro Die combinatorische Analysis (1826), el matemático alemán Andreas Freiherr von Ettinggshausen propuso el símbolo binomial.

Durante la década de 1830, el simbolismo químico demostró ser una espada de doble filo, dado que distintos químicos, al interpretar datos experimentales de distintas maneras, usaban los mismos símbolos para decir cosas opuestas, lo que dejaba abierto el camino de la anarquía. Esta confusión del lenguaje en la química orgánica se debió a las fórmulas que se adscribían a los compuestos orgánicos.

En 1861, el químico ruso Aleksandr Mikhailovich Butlerov (1828-1886), al dirigirse a la asamblea alemana Naturforscherversammlung en Speyer, introdujo formalmente el concepto de estructura. Una vez determinada la estructura química de los cuerpos debería ser posible escribir para cada compuesto solo una "fórmula racional"[29]. En el documento que Butlerov leyó, no reclamaba originalidad por estas ideas y, en particular, mencionó las fórmulas del químico escocés Archibald Scott Couper (1831-1892), quien trabajaba en la Universidad de Edimburgo y estaba interesado en la fuerza de atracción entre los diversos elementos dentro de las moléculas orgánicas; las líneas (al principio punteadas, pero después continuas) que escribió en las diversas fórmulas pueden tomarse como representaciones de fuerzas.

En 1858, Couper y Augusto Kekulé (1829-1896) publicaron, de manera independiente, ideas similares con relación a la tetravalencia del carbono y a la habilidad autovinculante de los átomos de carbono. Las fórmulas de Couper fueron ampliamente conocidas, y es de particular interés la influencia que tuvieron sobre Lothar Meyer, quien las mencionó varias veces en su *Modernen Theorien der Chemie* (1864). En este libro, dibujó relaciones entre los átomos de la siguiente manera



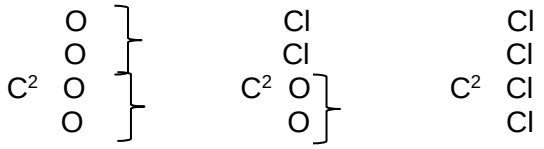
En el siguiente artículo, Couper enuncia los elementos fundamentales de la teoría de la estructura.

[29] La "fórmula racional" indicaba cómo se agrupaban los átomos dentro de la molécula, lo cual determinaba las propiedades químicas de la sustancia. El término fue introducido por Jöns Jacob Berzelius (1779-1848) en 1833.

XII. Sobre una Nueva Teoría Química

Por Archibald S. Couper, Esq.[30]

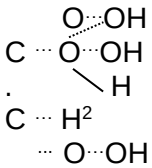
Por lo contrario, los átomos de oxígeno se unen en pares (que se desarrollarán más adelante), y únicamente para dos átomos de oxígeno dos de cloro se pueden sustituir; entonces:



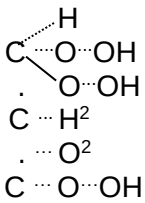
[…] De estos últimos, se hace especialmente evidente que dos es el grado de combinación del carbono.

[…] La ley que se ha enunciado con claridad coincide exactamente, y se hace aparente por la aplicación de la teoría de la combinación química que apoyo.

Pero para volver, la glicerina es



y el ácido glicérico es



Tengo la intención de considerar, en una comunicación futura, el segundo tipo, y aplicar mis opiniones a los compuestos cianógenos, etc.

Arthur Cayley (1821-1895) se interesó por resolver la enumeración de estructuras en química orgánica. Fue el primer matemático en relacionar las fórmulas moleculares con los grafos. En su investigación sobre el cálculo diferencial, a lo largo de la década de 1850, Cayley se ocupó del problema de la enumeración de los grafos del tipo árbol. Para explicar su investigación en la teoría de grafos, resulta útil ofrecer algunos conceptos básicos en este campo.

• Grafo: un grafo está constituido por un conjunto de puntos, llamados vértices, y un conjunto de aristas, cada una de las cuales une dos vértices.

[30] En Philosophical Magazine and Journal of Science, Vol. XVI-Fourth Series, July-December, 1858.

• Grado de un vértice: se llama grado de un vértice al número de aristas que inciden en este.

• Camino: un camino de un grafo es una sucesión de vértices y aristas, que comienzan en un vértice y terminan en otro. Si no se repite ningún vértice, se llama "camino simple", y si es cerrado, se dice que es un "ciclo".

• Árbol: un grafo en el que cualesquiera dos vértices están conectados exactamente por un camino, es un árbol. Un árbol no posee ciclos.

• Árbol con raíz: es un árbol en el que existe un vértice destacado, designado raíz, desde el que surgen las aristas, o alternativamente hacia el que se dirigen.

Los árboles y, específicamente los árboles con raíz, fueron estudiados por primera vez en el contexto matemático por Arthur Cayley en el siguiente artículo.

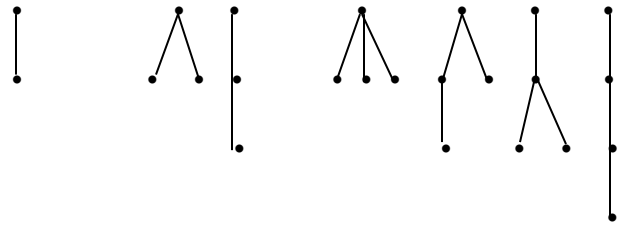
SOBRE LA TEORÍA DE LAS FORMAS ANALÍTICAS LLAMADAS ÁRBOLES

[De la Philosophical Magazine, vol.XIII. (1857), pp. 172-176]

[…] Esto, sin embargo, puede efectuarse de inmediato a través de las formas analíticas llamadas **árboles** (ver las figuras 1, 2, 3) (**introduce el término de árbol**), que contienen todos los árboles que pueden formarse con una rama, dos ramas y tres ramas respectivamente (**a las aristas las llamó ramas**)[31].

La inspección de estas figuras mostrará inmediatamente lo que significa por el término en cuestión, y por los términos raíz, ramas (que pueden ser ramas principales, ramas intermedias, o ramas libres) y nudos (**a los vértices los llamó nudos**) (que pueden ser la misma raíz, o nudos propios, o las extremidades de las ramas libres).

Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3.



[31] Las negritas son mías

Mediante el estudio de la función generatriz A_n , Cayley obtuvo el número de árboles con raíz para los primeros números de aristas.

> […] Un poco de consideración mostrará que la regla anterior para la formación del número A_n se expresa completamente mediante la ecuación
>
> $(1 - x)^{-1} (1 - x^2)^{-A_1} (1 - x^3)^{-A_2} (1 - x^3)^{-A_3} (1 - x^4)^{-A_4} \ldots = 1 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + \&c.$,
>
> y, en consecuencia, que podemos, a través de esta ecuación, calcular sucesivamente para los diferentes valores de n el número A_n de los árboles con n ramas. Los cálculos pueden efectuarse muy fácilmente como sigue: (la tabla como originalmente se imprimió contenía al final algunos errores de cálculo, los cuales fueron corregidos, B.A. Reporte de 1875, p. 258)

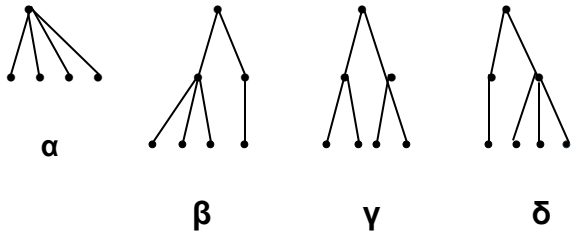
A_r =		1	2	4	9	20	48	115	286	719	1842
para r =		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Cayley escribió la segunda parte del artículo anterior:

SOBRE LAS FORMAS ANALÍTICAS LLAMADAS ÁRBOLES. SEGUNDA PARTE[32]

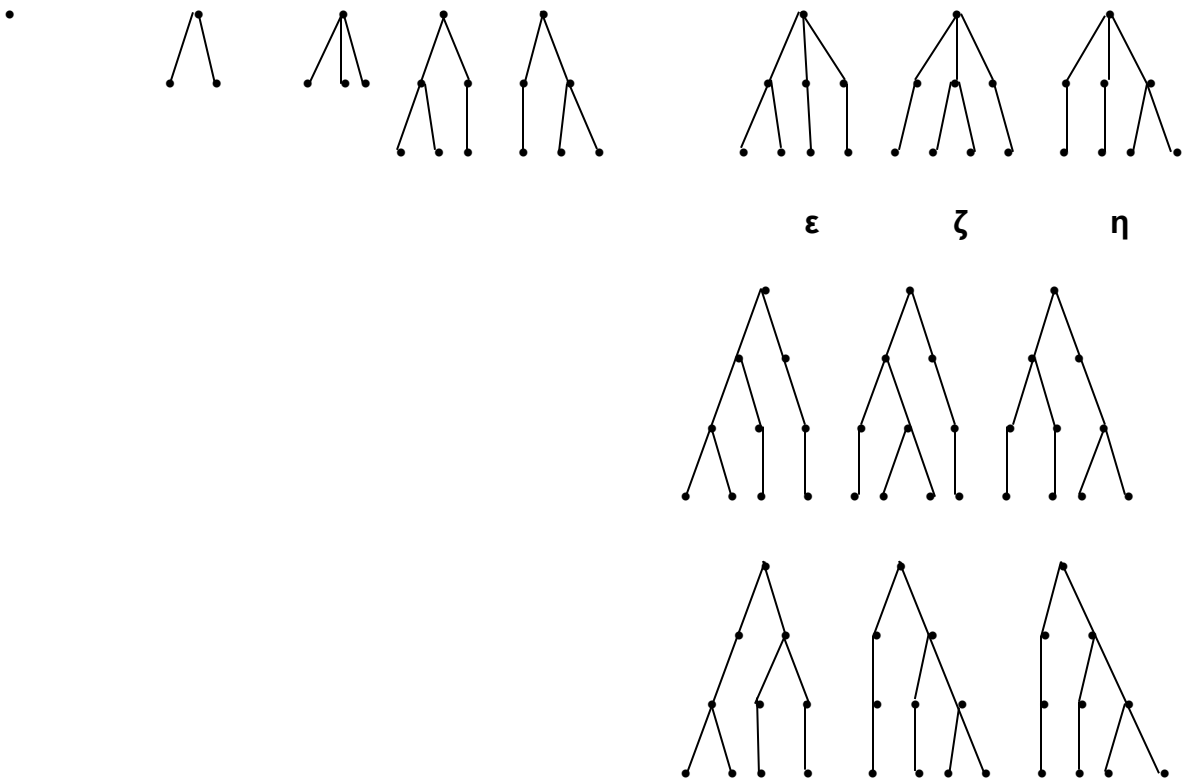
> La siguiente clase de “árboles” se me presentó en algunas investigaciones relacionadas con símbolos funcionales; a saber, atendiendo solamente a los puntos terminales, los árboles con un punto, dos puntos, tres puntos y cuatro puntos respectivamente se muestran en las figuras 1, 2, 3, y 4:

Fig. 4.



[32] Ver De la Philosophical Magazine, vol. XVIII, (1850), pp. 374-378. Continuación de 203.

Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3.



[…] El número total de árboles con un nudo y con dos y tres nudos es respectivamente 1, 1, 3; el número total de árboles con cuatro nudos es 1• 1 + 3• 1 + 3• 3 = 13. Y en general, si el número de árboles con m nudos es Φm, entonces es fácil ver que tenemos

[…] Los valores de Φm son, para m = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c.

Φm = 1, 1, 3, 13, 75, 541, 4683, 47293.

En la década de 1870, el químico alemán Carl Schorlemmer (1834-1892), que estaba estudiando un tipo especial de hidrocarburos, los alcanos, cuya fórmula es C_nH_{2n+2}, escribió a Cayley planteándole la siguiente pregunta: "¿Es posible que existan compuestos químicos diferentes, cuyas moléculas estén compuestas por el mismo número de átomos de carbono e hidrógeno, pero diferente estructura?". Cayley escribió la respuesta en el artículo *Sobre la Teoría Matemática de Isómeros*[33].

[33] En De la Philosophical Magazine, vol. XLVII (1874). pp.444-446.

Para estudiar matemáticamente el problema de los isómeros de los alcanos[34], Cayley asoció cada estructura molecular con un árbol, que llamó "kenograma". Cada átomo de carbono es un vértice del árbol y cada enlace entre átomos de carbono es la arista que une los vértices correspondientes; cada vértice no puede tener un grado mayor que cuatro, puesto que el carbono tiene valencia[35] cuatro y solo puede realizar cuatro enlaces. Para cada kenograma, es decir, para un árbol cuyos vértices tienen grados menores o iguales que cuatro, existe una estructura molecular de un alcano completamente determinada por el kenograma.

La pregunta planteada por Schorlemmer era la existencia de isómeros, compuestos químicos formados por los mismos elementos, en este caso carbono e hidrógeno, con la misma fórmula molecular, pero con distinta estructura molecular. Así, el problema matemático consecuencia del problema químico (hallar todos los isómeros de los alcanos) era la enumeración de los árboles con n vértices, cuyos grados fueran menores o iguales que cuatro. En el artículo *Sobre las Formas Analíticas llamadas Árboles, con aplicación a la Teoría de Combinaciones Químicas*[36], Cayley presentó sus resultados acerca de la enumeración de árboles.

Como se ha mostrado, utilizando como herramienta las funciones generatrices, Cayley estudió primero el problema general de calcular el número de árboles (estos eran árboles generales, sin raíz) que existen para cada número de vértices n. Observó que había dos tipos de árboles: aquellos que tenían un único centro y aquellos que tenían dos centros. El centro de un grafo está formado por los vértices de este mismo, con excentricidad mínima, donde la excentricidad de un vértice se define como la distancia más grande de ese vértice a cualquier otro grafo (cada arista es una unidad de distancia). De esta manera, separó el estudio de la enumeración de los árboles en

[34] Los hidrocarburos son los compuestos más simples de la química orgánica, formados únicamente por átomos de carbono e hidrógeno. Un tipo de hidrocarburos son los alcanos, que son hidrocarburos saturados (el número de átomos de hidrógeno, para los átomos de carbono que hay es el máximo posible, no hay enlaces dobles ni triples) y acíclicos (la estructura molecular no tiene ciclos).
[35] La valencia es el número de enlaces que un átomo de cierto elemento puede formar con otros átomos, para el carbono es 4 y para el hidrógeno es 1. El término "valencia" (Valenz) fue introducido por Wichelhaus en 1868.
[36] En Del Report of the British Association for the Advancement of Science, (1875), pp. 257-305.

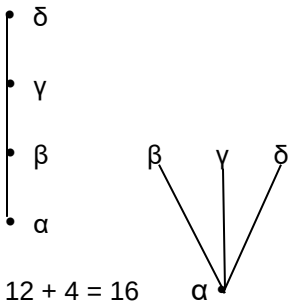
dos grupos, en relación con el número de centros. Al utilizar de nuevo funciones generatrices.

Después, Cayley estudió la enumeración de isómeros de los hidrocarburos del tipo C_nH_{2n+2}, esto es, los árboles con n vértices, pero cuyo grado es menor o igual a cuatro. Por ejemplo, de los seis árboles con seis vértices, uno de ellos no cumple la condición de que sus grados sean menores o iguales que cuatro. Luego, hay cinco isómeros con seis átomos de carbono, C_6H_{14}. Cayley predijo que existían ocho alcoholes $C_5H_{12}OH$, sin más que sustituir uno de los hidrógenos de los tres isómeros de C_5H_{12}; en otras palabras, predijo la existencia de la familia de los pentanoles o alcoholes amílicos.

El resultado más reconocido de Arthur Cayley sobre el problema de la enumeración de árboles es la "fórmula de Cayley" que establece que el número de árboles etiquetados con n vértices es $(n + 1)^{n-1}$. Este resultado se presenta en su artículo:

UN TEOREMA SOBRE ÁRBOLES[37]

> El número de árboles que puede ser construido con n + 1 nudos dados α, β, γ, … es = $(n + 1)^{n-1}$; por ejemplo n = 3, el número de árboles con los 4 nudos dados α, β, γ, δ es $4^2 = 16$ (fig. 4)[38], para la primera forma mostrada en la figura los α, β, γ, δ pueden ser dispuestos[39].



[37] En Del Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics, vol. XXIII. (1889), pp. 376-378.
[38] Se refiere a la figura 4 en el Teorema *Sobre las formas analíticas llamadas árboles. Segunda parte*.
[39] Un árbol al que se asigna etiquetas a sus vértices o a sus aristas es un árbol etiquetado. Las etiquetas pueden ser letras, números o cualquier otro símbolo.

en 12 diferentes ordenaciones (αβγδ son considerados como equivalentes a δγβα), y en la segunda forma, cualquiera de los 4 nudos α, β, γ, δ pueden estar en el lugar ocupado por la α: el número entero entonces es 12 + 4 = 16.

La teoría de grafos de tipo árbol tiene multitud de aplicaciones en los problemas de la vida real, como las redes eléctricas o las de abastecimiento de agua, las telecomunicaciones, el diseño de circuitos, los procesos de control, las estructuras de datos en la teoría de la computación, las redes de computadoras, el procesamiento de imágenes digitales, los árboles de decisión en áreas como informática o economía, los árboles filogenéticos o, como se ha visto, en la química orgánica.

A lo largo de las páginas anteriores he realizado un recorrido examinando e interpretando evidencias históricas y culturales para tratar de explicar que en el análisis del pasado hay muchos puntos de vista diferentes y que la actividad matemática actual es producto de largos y variados procesos transcurridos a través de siglos. La historia de las matemáticas es una introducción inseparable al estudio de las matemáticas; es una estrategia que permite otras habilidades de pensamiento[40] para aprender y comprender sus dificultades.

El propósito es estimular en los profesores la curiosidad por la historia de las matemáticas y el descubrimiento de que sus contenidos tienen relación con los procesos de enseñanza. La enseñanza de esta ciencia deberá propiciar que los profesores desarrollen habilidades intelectuales y comprendan nociones como tiempo histórico y espacio geográfico, cambio, causalidad, continuidad, ruptura en la actividad matemática, sujetos de la historia, diversidad y globalidad del pensamiento matemático, manejo y selección e interpretación de información. Si éstas intenciones se logran, contribuirán a la formación de profesionales con la capacidad para analizar el desarrollo del pensamiento matemático y de lectores frecuentes de la historia de las matemáticas, que tendrán la posibilidad de construir una visión ordenada y

[40] Las habilidades de pensamiento las entiendo como operaciones mentales basadas en el razonamiento inductivo-deductivo.

comprensiva sobre esta asignatura, además de formarse juicios propios sobre su enseñanza.

En este caso, estableciendo un tratamiento diferenciado de las distintas etapas y procesos de la historia de las matemáticas, poniendo mayor atención a las épocas en las cuales se han desarrollado transformaciones duraderas y de prolongada influencia, pero también revisando procesos específicos, permitiría a los profesores planear estrategias didácticas orientadas a la realización de actividades que conduzcan a los alumnos a interesarse por la historia de las matemáticas. Así, por ejemplo, se propone conocer desde el punto de vista histórico, el *Teorema del binomio* (Newton y Leibniz), los *Elementos* (Euclides de Alejandría) y *Una teoría matemática de la comunicación* (Claude Shannon).

El alumno de educación básica puede adentrarse al conocimiento histórico de las matemáticas mediante la sencillez de una explicación narrativa, en la que no necesariamente abundan los conceptos complejos. Es importante que las narrativas giren en torno a un problema matemático y que en la configuración de ellas se consideren elementos que puedan captar el interés cognitivo de los alumnos.

No es el caso de hacer la presentación únicamente “amena y divertida”; no se trata de restarle rigor matemático. Se trata de entender las relaciones internas entre los fenómenos en diferentes niveles, para explicarse el contexto actual integrado por y como resultado de tales procesos históricos. Asimismo, cuando se enseñe un tema desde el punto de vista histórico deberá aclararse la intención educativa en la formación de habilidades del pensamiento matemático, que sean concordantes con las capacidades cognitivas de los alumnos.

En resumen, el estudio de la historia de las matemáticas puede servir en la enseñanza de las matemáticas para explicar el presente, porque ofrece una perspectiva que ayuda a su comprensión, porque proporciona un marco de referencia para entender los problemas, porque ayuda a situar la importancia de los acontecimientos y permite usar críticamente la información.

Capítulo II

Metodología

Para conseguir estos objetivos se llevó a cabo una estrategia metodológica en cuatro etapas, misma que da orden a la tesis en seis capítulos. Esta investigación parte de un enfoque cualitativo apoyado en la recolección de información y el análisis interpretativo del mismo, que se divide en cuatro etapas.

La primera etapa consistió en una investigación documental al consultar documentos y sistematizar la información. Empezó indagando en el libro Historia de las Matemáticas de E.T. Bell, el antecedente más antiguo sobre el origen de la combinatoria o de los diagramas de árbol. Se halló información sobre "el problema de los puntos" y de quienes hicieron las primeras aportaciones a su solución. En este sentido, se hizo una búsqueda de obras originales (o sus traducciones) como *Liber de Ludo Aleas* (Cardano), *Sopra le Soporte dei Dadi* (Galileo), *Arithmetica Diophante* y *Oeuvres de Fermat* (Fermat), *Dissertatio de arte combinatoria* (Leibniz)[41] y *Ars conjectandi* (Bernoulli). Para ello, se utilizaron sitios Web como Dialnet, Internet Archive y SciELO.

En la literatura impresa en resguardo de la biblioteca del Instituto de Investigaciones Filosóficas (UNAM) se encontró la correspondencia entre Fermat y Pascal y la obra *Traité du triangle arithmêtique aveo quelques autres petits traités sur la même maitière* (Pascal). A partir de la lectura de esas cartas se analizó en De ratiociniis in ludo Alae (Huygens) lo relativo a la combinatoria y los diagramas de árbol. Para tener acceso a la obra Oeuvres complètes, se consultó a la Embajada del Reino de los Países Bajos en México; sugirieron explorar el sitio Web de la Real Sociedad de Ciencias y Humanidades de Holanda. Así, se encontró una carta de Huygens donde

[41] En este trabajo se ha procurado que la totalidad de las fuentes de información consultadas sean primarias. Lo anterior se determinó después de la lectura del libro *Rutas de incertidumbre. Ideas alternativas sobre la génesis de la probabilidad, siglos XVI y XVII*, México, 2015; ya que al revisar las referencias de esta obra se encontró la fuente *Pascal*, UAM, México, 2008, que siendo central en la investigación presenta dudas y genera confusiones. Debo advertir que existen fuentes secundarias no confiables que podrían generar equivocaciones y falsear los procesos de construcción del conocimiento.

hace uso de un diagrama de árbol; quizás sea la primera vez en la historia de la probabilidad que se emplea este recurso en la solución de un problema.

Siguiendo el libro de Bell, se consideró averiguar acerca del estudio de Cayley sobre combinatoria en las bibliotecas de la Facultad de Química y del Instituto de Investigaciones Filológicas, ambas instituciones pertenecientes a la UNAM. En esta última institución, se encontró un libro (Crosland, 1993) donde se cita el trabajo de Couper. La búsqueda de documentos históricos sobre el origen de la combinatoria y los diagramas de árbol continuó con el análisis de dos artículos, uno de Couper y otro de Cayley, obtenidos a través de la Subdirección de Servicios de Información Especializada de la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM.

En una segunda etapa de la investigación, se realizó una búsqueda documental para estructurar el marco teórico, en el cual se hizo énfasis en diagramas de árbol y en combinatoria. Se consultaron los libros *The origin of the idea of chance in children* (Piaget y Inhelder), *An epistemological view on fundamental stochastic ideas* (Heitele) y *The intuitive source of probabilistic thinking in children* (Fischbein), y se contrastaron las diferentes teorías de estos autores acerca de la enseñanza de la combinatoria y los diagramas de árbol, por lo que se utilizó una investigación analítica-sintética.

Para la tercera etapa, se analizó, de los planes y programas de educación primaria en México en el período 1959-2017, lo relacionado a la combinatoria y a los diagramas de árbol, además de describir y revisar el tratamiento que se dio a estos temas en los libros de texto de matemáticas de educación primaria por grado en el periodo 1959-2019, consultados físicamente en las instalaciones de la Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos en la Ciudad de México. Esta revisión ayudó a completar la información mostrada en el Catálogo Histórico disponible en la página Web de la Comisión.

En los cuadros descriptivos[42] que se presentan, se podrá encontrar información sobre: la evolución de los temas de combinatoria y los diagramas de árbol transitando

[42] En la elaboración de este trabajo de investigación, fui responsable de la creación de todos los cuadros descriptivos o tablas presentadas. Cada uno refleja un análisis y está alineado con los objetivos de este estudio.

por los objetivos o propósitos generales, los componentes curriculares, las áreas o los temas de estudio, los contenidos por grado, los aprendizajes esperados, y la evaluación de los diferentes planes y programas de estudio de matemáticas durante el periodo de 1959 a 2017 en el caso de educación primaria, y del periodo de 1927 a 2017 en el caso de educación secundaria.

También, se tomó como material de análisis los planes y programas de educación secundaria en México. La búsqueda de estos documentos inició con la revisión de los acervos de las bibliotecas de dos Centros de Maestros en las Alcaldías Tlalpan y Coyoacán[43], donde sólo se encuentran los planes y programas posteriores al año 2000; la biblioteca de la Escuela Normal Superior de México cuenta con un ejemplar de los planes y programas del año 1939. Se decidió ubicar y consultar el Archivo de la Secretaría de Educación Pública; este rastreo concluyó en el Archivo General de la Nación, en donde la fuente de búsqueda y selección fueron los *Boletines* (1903-1931) y las *Memorias* (1928-1951)[44]. Para analizar los planes y programas del período 1952-2000, se consultaron los acervos de las bibliotecas de la Secretaría de Educación Pública ubicada en Argentina No. 28, en la Ciudad de México, y de la Universidad Pedagógica Nacional.

Otras fuentes documentales de relevancia fueron el texto *Hacia una "alfabetización sobre probabilidades" para todos los ciudadanos: componentes básicos y dilemas educativos"* (Gal, 2005) y el sitio Web del Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) para evaluar el diseño curricular del plan 2017, así como el de la Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos, para analizar en los libros de matemáticas de educación secundaria del periodo 2018-2021 el contenido relacionado con la combinatoria y los diagramas de árbol (considerando la guía GALT-Matemáticas) y obtener conclusiones. La búsqueda de información en los libros de texto de secundaria de matemáticas concluyó con la selección y adquisición de libros

[43] En el año 2006 existían diecinueve Centros de Maestros en la Ciudad de México. Todos contaban con una sección de biblioteca, actualmente solo en siete se ofrece este servicio.
[44] Es impostergable clasificar y restaurar el Archivo de la Secretaría de Educación Pública. Se tiene conocimiento de documentos que podrían perderse.

de ediciones anteriores a 1995 en las librerías de viejo del centro histórico de la Ciudad de México. Lo anterior muestra que se utilizó una investigación deductiva-inductiva.

Como apunte final del estudio de la evolución de los temas de combinatoria y diagramas de árbol, en esta etapa se describió y explicó el contenido de pruebas a gran escala como PISA[45], TIMSS, EXCALE, ENLACE y PLANEA. Las fuentes de información fueron centralmente los respectivos sitios Web excepto los ítems de las pruebas EXCALE que se obtuvieron a través del INEE.

Asimismo, en los cuadros, se expusieron temas como la comparación de los contenidos de los programas de estudio 2006, 2011 y 2017, el nivel de comportamiento cognitivo en matemáticas según la clasificación NLSMA para el diagrama de árbol en educación primaria y secundaria, la clasificación de las tareas en los niveles de desempeño en la escala global de matemáticas en la prueba PISA, el plan de evaluación de aprendizaje de la misma prueba, la tabla parcial de contenidos y los niveles de logro de la prueba Planea Matemáticas 3° de secundaria en 2017 y la tendencia de ejecución de las evaluaciones de matemáticas a gran escala en México.

Además, se elaboró un conjunto de actividades didácticas. Estas actividades son un material de apoyo, dirigido a los maestros de educación primaria y secundaria, en el que se sugieren ejercicios y problemas para realizarlos con los alumnos. El propósito esencial es ofrecer ejemplos claros de cómo los maestros pueden ayudar a sus alumnos en el estudio de los diagramas de árbol y la combinatoria.

La cuarta etapa de este proceso metodológico consistió en una investigación comparativa al confrontar el tratamiento dado a la combinatoria y a los diagramas de árbol en los programas de estudio y en los libros de texto de seis países que son representativos por su desempeño en la prueba PISA. Para llevar a cabo esta investigación, se consultó en los sitios Web de los respectivos Ministerios de

[45] A través del correo electrónico se obtuvo asesoría en la representación de México ante la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE).

Educación de los países seleccionados, así como en las páginas de internet de las editoriales que publican los libros de texto en que se estudia en esos países[46].

Por otra parte, se emplearon cuadros descriptivos para presentar el análisis del contenido de los libros de texto de educación secundaria por grado respecto a los diagramas de árbol y la combinatoria en el periodo 2018-2021, así como en la comparación entre el planteamiento de los mismos temas en los programas y libros de texto de primaria y secundaria de seis países con los correspondientes documentos en México.

No obstante que estos hallazgos pueden ser considerados indicadores, se diseñó un cuestionario que permite recoger los resultados de una investigación de tipo cuantitativo. Por lo anterior, la metodología para este trabajo corresponde a una metodología de carácter mixto, pues como, se presentó anteriormente el proceso de investigación, tuvo una parte documental y otra de trabajo de campo. En la primera, se buscó materiales de diversa índole; en la segunda, la técnica de investigación utilizada para la recogida de datos fue el cuestionario.

El objetivo de este cuestionario fue recolectar información longitudinal sobre los conocimientos de los estudiantes respecto a los diagramas de árbol y la combinatoria. Acerca de la muestra, se centró la atención en alumnos de primer grado de educación secundaria en la Ciudad de México, pues es en este grado donde el programa de estudio incluye nuestro tema de investigación. De modo que fueron seleccionados al azar tres alumnos de tres escuelas secundarias diferentes. En este sentido, la posibilidad de hacer el trabajo de campo era limitada por lo que se aplicó el instrumento en dos sesiones enviándolo a los alumnos a través de sus tutores. En cuanto al cuestionario, se divide en ítems de elección múltiple elaborados conforme a la clasificación taxonómica que previamente se construyó a partir de la NLSMA.

[46] En la embajada de la República de la India se obtuvo información que permitió conocer el plan y los programas de estudio de educación primaria y secundaria vigentes en ese país. Investigar y escribir son un motivo para llamar puertas, conocer personas e iniciar conversaciones.

Capítulo III

La enseñanza de los diagramas de árbol en la educación básica en México en el periodo 1927-2017

III.1. La enseñanza de los diagramas de árbol en la educación primaria en el periodo 1959-2017

¿Cuándo surgieron por primera vez los diagramas de árbol en un programa de estudio de educación primaria en nuestro país? ¿Qué conocimientos y habilidades se proponía desarrollar en los estudiantes al abordar temas de combinatoria? Para responder a estas preguntas, es necesario investigar en los planes y programas y en los libros de texto gratuitos, pues estos han sido la base de la enseñanza e incluso un instrumento de capacitación[47], pero antes es oportuno recordar su origen.

El 12 de febrero de 1959, se expidió un decreto presidencial para la creación de la Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos (Conaliteg), la cual fijaría las características de los libros de texto destinados a la educación primaria, así como proceder mediante concursos, o de otro modo si los concursos resultaran insuficientes, a la edición (redacción, ilustración, compaginación) de los libros. Así, a principios de 1960, se contó con los primeros textos escolares.

Los libros se redactaron con los lineamientos establecidos en los planes y programas de educación primaria elaborados por el Consejo Técnico Consultivo de la Dirección General de Educación Primaria en el Distrito Federal, aprobados en septiembre de 1957. Sin embargo, los libros de este periodo estuvieron desfasados de los planes y programas, aprobados en 1960, justo cuando empezaron a ser distribuidas las primeras ediciones. Los planes y programas de 1960 estuvieron organizados por necesidades y propósitos que ayudaran al desarrollo integral de la personalidad del educando, mientras que los libros de texto correspondientes a los programas de 1957 respondían a una organización por materias y temas de enseñanza. Lo anterior se muestra en las tablas III.1.1. y III.1. 2.

[47] El libro de texto es considerado por diversos autores como uno de los recursos didácticos más utilizados por los profesores y los alumnos en los procesos de enseñanza y aprendizaje (ver Fernández Reiris, 2005)

Tabla III.1.1. Temas generales de estudio

Aritmética y Geometría, 1957

Aritmética	Geometría
1. Numeración 2. Operaciones fundamentales con enteros, fracciones comunes, fracciones decimales, números complejos (denominados) 3. Sistemas de pesas y medidas 4. Sistemas monetarios 5. Operaciones comerciales 6. Nociones estadísticas 7. Segunda y tercera potencias de los números enteros. Extracción de raíz cuadrada 8. Nociones elementales de Contabilidad	1. Forma y dimensiones de los cuerpos 2. Cuerpos geométricos

Tabla III.1.2. Áreas, necesidades y propósitos en los programas de 1960

[…] VI. Adquisición de los elementos de la cultura: Lenguaje y Cálculo	Cálculo: Capacidad para apreciar conjuntos. Habilidad para resolver problemas. Destrezas para pesar y medir. Prácticas de trazo geométrico y construcción de objetos útiles. Habilidad para elaborar proyectos. Actitud y habilidad para registrar hechos y fenómenos
Objetivos generales de los planes y programas de estudio de Matemáticas, 1957 y 1960, para los seis años de primaria, por plan de estudio	
1957	1960
1. Satisfacer las necesidades de cálculo propias de la vida práctica 2. Capacitar al educando para que posea una apreciación correcta de los aspectos cuantitativos del ambiente natural y social 3. Favorecer el desarrollo de las funciones psíquicas del escolar por medio de los conocimientos matemáticos 4. Crear y fomentar una actitud disciplinada en el educando 5. Estimular en el niño el interés por esta materia de conocimientos 6. Dotar al alumno de un instrumento de expresión, relación y cálculo, para la adquisición y formación de la cultura	1. Capacitar para apreciar conjuntos 2. Habilidad para resolver problemas 3. Destrezas para pesar y medir 4. Prácticas de trazo geométrico y construcción de objetos útiles 5. Habilidad para elaborar proyectos 6. Actitud y habilidad para registrar hechos y fenómenos

Los libros de esta primera época se basaron en las normas y guiones técnico-pedagógicos para la asignatura de Aritmética y Geometría, la cual establecía objetivos generales de la enseñanza en cada uno de los seis grados. Respecto del contenido de los libros y cuadernos, los guiones establecían seis áreas básicas para todos los grados, menos para el segundo, que tenía tres. En las Tablas III.1.3. y III.1.4 se enlistan los objetivos de la enseñanza y las áreas básicas para los libros de matemáticas.

Tabla III.1.3. Objetivos de la enseñanza de Matemáticas y Geometría 1959

Objetivos
1. Satisfacer las necesidades de cálculo propias de la vida diaria
2. Capacitar para la apreciación de los aspectos cuantitativos del ambiente natural y social
3. Favorecer por medio de los conocimientos matemáticos rudimentarios el desarrollo de las funciones psíquicas
4. Crear y fomentar hábitos de limpieza, claridad y orden en el trabajo
5. Crear hábitos de precisión, certeza, exactitud, autocrítica y respeto a la verdad, todo ello como un medio fecundo para adquirir confianza en el esfuerzo propio
6. Iniciar a los niños en el conocimiento y utilización de las principales figuras geométricas

Tabla III.1.4. Áreas básicas para los libros de matemáticas por grado, 1959

1°, 3°, 4°, 5° y 6° grados
1. Conjunto de conocimientos aritméticos y geométricos que debe adquirir gradualmente el educando para que al concluir el sexto año domine los sistemas de numeración de enteros y fracciones y las cuatro operaciones fundamentales de esos números; el sistema métrico decimal y las medidas inglesas, las medidas de tiempo y los números denominados, los conceptos de razón y proporción, el sistema monetario mexicano, y el conocimiento de figuras planas y cuerpos.
2. Desarrollar en el educando la habilidad para aplicar los conocimientos adquiridos en la resolución de problemas prácticos
3. Desarrollo de la habilidad para pesar y medir
4. Práctica para el trazo y la construcción geométricos
5. Capacidad para elaborar proyectos
6. Habilidad para registrar hechos y fenómenos
Se integran los temas de estadística y probabilidad.
2° grado
1. Conjunto de conocimientos aritméticos a adquirir
2. Observación e identificación de cuerpos y figuras geométricas
3. Ejercicios específicos para el desarrollo de habilidades

Se buscó que la relación entre la formalidad inherente a las matemáticas y los fenómenos que a diario vivía el educando fuera muy estrecha. La concepción didáctica de la enseñanza de Aritmética y Geometría partió de principios fundamentales como la observación y manipulación directa de objetos concretos, observación de gráficas y utilización de los símbolos correspondientes. En 1959, los libros de texto de Aritmética y Geometría por grado presentaban las combinaciones de conceptos y operaciones fundamentales de manera organizada, acumulativa y progresiva.

Los libros de texto de esta generación no tenían ilustraciones ni gráficas, a fin de que el niño alcanzara mayor razonamiento y pudiera resolver las situaciones, acordes con su edad, que se le presentaran. La primera familia de libros de texto gratuitos para educación primaria se editó entre 1959 y 1964. Constaba de 20 libros y 20 cuadernos de trabajo (un cuaderno de trabajo por libro) para los seis grados. Los libros fueron hechos por maestros mexicanos y concedidos por concurso con las reglas y los índices fijados por la Conaliteg.

Es importante mencionar que en los años sesenta se distinguía entre lo considerado “conocimientos matemáticos” y la aplicación de estos a problemas de distinta índole. En esa época surge el tema de Estadística antes que el de Probabilidad. Los contenidos del tema de Estadística aparecen en la Tabla III.1.5.

Tabla III.1.5. Contenidos por grado

Temas de Estadística, 1960

	Primer grado	Segundo grado	Tercer grado	Cuarto grado	Quinto grado	Sexto grado
Estadística	Registro de datos relacionados con fenómenos naturales (aparece como actividad)	Registro de hechos y fenó-menos (aparece como actividad)	Registro de datos (aparece como activi-dad)	Registro de datos (aparece como activi-dad)	Represen-tación gráfica de hechos y fenómenos cuantitativos Registro de hechos y fenómenos	Registro de datos Represen-tación gráfica de hechos y fenómenos cuantitativos

En 1971, se creó una Comisión Coordinadora de la Reforma Educativa[48] que persistió en una concepción diferente de la educación y un cambio curricular en primaria, a partir de la cual los libros de texto son reformados por primera vez. Las modificaciones más importantes fueron el cambio de asignaturas al trabajo por áreas de estudio y la desaparición de los cuadernos de trabajo. La reforma, bastante influida por las matemáticas modernas[49], preconizaba el interés de estudiar los fundamentos de las matemáticas y sus estructuras más generales para de ahí inferir sus particularidades y detalles.

Se introduce la teoría de conjuntos como una herramienta unificadora de las diferentes ramas de las matemáticas. El número se presenta como clase de equivalencia de conjuntos equipotentes; la resta, como el cardinal del complemento de un conjunto, y la multiplicación, como el cardinal del producto cartesiano.

De 1972 a 1974, se elaboró la segunda familia de libros de texto. Se elaboraron 30 libros para los seis grados, 5 por grado. Además, se elaboraron 24 auxiliares didácticos (en cada grado y área, un libro para el maestro que contenía información de la disciplina y sugerencias de actividades complementarias). Por primera vez, el libro de texto concordó con el plan de estudios y con los programas. La enseñanza de las matemáticas en estos libros de texto se inició con el propósito de deducir.

En este periodo, aparece por primera vez una consideración explícita acerca del significado de los problemas en la construcción de conocimientos matemáticos, la cual se refiere a la historia de las matemáticas, pero se sugiere una derivación hacia los procesos de aprendizaje de la asignatura. En la Tabla III.1.6 se exponen el objetivo general y los objetivos específicos del Programa de Matemáticas en conexión con la combinatoria.

[48] Una reforma es un proceso, es un conjunto de tentativas orientadas a cambiar la configuración de la educación pública que alteran en diversos grados a todo el sistema educativo.
[49] El origen del término “matemática moderna” se encuentra en la reforma del plan de estudios de matemáticas realizadas por diferentes grupos entre 1952 y 1963 en Estados Unidos de América (Kline, 1976).

Tabla III.1.6. Programa de Matemáticas, 1972

Objetivo general	Objetivos específicos
Propiciar en el alumno el desarrollo del pensamiento cuantitativo y relacional, como instrumento de comprensión, interpretación y expresión de los fenómenos sociales, científicos y artísticos.	[…] **Probabilidad: conocer los fenómenos del azar e iniciar la formación de bases para el estudio sistemático de dichos fenómenos**

Las características y objetivos de la asignatura de matemáticas en el programa de 1972 fueron las siguientes: “Las matemáticas fomentan en el educando […] la capacidad de razonar y de aplicar dicho razonamiento a situaciones reales o hipotéticas de las que se derivan conclusiones prácticas u otras formalizaciones. Se pretende lograr que adquieran habilidades y capacidades para integrar las matemáticas con otras áreas y así relacionar los conceptos matemáticos con las actividades y situaciones dentro del hogar, la escuela y el medio en general” (SEP, 1972c). Los asuntos acerca de combinatoria establecidos en los programas y en los libros de texto se presentan en las tablas III.1.7. y III.1.8.

Tabla III.1.7. Contenidos por grado

Temas de Probabilidad, 1972

	Primer grado	Segundo grado	Tercer grado	Cuarto grado	Quinto grado	Sexto grado
Probabilidad			Idea de azar Experimentos aleatorios con dos resultados posibles Comparación de la probabilidad de eventos en experimentos con más de dos resultados (más probable, menos probable,	Experimentos y juegos de azar Comparación de la probabilidad de eventos en experimentos con más de dos resultados posibles (más probable, menos probable, igualmente probable)	Idea de azar Experimentos de azar Comparación de la probabilidad de 2 eventos Mayor, menor e igual probabilidad de eventos Mayor, menor e igual probabilidad de eventos que dependen de su área	Idea de azar Cuantificación de la probabilidad de eventos seguros, probables e imposibles Mayor, menor o igual probabilidad en función de su área

			igualmente probable) Mayor o menor probabilidad de un evento en función de su área	Idea de evento Eventos seguros, probables e imposible Mayor a menor probabilidad de un evento en función de su área	Eventos imposibles, seguros y probables Cuantificación de la probabilidad de un evento[50] Comparación de probabilidades	

Tabla III.1.8. Características de los libros de texto gratuitos, por grado, 1973

Grado	Objetivo básico
Primero	Se pretendía que el alumno aprendiera a elaborar e interpretar registros elementales sobre fenómenos cotidianos y a relacionar la idea de probabilidad de un evento.
Segundo	El libro de segundo grado desarrolla los objetivos particulares del programa excepto los que se referían a los aspectos de lógica, probabilidad y estadística, que, aunque estaban señalados en algunas unidades del libro del maestro, no se desarrollaban en el libro del alumno, por lo que era labor del profesor aplicar esos objetivos a lo largo del ciclo escolar.
Tercero	El libro se integra por lecciones y no por unidades como los grados anteriores. La probabilidad se presentaba mediante el concepto de azar y la distinción de fenómenos deterministas y de azar. Se relacionaba a la probabilidad con el número de posibilidades.
Cuarto	Referente a la probabilidad, se repasaba lo visto en el grado anterior, aunque introducía el término evento y su representación por medio de conjuntos. **Surge por primera vez en los programas de matemáticas para educación primaria, el tema de diagramas de árbol (publicado en 1974).**
Quinto	19 lecciones de las 80 que formaban al libro de quinto grado correspondían a probabilidad y estadística.
Sexto	El libro de sexto grado estaba formado de dos partes: la primera contenía una serie de actividades en las que se mezclaba la aritmética, la geometría y la probabilidad; esto se justificaba debido a que en la vida cotidiana los problemas de ese tipo abarcan varios de esos aspectos. La segunda, contenía el compendio de aritmética, geometría, probabilidad y estadística, consideradas ideas fundamentales de la matemática de primaria. Se pretendía que el alumno experimentara por sí mismo la interacción de las matemáticas con su mundo externo, ya fuera como herramienta o como lenguaje. El nuevo aspecto que se incluía para ese grado fue la relación entre dos conjuntos de números, y su propósito fue que el alumno distinguiera cantidades que dependían una de otra,

[50] Para desarrollar el concepto de probabilidad en un nivel en el que se realicen procedimientos para calcular probabilidades se requiere de rudimentos de combinatoria.

	de las que eran independientes entre sí, es decir, que observara diferentes formas de independencia y dependencia.

El aprendizaje de la probabilidad se orientó a familiarizar al estudiante con algunas ideas básicas que abordan esos temas, y se consideró que esa preparación inicial podía serle útil para que sus pensamientos acerca de la naturaleza, la sociedad y el mundo en general se orientaran por un criterio científico que tomara en cuenta el azar y todas las posibilidades. En septiembre de 1978, el Consejo de Contenidos y Métodos Educativos inició la actualización de los planes y programas de primaria. Mientras tanto, en Europa, fracasaba la reforma de la "matemática moderna". A continuación, se enlistan los objetivos de los programas de 1978 en la Tabla III.1.9.

Tabla III.1.9. Objetivos de los programas de 1978

1. Desarrollar su pensamiento lógico, cuantitativo y relacional
2. Manejar con destreza las nociones de cantidad, forma, tamaño y azar en relación con el mundo que lo rodea
3. Utilizar la matemática como un lenguaje en situaciones de su experiencia cotidiana

Resumiendo, en los años setenta existía la expectativa de trabajar una matemática más abstracta; como ejemplo está el tratamiento conjuntista de la probabilidad. En los ochenta, se dio marcha atrás a las pretensiones de abstracción, se abandonó el enfoque estructuralista anclado en la teoría de conjuntos y se sustituyó por uno didáctico basado en el planteamiento y la resolución de problemas como forma de construcción de los conocimientos matemáticos.

Asimismo, se reformó el currículo de los tres primeros grados de primaria, pero en los nuevos materiales se siguió enfatizando el punto de vista de que las matemáticas se aprenden a partir de la resolución de problemas: primero se elaboró con objetos concretos; luego, con icónicos o gráficos, y, finalmente, con simbólicos. Con esta reforma solo se modificaron los libros de primero y segundo grado (se hicieron libros integrados); de tercero a sexto permanecieron igual. Se dejó de concebir la organización de la educación primaria por áreas y se regresó a las asignaturas. Los

contenidos de los Programas de Estudio de 1980, relacionados con la combinatoria se presentan en la Tabla III.1.10.

Tabla III.1.10. Contenidos por grado

Temas de Probabilidad, 1980

	Primer año	Segundo año	Tercer año	Cuarto año	Quinto año	Sexto año
Probabilidad			Uso de las palabras posible e imposible Uso de las expresiones “más posible” y “menos posible” Experimentos con más de dos resultados Uso de las expresiones “más posible” y “menos posible” Experimentos con más de dos resultados. Resultados “igualmente probables”	Noción de azar Combinatoria Regla del producto (Lecciones 8 y 20 del libro de texto) Uso de las expresiones “más probable”, “menos probable” o “igualmente probable” Primeros cálculos con probabilidades Noción de evento imposible Noción de evento seguro	Identificación de juegos de azar Uso de las expresiones “más probable”, “menos probable”, “igualmente probable” Noción de evento imposible y de evento seguro Fórmula de probabilidad clásica Primeros cálculos con probabilidades Comparación de dos probabilidades	Noción de azar Noción de experiencia determinista Noción de experiencia aleatoria Probabilidad como medida del azar Valores de la probabilidad Noción frecuencial de la probabilidad Aplicación de la fórmula clásica de la probabilidad

En 1991, se elaboró la tercera familia de libros de texto. En total se hicieron 39, y se incluyeron dos atlas y un fichero; para cada grado y asignatura se produjo un *Libro del Maestro* con información sobre el enfoque, así como un avance programático que sugiere una articulación de lecciones del libro de texto y actividades del fichero. La reforma de 1993 propuso que el proceso de aprendizaje se iniciara al plantear a los niños una diversidad de problemas para que ellos los resolvieran con recursos propios; es decir, a partir del proceso de abstracción. La enseñanza se organizó temáticamente en tres ciclos (de dos años cada uno). Los propósitos de los programas de estudios de 1993 se presentan en la Tabla III.1.11.

Tabla III.1.11. Propósitos generales del plan y programas de estudios de 1993

Los alumnos de la escuela primaria deberán adquirir conocimientos básicos de las matemáticas y desarrollar las capacidades de:
1. Reconocer, planear y resolver problemas
2. Anticipar y verificar resultados
3. Comunicar e interpretar información matemática
4. Identificar patrones y situaciones análogas
5. Usar instrumentos de medición, dibujo y cálculo
6. Construir el pensamiento abstracto por medio de distintas formas de razonamiento, entre otras, la sistematización y generalización de procedimientos y estrategias

El enfoque de estos programas se caracterizó por el peso asignado a los significados de los conceptos en distintos contextos y a la resolución de problemas como la actividad principal con la cual los estudiantes podían construir nociones matemáticas. Una característica del enfoque de esa etapa es el principio de afiliación constructivista, según el cual los alumnos pueden desarrollar conocimientos matemáticos al intentar resolver determinadas situaciones problemáticas para ellos.

Los conocimientos generados se tornarían mucho más significativos para el estudiante porque aparecen como respuestas que él mismo elabora ante problemas que se le plantean. Esta reforma cambió el enfoque de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, más que el contenido. La propuesta de 1993 ubicó al conocimiento matemático como una herramienta para resolver problemas, primero para establecer la relación semántica entre los datos del problema y, segundo, para tener un recurso para resolverlo.

En el nuevo programa de matemáticas, el currículo estaba organizado en seis ejes conceptuales que se desarrollaban en paralelo durante el ciclo escolar. Los libros se organizaron por bloques, lo que supuso la concepción de que el aprendizaje tiene una trayectoria espiral (Heitel,1975). Se pretendía que el libro fuera un complemento al proceso de enseñanza-aprendizaje y que hubiera una serie de actividades por realizar independientemente de él, las cuales se expresaban en el fichero de actividades y en el cuaderno de trabajo. La Tabla III.1.12 enlista los ejes conceptuales del programa 1993 y el objetivo en conexión con la combinatoria.

Tabla III.1.12. Ejes conceptuales y objetivos de libros de texto gratuitos de Matemáticas 1993

Ejes conceptuales	Objetivos
1. Los números, sus relaciones y sus operaciones 2. Medición 3. Geometría 4. Tratamiento de la información	[…]
5. **Predicción y azar**	**Explorar situaciones donde el azar interviene y desarrollar gradualmente la noción de lo que es probable o no es probable que ocurra en dichas situaciones.**
6. Procesos de cambio	[…]

El eje conceptual predicción y azar se inicia en tercer grado y continúa su desarrollo hasta sexto grado. Los contenidos, con relación a la combinatoria, que se presentaron en los libros de texto gratuitos se reúnen en la Tabla III.1.13.

Tabla III.1.13. Contenidos de los libros de texto gratuitos de Matemáticas, por grado, 1993

Grado	Contenidos
Tercero	Números naturales; números fraccionarios; longitudes y áreas; capacidad, peso y tiempo; ubicación espacial; cuerpos geométricos; figuras geométricas; tratamiento de la información; **predicción y azar**.
Cuarto	Números naturales; números fraccionarios; números decimales; longitudes, áreas y volúmenes; capacidad, peso y tiempo; ubicación espacial; cuerpos geométricos; figuras geométricas; tratamiento de la información; procesos de cambio; **predicción y azar.**
Quinto	Números naturales; números fraccionarios; números decimales; longitudes, áreas y volúmenes; capacidad, peso y tiempo; ubicación espacial; cuerpos geométricos; figuras geométricas; tratamiento de la información; procesos de cambio; **predicción y azar**.
Sexto	Números naturales; números fraccionarios; números decimales; longitudes, áreas y volúmenes; capacidad, peso y tiempo; ubicación espacial; cuerpos geométricos; figuras geométricas; tratamiento de la información; procesos de cambio; **predicción y azar**.

No se procuró la interconexión entre los temas y sus lecciones, y el equilibrio entre los problemas introductorios, el aporte de la información y la ejercitación para afirmar el dominio. La Reforma 2009 propuso el estudio y el aprendizaje de matemáticas por medio de la resolución de problemas. Este modelo cuya base teórica es la Teoría de las situaciones didácticas continúa vigente como opción para el aprendizaje de matemáticas y su aplicación en circunstancias de la vida diaria.

El criterio fue enseñar matemáticas de manera graduada y articulada de modo que los estudiantes encontraran sentido a lo aprendido. Está situación no se concretó debido a que los contenidos de los programas de primaria se organizaron conceptualmente de distinta manera. La Tabla III.1.14 muestra los propósitos del estudio de la combinatoria en los programas 2009.

Tabla III.1.14. Programas de Matemáticas, 2009

Propósitos generales	Propósitos para la Educación Primaria
Mediante el estudio de las Matemáticas en la Educación Básica se busca que los niños y jóvenes desarrollen: • Una forma de pensamiento que les permita expresar matemáticamente situaciones que se presentan en diversos entornos socioculturales • Técnicas adecuadas para reconocer, plantear y resolver problemas • Una actitud positiva hacia el estudio de esta disciplina y de colaboración y crítica, tanto en el ámbito social y cultural en que se desempeñen como en otros diferentes	[…] • **Sepan reconocer experimentos aleatorios comunes, sus espacios muestrales y desarrollen una idea intuitiva de probabilidad.** […]

Esta diferencia no se justificó y era un obstáculo para lograr la articulación entre los niveles de educación básica. Por esta razón, se adoptó una forma de organizar los contenidos en tres ejes temáticos: Sentido Numérico y Pensamiento Algebraico; Forma, Espacio y Medida; Manejo de la Información. Estos ejes coincidieron con los de la secundaria y se establecieron para ayudar a la vinculación entre los contenidos de distintas ramas de las matemáticas. En el eje Manejo de la información, los alumnos de primaria tenían la posibilidad de llevar a cabo lo siguiente:

• Exponer preguntas y recolectar, organizar, analizar, interpretar y mostrar la información que da respuesta a tales preguntas

• Conocer las primeras nociones de la aleatoriedad

• Relacionar el estudio de las matemáticas con el de otras asignaturas

En la tabla III.1.15 se observan los contenidos con relación a los temas de probabilidad y de combinatoria.

Tabla III.1.15. Contenidos por grado

Temas de Probabilidad, 2009

Eje	Primer grado	Segundo grado	Tercer grado	Cuarto grado	Quinto grado	Sexto grado
Manejo de la Información	Bloque I Análisis de la información 1.10 Identificar atributos de objetos y colecciones Representación de la información 1.11 Leer o registrar información contenida en imágenes Bloque II Análisis de la información 2.10 Inventar preguntas o problemas que se puedan responder a partir de la información contenida en portadores diversos Bloque III Análisis y representación de la información 3.11 Recopilar datos para	Bloque I Análisis de la información 1.10 Clasificar, ordenar y describir los objetos de una colección con base en sus atributos 1.11 Recopilar datos para obtener una nueva información Bloque II Análisis de la información 2.8 Inventar preguntas o problemas que se puedan responder a partir de la información contenida en portadores o imágenes Representación de la información 2.9 Representar gráficamente situaciones matemáticas	Bloque I Análisis de la información 1.12 Obtener nueva información a partir de ciertos datos 1.13 Leer información contenida en distintos portadores Bloque II Análisis de la información 2.11 Elaborar portadores de la información Bloque III Análisis y representación de la información 3.9 Organizar información en función de ciertas condiciones	Bloque I Análisis de la información 1.10 Leer información contenida en distintos portadores Bloque IV Análisis de la información 4.9 Comparar dos o más eventos a partir de sus resultados posibles (sin cuantificar la probabilidad) usando relaciones tales como: “es más probable que…”, “es menos probable que…” Bloque V Análisis de la información **5.9 Resolver problemas simples que exijan una búsqueda exhaustiva de posibilidades (problemas de conteo)**	Bloque III Análisis y representación de la información **3.11 Determinar los elementos del espacio muestral de una experiencia aleatoria**	Bloque II Análisis de la información 2.7 Interpretar información contenida en distintos portadores Bloque V Representación de la información 5.8 Organizar información seleccionando un modo de presentación adecuado

	obtener nueva información y representarla gráficamente Bloque IV Análisis de la información **4.9 Encontrar las combinaciones posibles en un problema dado**	descritas en un texto Bloque III Análisis de la información 3.9 Formular preguntas o problemas que se pueden responder a partir de información contenida en diversos portadores Bloque V Análisis de la información 5.9 Seleccionar la información necesaria en portadores diversos				

En estos programas, se pretendió favorecer la vinculación a través de la organización en bloques temáticos que incluían contenidos de los tres ejes. Algunos vínculos se expusieron en las orientaciones didácticas y otros quedaron a cargo de los autores de los libros de texto o de los ficheros de actividades didácticas. Cabe señalar que al principio de cada bloque se ofreció otro elemento que atendía la vinculación de contenidos, se referían a los Aprendizajes esperados, que resumían, los conocimientos y las habilidades que los alumnos debían lograr como resultado del estudio del bloque en cuestión.

En 2011, el propósito de reformar la Educación Básica fue elevar la calidad educativa colocando en el centro del acto educativo al alumno, al logro de los aprendizajes, a los Estándares Curriculares y a favorecer el desarrollo de competencias que permitieran a los estudiantes lograr el perfil de egreso de la Educación Básica. Elevar la calidad de la educación implicaba, entre entras cosas, mejorar el plan y los programas de estudio. En este sentido, resolver problemas

matemáticos y de la vida cotidiana, el desarrollo de competencias para la vida y el razonamiento matemático formaron los propósitos de enseñar matemáticas.

Las competencias matemáticas fueron cuatro: resolver problemas de manera autónoma, comunicar información matemática, validar procedimientos y resultados, y manejar técnicas eficientemente. Asimismo, se señaló la importancia de los conocimientos previos como el primer recurso que el estudiante pone en juego al iniciar el proceso de resolución de la situación propuesta. Por otro lado, en esta propuesta curricular se habla de propósitos y no de objetivos del estudio de las matemáticas, como en reformas curriculares anteriores al 2009. Esos propósitos de estudio de las matemáticas se presentan en la Tabla III.1.16.

Tabla III.1.16. Programas de Matemáticas, 2011

Propósitos del estudio de las Matemáticas para la Educación Básica	Propósitos del estudio de las Matemáticas para la educación primaria
• Desarrollen formas de pensar que les permitan formular conjeturas y procedimientos para resolver problemas, así como elaborar explicaciones para ciertos hechos numéricos o geométricos. • Utilicen diferentes técnicas o recursos para hacer más eficientes los procedimientos de resolución. • Muestren disposición hacia el estudio de la matemática, así como el trabajo autónomo y colaborativo.	• **Emprendan procesos de búsqueda, organización, análisis e interpretación de datos contenidos en imágenes, textos, tablas, gráficas de barras y otros portadores para comunicar información o responder preguntas planteadas por sí mismos u otros**.

A su vez, los contenidos de los programas se estructuraron en términos de estándares, competencias y contenidos temáticos. Los temas estaban organizados por aprendizajes esperados, ejes y contenidos específicos. Los ejes fueron los mismos que en los programas del 2009; entre los temas que se abordaron se encontraba Análisis y representación de datos. Para este tema hay una secuencia de contenidos con respecto a la combinatoria que se exponen en la Tabla III.1.17.

Tabla III.1.17. Contenidos por grado.

Programas de Matemáticas, 2011

Eje Manejo de la Información

Tema	Tercer grado	Cuarto grado	Quinto grado	Sexto grado
Análisis y Representación de Datos	Bloque III • Resolución de problemas en los cuales es necesario extraer información explícita de diversos portadores	Bloque I • Lectura de información explícita o implícita contenida en distintos portadores dirigidos a un público en particular	No existe contenido relacionado con la combinatoria o con los diagramas de árbol	Bloque II • Lectura de datos, explícitos o implícitos, contenidos en diversos portadores para responder preguntas

En los programas, se menciona que el uso de herramientas para representar y comunicar ideas se puede hacer a través de gráficas (barras, pastel, diagramas de árbol, recta numérica, plano cartesiano), figuras geométricas, tablas, pictogramas, expresiones verbales, símbolos o expresiones algebraicas, pero no existe algún apartado dedicado a aclarar estos términos. En el eje Manejo de la Información, se identifica el término “representación”.

Este eje alcanza relevancia a partir de tercer grado, sin embargo, tiene un corto alcance, puesto que no explora la generación de múltiples sistemas de representación de datos. Por ejemplo, los estudiantes pueden obtener información y registrarla a partir del uso de pictogramas y marcas de conteo. Asimismo, los alumnos pueden organizar información a partir del uso de diagramas de árbol, diagramas de Venn, etcétera. Es importante señalar que en los programas 2011 los temas de combinatoria y probabilidad no se abordan.

El currículo 2017 de la Educación Básica es resultado de la Reforma Educativa que inició en diciembre de 2012. Se concentra en el desarrollo de Aprendizajes clave, es decir, de aquellos que hacen posible seguir aprendiendo y que aportan al desarrollo integral de los alumnos. La organización de los contenidos programáticos se expone

en tres componentes curriculares: Campos de Formación Académica, Áreas de Desarrollo Personal y Social, y Ámbitos de la Autonomía Curricular.

Los Campos de Formación Académica son tres; uno de ellos es Pensamiento Matemático. El Campo de Formación Académica Pensamiento Matemático contiene la asignatura de matemáticas. El estudio de la asignatura de matemáticas se organizó en tres ejes temáticos. Entre ellos se encontraba el eje Análisis de Datos. Son diez los temas que se abordan en la educación primaria entre ellos están Estadística y Probabilidad.

El propósito de enseñar matemáticas está dirigido a que los estudiantes desarrollen una forma de razonamiento lógico, analítico y cuantitativo. Además, abarca la resolución de problemas, formular explicaciones, aplicar métodos, poner en práctica algoritmos, desarrollar estrategias de generalización y particularización. Se pretende que los estudiantes justifiquen y argumenten sus planteamientos, y que identifiquen patrones y relaciones para encontrar la solución a un problema. Los propósitos de estudio de la combinatoria en el currículo 2017, se exponen en la Tabla III.1.18.

Tabla III.1.18. Programas de Matemáticas, 2017

Propósitos generales	Propósitos para la Educación Primaria
1. Concebir las matemáticas como una construcción social en donde se formulan y argumentan hechos y procedimientos matemáticos 2. Adquirir actitudes positivas y críticas hacia las matemáticas: desarrollar confianza en sus propias capacidades y perseverancia al enfrentarse a problemas; disposición para el trabajo colaborativo y autónomo; curiosidad e interés por emprender procesos de búsqueda en la resolución de problemas 3. Desarrollar habilidades que les permitan plantear y resolver problemas usando herramientas matemáticas, tomar decisiones y enfrentar situaciones no rutinarias	[…] **7. Reconocer experimentos aleatorios y desarrollar una idea intuitiva de espacio muestral**

El tema de probabilidad del programa de quinto grado pretende acercar a los estudiantes a la idea de experiencia aleatoria y mostrarles el concepto de espacio muestral. Una de las características de una experiencia aleatoria es poder describir

todos sus resultados posibles y los alumnos de este grado deben ser capaces de enlistar los resultados posibles, aunque todavía no se defina formalmente el concepto de espacio muestral. El programa también establece que, a partir de los resultados de los experimentos realizados, los alumnos conozcan la diferencia entre la frecuencia absoluta y la frecuencia relativa.

En el tema de probabilidad del programa de estudio de sexto grado, se presenta la noción de espacio muestral, sin embargo, no es necesario que los estudiantes utilicen la expresión “espacio muestral”. Se pretende que al describir los resultados posibles de experiencias aleatorias que son la repetición de una experiencia dada, los estudiantes utilicen sus propios recursos para determinar el espacio muestral y aprendan a construir un diagrama de árbol como una manera de encontrar todos los resultados del experimento. Asimismo, se indica que los alumnos continúen trabajando en la diferencia entre los fenómenos determinísticos y los aleatorios. En la Tabla III.1.19 se observan los contenidos en conexión con la combinatoria en este currículo.

Tablas III.1.19. Contenidos por grado

Temas de Probabilidad, 2017[51]

<table>
<tr><td rowspan="3">Eje</td><td rowspan="3">Tema</td><td colspan="2">PRIMARIA</td></tr>
<tr><td colspan="2">TERCER CICLO</td></tr>
<tr><td>5°</td><td>6°</td></tr>
<tr><td>ANÁLISIS DE DATOS</td><td>Probabilidad</td><td colspan="2">Determinar y registrar en tablas de frecuencias los resultados de experimentos aleatorios</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Aprendizajes esperados</td><td>5°</td><td>6°</td></tr>
<tr><td>• Identifica juegos en los que interviene o no el azar
• Registra resultados de experimentos aleatorios en tablas de frecuencia (frecuencia relativa, frecuencia absoluta)</td><td>• Determina los resultados posibles de un experimento aleatorio</td></tr>
</table>

[51] Cuando se produce un cambio de planes y programas de estudios es necesario hacer un análisis estructural cognoscitivo antes de que sean difundidos.

A continuación, se examina la exposición de los diagramas de árbol y la combinatoria en los libros de texto en el período 1972 – 2019.

Tabla III.1.20. Descripción del tratamiento que se le dio a los diagramas de árbol y a la combinatoria en los libros de texto de matemáticas de educación primaria[52].

Generación 1972	
3er grado	• Combinaciones: completar tablas • Contexto de los elementos inmersos en la actividad: formar una figura (payaso), atuendos (suéteres, pantalones, blusas, faldas), sabores de helados, tacos, refrescos, parejas de baile • Expresiones como es más fácil que, es igualmente fácil que, es menos fácil que, es más difícil que, ¿estás seguro?, es seguro que siempre…, es posible que…, ¿de cuántas maneras distintas?, ¿qué número de elecciones hay?, es más probable que, es menos probable que, es igualmente probable que • Principio Aditivo. Principio Multiplicativo • El número de lecciones de combinatoria en este libro es once. • Los ejercicios propuestos a los alumnos se realizan individualmente. • Número de posibles resultados: 2, 3, 4, 5
4to grado	• Aproximación al concepto de azar • Combinaciones: completar tablas • Contexto de los elementos inmersos en la actividad: moneda, atuendos (blusas, faldas), menú (sopa, carne, pescado, refrescos), camiones, contenedores, animales (venados), palomas, peces, pastel, urna (paletas), barcos **Lección 20. Diagrama de árbol:** **1. Lectura del diagrama de árbol. Árbol sin raíz con tres fases, orientado hacia abajo, (2, 3, 2)** **2. Completar un diagrama de árbol. Árbol sin raíz con tres fases, orientado hacia abajo, (3, 2, 3)** **3. Recurso para explicar un ejercicio de reparto. Diagrama de árbol sin raíz con dos fases, orientado hacia abajo, (2, 4)** • Principio multiplicativo • Expresiones como: ¿de cuántas maneras distintas?, es más probable que, es menos probable que, es igualmente probable que. • Concepto de evento, representación de eventos como conjuntos. Introducción a los conceptos de intersección y unión de dos conjuntos, complemento de un conjunto • Evento seguro y evento imposible • El número de lecciones sobre combinatoria en este libro es doce.

[52] En negritas se resalta el contenido acerca de los diagramas de árbol.

	• La lección número 8 presenta el mismo contenido que la lección 36 del libro de 3er grado; la lección 64 expone el mismo contenido de la lección 58 del libro de 3er grado; la lección 89 exhibe el mismo ejercicio que el de la lección 71 del libro de 3er grado. • Todas las actividades propuestas serán realizadas individualmente por los alumnos. • Número de posibles resultados: 2, 3, 4, 5, 6, 7
5to grado	• Concepto de azar. Juegos de azar • Contexto de los elementos inmersos en la actividad: monedas, urna (paletas), juguetes (patos, payaso) • Expresiones como: estar seguros, no sabemos, tener duda, es más fácil que, es más difícil que, es igualmente fácil que, es más probable que, es menos probable que, es igualmente probable que. • Concepto de evento, evento imposible, evento seguro • Probabilidad de un evento • Definición de probabilidad de un evento como consecuencia de la ley de regularidad estadística • Probabilidad como fracción • Regla de Laplace • Cálculo de probabilidades. Comparación de probabilidades • Construcción de eventos con determinada probabilidad • El número de lecciones sobre combinatoria y probabilidad en este libro es once. • La lección 4 es la misma que la lección 21 del libro de 3er grado; la lección 5 es la misma que la lección 22 del libro de 3er grado. La lección 15 es la misma que la lección 58 del libro de 3er grado; contiene actividades menos complejas que la lección 64 del libro de 4to. La lección 16 es la misma que la lección 59 del libro de 3er grado; la lección 40 es la misma que la lección 71 del libro de 3er grado. • Todas las actividades propuestas serán realizadas por los alumnos de manera individual. • Número de posibles resultados: 2, 3, 4, 5
6to grado	• Experimentos de azar • Probabilidad • Valores que toma la probabilidad. • Contexto de los elementos inmersos en la actividad: monedas, dados, urna (canicas, listones, paletas) • Expresiones como es más probable que, es menos probable que, es igualmente probable que. • Cálculo y comparación de probabilidades • Muestra. Proporción en la muestra • Regla de Laplace • Probabilidad como fracción • Probabilidad de un evento. Probabilidad como consecuencia de la regularidad estadística • Concepto de evento, evento seguro y evento imposible

	• Representación de los eventos a través de conjuntos. Intersección y unión de dos conjuntos, complemento de un conjunto • A partir de una probabilidad identificar el evento del que proviene. • Concepto de probabilidad empírica y probabilidad teórica. Probabilidad teórica. Ley de los grandes números • El número de lecciones sobre combinatoria y probabilidad en este libro es cinco. • Las actividades propuestas se realizan de manera individual. • Número de posibles resultados: 2, 3, 4, 5, 6
Generación 1982	
2do grado	El libro está organizado en Unidades y Módulos. **Diagrama de árbol como organizador de las ideas principales de un texto**
3er grado	• Experimentos de azar • Ejercicios de extracción con reemplazo de objetos contenidos en una urna • Contexto de los elementos inmersos en la actividad: urna (paletas, cubos, barcos, corcholatas), juguetes (aviones, pelotas, coches), tornillos, macetas, muñecas, lápices, tenis, bolsas, manzanas, relojes, tazas • Uso de expresiones como es posible que, no es posible que, es imposible que, es más fácil que, es más posible que, es menos posible que, es igualmente posible que. • En este libro el número de lecciones de combinatoria es cuatro. • Las actividades propuestas serán realizadas por los alumnos en forma individual. • Número de posibles resultados: 3, 4
4to grado	El contenido es el mismo del libro de 4to grado de la generación 1972.
5to grado	Es el mismo contenido que el del libro de 5to de la generación 1972.
6to grado	Mismo contenido del libro de 6to de la generación 1972.
Generación 1988	
2do grado	**Diagrama de árbol como organizador de las ideas principales de un texto.**
3er grado	El contenido es el mismo del libro de 3er grado de la generación 1982.
4to grado	El contenido es el mismo del libro de 4to grado de la generación 1972.
5to grado	Es el mismo contenido que el del libro de 5to de la generación 1972.
6to grado	Mismo contenido del libro de 6to de la generación 1972.
Generación 1993	
1er grado	El libro está organizado en Bloques. **Uso de diagramas de árbol en la escritura de un número como la suma de otros dos números (descomposición aditiva). El árbol tiene raíz, es de una fase, se orienta hacia abajo o hacia la derecha.**

	• En este libro el número de lecciones relacionadas con combinatoria es dos. • Las actividades propuestas serán realizadas por los alumnos en forma individual.
2do grado	• Combinaciones: ¿Qué objetos puedes comprar con cierta cantidad de dinero? ¿De qué otra forma puedes pagar? **Uso de diagramas de árbol en los siguientes casos:** **1. Estudio de la notación desarrollada de un número natural menor que mil. El diagrama** **tiene raíz, cuatro fases y está orientado hacia arriba. Red.** **2. Ejercicios de suma y resta de números naturales menores que mil. Red.** • En este libro el número de lecciones relacionadas con la combinatoria y con los diagramas de árbol es tres. • Las actividades propuestas serán realizadas por los alumnos en forma individual.
3er grado	En la primera edición de este libro, que fue reimpresa desde 1993 hasta 1998, aparece el **uso del diagrama de árbol como un recurso para ejercitar la adición y la sustracción de números naturales menores que 1000**. **El diagrama tiene raíz, tiene tres fases y está orientado hacia arriba.** • Uso de arreglos rectangulares para razonar de modo que de la observación o del conocimiento de los casos particulares se alcance a la formación del algoritmo de la multiplicación. • Noción de juego de azar • Contexto de los elementos inmersos en la actividad: manzanas, juegos de lotería, serpientes y escaleras, damas, tómbola • Expresiones como se sabe lo que va a pasar, no se sabe lo que va a pasar. • El número de lecciones de combinatoria en este libro es tres. • Las actividades propuestas serán realizadas por los alumnos en forma individual. • Número de posibles resultados: 4
4to grado	• Juegos de azar. Registro de resultados. Tabla • Combinaciones: completar cuadrados mágicos, ¿qué puedo comprar con cierta cantidad de dinero para que no sobre ni falte nada? • Principio multiplicativo • Contexto de los elementos inmersos en la actividad: urna (canicas), niños, atuendos (faldas, blusas), telas, estambre, listones, juego parecido al de serpientes y escaleras, monedas, dado • Uso de expresiones como ¿a qué color le apostarías tú para ganar?, es más fácil que, es más probable que, es igualmente probable que, ¿de cuántas maneras distintas? • El número de lecciones de combinatoria en este libro es siete. • Las actividades se desarrollan predominantemente en forma individual que grupal. • Número de posibles resultados: 2, 3, 4, 5.

	• Se expone un grafo que estrictamente no es un diagrama de árbol para contar el número de combinaciones al formar diferentes atuendos; se lee “el procedimiento que tú utilizaste ¿es cómo alguno de estos? ¿es diferente?”. • El tema de combinatoria se sitúa en las últimas lecciones de este libro. En las generaciones de libros anteriores el tema está presente en lecciones que se ubican al inicio, en medio o al final del libro.
5to grado	• Establecer diferencias entre la variación proporcional y no proporcional. • Tablas de doble entrada para conteo de arreglos • Combinaciones **Uso de diagramas de árbol para las siguientes actividades:** **1. Contar el número de opciones** **2. Organizar la información** **3. Contar el número de arreglos y permutaciones** **Leer y completar un diagrama de árbol sin raíz, de dos fases, orientado hacia la derecha, (2, 3)** **Completar un diagrama de árbol sin raíz, con tres fases, orientado hacia la derecha (3, 3, 3)** **Construir un diagrama de árbol de dos fases (3, 4)** **Construir un diagrama de árbol de tres fases (2, 3, 2)** **Colorear un diagrama de árbol, sin raíz, de dos fases (3, 3)** • Principio Multiplicativo • Permutaciones • Tabla de doble entrada para conteo de arreglos y permutaciones • Experimentos aleatorios. Tablas de frecuencia • Cuadrados mágicos. Selección de objetos con reemplazo • Análisis de resultados posibles y de casos favorables • Probabilidad de un evento. Probabilidad frecuencial. Regla de Laplace • Permutaciones • Contexto de los elementos inmersos en la actividad: programas de televisión, menú, triángulos y cuadriláteros, cuentas de colores, dados, urna (papelitos, cubos), ruleta, palabras, tercia de números naturales • Expresiones como ¿cuántas opciones diferentes tiene?, ¿cuántos platillos distintos puede servir?, ¿cuántas combinaciones diferentes ofrece?, ¿cuál es el mayor número de puntos que se puede obtener al tirar cinco canicas?, ¿cuántos diseños diferentes hay?, ¿cuántos posibles resultados hay?, ¿cuántas oportunidades hay?, más probable que, menos probable que, igualmente probable, ¿qué es más probable?, ¿cuál es la probabilidad de que? • El número de lecciones de combinatoria en este libro es siete. • Las actividades se desarrollan casi en su totalidad en forma individual. • Número de posibles resultados: 2, 3, 4, 6, 7 • El tema de combinatoria se expone en diferentes lecciones de la segunda mitad del libro. • **En la segunda edición se expone el uso de diagramas de árbol para las siguientes actividades:**

	1. Organizar la información **2. Contar el número total de casos** **Leer un diagrama de árbol de dos fases, con raíz, orientado hacia arriba, (3, 4)** **Dibujar un diagrama de árbol, (3,3)** **Completar un diagrama de árbol con raíz, de tres fases, orientado hacia arriba, (3, 2, 2). Completar un diagrama de árbol sin raíz, de dos fases orientado hacia abajo (4, 3). De un diagrama de árbol formado por tres árboles completar dos a partir del primero** **Leer un diagrama de árbol con raíz de una fase orientado hacia la derecha (1,3). Completar un diagrama de árbol con raíz de dos fases orientado hacia la derecha (2,3)** **Construir un diagrama o dibujos para mostrar todos los resultados posibles al lanzar tres monedas, cinco veces** **Construir un diagrama de árbol para contar todos los resultados al lanzar un dado de tres colores** • Contexto de los elementos inmersos en la actividad: animales de zoológico, menú (tortas, agua de frutas, frutas naturales), atuendos (camisas, pantalones, anteojos), dados, monedas, colores, juego del disparejo • Expresiones como: experimento aleatorio, ¿de cuántas formas diferentes es posible iluminar?, ¿de cuántas maneras diferentes lo puedes hacer?, ¿qué combinaciones aparecieron más veces?, ¿qué es más probable?, más probable que, menos probable que. • El número de lecciones de combinatoria en este libro es cinco. • En el tema de estadística se encuentran preguntas como Al girar una ruleta, ¿obtuvo alguien el color café? ¿por qué? Si en este momento giras tu ruleta, ¿qué color crees que saldrá? ¿por qué? Si tomas en cuenta el valor numérico de cada color, ¿qué es más fácil de obtener?, un valor mayor que 6 o uno menor que 6. • Las actividades propuestas serán realizadas por los alumnos en forma individual. • Número de posibles resultados: 3, 4
6to grado	• Combinaciones • Registro de experimentos aleatorios. Tabla de frecuencias • Ejercicios: Dibuja las notas necesarias para que todos los compases tengan la misma duración $\frac{5}{4}$. Puede haber varias respuestas correctas. • Comparación y suma de fracciones. • Elección de dos factores de 72 siendo uno de ellos el cuadrado de otro • Elección de tres factores de 72 **Uso de diagramas de árbol para las siguientes actividades:** **1. Contar el número total de resultados**

	Completar un diagrama de árbol sin raíz, con tres etapas, orientado hacia abajo (3, 3, 3). Deducir el Principio Multiplicativo **Construir un diagrama de árbol con tres fases (4, 4, 4). Principio multiplicativo. Operaciones con fracciones** **Completar un diagrama de árbol para contar el número de combinaciones. Diagrama de árbol con raíz, tres fases, orientado hacia abajo (3, 3, 3)** **Construir un diagrama de árbol de tres fases (3, 3, 3)** **Completar un diagrama de árbol sin raíz con tres fases (3, 3, 3). Unir tres árboles** **Completar un diagrama de árbol como recurso para resolver ejercicios de tanto por ciento. Diagrama con raíz, de dos fases, orientado hacia abajo (2, 2)** **Construir un diagrama de árbol con cuatro etapas (3, 3, 3, 3). Principio Multiplicativo** **Leer un diagrama de árbol para representar la solución del problema de la división de la apuesta planteada a Pierre de Fermat y a Blas Pascal** • Contexto de los elementos inmersos en la actividad: monedas, dados, candado, lechuga, conejo, perro, comisiones de alumnos • Expresiones como ¿cuál fue el valor más frecuente?, ¿cuál fue el valor menos frecuente?, ¿cuántas combinaciones tendrá?, ¿de cuántas maneras diferentes?, ¿cuántas combinaciones hay?, ¿cuántos arreglos?, ¿en cuántas comisiones diferentes?, ¿hay más combinaciones?, es más probable. • El número de lecciones de combinatoria en este libro es nueve. • Los ejercicios propuestos a los alumnos se llevan a cabo generalmente de forma individual. • Número de posibles resultados: 2, 3, 4, 6, 10 • En la segunda edición de este libro encontramos un ejercicio para completar un diagrama de árbol que presenta raíz, con dos fases, orientado hacia la derecha (3, 3,). • Ejercicios. René viaja en su coche al Distrito Federal y cometió dos infracciones por las que pagó 1.5 meses de salario mínimo. ¿cuáles infracciones pudo haber cometido. • Completa la tabla sumando el resultado del primer dado con el del segundo. ¿Cuántos resultados posibles hay en total? • Este libro está organizado en Bloques y lecciones.
Generación 2008	
1er grado	• Combinaciones. Registro en tablas • Contexto de los elementos inmersos en la actividad: camisas, pantalones, triángulos, trapecios • Uso de expresiones como ¿de cuántas maneras diferentes? • El número de lecciones de combinatoria en este libro es 2. • Las actividades propuestas a los estudiantes se realizan en grupo. • Número de posibles resultados: 2, 3

	• El tema se ubica en el Bloque IV de cinco que forman el programa.
2do grado	• Clasificar, ordenar y describir colecciones • Recopilación de datos para obtener nueva información. Registro en tablas **Uso de diagramas de árbol para las siguientes actividades:** **Como recurso para resolver un ejercicio de adición. Árbol con raíz de dos fases (2, 4)** • Leer información contenida en diferentes medios • Representar información en tablas de doble entrada. Problemas multiplicativos • Contexto de los elementos inmersos en la actividad: frutas, juguetes, boleto de entrada al cine, mochila, goma, pluma, lápices de colores, lápiz, sacapuntas, vestuario para una muñeca • Expresiones como escribe en tu cuaderno las combinaciones de ropa, ¿cuántas combinaciones encontraste?, ¿cuántas combinaciones hay? • El número de lecciones de combinatoria en este libro es uno. • La mitad de las actividades propuestas a los estudiantes se realizan individualmente y la otra mitad en grupo. • Número de posibles resultados: 3, 4
3er grado	• Excluyendo algunas lecciones que fueron incorporadas y que no están relacionadas con la combinatoria, el contenido de este libro es el mismo del libro de 3er grado de la generación 1993.
4to grado	El contenido es el mismo del libro de 4to grado de la generación 1993.
5to grado	• Resolver problemas de conteo • Identificar los elementos de un experimento aleatorio. Registro en tablas • Noción de evento, evento posible, evento seguro, evento imposible • Principio multiplicativo • Elaborar, leer e interpretar tablas de frecuencia • Buscar y organizar información en tablas • Contexto de los elementos inmersos en la actividad: menú, equipos de futbol, números, tortas, tacos, aguas de frutas, quesadillas, verduras, ruleta, dado, moneda, lápices de colores, urna (paletas) • Expresiones como: ¿cuántas opciones hay?, ¿cuántas posibilidades hay?, ¿qué es más probable?, ¿cuáles son las diferentes posibilidades?, ¿cuáles son los posibles resultados? • Las actividades propuestas se desarrollan predominantemente en forma grupal. • El número de lecciones de combinatoria en este libro es 2. • Número de posibles resultados: 2, 3, 4, 8, 10
6to grado	• Problemas multiplicativos • Resolver problemas a partir de información contenida en tablas • Interpretar información contenida en distintos medios • Resolver problemas de conteo mediante procedimientos informales • Enumerar los posibles resultados de una experiencia aleatoria • Resolver problemas de conteo que involucran permutaciones sin repetición.

	Uso de diagrama de árbol para las siguientes actividades: **1. Contar todas las formas diferentes en que pueden ordenarse algunos elementos. Diagrama con raíz, de dos fases, dirigido a la derecha (4, 2)** • Organizar información seleccionando un modo adecuado de presentación • Probabilidad teórica, probabilidad frecuencial • Comparar la probabilidad teórica de un evento simple con su probabilidad frecuencial • Contexto de los elementos inmersos en la actividad: sabores de helados, muñecas, cuentas, combinación de una caja fuerte, placas de automóviles, moneda, tenis, dado, pantalón, camisa, corbata, números telefónicos, rutas, prismas • Uso de expresiones como ¿cuántos resultados posibles se tendrán?, ¿cuántas combinaciones posibles hay?, ¿de cuántas formas?, ¿cuántas placas diferentes hay?, ¿cuántas variantes?, ¿cuál es el total de resultados posibles? • Las actividades propuestas en este libro se desarrollan en forma grupal. • El número de lecciones de combinatoria en este libro es cinco. • Número de posibles resultados:2, 3, 4, 5, 6, 9 Además, en el cuaderno de trabajo para este grado se expone las siguientes actividades: • Encontrar todas las formas diferentes de servir dos sabores distintos de helado de cuatro posibles • Formar una comisión de tres alumnos entre cinco representantes de los grupos de sexto grado • Elegir un comité formado por tres integrantes: un presidente, un secretario, un tesorero. Numerar todas las posibles formas en que se puede formar el comité. Al agregar más integrantes, ¿de cuántas maneras se puede firmar el comité? ¿De cuántas maneras diferentes pueden colocarse seis alumnos en una escolta? • Expresiones como más posibilidades, es más probable. • Los temas de combinatoria y probabilidad se exponen en el Bloque IV. • Número de posibles resultados: 2, 3, 4, 5, 6, 7
Generación 2011	
A partir de esta generación de libros de texto los diagramas de árbol se suprimen.	
3er grado	• Leer información contenida en distintas fuentes. • Diseñar tablas para representar correspondencia entre datos. • Juegos de azar. Registro de resultados en tablas. • Contexto de los elementos inmersos en la actividad: cartel, cajas de té y de cereal, felinos, ruleta, lotería, naipes, tiro al blanco, dados, urna (papelitos, esferas). • Expresiones como juego de azar, es más fácil obtener. • Las actividades propuestas en este libro se realizan lo mismo en forma individual que en grupo. • El número de lecciones en relación con la combinatoria en este libro es uno.

	• Número de posibles resultados: 2, 3, 4 • El tema de probabilidad se presenta en la última lección del libro.
4to grado	• Resolver problemas que involucren distintas aplicaciones de la multiplicación • Combinatoria. Tablas • Leer información contenida en distintos portadores • Emplear tablas de frecuencias • Comparar dos o más eventos a partir de sus posibles resultados usando relaciones como es más probable que, es menos probable que. • Resolver problemas simples que necesitan una búsqueda exhaustiva de posibilidades (problemas de conteo). • Contexto de los elementos inmersos en la actividad: colores, frutas, parejas de baile, cuaderno, moneda, urna (lápices de colores, esferas, fichas), piedras de colores, flores, camisas, pantalones, gorras, billetes de diferentes denominaciones, dado, candado • Expresiones como ¿de cuántas maneras?, ¿cuántas combinaciones diferentes se pueden tener?, ¿cuántos postres diferentes se pueden servir?, ¿cuántas parejas diferentes de baile se podrán formar?, muy probable, poco probable, totalmente seguro, imposible. • Las actividades propuestas en este libro se realizan en su mayoría en grupo. • El número de lecciones en relación con la combinatoria en este libro es cuatro. • Número de posibles resultados: 2, 3, 4, 6 • El tema de combinatoria se expone en la última lección del libro.
5to grado	• Resolver problemas de conteo. Registro en tablas • Elaborar, leer e interpretar tablas de frecuencia • Elaborar, leer e interpretar tablas de doble entrada • Identificar los elementos de un experimento aleatorio • Contexto de los elementos inmersos en la actividad: menú, torneo de futbol, ternas de números, ruleta, moneda, dado, lápices de colores, urna (paletas). • Expresiones como ¿cuántas palabras diferentes puedes formar?, ¿cuántos son los posibles resultados?, ¿cuántos y cuáles son los posibles resultados?, es igualmente probable, evento posible, evento seguro, espacio muestral, evento probable, evento imposible. • Las actividades propuestas se realizan lo mismo de forma individual que de manera grupal. • El número de lecciones en relación con la combinatoria en este libro es dos. Es importante aclarar que los ejercicios de la página 15 son los mismos que los de la página 17 del libro de 5° de la generación 2008; los ejercicios de la página 112 son los mismos que los de la página 109 del libro de 5° de la generación 2008. • Número de posibles resultados: 2, 3, 4, 5, 6 • El tema de combinatoria se encuentra en los Bloques I y III del programa
6to grado	• Resolver problemas de conteo usando distintos procedimientos. Registro en tablas • Resolver problemas de conteo que involucran permutaciones sin repetición. • Identificar los posibles resultados de una experiencia aleatoria

	• Comparar la probabilidad teórica con la probabilidad frecuencial • Contexto de los elementos inmersos en la actividad: sabores de helado, números telefónicos, flores, cubos, números, dados, banderas, monedas, combinación de una caja fuerte, placas de automóviles, urna (canicas, esferas, tarjetas de colores) • Uso de expresiones como ¿de cuántas maneras?, encuentra todas las maneras, ¿de cuántas formas distintas?, ¿cuántas banderas distintas?, espacio muestral, ¿qué es más probable?, ¿cuál es la probabilidad? • Las actividades propuestas se realizan preferentemente en grupo. • El número de lecciones en relación con la combinatoria en este libro es cuatro. Resulta importante observar que los ejercicios de la página 133 son los mismos que los de la página 123 del libro de 6° de la generación 2008. • Número de posibles resultados: 2, 3, 4, 6 • El tema de combinatoria se encuentra en los Bloques III, IV, V del libro.
Generación 2014	
2do grado	• Usar la multiplicación como una forma de resolver problemas que implican arreglos rectangulares. Registro en tablas • Contexto de los elementos inmersos en la actividad: blusas, faldas, lámparas, focos, shorts, playeras, números de dos cifras • Uso de expresiones como ¿de cuántas maneras diferentes?, ¿cuántas combinaciones?, ¿cuántos números diferentes?, ¿cuántos uniformes puede formar? • Las actividades propuestas se realizan en grupo. • El número de lecciones en relación con la combinatoria en este libro es uno. • Número de posibles resultados: 2, 3, 4 • El tema de combinatoria se ubica en el Bloque IV del libro.
4to grado	• Explorar distintos significados de la multiplicación • Principio Multiplicativo • Contexto de los elementos inmersos en la actividad: casas, postres, parejas de baile • Expresiones como ¿cuántas casas diferentes? ¿cuántos postres diferentes? ¿cuántas parejas de baile diferentes? • Las actividades propuestas se realizan en equipos. • En la única lección en relación con la de combinatoria (lección 13, Bloque I) se lee: “Este desafío incluye tres problemas…Pueden resolverse usando diferentes representaciones en las que el problema principal consiste en vigilar que no sobren o falten combinaciones. Después de probar con tales representaciones se espera que los alumnos descubran que una multiplicación puede ser suficiente para llegar a la solución.”. Enseguida se exhiben diagramas que semejan un diagrama de árbol. • Número de posibles resultados: 2, 3, 4
Generación 2018	
1er grado	• Registro de resultados en tablas • Contexto de los elementos inmersos en la actividad: monedas, cuentas, uvas, números

	• Uso de expresiones como ¿cuántas águilas salieron?, ¿cuántos soles salieron?, ¿de cuántas maneras diferentes? • Exhiben ejercicios que los alumnos resolverán individualmente: 1. “Lanza 10 monedas de un peso y de la forma que caigan ponlos en el tablero de 10” (Bloque 1). 2. “Las cuentas de los collares cuestan 1 peso cada una. ¿De cuántas maneras diferentes se puede pagar por un collar de 28 cuentas con monedas de 1 y 10 pesos?” (Bloque 1). 3. “Tengo 16 uvas en mi plato. Unas son verdes y otras son moradas. ¿Cuántas uvas de cada color podía tener?” (Bloque 1). 4. “Mario representa el número 30 de distintas maneras. En equipo, respondan ¿de qué otras maneras pueden representar el número 30?” (Bloque 1). 5. “En el monedero de Julia hay 68 pesos en monedas de 1 y 10 pesos. Dibuja cuántas monedas de cada una puede haber. Encuentra diferentes respuestas” (Bloque 2) 6. “En la alcancía de Alma hay 45 pesos en monedas de 1 peso y de 10 pesos. ¿Cuántas monedas de 10 pesos y de 1 peso puede haber? Anota todas las posibles respuestas en la tabla” (Bloque 2). • El número de lecciones en relación con la combinatoria en este libro es cinco. • Número de posibles resultados: 2
2do grado	• Contexto de los elementos inmersos en la actividad: artesanías, torta, agua de jamaica, quesadillas, helados, monedas, juguetes, fichas, pantalón, playera, zapatos, vestidos • Buscar estrategias de conteo en arreglos rectangulares[1], donde no son perceptibles todos los elementos. “¿Qué artesanías puedes comprar con 30 pesos?” (Bloque 1). • Utilizar estrategias para resolver problemas de suma y resta. “¿Qué puedes comprar con $150? Intenta comprar muchos juguetes a la vez. Encuentra al menos tres posibilidades diferentes y escríbelas en tú cuaderno” (Bloque 2). • Identificar el valor posicional de los dígitos en números hasta 1000. “¿De cuántas maneras diferentes puedes tener $100 con billetes de $100 y monedas de $10 y de $1?” (Bloque 2). • Comparar números de tres cifras. “Jueguen en equipos y usen las tarjetas del 0 al 9. Cada persona tome tres tarjetas y forme un número con ellas. Gana el que forme el número mayor” (Bloque 3). • Descomponer cantidades que puedan representarse por medio de arreglos rectangulares. “Encuentren todas las posibilidades que hay para acomodar sus galletas y escríbanlas en su cuaderno”. (Bloque 3). • Identificar el valor posicional de los dígitos en números hasta 1000. • Las actividades propuestas se realizan en grupo. • El número de lecciones en relación con la combinatoria en este libro es seis. • Número de posibles resultados: 2, 3, 6 [1] Se refiere a tablas.
3er grado	El contenido es el mismo del libro de 3er grado para el alumno de la generación 2014.
4to grado	El contenido es el mismo del libro de 4to grado para el alumno de la generación 2014.

5to grado	El contenido es el mismo del libro de 5to grado para el alumno de la generación 2014.
6to grado	El contenido es el mismo del libro de 6to grado para el alumno de la generación 2014.
2019	
1er grado	El contenido es el mismo del libro de 1er grado de la generación 2018. El libro para el docente para este grado es el mismo de la generación 2018.
2do grado	El contenido es el mismo del libro de 2do grado de la generación 2018. El libro para el docente para 2do grado es el mismo de la generación 2018.
3er grado	El contenido es el mismo del libro de 3er grado de la generación 2014. Sin libro para el docente.
4to grado	El contenido es el mismo del libro de 4to grado de la generación 2014. Sin libro para el docente.
5to grado	El contenido es el mismo del libro de 5to grado de la generación 2014. No hay libro para el Maestro.
6to grado	El contenido es el mismo del libro de 6to grado de la generación 2014. No hay libro para el Maestro.

Fuente: Elaboración propia

La síntesis de la exposición de los diagramas de árbol en los libros de texto de matemáticas de educación primaria se presenta en la tabla III.1.21.

Tabla III.1.21. Presencia del tema diagramas de árbol en los libros de texto gratuitos

Grado / Generación de libros de texto	1°	2°	3°	4°	5°	6°
1972				Leer y completar un árbol El diagrama es un recurso para explicar un problema de reparto.		
1982		El árbol es una herramienta para organizar las ideas principales de un texto.		Mismo contenido del libro de la generación 1972		
1988				Mismo contenido del libro de la generación 1972		
1993	Uso del diagrama de árbol para explicar la descomposición aditiva de un número	El diagrama de árbol es una herramienta para explicar la notación desarrollada de un número natural menor que 1000.	Empleo de un árbol para ejercitar la adición y la sustracción de números naturales menores que 1000		Aplicar el diagrama de árbol para organizar información y contar el número de permutaciones. Colorear, completar, leer y construir un árbol de dos y tres fases	Leer un árbol Emplear un diagrama de árbol para contar el número total de resultados de un evento y para contar el número de combinaciones El diagrama se aplica para deducir el Principio Multiplicativo. Unir tres árboles.
2008		Emplear un diagrama de árbol para resolver ejercicios de adición				Uso de un árbol para contar el número de ordenaciones
Los diagramas de árbol están ausentes de los planes y programas a partir de 2011						

Fuente: Elaboración propia

De la lectura de la tabla anterior se infiere que la evolución del tema de los diagramas de árbol en los libros de texto de educación primaria inicia con el surgimiento del tema en el libro de cuarto grado de matemáticas de la generación 1972. No obstante, en el contenido de los libros de texto de quinto y sexto grado no se encuentran ni los diagramas de árbol ni la combinatoria. Al contenido del libro de cuarto grado relacionado con los árboles y la combinatoria se incorporó una lección del libro de segundo grado de la generación 1982. Nuestro tema de investigación no se presentó en ningún otro libro de esa generación.

En la generación 1988, la lección del libro de segundo grado mencionada se suprimió y el contenido del libro de cuarto grado se repitió. Ni los árboles ni la combinatoria fueron integrados a los libros de otros grados. Considerando lo anterior, es importante observar que en la generación 1993 tanto los diagramas de árbol como conceptos relacionados con la combinatoria están en los contenidos de todos los libros de texto excepto en el libro de cuarto grado. Esta interrupción evita la transición entre el uso de los árboles como herramienta para explicar conceptos o ejercicios y el estudio de los diagramas de árbol como objetos de estudio, como parte de la teoría de grafos.

La presencia de conceptos de combinatoria y de los diagramas de árbol en la generación 2008 de libros de texto se redujo a una actividad en el libro de segundo grado y un ejercicio en el libro de sexto grado. La evolución del tema de diagramas de árbol en los libros de texto de educación primaria no es significativa pues la secuencia, la organización y la presentación de contenidos, así como el tipo de actividades y los contextos no ofrecen nuevas situaciones de aprendizaje. Sin una definición precisa, y sin variaciones en su construcción, los diagramas de árbol han sido utilizados para justificar la multiplicación o para contar.

En este apartado, se analiza la información contenida en las tablas relacionadas con los libros de texto gratuitos considerando la Guía de Análisis de

Lecciones de Libros de Texto de Matemáticas (GALT-Matemáticas)[53]. Entre las propuestas para el análisis de libros se encuentra la Guía de Análisis de Lecciones de Libros de Texto de Matemáticas que permite contar con guías para examinar la idoneidad didáctica[54] de una lección de un libro de texto para empezar un tema de matemáticas.

La idoneidad didáctica es un aspecto distintivo graduable de los procesos de enseñanza y aprendizaje que supone la articulación de seis facetas: epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica. Cada una de estas facetas se separan en componentes, subcomponentes e indicadores que son criterios específicos[55].

Ubicación

Respecto a la ubicación de los temas sobre diagramas de árbol y combinatoria en los libros de texto, ésta se modificó con el pasar del tiempo. Mientras que en las generaciones 1972 y 1993 ambos temas se presentan en diferentes lecciones distribuidas al inicio, en medio y al final del libro, en las generaciones 2008 y 2011 las lecciones se sitúan en la segunda mitad, en la generación 2014 se encuentra en

[53] Burgos, M., Castillo, M. y Godino, J. (2022). Elaboración de una guía de análisis de libros de texto de matemáticas basada en la teoría de la idoneidad didáctica. Educacão e Pesquisa, São Paulo, v.48.

[54] Se entiende por criterio de Idoneidad didáctica a la norma de corrección que establece cómo debería realizarse un proceso de enseñanza aprendizaje, (Burgos; Castillo; Godino, 2022, p.4)

[55] Los componentes de la idoneidad epistémica son significados, relaciones, procesos, conflictos epistémicos; sus subcomponentes son situaciones problema, lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos, comunicación, argumentación, modelización, generalización. Por otra parte, los componentes que forman la idoneidad cognitiva son relaciones, conocimientos previos, diferencias individuales, conflictos cognitivos y evaluación. La idoneidad afectiva tiene por componentes actitudes, emociones, creencias, valores, evaluación afectiva. A su vez, los componentes de la idoneidad interaccional son interacción autor-alumno, interacción entre alumnos, autonomía, evaluación formativa. Por otra parte, los componentes de la idoneidad mediacional son recursos materiales y tiempo. Los componentes de la idoneidad ecológica son adaptación al currículo, apertura a la innovación, adaptación socio profesional, educación en valores, conexiones intra e interdisciplinares.

las primeras o en las últimas páginas y en la generación 2018 ocupan la primera mitad de los libros.

Por ejemplo, en el libro de 6° de la generación 1972, las lecciones se encuentran en las páginas: 18, 33, 60, 102 y 177 (el libro se compone de 52 lecciones y 192 páginas). En el libro del mismo grado de la generación 1993, edición 1994, al menos uno de los dos temas se muestra en las páginas: 31, 51 y 108 (esta obra está formada por 35 lecciones y 207 páginas). En el caso del libro de 6° de la generación 1993, edición 2001, los temas de nuestro interés están expuestos en las páginas: 21, 36, 70, 80, 90, 108, 152, 166 y 190 (87 lecciones y 191 páginas integran el libro).

En el libro *Matemáticas. Tercer grado* (1972) se encuentran los primeros conocimientos acerca del azar y la combinatoria. La lección 21 se titula “Azar” (p. 57), la lección 22, “Concepto de azar” (p. 58), y la lección 31, “Combinatoria” (p. 78). En 1974, se publicó el libro *Matemáticas. Cuarto grado*, **donde se presenta por primera vez el empleo de un diagrama de árbol.** En el libro de 6° de la generación 2008, las lecciones se sitúan en las páginas: 78, 120, 147, 181, 186 (esta publicación está constituida por 47 lecciones y 191 páginas).

En el correspondiente cuaderno de trabajo, las lecciones se encuentran en las páginas: 86, 113, 114, 122, 150, 152 y 153 (el total de lecciones de esta obra es 117 y de páginas es 153). En el libro correspondiente de la generación 2011, las lecciones están en las páginas: 91, 129, 141, 147 y 176 (el libro está conformado por 46 lecciones y 188 páginas). Es oportuno mencionar que al pasar de una generación a otra la extensión de las lecciones se redujo.

Por lo que respecta a la generación 2014, solo existen dos lecciones que tratan los temas de diagramas de árbol y combinatoria. El primer caso se encuentra en el libro de 2° en la página 87 (está publicación está formada por 59 lecciones y 118 páginas) y en el segundo caso en el libro de 4° en la página 31 (el número total de consignas es 106 y el de páginas del libro es 198).

En el libro de 1° de la generación 2018, las lecciones de las páginas 20, 66, 72, 73 y 141 exhiben asuntos relacionados con la combinatoria (esta obra está constituida de 27 lecciones y 195 páginas). En cuanto a el libro de 2° de la misma generación, el tema se sitúa en las páginas: 27, 33 y 34 (el libro está integrado por 30 lecciones y 207 páginas). Los diagramas de árbol y la combinatoria están ausentes de los libros de texto de las generaciones 2018 y 2019. De esta manera, puede verse que la ubicación de nuestro tema de investigación se desplazó hacia las últimas lecciones de los libros.

La secuenciación de los contenidos en los libros de texto pudo obedecer a que se sigue el orden del programa o a que los alumnos accedieran a ideas y recursos matemáticos más complejos. Considerando que desde el plan de estudios 1993 es prerrogativa del profesor organizar los contenidos del programa, así como las actividades del libro de texto en la forma que considere más adecuada, es probable que el estudio de los diagramas de árbol se dejó para la parte final del curso, se descuidó o se ignoró.

Lenguaje

En los libros de texto de educación primaria se encuentra una tendencia en la disminución del uso del lenguaje especializado, que va desde la utilización de léxico relativo a la combinatoria en la generación 1972 de libros, hasta uno más coloquial en las generaciones 2018 y 2019. En los libros de la generación 1972, el lenguaje es acorde al nivel de los destinatarios sin perder los conceptos que caracteriza a la combinatoria; hay presencia del lenguaje coloquial, del lenguaje gráfico y del lenguaje simbólico asequible al nivel de comprensión de los alumnos (consultar GALT-Matemáticas, Idoneidad epistemológica, Significados, Lenguaje, p.9).

A partir de la generación 1993, predominó el lenguaje coloquial sobre el especializado, por ejemplo, en el libro de 4° de la generación 1972 se expone lo siguiente:

[…] *José usa la palabra* ***evento*** *para describir qué tipo de barca es la primera que pesca… Observa que el evento "barca negra y velas rojas" no tiene ninguna barca. Es un evento* ***imposible****, porque no puede suceder… El evento "velas amarillas o barca negra" tiene a todas las barcas. Es un evento* ***seguro****, porque con seguridad ocurre* […]

[…] *El evento "barca blanca* ***y*** *velas amarillas" … El evento "barca café* ***o*** *barca blanca" … El evento "barca* ***no*** *blanca".*

En el libro de 4°de la generación 2008, se exhibe: […] *¿De cuántas maneras distintas se pueden formar…?, ¿De cuántas maneras diferentes pueden combinar…?, Los niños pueden combinar de 15 maneras distintas la tela para los sacos y los pantalones ¡Encuéntralas!* Y en el libro de 4° de la generación 2011 se encuentra: […] *¿Cuántas formas diferentes encontraste?... ¿De cuántas formas diferentes…? ¿Cuántas combinaciones diferentes?... Escribe todas las formas diferentes en que es posible establecer dicha combinación.*

Las palabras *evento*, *evento seguro*, *evento imposible*, *más probable*, *menos probable*, *igualmente probable* no se emplean. Tampoco se emplean las conjunciones ***o*** e ***y***.

Con los cambios observados al transcurrir las generaciones de libros de texto respecto al uso del lenguaje, es posible concluir que se ha reducido el número de palabras para captar los contenidos de los cursos programáticos relacionados con combinatoria. En las generaciones de libros de texto 2018 y 2019, las palabras del lenguaje cotidiano se usan específicamente para referirse a procedimientos; además, este lenguaje se asoció a diversos significados de la probabilidad (intuitivo, clásico, frecuencial). Es importante mencionar que la falta de fundamentos precisos, de confirmación de criterios y de adquisición de acepciones combinatorias podría dificultar la transición al emplear libros de texto de primer curso de educación secundaria.

Conocimientos previos.

En relación con las lecciones que recurren a los conocimientos previos de los alumnos sobre los diagramas de árbol y la combinatoria, cabe mencionar que había presencia de situaciones, referencias, resúmenes recordatorios, palabras, dibujos, datos u otros elementos que relacionan a la combinatoria con contenidos anteriores, ya conocidos por los alumnos; por ejemplo, en el libro de 6° de la generación 1972 se encuentra lo siguiente:

[…] *Cuando no podemos saber con seguridad cuál será el resultado de un experimento, decimos que es un experimento de azar*, y más adelante: *Decíamos antes que hay azar cuando no estamos seguros del resultado de una acción que ejecutamos… Lo que queremos ver ahora es que el azar podemos medirlo en forma numérica, de la misma manera en que medimos áreas o volúmenes*. (véase GALT-Matemáticas, Idoneidad cognitiva, Conocimientos previos, p.11)

Por su parte, en la lección 15 de 5° de la generación 1993, se lee: […] *Si un programa de televisión dura una hora, ¿entre cuántos programas puede elegir Martín diariamente? Para contestar a esta pregunta, Martín organizó la información en un diagrama como el siguiente. Complétalo*; en la lección 34 del mismo libro se presenta: […] *Para contar ordenadamente los posibles diseños Enrique propone hacer un diagrama de árbol. Copia el diagrama en tu cuaderno y ayúdale a completarlo.*

Mientras que a partir de la generación 2008 de libros de texto no se identifica el recurso de los conocimientos previos. Los conceptos surgen aisladamente; por ejemplo, en el libro de 6° de la generación 2008 se dice: […] *Las permutaciones sin repetición son todas aquellas formas distintas en las que un grupo de elementos puede representarse… El siguiente diagrama de árbol representa algunos modelos de la muñeca Montserrat, tomando en cuenta color de cabello: rubio, castaño. Colores de vestido, verde, amarillo, rosa y violeta, y colores de zapatos: negro y blanco.*

Lograr la comprensión de los conceptos implica recurrir a un organizador previo que tiene por función tender un puente cognitivo entre lo que el alumno ya sabe y lo que necesita saber antes de aprender la tarea. Ahora bien, en los libros de texto se incluyen preguntas iniciales para detectar ideas previas, sin que luego los resultados de esas preguntas incidan en el desarrollo posterior de la actividad. De la lectura de los libros es posible percatarse que el criterio para organizar y secuenciar los contenidos del currículo de matemáticas es la propia estructura conceptual de la asignatura.

Aprendizaje

En la generación 1972 de libros de texto, la estrategia didáctica consistió en una aproximación progresiva de las ideas de los alumnos a los conceptos matemáticos que constituyen el núcleo del currículo. En las lecciones, se presenta el aprendizaje como la asimilación de un conocimiento elaborado fuera lo cotidiano. Las actitudes y los procedimientos quedan en un segundo plano. Por lo tanto, el conocimiento matemático y su aprendizaje están estructurados de acuerdo con un principio de diferenciación conceptual progresiva; es decir, cada nuevo contenido conceptual se apoya y relaciona con los contenidos anteriores.

En las lecciones de los libros de texto de la generación 1972, el orden de la secuencia didáctica inicia al separar las propiedades definitorias, dar ejemplos y un contexto; continúa con ordenar lógicamente el aprendizaje, presentar el contenido conceptual de la actividad de enseñanza y, finalmente, expresa un comentario. El quehacer del alumno es reproducir, leer y completar diagramas, o bien, interactuar con el texto, jugar, responder a diálogos con el autor. Lo hace a través de ejercicios, o de juegos con referencia a hechos familiares. Los materiales empleados son básicamente lápiz y papel o elementos variados que estén a su alcance.

Sin embargo, en los libros de texto, los contenidos relacionados con combinatoria se presentan en un proceso no necesariamente gradual; por ejemplo, en el libro de 5° de la generación 1972, se encuentra que la lección 4 es la misma que la lección 21 del libro de 3°, la lección 5 es igual que la lección 22 del libro de

3°, la lección 15 es la misma que la lección 58 del libro de 3°, la lección 16 es análoga que la lección 59 del libro de 3° y la lección 40 es la misma que la lección 71 del libro de 3°. Asimismo, la lección 15 de 5° es menos compleja que la lección 64 del libro de 4°.

En los libros de texto de las generaciones 2008 y 2009, se asume la idea de que es el alumno el que elabora y construye su propio conocimiento y quien debe tomar conciencia de sus limitaciones y resolverlas. En aquel entonces, la meta esencial fue cambiar las concepciones intuitivas de los alumnos y sustituirlas por el conocimiento matemático (examinar GALT-Matemáticas, Idoneidad epistémica, Conceptos, Procedimientos, p. 9). Es importante observar que existen actividades que, desde mi punto de vista, requieren de mayor precisión; por ejemplo:

Generación 1993. *Matemáticas 5*°. En la primera edición, pág. 79, se encuentra la siguiente pregunta: *¿De cuántas maneras distintas pueden ordenar las letras de la palabra AMOR? ¿Cuáles de esas combinaciones tienen significado?* Con esta instrucción se podría crear la confusión entre el concepto de combinación y permutación.

Generación 2011. En *Matemáticas 4*°, pág.181, se encuentra la siguiente afirmación: *Con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 puedes formar 362 880 (trescientos sesenta y dos mil ochocientos ochenta) números diferentes, usando todos los dígitos cada vez y sin repetirlos en el mismo número.* ¿Habrá números que inicien con el dígito 0? No se comenta este caso.

Generación 2011. En *Matemáticas 6*°, pág.133, se encuentra la siguiente pregunta: *Rosa olvidó la combinación para abrir su caja fuerte, sólo sabe que los números son 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y no se repiten. ¿Cuántas combinaciones podrá encontrar Rosa?* El número de combinaciones y el contexto no se corresponden.

Asimismo, se encuentran ejercicios que podrían resolverse usando diagramas de árbol, por ejemplo, en el libro de 6° de la generación 1993, en la lección 85 se lee:

[…] encuentra las medidas de los siguientes prismas. El volumen de cada uno de ellos es de 72 cm³. Hay varias respuestas posibles.

Prisma cuadrangular Área de la base_____ Altura del prisma _____
Prisma rectangular Área de la base_____ Altura del prisma 9 cm
Prisma rectangular Área de la base 9 x = Altura del prisma _____

Y en el libro de 2° pág. 16 de la generación 2008, se encuentra lo siguiente:

[…] En parejas observen la ilustración y contesten las preguntas. Margarita pagó al vendedor 15 pesos, ¿cuántos y cuáles peces pudo comprar?

Beta $5 Guppy $10 Globo $15 Japonés $10 Payaso $20 Alimento para pez $5

En síntesis, es insuficiente la cantidad de actividades para el tema de combinatoria y en particular para los diagramas de árbol.

Al pasar de una generación de libros a otra disminuyó el número de lecciones que tratan los temas de diagramas de árbol y combinatoria significativamente. Como consecuencia, la exposición del léxico y el pensamiento combinatorio en los libros se empobreció hasta casi suprimirse. En relación con las ilustraciones de los libros es escaso el uso de imágenes como soporte, así como el uso de figuras de análisis, incluso el uso de representaciones cotidianas (consultar GALT-Matemáticas, Idoneidad mediacional, Recursos materiales, p.14).

Lo cierto es que se evoca un diagrama de árbol sin que esté directamente presente, de tal forma que no guían al lector a interpretar y entender información figurativa sobre el concepto matemático que se está desarrollando. Por una parte, en los libros se invita a usar diferentes representaciones en torno a una misma idea matemática, ya que permite explorarla desde distintas perspectivas, lo cual promueve la comprensión. Por otra, no existe mención explícita de los diagramas de árbol, por lo tanto, los estudiantes no emplearán este recurso para obtener información, organizarla, analizarla y utilizarla en la resolución del problema (véase GALT-Idoneidad epistémica, Significados, Lenguajes, p.9).

En la generación 2008, no se encuentran conexiones entre los diagramas de árbol y las tablas de doble entrada. En relación con las tablas, no se hallaron argumentos para afirmar que promueven el razonamiento combinatorio. El potencial de una tabla es limitado pues se restringe a unos cuantos resultados de todos los posibles sin permitir explorar otras posibilidades.

En el caso de la generación 2011, se pretendió que un cambio conceptual o sustitución de los conocimientos previos del alumno se produciría como consecuencia de subordinar esos conocimientos a una acumulación de conflictos que provoquen cambios cada vez más radicales en la estructura cognitiva de los alumnos. Para ello se diseñaron secuencias educativas programadas, con el fin de dirigir u orientar las respuestas de los alumnos a estos conflictos.

En relación con los libros de las generaciones 2014 y 2018, el enfoque pedagógico tiene elementos que concuerdan con la enseñanza mediante la investigación guiada. En este enfoque, se admite, como en otros enfoques constructivistas, que para lograr promover en los alumnos cambios en sus sistemas de conceptos, procedimientos y actitudes es necesario situarlos en un contexto de actividad semejante al que vive un matemático, pero bajo la dirección del docente quien dirige la investigación.

Es dudoso que los procesos constructivos en el aprendizaje de los contenidos matemáticos deben ser semejantes a los que usan los matemáticos para elaborar o construir esos mismos contenidos, por las diferencias entre los contextos sociales en que los alumnos y matemáticos construyen sus conocimientos. En los libros de texto de estas generaciones, se aspira a resaltar el carácter social del proceso de resolución fomentando la comunicación y el diálogo no solo entre los alumnos sino también entre éstos y el profesor (examinar GALT-Matemáticas, Idoneidad epistémica, procesos, comunicación, argumentación, p.9).

Dado que la investigación matemática se basa en la generación y resolución de problemas, la propuesta planteada en los libros de texto gira alrededor de la resolución de problemas con la realización de pequeñas investigaciones que

integren aspectos cualitativos y cuantitativos. Asimismo, se exponen problemas y actividades de tipo exploratorio en los que se pretende investigar lo que sucede en distintas situaciones, a registrar y analizar observaciones y a emplear procedimientos propios. También se presentan problemas abiertos en los que se pueden seguir distintos caminos y para los que hay múltiples respuestas (consultar GALT-Matemáticas, Idoneidad epistémica, significados, problemas, p.9).

En los problemas, se buscan patrones y regularidades, organizar datos, sistematizar procedimientos, desarrollar generalizaciones y fundamentar conclusiones y resultados obtenidos. Sin embargo, es importante destacar que a partir de la generación de libros 2008 no se percibe la intención de enseñar al alumno la construcción de los diagramas de árbol (no mencionan los términos raíz, rama, nudo, niveles de ramificación) y la resolución de problemas de combinatoria. Lo que importa es la sistematización inmediata del concepto de multiplicación.

En suma, el principio multiplicativo es aplicado para obtener el número de elementos de una combinación como producto del número de elementos de los conjuntos que intervienen en el problema. Las prioridades de los planes de estudio han sido el planteamiento, resolución de problemas y validación de resultados. Aunque, los problemas relacionados con combinatoria presentados en los libros pretendieron tener una solución que solo requiere del uso de estrategias de pensamiento de un nivel cognitivo elemental.

Asimismo, se observa que la secuencia de instrucción en los libros de texto es la siguiente: exponer el objetivo de la lección, emplear tareas que mediante deducciones o solución de problemas ponga en funcionamiento los conocimientos previos de los alumnos, enfrentar la situación conflictiva mediante la presentación de datos o la realización de experiencias, presentar conceptos alternativos que integren los conocimientos previos con la nueva información, comprender el mayor poder explicativo de los conocimientos adquiridos respecto a la teoría anterior y, finalmente, generalizar o aplicar los conocimientos matemáticos a nuevas situaciones y tareas.

En esa estructura, no está presente la enseñanza de la historia de las matemáticas que desempeña un papel importante, pues se asume que el aprendizaje de los conceptos es una biyección al proceso de construcción matemática de los contenidos.

Evaluación

En cuanto a las actividades de evaluación, se centran en el conocimiento teórico y consisten en tareas que especifican la estructura conceptual adoptada por el alumno, su capacidad de relacionar unos conceptos con otros diferenciándolos de conceptos afines. No tengo la certeza de que se disponga de técnicas que permitan evaluar las relaciones conceptuales entendidas por los alumnos, para evitar así la confusión con aprendizajes repetitivos. Si los conceptos se aprenden relacionándolos con los conocimientos previos que se posee y pueden entenderse en diferentes niveles, entonces lo importante en la evaluación debe ser diferenciar cuándo el alumno ha aprendido algo como un concepto.

En las lecciones de los libros de la generación 1972, se plantean situaciones y tareas nuevas, al menos en algún aspecto, sin requerir del alumno la generalización de sus conocimientos a una nueva situación. Se evita que la respuesta correcta a las preguntas y tareas propuestas esté incluida en los materiales y actividades de aprendizaje. Por otro lado, el enfoque presentado en los libros de texto de la generación 1993 es eficaz para lograr un desarrollo progresivo de las concepciones de los alumnos sobre el conocimiento matemático, pero insuficiente para conseguir la restructuración de esas concepciones de los estudiantes, pues se limita a que los alumnos dominen la terminología y algunos principios matemáticos.

En los libros de texto de las generaciones 2008 y 2009, las lecciones contienen actividades de cuatro tipos: de inicio, de desarrollo, de cierre y de ejercitación. Las actividades de cierre están formadas por una pregunta o frase que debe comentarse con todos los alumnos. Estas actividades de enseñanza se conciben en sí mismas como actividades de evaluación; éstas se basan en el trabajo

diario de los alumnos, en su investigación. Pueden completarse con otro tipo de tareas más puntuales. El propósito es que las actividades de evaluación proporcionen al alumno información de las causas de su éxito o fracaso.

El lector se percata de que el objetivo de las lecciones es que los alumnos dominen y comprendan los sistemas conceptuales en los que se basa el conocimiento matemático. Los contenidos procedimentales y actitudinales no desempeñan un papel en la organización de estos libros. La labor del profesor es guiar las explicaciones de los alumnos, realizar adecuaciones a los problemas y actividades del libro de texto, organizar el trabajo colaborativo, construir nuevas situaciones de aprendizaje a partir de las presentadas en el libro de texto, proponer problemas que sean reales y significativos, exponer estrategias diferenciadas para atender la diversidad de estilos de aprendizaje de los alumnos, resolver sus dificultades y decidir el orden en que explicará los temas del libro. Así que, el docente podrá, con el apoyo de su experiencia o de los libros de consulta de su preferencia, hacer los ajustes necesarios para corregir estas deficiencias.

Si en los libros de texto el alumno estudia diagramas de árbol en 3° de educación primaria y, más tarde, de nuevo en 1° de secundaria sin establecer niveles de exigencia distintos en uno y otro grado, entonces no tendrá la oportunidad de resolver nuevos problemas. Los criterios de evaluación presentados en los libros de la generación 2018 son semejantes a los aplicados en las generaciones 1972 y 1993. En los libros, se recurre a diferentes tareas y técnicas de evaluación; según parece, se trata de conocer en qué medida los alumnos aplican sus conocimientos para resolver problemas y afrontar nuevas situaciones.

En resumen, la construcción de los diagramas de árbol está vinculada con el desarrollo de los procesos intuitivos, sin embargo, es necesario hacer hincapié en los argumentos que permiten justificar las operaciones a realizar para facilitar la comprensión del significado de los términos de las expresiones combinatorias en relación con el contexto. Se requiere de otro tipo de actividades para hacer efectivo el cambio conceptual. La falta de precisión en las lecciones, en particular, las que exponen el tema de diagramas de árbol parecería que no es una forma distinta de

comprender el currículo de matemáticas, sino una estrategia distinta para enseñar matemáticas. Lo anterior implica que las actividades y los problemas que provee el libro deben contener ejercicios de mayor nivel de complejidad. El propósito es que los alumnos vayan accediendo a ideas y recursos matemáticos cada vez más complejos, a la vez que puedan relacionar lo que ya saben con lo que están por aprender.

Enseñar matemáticas como un proceso de investigación dirigida requiere una determinada concepción de las matemáticas y de su enseñanza que tal vez no está muy extendida entre los profesores. El riesgo de convertir la enseñanza en investigación guiada está en confundir los procesos de investigación con los métodos de enseñanza y el aprendizaje de procedimientos. Este enfoque exige del profesor un cambio conceptual, procedimental y actitudinal paralelo al que debe intentar promover entre sus alumnos, por lo que surge la interrogante ¿es favorecido por las propias estructuras organizativas de las escuelas y las costumbres educativas en que éstas están inmersas?

Como observación final acerca del tratamiento de los diagramas de árbol y la combinatoria en los libros de texto gratuitos de educación primaria, se observa que el recurso del diagrama de árbol permaneció en los libros desde la generación 1972 hasta la generación 2008 y se empleó para contar. Después, el medio que se ha usado son las tablas.

Comprender el funcionamiento de los diagramas de árbol no es difícil; es más difícil dibujarlos correctamente. Para concluir, se examinan los ejercicios de las lecciones 20 y 40 del libro de texto de cuarto grado de 1974, y las lecciones 15 del Bloque I y 34 del Bloque II del libro de texto de quinto grado del 2000, a partir del estudio *El Desarrollo de las Pruebas de Rendimiento Matemático en el Estudio Nacional Longitudinal de Habilidades Matemáticas* (Romberg y Wilson, 1968). Los sistemas de clasificación tal y como fueron especificados en la sección de desarrollo de pruebas se exponen a continuación:

Tabla III.1.22. Elementos de contenido en matemáticas

Sistema de Números Medición Geometría Sistemas de coordenadas y gráficas Expresiones algebraicas y sus soluciones Relaciones y funciones Expresiones algebraicas Probabilidad y Estadística Lógica Aplicaciones	Concepto de evento de azar Descripción de datos Modelando “la vida real” Reconocimiento de patrones

En seguida se presenta en la Tabla III.1.23 el contenido en relación con los diagramas de árbol en los libros de texto de educación primaria ya mencionados. Además, en la Tabla III.1.24 se expone el cuadro de clasificación con los elementos medidos en el NLSMA

Tabla III.1.23. Nivel de comportamiento cognitivo en matemáticas

Clasificación NLSMA para el diagrama de árbol																		
Generación	A.0 Computación			B.0 Comprensión						C.0 Aplicación				D.0 Análisis				
	A.1	A.2	A.3	B.1	B.2	B.3	B.4	B.5	B.6	C.1	C.2	C.3	C.4	D.1	D.2	D.3	D.4	D.5
	Conocimiento de hechos específicos	Conocimiento de terminología	Habilidad para llevar a cabo algoritmos	Conocimiento de conceptos	Conocimiento de principios, reglas y generalizaciones	Conocimiento de la estructura matemática	Habilidad para transformar elementos de un problema de una forma a otra	Habilidad para seguir un razonamiento	Habilidad para leer e interpretar un problema	Habilidad para resolver problemas rutinarios	Habilidad para hacer comparaciones	Habilidad para analizar datos	Habilidad para reconocer patrones, isomorfismos y simetrías	Habilidad para resolver problemas no rutinarios	Habilidad para descubrir relaciones	Habilidad para construir pruebas	Habilidad para criticar pruebas	Habilidad para formular y validar generalizaciones
1974 4to grado																		
Lección 20			X															
Lección 40			X				X	X	X									
2000 5to grado																		
Lección 15	X		X				X											
Lección 34	X		X					X	X									

Fuente: Elaboración propia

Tabla III.1.24. Clasificación NLSMA para el diagrama de árbol

Educación Primaria

Conocimientos y habilidades matemáticas	Instrumentos y técnicas de evaluación
A.1. Conocimiento de hechos específicos	Reconocer la representación de un árbol.
A.2. Conocimiento de terminología	Ubicar los elementos raíz, nudo o nodo, vértice, rama y camino en un árbol
A.3. Habilidad para llevar a cabo algoritmos	Esquematizar un árbol y enumerar los posibles resultados
B.1. Conocimiento de conceptos	Interpretar el significado de una rama de un árbol Explicar el significado de las ramas cortas y las ramas largas de un árbol Examinar las etapas intermedias de un diagrama de árbol Responder preguntas sobre la información contenida en el árbol.
B.2.Conocimiento de principios, reglas y generalizaciones	Describir la situación expresada en un enunciado mediante un árbol
B.3.Conocimiento de la estructura matemática	Mostrar todos los posibles resultados de un experimento mediante un árbol Descubrir la regla del producto
B.4.Habilidad para transformar elementos de un problema de una forma a otra	Demostrar que en experimentos con varias etapas el total de posibles resultados se calcula multiplicando.
B.5. Habilidad para seguir un razonamiento	Experimentar que un grafo es un conjunto de puntos en el espacio algunos de los cuales están unidos entre sí.
B.6.Habilidad para leer e interpretar un problema	Diagramar una situación posible de la vida real utilizando un árbol
C.1.Habilidad para resolver problemas rutinarios	Construir un grafo como recurso para solucionar un problema, sabiendo que éste contiene únicamente información sobre las conectividades entre puntos y carece de información geométrica (distancias, ángulos).
C.2. Habilidad para hacer comparaciones	Equiparar y explicar la información contenida en dos diagramas de árbol
C.3.Habilidad para analizar datos	Examinar el enunciado de un problema al disminuir o aumentar el número de variables
C.4.Habilidad para reconocer patrones, isomorfismos y simetrías	Enunciar el concepto de permutación
D.1.Habilidad para resolver problemas no rutinarios	Diseñar árboles asimétricos Debatir sobre el experimento de lanzar una moneda y después un dado Crear el diagrama de árbol que represente el espacio muestral de este experimento.
D.2.Habilidad para descubrir relaciones	A partir de una tabla de Carrol construir un árbol

D.3. Habilidad para construir pruebas	En una caja hay 3 canicas: una roja, una blanca y una negra, y se seleccionan dos de ellas con reposición; escribe el espacio muestral. ¿Cuál sería el espacio muestral del experimento del problema anterior si la primera canica no se repone antes de hacer la segunda elección ? Construye el diagrama de árbol.
D.4. Habilidad para criticar pruebas	A partir de una permutación, crear y juzgar un árbol
D.5. Habilidad para formular y validar generalizaciones	Elaborar un diagrama de árbol para expresar el espacio muestral de un experimento Estimar probabilidades Crear el diagrama de árbol correspondiente al complemento del experimento anterior.

Fuente: Elaboración propia

Si con actividades de nivel bajo-cognitivo (conocer) se pretende alcanzar objetivos de nivel alto-cognitivo (sintetizar o evaluar), pueden presentarse errores metodológicos del programa. Suponer que todos los estudiantes tienen las aptitudes para realizar por sí mismos técnicas para alcanzar objetivos complejos a partir de principios como el conocimiento de la terminología o la ejecución de algoritmos sería colocarlos en una situación desfavorable.

Por otra parte, a los profesores se les sugieren actividades (que inspiran las experiencias de aprendizaje por las que debe pasar el alumno para lograr los objetivos terminales) que se encuentran en los niveles bajo-cognitivo. En el plan de estudios 2017 de educación primaria, el diagrama de árbol aparece en los programas de 5° y 6° grado solo para orientar a los estudiantes a aprender el concepto de multiplicación y de potenciación. Este último se estudiará con detenimiento en 2° de educación secundaria.

En conclusión, la introducción del concepto de probabilidad en 6° de educación primaria debería reducir significativamente las dificultades para emplear los diagramas de árbol en 1° de secundaria, puesto que el alumno requiere clasificar los elementos de un conjunto. En la educación primaria, se podrían plantear problemas elementales de combinatoria en los cuáles se empleen técnicas sencillas como los diagramas de árbol. En el Anexo I, se ofrecen algunas sugerencias.

III.2 La enseñanza de los diagramas de árbol en la educación secundaria en el periodo 1927 - 2017

Los diagramas de árbol se usan ampliamente en matemáticas como medio de descripción, sirven para describir las posibilidades en problemas de probabilidad; para explicar la estructura de una representación algebraica o para representar productos de conjuntos finitos. A continuación, se explora en los programas de estudio de educación secundaria el surgimiento de la combinatoria y, con ello, el inicio del estudio de los diagramas de árbol.

Programas de 1927

El 14 de enero de 1927, los Departamentos de Enseñanza Técnica, Secundaria y el Instituto, en colaboración con el Consejo de Educación Superior, discutieron la unificación de los Planes de Estudios de las Escuelas Secundarias y Prevocacionales. En las tablas III.2.1 y III.2.2 se exhiben los temas y el contenido de los programas de estudio en conexión con el tema de investigación.

Tabla III.2.1. Temas del Programa de Estudios de Matemáticas, 1927

Primer año 6 horas	Aritmética	Geometría intuitiva	Álgebra		
Segundo año 4½ horas			Álgebra	Geometría	Trigonometría
Tercer año 4½ horas		Curso complementario de 1° y 2° cursos de Matemáticas	Álgebra	Geometría Demostraciones	Trigonometría

Tabla III.2.2. Programas de Matemáticas, 1927

Primer año. Tercer trimestre. **Construir y leer gráficas**.
Segundo año. Introducción ▪ Conocimientos anteriormente adquiridos en problemas usados en el Comercio, Geometría, Industria, etc. Representación gráfica de hechos numéricos. **(Gráficos de barras, discos, etc.)**
Tercer año. Revisión a) Revisión de ecuaciones de primer grado. **Gráficas**. PARTE I

▪ Representación gráfica de fenómenos de la vida social anotados por la estadística. (**Diagramas de barras, cartogramas, etc.**)
▪ Nociones muy sencillas sobre los usos de la estadística.
▪ La frecuencia con que ocurre un hecho. La tabla de frecuencias. La gráfica de una distribución normal.
▪ La tendencia central sus medidas:
a). El promedio. b). La frecuencia máxima. c). La mediana o normal. Limitaciones de la estadística y criterio con que debe juzgarse sus resultados.

Programas de 1932

A mediados de 1932, en las escuelas secundarias se estudiaban distintos programas simultáneamente; en el caso de matemáticas había cinco programas diferentes. En noviembre de ese mismo año, el Departamento de Enseñanza Secundaria nombró las comisiones que debían estudiar los diversos programas en vigor en cada asignatura, y con ellos crear uno, o bien revisar aquellos que sólo eso necesitaban, presentando las modificaciones que les parecieran convenientes.

Las diferencias de este plan, en relación con el anterior, consisten en la introducción de materias optativas y en la manera en que se organiza el conocimiento en las asignaturas; establecía que la enseñanza secundaria sería prevocacional. Los programas de 1927 fueron modificados con el propósito de adaptarlos a los cambios del nuevo plan de estudios. Sería la manera de enseñar lo que permitiría al alumno sentir y saber lo que le gusta. Esto era cuestión del método, no del programa.

El profesor **reduciría al mínimo posible todo lo que fuera memorización y eliminaría lo superfluo, o muy abstracto, o de escaso valor para la cultura general que habría de suministrar la educación secundaria**[56]. En oposición, el maestro prestaría mucha atención a las actividades que hicieran que el alumno reaccionara a la reflexión y al trabajo original, insistiría en aquellas que serían de utilidad inmediata para el alumno, tanto en sus estudios con otras asignaturas como en los problemas que se le presentaran muy probablemente en su casa, en el comercio y, en síntesis, en la vida diaria. Los cursos de matemáticas de las escuelas secundarias comprendían

[56] Lo destacado con negritas permitirá analizar las innovaciones de los Programas de Estudio, 2017.

Aritmética, Álgebra, Geometría y Trigonometría plana, y se distribuían como se expone en la siguiente tabla III.2.3.

Tabla III.2.3. Temas del Programa de Estudios de Matemáticas de 1932

	Primer año 5 horas por semana	Segundo año 4 horas por semana	Tercer año 4 horas por semana
Aritmética* (con introducción al Álgebra)	78% Libros de texto sugeridos: *Aritmética Moderna (II)*. Wentworth-Smith. *Las Aritméticas de Thorndike (II).* E. L. Thorndike		
Álgebra	5% incluida en Aritmética.	70% Libros de texto sugeridos: *Elementos de Álgebra*. Wentworth-Smith. *Álgebra Elemental*. Antonio Llano	35%
Geometría	22% Geometría intuitiva	30% Geometría demostrativa. Libro de texto sugerido: *Geometría*. Wentworth-Smith	35%
Trigonometría plana		2% incluida en Álgebra	30% Libros de texto sugeridos: *Trigonometría*. W. Wells. *Curso elemental de Trigonometría*. Bruño. *Tablas numéricas de cuatro cifras*. C. Rodríguez

* No se dará por terminada la enseñanza de la aritmética en el primer año de matemáticas.

Se sugería al docente emplear un lenguaje claro que estuviera al alcance de los alumnos sin detrimento de su precisión; mantener el interés de los estudiantes; variar los métodos de enseñanza; iniciar siempre la enseñanza con cuestiones muy sencillas y concretas para pasar gradualmente a otras más difíciles y abstractas; **proponer**

problemas atractivos, **que fueran útiles y efectivamente reales**. Los profesores dirigirían a sus alumnos al abordar demostraciones, a fin de que comprendieran los enunciados; apreciaran la aplicación de las matemáticas en las ciencias, las artes, la industria y, en general, en la civilización. Asimismo, se proponía la organización de clubes de matemáticas para los estudiantes. La tabla III.2.4 exhibe el contenido asociado con el tema de gráficas. Este tema está presente solo en primer grado.

Tabla III.2.4. Programas de Matemáticas, 1932

Trimestre	Primer año	Segundo año	Tercer año
Primer trimestre	1. Objeto. – Ideas claras sobre el significado y uso eficiente de las *cuatro operaciones fundamentales* con enteros y fracciones, comunes y decimales. Un recto criterio para operar con datos numéricos que provienen de *mediciones aproximadas*. Aritmética		
Segundo trimestre	Aritmética		
Tercer trimestre	Aritmética **VIII. Fórmulas y Gráficos.** **(7 lecciones)** Total de lecciones: 14 Total de lecciones de Aritmética: 100		
VII. FÓRMULAS Y GRÁFICOS (7 lecciones) **2. Gráficos (3 lecciones)** **a) Interpretación y construcción de gráficos de barras y discos.**			

Para lograr este objetivo, los profesores ayudarían a los alumnos a conseguir, en cada caso, que pensaran y razonaran efectivamente al efectuar una operación; harían una cuidadosa selección de ejercicios para **evitar en el alumno la mecanización y el automatismo**. Se consideraba que los profesores necesitaban conocer mucho más de lo que pueden enseñar a sus discípulos; por ejemplo, la historia

del desarrollo de las matemáticas y de sus métodos de enseñanza. En la tabla III.2.5 figura una síntesis del programa de estudio de matemáticas de 1932.

Tabla III.2.5. Programa de Estudio de Matemáticas, 1932

Contenido	El nivel es inferior a lo que generalmente, y en años escolares análogos exige la High School norteamericana. Los cursos de matemáticas de las escuelas secundarias comprenden: Aritmética, Álgebra, Geometría y Trigonometría plana. Se recomienda el mayor ajuste posible a la distribución de la materia por trimestres.
Finalidades	Hacer accesibles al alumno las matemáticas como ciencia, para que sepan comprenderlas, y para que se den cuenta de la influencia que han tenido en la civilización, y la necesidad de dar unidad a la enseñanza de la geometría, iniciando, sin miedo la geometría demostrativa, generalmente menospreciada en nuestras escuelas secundarias.
Orientaciones Metodológicas	El profesor hará su enseñanza objetiva y vital; que la mantenga en contacto con la vida diaria; que reduzca a un mínimo la pura memorización y dé importante atención a las actividades que hagan razonar al educando; que señale tareas para que el alumno trabaje fuera de clase, como un medio de educarlo en la distribución de su tiempo libre, y de facilitar el desarrollo del curso con economía del tiempo y esfuerzo, y que dé la importancia que merece al empleo en clase de libros de texto.

Programas de 1939

Considerando la resolución adoptada por la III Conferencia Interamericana de Educación fueron modificados los Programas de 1932. Se fijaron para la segunda enseñanza tres lineamientos generales: a) ser esencialmente educativa; es un antecedente necesario y obligatorio para toda clase de estudios superiores y una preparación indispensable para la vida social, b) ser investigadora y experimentadora de capacidades y aptitudes, y científicamente orientadora de estas, c) tener una extensión mínima de tres años. Se estableció que **la marcha de la enseñanza debía ajustarse al desenvolvimiento del alumno** y no a determinado plan exclusivamente lógico.

Se explicó que los mejores resultados se obtendrían si se llevan paralelamente la Geometría, la Aritmética y el Álgebra, dando así oportunidad al desenvolvimiento lento y gradual de los conceptos y aprovechando los asuntos que se estudian de cada materia para ilustrar y practicar los conocimientos relativos a la otra. El contenido de la materia debía omitir cualquier instrucción específica que convierta la enseñanza de la materia en un fin en sí misma, haciéndola una especialidad, incumpliendo los propósitos de la secundaria. La distribución del tiempo de trabajo y un extracto del programa de estudios para la asignatura de matemáticas del año 1939 se muestra en las tablas III.2.6, III.2.7 y III.2.8.

Tabla III.2.6. Temas del Programa de Estudios de Matemáticas, 1939

Primer año 5 horas de clase por semana	Geometría Intuitiva	Aritmética	Introducción al Álgebra	
Segundo año 4 horas de clase por semana	Geometría		Álgebra	
Tercer año 4 horas de clase por semana	Geometría		Álgebra	Introducción a la Trigonometría

Tabla III.2.7. Programa de Estudios de Matemáticas, 1939

	1939
Contenido	Los programas propenderán a que el alumno aprenda actuando, pues para él aprender no debe significar adquirir información sino desenvolverse y quedar en aptitud de crear.
Finalidades	La enseñanza secundaria es integral; las materias son un medio de proporcionar a los alumnos la oportunidad de desenvolverse y de adquirir la cultura que los capacite para comprender los grandes fenómenos físicos, biológicos y sociales, y para conducirse como elementos útiles a la comunidad.
Orientaciones Metodológicas	La organización de las materias y la extensión de los programas deben estar de acuerdo con lo que los alumnos pueden aprender en atención a su desarrollo mental y no con lo que los maestros piensen que deben saber. Las cuestiones más accesibles de las distintas materias se presentarán primero, y a medida que el alumno crece y se educa se le darán los temas más abstractos y difíciles.

Tabla III.2.8. Programas de Matemáticas, 1939

Primer año
5 horas de clase por semana.

Carácter: El primer curso es, la transición a una enseñanza de carácter propiamente científico. Se abordará teniendo en cuenta que el alumno no *sabe* estudiar solo, *no sabe* leer un texto de matemáticas, *no puede,* atendiendo a sus propias fuerzas, vencer las dificultades que se le presentan. *Es indispensable enseñarlo a estudiar* para que llegue a ser un verdadero estudiante, capaz de valerse, para adquirir conocimientos, de las fuentes de información a su alcance sin que le sea indispensable la ayuda del maestro.

Métodos: Los métodos que ponen en juego constantemente la actividad personal del alumno (en matemáticas la actividad intelectual fundamentalmente), son los que de preferencia deben emplearse. Los métodos que favorezcan una actitud pasiva del alumno, de mero receptor de información, deben desecharse.

Cada asunto se abordará por la vía concreta, intuitiva, **valiéndose de problemas familiares para llevar a los alumnos gradualmente al terreno abstracto**. Los diversos procedimientos que la técnica de enseñanza moderna emplea, deben elegirse en vista del desarrollo mental del alumno.

Aritmética

VII.- Porcentaje. – *Proporción.*
Conversión de unidades. – Gráficas.

Nota. – En obsequio a la claridad de la exposición, en el programa detallado se encuentran separados, para citar uno a uno los diversos asuntos. Esto no significa que deban ser tratados así. El profesor organizará el contenido de cada trimestre siguiendo una técnica adecuada a las circunstancias del grupo.

20% del total

Segundo año
4 horas de clase por semana.

Carácter: Si durante el primer año se han logrado los propósitos educativos del primer curso, los alumnos llegarán al segundo año en condiciones de hacer un trabajo más serio y reflexivo. Poco a poco se hará más preciso y riguroso el razonamiento; se hará más énfasis en la abstracción y generalización; se desenvolverán los conceptos más importantes y valiosos (relación o ley matemática, proporcionalidad, función, conclusión necesaria, etc.), entendiendo bien que *poco a poco* significa a *medida* que la inteligencia se disciplina y desenvuelve en la mayoría de los alumnos, y no a medida que el número de clases crece.

Distribución del tiempo: La situación real el año actual, es que algunos alumnos habrán llenado en lo fundamental el programa del curso anterior, mientras otros habrán dejado mucho de ello sin estudiar. En tales condiciones, la Comisión encargada de formular este programa cree prudente dejar a juicio de cada profesor la organización y distribución de la materia, contando de antemano

con que cada alumno hará un esfuerzo serio y valioso para lograr, como mínimo, lo que del contenido total de materia es fundamental y más educado a los fines de la escuela secundaria. Álgebra IV.- Números positivos y negativos. Operaciones algebraicas. Fórmulas. Ecuaciones. **Gráficas**. Ecuaciones con coeficientes fraccionarios. Ecuaciones literales.
Tercer año 4 horas de clase por semana. Geometría Introducción a la trigonometría Álgebra
Total de horas semanarias: 35

Programas de 1945

Este Plan de estudios consideraba la existencia de tres finalidades en el ciclo de segunda enseñanza: a) **ser continuación y ampliación de la primera enseñanza**, b) servir como antecedente necesario a los estudios vocacionales técnicos, c) servir como antecedente a los estudios preparatorios universitarios. Señalaba como defecto de la escuela secundaria, "el haber sido orientada en un sentido *teórico* y *académico* a semejanza del bachillerato universitario del que se había desprendido, que la hacía poco adecuada de las carreras técnicas [...] A tal deficiencia atribuye el establecimiento de escuelas de segunda enseñanza especiales para dichas carreras, a las que se denominó prevocacionales" (SEP, 1946, 173). En las tablas III.2.9, III.2.10 y III.2.11 se presentan la distribución del tiempo de trabajo y un resumen del programa de estudios de matemáticas de 1945.

Tabla III.2.9. Temas del Programa de Estudios de Matemáticas, 1945

Primer Año 1er. curso MATEMÁTICAS Horas de clase 4 Horas de estudio 2	Aritmética	Nociones de Álgebra	Geometría	
Segundo Año 2do. curso MATEMÁTICAS Horas de clase 3 Horas de estudio 1 FÍSICA	Aritmética	Álgebra	Geometría	

Tercer Año 3er. curso MATEMÁTICAS Horas de clase 3 Horas de estudio 1 QUÍMICA		Álgebra	Geometría	Nociones de Trigonometría

Tabla III.2.10. Programa de Estudios de Matemáticas, 1945

1945	
Contenidos	Se incrementa las horas de clase. **Se presentan los programas semiabiertos y las actividades que pueden ser libremente elegidas por el alumno (materias optativas)**. La materia se organiza en unidades de enseñanza. Se señalan con precisión los objetivos por lograr. Se sugiere, un conjunto de actividades mediante las cuales se piensa que se alcanzarán mejor los objetivos propuestos.
Finalidades	**Continuar el trabajo iniciado por la Escuela Primaria, en lo que se refiere al aspecto netamente educativo, la formación del carácter, el cultivo de la personalidad, la creación y fortalecimiento de buenos hábitos y del espíritu de servicio social.** Es un plan orgánico que enlaza de modo natural y múltiple las asignaturas, mediante una red de comunicaciones que aproxima los contenidos.
Orientaciones Metodológicas	**Se procurará que la educación que se imparta se relacione íntimamente con el medio físico, económico y social que los circunde.** **Se preferirá el trabajo realizado en común, por equipos, al trabajo individual.** **El alumno adquiere por sí mismo el aprendizaje, el educador promueve la actividad productora del educando.** Se inicia la formación de grupos móviles. Se establece el "estudio dirigido" es decir, la escuela reconoce que aprender a estudiar es la principal tarea a que el alumno debe dedicar su esfuerzo, y asume la responsabilidad de ayudarlo, se suprime las tareas a domicilio. Para los alumnos no promovidos se establecieron los cursos de regularización durante los períodos de vacaciones de fin de año. Se propone crear la institución de los *maestros visitadores* (trabajadores sociales que forman un órgano de relación entre la familia y el cuerpo docente).

Tabla III.2.11. Programas de Matemáticas, 1945[57]

Primer Grado	Aritmética
	▪ *Gráficas*. Gráfica de barras. Gráfica poligonal. Gráfica de sectores circulares. Gráfica de figuras.
Segundo Grado	Aritmética
	Tablas numéricas. Valor numérico de una fórmula. Tabulación. Gráfica Poligonal. Gráfica de barras. Gráfica de sectores circulares. Gráfica de figuras.

Programas de 1960

El 1 de septiembre de 1960, entró en vigor el plan de reformas al contenido, extensión, propósito y orientaciones de la educación secundaria. El plan de estudios introdujo las siguientes modalidades en relación con el que rigió las actividades escolares desde 1945 (SEP, 1964, 118-142). El programa estuvo sujeto a las opiniones del magisterio para su modificación parcial o reforma total, al término de cada año lectivo. Las tablas III.2.12, III.2.13 y III.2.14 exponen la distribución del tiempo de trabajo y una sinopsis del programa de estudio de matemáticas de 1960.

Tabla III.2.12. Temas del Programa de Estudios de Matemáticas, 1960

Primer Curso 4 horas semanales	Aritmética	Geometría		
Segundo Curso 4 horas semanales		Geometría	Álgebra	
Tercer Curso 3 horas semanales		Geometría Plana Geometría del espacio	Álgebra	Trigonometría

Tabla III.2.13. Programa de Estudio de Matemáticas, 1960

Contenidos	1960
	▪ Aumento de una hora más a la semana, para la atención de entre otras materias, la asignatura de matemáticas, a fin de intensificar la práctica constante. La asignatura está organizada en unidades didácticas seriadas. Existe correlación con otras materias.

[57] El contenido de los Programas que aquí se exponen fue extraído de los libros *Matemáticas Primer Grado* y *Matemáticas Segundo Grado* de 1958, escritos por Arquímedes Caballero, Lorenzo Martínez y Jesús Bernárdez. El documento *Plan y Programas de Educación Secundaria 1945,* publicado por la Secretaría de Educación Pública, no ha sido localizado.

Finalidades	▪ Sencillas demostraciones de afirmaciones. Uso de los métodos de inducción, deducción y analogía.
Orientaciones Metodológicas	▪ Los conceptos deben impartirse de lo fácil a lo difícil. Los antecedentes de un tema deben asociarse convenientemente. ▪ Fijar la atención del alumno a aplicaciones determinadas, concretas y frecuentes, antes de la demostración o generalización. ▪ Que no haya automatismo en los ejercicios dados, sino que se tengan en cuenta las reglas que ayuden al pensamiento reflexivo. ▪ Utilizar la representación ***gráfica***, concreta u objetiva de conceptos, procesos o temas que permitan hacerlo. ▪ Aplicación inmediata de los conocimientos adquiridos, tanto en la vida escolar, como social del alumno. ▪ **Aprovechar los adelantos técnicos para poner al alumno ejercicios y problemas de actualidad**.

Tabla III.2.14. Programas de Matemáticas, 1960

	Objetivos particulares	Objetivos específicos
Primer Curso	Instruir al alumno en el manejo de los números, la ejecución de las operaciones fundamentales y necesarias para la resolución de problemas, **completar** los conocimientos que el alumno trae, con relación a estas ciencias, de la escuela primaria, capacitándolo así para continuar con sus estudios superiores y para la vida práctica, iniciando de esta manera el estudio matemático. Debemos tender a la formación en los alumnos de **exactitud** en sus resultados, **concisión** en el lenguaje, **rapidez** en el cálculo y adecuada resolución de los problemas. Uso correcto de los símbolos y notaciones de las diferentes unidades de medida, habilidad en el manejo de los útiles de geometría, hasta donde el curso elemental lo permita. **Despertar el espíritu de investigación y de crítica sana con objeto de que el discípulo vaya mejorándose constantemente.**	▪ Los alumnos adquieran el hábito de copiar correctamente los números, entender y seguir instrucciones, así como escribir con ortografía los numerales cardinales y ordinales. ▪ Adecuada planeación y resolución de problemas.
Segundo Curso		

Tercer Curso	▪ Guiar al alumno a la resolución de los problemas reales que la ciencia moderna presenta. (En Física, Química, Radio-Televisión, Mecánica, Estadística, Contabilidad, etc.)	• Crear la actitud de crítica que conduzca a un examen atento, reflexivo y completo, como condición previa a la aceptación de conclusiones formuladas por él mismo o por los demás.

La distribución mensual pretendía facilitar la labor del maestro, quien haría las modificaciones de tiempo necesarias según las circunstancias particulares que los grupos le iban señalando, es decir, **la distribución no tenía carácter rígido**. **Los programas no serían definitivos; estarían sujetos a la experimentación**. Se investigó si el tiempo fijado a cada unidad era conveniente o no, para hacer las sugerencias respectivas. El programa estuvo sujeto a las opiniones del magisterio para su modificación parcial o reforma total al término de cada año lectivo. En la tabla III.2.15 se muestra la distribución mensual del trabajo.

Tabla III.2.15. Programas de Matemáticas, 1960

Primer Curso	Febrero Primera Unidad Horas de clase probables: 10 Aritmética Geometría Julio Quinta Unidad Horas probables de clase: 16 Aritmética Geometría	Marzo Segunda Unidad Horas de clase probables: 16 Aritmética Geometría Agosto Sexta Unidad Horas probables de clase: 18 Aritmética Geometría	Abril Tercera Unidad Horas de clase probables: 15 Aritmética Geometría Septiembre Séptima Unidad Horas probables de clase: 8 Aritmética Geometría	Mayo Cuarta Unidad Horas de clase probables: 8 Aritmética Geometría Octubre Octava Unidad Horas probables de clase: 17 Aritmética. 13 horas. **Gráficas**. Geometría	Junio Horas de clase probables: 10 Se efectúan generalmente las pruebas semestrales[58]. Noviembre Horas probables de clase: 4 Redondear el programa tanto de Aritmética como de Geometría	

[58] "Los cinco primeros días conviene dedicarlos a tratar los temas de Aritmética o Geometría que no se hayan podido tratar en el semestre. Los otro cinco deberán dedicarse a dar una guía de estudio para la prueba semestral y a efectuar un repaso general de todo lo visto en el semestre, insistiendo en los puntos difíciles, procurando que los alumnos resuelvan en clase cuestiones semejantes a las de la prueba; cambiando números a los problemas y ejercicios, con objeto de que los alumnos se familiaricen con la forma de preguntar de dicha prueba semestral".

Segundo Curso	Febrero Primera Unidad Horas probables de clase: 10 Introducción al Álgebra.	Marzo Segunda Unidad Horas probables de clase: 16 Álgebra	Abril Tercera Unidad Horas probables de clase: 16 Álgebra	Mayo Cuarta Unidad Horas probables de clase: 18[59] Álgebra	Junio Repaso general de los temas tratados en el primer semestre, elaboración y aplicación de la guía de estudio respectiva.
Segundo grado	Julio Quinta Unidad Horas probables de clase: 17 Repaso general de los temas tratados en el primer semestre, elaboración y aplicación de la guía de estudio respectiva.	Agosto Sexta Unidad Horas probables de clase: 18 Álgebra	Septiembre Séptima Unidad Horas probables de clase: 8 Álgebra	Octubre Octava Unidad[60] Horas probables de clase: 17[61] Geometría	Noviembre Los días laborables del décimo mes, se destinarán a realizar un repaso general de los Temas tratados en el segundo semestre, a proporcionar y resolver la guía de estudio semestral.

Tercer Curso	Febrero Primera Unidad Horas de clase probables: 7 Geometría Plana 1. Breve reseña histórica de la Geometría en la antigüedad.	Marzo Horas de clase probables: 12 Geometría Plana	Abril Horas de clase probables: 19 Geometría Plana	Mayo Segunda Unidad Geometría del espacio	Junio Tercera Unidad Horas de clase probables: 19[62] Álgebra

[59] Horas distribuidas entre los meses cuarto y quinto.
[60] El programa no menciona la séptima unidad.
[61] Distribuidas entre los meses noveno y décimo.
[62] Horas distribuidas entre los meses de junio y julio.

	Julio Horas de clase probables:13 Álgebra	Agosto Cuarta Unidad Horas de clase probables: 15 Trigonometría	Septiembre Horas de clase probables: 6 Trigonometría	Octubre Horas de clase probables: 14 Trigonometría	Noviembre Problemas. Problemas de aplicación (Modernos). Repaso general. Guía de Estudio.

Programas de 1975

Los programas de estudio de 1975 se estructuraron de modo que se articularan con los de la educación primaria. Se presentaron dos estructuras programáticas, por áreas de aprendizaje y por asignaturas o materias, articuladas horizontalmente para hacer del plan de estudios un todo orgánico. Pretendían atender el desarrollo de los aspectos cognoscitivo, afectivo y psicomotor de los educandos, y estimular sus inquietudes positivas y su creatividad.

Los programas fueron diseñados para ser evaluados sistemática y permanentemente, mediante la comparación entre lo alcanzado realmente y lo propuesto. En consecuencia, los programas podrían ser modificados para estar de acuerdo con **los intereses y posibilidades de cada región**. En este caso, el maestro sería guía, conductor y promotor de las actividades de aprendizaje. **Por primera vez, un programa de estudios incorporó la enseñanza de los diagramas de árbol; sin embargo, este contenido fue integrado a los temas de aritmética o de probabilidad.** La distribución del tiempo y un resumen de los programas de matemáticas de 1975 se exhiben en las tablas III.2.16, III.2.17, III.2.18 y III.2.19

Tabla III.2.16. Temas del Programa de Estudios de Matemáticas, 1975

Primer Grado				Segundo Grado				Tercer Grado			
ESTUDIO POR ÁREAS	HS/SC	ESTUDIO POR ASIGNATURAS	HS/SC	ESTUDIO POR ÁREAS	HS/SC	ESTUDIO POR ASIGNATURAS	HS/SC	ESTUDIO POR ÁREAS	HS/SC	ESTUDIO POR ASIGNATURAS	HS/SC

MATEMÁTICAS	4	MATEMÁTICAS	4	MATEMÁTICAS	4	MATEMÁTICAS	4	MATEMÁTICAS	4	MATEMÁTICAS	4
Primer grado		Lógica y Conjuntos		Aritmética			Geometría y Métrica			Estadística y Probabilidad	
Segundo grado		Lógica y Conjuntos		Aritmética		Álgebra	Geometría Plana			Estadística y Probabilidad	
Tercer grado		Lógica y Conjuntos				Álgebra	Geometría	Trigonometría		Estadística y Probabilidad	

Tabla III.2.17. Programas de Estudio de Matemáticas, 1975

	1975
Contenidos	▪ **Los objetivos representan una continuidad con los propuestos en el nivel primario**. Los objetivos generaron el estudio de aspectos fundamentales, alrededor de los que se establecieron los objetivos particulares.
Finalidades	▪ Utilizará la matemática como un lenguaje técnico de aplicación universal. ▪ Descubrirá la utilidad de la matemática como un recurso de interpretación, de dominio y superación del ambiente físico, social y cultural.
Orientaciones Metodológicas	▪ **A través de procedimientos dinámicos, individuales, y en grupo, el maestro conseguirá la participación activa de los alumnos, con el propósito de hacerlos responsables de su propio aprendizaje y de fomentar en ellos el desarrollo de la reflexión, de la libre expresión y del sentido crítico**. ▪ La metodología por seguir es el diseño de estrategias didácticas para encauzar el aprendizaje. El proceso ofrecerá a los estudiantes las situaciones propicias para el descubrimiento de los conceptos matemáticos y que en esa forma se incorporen a ellos como experiencias vitales; se sugiere el método inductivo-deductivo.

Tabla III.2.18. Programas de Matemáticas, 1975

	Lógica y conjuntos	Relaciones y funciones		Operaciones numéricas	Factorización		Geometría y métrica	Registros estadísticos y probabilidad
	Unidad 1	Unidad 2	Unidad 3	Unidad 4	Unidad 5	Unidad 6	Unidad 7	Unidad 8
Primer Grado	Lógica y Conjuntos	Operaciones con Números Naturales	Sistemas de Numeración	Factorización	Números Racionales No Negativos y Proporcionalidad	Números Enteros	Geometría y Métrica	**Registros Estadísticos y Probabilidad**
Matemáticas II	Lógica y Conjuntos	Racionales	Monomios y Polinomios	Funciones	Ecuaciones de Primer Grado	Sistemas de Ecuaciones	Geometría Plana	**Estadística y Probabilidad**
Tercer grado	Lógica y Conjuntos	Factorización	Ecuaciones de segundo grado	Triángulos y Cuadriláteros	Circunferencia	Semejanza	Trigonometría	**Estadística y probabilidad**

Tabla III.2.19. Unidad 8. **Estadística y Probabilidad,** 1975[63]

	Objetivos Particulares	Objetivos específicos
Primer Grado Registros Estadísticos y Probabilidad Objetivo: El alumno interpretará mediante el análisis los resultados de investigaciones realizadas. Utilizará los símbolos necesarios para el estudio de cada uno de los aspectos que se traten.	8.3 Aplicará la fórmula básica de probabilidad, comprobándola mediante experimentos.	8.3.1 Aplicará la fórmula básica en el cálculo de la probabilidad de un evento. 8.3.2 Comprobará la fórmula de la probabilidad con métodos de regularidad estadística. **8.3.3 Representará gráficamente los estudios de la probabilidad.**

[63] Elaboración propia, la información se obtuvo de *Secretaría de Educación Pública. Consejo Nacional Técnico de la Educación* (1975). *Programa de Matemáticas. Primer Grado*. México, SEP.

Matemáticas II Estadística y probabilidad Objetivo: Interpretará gráficas formuladas a partir de investigaciones de todo tipo. Aplicará cálculos elementales de probabilidad en la solución de problemas prácticos.	8.3 Aplicará las operaciones lógicas, negación y disyunción al cálculo de la probabilidad de eventos.	8.3.1 Determinará la probabilidad de complemento de un espacio de eventos a partir de la negación. 8.3.2 Determinará la probabilidad de la unión de eventos.
Matemáticas III Estadística y probabilidad Objetivo: Aplicará fórmulas elementales en el cálculo de probabilidades. Obtendrá conclusiones probables a partir de análisis estadísticos.	8.4[64] Aplicará las fórmulas de probabilidad aprendidas, en la obtención de inferencias probables. 8.5 Resolverá problemas prácticos de cálculos de probabilidades.	8.4.1 Conceptos básicos de probabilidad. Probabilidad. **8.4.2 Diagramas de Árbol**. **¡Por primera vez en un programa de estudios de educación secundaria surge el tema!** 8.4.3 Probabilidad frecuencial. 8.4.4 Probabilidad de la intersección de eventos. 8.4.5 Probabilidad de la unión de eventos. 8.4.6 Eventos independientes.

Primer Grado. Registros Estadísticos y Probabilidad

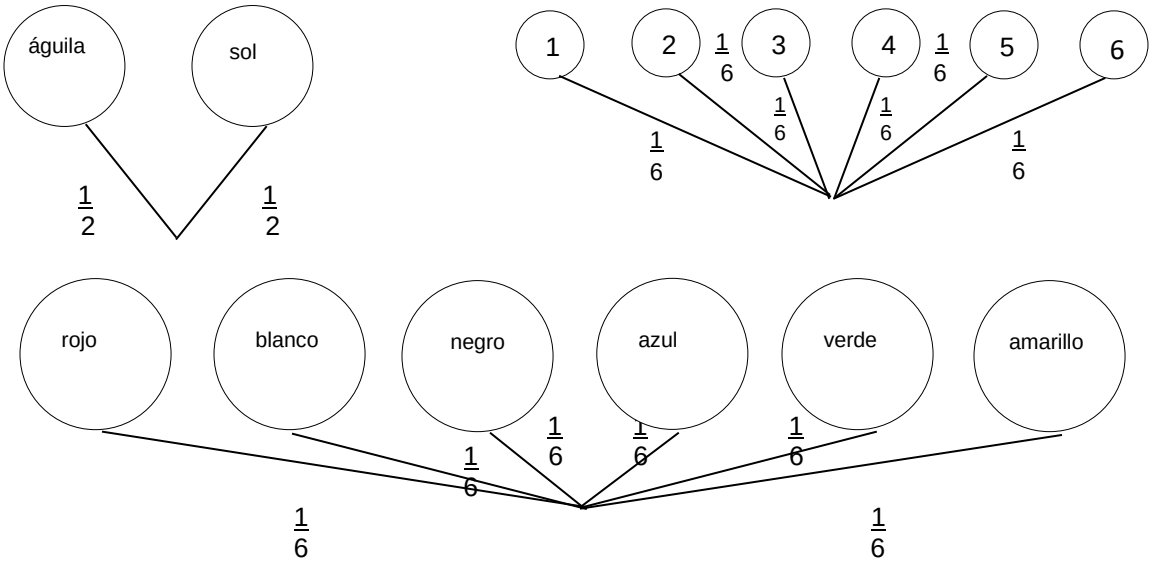
8.3 Aplicará la fórmula básica de probabilidad, comprobándola mediante experimentos.

8.3.3 Representará gráficamente los estudios de la probabilidad.

8.3.3.1 Obtenga la probabilidad frecuencial de cada uno de los eventos de un espacio de eventos dado.

8.3.3.2 Represente gráficamente las probabilidades obtenidas en “árboles”; por ejemplo:

[64] Los objetivos generales para el curso Matemáticas III que aquí se exhiben son los mismos que se muestran en el documento Secretaría de Educación Pública (1974). *Educación media básica: Resoluciones de Chetumal, Plan de estudios, Programas generales de estudio.* México: Compañía Editorial Impresora y Distribuidora, S.A. Consulté el libro *Matemáticas Tercer Curso Educación Media Básica,* escrito por Humberto Cárdenas, Miguel Ángel Curiel, Emilio Lluis, Fidel Peralta, Cuauhtémoc Tavera y Elías Villar.



Programas de 1980

Las matemáticas en este programa están consideradas desde el punto de vista formativo, se propone utilizar la experiencia del alumno como base para estimular el desarrollo del pensamiento reflexivo, crítico y creativo para impulsar los procesos de autoaprendizaje a fin de adquirir procedimientos de generalización, útiles en la construcción de procesos abstractos. El enfoque de este programa también presenta como un aspecto fundamental la resolución de problemas. La tabla III.2.20 presenta los temas del programa de matemáticas de 1980.

Tabla III.2.20. Temas del Programa de Matemáticas, 1980

Primer Grado	Lógica y conjuntos	Aritmética		Geometría y Métrica		Estadística y Probabilidad
Segundo Grado	Lógica y conjuntos	Aritmética	Álgebra	Geometría Plana		Estadística y Probabilidad
Tercer Grado	Lógica y conjuntos		Álgebra	Geometría	Trigonometría	Estadística y Probabilidad

Los objetivos de aprendizaje se orientan hacia la comprensión de algunos elementos básicos de la investigación científica y el desarrollo de la tecnología. De estos objetivos generales, se derivan los objetivos para los tres grados de secundaria.

A fin de alcanzar dichos objetivos, se organizaron los programas en ocho unidades por grado. Cada una cuenta con los objetivos particulares correspondientes. Las tablas III.2.21, III.2.22 y III.2.23 exhiben un extracto de los programas de estudio de matemáticas de 1980.

Tabla III.2.21. Programa de Estudio de Matemáticas, 1980

	1980
Contenidos	▪ **El profesor puede hacer las adaptaciones necesarias dependiendo del medio en que labora.**
Finalidades	▪ Utilizará la matemática como un lenguaje técnico de aplicación universal. ▪ Descubrirá la utilidad de la matemática como un recurso de interpretación, de dominio y superación del ambiente físico social y cultural.
Orientaciones Metodológicas	▪ **Se debe considerar el conocimiento que el alumno posee y que ha adquirido en su experiencia cotidiana como punto de partida para la construcción de diversos conceptos y métodos**. ▪ Hacer énfasis en los significados que pueden tener los conceptos matemáticos para identificar sus diferentes ámbitos de aplicación, más que procurar su manejo formal como conceptos abstractos. El profesor debe fomentar la expresión y el intercambio de puntos de vista a nivel grupal que permitan la confrontación de las ideas. Se deben presentar los problemas mencionando las limitaciones del enfoque planteado y las posibilidades prácticas reales de las soluciones obtenidas.

Tabla III.2.22. Programas de Matemáticas de 1980

	Unidad 1	Unidad 2	Unidad 3	Unidad 4	Unidad 5	Unidad 6	Unidad 7	Unidad 8
1er. Grado	Lógica y conjuntos	Operaciones con números naturales	Sistemas de numeración	Factorización	Números racionales no negativos y proporcionalidad	Números enteros	Geometría y métrica	**Registros estadísticos y probabilidad**
2do. Grado	Lógica y conjuntos	Racionales	Monomios y Polinomios	Funciones	Ecuaciones de primer grado	Sistemas de ecuaciones	Geometría plana	Estadística y probabilidad

3er. Grado	Lógica y conjuntos	Factorización	Ecuaciones de segundo grado	Triángulos y cuadriláteros	Círculo	Semejanza	Trigonometría	Estadística y probabilidad

Como en 1960 la distribución no intentaba hacer rígidos los programas; el profesor podía permutar los temas, enfatizar algunos de ellos o abordar temas de apoyo no propuestos. Se incluyeron lineamientos didácticos para que el docente aplicara el enfoque de la materia y lograra sus finalidades educativas. Estos lineamientos consideraban el conocimiento previo que posee el alumno como punto de partida para la construcción de los conceptos y métodos matemáticos. En la tabla III.2.23 figuran los objetivos particulares y específicos para el tema de probabilidad.

Tabla III.2.23. Temas de Estadística y Probabilidad, 1980

Unidad 8	Objetivos particulares	Objetivos específicos
1er. Grado Registros estadísticos y probabilidad	Al concluir el desarrollo de la presente unidad, el alumno: 8.3 Aplicará la fórmula básica de probabilidad, comprobándola mediante experimentos.	8.3.1 Aplicará la fórmula básica en el cálculo de la probabilidad de un evento. 8.3.2 Comprobará la fórmula de la probabilidad con métodos de regularidad estadística. **8.3.3 Representará gráficamente los estudios de probabilidad.**
2do. Grado Estadística y probabilidad	Al concluir el desarrollo de la presente unidad, el alumno: 8.3 Aplicará las operaciones lógicas, negación y disyunción al cálculo de la probabilidad de eventos.	8.3.1 Determinará la probabilidad del complemento de un espacio de eventos a partir de la negación. 8.3.2 Determinará la probabilidad de la unión de dos eventos dados[65].

[65] Se expone desde una perspectiva conjuntista como en los libros de texto de educación primaria de 1972.

3er. Grado Estadística y probabilidad	Al concluir el desarrollo de la presente unidad, el alumno: 8.2 Aplicará las fórmulas de probabilidad, aprendidas en la resolución de problemas.	8.2.1 Aplicará las fórmulas de unión y complemento de eventos en la resolución de problemas. 8.2.2 Aplicará la fórmula de intersección de eventos en la resolución de problemas. 8.2.3 Aplicará las fórmulas de probabilidad y el concepto de proporción, en inferencias estadísticas.

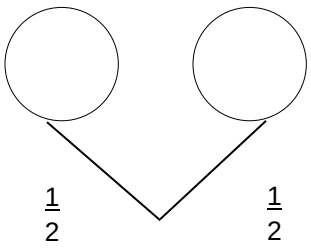
En el primer grado de secundaria, se intentaba que el estudiante obtuviera una formación en aritmética con la que resolviera problemas cotidianos y de otras materias. Se iniciaba el estudio de aspectos de probabilidad, y se introducían paulatinamente elementos relativos a la utilización del lenguaje simbólico[66] para expresar relaciones cuantitativas y espaciales.

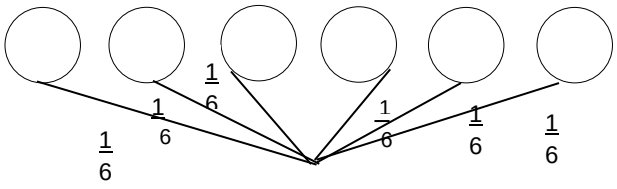
8.3.3. Representará gráficamente los estudios de la probabilidad.

Actividades que se sugieren:

8.3.3.1. Obtenga la probabilidad frecuencial de cada uno de los eventos de un espacio de eventos dado.

8.3.3.2. Represente gráficamente las probabilidades obtenidas en “árboles”; por ejemplo:





[66] Existen homomorfismos entre la realidad y las representaciones. En el programa 1980, ¿qué papel juega el simbolismo en el desarrollo y funcionamiento del conocimiento? ¿cuál es la relación con la resolución de problemas?

Programas de 1993

La reforma del artículo Tercero Constitucional, promulgada el 4 de marzo de 1993, estableció a la educación secundaria como el último tramo del ciclo obligatorio. Previamente se había determinado que uno de los problemas organizativos más serios radicaba en la coexistencia de dos estructuras académicas distintas: una por asignaturas y otra por áreas. Se afirmó que la organización por áreas "ha contribuido a la insuficiencia y la escasa sistematización en la adquisición de una formación disciplinaria ordenada y sólida por parte de los estudiantes" (SEP, 1993, 11). Se señaló como causas de este problema la organización de los estudios y la dificultad que representaba para el maestro la enseñanza de contenidos de diversos campos de conocimiento.

El propósito esencial del plan de estudios fue contribuir a **elevar la calidad de la formación de los estudiantes que terminaron la educación primaria, fortaleciendo los contenidos que responden a las necesidades básicas de aprendizaje de los adolescentes**. **Este plan se propuso establecer la congruencia y continuidad del aprendizaje entre la educación primaria y la educación secundaria**. Las prioridades en la organización del plan de estudios se enfocaron a la aplicación de las matemáticas en el planteamiento y resolución de problemas de la actividad cotidiana, así como la comprensión y organización de información cuantitativa. La distribución del trabajo y una síntesis de los programas de estudio de matemáticas 1993 se exponen en las tablas III.2.24, III.2.25 y III.2.26

Tabla III.2.24. Temas del Programa de Matemáticas, 1993

Primer Grado 5 horas semanales	Aritmética 44.8%		Geometría	Presentación y tratamiento de la información	Probabilidad
Segundo Grado 5 horas semanales	Aritmética	Álgebra 21.3%	Geometría	Presentación y tratamiento de la información	Probabilidad
Tercer Grado 5 horas semanales	Aritmética	Álgebra	Geometría Trigonometría 26.8%	Presentación y tratamiento de la información 3.8%	Probabilidad 3.3%

El nuevo plan de estudios es muy parecido al anterior en relación con las asignaturas. La diferencia es que se agrega una hora semanal a matemáticas.

Tabla III.2.25. Programa de Estudio de Matemáticas, 1993

	1993
Contenido	▪ El propósito central de los Programas de Matemáticas es que los alumnos aprendan a utilizarlas para resolver problemas, no solamente los que se resuelven con los procedimientos y técnicas aprendidas en la escuela, sino también aquellos cuyo descubrimiento y solución requieren de curiosidad e imaginación creativa. ▪ Desaparecen los temas de lógica y conjuntos. ▪ Se abandona el tratamiento conjuntista de la probabilidad. ▪ Se pone énfasis en que los alumnos tengan la oportunidad de explorar activamente, ya sea de manera empírica o teórica, los posibles resultados de una experiencia aleatoria, contrastar sus expectativas con los resultados observados experimentalmente y construir modelos de probabilidad para simular y resolver problemas. ▪ **Se concede importancia especial al empleo de diagramas de árbol en la enumeración y descripción de los posibles resultados de una experiencia aleatoria**, al uso de la fórmula clásica de probabilidad en situaciones con un número pequeño de resultados equiprobables, al estudio de las experiencias repetidas e independientes y la regla del producto, así como a la solución de problemas de probabilidad por medio de simulación.
Finalidades	▪ Adquirir seguridad y destreza en el empleo de técnicas y procedimientos básicos a través de la solución de problemas[67]. ▪ Reconocer y analizar los distintos aspectos que componen un problema. ▪ Elaborar conjeturas, comunicarlas y validarlas. ▪ Reconocer situaciones análogas es decir, que desde un punto de vista matemático tienen una estructura equivalente. ▪ Escoger o adaptar la estrategia adecuada para la resolución de un problema. ▪ Comunicar estrategias, procedimientos y resultados de manera clara y concisa. ▪ Predecir y generalizar resultados. ▪ Desarrollar gradualmente el razonamiento deductivo.

[67] El enfoque didáctico para la enseñanza de las matemáticas de la reforma de 1993 se apoyaba (igual que en todos los programas anteriores) en la resolución de problemas. Sin embargo, no cualquier problema resulta adecuado como ejemplo en la enseñanza, entonces podría haberse ofrecido a los profesores una colección de problemas, de situaciones problema, ya resueltos y comentados.

Orientaciones Metodológicas	▪ El trabajo en clase favorecerá la comprensión de las nociones aritméticas a partir de la solución de problemas muy diversos y permitirá el desarrollo de las **estrategias de conteo,** cálculo mental, estimación de resultados y el uso inteligente de la calculadora. ▪ Para motivar el estudio de un tema conviene partir de problemas que permitan destacar la necesidad de ciertos conceptos o procedimientos.

Tabla III.2.26. Programas de Matemáticas, 1993

Primer grado	**Aritmética**
	▪ **Problemas variados de conteo. -Uso de diagramas de árbol.** -Arreglos rectangulares (cartesianos).
	Probabilidad
	Actividades y problemas que favorezcan: ▪ **Uso de diagramas de árbol y arreglos rectangulares en la enumeración de los posibles resultados de una experiencia aleatoria (resultados de dos o tres volados consecutivos, lanzamiento de dos dados, etc.)** ▪ Expresión de la probabilidad de un evento como una fracción, un decimal y un porcentaje.
Segundo grado	**Aritmética**
	▪ **Conteo. Problemas variados de conteo, en particular, aplicaciones de la regla y del producto[68].**
	Probabilidad
	▪ Noción frecuencial de la probabilidad. - Registro y tratamiento de los resultados de experimentos aleatorios. - Ejemplos para ilustrar el uso de la noción frecuencial de la probabilidad. - Valores de la probabilidad y su significado usual. ▪ **Experiencias aleatorias y fórmula clásica.** - Ejemplos de experiencias aleatorias con resultados equiprobables y no equiprobables; ejemplos de experiencias repetidas. **- Uso de diagramas de árbol en la enumeración y descripción de los posibles resultados de una experiencia aleatoria.** - Aplicaciones de la fórmula clásica de probabilidad. - Elaboración de tablas y gráficas de probabilidades. ▪ Problemas sencillos que pueden resolverse por simulación. ▪ Primeros cálculos con probabilidades. - Probabilidad de que un evento no ocurra. - Aplicaciones elementales de la regla de la suma.
	Probabilidad

[68] Teniendo presente que donde el principio multiplicativo no es aplicable uno de los procesos de resolución es el diagrama de árbol.

Tercer grado	▪ Nociones de la probabilidad. Cálculos de probabilidades. - Enriquecimiento y explotación de la noción frecuencial en la solución de problemas de probabilidad. - Aplicaciones diversas de la fórmula clásica de la probabilidad. ▪ Cálculos con probabilidades. - Probabilidad de que un evento no ocurra; de que ocurra uno de dos eventos; aplicabilidad del principio de la suma. **- Uso de diagramas de árbol en la enumeración y descripción de los posibles resultados de un experimento aleatorio.** Probabilidades de transición y regla del producto. Aplicaciones. ▪ Solución de problemas por simulación; esquema de urnas de Bernoulli.

Programas de 2006

El Estado Mexicano asumió proporcionar las condiciones para que los egresados de primaria accedieran oportunamente a la educación secundaria y continuaran en ella hasta concluirla (de manera ideal antes de cumplir los 15 años). Acudir a la educación secundaria representaría para todos los estudiantes la formación en las competencias (adquisición de los conocimientos, desarrollo de habilidades, construcción de valores y actitudes) planteadas por el currículo común, desde el entorno nacional pluricultural y la determinación de cada entorno regional, estatal y comunitario.

Entre los principios centrales en la definición de este currículo se encuentra la posición de los jóvenes en la escuela secundaria y en la sociedad. **La educación secundaria se articularía con los niveles de preescolar y primaria para configurar un solo ciclo formativo e integrar una plataforma de formación general común y de calidad para todos los estudiantes de este nivel**. Se redujo el número de asignaturas por grado. La distribución del trabajo en el programa de estudios de matemáticas de 2006 se muestra en la tabla III.2.27.

Tabla III.2.27. Temas del Programa de Estudios de Matemáticas, 2006

Primer grado	Horas	Segundo grado	Horas	Tercer grado	Horas
Matemáticas I	5	Matemáticas II	5	Matemáticas III	5

Primer grado	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Forma, espacio y medida	Manejo de la información
Segundo grado	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Forma, espacio y medida	Manejo de la información
Tercer grado	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Forma, espacio y medida	Manejo de la información

Entre las ideas relevantes en el *Plan y Programas de estudios 2006*, se encuentra la de competencia[69] (presente desde el *Plan y programas de estudio 1993*. *Educación Básica. Secundaria*, aunque no con la claridad con que ahora se utiliza). En este documento se asigna un significado preciso al término, de manera que se distingue claramente de otros conceptos, como propósito, contenido, habilidad, conocimiento. Hay una intención clara de apuntalar el desarrollo de los alumnos en competencias como el nivel de los conocimientos y las habilidades.

El programa de matemáticas hace referencia a cuatro competencias: *planteamiento y resolución de problemas* (resolución de manera autónoma: los alumnos no solo encuentran un resultado, sino argumentan por qué es correcto, tanto en el ámbito de los cálculos como en el de la solución real, en caso de que se requiera), *argumentación* (los argumentos se ubican en tres niveles de complejidad: para explicar, para mostrar o justificar informalmente o para demostrar), *comunicación* (usar diferentes expresiones de una misma idea) y *manejo de técnicas* (se refiere al desarrollo del sentido numérico y del pensamiento algebraico, a la elección adecuada de la o las operaciones al resolver un problema, a la utilización del cálculo mental y la estimación, al empleo de procedimientos abreviados a partir de las operaciones que se requieren en un problema y en evaluar la pertinencia de los resultados)[70].

[69] El término “competencia” implica la posibilidad de aprender, de asumir y dirigir el propio aprendizaje a lo largo de la vida, de integrarse a la cultura escrita y matemática, así como de movilizar los diversos saberes culturales, científicos y tecnológicos para comprender la realidad.

[70] Con la reforma de planes y programas de estudio de la educación secundaria en México en 2006, se pretendió que la metodología en torno a los procesos de enseñanza aprendizaje de la matemática pasara de enfoques cognoscitivistas cuyo centro de interés era el profesor y el domino de la disciplina a enfoques constructivistas donde los estudiantes son los actores y en torno a ellos se deben diseñar las secuencias didácticas.

Los contenidos que se estudiaron fueron clasificados en tres ejes: *Sentido numérico y pensamiento algebraico*; *Forma, espacio y medida*; *Manejo de la información*. La conexión entre los contenidos del mismo eje entre ejes distintos o con los ejes de otras asignaturas fue considerada de suma importancia.

En estos programas la vinculación se favoreció a través de la organización en bloques temáticos que incluyen contenidos de los tres ejes. Al principio de cada bloque, se presentan los "Aprendizajes esperados", donde se señalan los conocimientos y las habilidades que todos los alumnos deben lograr al estudiar cada bloque. **La intención del enfoque didáctico es llevar a las aulas actividades de estudio que despierten el interés de los alumnos y los inviten a reflexionar**. Se señala que el conocimiento de reglas, algoritmos, fórmulas y definiciones solo es importante en la medida en que los alumnos lo puedan usar, de manera flexible, para solucionar problemas. **La actividad intelectual en estos procesos se apoya más en el razonamiento que en la memorización.**

El trabajo docente se dirige a analizar y proponer problemas interesantes, debidamente articulados a los estudiantes. El reto para el profesor fue reestructurar algo que el alumno ya sabe, para modificarlo, ampliarlo, rechazarlo o volver a aplicarlo en una nueva situación. En cuanto a la evaluación que se propone ésta combina dos aspectos que se complementan: qué saben hacer los alumnos y en qué medida aplican lo que saben, en relación con los contenidos matemáticos que se estudian en cada grado. Se sugirió a los profesores establecer líneas de progreso que podrían considerar en la evaluación del logro de competencias, por ejemplo, de resolver con ayuda a resolver de manera autónoma; de los procedimientos informales a los procedimientos expertos; de la justificación pragmática a la justificación axiomática. Los programas de estudio de matemáticas de 2006 se presentan en las tablas III.2.28 y III.2.29.

Tabla III.2.28. Programa de Estudio de Matemáticas, 2006

Contenidos	▪ **Se aplican los enfoques propuestos en el Plan y los Programas de Estudio de 1993**. ▪ Los contenidos que se estudian se organizaron en tres ejes: *Sentido numérico y pensamiento algebraico; Forma, espacio y medida; Manejo de la información*. ▪ A través de la organización en bloques temáticos se vinculan los contenidos de los tres ejes. ▪ En *Aprendizajes esperados* se señala los conocimientos y las habilidades que todos los alumnos deben alcanzar como resultado del estudio del bloque. ▪ Se planteaba el desarrollo de competencias para alcanzar los rasgos del perfil de egreso. ▪ **Los profesores podían incluir temas relacionados con los propósitos planteados en el programa siempre que fuesen de interés para los alumnos**. ▪ Se resuelven problemas que requieren del análisis, la organización, la representación y la interpretación de datos provenientes de diversas fuentes. Este trabajo se apoya en nociones tales como porcentaje, probabilidad, función, en el significado de los números enteros, fraccionarios y decimales. ▪ La competencia de argumentación se favorece especialmente.
Finalidades	▪ **Establecer la congruencia y continuidad con el aprendizaje obtenido en la educación primaria**. ▪ Se plantea el desarrollo de competencias para alcanzar los rasgos del perfil de egreso. ▪ Los alumnos identifican y evalúan experimentos aleatorios con base en la medida de la probabilidad. ▪ Que los alumnos utilicen de manera eficiente diversas técnicas aritméticas, algebraicas o geométricas, con o sin el apoyo de tecnología, al resolver problemas.
Orientaciones Metodológicas	▪ **Incorporar los conocimientos previos de los alumnos**. ▪**Considerar los intereses y necesidades de aprendizaje de los estudiantes**. ▪ **Evitar prácticas de enseñanza que priorizan la memorización sobre la participación activa de los estudiantes**. ▪ **Estimular el trabajo grupal y la construcción colectiva del conocimiento**. ▪ Se permitió elegir a los profesores y alumnos los materiales de apoyo que consideraran necesarios para lograr los propósitos, no sólo en cuanto a los libros de texto. ▪ **Se privilegia los procesos inductivos.** ▪ La comprensión de los conceptos matemáticos deberá sustentarse en actividades que impliquen la **intuición**, que favorezca el uso de herramientas matemáticas para ampliar, reformular o rechazar ideas previas. ▪ **Se opta el trabajo por proyectos como estrategias didácticas para organizar el trabajo escolar pues favorece la aplicación integrada de los aprendizajes.** ▪ En el caso de la probabilidad los alumnos anticiparán resultados, realizarán actividades de simulación y exploración de fenómenos aleatorios y expresarán

	propiedades, como la independencia, la equiprobabilidad y la complementariedad. ▪ Para motivar el estudio de un tema conviene partir de problemas que permitan destacar la necesidad de ciertos conceptos o procedimientos.

En conclusión, el enfoque sobre la enseñanza de las matemáticas en este programa de secundaria hizo énfasis en propiciar que los alumnos tuvieran experiencias que los llevaran al gusto por las matemáticas y la solución de problemas; desarrollaran su creatividad en la búsqueda de soluciones; aprendieran a discutir matemáticamente exponiendo y argumentando sus procedimientos y soluciones escuchando las ideas matemáticas de otros. Si estos elementos están presentes en las versiones anteriores de los programas, entonces surge la pregunta: ¿dónde se encuentran las innovaciones de los programas de 2006?

Tabla III.2.29. Temas de Probabilidad, 2006

	Bloque I	Bloque II	Bloque III	Bloque IV	Bloque V
Primer grado	* Manejo de la información. Representación de la Información. Diagramas y Tablas. Conocimientos y habilidades. 1.8 Resolver problemas de conteo utilizando diversos recursos, tales como tablas, **diagramas de árbol** y otros procedimientos personales.		* Manejo de la información. ▪ Análisis de la información. - Nociones de probabilidad. Conocimientos y habilidades. 3.9. Enumerar los posibles resultados de una experiencia aleatoria. Utilizar la escala de la probabilidad entre 0 y 1 y vincular diferentes formas de expresarla. Establecer cuál de dos o más eventos en una experiencia		* Manejo de la información. ▪ Análisis de la información. - Nociones de Probabilidad. Conocimientos y habilidades. 5.4 Reconocer las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.

			aleatoria tiene mayor probabilidad de ocurrir y justificar la respuesta.		
Segundo grado	* Manejo de la información. Representación de la información. - Diagramas y Tablas. Conocimientos y habilidades. 1.9 Anticipar resultados en problemas de conteo, con base en la identificación de regularidades. Verificar los resultados mediante arreglos rectangulares, **diagramas de árbol** u otros recursos.			* Manejo de la información. - Análisis de la información. - Noción de Probabilidad. Conocimientos y habilidades. 4.4 Distinguir en las diversas situaciones de azar eventos que son independientes. Determinar la forma en que se puede calcular la probabilidad de ocurrencia de dos o más eventos independientes.	* Manejo de la información. ▪ Análisis de la información. - Noción de Probabilidad. Conocimientos y habilidades. 5.4 Distinguir en diversas situaciones de azar eventos que son mutuamente excluyentes. Determinar la forma en que se puede calcular la probabilidad de ocurrencia.
Tercer grado		* Manejo de la información. - Noción de probabilidad. Conocimientos y habilidades. 2.6. Utilizar la simulación para resolver situaciones probabilísticas.			

Programas de 2011

Durante la administración federal 2006-2012, se desarrolló una política pública orientada —nuevamente— a **elevar la calidad educativa**, la cual pretendía favorecer la articulación en el diseño y desarrollo del currículo para la formación de los alumnos

de secundaria, **orientando la atención en los alumnos y sus procesos de aprendizaje**, el logro de los Estándares Curriculares establecidos por periodos escolares, favorecer la inclusión para atender la diversidad, trabajar en colaboración para construir el aprendizaje, incorporar temas de relevancia social, renovar la tutoría y la asesoría académica y el desarrollo de competencias que le permitiría alcanzar el perfil de egreso de la Educación Básica.

En este currículo, las matemáticas son el medio para que los estudiantes desarrollen formas de pensar que les permitan formar conjeturas y procedimientos para resolver problemas y para que utilicen diferentes técnicas o recursos que hagan más eficientes sus procedimientos de resolución. En los Programas de Matemáticas de 2011 (como se estableció en los programas previos), se utiliza el concepto de competencia matemática y se describen cuatro competencias: resolver problemas de manera autónoma, comunicar información matemática, validar procedimientos y resultados, y manejar técnicas eficientemente.

Por su parte, los profesores utilizarían secuencias de situaciones problemáticas para despertar el interés de los alumnos e invitarlos a reflexionar, a encontrar diferentes formas de resolver los problemas y a formular argumentos que validaran los resultados. En consecuencia, el desafío para el docente sería ayudar a los alumnos a analizar y socializar sus resultados para convertir la clase en un espacio social de construcción de conocimiento. Asimismo, la evaluación se comprendía como un proceso de registro de información sobre el estado de los conocimientos de los estudiantes, con el propósito de orientar las decisiones del proceso de enseñanza en general y del desarrollo de la situación de aprendizaje en particular.

Con respecto a la distribución del tiempo de trabajo quedó de la siguiente manera: en la escuela secundaria general de tiempo completo, la asignatura de matemáticas se impartió durante siete horas a la semana, mientras que en la secundaria técnica de tiempo completo, se impartieron seis horas semanales. Un extracto de los programas de estudio de matemáticas 2011 se encuentra en la tabla III.2.30.

Tabla III.2.30. Programa de Estudio de Matemáticas, 2011

	2011
Contenido	▪ La asignatura se organiza para su estudio en tres niveles de desglose. El primero corresponde a los ejes, el segundo a los temas y el tercero a los contenidos. ▪ Se consideran tres ejes: Sentido numérico y pensamiento algebraico, Forma, espacio y media, y Manejo de la información. ▪ Manejo de la información incluye los siguientes aspectos: la búsqueda, la organización, el análisis y la presentación de información para responder preguntas; el uso eficiente de la herramienta aritmética o algebraica que se vincula de manera directa con el manejo de la información; el conocimiento de los principios básicos de la aleatoriedad. ▪ Se consideran nueve temas. De cada tema se desprende los contenidos. ▪ Existen Aprendizajes Esperados. Cada Aprendizaje Esperado engloba un grupo pequeño de contenidos.
Finalidades	▪ Emprender procesos de búsqueda, organización, análisis e interpretación de datos contenidos en tablas o gráficas de diferentes tipos, para comunicar información que responda a preguntas planteadas por los mismos alumnos u otros. Elegir la forma de organización y representación (tabular o gráfica) más adecuada para comunicar información matemática. ▪ **Calculen la probabilidad de experimentos aleatorios simples, mutuamente excluyentes e independientes.**
Orientaciones Metodológicas	▪ Ayudar a los alumnos a estudiar matemáticas con base en actividades de estudio sustentadas en situaciones problemáticas. ▪ Proponer problemas debidamente articulados, para que los alumnos avancen en el uso de las técnicas y razonamientos cada vez más eficaces. ▪ La solución de los problemas debe construirse en el entendido de que existen diversas estrategias posibles y hay que usar al menos una. ▪ Los alumnos buscarán por sus propios medios la solución de los problemas que se les propone. A partir de sus conocimientos previos los alumnos reestructuran algo que ya saben, sea para modificarlo, ampliarlo, rechazarlo o para volver a aplicarlo a una nueva situación. ▪ El docente observa e interroga a los estudiantes para conocer los procedimientos y argumentos que proponen en práctica, aclarar dudas, destrabar procesos y lograr que los alumnos avancen. ▪ El profesor acostumbrará a los alumnos a leer y analizar los enunciados de los problemas. Además, averiguará como interpretan la información que reciben de manera oral o escrita. Dedicará el tiempo necesario para que los alumnos adquieran conocimientos con significado y desarrollen habilidades que les permitan resolver diversos problemas y seguir aprendiendo.

La asignatura de matemáticas fue clasificada para su estudio en tres niveles de desglose. El primero de ellos son los ejes, de cada uno de los ejes se desprenden

temas y para cada uno hay una secuencia de contenidos que van de menor a mayor dificultad. Un eje se definió como la dirección de una acción; por ejemplo, al decir “Manejo de la información”, se destaca que lo que dirige el estudio de la probabilidad es la búsqueda, la organización, la presentación, el análisis y la interpretación de información para responder preguntas.

El uso de la herramienta aritmética o algebraica se vincula de manera directa con el manejo de la información y el conocimiento de los principios básicos de aleatoriedad. Existe un elemento más que forma parte de la estructura de los programas que son los Aprendizajes esperados. Como ocurrió en el Programa 2006, los Aprendizajes esperados señalan los conocimientos y las habilidades que todos los alumnos deberían lograr como consecuencia del estudio de varios contenidos, incluidos o no en el bloque en cuestión. Los Aprendizajes esperados no se corresponden uno a uno con los contenidos del bloque pues son saberes que se construyen como resultado de los procesos de estudio.

Los contenidos de cada grado están organizados en cinco bloques temáticos. En todos los bloques se incluyen contenidos de los tres ejes, con dos propósitos: 1) los temas se estudiarían simultáneamente a lo largo del curso, evitando que algunos solo aparecieran al final del programa con alta probabilidad de que no se estudiaran; 2) al vincular el estudio de temas correspondientes a diferentes ejes, se pretendía que los estudiantes tuvieran una visión global de la asignatura. Como se observa en la tabla III.2.31, en algunos bloques se incluyen contenidos relacionados con combinatoria.

Tabla III.2.31. Temas de Probabilidad 2011

PRIMER GRADO		
Bloque I	APRENDIZAJES ESPERADOS	* MANEJO DE LA INFORMACIÓN Nociones de Probabilidad
		◦ Identificación y práctica de juegos de azar sencillos y registro de los resultados. Elección de estrategias en función del análisis de resultados posibles.
Bloque III		◦ Anticipación de resultados de una experiencia aleatoria, su verificación al

		realizar el experimento y su registro en una tabla de frecuencias.
Bloque IV	▪ Lee información presentada en gráficas de barras y circulares. Utiliza estos tipos de gráficas para comunicar información.	◦ Resolución de problemas de conteo mediante diversos procedimientos. Búsqueda de recursos para verificar los resultados.
SEGUNDO GRADO		
Bloque I	▪ Compara cualitativamente la probabilidad de eventos simples.	◦ Comparación de dos o más eventos a partir de sus resultados posibles, usando relaciones como: “es más probable que…”, “es menos probable que…”
Bloque II		◦ Realización de experimentos aleatorios y registro de resultados para un acercamiento a la probabilidad frecuencial. Relación de ésta con la probabilidad teórica.
Bloque V	▪ Explica la relación que existe entre la probabilidad frecuencial y la probabilidad teórica.	◦ **Comparación de las gráficas de dos distribuciones (frecuencial y teórica) al realizar muchas veces un experimento aleatorio.**
TERCER GRADO		
Bloque I	▪ Explica la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.	◦ Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.
Bloque II		° Cálculo de probabilidad de ocurrencia de dos eventos, mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).
Bloque III		◦ Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).
Bloque V	▪ Resuelve problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.	◦ Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.

Existen diferencias entre los programas de 1993, 2006 y 2011 en relación con ampliar o disminuir el contenido. En el programa de 1993 figuran los significados de los valores probabilistas, los cuales no se incluyen en los dos programas posteriores. Otra variación se refleja en que el programa de 1993 tiene mayor contenido en relación con el tema de probabilidad, el de 2006 tiene una reducción de éste y el de 2011 toma

contenidos del programa 1993. El único programa que presenta de forma explícita la intención en la aplicación de cierto contenido combinatorio es el de 1993. Los dos programas siguientes no lo describen explícitamente, esto se explica considerando su enfoque didáctico.

En consecuencia, el contenido vinculado con los diagramas de árbol y la combinatoria presentado en los últimos tres programas se concentró en el registro de resultados, la estimación de probabilidades, el análisis de los posibles resultados en función de los problemas de conteo, el tratamiento de la noción frecuencial y clásica de probabilidad y las formas de expresarla matemáticamente. Al paso de las reformas el contenido que permaneció como lo fundamental se refiere a la variación de las condiciones necesarias para el estudio de la equiprobabilidad y no equiprobabilidad, la independencia de eventos, los eventos complementarios y los mutuamente excluyentes. De ello se deriva de forma específica los procedimientos relacionados con la regla de la suma y la regla del producto.

Programas de 2017

El establecimiento de una Reforma Educativa sólo se explica si existen problemas en la educación que se está impartiendo. La Reforma Educativa impulsada en el periodo 2012-2018 propuso un planteamiento pedagógico, que precisaba de la reorganización del sistema educativo y de sus políticas públicas. Estas ideas fueron plasmadas en el documento *Modelo Educativo para la Educación Obligatoria. Educar para la libertad y la creatividad* (Modelo Educativo).

La primera etapa de la implementación del *Plan y Programas de Estudio del Modelo Educativo para la Educación Obligatoria* en las escuelas de educación básica en todo el país se realizó en el ciclo escolar 2018-2019, y los nuevos documentos *Plan y Programas de Estudio para la Educación Básica* se integraron en *Aprendizajes Clave para la Educación Integral*. ¿Cuál fue la problemática para requerir una nueva Reforma Educativa?, ¿qué resultados obtuvo la reforma anterior? Se muestra en la siguiente

tabla un comparativo entre algunos objetivos de la reforma anterior y los del Modelo Educativo 2017 que contribuye a deducir explicaciones ciertas.

Tabla III.2.32. Innovaciones del Modelo Educativo 2017 (SEP, 2017)

Innovación	Antes	Ahora
Primero los niños	**La forma de enseñar consistía en memorizar, era repetitiva y no se enfocaba en el aprendizaje de los niños.**	**El fin último es una educación de calidad con equidad donde los aprendizajes y la formación de niñas, niños y jóvenes están al centro de todos los esfuerzos educativos.**
Articulación del currículo	Las diferencias entre los aprendizajes adquiridos por los niños, niñas y jóvenes entre un nivel educativo y otro eran muy grandes.	Define claramente qué aprendizajes mínimos deben tener los niños, niñas y jóvenes al egreso de cada nivel educativo, desde el preescolar hasta la educación media superior.
Aprendizajes clave	El currículo tenía mucho contenido que no era útil ni significativo para los estudiantes.	Con el nuevo modelo educativo ahora nos enfocamos en los aprendizajes clave, para que los niños aprendan a aprender. Y con su determinación sigan aprendiendo a lo largo de la vida.
Autonomía Curricular	Las escuelas no tenían la oportunidad de proponer sus propios contenidos.	Cada comunidad educativa tiene la posibilidad de proponer contenidos en función del contexto y necesidades de sus estudiantes.

El documento *Aprendizajes Clave para la Educación Integral. Plan y programas de estudio para la educación básica* indica cuáles son las deficiencias en el documento *Plan y programas* de la reforma anterior, pero no aclara por qué la educación básica no ha facilitado los conocimientos, las habilidades, las actitudes y los valores esenciales para el desarrollo de los estudiantes. ¿No se crearon las reformas anteriores para resolver estos problemas? Existe consenso en la conveniencia de

concentrar el plan de estudios de la educación en aquellos conocimientos realmente esenciales. Esto se ha dicho en las reformas precedentes sobre combatir la memorización y la transmisión verbal de conocimientos, y se ha recalcado la necesidad de reducir los contenidos a lo esencial; nada que no se hubiera planteado en la reforma previa.

El problema de la calidad de la educación tendió a atribuirse no solo a la inadecuación del plan y los programas, sino a la deficiente formación de los docentes; las acciones gubernamentales se concentraron en las relaciones laborales con éstos, desatendiendo el problema de la calidad. La reforma educativa establecería un programa de formación profesional para los docentes que la llevarían adelante, el cual se realizaría sobre la base de una práctica eficiente en el ámbito de los nuevos programas y no limitarse a ofrecer a los profesores información sobre el nuevo currículo en cursos cortos; de esta manera, ellos no podrían desistir de la enseñanza expositiva.

Respecto de la evaluación, era deseable que los profesores hicieran evaluaciones cualitativas, que siguieran minuciosamente los adelantos de sus alumnos; no obstante, esto se aleja de la realidad en la organización académica de la secundaria, ya que un docente atiende a varios grupos de estudiantes. En lo referente al aprendizaje de las matemáticas, se puso énfasis en los beneficios de la relación con la práctica y con las experiencias de la vida real de los estudiantes. Sin embargo, esta reforma no hizo una aportación sustancial a los elementos pedagógicos.

El nuevo currículo de la educación básica convergía en el desarrollo de aprendizajes clave, es decir, “aquellos que permiten seguir aprendiendo constantemente y que contribuyen al desarrollo integral de los estudiantes” (SEP, 2017a, 17). El Plan se organizó en tres elementos: la formación académica, el desarrollo personal y social de los alumnos y la autonomía curricular. Se afirma que se concede a las escuelas un espacio de autonomía curricular; sin embargo, el Plan de estudio de 1932 otorgaba a cada comunidad educativa la libertad para tomar decisiones que mejoraran el logro académico de los alumnos.

La *Introducción* de *Aprendizajes Clave* enfatiza la importancia de la vigencia de este *Plan* y programas de estudio para la educación básica para que se mantengan al

menos durante los próximos doce ciclos lectivos consecutivos, aunque la duración efectiva de estos programas fue de solo cinco ciclos escolares. En el apartado “Los Fines de la Educación en el siglo XXI” se expone el perfil de egreso de la educación obligatoria, organizado en once ámbitos. Uno de ellos es “Pensamiento matemático”. A continuación, se muestra en la tabla III.2.33 el perfil de egreso de cada nivel que forma la educación obligatoria para este ámbito[71]. La lectura horizontal indica el desarrollo gradual del alumno (SEP, 2017a, 27).

Tabla III.2.33. Perfil de egreso de cada nivel de la educación obligatoria para el ámbito Pensamiento matemático

Ámbito	Al término de la educación preescolar	Al término de la educación primaria	Al término de la educación secundaria	Al término de la educación media superior
Pensamiento matemático	• Cuenta al menos hasta el 20. Razona para solucionar problemas de cantidad, construir estructuras con figuras y cuerpos geométricos y organizar información de formas sencillas (por ejemplo, en tablas).	• Comprende conceptos y procedimientos para resolver problemas matemáticos diversos y para aplicarlos en otros contextos. Tiene una actitud favorable hacia las matemáticas.	• Amplía su conocimiento de técnicas y conceptos matemáticos para plantear y resolver problemas con distinto grado de complejidad, así como para modelar y analizar situaciones. Valora las cualidades del pensamiento matemático.	• Construye e interpreta situaciones reales, hipotéticas o formales que requieren la utilización del pensamiento matemático. Formula y resuelve problemas, aplicando diferentes enfoques. Argumenta la solución obtenida de un problema con métodos numéricos, gráficos o analíticos.

En el diseño del currículo de la educación secundaria se tomaron como referentes: la normatividad nacional, los criterios del Programa para la Evaluación

[71] El rasgo del perfil de egreso se obtiene a través de aprendizajes esperados, no resume de forma precisa el estudio de las matemáticas a lo largo de la educación básica.

Internacional de los Estudiantes (PISA) y la Agenda E 2030 de la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO). Algunos de los aspectos que se tuvieron en cuenta para el diseño del currículo y para la elaboración de los programas de estudio que lo componen fueron: la inclusión, el desarrollo de las habilidades vinculadas con el desempeño emocional y ciudadano, la relación entre lo global y lo local, y los criterios del Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) para el diseño curricular.

Para la construcción del Plan 2017 fueron identificados los contenidos fundamentales aplicando cuatro criterios: el enfoque competencial del Plan; la naturaleza de los contenidos y formación integral; privilegiar los contenidos que propicien aprendizajes relevantes y duraderos y balance entre cantidad y calidad de los aprendizajes (ejercicio de suma cero[72]) (SEP, 2017a, 102-111). Además, los contenidos de los programas fueron clasificados en tres componentes curriculares: campos de formación académica; áreas de desarrollo personal y social; y ámbitos de autonomía curricular. A los tres simultáneamente se les llama “Aprendizajes Clave para la educación integral”.

Cuando los aprendizajes clave se expresan en términos del dominio de un conocimiento, una habilidad, una actitud o un valor, se concretan en “Aprendizajes esperados”. A su vez, el componente “Campos de formación académica” está organizado en tres elementos, uno de ellos es “Pensamiento matemático”. La asignatura de matemáticas se ubica en este campo (SEP, 2017a, 112-113). Respecto de los “Aprendizajes esperados”, cada uno describe lo que se desea que logren los alumnos al terminar el grado escolar se clasifican con base en categorías llamadas “organizadores curriculares”. Una característica de los “Aprendizajes esperados” es que gradúan progresivamente los conocimientos, las habilidades, las actitudes y los valores que los alumnos deben alcanzar.

En este Plan se establecen entre otros los siguientes principios pedagógicos que habrán de dirigir la práctica docente: poner al estudiante y su aprendizaje en el

[72] Significa que al integrar los contenidos a un programa de estudio, se debe tener presente el número de temas que se pueden estudiar dedicando el tiempo necesario a su comprensión.

centro del proceso educativo, tener en cuenta los saberes previos del estudiante, ofrecer acompañamiento al aprendizaje, conocer los intereses de los estudiantes, entender la evaluación como un proceso relacionado con la planeación del aprendizaje y valorar el aprendizaje informal[73] (SEP, 2017a, 118-123). La caracterización que este Plan da del campo de formación "Pensamiento matemático", es la forma de razonar para resolver problemas provenientes de diversos contextos, la cual involucra el uso de estrategias no convencionales. No obstante, solo hay dos "Aprendizajes esperados" en los que se indica que se trabaje en distintos contextos (SEP, 2017a, 179-180), lo que hace suponer que las situaciones problema estarán contextualizadas dentro del ámbito propio de las matemáticas.

Los propósitos generales de la asignatura de matemáticas en la educación básica fueron los siguientes:

a) Concebir las matemáticas como una construcción social donde se formulan y argumentan hechos y procedimientos matemáticos.

b) Adquirir actitudes positivas y críticas hacia las matemáticas: desarrollar confianza en sus propias capacidades y perseverancia al enfrentarse a problemas; tener disposición para el trabajo colaborativo y autónomo; mostrar curiosidad e interés por emprender procesos de búsqueda en la resolución de problemas.

c) Desarrollar habilidades que les permitan plantear y resolver problemas usando herramientas matemáticas, tomar decisiones y enfrentar situaciones no rutinarias. (SEP, 2017a, 161).

Entre los propósitos específicos del programa de matemáticas para la educación secundaria destacan los siguientes:

a) Elegir la forma de organización y representación —tabular, algebraica o gráfica— más adecuada para comunicar información matemática.

b) Calcular la probabilidad clásica y frecuencial de eventos simples y mutuamente excluyentes en experimentos aleatorios (SEP, 2017a, 162-163)[74].

[73] Los principios pedagógicos mencionados fueron considerados en los planes y programas anteriores.
[74] No aparece de forma explícita contenidos relacionados con la combinatoria y con los diagramas de árbol en ninguno de los programas y ejes que lo componen.

El enfoque pedagógico de los programas se fundamentó en la resolución de problemas de manera autónoma. Se afirmó que si se afronta la situación problemática cuidando la autenticidad de los contextos, los alumnos pueden desarrollar por sí mismos conocimientos que se aproximen a la solución, aunque no dispongan de herramientas óptimas, o bien, aun cuando no descubran la solución, identifiquen una limitación en sus conocimientos previos y la necesidad de crear uno nuevo. Asimismo, la resolución de problemas debía representar un desafío de interés para los estudiantes[75].

En los programas se indica que tratar la solución de un problema implica llevar a cabo las competencias matemáticas, esto no es consistente con el objetivo de que los estudiantes aprendan contenidos matemáticos desarrollando procedimientos de resolución de problemas que no necesariamente les han enseñado con anterioridad. No se distingue lo que significa el enfoque de resolución de problemas a través de situaciones problema y el desarrollo de la habilidad de resolver problemas.

En estos programas, al docente corresponde clasificar y adaptar los problemas que propondrá a los alumnos, organizar el trabajo en el aula, estimular la reflexión sobre las explicaciones de los estudiantes a través de preguntas y contraejemplos, impulsar a los alumnos a buscar nuevas interpretaciones o nuevos procedimientos y proporcionar a los alumnos los medios para que aprendan a determinar la validez de sus procedimientos y resultados. Si bien la planeación queda establecida en la distribución de los “Aprendizajes esperados” y la optimización del uso del tiempo[76] que cada docente decida, en realidad, pudo suceder que, en su planeación los profesores combinaran aprendizajes de distintos temas en periodos cortos obstaculizando la

[75] En realidad, la finalidad de la resolución de problemas es obtener representaciones solo aritméticas o algebraicas o geométricas de las soluciones, la cual no es la única forma de modelar o representar un razonamiento.
[76] Ningún “Aprendizaje esperado” estaba ligado a un momento particular del ciclo escolar, su característica fue ser anual.

enseñanza de acuerdo con las características y el progreso de los estudiantes. (SEP, 2017a, 126)[77].

Para su análisis, el campo de formación académica “Pensamiento Matemático” se ordenó en tres ejes temáticos (organizadores curriculares de primer nivel) y doce temas (organizadores curriculares de segundo nivel). Uno de los ejes temáticos es “Análisis de datos”, entre sus propósitos están favorecer que los alumnos alcancen conocimientos y habilidades esenciales de la teoría probabilística para analizar y comprender información y aprender algunas formas de medir la incertidumbre (SEP, 2017a, 168). En el programa de secundaria se dan las siguientes orientaciones didácticas específicas para los docentes, para trabajar el enfoque de resolución de problemas:

a) Que los estudiantes entiendan completamente el enunciado del problema y reconozcan la información esencial para poder resolverlo[78], planteen usando sus propias conjeturas las rutas de solución de los problemas que buscan resolver.

b) Concretar el trabajo en equipo por medio de momentos de aprendizaje cooperativo.

c) Que el docente dedique tiempo suficiente para que la actividad se desarrolle totalmente, desde el estado de búsqueda y discusión de las primeras conjeturas, hasta el estado final de la redacción y apropiación de los conocimientos buscados.

d) Incluir actividades para estudiantes con necesidades específicas de apoyo para comprender los conceptos matemáticos; proponer actividades que propicien la aplicación de diferentes herramientas matemáticas o que involucren el uso de recursos tecnológicos. (SEP, 2017a, 168-170).

La descripción de los ejes temáticos y los planteamientos de los “Aprendizajes esperados” resultan tan generales que terminan por ser confusos y no parecen ser útiles para la planeación de clase ni para la evaluación. Esto entra en contradicción con la disposición de que los “Aprendizajes esperados” son la referencia esencial para la planeación y evaluación. En consecuencia, a los profesores les sería difícil encontrar

[77] De acuerdo con la Ley General del Servicio Profesional Docente, los profesores que ingresaron al servicio recibirían acompañamiento y apoyo de un tutor (lo cual no ocurrió en todos los casos). La eficacia de la implementación de un Plan depende en gran medida del entendimiento de la nueva pedagogía por los docentes y del acompañamiento que las autoridades educativas les ofrezcan.

[78] ¿Cuáles son las dificultades de los estudiantes para comprender el enunciado de un problema?

en los programas elementos que contribuyan a transformar su enseñanza de las matemáticas.

La evaluación de la asignatura tiene un enfoque formativo, es un proceso que se convierte en un elemento para la retroalimentación del aprendizaje del alumno, así como para identificar necesidades específicas de la tarea docente. Un objetivo de la evaluación es que los estudiantes tengan tiempo para examinar lo que saben, los conocimientos que están aprendiendo y lo que todavía les falta por aprender. Se sugiere analizar tanto los errores como los aciertos y aprovecharlos como fuente de aprendizaje.

Es importante hacer notar que las etapas de mejora de los aprendizajes que se mencionan en este apartado (de resolver problemas con ayuda a solucionarlos autónomamente, de la justificación pragmática al uso de propiedades, de los procedimientos informales a los procedimientos expertos) están contenidas en los programas de estudio del Plan 2006 (SEP, 2006, 19-20). No se presentaron elementos novedosos o complementarios que ampliaran o enriquecieran la información existente. Se sugiere a los profesores esquemas de evaluación para recabar información, como los siguientes:

a) Guías de observación que apoyen la exploración de conocimientos y habilidades a partir de preguntas orales, aplicadas con apoyo de diarios de clase, anecdotario y listas de cotejo y control.

b) La resolución de problemas en forma individual o grupal, ejercicios y prácticas en clase, la explicación de soluciones y el desarrollo de tareas en casa.

c) Los exámenes (SEP, 2017a, 202).

Enseguida se presenta en la tabla III.2.34 la dosificación de “Aprendizajes esperados” para el eje “Análisis de datos” y el tema “Probabilidad” de la asignatura de matemáticas en educación secundaria. La flecha horizontal muestra la orientación del avance gradual, de primero a tercer grado, que seguirá un estudiante en cada uno de

los organizadores de segundo nivel (SEP, 2017a, 172-177)[79]. No se menciona a los diagramas de árbol ni a la combinatoria de forma explícita.

Tabla III.2.34.

Análisis de datos			
Tema	1° grado	2° grado	3° grado
Probabilidad	• Realiza experimentos aleatorios y registra los resultados para un acercamiento a la probabilidad frecuencial. →	• Determina la probabilidad teórica de un evento en un experimento aleatorio. →	• Calcula la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes.

En relación con la evolución de los “Aprendizajes esperados” respecto al eje “Análisis de datos” se diseñó considerando entre otras ideas, las siguientes: la importancia de los datos para entender los fenómenos naturales y sociales y el estudio de la probabilidad. Los “Aprendizajes esperados” por grado escolar están organizados en tablas conforme a los organizadores curriculares de segundo nivel que corresponden en este caso a los temas de estadística y probabilidad. Cada organizador curricular de segundo nivel incluye uno o más “Aprendizajes esperados” (SEP, 2017a, 178-180).

Los “Aprendizajes esperados” por grado escolar correspondientes al tema de probabilidad se exponen en la tabla III.2.35[80]. En el programa de tercer grado los “Aprendizajes esperados” están dirigidos hacia el cálculo, mientras que la resolución de problemas es una competencia.

[79] Ante la diversidad de criterios de los docentes para establecer la secuencia de contenidos existió la posibilidad de que los Aprendizajes esperados que aparecen al final del programa, como el eje “Análisis de datos”, no se estudien.

[80] Formalmente no se incluye explícitamente a la combinatoria ni a los diagramas de árbol en el currículo de educación secundaria 2017, tampoco los encontramos en el estudio de probabilidad. El plan y los programas de estudio no consideran el desarrollo de hábitos de pensamiento que preparen el camino hacia la combinatoria.

Tabla III.2.35.

Aprendizajes esperados	Competencia
Eje Análisis de datos Tema Probabilidad	• Elegir la forma de organización y representación -tabular, algebraica o gráfica- más adecuada para comunicar información matemática. • Calcular la probabilidad clásica y frecuencial de eventos simples y mutuamente excluyentes en experimentos aleatorios.
1° grado • Realiza experimentos aleatorios y registra los resultados para un acercamiento a la probabilidad frecuencial.	
2° grado • Determina la probabilidad teórica de un evento en un experimento aleatorio.	
3° grado • Calcula la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes.	

El aprendizaje que está indicado en primer grado es solo cualitativo ya que se limita al registro de resultados; no se explicita la resolución de problemas de conteo mediante diversos procedimientos; por ejemplo, los diagramas de árbol. No existe entre los “Aprendizajes esperados” técnicas sencillas e intuitivas de conteo como los diagramas de árbol. Se afirma que en segundo grado los estudiantes aprenderán a determinar el espacio muestral, a utilizar la escala de probabilidad y a vincularla con diferentes formas de expresarla.

Se cree que una vez que los alumnos aprenden a calcular la probabilidad de un evento en una gran variedad de experimentos aleatorios, se les enseña el concepto de complemento de un evento y después, se plantean problemas que impliquen calcular la probabilidad de eventos mutuamente excluyentes (regla de la suma). No es claro el desarrollo de las competencias en cada grado y en cada aprendizaje. Los programas de estudio de 2017 no tienen las propiedades que hacen comprensible el contenido de esta propuesta; su presentación deja al docente la tarea de aclarar el sentido y los propósitos de la enseñanza, además de incluir en su práctica todos los elementos de los programas.

En la tabla adjunta se detallan los aspectos del currículo 2011 que se conservaron en la versión de 2017 acompañados de observaciones.

Tabla III.2.36.

Características del currículo 2011 que se conservaron	Características del currículo 2017	Observaciones
• El enfoque didáctico para el estudio de las matemáticas es la resolución de problemas. Este enfoque implica plantear situaciones problemáticas interesantes y retadoras que inviten a los alumnos a reflexionar, a encontrar diferentes formas de resolverlas y a formular argumentos para validar los resultados; así como que favorezcan el empleo de distintas técnicas de resolución y el uso del lenguaje matemático para interpretar y comunicar sus ideas. • El aprendizaje se sustenta en los conocimientos previos de los alumnos, de tal forma que ellos aprovechen lo que saben y avancen en la construcción de conocimientos cada vez más complejos y en el uso de técnicas más eficaces. • La actividad fundamental en los procesos de estudio de la asignatura es el razonamiento; sin embargo, los ejercicios de práctica y el uso de la memoria son complementarios y necesarios para facilitar el tránsito a procesos más complejos. • El enfoque de la evaluación de la asignatura es formativo.	• Se tiene una posición más clara sobre la concepción de las matemáticas y sobre la resolución de problemas. • Las "Orientaciones didácticas" se recuperan, con explicaciones, sugerencias de actividades y algunas articulaciones posibles. • El eje "Manejo de la información", se reorganizó y ahora es "Análisis de datos", que incluye solo "Estadística" y "Probabilidad". El estudio de la Probabilidad ahora se inicia en primaria.	• Es ambigua la afirmación "se tiene una posición más clara sobre la concepción de las matemáticas". La idea de que el aprendizaje de las matemáticas mejora empleando la resolución de problemas no es reciente. Véase programas de estudio 1993, 2006 y 2011. • En el Plan de estudio 2017 no se plantea el propósito de que los alumnos utilicen el conocimiento matemático para analizar situaciones y resolver problemas del entorno físico y social. • De la lectura de los programas es confuso cómo seguir el enfoque de resolución de problemas durante todo un ciclo escolar y para todos los "Aprendizajes esperados". • Las formas de organización del trabajo en el salón de clases y en la escuela no se vinculan con el enfoque de la resolución de problemas. • En los programas de estudio del Plan 2006, las "Orientaciones didácticas" incluyen explicaciones, actividades complementarias y vínculos con otras asignaturas.

Se trata de un proceso sistemático cuyo propósito es mejorar el desempeño de los alumnos, a partir de la observación de sus procesos de aprendizaje y el seguimiento a sus progresos. Un objetivo importante es que ellos tengan oportunidades para reflexionar acerca de lo que saben, lo que están aprendiendo y lo que les falta por aprender.		**• Se eliminó la resolución de los problemas de conteo. Se complica la comprensión de nociones importantes para la combinatoria y la probabilidad.** **• Se eliminó el uso de diagramas de árbol. Permanece la dificultad de enumerar y contar los resultados posibles y los casos favorables del evento que interesa. Se excluye proporcionar una imagen de los distintos desarrollos posibles de una experiencia obstaculizando la preparación de los estudiantes para acceder a las nociones de independencia y regla del producto.** • En el programa 2011 la asignatura de matemáticas se organiza para su estudio en tres niveles de desglose: ejes, temas y contenidos. Uno de los temas es "Análisis y representación de datos" por lo tanto, es una de esas ideas matemáticas que forman parte del eje "Manejo de la información".

En conclusión, hasta la década de 1960, la enseñanza sobre cómo construir e interpretar gráficas, como histogramas, gráficas de barras, sectores circulares y poligonales, constituía el único contenido relacionado con la representación gráfica, estas ideas se abordaron en el contexto de la estadística. En los años sesenta se distinguía entre lo considerado "conocimientos matemáticos" y la aplicación de estos a problemas de distinto tipo. En el programa de matemáticas, en el tema *Habilidad*

para registrar hechos, se inició la enseñanza de la estadística, antes que la de la probabilidad.

La generación 1972 de libros de texto por primera vez coincidió con el plan de estudios y con los temas de probabilidad. En los libros de texto gratuitos de primaria de 1974 se expusieron por primera vez las lecciones de combinatoria y de diagramas de árbol. El aprendizaje de estos temas se orientó a familiarizar al estudiante con algunas ideas básicas que los tratan, y se consideró que esa preparación inicial podía ser útil para que sus ideas acerca de su realidad circundante se orientaran por un criterio que tomara en cuenta el azar, dentro de un enfoque estructuralista sujeto a la teoría de conjuntos.

En los contenidos de los libros de texto gratuitos se usaron expresiones del lenguaje combinatorio (más posible, menos posible, igualmente posible, más probable, menos probable, igualmente probable). Además, se asignó un espacio muestral de resultados observables a experimentos aleatorios (en este caso los diagramas de árbol se presentan como espacios muestrales estructurados en una representación icónica), se incorporaron los experimentos estocásticamente independientes, se presentó la regla del producto, la noción de experiencia aleatoria y de experiencia determinista, el modelo de urna. En síntesis, estos libros desempeñaron un papel crucial en la enseñanza de los diagramas de árbol y la combinatoria, estableciendo fundamentos que perdurarían en los siguientes planes y programas.

La característica de los programas de la década de los años ochenta fue la relevancia de los significados de los conceptos en distintos contextos y en la resolución de problemas y el principio de afiliación constructivista. Esta propuesta consideró al conocimiento matemático como una herramienta para resolver problemas. Entre los ejes conceptuales de estos programas está el de *Predicción y azar* que inició en tercer grado y continuó desarrollándose hasta sexto. Sin embargo, no se procuró la conexión entre el aporte de la información y la ejercitación para afirmar los conocimientos.

Se incorporaron los experimentos estocásticamente independientes; las permutaciones, ordenaciones y combinaciones; el principio de conteo; el modelo de urna y un acercamiento a la ley de los grandes números. En cuanto al contenido relacionado con la combinatoria y los diagramas de árbol en los libros de texto gratuitos correspondientes a esta etapa, las lecciones presentadas en los libros de los años setenta se repitieron, aun cuando el enfoque conjuntista se había abandonado.

En el plan y programas del periodo de 1993 a 2000 persistió la misma visión, es decir, el planteamiento y la resolución de problemas son el medio para construir los conocimientos matemáticos, incluso se crearon ficheros de actividades didácticas. Sin embargo, es posible identificar en los libros de texto gratuitos de este periodo una variación significativa ya que hubo una disminución de los contenidos respecto a la combinatoria y a los diagramas de árbol.

En la reforma de 2009 también se propuso el estudio y el aprendizaje de las matemáticas por medio de la resolución de problemas. El criterio fue enseñar matemáticas de manera graduada y articulada de modo que los estudiantes encontraran sentido a lo aprendido; aprendieran a reconocer experimentos aleatorios, sus espacios muestrales y desarrollaran una idea intuitiva de azar. Tanto en la educación primaria como en la secundaria los contenidos se organizaron en cinco bloques y tres ejes temáticos, uno de ellos fue “Manejo de la información”. Se pretendía que los alumnos recolectaran, organizaran, analizaran, interpretaran y mostraran información.

Otra justificación para reformar los planes y programas fue elevar la calidad educativa, como ocurrió con la reforma 2011. Los propósitos de enseñar matemáticas fueron resolver problemas matemáticos y de la vida cotidiana, el desarrollo de competencias para la vida y el razonamiento matemático. Entonces, los contenidos de los programas se estructuraron en términos de estándares de competencias y contenidos temáticos. La disminución de contenidos relacionados con la combinatoria y los diagramas de árbol en los libros de texto gratuitos de 2011 refleja un cambio en

las prioridades del plan de estudios. Los problemas o ejercicios relacionados con la combinatoria solo fueron aplicaciones de la multiplicación.

En los programas correspondientes a 2011 se pretendió que el alumno encontrara el número de combinaciones que se pueden obtener, pero en los mismos contextos empleados en problemas similares en programas anteriores. Si bien en los libros de texto de 2011 se encuentran expresiones como azar, frecuencia, caja, bolsa (urna), resultados favorables, es más probable que, es menos probable que, evento más probable, evento menos probable, e implícitamente están presentes ideas sobre la ley de los grandes números, espacio muestral, la regla de Laplace, permutaciones sin repetición y combinaciones.

El contenido relacionado con la combinatoria fue mayor en los libros de tercero y cuarto grado que el de quinto y el de sexto, sin embargo, este último presenta ejercicios más complejos. Lo que en los libros de texto gratuito de los años setenta se enseñaba sobre combinatoria, en los de 2011 se redujo a ser parte de unas cuantas lecciones. Por primera vez los diagramas de árbol fueron excluidos de un plan de estudios de educación primaria.

Respecto a los diagramas de árbol, el plan de estudios 2017 de matemáticas no remedió los defectos del plan 2011, sino que agregó nuevos. En síntesis, con los programas 2017 hubo un cambio formal, pero con la descripción realizada del proceso curricular es evidente que no se da una transformación de fondo en los temas de combinatoria y probabilidad. En los programas 2017, cada tema estuvo formado por elementos relacionados entre sí; de manera que si se modificaba un elemento, afectaba a todo el tema. Lo anterior tuvo por consecuencia otras dificultades en la enseñanza del tema de probabilidad que sugerían su reorganización y la inclusión de los temas de diagramas de árbol y combinatoria.

En lo que respecta a la educación secundaria, en los planes de estudio 1927, 1932, 1939, 1945, 1960, 1975 y 1980 las asignaturas que se enseñaron fueron Aritmética, Geometría, Álgebra y Trigonometría, con las siguientes particularidades: en el caso del plan 1927 se expusieron nociones sobre los usos de la Estadística; en

los planes de 1932 y 1945 se introdujeron materias optativas; en el de 1960 se añadió el tema de Historia de las Matemáticas. Además, en el de 1975 se integraron por primera vez los temas de Combinatoria y Diagramas de árbol, Lógica y Conjuntos, Estadística y Probabilidad. Este contenido permaneció en el de 1980. Con los planes de estudios 1993, 2006, 2011 y 2017 hubo cambios en los contenidos, por ejemplo, la asignatura que se incorporó en el plan 1993 fue Presentación y tratamiento de la información. Desapareció el tema de Lógica y Conjuntos, se abandonó el tratamiento conjuntista de la probabilidad.

El propósito de plantear y resolver problemas atractivos, familiares, reales, útiles, justificando la validez de los procedimientos y resultados, está presente desde el programa de 1932 hasta el de 2017. El programa de 1939 estableció que los temas se abordarían de manera intuitiva, empleando los problemas para llevar a los alumnos gradualmente a un terreno abstracto, eligiendo procedimientos de la asignatura en función de su desarrollo cognitivo. En los programas 1960, 1980 y 2006 se considera que el conocimiento que el alumno posee y que ha adquirido con su experiencia es el punto de partida para la construcción de nuevos conceptos y métodos, para desarrollar el pensamiento reflexivo, crítico y creativo. En los planes de 1932 y 1993 se estableció la importancia de reconocer y analizar los distintos aspectos que componen un problema.

Asimismo, en los programas de 1932 y de 1960 se propuso que los alumnos estudiaran demostraciones elementales. Además, la enseñanza de una lección iniciaría con preguntas sencillas y concretas para pasar gradualmente a otras más difíciles y abstractas, es decir, los conceptos parten de lo fácil a lo difícil. Por otra parte, entre las finalidades de los planes de 1993 y 2006 fue lograr que los alumnos adquirieran destreza en el empleo de técnicas y procedimientos básicos a través de la solución de problemas. En los programas de 1960, 1975 y 1993 se recomendó seguir el método de inducción, deducción y las analogías. Por otra parte, en los programas de 1945, 1975, 1980, 2006 y 2011 se enfatiza que se prefiere el trabajo en grupos y la construcción colectiva del conocimiento, estimulando la libre expresión de los alumnos.

Respecto a la organización y distribución de los contenidos de la asignatura, en los planes 1939, 1960,1980 y 2017 quedó a juicio del docente. En particular, los planes 1939 y 2017 establecían además que, cada alumno debería lograr como mínimo el contenido fundamental de la asignatura; en los planes 1960, 1980 y 2006 los programas estaban sujetos a la opinión del profesor para su modificación parcial o total; podía permutar los temas, hacer las adaptaciones necesarias en función del medio en que labora; enfatizar algunos de ellos o incluir otros no propuestos.

Los contenidos del plan 1960 estaban organizados en unidades didácticas seriadas sin vinculación con otras asignaturas. En el de 1975 se plantearon dos estructuras programáticas: por áreas de aprendizaje y por asignaturas o materias articuladas horizontalmente. En los de 1993 y 2006 considerando los resultados no satisfactorios del plan 1980 se optó por regresar al enfoque por asignaturas. En el de 2006 se redujo el número de asignaturas por grado y se hizo referencia a que los estudiantes se formarían en competencias planteadas por el currículo común: plantear y resolver problemas, argumentar, comunicar y manejar técnicas eficientemente. En el plan 2011 se puso énfasis en el desarrollo de competencias establecidas en el plan 2006

En el plan 2006 los contenidos que se estudiaron fueron organizados en tres ejes, uno de ellos fue “Manejo de la información”. Al inicio de cada bloque se presentaban los “Aprendizajes esperados” donde se señalaban los conocimientos que los alumnos deberían lograr al estudiar cada bloque. Asimismo, en el plan 2011 la asignatura de matemáticas se organizó para su estudio en tres niveles de desglose: ejes, temas y contenidos; mientras que en el plan 2017 se establecieron los organizadores curriculares entre ellos está el eje “Análisis de datos”. Uno de los fines de este eje es que los alumnos alcancen conocimientos y habilidades esenciales de la teoría probabilística para analizar y comprender información, así como aprender algunas formas de medir la incertidumbre.

Una de las finalidades de los planes de secundaria de 1945, 1975, 1993, 2006 y 2017 fue la articulación, continuación y ampliación de la educación primaria. Es más,

en los planes 1993, 2006 y 2017 se estableció la congruencia y continuidad del aprendizaje entre los niveles de preescolar, primaria y secundaria para conseguir la formación general común. Asimismo, los planes 1993, 2006 y 2017 tenían el propósito esencial de contribuir a elevar la calidad de la formación de los estudiantes que terminaron la educación secundaria.

El plan 1939 enunció que la marcha de la enseñanza debía ajustarse al desenvolvimiento del alumno y no a determinado plan exclusivamente lógico. También se expuso que los programas correspondientes propiciarían que el alumno aprendería actuando, además, se enseñaría a los estudiantes a estudiar. Por otra parte, una de las innovaciones que presentó el plan 2011 consistió en que en los principios pedagógicos se estableció colocar al centro del acto educativo al alumno y sus procesos de aprendizaje, sin embargo, esta idea ha estado presente en todos los planes de estudios.

Las ideas importantes en los programas de estudio 2011 y 2017 son espacio muestral, equiprobabilidad, probabilidad clásica y frecuencial, eventos mutuamente excluyentes y regla de la suma. En los programas 2011 se encuentran también las nociones de combinatoria, independencia y regla del producto. Estos conceptos desaparecen de los programas 2017 y se incorporan otros como experimento aleatorio, evento, juego justo, unión de conjuntos (con la notación propia del tema) y de eventos (evento singular y no singular).

En el plan 1993, en el tema de Aritmética se incluyeron los problemas de conteo y se concedió especial importancia al empleo de diagramas de árbol en la enumeración y descripción de los posibles resultados de una experiencia aleatoria. Se desarrollaron estrategias de conteo, predijeron y generalizaron resultados. El tema diagramas de árbol estuvo presente en los tres grados. En cambio en los programas 2006 los temas de combinatoria y diagramas de árbol estuvieron presentes solo en primero y segundo grado. En los programas 2011 la finalidad de estudiar aspectos relacionados con los diagramas de árbol y la combinatoria fue calcular la probabilidad de experimentos aleatorios simples, independientes y mutuamente excluyentes, alentando a los

alumnos a que buscaran por sus propios medios la solución de los problemas que se les proponían.

Sobre el uso del lenguaje, en los programas de 1932 y 1980 se establece que éste debe ser claro sin menoscabo de su precisión, manteniendo el interés de los alumnos. Otra propuesta es que el alumno utilizaría la matemática como un lenguaje técnico de aplicación universal.

En cuanto al trabajo docente el plan 2006 permitió tanto a los profesores como a los alumnos elegir los materiales de apoyo que consideraran necesarios para lograr los propósitos, no solo el libro de texto. La comprensión de los conceptos matemáticos se sustentaría en actividades que implican la intuición. Se opta por el trabajo, por proyectos como estrategia didáctica para organizar el trabajo escolar, variando los métodos de enseñanza. Así mismo, en los programas 2006 en los problemas que se exponen en el apartado “Orientaciones didácticas” no se sugiere enseñar a los estudiantes a construir un diagrama de árbol o un espacio muestral.

Por lo que toca a los programas 2011 se analizó y discutió solo un problema cuya solución implica la interpretación de una rama de un diagrama de árbol. Sin embargo, las preguntas propuestas no propician que el alumno explore las diversas situaciones que están representadas en el árbol. En este plan los temas de combinatoria están orientados, solamente hacia el cálculo de probabilidades aplicando la regla del producto. Se omite el potencial de esta herramienta matemática.

En los programas de 1980 se presentó el tema de probabilidad frecuencial, en los de 2006 se propuso estudiar el enfoque clásico o el frecuencial o el subjetivista y en los de 2017 se regresó al enfoque frecuencial, se indica que los alumnos realicen juegos de azar en los que se describan los resultados y se ponen en práctica actividades de simulación. En el plan 2017 se suprime la enseñanza de los diagramas de árbol y se propone la regla de la suma solo para eventos mutuamente excluyentes.

Capítulo IV

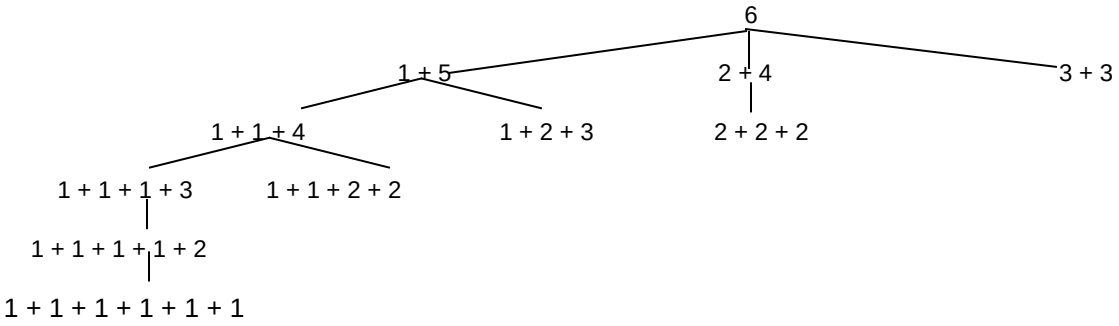
La enseñanza de los diagramas de árbol en los Programas de Estudio de Matemáticas 2006, 2011 y 2017. Educación secundaria

IV.1 Análisis de las orientaciones didácticas vinculadas con los diagramas de árbol

A través de la combinatoria las personas pueden interpretar el mundo; lo saben representar, explicar y predicen fenómenos; es una forma de pensamiento ordenado y lógico que potencia el desarrollo individual. Si no se posee la capacidad del análisis combinatorio, el concepto de probabilidad se usará en casos muy restringidos, enumerando directamente los resultados posibles que constituyen el espacio muestral.

Por la variedad y complejidad de las situaciones combinatorias las técnicas se han diversificado, en algunos casos, han dado origen a ramas independientes de la matemática, como ocurrió con la teoría de grafos, donde el recurso de los diagramas de árbol es esencial. El potencial de esta herramienta, los diagramas de árbol, es muy significativo, pues por sí mismos constituyen un objeto matemático que permite la vinculación entre contenidos de la misma asignatura o incluso con los de otras. Asimismo, permiten una vista rápida y de conjunto del hecho estudiado considerando todas sus posibilidades.

Los diagramas de árbol son grafos no dirigidos (cada rama se puede recorrer en las dos direcciones posibles) y sin ciclos; de modo que cada dos vértices (se llama nudos o nodos a los vértices interiores) cualesquiera están unidos por una trayectoria. Los diagramas de árbol permiten visualizar hechos o relaciones, como se indica en la siguiente figura:



El diagrama de árbol es una representación icónica de la enumeración, nace en una raíz de la que surgen diferentes trayectorias, denominadas ramas de primera generación. Estas ramas describen todas las posibilidades que pueden surgir en el primer estado al crear el diagrama y terminan en nudos (o nodos, o vértices); de éstos pueden aparecer nuevas ramas llamadas ramas de segunda generación, que terminan en nuevos nudos. Después de un número finito de estados se alcanza los nudos terminales, es decir, aquellos de los que ya no nacen más ramas y que representan la terminación del fenómeno descrito.

En el ejemplo hay cinco estados o niveles de ramificación, aunque podemos utilizar árboles con un número cualquiera de niveles. En cada nudo puede haber el mismo número de ramas, o bien distintos nudos pueden tener diferente número de ramificaciones, como en este caso. En los problemas combinatorios, el diagrama de árbol es una representación que ayuda a comprender mejor las situaciones de enumeración y a encontrar con sencillez la regla del producto. Por ejemplo, si un árbol tiene dos niveles de ramificación, en el primer nivel hay n_1 ramas y cada una de estas ramas se divide a su vez en n_2 nuevas ramas en el segundo nivel, el número total de ramas es $n_1 n_2$.

El diagrama de árbol, como recurso de construcción de configuraciones dadas, tiene un carácter recursivo; es decir, un árbol con n niveles de ramificación se forma a partir de un árbol con n -1 niveles de ramificación[81]. A continuación, se expone una afirmación sobre los árboles:

Si una gráfica es un árbol, entonces $r = v - 1$ en donde r es el número de ramas y v el número de vértices.

Esta sección se concentra en el contenido y los problemas matemáticos (de diagramas de árbol y combinatoria) en los programas de estudio 2006, 2011 y 2017 para la educación secundaria. Se evalúan los problemas propuestos en las secciones “Conocimientos y habilidades” y “Orientaciones didácticas”, del subtema “Diagramas y Tablas”, de los programas de primero y segundo grado del Plan 2006; “Orientaciones

[81] Pregunta para los estudiantes: ¿existen árboles con un infinito de nudos y de ramas?

pedagógicas y didácticas” del programa de tercer grado del Plan 2011 y las “Orientaciones didácticas” del programa de tercer grado del Plan 2017.

En los programas del nivel secundaria, se propuso estudiar al menos uno de los tres enfoques de probabilidad que a continuación se describen:

El enfoque clásico de la probabilidad. La probabilidad de un evento se obtiene del cociente de la cardinalidad del evento entre la cardinalidad del espacio muestral. Es aplicable solo a situaciones que generan un espacio muestral equiprobable. Hay pocas situaciones de la naturaleza o sociales que pueden modelarse con un espacio muestral equiprobable.

En el enfoque frecuencial, a veces llamado experimental o empírico, la probabilidad de un evento es una cantidad desconocida que se puede evaluar experimentalmente. La frecuencia relativa de un evento se define a través de pruebas repetidas en las mismas condiciones, sin proporcionar el valor exacto de una probabilidad. Ahora bien, determinar el número de repeticiones de un experimento que se necesitan para obtener una buena estimación de la probabilidad puede ser difícil. Existe un gran número de situaciones que no se pueden repetir en las mismas condiciones, en las cuales tiene sentido hablar de probabilidades. Sin embargo, este enfoque tiene la ventaja de relacionar los conceptos teóricos con los eventos aleatorios de situaciones reales.

El enfoque subjetivista. Considera que la probabilidad de un evento es un número entre cero y uno asignado por el investigador, el cual representa su grado de creencia sobre la ocurrencia del evento. Permite asignar una probabilidad a un amplio rango de situaciones, incluidas aquellas no aplicables en ninguno de los enfoques anteriores.

En relación con los diferentes enfoques de probabilidad, lo indicado es ofrecer oportunidades en la educación básica diseñando actividades para aprovechar las tres maneras de asignar probabilidades y que se elija la que represente el mejor modelo de la situación en cuestión. A continuación, se examina la información correspondiente a los “Conocimientos y habilidades” y las “Orientaciones didácticas” del subtema “Diagramas y Tablas” de los **programas de estudio 2006**. Como marco de referencia para analizar esta información, empleo las ideas fundamentales de Heitele (1975) y

los elementos de una alfabetización probabilística de Gal (2005, 39-63). El procedimiento utilizado consiste en comparar los “Conocimientos y habilidades” con las ideas fundamentales de Heitele, y las “Orientaciones didácticas” del programa con los elementos de una alfabetización probabilística de Gal.

Como se mencionó en el capítulo anterior, los contenidos del Programa de Estudios 2006 se organizaron en tres ejes: “Sentido numérico y pensamiento algebraico”; “Forma, espacio y medida” y “Manejo de la información”. Llama la atención que en el programa se ha omitido toda conexión con la probabilidad frecuencial. En la introducción a los programas, en relación con el eje Manejo de la información (recordemos que en él se incluyen las nociones de probabilidad y combinatoria) se dice lo siguiente:

> En estos programas se ha considerado que la información puede provenir de situaciones deterministas, definidas —por ejemplo, por una función lineal—, o aleatorias, en las que se puede identificar una tendencia a partir de una representación gráfica o tabular (SEP, 2006, 7).

En relación con los diagramas de árbol, en el programa 2006, se enuncian en primer grado dos puntos en “Conocimientos y habilidades”, y uno en segundo grado, bajo el subtema “Diagramas y Tablas”; en el programa de tercer grado, este subtema se omite. Esto quedó expresado de la siguiente manera:

Primer grado

Tema: Representación de la información. Subtema: Diagramas y Tablas.

1.8. Resolver problemas de conteo utilizando diversos recursos, tales como tablas, diagramas de árbol y otros procedimientos personales (SEP, 2006, 32).

Segundo grado

Tema: Representación de la información. Subtema: Diagramas y Tablas.

1.9. Anticipar resultados en problemas de conteo, con base en la identificación de regularidades. Verificar los resultados mediante arreglos rectangulares, diagramas de árbol u otros recursos (SEP, 2006, 72).

Lo anterior es todo lo que se puede hallar relacionado con las nociones de combinatoria y diagramas de árbol. Por lo tanto, surge la pregunta ¿cuáles son los propósitos de la enseñanza de la combinatoria en este programa? Si observamos las acciones que se proponen en las "Orientaciones didácticas" (SEP, 2006, 32) se encuentra lo siguiente:

Primer grado.

• Los alumnos han utilizado tablas y diagramas de árbol en la primaria para resolver problemas de conteo[82]. En este grado se trata de sistematizar estos recursos y encontrar regularidades que permitan acortar caminos para encontrar soluciones. La dificultad de estos problemas tiene que ver, entre otras variables, con la cantidad y el tipo de elementos que se van a combinar. (SEP, 2006, 32)

• Los alumnos aprendan a distinguir entre la información que ofrece una frecuencia absoluta y una relativa.

• En cuanto a la comunicación de información, es conveniente plantear preguntas que logren despertar el interés de los alumnos para realizar un estudio completo de la situación; desde la organización para recopilar los datos hasta el análisis y la presentación de resultados, de manera que las tablas o gráficas que se utilicen como medios de representación sean motivo de análisis por parte de los alumnos. (SEP,2006,46)

Segundo grado

Temas: Espacio muestral de un experimento aleatorio. Diagramas de árbol

• En este grado se continuará con el desarrollo del razonamiento combinatorio por medio de problemas de conteo, y se utilizarán diagramas de árbol y arreglos rectangulares como recursos para organizar la información y averiguar el total de combinaciones posibles. (SEP, 2006, 72)

[82] Las primeras actividades combinatorias basadas en los diagramas de árbol en educación primaria fueron diseñadas para aprender a clasificar objetos según unas cualidades determinadas. Por ejemplo, podemos distinguir entre zapatos para niños y zapatos para niñas que, a su vez, pueden tener agujetas, hebillas, cierre o velcron. En este caso, un diagrama de árbol sirve para comprender todas las posibilidades de la clasificación, atendiendo a diferentes criterios, de tal manera que la clasificación sea exhaustiva y excluyente.

Considerando lo anterior ¿cuáles son las ideas o temas importantes que organizan estos conocimientos y habilidades? Las ideas o temas importantes de los "Diagramas y Tablas" en el Programa 2006 son las siguientes:

1. Espacio muestral de un experimento aleatorio
2. Diagramas de árbol
3. Probabilidad
4. Independencia y regla del producto

Los "Conocimientos y habilidades" que propone el programa de estudio se relacionan con las siguientes ideas fundamentales de la lista de Heitele.

II. El campo de la probabilidad

[…] asignar un espacio muestral de resultados observables a experimentos aleatorios y un conjunto del espacio-σ al espacio de eventos observables… Winter ha ilustrado cómo a partir del nivel educativo primario en adelante, sin ningún concepto de probabilidad cuantitativa, a través de meros espacios de probabilidad comparativa, se pueden solucionar los problemas de apuestas. Los diagramas de árbol, que son indudablemente una herramienta importante, pueden ser aprendidos como espacios muestrales estructurados en una representación icónica.

IV. La combinación de probabilidades - Independencia

Es fundamental el concepto de probabilidad condicional p(AH), lo cual es interpretado en aplicaciones como la probabilidad que ocurra A después que H se haya presentado;

[…] Es una idea fundamental considerar los experimentos aleatorios sin relación causal física como estocásticamente independientes.

VI. Combinatoria

El diagrama de árbol es una representación icónica de importancia fundamental porque visualiza la estructura multi-nivel del experimento, así como los posibles resultados, permitiendo trabajar con otras operaciones combinatorias.

Las ideas secundarias más fundamentales conducen hacia estos modelos estándar de permutaciones, variaciones y combinaciones:

La regla del producto: si n caminos conducen de A a B y otros similares m de B a C, entonces existen nm caminos totales conduciendo de A a C.

La regla del cociente: Si un conjunto de n elementos se encuentra dividido en subconjuntos de m elementos, el número de partición de clases es n/m.

…la imagen de las matemáticas de escuela primaria, donde, erróneamente, se enfatiza el aspecto cardinal. Aún los niños muy jóvenes (5 a 6 años), pueden aprender el principio de conteo en ejemplos concretos y transferirlos exitosamente. (Heitele, 1975)

Enseguida, se describe la relación y las diferencias entre las ideas fundamentales seleccionadas y el contexto del programa de estudio.

Idea fundamental II. Se relaciona con los conceptos de experimento, espacio muestral y evento; incluye la aleatoriedad o azar, es decir, la idea de que una experiencia puede dar lugar a uno entre varios resultados sin que se pueda predecir[83]. Para Heitele los diagramas de árbol pueden entenderse como espacios muestrales ordenados en una descripción icónica. Este enfoque está ausente del programa.

Idea fundamental IV. En el Programa de estudio 2006, sólo se sugiere el tema de independencia, mientras que para Heitele es importante el concepto de probabilidad condicional; es decir, cómo cambia el grado de creencia sobre la ocurrencia de un evento cuando se tiene más información.

Idea fundamental VI. En las "Orientaciones didácticas" de los temas de probabilidad se sugiere el uso de operaciones combinatorias. Heitele subraya la importancia de los diagramas de árbol, de las operaciones combinatorias en el aprendizaje de los conceptos numéricos, de las combinaciones, permutaciones, ordenaciones y de la obtención de la regla del producto.

Los temas como el de aleatoriedad, regla general de la suma, probabilidad condicional, simetría, modelo de urna y el enfoque frecuentista de probabilidad no se mencionan en el Programa de 2006. ¿Cuáles son los riesgos de no considerar todos los aspectos?

Gal (2005), por su parte, describe para caracterizar el conocimiento probabilista que deben aprender los alumnos, cinco clases de conocimiento estrechamente relacionadas que forman los cimientos para una alfabetización en probabilidad:

[83] Fischbein (1975) afirmó que la escuela enfatiza la unicidad de un resultado, suponiendo que cada problema tiene una y solo una solución, cosa que no sucede con los experimentos aleatorios.

grandes ideas de la probabilidad, cálculo de probabilidades, lenguaje, contextos y preguntas críticas. En esta sección me ocupo de las cuatro primeras clases clave de conocimiento, pues son las idóneas para el análisis que pretendo hacer. Esto no debe interpretarse como si las preguntas críticas no merecieran la atención de diseñadores de currículum, profesores, estudiantes o investigadores.

1. Las ideas fundamentales de variación, aleatoriedad, independencia, predicción/incertidumbre son necesarias para entender la derivación, representación, interpretación y las implicaciones de los enunciados probabilísticos. La noción de independencia estocástica surge de eventos de fenómenos que no interactúan; de modo que la ocurrencia de un evento de uno de los fenómenos no modifica la probabilidad de ocurrencia del otro fenómeno. La noción que se enseña en la educación básica es la probabilidad conjunta de un par de eventos cada uno de los cuales pertenece a uno de esos fenómenos; es el producto de sus probabilidades.

2. Cálculo de probabilidades. A menudo se consideran dos definiciones de probabilidad (la clásica y la frecuencial), de las cuales se derivan procedimientos para calcular probabilidades. Además, se aprecia la idea de probabilidad condicional que subyace en el Teorema de Bayes.

3. Lenguaje. Los estudiantes deben comprender los términos y expresiones que se utilizan para comunicar sobre el azar y la probabilidad. Por términos, se entenderán los conceptos de la teoría: aleatoriedad, experiencias aleatorias, eventos, espacio muestral, independencia, variación, predicción, incertidumbre. Algunas expresiones empleadas en situaciones de azar son “tener al menos”, “es más probable que”, “es casi seguro que”, “es imposible que”.

4. Contextos. Gal sugiere los siguientes contextos en los que se pueden hallar situaciones y problemas: el mundo físico, los procesos tecnológicos, la conducta humana, salud pública y medicina, crimen y justicia, negocios y finanzas, políticas públicas, estadística e investigación, servicios meteorológicos, juegos de azar y apuestas, decisiones personales.

¿En qué medida los contenidos expresados en las “Orientaciones didácticas” promueven los elementos de una alfabetización probabilista y la aptitud del análisis

combinatorio? En las “Orientaciones didácticas” del Programa de 2006, se encuentran algunos elementos para responder esta pregunta.

Primer grado

Teniendo en consideración el contenido del Bloque I, “Conocimiento y habilidades”, apartado 1.8. y la sección “Orientaciones didácticas”, se presentaron los siguientes ejercicios :

• Andrea, Bety, Caro y Daniela se citan en una cafetería. Las cuatro amigas llegaron a la cita de una en una. Determinar todos los ordenamientos posibles en que pudieron haber llegado.

Conviene plantear variantes de este problema para que los alumnos identifiquen regularidades en los procedimientos de solución y logren hacer generalizaciones. Una variante podría ser: Si Caro es la amiga que llegó primero, determina todos los ordenamientos posibles en que pudieron haber llegado las otras tres.

• En una caja hay cinco fichas marcadas con los números 1, 3, 5, 7 y 9. Se extrae una ficha de la caja y se anota su número. La ficha extraída se regresa a la caja y nuevamente se realiza una extracción. ¿Cuántos números diferentes de dos cifras es posible formar? Una variante de este ejemplo es: ¿Cuántos números diferentes de dos cifras se pueden formar si la primera ficha que se extrae no se regresa a la caja? (SEP, 2006, 32)

En el primer problema subyace la relación entre la determinación del espacio muestral, independencia y el diagrama de árbol. Se relaciona con las “grandes ideas” de aleatoriedad e independencia presentadas por Gal. No se sugiere realizar ningún cálculo, construir un espacio muestral, usar un diagrama de árbol ni vincular la solución con la regla del producto. El vocabulario de probabilidad se reduce a la expresión “ordenamientos”. El contexto no estimula examinar las situaciones de azar. La variante de este problema es un caso particular de la solución del problema inicial, en el que no se promueve ninguna de las “grandes ideas” de la alfabetización probabilista.

En el segundo problema, se favorece la discusión sobre la aleatoriedad y la independencia; sin embargo, no tiene que ver con las otras “grandes ideas” de la alfabetización probabilística. Es un problema de cálculo que considera extracciones con reposición (se extrae una ficha, se anota su número y se devuelve a la caja), no

sugiere describir el espacio muestral ni usar un diagrama de árbol; tampoco implica lenguaje nuevo y el contexto es de un juego.

En la variante de este problema, se propone hacer un cálculo considerando ahora extracciones sin reemplazo (se extrae la ficha, se anota su número y no se devuelve a la caja). Este planteamiento lleva a la discusión sobre el concepto de eventos no independientes, pues al sacar la segunda ficha la probabilidad se ve influida por el primer evento; es decir, la ocurrencia de un evento modifica la probabilidad del otro. Tampoco sugiere describir el espacio muestral o hacer uso de un diagrama de árbol.

Estas "Orientaciones didácticas" contienen dos ideas fundamentales de Heitele: combinación de probabilidades-la regla de la suma y el modelo de urna y simulación. Estas ideas no están previstas en la sección de "Conocimientos y habilidades" como se muestra a continuación.

Segundo grado

Los "Conocimientos y habilidades" propuestos se reducen a los puntos "Anticipar resultados en problemas de conteo, con base en la identificación de regularidades" y "Verificar los resultados mediante arreglos rectangulares, diagramas de árbol u otros recursos", referidos en el Bloque 1, 1.9 del subtema "Diagramas y Tablas", p. 72. Los problemas sugeridos en las "Orientaciones didácticas" son:

• En un edificio nuevo hay 5 departamentos, cada departamento cuenta con un lugar de estacionamiento. Se han habitado dos departamentos, únicamente, el de Carmen y el de Daniel, quienes pueden colocar cada noche sus coches en el lugar que prefieran, si no está ocupado. ¿Cuáles son todas las formas en que pueden estacionarse? Represéntelo en un diagrama de árbol.

Ha llegado un nuevo vecino, ¿de cuántas maneras distintas pueden estacionar los coches los tres vecinos? ¿Resultan más o menos maneras que en el caso anterior?

¿Qué ocurrirá cuando todos los departamentos estén ocupados, si todos los vecinos tienen coche? ¿Cuántas maneras habrá de estacionarse?

• Se sabe que dos puntos A y B determinan una sola línea recta. ¿Cuántas rectas quedan determinadas por tres puntos A, B y C, si no son colineales? ¿Y por cuatro puntos no colineales? ¿Y por n puntos no colineales?

Con base en la resolución de problemas como los anteriores, los alumnos podrán encontrar procedimientos sistemáticos de enumeración y finalmente enunciar algunas fórmulas de recuento sencillas. (SEP, 2006, 72)

El primer problema es de cálculo; las ideas de aleatoriedad e independencia están implícitas; se pretende llevar a los estudiantes al concepto de ordenaciones sin repetición, es decir, O_n^m = n(n-1)…(n-m+1), donde n es el número de elementos tomados de m en m. Aunque se señala que "pueden colocar cada noche sus coches en el lugar que prefieran", podría dar origen a la pregunta ¿es importante el orden?, lo cual no se prevé en el programa. La solución al problema implica construir un espacio muestral equiprobable y afirmar la importancia de la elaboración de un diagrama de árbol. El contexto es de la vida social (ocupar estacionamientos) y no implica lenguaje nuevo.

Al responder a las preguntas que se enuncian al final del problema se tiene la oportunidad de enseñar el concepto de factorial. Asimismo, podría preguntarse: ¿qué sucedería si un vecino tuviera dos coches?, ¿de cuántas maneras distintas podrían estacionar los coches los vecinos? Tendríamos un acercamiento al "principio de la pichonera", que es una herramienta muy potente dentro de la combinatoria.

El segundo problema es una aplicación que emplea ideas de la geometría. Una vez encontrado el espacio muestral para n=3 y n=4, el propósito es que los alumnos descubran una expresión algebraica que considere todos los casos, es decir, que calcule las combinaciones sin repetición de n elementos tomados de dos en dos; sin embargo, sería necesario el concepto de factorial que no está previsto en la sección de "Conocimientos y habilidades". En el mensaje "enunciar algunas fórmulas de recuento sencillas" no se aclara si se refiere a las combinaciones, ordenaciones o permutaciones.

Este problema no tiene que ver con las otras "grandes ideas" de la alfabetización probabilística, ya que no invita a reflexionar sobre aleatoriedad, independencia, variación o predictibilidad/incertidumbre; tampoco implica terminología nueva, aunque

el contexto es geométrico. En la siguiente tabla se sintetiza la evaluación hecha de cada problema de las “Orientaciones didácticas” del programa.

Tabla IV.1.1

	Primer grado		Segundo grado	
	Problema 1	Problema 2	Problema 1	Problema 2
Grandes ideas	Aleatoriedad e Independencia	♦	Aleatoriedad e Independencia	Aleatoriedad e Independencia
Cálculo de probabilidades Cálculo combinatorio	Ordenaciones	Extracción con /sin reemplazo	Ordenaciones sin repetición	Combinaciones sin repetición
Lenguaje/vocabulario	♦	♦	♦	♦
Contexto	Personas	Urna	Decisiones personales	Puntos y rectas

El símbolo ♦ significa que el problema no favorece los elementos de la alfabetización probabilística correspondiente; en algunos casos se indica la “gran idea” con que se relaciona o el lenguaje que introduce.

A continuación, se analiza el tema “Nociones de probabilidad” de los **programas de estudio 2011**, enfatizando en el contenido y los problemas matemáticos relacionados con los diagramas de árbol y la combinatoria. La información que se examina son los contenidos y las “Orientaciones pedagógicas y didácticas” del tema. Como en los programas 2006 los contenidos se estructuran en tres ejes temáticos “Sentido numérico y pensamiento algebraico”, “Forma, espacio y medida”, “Manejo de la información”. En particular, el eje “Manejo de la información” se divide en tres temas y uno de ellos es “Nociones de probabilidad”.

Además, uno de los Estándares Curriculares para este eje temático es el siguiente:

3.2.1. Calcula la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes. (SEP, 2011, 17).

La sección de organización de los aprendizajes señala, referido al eje “Manejo de la información”:

Manejo de la información incluye aspectos relacionados con el análisis de la información que proviene de distintas fuentes y su uso para la toma de decisiones informada, de manera que se orienta hacia:

• La búsqueda, la organización, el análisis y la presentación de información para responder preguntas.
• El conocimiento de los principios básicos de la aleatoriedad. (SEP, 2011, 25).

Con relación a los diagramas de árbol y a la combinatoria, lo anterior es todo lo que se encuentra, entonces ¿cuáles son las secuencias didácticas en las que se emplean los diagramas de árbol? ¿cuáles son los propósitos de la enseñanza de la combinatoria? En los contenidos del tema "Nociones de probabilidad" se enuncian diez puntos en el rublo, que son:

Primer grado
• Identificación y práctica de juegos de azar sencillos y registro de resultados. Elección de estrategias en función del análisis de posibles resultados.
• Anticipación de resultados de una experiencia aleatoria, su verificación al realizar el experimento y su registro en una tabla de frecuencias.
• Resolución de problemas de conteo mediante diversos procedimientos. Búsqueda de recursos para verificar los resultados. (SEP, 2011, 31-34).

Segundo grado
• Comparación de dos o más eventos a partir de sus resultados posibles, usando relaciones como: "es más probable que…", "es menos probable que…"
• Realización de experimentos aleatorios y registro de resultados para un acercamiento a la probabilidad frecuencial. Relación de esta con la probabilidad teórica.
• Comparación de las gráficas de dos distribuciones (frecuencial y teórica) al realizar muchas veces un experimento aleatorio. (SEP, 2011, 39-43).

Tercer grado
• Conocimiento de la escala de probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.
• Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).

• Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto)[84].
• Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables. (SEP, 2011, 47-51).

¿Cuáles son las ideas o temas que organizan estos conocimientos y habilidades? A través de las acciones que se proponen, se determina el tema general bajo el cual podrían aparecer, por ejemplo: "Identificación y práctica de juegos de azar sencillos y registro de resultados" es parte del tema "Espacio muestral"; "Anticipación de resultados de una experiencia aleatoria, su verificación al realizar el experimento y su registro en una tabla de frecuencias" implica conocer una definición de probabilidad, ya sea clásica o frecuencial; "Resolución de problemas de conteo mediante diversos procedimientos" y "Búsqueda de recursos para verificar los resultados" quedan bajo el tema de combinatoria.

Los dos puntos de segundo grado corresponden al tema de "Probabilidad", concretamente al estudio de la relación entre la probabilidad clásica y la frecuencial. "Conocimiento de la escala de probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes" se aprenderán a partir de las propiedades de la probabilidad. El segundo y tercer puntos de tercer grado están relacionados con la regla de la suma e independencia y con la regla del producto; "las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables" está en correspondencia con la idea fundamental de "Equiprobabilidad".

En suma, las ideas importantes en el tema "Nociones de probabilidad" en los programas de estudio 2011 son espacio muestral, probabilidad clásica y frecuencial, propiedades de la probabilidad, regla de la suma (para eventos mutuamente excluyentes), independencia y regla del producto, y equiprobabilidad. La combinatoria subyace en el tema "Nociones de probabilidad". En ninguno de los tres grados se menciona explícitamente a los diagramas de árbol, los cuales no requieren profundos conocimientos previos para seguir aprendiendo.

[84] Previamente podría familiarizarse al alumno con la relación entre las clasificaciones y un diagrama de árbol para involucrarlo en los problemas de conteo donde es necesario utilizar el producto.

Análogamente al análisis del programa 2006, partiré de las ideas del tema "Nociones de probabilidad" para identificar diferencias y semejanzas con las ideas fundamentales de Heitele. Los contenidos que propone el programa de estudio se relacionan con las ideas fundamentales I, II, III, IV, V, VI y VII de la lista de Heitele. Enseguida se exponen:

I. Normar las expresiones de nuestra creencia

La primera idea fundamental de la estocástica es que nuestras creencias intuitivas (las expresadas en el lenguaje cotidiano mediante formulaciones como "yo creo que…", "es más bien cierto que…", etc.) son normadas de manera en que los eventos imposibles obtienen la probabilidad de 0, y los otros de plena certidumbre, la probabilidad de 1, mientras que la relación de "más probable que" es traducida como la relación "≥" entre los números reales.

III. La combinación de probabilidades – La regla de la adición

Elaborar modelos complejos a partir de unos simples o reducir aquellos complejos a otros sencillos es una característica general de las matemáticas; estos procedimientos se aplican a la estocástica. De acuerdo con las primeras dos ideas, las probabilidades pueden ser expresadas mediante evaluaciones subjetivas, este procedimiento falla para espacios muestrales más complejos, como la tercia de dados. La idea operativa en este caso es la regla de la adición, que permite que nuevas probabilidades sean derivadas de otras iniciales dentro de un modelo matemático.

V. La equidistribución y la simetría

La primera de las cuatro ideas no indica cómo calcular probabilidades. Descubrir y usar simetrías en la problemática es una idea heurística. Por ejemplo, la simetría experimental del lanzamiento de dados implica que ninguna cara de este se distingue de las demás. Esto se utiliza como argumento para aceptar la equidistribución y la regla de Laplace, con todo y sus consecuencias conocidas. Si la equidistribución no es evidente desde el inicio, esta puede ser construida redefiniendo el espacio muestral y descubriendo sus simetrías.

VII. El modelo de la urna y la simulación

Es posible asignar los modelos de urna a la mayor parte de los experimentos aleatorios. La idea de la urna sería fundamental por varias razones.

Primero, puede ser probado si una muestra se considera “aleatoria”, pero el proceso de obtención de muestras al azar es, por principio, inaccesible a las definiciones matemáticas. El único modo de describirlo (y el más eficiente para ello) consiste en concretizar el modelo de la urna. Segundo, los experimentos de la urna y del azar pueden ser agregados en otros nuevos: las llamadas hiper-urnas correspondientes al experimento agregado.

Enseguida se explica la similitud y las diferencias en cada caso.

Idea fundamental I. Hace referencia al sentido de expresiones como “es más probable que” y “es menos probable que” para construir una escala de probabilidad; este tema se considera en el programa.

Idea fundamental II. Incluye los conceptos de espacio muestral, experimento aleatorio, evento, probabilidad y diagramas de árbol. Se incorpora la aleatoriedad, aunque los diagramas de árbol no están en forma evidente en este programa.

Idea fundamental III. La regla de la suma es un caso particular del procedimiento para encontrar probabilidades de eventos compuestos a partir de probabilidades de eventos simples. La regla de la suma está cubierta en parte por el segundo punto del programa de tercer grado, pues se propone solo para eventos mutuamente excluyentes y eventos complementarios.

Idea fundamental IV. El tema de independencia y la probabilidad conjunta está cubierto parcialmente por el tercer punto del programa de tercer grado, ya que en este la noción de probabilidad condicional no se aplica[85].

Idea fundamental V. Heitele afirma que la regla de Laplace se basa en una consideración de simetría de los objetos aleatorizados, que lleva a la equidistribución de resultados. En estos programas solo se propone examinar las probabilidades de un juego para calcular la probabilidad de ganar de los jugadores y compararlas; si hay equiprobabilidad en esos eventos, el juego es justo.

Idea fundamental VI. Los casos de la combinatoria y de los diagramas de árbol no se tratan explícitamente en los contenidos del programa.

[85] El proceso de solución de problemas de probabilidad condicional P(A/B) puede ser relacionada con varias ramas de un diagrama de árbol y la regla del producto surge naturalmente.

Idea fundamental VII. Heitele asocia el modelo de urna con el enfoque frecuencial de la probabilidad; sin embargo, en el programa no se hacen explícitos estos aspectos.

Para examinar la sección de “Orientaciones pedagógicas y didácticas” del programa de estudio 2011, aplico nuevamente el marco propuesto por Gal. Este autor considera que los elementos propuestos deben estar en conexión; si su enseñanza se dirige a uno o dos de ellos, será insuficiente para formar una cultura en probabilidad. Enseguida, se exhibe el siguiente ejemplo de la sección “Orientaciones pedagógicas y didácticas” (SEP, 2011, 146):

Ejemplo 5. Momento 3

Indicaciones. Si tienes tres urnas organizadas de la siguiente manera:

URNA	*BOLAS BLANCAS*	*BOLAS NEGRAS*
1	*3*	*3*
2	*2*	*6*
3	*4*	*12*

Si realizas tres extracciones de cada urna.

- *¿Cuál es la probabilidad de que saques una bola blanca de la urna 1?*
- *Si la composición de la urna 1 cambia y ahora es de 6 bolas blancas y 6 bolas negras. ¿Cambia la probabilidad de sacar una bola blanca? Argumenta tu respuesta.*
- *¿Cuál es la probabilidad de que saques una bola blanca de la urna 2?*
- *Si la composición de la urna 2 cambia y ahora es de 4 bolas blancas y 12 bolas negras ¿Cambia la probabilidad de sacar una bola blanca? Fundamenta tu respuesta.*
- *¿Cuál es la probabilidad de que saques una bola blanca de la urna 3?*

Orientaciones pedagógicas. Se espera que la o el estudiante determine que el aumento o disminución de elementos de la urna no cambie la probabilidad de extracción si dicha variación es proporcional a la probabilidad teórica inicial. Para continuar con la construcción de la herramienta es necesario considerar todos los casos posibles para no centrarse únicamente en los casos favorables, para ello es necesario que la o el docente, insista en la importancia de considerar a todos los casos.

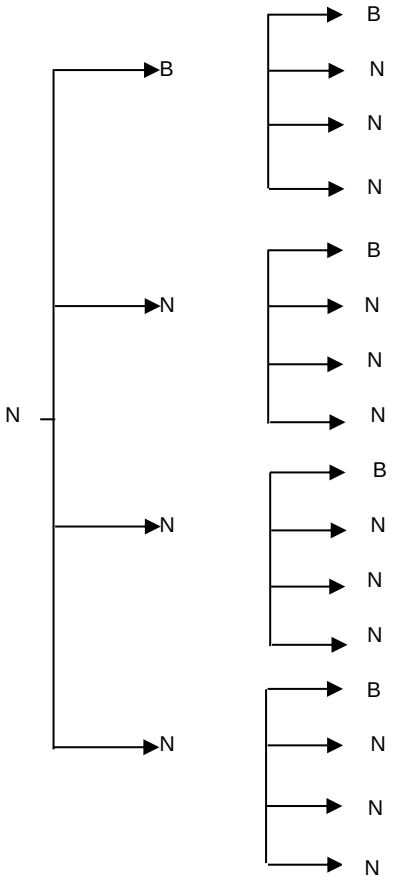
Los planteamientos anteriores pretenden aplicar la definición clásica de probabilidad; es decir, se centran en el cálculo aplicando la definición de Laplace; la relación con la idea de independencia es imperceptible y no tienen que ver con la regla

del producto. La construcción de las preguntas (realmente es una) no favorece la discusión sobre la incertidumbre (no se fomenta la reflexión de situaciones de azar), la variación, la independencia y la relación predicción/incertidumbre. Tampoco ayuda al desarrollo de las otras “grandes ideas” de la alfabetización probabilística, puesto que no implica lenguaje nuevo y el contexto es el ya acostumbrado de juegos de azar.

Este no es un buen ejercicio para inducir a los estudiantes a una discusión sobre la noción de eventos independientes o mutuamente excluyentes. En el programa no se menciona alguna recomendación acerca de cómo abordar la confusión de eventos independientes con eventos excluyentes. En la “Orientación pedagógica” no se percibe la intención de sugerir una situación donde se muestre la utilidad de la probabilidad anticipando una respuesta o tomando una decisión y que tenga efectos importantes en algún sentido.

Momento 4.

El siguiente diagrama representa una rama de árbol, que alude al experimento de extraer una bola de cada urna, en términos de las probabilidades anteriores. Analiza y discute con tus compañeros, el diagrama. Toma en cuenta que la letra N representa las bolas negras y la letra B representa las bolas blancas.



¿Cuál es la probabilidad de obtener una bola blanca en la tercera urna, si ya has sacado una blanca de la primera y una blanca de la segunda? Utiliza la información anterior.
Orientaciones pedagógicas. Se espera que los estudiantes, realicen una lectura del diagrama de árbol, con la finalidad de que usen esa herramienta para interpretar información y logren identificar los eventos independientes y como consecuencia la regla del producto. Es importante que la o el profesor oriente a las y los estudiantes al interpretar el diagrama, porque en ocasiones sucede que los estudiantes esperan que el diagrama tenga en su primer nivel 6 ramas, 3 con las bolas blancas y 3 con las bolas negras, lo cual no sucede así, porque lo que se grafica es en términos de probabilidades.

Los propósitos del ejercicio son leer el diagrama de árbol[86], obtener el espacio muestral, interpretar la información, identificar eventos independientes y la regla de producto, y calcular la probabilidad del evento. Considerando que previamente se ha enseñado a los estudiantes a construir un diagrama de árbol en donde cada rama representa un caso posible, y que han aprendido a organizar e interpretar los distintos niveles y a contar todos los resultados de un experimento, notarán que para calcular la probabilidad de cada uno de los eventos del experimento anterior, multiplicarán a lo largo de las ramas del árbol.

El ejercicio intenta que los alumnos observen que, en el primer nivel, la probabilidad de sacar una bola blanca es $\frac{1}{2}$ dado que en un principio hay el mismo número de bolas blancas que negras. En la siguiente etapa se extrae una bola de la segunda urna, donde hay dos bolas blancas y seis negras; se espera que los alumnos descubran que la probabilidad de escoger la blanca es de $\frac{1}{4}$. El cálculo de la probabilidad de obtener una bola blanca en la tercera extracción, es decir, $\frac{1}{4}$ no representa un nuevo reto.

La situación propuesta no implica el conocimiento del concepto de independencia; no se reflexiona en cómo cambia el grado de creencia sobre la ocurrencia de un evento cuando se tiene nueva información. Se espera que los

[86] Supongamos que la intención de dar gráficas incompletas a los alumnos es que analicen más cuidadosamente las características y relaciones de la gráfica, además de explorar nuevas formas de organizar los datos.

alumnos deduzcan que, en experimentos con varias etapas, la probabilidad a lo largo de cada rama del árbol que los describe se calcula multiplicando las probabilidades de la rama en cada etapa. De esta forma, no estarían más cerca de lograr generalizar la información para hallar la regla del producto.

La intervención del docente logrará que los alumnos identifiquen los elementos necesarios para construir un diagrama de árbol; es decir, fijar una raíz (nodo inicial), abrir a partir de ésta tantas ramas como casos posibles de cierta situación haya, abrir a partir de cada una de estas, tantas ramas como casos posibles de una nueva situación haya, y leer en orden sobre cada secuencia de las ramas. Este es un ejercicio de cálculo que no contiene lenguaje nuevo y el contexto es de juegos.

Lo preocupante en la orientación pedagógica, es que no se profundiza en el estudio del diagrama de árbol. En el ejercicio, las ramas y los nodos que corresponden a los niveles intermedios no originan preguntas sobre las circunstancias que representan. Además, el diagrama de árbol es simétrico, lo que podría llevar a la idea errónea de que no existen árboles asimétricos. Este es un ejercicio de cálculo que no tiene la intención de iniciar la discusión sobre la construcción, la interpretación o el análisis de un árbol. Tampoco se ofrecen sugerencias para tratar con el planteamiento de situaciones no previstas en el problema. No se sugiere la conexión con los conceptos de aleatoriedad e independencia. Destaca la ausencia de temas como usos sociales de procesos de azar, donde se muestre la utilidad del diagrama de árbol.

Momento 5

Indicaciones. Observa que la probabilidad de obtener una bola blanca en cada urna son las siguientes:

Urna	*Probabilidad*
1	*3/6*
2	*2/8*
3	*4/12*[87]

[87] El denominador debe ser 16.

La probabilidad de obtener una bola blanca en la tercera urna, si ya has sacado una blanca de la primera y una blanca de la segunda es 1/32.

Interpretemos la probabilidad de obtener una bola blanca.

Probabilidad de obtener una bola blanca en la urna 1		*Probabilidad de obtener una bola blanca en la urna 2*		*Probabilidad de obtener una bola blanca en la urna 3*		*Probabilidad de obtener una bola blanca en cada una de las urnas*
$\frac{1}{2}$	□	$\frac{1}{4}$	□	$\frac{1}{4}$	=	$\frac{1}{32}$

¿Cuál es la relación que se establece entre las urnas, para obtener la anterior probabilidad? ¿A qué se lo atribuyes?

Orientaciones pedagógicas. Se espera que la y el estudiante hagan uso de la regla del producto y logren identificar que los eventos son independientes.

Este ejercicio es un ejemplo para deducir la regla del producto de probabilidades. Considerando la tabla que se muestra en el momento 3, se calcula la probabilidad de obtener una bola blanca en cada urna (la fracción no está simplificada, no se expresa como un decimal o un porcentaje), existe una relación con la independencia en su aspecto de cálculo. No implica terminología nueva y el contexto continúa siendo de juegos.

No se estimula a los alumnos a una discusión sobre la independencia, pues no se establece la relación de la impredecibilidad en pocos ensayos, y no ayuda al desarrollo de las “grandes ideas”; tampoco se descubre la regla del producto. Estas actividades de aprendizaje no representan un desafío intelectual para el estudiante ni genera interés por resolver problemas combinatorios. Podemos decir que los temas de combinatoria del programa 2011 están orientados hacia el cálculo de probabilidades, aplicando la regla del producto.

El tratamiento de la combinatoria en el nivel de educación secundaria debería hacerse sin necesidad de recurrir al uso preciso de conceptos. Usando conocimientos elementales, es posible abordar el tema, como es el caso de los diagramas de árbol. Es claro que la enseñanza de los árboles debe estar presente a lo largo de toda la educación secundaria; su ubicación natural está en el tema de combinatoria, pero, a

través de diversos ejercicios y problemas, se descubre la gran capacidad de este recurso para generar posibilidades con el fin de encontrar la solución buscada.

A continuación, se examinan la sección “Orientaciones didácticas” en los **programas de estudio 2017**. Es necesario consultar en la descripción de los organizadores curriculares donde se dice lo siguiente sobre el eje “Análisis de datos”:

Uno de los fines del eje “Análisis de datos” es favorecer que los alumnos alcancen conocimientos y habilidades esenciales de la teoría estadística y probabilística para analizar y comprender información. […] en el caso de probabilidad, los estudiantes aprenden algunas formas de medir la incertidumbre (SEP, 2017a, 168).

Con esta información no es posible responder a las preguntas: ¿para qué se enseña probabilidad bajo el enfoque de resolución de problemas? ¿se plantean problemas de combinatoria? Para responder a estas preguntas, se explora en la dosificación de los aprendizajes esperados por grado en el tema “Probabilidad” en donde se lee:

Primer grado: Realiza experimentos aleatorios y registra los resultados para un acercamiento a la probabilidad frecuencial.

Segundo grado: Determinar la probabilidad teórica de un evento en un experimento aleatorio.

Tercer grado: Calcula la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes (SEP, 2017,).

Las ideas importantes de probabilidad en los programas de secundaria son los siguientes:

- Diagramas de árbol
- Espacio muestral
- Probabilidad (definición clásica de la probabilidad y frecuencial, cálculo o estimación y propiedades de la probabilidad)
- Equiprobabilidad y juego justo
- Regla de la suma (para eventos mutuamente excluyentes)

Como se puede observar, los puntos de los programas están contenidos en las ideas fundamentales II, III, V, VI, VII expuestas por Heitele, pero no las cubren totalmente. Las ideas fundamentales I, IV, VIII, IX y X no están presentes en el tema de probabilidad. Enseguida se describen las conexiones y las diferencias en cada caso.

Idea fundamental II. Esta idea incluye los conceptos de experimento aleatorio, espacio muestral y evento. Estos conceptos están presentes en el programa.

Idea fundamental III. En los programas de estudio de 2017 la regla de la suma se propone solo para eventos mutuamente excluyentes; sin embargo, la regla es un caso particular del procedimiento más general para encontrar probabilidades de eventos compuestos a partir de eventos simples.

Idea fundamental V. A partir de las distribuciones equiprobables, es posible vincular el punto “equiprobabilidad y juego justo” de los programas con la idea de “equidistribución y simetría”. Ahora bien, en este programa solo se plantea determinar la probabilidad de ganar de los participantes y compararlas; si hay equiprobabilidad de esos eventos, entonces el juego es justo.

Idea fundamental VI. Los diagramas de árbol se consideran representaciones en imágenes que hacen posible visualizar la estructura multinivel de un experimento, así como sus posibles resultados, permitiendo trabajar con operaciones combinatorias. Las operaciones combinatorias básicas proporcionan una profunda comprensión de la estructura interior de los experimentos aleatorios y del encadenamiento de experimentos sucesivos dentro de un complejo mayor. El tema de diagramas de árbol y combinatoria no se desarrolla en este programa.

Idea fundamental VII. En principio, es posible asignar mediante el concepto de isomorfismo, los modelos de urna a los experimentos aleatorios con un espacio muestral numerable. En el programa no está explícito el concepto de probabilidad frecuencial.

Es oportuno preguntarse ¿hasta qué punto los aprendizajes esperados correspondientes al tema de probabilidad promueven una cultura combinatoria y probabilística? En la sección “Orientaciones didácticas” se establece:

Primer grado

Se estudia la noción de probabilidad frecuencial y en el primer grupo de “Orientaciones didácticas” se lee:

En este grado se vuelve a destacar la importancia que tiene determinar la población que se estudiará, el tipo de datos que se puede obtener y la forma de recolectarlos. […] El objetivo de

los experimentos consiste en introducir a los alumnos a la probabilidad frecuencial y que consideren la importancia que tiene hacer un registro adecuado de los datos (SEP, 2017a, 200).

El texto continúa con el siguiente problema:

Todas las noches tres hermanos (digamos Alberto, Bruno y Carmela) discuten para ver quien decide el programa de televisión que verán. Para evitar discusiones acuerdan que cada tarde sortearán quién elegirá el programa. Alberto propone que el sorteo consista en lanzar dos monedas: si caen dos águilas, gana él; si cae una y una, gana Bruno; y, si caen dos soles, gana Carmela. La pregunta es ¿todos tienen la misma oportunidad de ganar?

Se añade el siguiente planteamiento: "Este problema se puede generalizar a cuatro hermanos, A, B, C y D, donde la regla de decisión que propone B es que se lancen tres monedas: si caen 0 soles, gana A; si cae exactamente 1 sol, gana B; si caen exactamente 2 soles gana C; y finalmente, si caen 3 soles, gana D. ¿Todos tienen la misma oportunidad de ganar?" (SEP, 2017a, 201)

El problema propuesto indica el desarrollo del punto 1 de la lista de Gal, es decir, las "grandes ideas de la probabilidad" porque promueve la discusión sobre la aleatoriedad, independencia, variación o la predictibilidad/incertidumbre. Esta orientación contiene dos ideas fundamentales: variable y distribución. En el problema, no se requiere realizar algún cálculo. El vocabulario empleado no aporta ningún término o expresión[88] que se utilice para comunicarse acerca del azar y la probabilidad. El contexto es de juegos. En el texto se indica: "**Conviene que —si no surge espontáneamente— se introduzcan los diagramas de árbol como recurso para contar con exactitud todas las posibilidades**" (SEP, 2017a, 201).

[88] Me refiero a los conceptos de la teoría, como experiencias aleatorias, eventos, espacio muestral, aleatoriedad, independencia, variación, predicción e incertidumbre. Las expresiones son frases que se utilizan para situaciones de azar, como "durante la pandemia por COVID-19, 6 de cada 10 hogares en la Ciudad de México reportó pérdidas en los ingresos", "en 9 de cada 10 de los hogares con población de 0 a 17 años, las niñas, niños y adolescentes continuaron con las clases a distancia en el ciclo escolar 2019-2020" y "es muy probable que estemos solos en el universo".

La observación anterior enfatiza la relación entre la determinación del espacio muestral y la combinatoria. Se reconoce que puede haber dificultades al contar y se sugiere que se relacione el conteo con el tema de probabilidad. Un razonamiento para establecer si todos tienen la misma oportunidad de ganar consiste en encontrar un espacio muestral equiprobable usando un diagrama de árbol, calculando y comparando las probabilidades de los eventos {aa, as, sa, ss}. Es oportuno mencionar que el concepto de "juego justo" no necesariamente está relacionado con la equiprobabilidad, pues los jugadores pueden tener diferentes probabilidades de ganar; lo que importa son los valores de la variable "apuesta"; si el valor esperado de esta variable es cero entonces el juego es justo.

Segundo grado

Se establece la idea de probabilidad teórica o clásica de un evento en un experimento aleatorio y su diferencia con la probabilidad frecuencial. En las "Orientaciones didácticas", se sugiere proponer a los estudiantes preguntas cuya respuesta no signifique realizar algún tipo de experimento. Esta discusión deberá llevar a la noción de probabilidad de un evento y a expresar la fórmula de Laplace (SEP, 2017a, 220).

Sobresale el hecho de que no se continúa con los aprendizajes del curso anterior como los diagramas de árbol. Asimismo, se sugiere efectuar experimentos en diferentes contextos con la intención de que los estudiantes calculen la probabilidad frecuencial, la comparen con la probabilidad clásica y lleguen a la conclusión de que al contar con más datos, la probabilidad frecuencial se aproxima a la probabilidad clásica.

Para finalizar se recomienda consultar el libro *Matemáticas con la hoja electrónica de cálculo* (EMAT, 2000, 131-133) para poner en práctica las actividades: "Simulación con el modelo de urna (1)" y "Simulación con el modelo de urna (2)". Esta última sugerencia se debe a que la técnica de simulación, que como recordaremos es la idea fundamental 7, se asocia con la probabilidad frecuencial. No se plantean problemas.

Tercer grado

El propósito de las “Orientaciones didácticas” para este grado consiste en “que los alumnos aprendan a distinguir eventos singulares y no singulares, mutuamente excluyentes, así como la unión de dos eventos y la regla de la suma de probabilidades” (SEP, 2017a, 239). En el texto se define los conceptos de evento singular, evento no singular y eventos mutuamente excluyentes. Asimismo, se indica que los alumnos realicen juegos; por ejemplo, juegos de dados en los que se describan los resultados en términos de eventos singulares y no singulares.

Por otra parte, se define la unión de dos eventos y después se presenta el cálculo de la probabilidad de dos eventos mutuamente excluyentes mediante la regla de la suma; en esta descripción se usa notación de conjuntos. Esta sección concluye con el siguiente problema:

Ana, Beto, Carolina y Daniel inventan un juego en el que lanzan una moneda tres veces y definen al ganador de acuerdo con el número de águilas que aparezcan, de la siguiente manera: A: Ana gana si sale 0 águilas (3 soles); B: Beto gana si sale 1 águila; C: Carolina gana si salen 2 águilas; D: Daniel gana si salen 3 águilas. En este problema se pueden hacer preguntas como, ¿cuál es la probabilidad de cada evento? […] ¿es justo este juego? (SEP, 2017a, 239).

Después se amplía el problema con una parte nueva:

Como los amigos se dan cuenta que el juego no es justo, deciden dar el premio por parejas, Ana y Carolina forman un equipo y Beto y Daniel, el otro. Pida a los alumnos que calculen las probabilidades de cada equipo y que completen una tabla como la siguiente (SEP, 2017a, 240):

Probabilidad de ganar del equipo de Ana y Carolina:	Probabilidad de ganar del equipo de Beto y Daniel:
P(A U C) = _____	P(B U D) = _____

Este es un problema para aplicar la regla de la suma para eventos mutuamente excluyentes; es decir, se centra en el cálculo de probabilidades (el segundo punto en la lista de Gal). Se expone la definición de probabilidad clásica; esto implica usar la

regla de Laplace, y por lo tanto, describir el espacio muestral; sin embargo, no hay el cuidado de sugerir el uso de herramientas que permiten organizar y contar los datos, como sí lo hay en los diagramas de árbol. Esta supresión conduce a que los docentes no promuevan el uso de estos recursos, ya no digamos para explorar el gran potencial que tiene el aprendizaje de los diagramas de árbol, sino ni siquiera para calcular las probabilidades de los eventos involucrados.

Se revela una inconsistencia en el hecho de que los aprendizajes esperados en el tema de probabilidad están dirigidos hacia el cálculo de probabilidades, mientras que la resolución de problemas es una competencia. En esta orientación didáctica no se promueven, con excepción de la aleatoriedad, las “grandes ideas” de la cultura probabilística. El lenguaje de la probabilidad utilizado se reduce a la expresión “probabilidad”. Otra vez, el contexto es un juego de azar; destaca la ausencia de contextos sociales y no hay algún indicio sobre la importancia de apreciar los contextos científicos.

En conclusión, en los programas de estudio 2017 se indica una orientación didáctica para cada grado y para cada eje temático. En estas orientaciones, la descripción de los contenidos es general y no se indica con claridad su utilidad. Como se ha evidenciado, los diagramas de árbol no forman parte de los Aprendizajes esperados; por lo tanto, los problemas que se propusieron tendrían que haber sido diseñados de tal manera que los alumnos puedan resolverlos sin disponer de ésta herramienta óptima.

Las orientaciones didácticas no sugieren formas de trabajo para que los docentes diseñen sus secuencias didácticas, es decir, no señalan como incorporar la actividad de resolver problemas al currículo. En consecuencia, el profesor organizará su propia dosificación de los Aprendizajes esperados recurriendo a su experiencia y diseñará su planeación en función de secuencias didácticas que se refieren a los contenidos de programas anteriores.

En la siguiente tabla figura la comparación de los contenidos de los programas de estudio 2006, 2011 y 2017 en relación con los diagramas de árbol en la educación secundaria.

Tabla IV.I. 2.

Contenidos de los programas de estudio 2006, 2011 y 2017 acerca de los diagramas de árbol en secundaria

Contenido	Programa de estudio 2006	Programa de estudio 2011	Programa de estudio 2017
Construcción de diagramas de árbol.	X		
Resolución de problemas de conteo.	X	X	
Enumerar los posibles resultados de una experiencia aleatoria.	X	X	
Establecer cuál de dos o más eventos en una experiencia aleatoria tiene mayor probabilidad de ocurrir y justificar la respuesta.	X	X	
Reconocer las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.	X	X	
Anticipar resultados en problemas de conteo, con base en la identificación de regularidades. **Verificar los resultados mediante arreglos rectangulares, diagramas de árbol u otros recursos**.	X		
Distinguir en diversas situaciones de azar eventos que son independientes. Determinar la forma en que se puede calcular la probabilidad de ocurrencia de dos o más eventos independientes.	X	X	
Distinguir en diversas situaciones de azar eventos que son mutuamente excluyentes. Determinar la forma en que se puede calcular la probabilidad de ocurrencia.	X	X	X
Identificación y práctica de juegos de azar sencillos y registro de los resultados. Elección de estrategias en función del análisis de resultados posibles.		X	
Anticipación de resultados de una experiencia aleatoria, su verificación al realizar el experimento y su registro en una tabla de frecuencias.		X	
Resolución de problemas de conteo mediante diversos procedimientos. Búsqueda de recursos para verificar los resultados.	X	X	
Comparación de dos o más eventos a partir de sus resultados posibles usando relaciones como: “es más probable que …”, “es menos probable que …”	X	X	
Realización de experimentos aleatorios y registro de resultados para un acercamiento a la probabilidad frecuencial. Relación de esta con la probabilidad teórica.		X	X

Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.	X	X	X
Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma)		X	X
Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto)	X	X	X
Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.	X	X	
Determinar la probabilidad teórica de un evento en un experimento aleatorio.		X	X
Calcula la probabilidad de ocurrencia dos eventos mutuamente excluyentes.	X	X	X

IV.2. Los diagramas de árbol en los libros de texto de matemáticas de educación secundaria edición 2021

Se ha investigado la importancia que tienen los libros de texto en las prácticas de enseñanza en la secundaria (Quiroz, 2000; Díaz, 1995 y Falcón et al. 1995). Se puede asegurar que la mayoría de los maestros utilizan algún libro de texto como el elemento esencial para preparar su trabajo en el aula; en general, los docentes hacen poco uso de los programas, y, en cambio, el libro de texto está todos los días en su planeación y en el salón de clases. Es posible que el libro de texto haya desplazado al proyecto docente, pues una práctica muy difundida es aquella en que la actividad de enseñanza tiene como condicionante central al libro de texto.

Hasta el año 2021, los libros de texto de secundaria siempre fueron elaborados por editores privados, siguiendo los lineamientos fijados por la SEP (temas, capítulos y materias). Ya elaborados, los someten a una comisión de la SEP que los aprobaba. En julio de 1997, con la participación de la Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos (Conaliteg), la SEP compró los títulos y decidió distribuir gratuitamente (en préstamo) libros de texto a alumnos de primer grado en secundarias generales y técnicas, en municipios marginados de 17 entidades federativas.

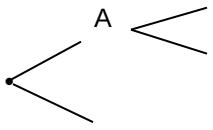
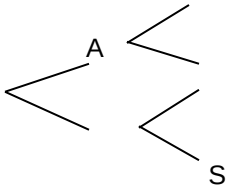
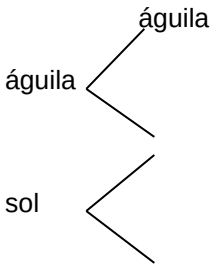
A partir del ciclo escolar 2004-2005, se extendió la distribución de los libros a nivel nacional, y se amplió a los tres grados de la educación secundaria; la entrega de los libros debería implicar la transmisión de su propiedad a cada uno de los estudiantes beneficiados. Desde ese ciclo escolar, los profesores eligen el título que juzgan más oportuno para su curso; suelen existir tensiones entre las autoridades educativas y los representantes de las escuelas. Así, la entrega de libros de texto gratuito a estudiantes de secundarias públicas constituyó una política pública.

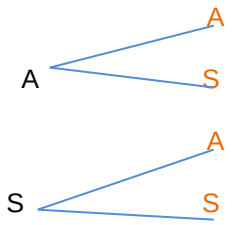
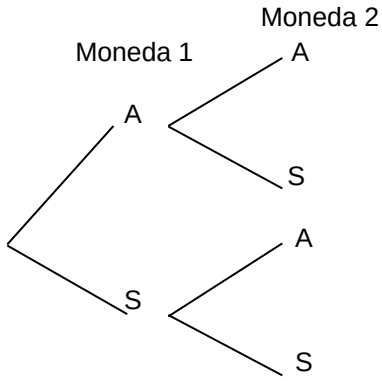
Los libros de texto representan el conocimiento seleccionado para ser transmitido, cuyo marco son las normas curriculares vigentes y el proyecto de la institución que se hace cargo del conocimiento de los alumnos. No obstante, cabe formularse lo siguiente: ¿las propuestas de actividades de resolución de problemas son representativas de los aprendizajes que llevan a la formación de aprendizajes clave?; ¿son potencialmente significativas para los alumnos?, y ¿sus orígenes son las

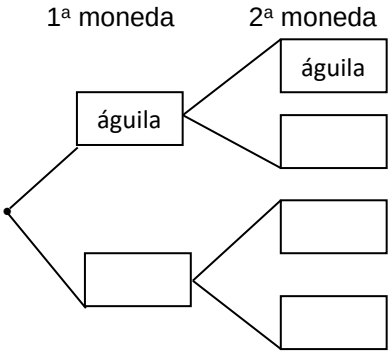
necesidades educativas de los alumnos?; los diagramas de árbol ¿han sido utilizados en la resolución de problemas de conteo de manera rutinaria, estereotipada?; el enfoque pedagógico propuesto ¿induce a los alumnos a emplear este recurso en la resolución de problemas de otras asignaturas?

En el Apéndice II se exponen ejercicios de libros de texto de matemáticas de ediciones anteriores a la de 2018 relacionados con los diagramas de árbol. Enseguida, se muestran ejercicios propuestos en libros que componen el Catálogo de Libros de Texto Gratuitos, para el ciclo escolar 2018-2019 en el Nuevo Modelo Educativo.

Tabla IV.2.1

Matemáticas 1. Alberro, Semerena Anne. García, Madero Rubén. Correo del Maestro. Descubro y construyo. 5. Completen el diagrama de árbol de la derecha para representar el espacio muestral. Diagrama de árbol  • Si lanzan las monedas 50 veces, ¿cuántas veces caerán un sol y un águila? Explica por qué _____	*Matemáticas 1. Secundaria. Soy Protagonista.* González, Polo Rosa Isela. Castañeda, Alonso Apolo. Ediciones SM. ⟶ MIS NUEVOS CONOCIMIENTOS. Lleven a cabo la siguiente actividad en parejas. Cada uno necesitará una moneda para lanzar volados. a) Investiguen qué es y cómo se hace un diagrama de árbol para completar el de la derecha con los posibles resultados de los volados. A  	*Interacciones. Matemáticas1.* Mancera, Martínez Eduardo. Basurto, Hidalgo Eduardo. Pearson Educación. Espacio muestral Reunidos en equipos realicen las siguientes actividades. 1. Consideren el evento de lanzar tres monedas, al mismo tiempo y completen el siguiente diagrama de árbol, para obtener todos los posibles resultados. Moneda 1 Moneda 2 Moneda 3 
Matemáticas 1. Selva Matemágica. López, Haro Rubén Octavio. Editorial Esfinge. Secuencia 48	*Matemáticas 1.* Díaz, Mori Jorge Aurelio. Ediciones Impresas y Digitales Del Río. No hay información.	*Matemáticas 1.* Hernández, Soto Jesús Manuel. Jiménez, Malagón Leopoldo. Grupo Editorial Patria. ESPACIO MUESTRAL Y REGISTRO DE RESULTADOS.

Actividad 5. Los diagramas de árbol y su utilidad para contabilizar el número total de posibilidades. Los diagramas de árbol son representaciones gráficas que son de mucha utilidad para determinar el número total de posibilidades de sucesos aleatorios. Si se quisiera analizar el lanzamiento simultáneo de 2 monedas, ¿de cuántas formas distintas pueden caer? En este caso se puede utilizar el siguiente diagrama de árbol, y se va a suponer que la primera moneda es de color negro y la segunda moneda es de color rojo. Primera moneda — Segunda moneda  No hay ejercicios		1. Individualmente analiza las siguientes situaciones y contesta lo que se te indica: a) Melisa realiza el lanzamiento de dos monedas y representa los posibles resultados en un diagrama de árbol**.** En este caso A representa “águila” y S “sol”.  ¿Crees que el diagrama de árbol representa de manera adecuada esta situación? Justifica tu respuesta.
		Matemáticas 1. Martínez, Téllez Pilar. Carrasco, Licea Guadalupe. Santillana. Probablemente. 4. Lee y contesta. Leo, Pati y Maru, las tres amigas de la secuencia 1, lanzaron dos monedas al aire y acordaron que, si salían dos águilas, ganaba Maru; si salían dos soles ganaba Pati; y si salían un águila y un sol, ganaba Leo. Después de lanzar muchas veces las dos monedas, llegaron a la conclusión de que

		Leo tenía mayor probabilidad de ganar. Para determinar los resultados que se pueden obtener al lanzar dos monedas, completa el siguiente diagrama de árbol.  a) De los cuatro resultados posibles, ¿en cuántos gana Leo?_____ ¿En cuántos gana Pati? _____ ¿Y en cuántos gana Maru? _____ b) ¿Qué dice lo anterior sobre la probabilidad de que gane cada amiga? Compara tus respuestas con un compañero. ¿Coinciden en sus opiniones?

Elaboración propia a partir de los libros de texto

Siguiendo a Monterrubio y Ortega (2011), los libros de texto tendrían que considerar distintos tipos de contenidos, permitir diferentes tipos de aprendizaje, proponer el estudio de las áreas estableciendo relaciones entre ellas y también entre las distintas partes que componen a la asignatura, y presentar posibilidades de adaptación a diferentes contextos por parte de los docentes. Ortega propuso un modelo de valoración de textos escolares de matemáticas que se denominó *Modelo Exhaustivo de Análisis y Valoración de Textos Escolares de Matemáticas,* especialmente útil para analizar varios manuales escolares a fin de elegir uno de ellos como libro de texto.

El modelo se compone de indicadores de análisis agrupados en los organizadores que se presentan: Objetivos, Contenidos, Conexiones, Actividades, Metodología, Lenguaje, Ilustraciones, Motivación, Tecnologías de la información y de la comunicación, Evaluación, Enfatización, Aspectos formales, Recursos generales, Entorno. Para analizar los libros de texto correspondientes a la edición 2018, consideré los siguientes indicadores: “Contenidos”, “Conexiones” y “Actividades”.

Los “Contenidos” se refieren a la presentación, presencia, selección, secuenciación, organización y adecuación de los contenidos a los objetivos, así como al nivel educativo, procedimientos teóricos, fundamentación, claridad de la exposición, teoría demostrada, rigor, actualidad, ejemplos, razonamiento matemático, temas transversales, educación en atención a la diversidad y resolución de problemas como contenido. Las “Conexiones” son con las matemáticas, con la historia de las matemáticas, con otras disciplinas y con la vida cotidiana.

Las “Actividades” narran la adecuación de las actividades a los objetivos, a los contenidos y al nivel educativo; la secuenciación de las actividades en orden de dificultad; la temporalización de la secuenciación de actividades, actividades propuestas, ejercicios propuestos, ejercicios resueltos, preguntas propuestas, uso de construcciones geométricas, razonamiento matemático, temas transversales, educación en la atención a la diversidad y resolución de problemas como actividad. El tema diagramas de árbol está presente en el contenido de algunos de los libros de texto elaborados bajo los lineamientos de los nuevos programas.

En los ejemplos exhibidos en la Tabla IV.2.1, el problema de ruptura entre el enfoque y las actividades es profundo. Los ejercicios muestran que hay una evidente contradicción entre el enfoque de resolución de problemas propuesto por el programa y las orientaciones del libro:

“Desarrollar habilidades que les permitan plantear y resolver problemas usando herramientas matemáticas, tomar decisiones y enfrentar situaciones no rutinarias” (propósito general). “Calcular la probabilidad clásica y frecuencial de eventos simples y mutuamente excluyentes en experimentos aleatorios” (propósito para la educación secundaria).

¿La contradicción se genera en el momento de la selección de los contenidos? Algunos libros comienzan por exponer una descripción de lo que se entiende por situación aleatoria, otros lo abordan desde la discusión entre compañeros y profesor, y otros más comienzan con alguna situación relacionada a la aleatoriedad. Todos los libros incluyen como parte fundamental de la secuencia didáctica una actividad que comprenda el registro de los resultados de algún experimento, que puede ser aleatorio. Sin embargo, todas ellas culminan en la presentación de la definición de Laplace (probabilidad clásica de la probabilidad o teórica).

En los libros de texto los modelos de selección y colocación son los que aparecen reiteradamente. Se da por hecho que el estudiante distingue entre un fenómeno determinista y uno que no lo es. Algunos libros rescatan la diferencia entre la frecuencia relativa y la probabilidad clásica; **no se ofrece una introducción a los diagramas de árbol**. Se observa que las respuestas solicitadas no tienen ninguna relevancia para la comprensión de estos.

La solución a un problema no debería de ser tan difícil que parezca imposible de resolver por el alumno, ni tan sencilla que quede fija de antemano como se presenta en los ejercicios planteados. La solución debe ser construida pensando que existen distintas estrategias posibles y que hay que usar más de una. Así, la tendencia en las actividades de enseñanza y de evaluación de los diagramas de árbol, propuesta en los libros de texto edición 2018-2019, es presentar el algoritmo y ejemplificar con un caso en que se muestran los pasos secuenciales para resolverlo, generalmente sin relación con otros temas.

Si bien la selección de contenidos de los programas 2011 y 2017 muestra una contracción en los temas de probabilidad, como es el caso de los diagramas de árbol, un examen a los libros de texto que se ofertaron permite afirmar que, en general, el tema diagramas de árbol no fue omitido de las actividades para el aprendizaje del razonamiento combinatorio. De los diecisiete libros que se presentaron para el ciclo escolar 2018-2019, tres no incluyen el tema de diagramas de árbol: 1) Trigueros, M., Lozano, M.D., Sandoval, I.T., Cortés, M., Jinich, E. y Schulmaister, M.I.; 2) Riva Palacio y Santana, M.A.; 3) Díaz, J.A.

A continuación, se exhibe la Tabla IV.2.2 que sintetiza los contenidos, las conexiones y las actividades en los catorce libros restantes con respecto a los diagramas de árbol.

Tabla IV.2.2 Primer grado. Matemáticas

Autor	Contenidos. Temas	Conexiones	Actividades
Mancera, E. y Basurto, E.	Espacio muestral.	Ninguna	Ejercicios en relación con el lanzamiento de monedas; urnas.
Escareño, F. y López, O. L.	¿Qué es más probable que ocurra?	Ninguna	Ejercicios sobre lanzamiento de monedas; urnas.
Balbuena, H., Block, D. y García, S.	Azar y probabilidad.	Ninguna	Ejercicios acerca del lanzamiento de monedas, de dados y tiro al blanco.
Martínez, M.L. y Mohar, D.	Experimentos aleatorios.	Ninguna	Ejercicios sobre lanzamiento de dados, de monedas y giros de ruleta.
Canché, E., Domínguez, E. y Peña, M.J.	Registro y análisis de experimentos aleatorios.	Ninguna	Ejercicios en relación con el lanzamiento de monedas, urnas.
Bosch, C., Meda, A. y Gómez, C.	El azar y la probabilidad frecuencial.	Ninguna	Ejercicios acerca de combinaciones de ropa, lanzamiento de monedas, creación de un menú.
Martínez, P. y Carrasco, G.	Probablemente	Ninguna	Ejercicios sobre giros de ruleta, urnas, lanzamiento de monedas.
Castañeda, A. y González, R. I.	Registro de datos	Ninguna	Ejercicios en relación con el lanzamiento de monedas.
Cetina, D. y Jiménez, E.V.	Espacio Muestral	Ninguna	Ejercicios sobre lanzamiento de dados, de monedas; combinaciones de ropa.
López, R.O.	Comparar dos o más eventos	Ninguna	Ejercicios acerca de lanzamientos de monedas, de dados y combinaciones de cartas de una baraja.
Jiménez, V.	Experimentos azarosos	Ninguna	Ejercicios en relación con el lanzamiento de monedas, urnas.

Alberro, A. y García, R	Experimentos aleatorios	Ninguna	Ejercicios sobre lanzamientos de dados, de monedas.
Sánchez, E.A., Hoyos, V. y Sáinz. M. L.	Frecuencia relativa	Ninguna	Ejercicios acerca de lanzamiento de monedas, de dados.
Hernández, J.M. y Jiménez, L.	Espacio muestral y registro de resultados	Programa de Estudio 2006. Matemáticas. 2° grado, p.72. Examen ENLACE. 2013, 2do. Grado, Reactivo 130	Ejercicios sobre urnas, lanzamientos de monedas, de dados.

En general, en los libros de texto se propone al alumno un único fragmento relacionado con los diagramas de árbol, expuesto en la misma forma. En algunos casos, se proponen ejercicios donde la nota dominante es su carácter reproductor. Si la práctica en el aula se reduce al empleo del libro de texto, es verosímil que las representaciones se consoliden; entonces la diversidad que el estudiante conocerá se reduce a los límites que le ofrezca el libro. El riesgo de que los alumnos solo entren en contacto con conocimientos de síntesis consiste en que por la forma acostumbrada de ser presentados sus resultados enfaticen la insuficiencia del conocimiento y de su fundamentación.

Para el ciclo escolar 2019-2020, los docentes eligieron entre los mismos diecisiete libros de texto del ciclo anterior para primer grado de educación secundaria el que mejor se adaptara a las necesidades pedagógicas de sus alumnos. Entre los diecisiete libros hay quince que corresponden a la edición 2018 y dos fueron reimpresos en 2019. Por lo que se refiere a segundo grado, la elección se hizo tomando en cuenta dieciséis libros de texto. Si se revisa el catálogo de los libros anteriores frente a los nuevos, se encuentra una alta correspondencia de autores.

Una revisión de los dieciséis libros de texto indica que cuatro no incluyen el uso de los diagramas de árbol en los ejercicios o problemas propuestos: 1)Trigueros, M., Lozano, M.D., Sandoval, I.T., Cortés, M., Jinich, E. y Schulmaister, M.I.; 2) Block, D., García, S. y Balbuena, H.; 3)Xique, J. C.; 4) García, E. y Sánchez, M. La Tabla IV.2.3 muestra información acerca de los contenidos, las conexiones y las actividades

propuestas en los doce libros restantes; es conveniente comentar que las actividades que se presentan en estos no son explícitas en el uso de los diagramas de árbol.

Tabla IV.2.3 Segundo grado. Matemáticas

Autor	Contenido. Temas	Conexión	Actividades
Alberro, A.	Potencias con exponentes enteros. Probabilidad teórica y probabilidad frecuencial.	Ninguna	Ejercicios acerca de urnas, juegos de naipes, lanzamiento de dados, de monedas, juegos con una perinola o ruleta.
Bosch, C. y Meda, A.	Probabilidad teórica.	Ninguna	Ejercicios en relación con lanzamiento de monedas.
Riva Palacio y Santana, M.A.	¿Solo una regla general puede representar a una sucesión?	Ninguna	Se emplea un diagrama de árbol para iniciar la explicación de la equivalencia de expresiones algebraicas.
Martínez, P. y Contreras, L.	Probabilidad frecuencial y probabilidad teórica.	Asignatura Matemáticas División de números enteros.	Ejercicios acerca de urnas, lanzamiento de dados y nacimientos.
González, R. I. y Castañeda, A.	Potencias con exponente entero.	Asignatura: Ciencias I (Énfasis en Biología) Reproducción de bacterias.	Ejercicios en relación con lanzamiento de monedas.
García, R. y Molina, M.A.	Probabilidad Teórica.	Ninguna	Ejercicios sobre el juego de dominó; lanzamiento de monedas, de dados; juegos con una ruleta, urnas.
Pérez, D.A.	Espacio muestral.	Ninguna	Ejercicios acerca de lanzamiento de dados, de monedas; juegos de cartas, de ruleta; urnas.
Villaseñor, R., García, V.M., Hernández, J.L.	Potencias y raíz cuadrada. Productos y cocientes de potencias.	Asignatura: Ciencias I (Énfasis en Biología) Propagación de una enfermedad.	Ejercicios en relación con la propagación de un virus.
García, H. E.	Probabilidad teórica vs. probabilidad frecuencial.	Ninguna	Ejercicios acerca de lanzamiento de monedas, de dados, urnas; juego con una ruleta.

Manrique, PC	Multiplicación y división de números enteros.	Asignatura: Ciencias I (Énfasis en Biología) Reproducción de bacterias.	Ejercicios acerca de juegos con una ruleta, con barajas, lanzamiento de monedas, urnas, dominó.
Sánchez, E. A., Hoyos, V. y Sáinz, M.L.	Probabilidades de experiencias de dos o más etapas.	Ninguna	Ejercicios sobre lanzamientos de una moneda y un dado, urna, juego de cartas.
Mancera, E. y Basurto, E.	Multiplicaciones del mismo factor.	Asignatura: Ciencias I (Énfasis en Biología) Reproducción de bacterias.	Ejercicios en relación con lanzamientos de monedas, de dados; urnas, nacimientos, juego con una ruleta.

El uso del libro de texto para tercer grado empezó en el ciclo escolar 2020-2021, en tanto que, para primero y segundo grado continuaron en uso los mismos libros de texto. Para mostrar el estado de los diagramas de árbol en el ciclo escolar 2021-2022 se presentan las tablas IV.2.4 y IV.2.5.

Tabla IV.2.4 Primer grado. Matemáticas

Autor	Contenido. Temas	Conexión	Actividades
Martínez, M.L. y Mohar, D.	Mas probable y menos probable. Experimentos aleatorios.	Ninguna	Combinaciones. Ejercicios sobre lanzamiento de dados y de monedas.
Canché, E., Domínguez, E. y Peña, M.J.	Registro y análisis de experimentos aleatorios.	Ninguna	Organizador gráfico. Ejercicios en relación con el lanzamiento de monedas, urnas
Bosch, C., Meda, A. y Gómez, C.	El azar y la probabilidad frecuencial.	Ninguna	Combinaciones de ropa. Ejercicios acerca de lanzamiento de monedas y de dados.
Martínez, P. y Carrasco, G.	Probablemente.	Ninguna	Ejercicios sobre lanzamiento de monedas, urnas.
Escareño, F. y López, O.L.	¿Qué es más probable que ocurra?	Ninguna	Ejercicios sobre urnas.
Balbuena, H., Block, D. y García, S.	Azar y probabilidad.	Ninguna	Organizador gráfico. Ejercicios acerca de lanzamiento de monedas y de dados.
Castañeda, A. y González, R.I.	Registro de datos.	Ninguna	Investigar qué es y cómo se hace un diagrama de árbol.

			Ejercicios en relación con el lanzamiento de monedas.
Cetina, D. y Jiménez, E.V.	Espacio Muestral.	Ninguna	Combinaciones de ropa. Ejercicios sobre lanzamiento de dados, de monedas.
Trigueros, M., Lozano, M.D., Schulmaister, M.I., Sandoval, I.T., Jinich, E. y Cortés, M.	No incluyen a los diagramas de árbol en ninguna secuencia didáctica.		
Arredondo, L.R. y Aguilar, T.A.	No incluyen a los diagramas de árbol en ninguna secuencia didáctica.		
López, R.O.	Comparar dos o más eventos usando relaciones como: "es más probable que…" "es menos probable que…" a partir de sus resultados posibles.	Ninguna	Combinaciones de cartas de una baraja. Elección de un comité. Ejercicios acerca de lanzamientos de monedas, de dados.
Sánchez, E. A., Hoyos, V. y Sáinz, M. L.	Frecuencia relativa.	Ninguna	Ejercicios acerca de lanzamiento de monedas y de dados.
Hernández, J.M. y Jiménez, L.	Espacio muestral y registro de resultados.	Programa de Estudio 2006. Matemáticas. 2°grado, p.72. Examen ENLACE	Ejercicios sobre urnas, lanzamientos de monedas y de dados.
Diaz, J.A.	No incluyen a los diagramas de árbol en ninguna secuencia didáctica.		
Jiménez, V.	Experimentos azarosos.	Ninguna	Organizador gráfico. Ejercicios en relación con urnas, con el lanzamiento de monedas.
Alberro, A. y García, R.	Experimentos aleatorios.	Ninguna	Organizador gráfico. Combinaciones. Ejercicios sobre urnas, lanzamientos de monedas y de dados.

Tabla IV.2.5 Segundo grado. Matemáticas

Autor	Contenido. Temas	Conexión	Actividades
Alberro, A.	Potencias con exponentes enteros. Probabilidad teórica y probabilidad frecuencial.	Ninguna	Ejercicios acerca de urnas, lanzamiento de dados y de monedas, propagación de una noticia, reproducción de bacterias.
Riva Palacio y Santana, M.A.	¿Solo una regla general puede representar a una sucesión?	Ninguna	Se emplea un diagrama de árbol para empezar la explicación de la equivalencia de expresiones algebraicas
Trigueros, M., Sandoval, I.T., Lozano, M.D., Cortés, M., Jinich, E. Schulmaister, M.I.	No incluyen a los diagramas de árbol en ninguna secuencia didáctica.		
Martínez, P. y Contreras, L.	Problabilidad teórica de un evento en un experimento aleatorio. Problemas de división con números enteros.	División de números enteros.	Factorización. Ejercicios acerca de urnas, lanzamiento de monedas y de dados, nacimientos.
Balbuena, H., Block, D. y García, S.	No incluyen a los diagramas de árbol en ninguna secuencia didáctica.		
González, R.I. y Castañeda, A.	Potencias con exponente entero.	Asignatura: Ciencias I (Énfasis en Biología) Reproducción de bacterias. Fractal. Árbol genealógico.	Ejercicios en relación con lanzamiento de monedas.
García, H. E.	Probabilidad teórica vs. Probabilidad frecuencial.	Ninguna	Ejercicios acerca de urnas, lanzamiento de monedas y de dados, juego con una ruleta.
Manrique, P.C.	Multiplicación y división de números enteros. Resuelve problemas de potencias con exponente entero y aproxima raíces cuadradas.	Asignatura: Ciencias I (Énfasis en Biología) Reproducción de bacterias.	Combinaciones. Ejercicios acerca de juegos con una ruleta, con barajas; urnas, dominó y lanzamiento de monedas.

Sánchez, E. A., Hoyos, V. y Sáinz, M. L.	Probabilidades de experiencias de dos o más etapas.	Ninguna	Combinaciones. Ejercicios sobre urnas, lanzamiento de monedas y de dados, juego “piedra, papel o tijera”
Xique, J. C.	No incluyen a los diagramas de árbol en ninguna secuencia didáctica.		
García, R. y Molina, M. A.	Probabilidad Teórica.	Ninguna	Ejercicios sobre urnas, lanzamiento de monedas y de dados, juegos con una ruleta.
Pérez, D. A.	Espacio muestral.	Ninguna	Ejercicios acerca de urnas, lanzamiento de monedas y de dados, juegos con una ruleta.
García, E. y Sánchez, M.	No incluyen a los diagramas de árbol en ninguna secuencia didáctica.		
Bosch, C. y Meda, A.	Potencias con exponente entero	Ninguna	Dibuja un diagrama de árbol, pero no lo nombra. Ejercicios en relación con lanzamiento de monedas y de dados, urnas.
Villaseñor, R., García, V. M. y Hernández, J. L.	Potencias y raíz cuadrada. Contagios peligrosos. Productos y cocientes de potencias. Contagios	Asignatura: Ciencias I (Énfasis en Biología) Propagación de una enfermedad	Contagio de personas de una enfermedad. Ejercicios en relación con la reproducción de un virus

En el libro se exhibe al menos un diagrama de árbol.

Elaboración propia a partir de los libros de texto.

Es previsible que se dé una ruptura entre las intenciones de cambio y la manera como el currículum 2017 se articula en los libros de texto, la selección de los contenidos y las actividades que éstos presentan. Por otra parte, existen formas de presentar el concepto de diagramas de árbol basadas en situaciones que tengan sentido para el alumno, es decir, incorporan la participación de los estudiantes explorando constantemente situaciones cercanas a su vida cotidiana favoreciendo otro tipo de comportamientos. Los libros de texto que incluyeron ejercicios, situaciones

problema o problemas asociados con los diagramas de árbol se resumen en la Tabla IV.2.6.

Tabla IV.2.6

Referencia de libros de texto de Matemáticas que contienen diagramas de árbol

Primer grado

	Referencia
1	Martínez, M. L., y Mohar, D. (2021). *Matemáticas 1*
2	Canché, E., Domínguez, E., y Peña, M. J. (2021). *Matemáticas 1*
3	Bosch, C., Meda, A., y Gómez, C. (2021). *Matemáticas 1*
4	Martínez, P., y Carrasco, G. (2018). *Matemáticas 1*
5	Escareño, F., y López, O. L. (2020). *Matemáticas 1*
6	Balbuena, H., Block, D., y García, S. (2020). *Matemáticas 1. Conecta más*
7	Castañeda, A., y González, R. I. (2020). *Matemáticas 1. Soy Protagonista*
8	Cetina, D., y Jiménez, E. V. (2021). *Matemáticas 1*
9	López, R. O. (2018). *Matemáticas 1. Matemágica*
10	Sánchez, E. A., Hoyos, V., y Sáinz, M. L. (2018). *Matemáticas 1*
11	Hernández, J. M., y Jiménez, L. (2018). *Matemáticas 1*
12	Jiménez, V. (2018). *Matemáticas 1*
13	Alberro, A., y García, R. (2018). *Matemáticas 1*
14	Mancera, E., y Basurto, E. (2018). *Matemáticas 1*

Segundo grado

	Referencia
15	Alberro, A. (2021). *Matemáticas 2*
16	Martínez, P., y Contreras, L. (2020). Matemáticas 2
17	González, R. I., y Castañeda, A. (2020). *Matemáticas 2. Soy Protagonista*
18	García, H. E. (2021). *Matemáticas 2*
19	Sánchez, E. A., Hoyos, V., y Sáinz, M. L. (2018). *Matemáticas 2*
20	García, R., y Molina, M. A. (2018). *Matemáticas 2*
21	Bosch, C., y Meda, A. (2021). *Matemáticas 2*
22	Villaseñor, R., García, V. M., y Hernández, J. L. (2021). *Matemáticas 2*
23	Mancera, E., y Basurto, E. (2019). *Interacciones matemáticas 2*

El estudio sobre cómo se abordan los diagramas de árbol en los libros de texto de primero y segundo grado de educación secundaria está detallado en las Tablas IV.2.7 y IV.2.8.

Tabla IV.2.7. Contenido de diagramas de árbol en los libros de texto de primer grado

Contenido	Libros													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Ubicación del tema	Bloque 3 DE AP	Bloque 3 DE AP	Unidad 3 DE AP	Trimestre 1 AP AE	Unidad 3 DE AP	Periodo 3 DE AP	Periodo 3 Secuencia 32 DE AP	Bloque 3 DE AP	Unidad 3 DE DP	Bloque 3 DE AP	Bloque 3 DE AP	Trimestre 3 DE AP	Módulo 1 AE AP	Periodo 3 DE DP
Definición de diagrama de árbol	✓	✓	✓	✓	✓			✓	✓		✓	✓		
Contexto de los elementos inmersos en la actividad	Juegos de azar	Juegos de azar	Juegos de azar Atavío	Juegos de azar	Juegos de azar	Juegos de azar	Juegos de azar	Juegos de azar Atavío	Juegos de azar Comité	Juegos de azar	Juegos de azar Comité	Juegos de azar	Juegos de azar	Juegos de azar
Identificar los elementos de un diagrama de árbol			xb					xb						
Orientación del árbol	Derecha	Derecha	Derecha	Derecha	Hacia abajo	Derecha	Derecha	Hacia abajo	Derecha	Derecha	Derecha	Hacia abajo	1.Derecha 2.Hacia abajo	Derecha
Leer un árbol	xa	xa	xa	xa	xa		xa	xb	xb	xb	xa	xb	xb	xb
Contar ordenadamente	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓
Completar un árbol	xa	xb	xb	xa	xa	xa	xb			xb		xb	xb	xb
Análisis o búsqueda de propiedades en el árbol			xa	xa				xa			xa	xb	xa	
Construir un árbol			xa	xa							xa		xa	
Actividad que es de esperar se desarrolle usando un árbol	xb		xb			xa	xb	xa			xa		xa	
Actividad aplicada a la combinatoria	xb	xb	xa		xa			xa	xa		xa		xa	xb
Actividad aplicada a la probabilidad	xb	xa	xb			xa		xa			xb		xa	
Utilización de recursos didácticos	dados moneda	moneda urna canicas	moneda dados ropa	moneda dados	urna pelotas papel	moneda dados	moneda	moneda dados ropa	personas moneda comité	dados	personas moneda dados números	moneda dados	moneda dados urna canicas	moneda
Presencia de consideraciones históricas			✓										✓	

Ejemplos/ejercicios introductorios a los contenidos sobre el tema			✓					✓	✓					
Ejercicios/problemas posteriores a los contenidos sobre el tema	xb		xa	xa							xa		xa	
Valor numérico de los parámetros	2,6	2,5	2,6	2,8	1,6	2, 3	1,2,3	2,6	2, 3	6	2,3,5	2,6	2,6	2, 6
Principio aditivo A Principio multiplicativo M Producto cartesiano C	M	A	M	M	M	M	M	M	A, M	M, C	M	M	M	M
Número de operaciones combinatorias ligadas al diagrama de árbol	1	1	2	2	1	1	1	1	1	0	2	1	1	1
Operaciones combinatorias Ordenaciones: O Permutaciones: P Combinaciones: C	C	C	C	C	C	C	C	C	C, O	C	C, O	C	C	C

Notas:

1. DE AP: Después del tema de Estadística y Antes del tema de Probabilidad. AP AE: Antes del tema de Probabilidad y Antes del tema de Estadística. DE DP: Después del tema de Estadística y Después del tema de Probabilidad.

2. $\surd$: Cumple con el contenido

3. xa: actividad individual; xb: actividad en parejas o en grupo.

4. Los libros señalados con los números 17, 22 y 23 emplean diagramas de árbol en la exposición del tema de potenciación; sin embargo, no existe ninguna explicación relacionada con este recurso.

Tabla IV.2.8.

Contenido de diagramas de árbol en los libros de texto de segundo grado de educación secundaria

Contenido	Libros								
	15 Misma autora del libro 13	16 Mismos autores del libro 4	17 Mismos autores del libro 7	18	19 Mismos autores del libro 10	20	21 Mismos autores del libro 3	22	23 Mismos autores del libro 14
Ubicación del tema	Bloque 3 DE DP	Trimestre 3 AE	Periodo 3 AE	Bloque 3 DE	Bloque 3 DE	Primer Módulo AE	Unidad 3 DE	Trimestre 3 DE	Unidad 3 DE
Definición de diagrama de árbol					✓				
Contexto de los elementos inmersos en la actividad	Juegos de azar	Nacimientos	Volados Bacterias Árbol genealógico	Juegos de azar	Juegos de azar	Juegos de azar	Juegos de azar Urnas	Contagios de una enfermedad	Bacterias
Identificar los elementos de un diagrama de árbol					xb				
Orientación del árbol	1. Derecha 2. Hacia abajo	Derecha	1. Hacia arriba 2. Hacia abajo	Derecha	Derecha	1. Hacia abajo 2. Derecha	Hacia abajo	Hacia abajo	Hacia abajo
Leer un árbol		xa		xb	xb	xb		xb	xa
Enumeración	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Completar un árbol		xa				xb	xb		
Analizar o buscar propiedades en el árbol			xb					xb	xb
Construir un árbol	xb		xb		xb		xb		
Actividad que es de esperar se desarrolle usando un árbol	xa	xa	xb	xb	xb	xb	xb	xb	xa
Actividad aplicada a la combinatoria		xa	xb						
Actividad aplicada a la probabilidad	xa	xa	xb	xb	xb	xb			xa
Utilización de recursos didácticos	Bolsa frutas canicas			monedas	monedas	monedas	moneda canicas urna		

Presencia de consideraciones históricas									
Ejemplos/ejercicios introductorios a los contenidos sobre el tema			xa Tema: Potencias con exponente entero					xa Tema: Potencias y raíz cuadrada	xa Tema: Multiplicaciones del mismo factor
Ejercicios/problemas posteriores a los contenidos sobre el tema	xb	xa			xb		xb		
Valor numérico de los parámetros	8, 12	2	4	2	3, 6	2	2, 3	4, 6	2, 5
Principio aditivo A Principio multiplicativo M Producto cartesiano C	M	M	M	M	C	M	M	M	M
Operaciones combinatorias Ordenaciones: O Permutaciones: P Combinaciones: C	O	C	O	C	C	C	C	O	O

Notas:

1. DE AP: Después del tema de Estadística y Antes del tema de Probabilidad. AP AE: Antes del tema de Probabilidad y Antes del tema de Estadística. DE DP: Después del tema de Estadística y Después del tema de Probabilidad.
2. √: Cumple con el contenido
3. xa: actividad individual; xb: actividad en parejas o en grupo.

4. Los libros señalados con los números 17, 22 y 23 emplean diagramas de árbol en la exposición del tema de potenciación; sin embargo, no existe ninguna explicación relacionada con este recurso.

Los libros de texto permiten disponer en un solo material de los contenidos necesarios para responder a los requerimientos del currículo (ampliar el conocimiento de técnicas y conceptos matemáticos para plantear y resolver problemas con distinto grado de complejidad, así como para modelar y analizar situaciones y valorar las cualidades del pensamiento matemático). Sin embargo, en los libros analizados sus variaciones responden más a cambios obligados por las reformas educativas que a la evolución de la dinámica pedagógica.

Considerando las observaciones realizadas a los libros de texto gratuitos de educación primaria, recordemos que el programa de quinto grado propone acercar a los alumnos a las ideas de experiencia aleatoria y espacio muestral realizando experimentos y registrando los resultados junto con su frecuencia absoluta y relativa. Asimismo, el programa de sexto grado introduce el concepto y la determinación del espacio muestral (precisar los resultados posibles de una experiencia aleatoria), no existe definición de un diagrama de árbol.

La evolución de este tema en los libros de texto de educación primaria no es significativa pues la secuencia, la organización y la presentación de contenidos, así como el tipo de actividades y los contextos no ofrecieron nuevas situaciones de aprendizaje. Sin una definición precisa, y sin variaciones en su construcción, los diagramas de árbol han sido utilizados para justificar la multiplicación o para contar. En los libros de educación secundaria existen diferencias editoriales en la interpretación del currículo oficial y en el abordaje del tema; sin embargo, en todos los casos se intenta justificar que cumplen con el discurso curricular de los aprendizajes clave. Nuevamente, el tema de los diagramas de árbol tiene el único propósito de contar todos los posibles resultados que se pueden obtener al realizar un experimento; no se le atribuye mayor valor, y, por lo tanto, se desvanece todo su potencial.

Los autores de los libros que incluyen actividades sobre árboles las sitúan al final del último bloque (en 80% de los casos) en el tema, periodo, unidad o trimestre, lo cual transmite el mensaje de que tienen un papel secundario o complementario. Sólo en dos casos los árboles surgen, en el primer módulo, en el tema de

probabilidad en la actividad del lanzamiento de monedas (libro 13), o en el primer trimestre, en el tema de experimentos aleatorios en la actividad de lanzamiento de monedas (libro 4). Si los programas no abordan los diagramas de árbol con precisión, los autores de los libros de texto tampoco lo hacen.

En los libros de primer grado de secundaria la proporción de los contenidos explicados no corresponde con los conocimientos previos de los estudiantes; por ejemplo, el libro de cuarto grado de primaria generación 2011, en el tema de combinaciones, presenta un ejercicio sobre combinaciones con seis variables (frutas, nieve y chile), y otro sobre la formación de parejas de hombres y mujeres (18 mujeres, 15 hombres), lo cual no favorece la transferencia y el uso de conocimientos nuevos como la probabilidad frecuencial.

En libros seleccionados, los árboles se muestran incompletos, están formados a lo más de tres fases y la longitud de sus ramas es la misma. De los 14 libros de primer grado, en 10 el diagrama de árbol se presenta con las ramas y los nodos finales dirigidos hacia la derecha (71%); en tres las ramas y los nodos se dirigen hacia abajo (21%), y sólo en uno se presenta con las ramas y los nodos hacia abajo en un ejercicio y hacia la derecha en otro (7%).

En el caso de los libros de segundo grado se observa que, con excepción del libro 20, que ubica el tema de los diagramas de árbol en el módulo 1, los demás lo hacen en el último bloque, periodo, unidad o trimestre. Se advierte también, que en el libro 17 los árboles son un recurso para la exposición del tema de potencias de números enteros. En el libro 20 se emplea un árbol en el tema de productos y cocientes de números con signo, así como en el tema de probabilidad frecuencial y teórica. En el caso de los nueve libros de segundo grado, en cuatro de ellos (44%) los diagramas se presentan con las ramas y los nodos dirigidos hacia la derecha; en dos (22%) se dirigen hacia la derecha, en un caso, y hacia abajo en otro caso; en dos casos (22%) sólo hacia abajo, y en un caso (11%) está dirigido hacia arriba en un caso y hacia abajo en otro.

Seis autores escribieron libros tanto para primer grado como para segundo; respecto de las actividades, predominan en ambos grados los ejercicios sobre ejemplos y problemas ya resueltos. Los ejercicios consisten en completar, leer, construir o enumerar un diagrama de árbol lo cual los sitúa en niveles de menor dificultad. Con excepción del libro 3, la ejecución de esas actividades se realiza en parejas o en grupo. No existe evolución entre el tratamiento que se proporciona a los árboles en los textos de primer grado y el que se le da a los de segundo. La transición de los ejercicios va de mayor a menor complejidad; tampoco existe un cambio gradual de ideas y solo en el 9% de los libros de texto se incluyen referencias a la construcción histórica de los diagramas de árbol.

Sólo en 10 de los 23 casos analizados se expone la definición de diagrama de árbol. Las definiciones que presentan los libros carecen de precisión, pues no explican los elementos que forman un árbol ni el porqué de la selección de este conocimiento que se va a llevar a cabo. Por ejemplo, en el libro 9 se encuentra la siguiente definición: “Esquema que muestra los resultados posibles de un experimento que tiene varias etapas. Se forma con segmentos (ramas) que terminan en los resultados de cada etapa”. Por su parte, en el libro 19 se ofrece ésta: “Consiste en líneas que salen de un punto, en la punta de cada una de estas se representa el resultado de una etapa”.

En el libro 3 se puede leer una definición mejor estructurada: “Un diagrama de árbol es una representación gráfica de todos los resultados posibles de un experimento o de las combinaciones de una situación. Recibe ese nombre porque las posibilidades se muestran por medio de ramificaciones, una por cada posibilidad seguida de otras ramas que dependen de la anterior”. El objetivo es que a partir del diagrama surja la explicación de lo que es. Las definiciones anteriores carecen de precisión y son insuficientes al referirse a la naturaleza del diagrama de árbol, pues éste no sólo representa un fenómeno sino también permite deducir o inquirir las características de las combinaciones que se forman con sus elementos a través de diferentes fases.

Enseguida de la definición en los libros de texto se hace referencia a un ejemplo o a alguna situación que la extiende o la consolida. Son fragmentos explicativos en los que se utilizan los conceptos teóricos para describir las relaciones entre acontecimientos experimentales. Las tareas propuestas se resuelven con el mismo material que ofrece el libro, no tienen complejidad, ni se distingue qué tipo de aprendizaje promueven; consisten en la transmisión directa de la definición de diagrama de árbol aplicada a ejercicios de solución única. De ese modo, la lectura del árbol se reduce a la fase final. Solo se exhiben árboles simétricos.

Las secuencias de actividades son las actividades de rutina (terminar de completar un árbol) frente a las de descubrir o analizar (clasificar, deducir, anticipar, hacer variaciones desde diferentes perspectivas) las características de un árbol. No existen problemas inversos ni análisis del diagrama de árbol. El número de actividades relacionadas con los diagramas de árbol es reducido, no se adaptan al contexto social y cultural en el que se van a aplicar y no existe relación con los problemas sociales o de la vida cotidiana de los estudiantes. Los contextos están limitados a unos cuantos temas como menús, juegos y comités. Hay ausencia de saberes populares y de temas transversales, por lo cual el enfoque es estrictamente disciplinar. Predominan las actividades en parejas o grupales frente a las individuales.

Aunque los docentes hacen el último replanteamiento didáctico y en ese proceso los libros de texto influyen en las prácticas de enseñanza, en realidad, los libros de texto no corresponden con los propósitos de los programas, más bien refuerzan las prácticas de enseñanza tradicionales.

A partir de examinar la taxonomía realizada por el Grupo de Estudios sobre la Enseñanza de las Matemáticas[89] durante el Estudio Nacional y Longitudinal de las Habilidades Matemáticas (NLSMA, por sus siglas en inglés), construí una taxonomía específica para el aprendizaje de los diagramas de árbol. La estructura de esta taxonomía consta de cinco categorías que definen los niveles de abstracción, las cuales forman las bases de cada etapa de desarrollo. El propósito es construir una secuencia de aprendizaje, la cual se refiere a un incremento jerárquico en la complejidad estructural de las respuestas a esas tareas. Esta taxonomía aparece reflejada en la Tabla IV.2.9 secundaria.

[15] El Grupo de Estudios sobre la Enseñanza de las Matemáticas (SMSG, por sus siglas en inglés), a su vez, hizo su adaptación al área de Matemáticas de la taxonomía elaborada por Benjamín Bloom y su grupo.

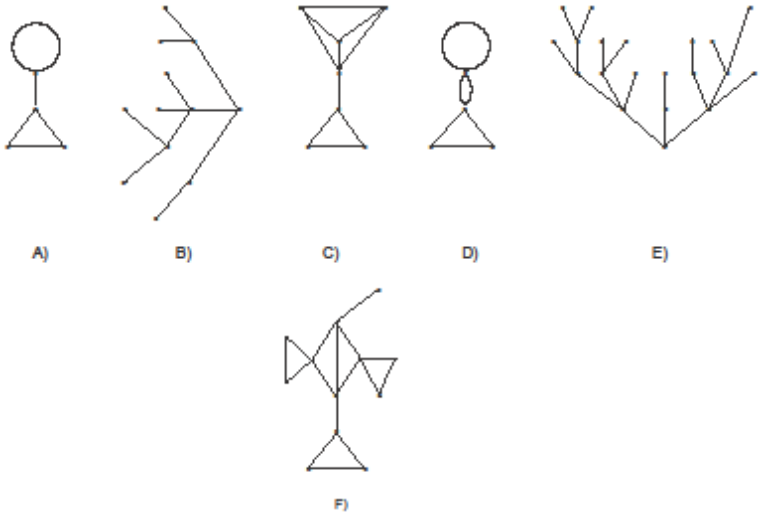
Tabla IV.2.9 Clasificación NLSMA para el diagrama de árbol Educación Secundaria	
A.1 Conocimiento de hechos específicos	Identifica a un árbol como un conjunto de puntos en el plano algunos de los cuales están unidos entre sí.
A.2 Conocimiento de terminología	Reconoce la raíz, los nudos (nodos o vértices), los nudos terminales, las ramas y los caminos en un árbol. Enumera todos los resultados.
A.3 Habilidad para llevar a cabo algoritmos	Dibuja el diagrama de árbol correspondiente a las ordenaciones con repetición de 3 objetos tomados de 2 en 2. Escribe el espacio muestral.
B.1 Conocimiento de conceptos	Interpreta el significado de las ramas que aparecen en la primera y en la segunda generación en la construcción de un árbol.
B.2 Conocimiento de principios, reglas y generalizaciones	Reconoce un árbol con ramas de segunda generación. Interpreta que un árbol contiene información sobre las conectividades entre nudos y carece de información geométrica (distancias, ángulos).
B.3 Conocimiento de la estructura matemática	Explica el significado de las ramas que aparecen en la tercera generación en la construcción de un árbol. Responde preguntas sobre la ausencia de alguna rama.
B.4 Habilidad para transformar elementos de un problema de una forma a otra	Representa la situación descrita en un ejercicio mediante un árbol.
B.5 Habilidad para seguir un razonamiento	Construye el árbol correspondiente al número de ordenaciones sin repetición de 4 objetos tomados de 2 en 2. Calcula el total de resultados posibles.
B.6 Habilidad para leer e interpretar un problema	A partir de un diagrama de árbol de tres generaciones explica la situación que representa.
C 1. Habilidad para resolver problemas rutinarios	Construye el árbol correspondiente a una permutación de 4 elementos.
C.2 Habilidad para hacer comparaciones	Construye problemas con un mayor número de elementos (generalización iterativa). Distingue problemas derivados del inicial (generalización constructiva).
C.3 Habilidad para analizar datos	Examina árboles asimétricos y árboles invertidos. Responde preguntas sobre éstos.
C.4 Habilidad para reconocer patrones, isomorfismos y simetrías	Caracteriza al árbol que representa a dos eventos equiprobables. Escribe el espacio muestral.
D.1 Habilidad para resolver problemas no rutinarios	Resuelve problemas elementales acerca del número de combinaciones elaborando un árbol.
D.2 Habilidad para descubrir relaciones	Caracteriza al árbol que representa a dos eventos no equiprobables. Escribe el espacio muestral.
D.3 Habilidad para construir pruebas	Resuelve problemas sobre eventos independientes empleando un diagrama de árbol. Deduce la regla del producto.
D.4 Habilidad para criticar pruebas	Resuelve problemas sobre eventos mutuamente excluyentes empleando un diagrama de árbol. Regla de la suma.
D.5 Habilidad para formular y validar generalizaciones	Resuelve problemas utilizando diagramas de árbol en diferentes contextos

Se presentan algunos ejercicios y problemas que he diseñado; estos promueven el uso de estrategias combinatorias con el apoyo del empleo de diagramas de árbol para organizar la información y determinar los resultados, considerando la clasificación NLSMA construida previamente para educación secundaria.
Educación secundaria. Anota en el cuadernillo cada paso que sigas para solucionar el problema. No borres las operaciones que realices mientras resuelves un ejercicio o un problema incluso si crees que son incorrectas o piensas que no te llevarán a la respuesta correcta.

Nivel A: Conocimiento de hechos específicos memorizados. (Computación)

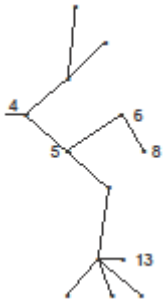
A 1. Conocimiento de hechos específicos

1. Entre los siguientes dibujos, ¿cuáles son diagramas de árbol?



A 2. Conocimiento de terminología

2. En el siguiente diagrama de árbol están señalados con números los términos raíz, nudo, rama, camino y nudo terminal. ¿Qué opción interpreta el diagrama de árbol?



A) Raíz 4, Nudo 5, Rama 6-8, Nudo terminal 13

B) Raíz 13, Nudo 6, Rama 4-5, Nudo terminal 4

C) Raíz 4, Nudo 5, Rama 5-8, Nudo terminal 8

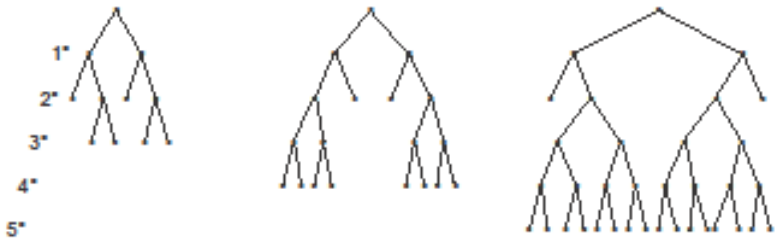
D) Raíz 13, Nudo 8, Rama 4-5, Nudo terminal 4

A 3. Habilidad para llevar a cabo algoritmos

3. En el siguiente diagrama de árbol escribe los siguientes términos en el lugar que les corresponde:

Raíz, nudo intermedio, nudo terminal, ramas de primera generación (primer nivel), ramas de segunda generación (segundo nivel). ¿Cuántos resultados posibles hay?

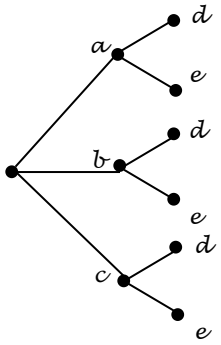
3. Cada uno de los siguientes diagramas de árbol tienen dos nudos en el primer nivel. Para cada árbol, enumera todos los nudos que se encuentran en cada uno de los siguientes niveles, ¿cuántos son en total?



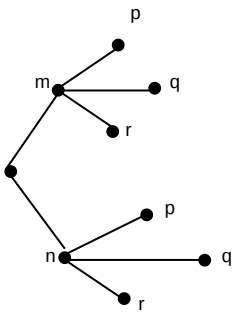
Nivel B: Conocimiento y utilización de conceptos memorizados (comprensión)

B 1. Conocimiento de conceptos

4. A partir del diagrama de árbol que sigue, escribe los resultados en que aparece b: ¿Cuáles son todos los resultados posibles?



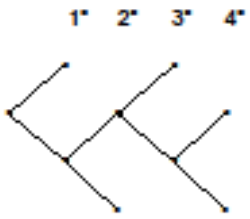
4. Usa el diagrama de árbol para contestar las siguientes preguntas: ¿Cuáles son todos los posibles resultados? ¿Qué representa el par m-r? ¿Existe el par n-m?



B 2. Conocimiento de principios, reglas y generalizaciones

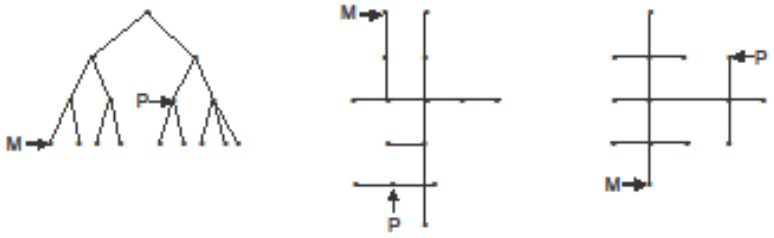
5. Una ficha redonda es azul por una cara y verde por la otra. Representa gráficamente los posibles resultados al lanzar la ficha dos veces. ¿Cuántos resultados fueron?, ¿cuántas veces salió azul?

5. El siguiente diagrama de árbol está incompleto, para que represente todos los resultados posibles de un experimento escribe las ramas correspondientes a la quinta y sexta fases. Si hasta la cuarta fase hay 5 resultados, ¿cuántos resultados hay en la sexta? Suponiendo que el experimento continuara, ¿en qué fase habrá 17 resultados?

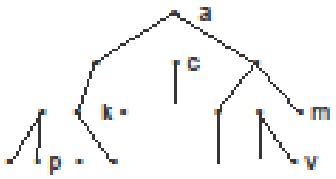


B 3. Conocimiento de la estructura matemática

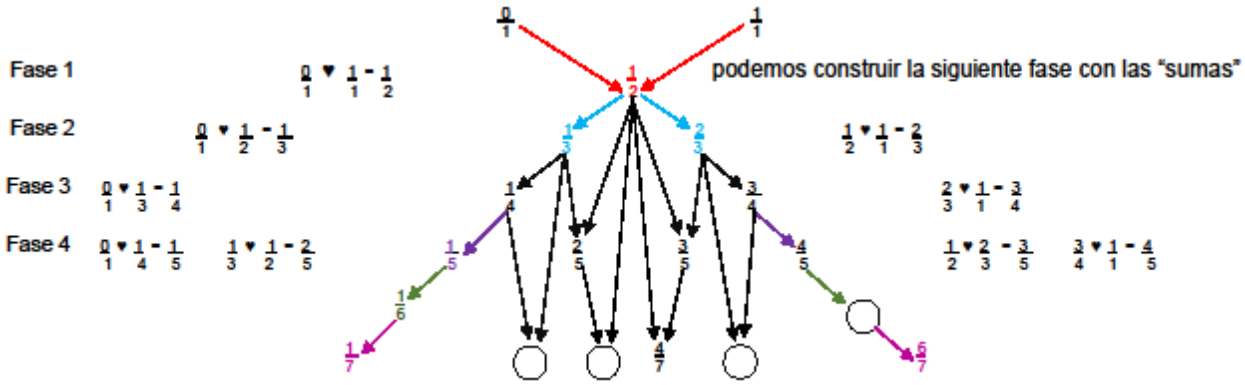
6. En cada uno de los siguientes diagramas de árbol encuentra cuántos caminos hay de M a P. Recuerda que un camino no puede pasar más de una vez por un mismo punto.



6. Completa el siguiente diagrama de árbol. ¿Cuántos resultados posibles hay?



6. El siguiente árbol se construye partiendo de las fracciones $\frac{0}{0}$ y $\frac{1}{1}$ que son otra forma de escribir a los números 0 y 1. A partir de ellas y utilizando una “suma especial” se construyen las diferentes fases. Observa:



¿Cuáles son los números que faltan? ¿Cuáles son las fracciones que al sumarse dan por resultado $\frac{3}{8}$? ¿qué fracciones debo sumar para obtener $\frac{2}{9}$?

Escribe todas las fracciones que se han formado desde la fase 1 hasta la fase 4.

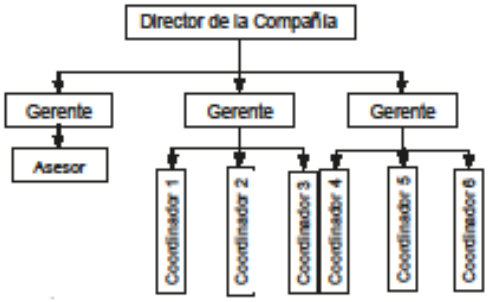
B 4. Habilidad para transformar elementos de un problema de una forma a otra

7. ¿De cuántas formas distintas puedes colocar las letras A, B, C? ¿Cuál es el diagrama de árbol correspondiente?

A	B	C

Tomando como base tu diagrama, ¿de cuántas formas distintas puedes colocar las letras A, B, C, si B y C no deben estar juntas?

7. Explica el siguiente diagrama de árbol



B 5. Habilidad para seguir un razonamiento

8. En un diagrama de árbol existe una relación entre sus nudos y sus ramas. Encuentra ésta relación contando los nudos y las ramas en cada uno de los siguientes árboles.

Número de nudos____ Número de nudos____ Número de nudos____

Número de ramas____ Número de ramas____ Número de ramas____

8. En la papelería puedo comprar por $20 un cuaderno o un bolígrafo por $30 o un paquete de gomas por $14 o por $70 un juego de geometría o unas tijeras por $50 o un lápiz adhesivo por $26. Si quiero gastar exactamente $120, ¿de cuántas maneras puedo hacerlo sin comprar cosas repetidas?

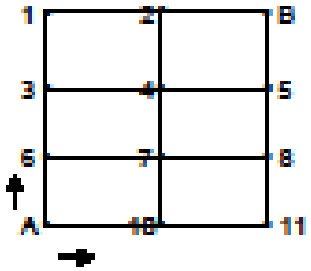
a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

B 6. Habilidad para leer e interpretar un enunciado

9. En una caja hay tres fichas: una azul, una blanca y una amarilla. Saca una ficha, observa su color y devuélvela a la caja. Repite este procedimiento. Haz un diagrama de árbol y escribe todos los resultados posibles. Te comento que al conjunto de todos los resultados se le llama Espacio Muestral.

¿Cuál es el Espacio Muestral de este experimento si la primera ficha no se regresa antes de hacer la segunda extracción? Sugerencia: haz un diagrama de árbol.

9. Una persona camina del punto A al punto B. Si solo puede caminar hacia arriba o hacia la derecha, ¿cuántas rutas distintas puede tomar? Sugerencia: dibuja un diagrama de árbol.



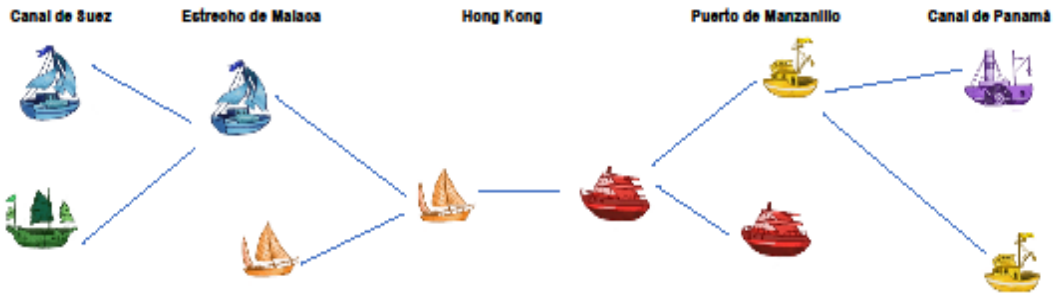
9. Lo que ves a continuación es la representación gráfica de las siguientes rutas marítimas:

El buque azul sale del puerto de Barcelona con 40 contenedores y el buque verde sale del puerto de Génova con 35 contenedores, ambos barcos llegan al Canal de Suez donde el buque azul deja el 75% de sus contenedores y recibe $\frac{1}{7}$ de los del buque verde y continúa su viaje hacia el estrecho de Malaca.

Durante su viaje el buque azul se encuentra con el buque naranja que había salido del puerto de Bombay con 28 contenedores. En el estrecho de Malaca, el buque naranja recibe $\frac{4}{5}$ de la carga del barco azul y continúa su viaje hasta llegar a Hong Kong.

Del puerto de Santos zarpa el buque morado con 60 contenedores y del puerto de Buenos Aires el buque amarillo con 22 ambos con destino el Canal de Panamá en donde el buque amarillo recoge el 55% de los contenedores del buque morado.

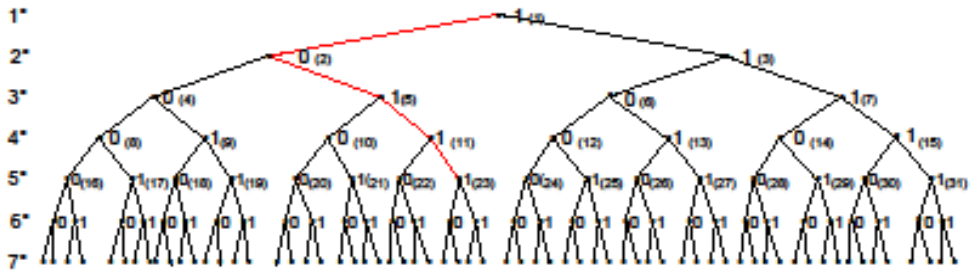
El buque amarillo continúa su viaje hacia el puerto de Manzanillo donde se encuentra con el buque rojo que venía del puerto de San Antonio con 6 contenedores. El buque rojo recibe $\frac{7}{11}$ de los contenedores del buque amarillo y toma la ruta que lo llevará a terminar su viaje en Hong Kong. ¿Qué buque llegó con más contenedores, el naranja o el rojo?



Nivel C: Las aplicaciones

C 1. Habilidad para resolver problemas rutinarios

10. En el siguiente diagrama de árbol se encuentran representados los primeros 31 números del sistema decimal (están escritos entre paréntesis) y sus transformaciones al sistema binario (están escritos empleando 0 y 1). Para encontrar la representación en sistema binario de un número en sistema decimal sigue el camino desde la raíz hasta el número que deseas representar, por ejemplo, el número 23 se forma siguiendo el camino 10111.



¿Cuál es el número en sistema binario con el que finaliza el séptimo nivel? ¿En qué nivel se encuentra el número 97 y en cuál rama?

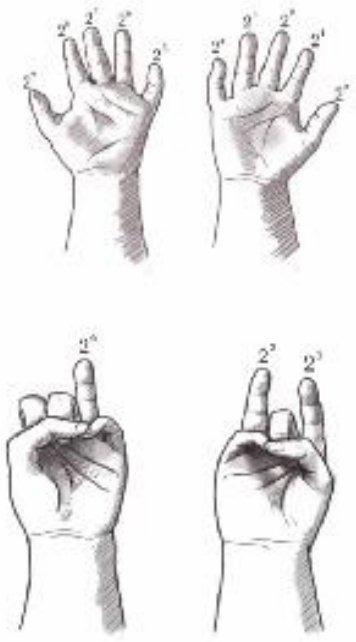
10. Tomando como base el árbol anterior, transforma el número 125 en sistema decimal en un número binario. ¿Cuál es el número en sistema binario que corresponde al número 5 796 en sistema decimal?

10. Toma como base el siguiente dibujo para transformar un número en sistema binario a sistema decimal. El procedimiento es el siguiente:

Asigna cada uno de tus dedos a una potencia de 2 empezando por el dedo pulgar de tu mano derecha, observa el dibujo. Para representar un número en sistema decimal relaciona la primera cifra a la derecha con tu dedo pulgar, si el número es 0 inclina tu dedo y no contará en el cálculo; si la cifra es 1 entonces contribuirá al cálculo con el valor de la potencia. Finalmente suma los resultados de todas las potencias.

Enseguida tienes un ejemplo. Escribir 1001010 como número decimal. La primera cifra del número en sistema binario es 0, inclina tu dedo, no contará en el cálculo. La segunda cifra es 1 por lo que considerarás el valor de la potencia en este caso 2^1. La tercera cifra es 0, inclina tu dedo. La cuarta cifra es 1, incluyes 2^3. Las cifras quinta y sexta son 0, inclina tus dedos. La séptima cifra es 1, incluye 2^6.

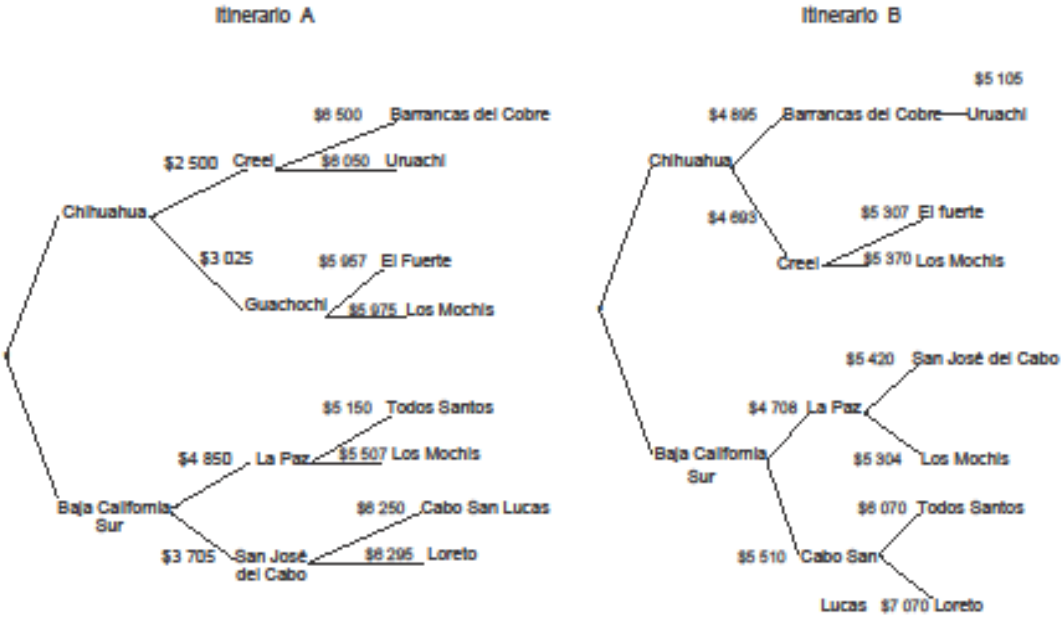
Para concluir suma: $2^1 + 2^3 + 2^6 = 2 + 8 + 64 = 74$



Transforma el número 10001111 a número decimal. ¿Cuál es el número más grande que se puede obtener al usar ocho dedos en el cálculo?

C 2. Habilidad para hacer comparaciones

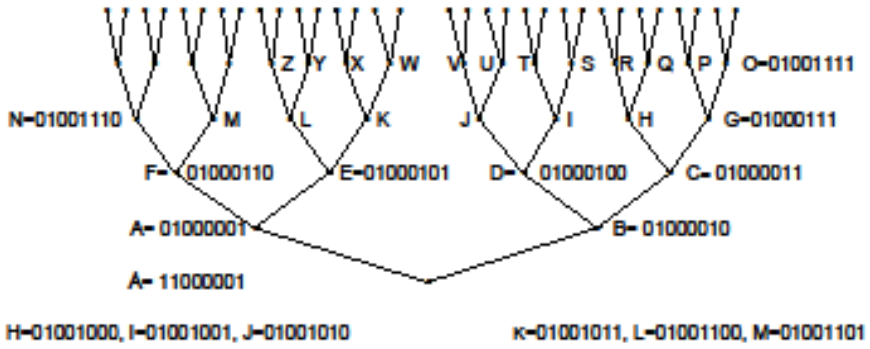
11. Una operadora de viajes vende dos destinos turísticos nacionales: Chihuahua y Baja California Sur. Para dar a conocer sus itinerarios presenta a sus clientes los siguientes diagramas de árbol:



A partir de los árboles anteriores, ¿es más económico viajar a Chihuahua siguiendo el itinerario A o viajar a Baja California Sur siguiendo el itinerario B?

C 3. Habilidad para interpretar y analizar datos

12. Un código binario para un conjunto de símbolos asigna una cadena diferente de bits para cada uno de los símbolos. Consideremos un código binario para las 26 letras en el alfabeto. El código correspondiente para algunas de estas letras es:



A continuación está representada la palabra ÁBACO en sistema binario:

11000001 01000010 01000001 01000011 01001111

¿Cuál es la representación de la palabra ABEJA en código binario?

C 4. Habilidad para reconocer patrones, isomorfismos y simetrías

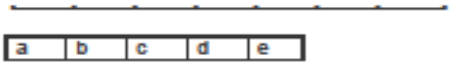
13. En una eliminación de un torneo de tenis con 8 jugadores, hay 4 partidos en la primera ronda. Todos los ganadores de la ronda 1 juegan la ronda 2, en una eliminación de 4 jugadores. Los ganadores de la ronda 2 juegan la ronda 3 (final), en una eliminación de 2 jugadores. Y así sucesivamente, encuentra el árbol para el número de rondas si hay 16 jugadores. ¿Qué ocurre si se convoca a 12 jugadores?

13. ¿Cuántos equipos diferentes de basquetbol pueden formarse si hay 7 jugadores disponibles para jugar cualquier posición? Un equipo de basquetbol tiene cinco jugadores.

Nivel D:

D 1. Habilidad para resolver problemas no rutinarios

14. A continuación tienes un árbol, cinco nudos están señalados con las letras a, b, c, d, e, respectivamente. ¿De cuántas maneras diferentes puedes colocar las cinco letras si forman un solo bloque, en un árbol de 8 nudos?



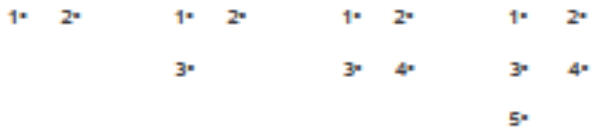
¿De cuántas maneras diferentes puedes colocar las cinco letras si están separadas, en un árbol de 8 nudos?

D 2. Habilidad para descubrir relaciones

15. La población de Ixtapan de la Sal, en el Estado de México, es de aproximadamente de 35 000 personas. Si el nombre de cada habitante tiene tres iniciales, ¿es cierto que debe haber al menos dos personas con las mismas iniciales?, ¿por qué?

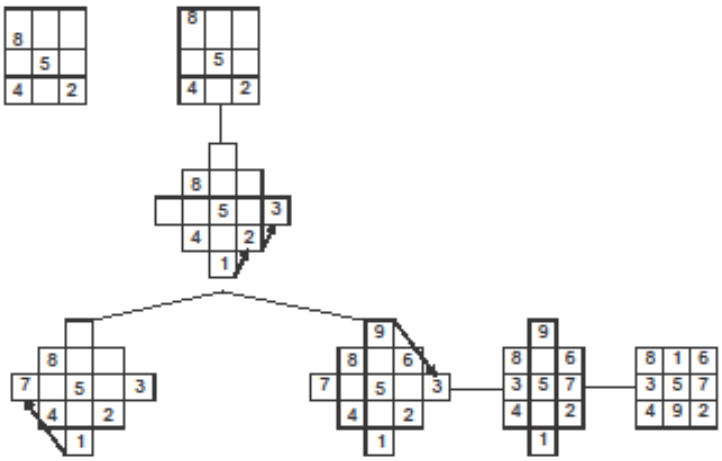
15. Tengo 18 monedas. Me han informado que una tiene menor peso que las demás, por lo tanto es falsa, para identificarla puedo usar una balanza de dos platillos. ¿Cuántas veces tendré que pesar las monedas para hallar la falsa?

15. Dibuja un árbol en un arreglo de dos, tres, cuatro y cinco puntos. ¿Cuántos árboles diferentes son posibles?



D 3. Habilidad para construir pruebas

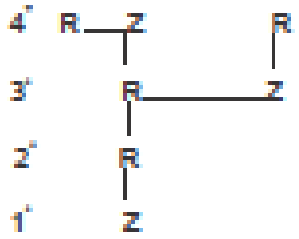
16. A continuación se muestra un cuadrado mágico; los números de cada fila, cada columna y cada diagonal suman lo mismo. ¿Cuáles son los números que faltan? Para responder a esta pregunta puedes aplicar el “método de la escalera” para construir cuadrados latinos de orden impar. Observa



¿Cómo es la suma respecto al número central? Investiga el “método de la escalera” para completar el siguiente cuadrado mágico, ¿cómo es la suma con respecto al número central?

		9
	10	
11		13

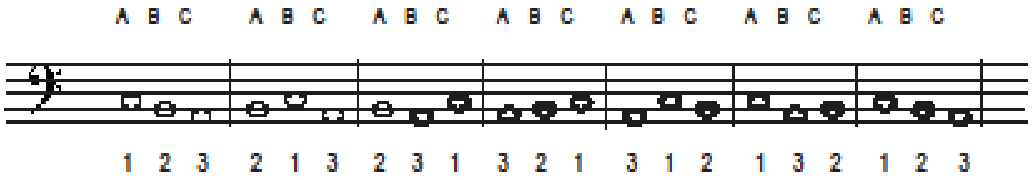
16. Una abeja macho (un zángano) es producido por el huevo no fertilizado de una reina; una reina es producida por un huevo fertilizado. El diagrama siguiente muestra el árbol genealógico que se remonta a los bisabuelos del zángano. Se puede continuar al revés para mostrar las generalizaciones anteriores.



¿Cuál es la expresión que permite obtener el número de abejas en el árbol genealógico de un zángano? Prueba que el número 9 divide a un término de alguna de las etapas.

D 4. Habilidad para criticar pruebas

17. Una persona que toca tres campanas en una iglesia utiliza varias notaciones para registrar las secuencias de cambios. Una es mostrar el orden en que suenan las campanas, es decir, el número 1 representa a la primera campana, el número 2 representa a la segunda campana, el número 3 a la tercera campana. La secuencia incompleta que emplea de un pentagrama es la siguiente:



a) ¿Cuál es el diagrama de árbol que corresponde a esta secuencia?

b) Sin tener que hacer una lista, muestra que si se usan cuatro campanas existen 24 secuencias de cambios.

D 5. Habilidad para formular y validar generalizaciones

18. El grado de un nudo g de un árbol es el número de ramas que salen de él. ¿Existe un árbol de siete nudos donde

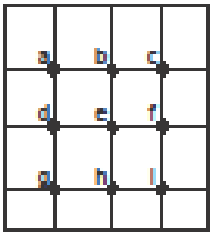
a) cada nudo tiene 1 grado?

b) dos nudos tienen grado 1 y cinco nudos tiene grado 2?

c) cinco nudos tienen grado 1 y dos nudos tienen grado 2?

d) los nudos tienen grados 2, 2, 2, 3, 1, 1, 1?

18. En un papel cuadriculado de 4 x 4 cuadrados se marcan puntos en la intersección de las líneas de la cuadrícula como se muestra. Se quiere cambiar el orden de los puntos moviendo a cada punto a un lugar adyacente (uno adelante, uno atrás, uno a la derecha o uno a la izquierda), sin tocar l borde del papel. ¿Es posible que el punto **a** llegue a ocupar el lugar del punto **h**? Si es posible explica cómo hacerlo, si no es posible da la razón por la que no se puede hacer.



Este conjunto de ejercicios y problemas fue resuelto por tres alumnos quienes no habían recibido instrucción sobre operaciones combinatorias, en dos sesiones de una hora, en el periodo comprendido entre junio y julio de 2023. Los estudiantes que participaron en esta investigación cursaban el primer grado de educación secundaria en diferentes escuelas en la Ciudad de México. Los resultados de esta actividad pueden verse en la Tabla IV.2.10.

Tabla IV.2.10

Clasificación NLSMA	Resultados de los ejercicios y problemas propuestos								
	Alumno 1			Alumno 2			Alumno 3		
A.1.Conocimiento de hechos específicos.	x			✓			✓		
A.2.Conocimiento de terminología.	✓			✓			✓		
A.3.Habilidad para llevar a cabo algoritmos	x	x		x	x		✓	x	
B.1.Conocimiento de conceptos	x	x		✓	✓		✓	✓	
B.2.Conocimiento de principios, reglas y generalizaciones	✓	x		✓	x		✓	✓	
B.3.Conocimiento de la estructura matemática	x	x		x	x		✓	✓	
B.4.Habilidad para transformar elementos de un problema de una forma a otra	x	x		✓	x*		✓	✓	
B.5.Habilidad para seguir un razonamiento	✓	x		x	x		x	✓	
B.6.Habilidad para leer e interpretar un problema	x	x		x	x		✓	✓	
C.1.Habilidad para resolver problemas rutinarios	x*	x		✓	x*		✓	✓	
C.2.Habilidad para hacer comparaciones	x			✓			✓		
C.3.Habilidad para analizar datos	✓			✓			✓		
C.4.Habilidad para reconocer patrones, isomorfismos y simetrías	x	x		x	✓		✓	x	
D.1.Habilidad para resolver problemas no rutinarios	x			x*			x		
D.2.Habilidad para descubrir relaciones	x	x	x	✓	x	x	✓	x	x
D.3.Habilidad para construir pruebas	✓	x		✓	x*		✓	✓	
D.4.Habilidad para criticar pruebas	x*			x			x		
D.5.Habilidad para formular y validad generalizaciones	x	x		x*	x		x	x	

IV.3. Los diagramas de árbol en las evaluaciones del aprendizaje a gran escala. Pruebas PISA, TIMSS, EXCALE, ENLACE y PLANEA

El objetivo que tienen las evaluaciones de aprendizaje de gran escala es informar a quienes toman las decisiones en materia educativa (autoridades educativas federales, autoridades educativas locales y especialistas en la materia) sobre los niveles de logro que alcanzan los estudiantes. Esta información debe utilizarse para observar los cambios en las tendencias de aprendizaje futuras, resultado de las políticas y programas implementados. Dependiendo de la magnitud y del sentido de estos cambios se tienen evidencias para continuarlas o modificarlas.

Evaluaciones Internacionales

PISA 2018

Desde el año 2000, México participa trienalmente en la prueba *Programme for International Student Assessment* (PISA)[90]. Este estudio comparativo internacional, coordinado por la Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico (OCDE), proporciona información a los sistemas educativos de los países y economías participantes sobre en qué medida los estudiantes de 15 años[91], que están por concluir o han concluido la educación básica, han adquirido los conocimientos y las habilidades fundamentales para participar activa y plenamente en la sociedad actual. La idea central de la OCDE es que los resultados obtenidos por cada país sean analizados tanto en el ámbito internacional como en el nacional, a fin de que la información ayude a identificar áreas de oportunidad, y con ello se diseñen políticas y programas educativos orientados a mejorar la oferta educativa, así como la calidad y la equidad de los resultados de aprendizaje.

[90] México participa en PISA en la asignatura de matemáticas desde 2003. En 2000, inició su participación en la prueba de Lectura.

[91] PISA se enfoca a la población de estudiantes que en el momento de la aplicación se encuentran en el rango de edad de 15 años 3 meses a los 16 años 2 meses y que están inscritos en una institución educativa a partir del séptimo grado (en México, primero de secundaria), y excluye a los estudiantes que se encuentran por debajo de ese grado.

PISA se centra en saber hasta qué punto dominan un plan de estudios o currículo escolar; indaga sobre lo que denomina **competencia**[92] (*literacy*), que se refiere a la capacidad de los estudiantes para aplicar los conocimientos y habilidades en temas clave, y analizar, razonar y comunicar con eficacia a medida que identifican, interpretan y resuelven problemas en una amplia variedad de situaciones. La prueba acentúa el dominio de los procesos, el entendimiento de los conceptos y la habilidad para funcionar en diversos contextos[93].

Esta prueba evalúa tres dominios disciplinarios de manera permanente (lectura, matemáticas y ciencias[94]) y en cada ciclo de aplicación la prueba hace hincapié en uno de ellos. En 2015, cambió el marco conceptual del dominio de ciencias, con la evaluación de un nuevo dominio llamado Solución de Problemas en Colaboración. Se trata de un área secundaria opcional de evaluación que se aplicó en computadora como las áreas obligatorias de ciencias, matemáticas y lectura.

En PISA 2018, se puso énfasis en la comprensión lectora[95], lo que significa que los estudiantes respondieron a un mayor número de reactivos en este dominio y que los cuestionarios de contexto [96] se centraron en recabar información sobre las oportunidades de los estudiantes para aprender las habilidades y conocimientos que contiene la prueba de lectura. La prueba digital de PISA 2018 abarcó un total de 485 preguntas de las cuatro áreas de evaluación, los instrumentos de medición están diseñados conforme un esquema matricial que asegura la mayor cobertura de contenidos, sin que los estudiantes respondan la totalidad de la prueba.

Para ese ciclo, el número de reactivos de matemáticas por computadora fue 82, que representa el 17% del total de preguntas. Hubo 66 versiones diferentes de la

[92] Las negritas son mías.
[93] Uno de los aspectos esenciales del marco teórico que sustenta PISA es medir el desarrollo de competencias útiles para el buen desempeño de los ciudadanos en diferentes ámbitos, y esta concepción sobre competencias se basa en el trabajo de Morgan Niss.
[94] En 2015, la aplicación se realizó por computadora por vez primera, con la ayuda de una USB que contenía el sistema aplicativo con la prueba y los cuestionarios.
[95] En PISA 2021 la prueba de matemáticas será el área principal.
[96] Los cuestionarios de contexto recogen información acerca de factores asociados a los resultados, como las características de cada aula, de cada grupo de alumnos y del docente que lo atiende, del directivo, o de las particularidades de cada hogar y de cada familia.

prueba que incluían el grupo de preguntas de matemáticas (solo reactivos ancla). En PISA el aprendizaje de las matemáticas se define como:

> la capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos. Incluye el razonamiento matemático y el uso de conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos. Ayuda al individuo a reconocer el papel que las matemáticas tienen en el mundo, y a emitir juicios y tomar decisiones bien fundadas que los ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos necesitan (OECD, 2019).

Los procesos que esta prueba se propone investigar en los estudiantes son: formular situaciones matemáticas; emplear conceptos, hechos, procedimientos y razonamiento matemático, e interpretar, aplicar y evaluar resultados matemáticos. Los contenidos de la prueba son Cantidad, Forma y espacio, Cambio y relaciones, e **Incertidumbre y datos**. Los resultados que reporta PISA se presentan en una escala global (para cada una de las tres áreas) y por subescalas (solo para el área principal de estudio en cada ciclo).

Tanto para la escala global como para las subescalas existen niveles de desempeño diferenciados por un rango de puntaje. Los niveles, por estar asociados a reactivos de dificultad creciente, permiten catalogar el desempeño de los estudiantes al describir lo que son capaces de hacer. En las escalas, se establecen seis niveles; cada uno se define por un rango de puntuaciones; a los anteriores se añade un nivel más, que puede llegar a denominarse Debajo del nivel Ib, en el que se sitúan las puntuaciones que quedan por debajo del umbral inferior del nivel I. La siguiente tabla presenta los niveles de desempeño de las escalas de PISA.

Tabla IV.3.1

Nivel 6 Nivel 5	Los estudiantes que se sitúan en estos niveles tienen capacidad de realizar actividades de alta complejidad cognitiva, con potencial para ocupar posiciones de liderazgo en el ámbito científico u otros.
Nivel 4 Nivel 3	Los estudiantes en estos niveles se encuentran por arriba del mínimo y, por ello, muestran niveles buenos, aunque no del nivel óptimo para la realización de las actividades cognitivas más complejas.

Nivel 2	Ubicarse en este nivel representa el mínimo para que un estudiante se desempeñe adecuadamente en la sociedad contemporánea y pueda aspirar a hacer estudios superiores.
Nivel Ia	Los estudiantes en estos niveles tienen algunas competencias, pero no alcanzan el mínimo necesario para acceder a estudios superiores o desempeñarse adecuadamente en la sociedad del conocimiento.
Nivel Ib	

Los puntajes de los niveles de desempeño se expresan en una escala continua basada en un puntaje promedio para los países miembros de la OCDE de 500 puntos y una desviación estándar de 100 puntos. Los reactivos en la evaluación de matemáticas PISA 2018 se asignaron a uno de los tres procesos matemáticos:

a) Formular situaciones matemáticamente. Específicamente este proceso incluye actividades como representar una situación matemáticamente, usando variables apropiadas, símbolos, diagramas y modelos.

b) Emplear conceptos matemáticos, hechos, procedimientos y razonamiento. Este proceso incluye actividades como **hacer diagramas matemáticos, gráficas y construcciones, y extraer información matemática de ellos**.

c) Interpretar, aplicar y evaluar resultados matemáticos. Este proceso indica qué tan efectivamente los estudiantes pueden reflexionar sobre soluciones o conclusiones matemáticas, interpretarlas en el contexto de un problema del mundo real, y determinar si los resultados o conclusiones son razonables.

La competencia matemática comprende tres categorías: el contenido, los procesos y la situación o contexto. *El contenido* es el tipo de tema abordado en los problemas y tareas. Se clasifica en cuatro tipos: Espacio y forma, Cambio y relaciones, Cantidad, **Incertidumbre y datos**.

Los procesos se refieren a que los estudiantes deben demostrar su dominio en tres géneros de procesos: formular situaciones en el ámbito matemático; emplear conceptos, datos, procedimientos y razonamiento matemático; e interpretar, aplicar y evaluar resultados matemáticos. *La situación o contexto* alude al área de la vida real, en la cual se ubica un problema matemático. Las cuatro clases de situación son personal, social, profesional y científica.

La siguiente tabla presenta las descripciones de la clase de tareas que los estudiantes deben ser capaces de realizar para ubicarse en cada uno de los seis

niveles de desempeño de la escala global de matemáticas. La tabla IV.3.2 está organizada de tal forma que el nivel 6 es el más complejo, y el nivel 1, el más sencillo. Se incluye una columna con los porcentajes obtenidos por los promedios de la OCDE, América Latina (AL) y México en los seis niveles de desempeño.

Tabla IV.3.2.

Nivel / Puntaje	Porcentaje	Tareas
6 669.30 o más	OCDE: 2.4 AL: 0.04 México: 0.0	▪ Los estudiantes en este nivel pueden conceptualizar, generalizar y usar información basada en investigaciones, modelar situaciones de problemas complejos, y aplicar sus conocimientos en contextos relativamente no habituales. **▪ Son capaces de relacionar diferentes fuentes de información y representaciones, y manejarlas de una manera flexible.** ▪ Poseen una avanzada capacidad de pensamiento y razonamiento matemáticos. ▪ Pueden aplicar su conocimiento y comprensión, además de dominar operaciones y relaciones matemáticas simbólicas y formales para desarrollar nuevos enfoques y estrategias, y abordar situaciones novedosas. ▪ Son hábiles para formular y comunicar con claridad sus acciones y reflexiones relativas a sus hallazgos y argumentos y pueden explicar por qué son aplicables a una situación nueva.
5 De 606.99 a menos de 669.30	OCDE:8.5 AL:0.6 México: 0.5	▪ Los estudiantes pueden desarrollar modelos y trabajar en situaciones complejas, identificando restricciones y especificando los supuestos. ▪ Tiene habilidad para seleccionar, comparar y evaluar estrategias adecuadas de solución de problemas para abordar problemas complejos. **▪ Son capaces de trabajar de manera estratégica al usar ampliamente habilidades de pensamiento y razonamiento bien desarrolladas además de relacionar apropiadamente representaciones, caracterizaciones simbólicas y formales con la comprensión clara de las situaciones.** ▪ Empiezan a reflexionar sobre su trabajo y pueden formular y comunicar sus interpretaciones y razonamientos.
4 De 544.68 a menos de 606.99	OCDE: 18.5 AL: 3.6 México: 3.7	▪ Los estudiantes trabajan con eficacia modelos explícitos en situaciones complejas y concretas que pueden involucrar restricciones o demandar la formulación de supuestos. **▪ Pueden seleccionar e integrar diferentes representaciones, incluyendo las simbólicas, relacionadas directamente con situaciones del mundo real.**

		▪ Usan una limitada gama de habilidades y pueden razonar con una idea en contextos sencillos. ▪ Pueden elaborar y comunicar explicaciones y argumentos basados en sus interpretaciones, evidencias y acciones.
3 De 482.38 a menos de 544.68	OCDE: 24.4 AL: 11.3 México: 13.1	▪ Los estudiantes son capaces de realizar procedimientos descritos con claridad, incluyendo aquellos que requieren decisiones secuenciales. Sus interpretaciones son suficientemente sólidas para construir un modelo simple o para seleccionar y aplicar estrategias sencillas de solución de problemas. ▪ **Pueden interpretar y usar representaciones basadas en diferentes fuentes de información, y razonar directamente a partir de ellas.** ▪ Muestran cierta habilidad para el manejo de porcentajes, fracciones, números decimales y proporciones. ▪ La soluciones a las que llegan reflejan un nivel básico de interpretación y razonamiento.
2 De 420.07 a menos de 482.38	OCDE: 22.2 AL:23.0 México: 26.4	▪ Los estudiantes pueden interpretar y reconocer situaciones en contextos que solo requieren una inferencia directa. ▪ **Pueden extraer información relevante de una sola fuente de información y usar un modelo sencillo de representación.** ▪ Usar algoritmos, fórmulas, procedimientos o convenciones elementales para resolver problemas que involucren números enteros. ▪ Son capaces de lograr interpretaciones literales de los resultados.
1 De 357.77 a menos de 420.07	OCDE: 14.8 AL:28.0 México: 30.3	▪ Pueden responder preguntas relacionadas con contextos familiares, en las que está presente toda la información relevante y están claramente definidas. ▪ **Son capaces de identificar la información y llevar a cabo procedimientos rutinarios siguiendo instrucciones directas en situaciones explícitas**. ▪ Pueden realizar acciones obvias que se deducen inmediatamente de los estímulos presentados.

Los estudiantes cuyo desempeño se sitúa por debajo del nivel I son capaces de realizar tareas matemáticas muy sencillas, como leer un solo valor en una gráfica o tabla en que se identifica claramente el nombre de las variables, de modo que los criterios de selección son claros, y la relación entre la tabla y aspectos del contexto descrito son evidentes. Además, pueden hacer operaciones aritméticas con números enteros siguiendo instrucciones claras y bien definidas. El dato de la OCDE es de 9.1% de todos los participantes, y para México, 26%.

Un elemento de PISA 2018 es el nivel de **demanda cognitiva** que implica responder un ítem. Aunque se trata de aspectos relacionados, no debe confundirse la demanda cognitiva con la dificultad. En la tabla IV.3.3 se expone la distribución deseada de reactivos de matemáticas por categorías de proceso.

Tabla IV.3.3.

Categoría de Proceso	Porcentaje de ítems
Formular situaciones matemáticamente	25
Emplear conceptos matemáticos, hechos, procedimientos y razonamientos	50
Interpretar, aplicar y evaluar resultados matemáticos	25

El marco de referencia de PISA 2018 emplea siete capacidades matemáticas fundamentales entre ellas Comunicación; Representación; Diseño de estrategias para resolver problemas; el Uso del lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas. Estas aparecen en la tabla IV.3.4.

Tabla IV.3.4.

Relación entre los procesos y las capacidades matemáticas fundamentales

Capacidad matemática	Formular situaciones matemáticamente.	Emplear conceptos matemáticos, hechos, procedimientos y razonamiento.	Interpretar, aplicar y evaluar resultados matemáticos.
Comunicación	Leer, decodificar y dar sentido a declaraciones, preguntas, tareas, objetos o imágenes, para formar un modelo mental de la situación.	Articule una solución, mostrar el trabajo relacionado en alcanzar una solución y/o resumir y presentar resultados matemáticos.	Construir y comunicar explicaciones y argumentos en el contexto del problema.
Representación	Crear una representación matemática de información del mundo real.	De sentido a, relacionarse y usar una variedad de representaciones al interactuar con un problema.	**Interpretar resultados matemáticos en una variedad de formatos en relación con una situación o uso; comparar o evaluar dos o más representaciones en relación con una situación.**
	Seleccionar o diseñar un plan o estrategia	Active mecanismos de control efectivos y sostenidos a través	**Diseñar e implementar una estrategia para**

Diseño de estrategias para resolver problemas	para replantear matemáticamente problemas contextualizados.	de un procedimiento de varios pasos que conduzca a una solución matemática, conclusión o generalización.	**interpretar, evaluar y validar una solución matemática a un problema contextualizado.**
Uso de lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas	Utilizar variables, símbolos, diagramas y modelos estándar apropiados para representar un problema del mundo real empleando un lenguaje simbólico/formal.	Comprende y utiliza construcciones formales basadas en definiciones, reglas y sistemas formales, así como el empleo de algoritmos.	**Comprender las relaciones entre el contexto del problema y la representación de la solución matemática. Usar esta comprensión para ayudar a interpretar la solución en contexto y medir la viabilidad y posibles limitaciones de la solución.**

Distribución deseada de reactivos por categoría de contenido

Cuatro son las categorías que caracterizan el rango del contenido matemático que es central a la disciplina e ilustra las áreas de contenido utilizado en los reactivos para PISA 2018: Cambio y relaciones, Forma y espacio, Cantidad e **Incertidumbre y datos**. A los reactivos seleccionados se les asignó 25% para cada categoría. Entre los temas contenidos se encuentran los siguientes: **Principios de conteo (combinaciones simples y permutaciones), Azar y probabilidad (concepto de eventos aleatorios, variación aleatoria y su representación, azar y frecuencia de eventos, y aspectos básicos del concepto de probabilidad).**

La región conformada por Beijing, Shangai, Jiangsu y Guangdong (B-S-J-G-China) obtuvo la media más alta (591) de todos los países participantes con 109 puntos por arriba del promedio OCDE. Para este ciclo, la media de desempeño de la OCDE fue de 489 (promedio de las puntuaciones de los países miembros de la OCDE), y para México es de 409 puntos.

Tabla IV.3.5. Tendencia de ejecución en la prueba de matemáticas de México

Media de ejecución	PISA 2003	PISA 2006	PISA 2009
Matemáticas	385	406	419
	PISA 2012	PISA 2015	PISA 2018
	413	408	409
	PISA 2022		
	395		

País	Nivel en PISA 2003		Nivel en PISA 2006		Nivel en PISA 2009	
	Nivel 2 menor que 420.07 puntos	Nivel 5 o arriba de 606.99 puntos	Nivel 2 menor que 420.07 puntos	Nivel 5 o arriba de 606.99 puntos	Nivel 2 menor que 420.07 puntos	Nivel 5 o arriba de 606.99 puntos
	65.9[97]	0.4	56.5	0.8	50.8	0.7
	21.7[98]	14.4	21.4	13.1	20.8	13.2
México	Nivel en PISA 2012		Nivel en PISA 2015		Nivel en PISA 2018	
	Nivel 2 menor que 420.07 puntos	Nivel 5 o arriba de 606.99 puntos	Nivel 2 menor que 420.07 puntos	Nivel 5 o arriba de 606.99 puntos	Nivel 2 menor que 420.07 puntos	Nivel 5 o arriba de 606.99 puntos
	54.7	0.6	56.6	0.3	56.2	0.5
	22.3	12.8	22.9	10.8	22.2	11.4
	Nivel en PISA 2022					
	Nivel 2 menor que 420.07 puntos	Nivel 5 o arriba de 606.99 puntos				
	66	0.4				
	31	9				

Como resultado de las mejoras entre los estudiantes de bajo rendimiento en matemáticas y ciencia, la brecha en el rendimiento entre los estudiantes con el más alto y el más bajo rendimiento en estas dos asignaturas se redujo con el tiempo. A continuación, se expone un reactivo propuesto en PISA 2022.

Ruletas Preguntas 1/3 Nivel 3

Lee “Ruletas” a la derecha. Pulsa en una opción y después escribe una explicación para responder a la pregunta.

Pedro cree que la probabilidad de que la flecha se detenga en el color azul es más alta en la ruleta A que en la ruleta B.

¿Tiene razón Pedro? ○ Si ○ No

Justifica tu respuesta

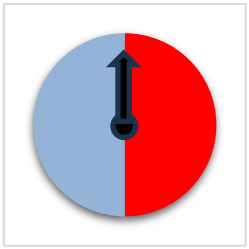
[97] En Matemáticas, México tuvo 65.9% de sus alumnos en el Nivel 2, y 0.4% en el Nivel 5 en 2003.
[98] La OCDE tuvo en promedio 21.7% para el nivel 2 y 14.4% para el nivel 5 en el año 2003.

RULETAS

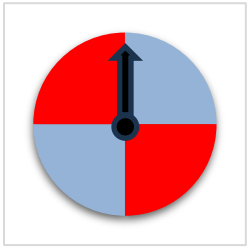
La clase de Pedro va a realizar un experimento con las dos ruletas que se muestran abajo.

La ruleta A está dividida en dos secciones del mismo tamaño: una de color azul y la otra de color rojo. La ruleta B está dividida en cuatro secciones del mismo tamaño: dos de color azul y las otras dos de color rojo.

Los estudiantes han recibido la siguiente instrucción: si la flecha se detiene sobre la línea entre dos secciones, la vuelta no contará y deberá girarse la flecha de nuevo.



Ruleta A

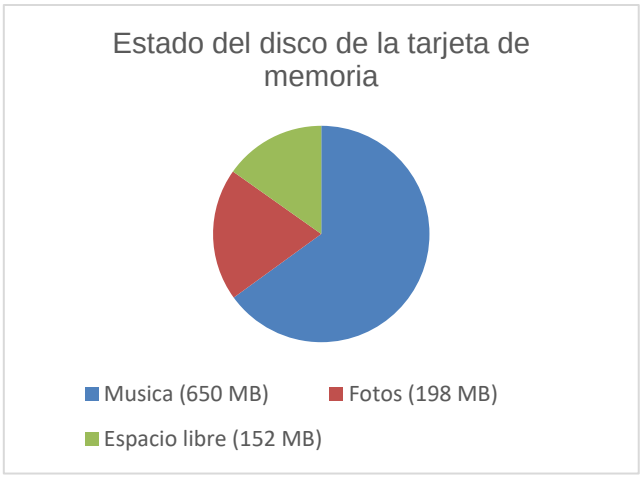


Ruleta B

Enseguida se exhibe un reactivo de la prueba de PISA de 2012 de contenido combinatorio:

Tarjeta de memoria

Una tarjeta de memoria es un dispositivo de almacenamiento de computadora pequeño y portátil. Iván tiene una tarjeta de memoria que almacena música y fotos. La tarjeta de memoria tiene una capacidad de 1GB (1000 MB). La siguiente gráfica muestra el estado actual del disco de su dispositivo de memoria



Pregunta 1: La tarjeta de memoria

Iván quiere transferir un álbum de fotos de 350 MB a su tarjeta de memoria, pero no hay suficiente espacio libre en la tarjeta de memoria. Si bien no desea eliminar ninguna foto existente, se complace en eliminar hasta dos álbumes de música.

La tarjeta de memoria de Iván tiene almacenados los siguientes álbumes de música de tamaño

Álbum	Álbum 1	Álbum 2	Álbum 3	Álbum 4	Álbum 5	Álbum 6	Álbum 7	Álbum 8
Tamaño	100 MB	75 MB	80 MB	55 MB	60 MB	80 MB	75 MB	125MB

Al eliminar como máximo dos álbumes de música, ¿es posible que Iván tenga suficiente espacio en su tarjeta de memoria para agregar el álbum de fotos? Encierra en un círculo Sí o No y muestra los cálculos para respaldar tu respuesta.

Respuesta: Sí / No

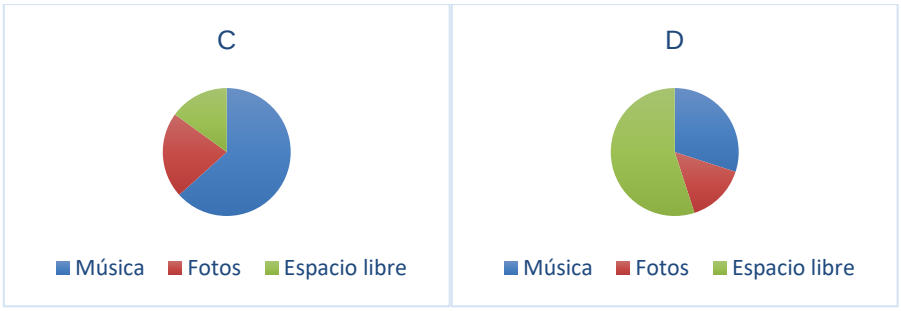
Pregunta 2: La tarjeta de memoria

Durante las siguientes semanas, Iván elimina algunas fotos y música, pero también agrega nuevos archivos de fotos y música. El nuevo estado del disco se muestra en la tabla a continuación

Música	550 MB
Fotos	338 MB
Espacio libre	112 MB

Su hermano le da una nueva tarjeta de memoria con una capacidad de 2GB (2000 MB) que está totalmente vacía. Iván transfiere el contenido de su antigua tarjeta de memoria a la nueva.

¿Cuál de las siguientes gráficas representa el estado del disco de la nueva tarjeta de memoria? Encierra A, B, C o D

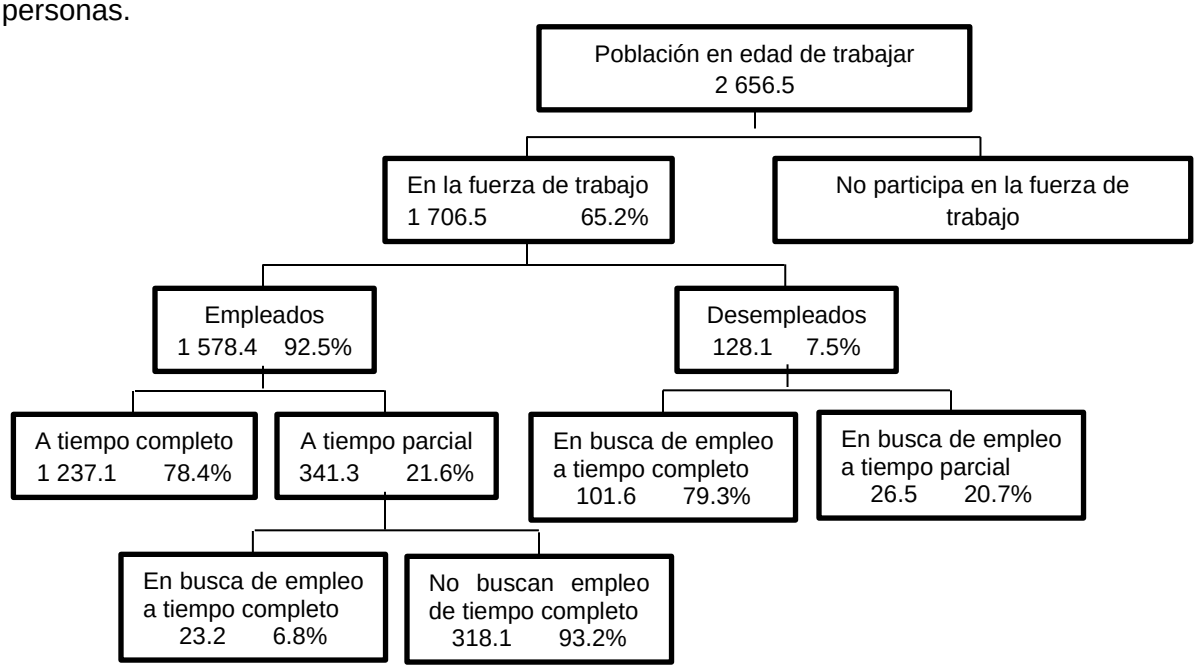


PISA 2003 incluyó la siguiente pregunta:

Considera dos cajas A y B. La caja A contiene tres canicas, de las cuales una es blanca y dos son negras. La caja B contiene 7 canicas, de las cuales dos son blancas y cinco son negras. Tienes que extraer una canica de una de las cajas con los ojos cerrados. ¿De qué caja debes extraer si quieres una canica blanca?

El Informe PISA 2003 comentó que solo 27% de los estudiantes de escuelas alemanas obtuvieron la respuesta correcta. En PISA 2001 se empleó el siguiente reactivo:

El diagrama que ve abajo muestra la estructura de trabajo de la fuerza productiva de un país o la población en edad de trabajar. La población total, en 1995 era de 3.4 millones de personas.



¿Cuántas personas en edad de trabajar no se encontraban en la fuerza de trabajo? (Escribe el No. De personas no el porcentaje).

¿Cuáles son los dos principales grupos en que se divide la población en edad de trabajar?

a) Empleados y desempleados
b) En edad de trabajar y no en edad de trabajar
c) Empleados a tiempo completo y a tiempo parcial
d) En la fuerza de trabajo y fuerza de la fuerza de trabajo

El diagrama jerárquico se eligió para presentar la información sobre la estructura de la fuerza de trabajo, probablemente porque es particularmente útil para:
a) Los cambios en el tiempo b) El tamaño de la población total
c) Categorías dentro de un grupo d) El tamaño de cada grupo

Además de PISA, existe un estudio dirigido por la Asociación Internacional para la Evaluación del Rendimiento Educativo (IEA), llamado Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS). TIMSS 2019 fue el séptimo estudio que realiza la IEA sobre matemáticas y ciencias, con un mismo marco teórico. En él intervinieron 64 países. El primer estudio TIMSS se realizó en 1995; sin embargo, México participó por primera y única vez en 1995. Desde 1999, el estudio se lleva a cabo en ciclos de cuatro años (2003, 2007, 2011, 2015 y 2019). La población evaluada se formó por muestras representativas de alumnos de 4° y 8° grados de cada país participante. No obstante, cada país puede hacer el estudio en ambos o en un solo grado.

México participó en las pruebas “Logro en matemáticas en la escuela primaria”, “Logro en ciencia en la escuela primaria”, “Logro en matemáticas en la educación media” y “Logro en ciencia en la secundaria”. Una cualidad de TIMSS consiste en que su marco teórico tiene en cuenta componentes comunes del currículo de los países participantes. El estudio compara el currículo oficial del país (currículo pretendido) con lo realmente impartido en cada centro escolar (currículo aplicado) y con los resultados obtenidos por los alumnos (currículo alcanzado). Por otra parte, los currículos de los países también se consideran al seleccionar los dominios de contenidos de TIMSS.

El marco teórico en matemáticas recoge como dominios de contenido por evaluar los números, las formas y mediciones geométricas, y la **representación de datos**. Examiné las ediciones correspondientes a los ciclos 1995, 1999, 2007, 2011, 2015 y 2019 en particular los reactivos de matemáticas de octavo grado vinculados con la representación de datos y azar. A continuación, se presentan ejemplos de estos reactivos:

TIMSS 1995

I9. En un paquete de cartas $\frac{1}{6}$ son verdes, $\frac{1}{12}$ son amarillas, $\frac{1}{2}$ son blancas y $\frac{1}{4}$ son azules. Si alguien saca una carta del paquete sin mirar, ¿de qué color es más probable que sea?

A. Blanco B. Azul C. Verde D. Amarillo

Asignatura	Clave	Categoría de Contenido	Expectativa de Desempeño	Porcentaje Promedio Internacional de Estudiantes de 8° Grado que Responden Correctamente		Índice Internacional de Dificultad
				Grado Superior	Grado Inferior	
Matemáticas	A	Representación de Datos, Análisis y Probabilidad	Uso de Procedimientos Complejos	67%	60%	490

K7. Un cajón contiene 28 bolígrafos; algunos blancos, algunos azules, algunos rojos y algunos grises. Si la probabilidad de seleccionar un bolígrafo azul es $\frac{2}{7}$ ¿cuántos bolígrafos azules hay en el cajón?

A. 4 B. 6 C. 8 D. 10 E. 20

Asignatura	Clave	Categoría de Contenido	Expectativa de Desempeño	Porcentaje Promedio Internacional de Estudiantes de 8° Grado que Responden Correctamente		Índice Internacional de Dificultad
				Grado Superior	Grado Inferior	
Matemáticas	C	Representación de Datos, Análisis y Probabilidad	Solución de Problemas	53%	48%	550

M3. Solo hay una canica roja en cada una de estas bolsas

10 canicas

100 canicas

1000 canicas

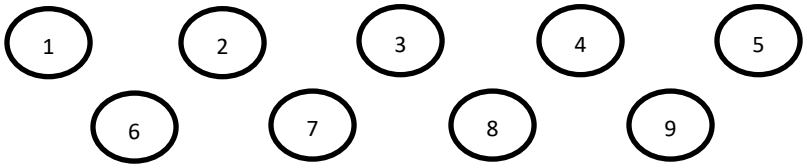
Sin mirar en las bolsas, debes sacar una canica de una de las bolsas. ¿Qué bolsa te daría la mayor probabilidad de sacar la canica roja?

A. La bolsa con 10 canicas B. La bolsa con 100 canicas

C. La bolsa con 1000 canicas D. Todas las bolsas darían la misma probabilidad

Asignatura	Clave	Categoría de Contenido	Expectativa de Desempeño	Porcentaje Promedio Internacional de Estudiantes de 8° Grado que Responden Correctamente		Índice Internacional de Dificultad
				Grado Superior	Grado Inferior	
Matemáticas	A	Representación de Datos, Análisis y Probabilidad	Solución de Problemas	76%	73%	433

N18. Las nueve fichas que se muestran se colocan en un frasco y se mezclan



Madeleine saca una ficha del frasco. ¿Cuál es la probabilidad de que Madeleine extraiga una ficha con un número par?

A. $\frac{1}{9}$ B. $\frac{2}{9}$ C. $\frac{4}{9}$ D. $\frac{1}{2}$

Asignatura	Clave	Categoría de Contenido	Expectativa de Contenido	Porcentaje Promedio Internacional	Índice Internacional de Dificultad

				de Estudiantes de 8° Grado que Responden Correctamente		
				Grado Superior	Grado Inferior	
Matemáticas	C	Representación de Datos, Análisis y Probabilidad	Solución de Problemas	56%	48%	541

O5. Cada una de las seis caras de un determinado cubo está pintada de rojo o de azul. Cuando se lanza el cubo, la probabilidad de que el cubo caiga con una cara roja hacia arriba es 2/3. ¿Cuántas caras son rojas?

A. Una B. Dos C. Tres D. Cuatro E. Cinco

Asignatura	Clave	Categoría de Contenido	Expectativa de Desempeño	Porcentaje Promedio Internacional de Estudiantes de 8° Grado que responden correctamente		Índice Internacional de Dificultad
				Grado Superior	Grado Inferior	
Matemáticas	D	Representación de Datos, Análisis y Probabilidad	Solución de Problemas	47%	41%	587

TIMSS 1999

F08. Si se lanza una moneda, la probabilidad de que caiga cara arriba es 1/2.

En cuatro lanzamientos sucesivos, una moneda cae cara arriba cada vez.

¿Qué es probable que suceda cuando la moneda se lance por quinta vez?

A. Es más probable que caiga cruz que cara.

B. Es más probable que caiga cara que cruz.

C. Es igualmente probable que caiga cara o cruz.

D. Se necesita más información para responder la pregunta.

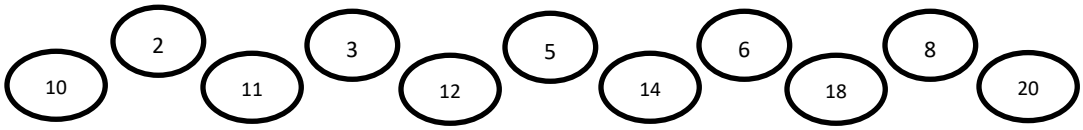
Categoría de Contenido	Expectativa de Desempeño	Clave	Puntajes	Porcentaje Promedio Internacional de Estudiantes de 8° Grado que Responden Correctamente.	Utilizado en 1995
Representación de Datos, Análisis y Probabilidad.	Conocimiento	C	1	57	Y

H11. De un lote de 3000 focos, 100 fueron seleccionados al azar y probados. Si 5 de los focos de la muestra fueran defectuosos, ¿aproximadamente cuántos focos defectuosos se esperaría en todo el lote?

A. 15 B. 60 C. 150 D. 300 E. 600

Categoría de Contenido	Expectativa de Desempeño	Clave	Puntajes	Porcentaje Promedio Internacional de Estudiantes de 8° Grado que Responden Correctamente.	Utilizado en 1995
Representación de Datos, Análisis y Probabilidad.	Investigando y Resolviendo Problemas	C	1	62	Y

N18. Las once fichas que se muestran a continuación se colocan en una bolsa y se mezclan



Chelsea saca una ficha de la bolsa sin mirar. ¿Cuál es la probabilidad de que Chelsea extraiga una ficha con un número que sea múltiplo de tres?

A. $\frac{1}{11}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{4}{11}$ D. $\frac{4}{7}$

Categoría de Contenido	Expectativa de Desempeño	Clave	Puntajes	Porcentaje Promedio Internacional de Estudiantes de 8° Grado que Responden Correctamente.	Utilizado en 1995
Representación de Datos, Análisis y Probabilidad.	Investigando y Resolviendo Problemas	C	1	48	N

Este ítem fue propuesto en las pruebas 1995 y 1999. El porcentaje promedio de estudiantes que respondió correctamente fue el mismo.

TIMSS 2007

M022257. Un tazón contiene 36 cuentas de colores del mismo tamaño: algunas azules, algunas verdes, algunas rojas, y el resto amarillas. Se saca una cuenta del tazón sin mirar. La probabilidad de que sea azul es $\frac{4}{9}$

¿Cuántas cuentas azules hay en el tazón?

A 4 B 8 C 16 D 18 E 20

Reactivo M022257	Asignatura M	Grado 8	Bloque M01	Bloque 07
Dominio de Contenido	Dominio Cognitivo	Puntos Máximos	Clave	
Datos y Azar	Aplicación	1	C	

M022101. La caja más pequeña contiene 20 boletos numerados del 1 al 20. La caja más grande contiene 100 boletos numerados del 1 al 100.

20 boletos

100 boletos

Sin mirar en su interior, puedes elegir un boleto de cualquier caja. ¿Qué caja te daría la mayor probabilidad de elegir un boleto con el número 17?

A La caja con 20 boletos

B La caja con 100 boletos

C Ambas cajas darían la misma probabilidad

D Es imposible decir

Reactivo M022101	Asignatura M	Grado 8	Bloque M03	Bloque 02
Dominio de Contenido	Dominio Cognitivo	Puntos Máximos	Clave	
Datos y Azar	Conocimiento	1	A	

M042222. Sofía tiene una bolsa en la que hay 16 canicas: 8 canicas son rojas y 8 son negras. Ella extrae 2 canicas de la bolsa y no las regresa. Ambas canicas son negras. Luego extrae una tercera canica de la bolsa. ¿Qué puedes decir acerca de la probabilidad del color de la tercera canica?

A Es más probable que sea roja que negra.

B Es más probable que sea negra que roja.

C Es igualmente probable que sea roja o negra.

D No puedes decir que es más probable roja o negra.

Reactivo M042222	Asignatura M	Grado 8	Bloque M04	Bloque 13

Dominio de Contenido	Dominio Cognitivo	Puntos Máximos	Clave
Datos y Azar	Conocimiento	1	A

TIMSS 2011

ID: M042179 Matemáticas Grado 8 Bloque_Sec: M02_13

Hay 10 botones rojos, 8 azules, y 4 blancos en una bolsa. ¿Cuál es la posibilidad de sacar un botón azul o un botón blanco?

A $\frac{4}{22}$ B $\frac{8}{22}$ C $\frac{10}{22}$ D $\frac{12}{22}$

Contenido	Área temática	Dominio Cognitivo	Puntos Máximos	Clave
Datos y Azar	Azar	Aplicación	1	D

ID: M052429 Matemáticas Grado 8 Bloque_Sec: M02_13

Hay 10 canicas en una bolsa: 5 rojas, y 5 azules.

Sue saca una canica de la bolsa al azar. La canica es roja. Ella vuelve a poner la canica en la bolsa. ¿Cuál es la probabilidad de que la próxima canica que saque al azar sea roja?

A $\frac{1}{2}$ B $\frac{4}{10}$ C $\frac{1}{5}$ D $\frac{1}{10}$

Dominio de Contenido	Área Temática	Dominio Cognitivo	Puntos Máximos	Clave
Datos y Azar	Azar	Razonamiento	1	A

ID: M032132 Matemáticas Grado 8 Bloque_Sec:M05_14

Una máquina tiene 100 caramelos y dispensa un caramelo cuando se gira una palanca. La máquina tiene el mismo número de caramelos azules, rosas, amarillos y verdes todos están mezclados. Megan giró la palanca y obtuvo un caramelo rosa. A continuación, Peter giró la palanca.

¿Cuál es la probabilidad de que Peter obtenga un caramelo rosa?

A Es seguro que su caramelo será rosa.

B Es más probable de lo que fue para Megan.

C Es igualmente probable como lo fue para Megan.

D Es menos probable de lo que fue para Megan.

Dominio de Contenido	Área Temática	Dominio Cognitivo	Puntos Máximos	Clave
Datos y Azar	Azar	Conocimiento	1	D

ID: M042260 Matemáticas Grado 8 Bloque_Sec: M06_11

Pat y Chris fueron candidatos para presidente de la escuela.

Aquí están los resultados electorales: Pat 80% Chris 20%

¿Cuál es la probabilidad de preguntarle a un estudiante al azar si ha votado por Pat?

A Es cierto que el estudiante votó por Pat.

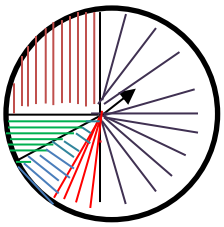
B Es probable que el estudiante votó por Pat.

C Es poco probable que el estudiante votó por Pat.

D Es cierto que el estudiante no votó por Pat.

Dominio de Contenido	Área Temática	Dominio Cognitivo	Puntos Máximos	Clave
Datos y Azar	Azar	Conocimiento	1	B

ID: M032507 Matemáticas Grado 8 Bloque_Sec: M07_11



La ruleta es para el nuevo juego de Steve, de 600 giros, aproximadamente ¿cuántas veces debería esperar que la flecha caiga en el sector rojo?

A 30 B 40 C 50 D 60

Dominio de Contenido	Área Temática	Dominio Cognitivo	Puntos Máximos	Clave
Datos y Azar	Azar	Aplicación	1	C

TIMSS 2019

ID: MP52161 Matemáticas Grado 8 Bloque_ Sec: ME01_12

Una bolsa contiene 24 canicas, unas blancas y otras negras. Se elige una canica al azar, se anota su color, y se vuelve a colocar en la bolsa. Esto se hace 120 veces, y aparece una canica blanca 70 veces. ¿Cuántas canicas blancas es probable que haya en la bolsa?

A 7 B 10 C 12 D 14

Dominio de contenido	Área temática	Dominio cognitivo	Porcentaje Promedio Internacional de Estudiantes de 8° Grado que responden correctamente		Índice de dificultad
			Grado Superior	Grado Inferior	
Datos y Probabilidad	Probabilidad	Aplicación	70%	22%	550

LLECE

Existe un estudio dirigido por el Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad de la Educativa (LLECE) y coordinado por la Oficina Regional para América Latina y el Caribe (OREALC) de la Organización de las Naciones Unidas para la

Educación la Ciencia y la Cultura (UNESCO). El LLECE fue creado como una red de unidades de evaluación de la calidad de los sistemas educativos de América Latina y el Caribe el 10 de noviembre de 1994 en la Ciudad de México. Los estudios del LLECE evalúan las características que tienen en común los currículos de alumnos de primaria de los países participantes.

En 1997, el Laboratorio aplicó el Primer Estudio Regional Comparativo y Explicativo (PERCE) sobre los aprendizajes de estudiantes de 3° y 4° grados (9 y 10 años respectivamente) de educación primaria, en las asignaturas de lectura y matemáticas. A fines de 2002, los países que forman el LLECE decidieron desarrollar el Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo (SERCE), implementándolo en 2006. Como se puede observar, la periodicidad no es uniforme. En 2010, se toma la decisión, en conjunto con los países participantes de realizar el Tercer Estudio Regional Comparativo y Explicativo (TERCE), que en 2013 fue aplicado.

Durante 2019, se llevó a cabo la aplicación de la cuarta versión del Estudio Regional Comparativo y Explicativo (ERCE). El estudio se aplicó a estudiantes de 3° y 6° grados de educación primaria en las áreas de lenguaje (lectura y escritura), matemáticas y ciencias (solo en 6° grado). El estudio también examinó los factores relacionados con el aprendizaje aplicando un conjunto de cuestionarios de contexto dirigidos a estudiantes, padres, profesores y directores. El estudio incluyó por primera vez un módulo para investigar sobre las habilidades socioemocionales de los estudiantes de primaria. Se obtendrían los resultados a fines de 2020.

Evaluaciones Nacionales

Las pruebas de Estándares Nacionales fueron desarrolladas y utilizadas por la Dirección General de Evaluación (DGE) de la SEP desde 1998 hasta 2003, cuando fueron sustituidos por la de EXCALE. Los Estándares Nacionales se concentraron en la evaluación de la comprensión lectora y de matemáticas.

EXCALE

El Examen de la Calidad y el Logro Educativos (EXCALE) fue desarrollado por el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE). Se trata de una prueba

alineada al currículo nacional en el nivel y el grado correspondiente. EXCALE se aplicó a los siguientes grados: tercero de preescolar, EXCALE-00; tercero de primaria, EXCALE-03; sexto de primaria, EXCALE-06, y tercero de secundaria, EXCALE-09. El propósito fue conocer lo que los estudiantes aprendían del currículo nacional a lo largo de su educación básica (mostraba una imagen de conjunto); su objetivo fue aportar la posibilidad de conocer los resultados educativos del sistema por modalidad, entidad, sexo, edad. La tabla IV.3.6 muestra los años en que se realizó cada prueba.

Tabla IV.3.6.

Plan de Evaluación del Aprendizaje 2004-2016

Grados	Años escolares												
	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
3° Preescolar				M				M				M	
3° Primaria			M				M				M		
6° Primaria		M				M				M			
3° Secundaria		M			M				M				M

M = Aplicación de EXCALE de Matemáticas. Se incluyeron reactivos que corresponden a contenidos curriculares de primero y segundo grado.

Las evaluaciones de EXCALE se aplicaron desde 2005 hasta 2014. Se establecieron cuatro niveles de logro nombrados: “Por debajo del básico”, “Básico”, “Medio” y “Avanzado”. En la tabla IV.3.7 se presenta la descripción de los cuatro niveles de logro educativo:

Tabla IV.3.7. Niveles de logro: Combinatoria

Avanzado	Medio	Básico	Por debajo del básico
Los estudiantes infieren información a partir de datos presentados en una tabla o en una gráfica. Resuelven problemas de probabilidad aplicando la regla de la suma o del producto. Los alumnos dominan también lo que se	Los estudiantes interpretan información contenida en tablas o gráficas de distintos tipos. **Resuelven problemas de conteo** y determinan la probabilidad de eventos mutuamente excluyentes. Los alumnos también	Los estudiantes **resuelven problemas de conteo** y determinan la probabilidad de eventos simples. Los alumnos dominan también lo que se enuncia en el nivel Por debajo del básico.	Los estudiantes estiman y comparan la probabilidad de eventos simples.

enuncia en los niveles medio, básico y por debajo del básico.	dominan lo que se enuncia en los niveles básico y por debajo del básico.		

Los ámbitos que evaluaron los EXCALE fueron lenguaje (Español) y matemáticas. En el caso de matemáticas de tercer grado de primaria, se evaluaron cuatro ejes temáticos: Los números, sus relaciones y sus operaciones; Medición; Geometría, y Tratamiento de la información. Los EXCALE de sexto grado de primaria, además de estos cuatro ejes curriculares, evaluaron dos más: Procesos de cambio, y **Predicción y Azar**. Los de tercer grado de secundaria evaluaron cinco áreas curriculares: Aritmética; Geometría; Álgebra; Presentación y Tratamiento de la información, y **Probabilidad**. Las especificaciones generales correspondientes al eje temático Predicción y Azar aparecen en las tablas IV.3.8 y IV.3.9.

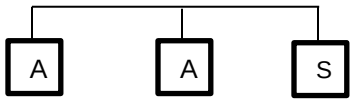
Tabla IV.3.8. EXCALE-06

Examen de la Calidad y el Logro Educativos Matemáticas, sexto de primaria 2009

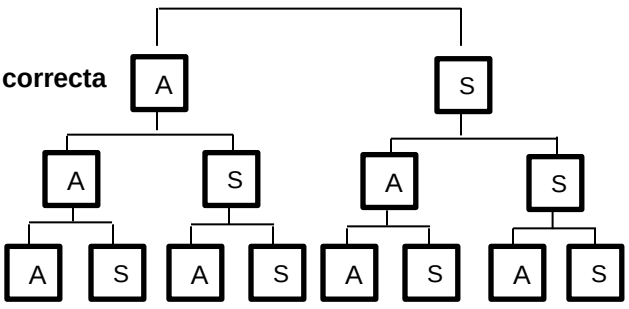
Eje temático	Tema	Línea de evaluación	Especificación general como aparece en la tabla de contenidos
Predicción y Azar	Identificación de la mayor o menor probabilidad de eventos		Identificar el diagrama de árbol que corresponde a un experimento sencillo donde interviene el azar

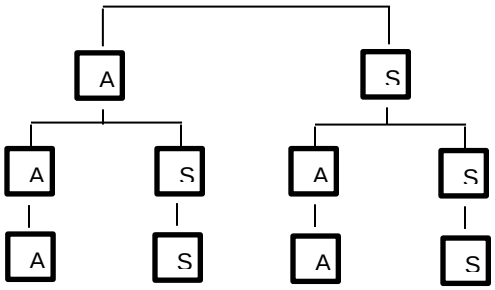
204 ▪ Al lanzar al mismo tiempo al aire tres monedas pueden darse distintas combinaciones:

¿Cuál de los siguientes diagramas de árbol representa todos los resultados posibles de este hecho?



▪ **Opción correcta**





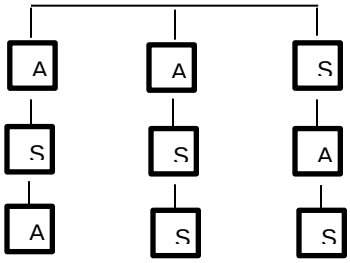
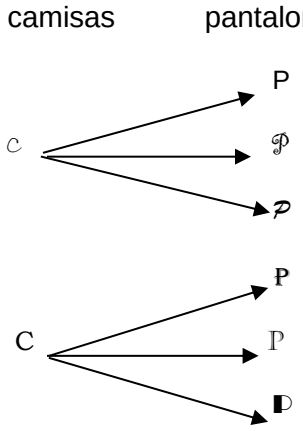


Tabla IV.3.9. EXCALE-06

Examen de la Calidad y el Logro Educativos Matemáticas, sexto de primaria 2009

Asignatura	Grado y nivel educativo	Área	Tema	Contenido	Especificación general como aparece en la tabla de contenidos
Matemáticas	6° Primaria	Predicción y azar	Identificar la mayor o menor probabilidad de eventos	Identificación de la mayor o menor probabilidad de eventos	Análisis e interpretación de la información presentada en diagramas de árbol para hacer predicciones

212 ▪ Abel tiene dos camisas y tres pantalones, con los que puede vestirse de las siguientes maneras:



Para aumentar lo más posible la cantidad de formas distintas de vestirse. ¿Qué prenda le conviene comprar?

A. Una camisa *

B. Un pantalón

C. Da lo mismo comprar camisa que pantalón

D. No se puede determinar

* Respuesta correcta

Tabla IV.3.10.

Porcentaje de aciertos por contenido curricular y estrato escolar en Matemáticas

Reactivo	Contenido Curricular	Dificultad	Porcentaje de aciertos											
			Nacional		Indígena		Comunitario		Rural público		Urbano público		Privado	
			%	(EE)	%	(EE)	%	(EE)	%	(EE)	%	(EE)	%	(EE)
Tablas, diagramas, gráficas o pictogramas, medidas de tendencia central, mayor o menor probabilidad de eventos, cálculo de porcentajes y tablas de variación proporcional.														
204	Identificar el diagrama de árbol que corresponde a un evento de azar	680	31	(1.2)	20	(5.7)	20	(5.2)	25	(2.5)	33	(1.5)	42	(3.6)
212	Analizar la información presentada en un diagrama de árbol	701	26	(1.1)	22	(5.4)	20	(5.3)	20	(2.1)	26	(1.3)	41	(3.0)

EE: desviación estándar

Reactivo	Nivel de logro	800	Dificultad	Contenidos
204	Medio ↑	734	680	Identificar el diagrama de árbol que corresponde a un evento de azar.
212		583	701	Analizar la información presentada en un diagrama de árbol.

Examen de la Calidad y el Logro Educativos Matemáticas, tercero de secundaria 2012

Con respecto a las habilidades y conocimientos de probabilidad, se evaluó el conocimiento con que cuentan los estudiantes para resolver problemas que implican **usar estrategias de conteo**, estimar la probabilidad de eventos simples, expresar y comparar probabilidades, así como utilizar la regla de la suma y del producto. Lo anterior se resume en la tabla IV.3.11.

Tabla IV.3.11. EXCALE-09

Asignatura	Grado y nivel educativo	Área	Tema	Contenido Curricular
Matemáticas	3° Secundaria	Manejo de la información		Identificar el diagrama de árbol de un problema de conteo

Tabla IV.3.12.

Tabla parcial de contenidos de EXCALE-09 de Matemáticas, aplicación 2008

Nivel de logro		Dificultad	Contenido
Avanzado	800	800	Resolver problemas que impliquen sumar dos fracciones con distinto denominador, no múltiplos el uno del otro
	734	734	Reconocer instrucciones para la construcción de un círculo
Medio	733		
	583		
Básico ↑	582		
	500	500	Resolver problemas que involucran usar el concepto y cálculo del m.c.m.
	499		
Por debajo del básico	498		
	200		

Las tablas IV.3.12 y IV.3.13 ejemplifican la escala de evaluación. En la parte superior, aparecen los contenidos con mayor grado de dificultad para los estudiantes, y de manera consecutiva y descendiente se llega a la parte inferior, donde se encuentran los reactivos de menor grado de dificultad. En estas tablas, se señalan también los cuatro niveles de logro educativo y los puntos de corte que los delimitan.

Tabla IV.3.13.

Tabla parcial de contenidos de EXCALE-09 de Matemáticas, aplicación 2012

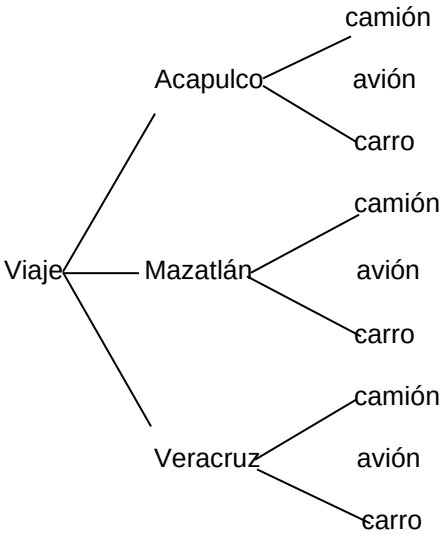
Nivel de logro		Dificultad	Contenido
Avanzado	1008	1008	
	692	692	Sumar dos números con signos distintos
Medio ↑	691		
	560		
Básico	559		
	471		
	470		

Por debajo del básico	330	330	Identificar el diagrama de árbol de un problema de conteo

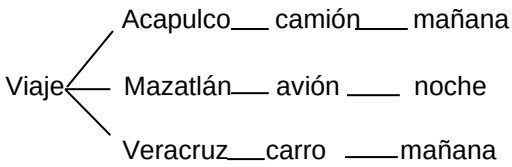
Como puede observarse, el grado de dificultad de los reactivos de la prueba aplicada en 2012 creció con respecto a los reactivos de la aplicada en 2008. Enseguida se muestra un reactivo perteneciente a la prueba 2012 y que también se aplicó repetitivamente en las pruebas ENLACE. En la tabla IV.3.14 se observa su clasificación y resultados.

1 ▪ Una persona realizará un viaje. Tiene la opción de ir a Acapulco, Veracruz o Mazatlán, puede hacerlo en avión, automóvil o camión, por la mañana o por la noche. ¿Cuál es el diagrama de árbol que muestra todas las opciones posibles?

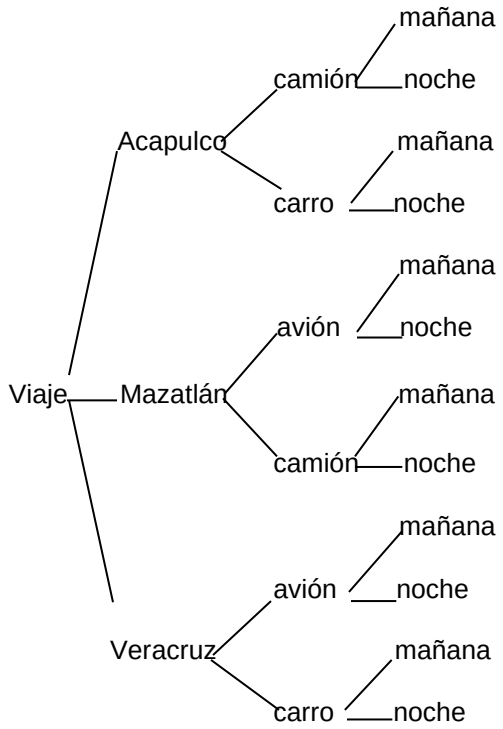
A)



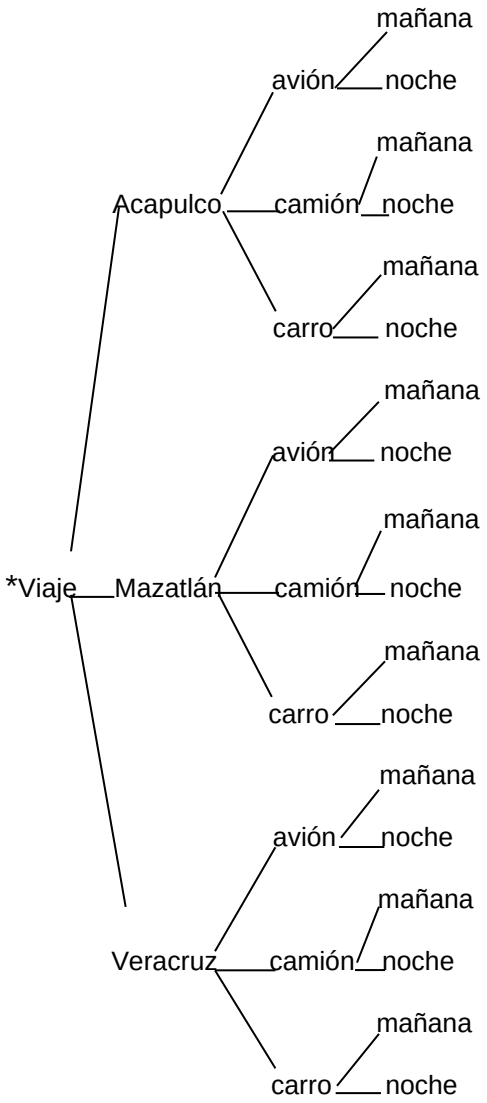
C)



B)



D)



*Respuesta correcta

Tabla IV.3.14.

Porcentaje de aciertos por contenido curricular y estrato escolar en Matemáticas

Reactivo	Contenido curricular	Dificultad	Porcentaje de aciertos									
			Nacional		Telesecundaria		Técnica		General		Privado	
			%	(EE)	%	(EE)	%	(EE)	%	(EE)	%	(EE)
Manejo de la información												
1	Identificar el diagrama de árbol de un problema de conteo	330	85	(0.5)	79	(1.3)	84	(0.7)	86	(0.7)	96	(0.6)

EXCALE tuvo la cualidad de evaluar periódicamente el aprendizaje de los estudiantes de manera válida y confiable; no obstante, sus resultados tuvieron poca visibilidad social e insuficiente presencia en la toma de decisiones de política educativa.

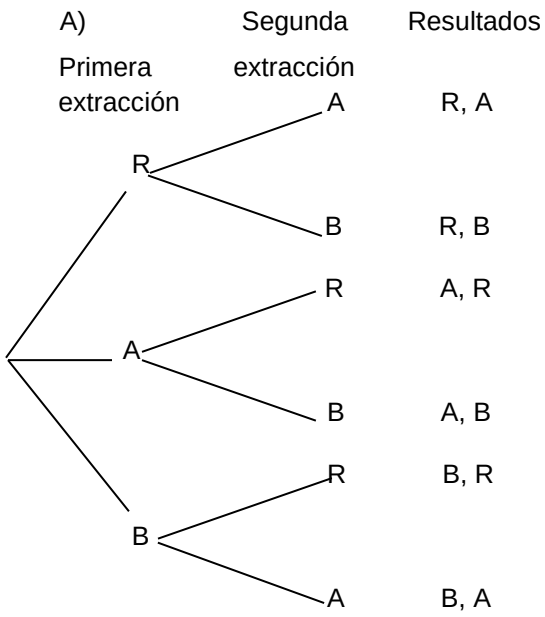
ENLACE

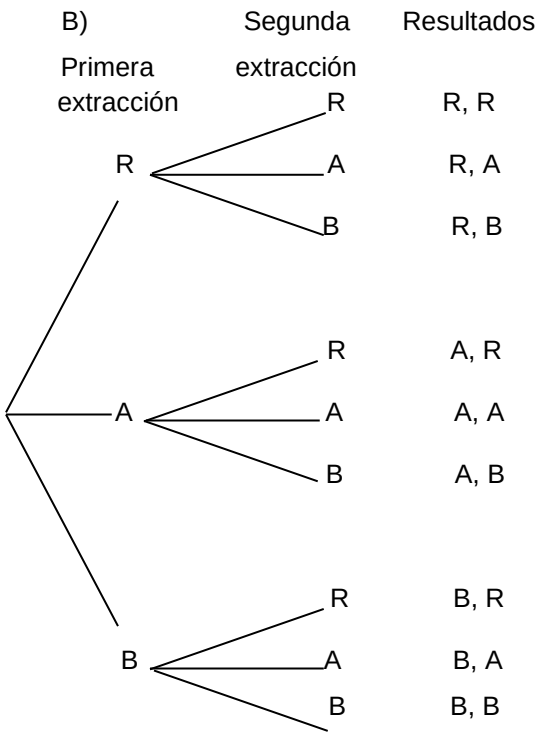
La Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares (ENLACE) fue desarrollada por la SEP, y su aplicación fue censal (todas las escuelas, todos los alumnos de tercer grado de primaria a tercero de secundaria) y anual, de 2006 a 2013. A partir de 2008 y hasta 2014, la prueba se aplicó a todos los alumnos que terminaban la educación media superior. Las pruebas ENLACE tuvieron como propósito original la retroalimentación directa de alumnos, profesores y padres de familia sobre el rendimiento de los estudiantes en español y matemáticas. Dichas pruebas tuvieron una extensión de 46 a 74 reactivos como máximo para la asignatura de Matemáticas.

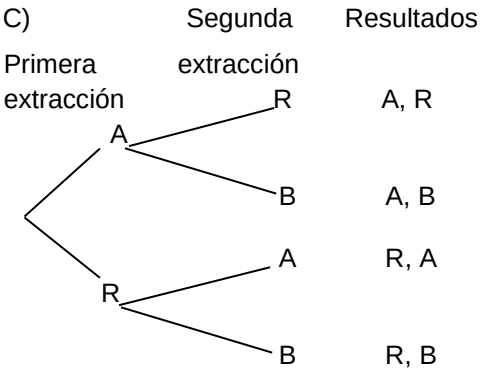
La prueba ENLACE informó sobre los resultados de aprendizaje a nivel alumno y escuela, los cuales fueron usados en alguna medida por las autoridades para describir programas e intervenciones en política educativa. En el Anexo del presente trabajo, se encuentran los reactivos correspondientes a Combinatoria y a los diagramas de árbol en cada una de las pruebas ENLACE en el periodo 2006-2013. A continuación se presentan algunos de estos reactivos.

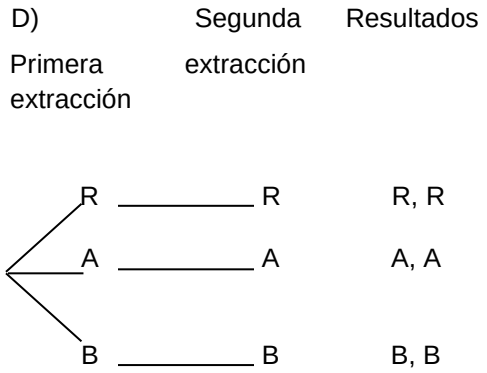
2009 1° **Reactivo 55**

Una caja contiene tres esferas: una roja, una azul y una blanca. Se extraen con reemplazo y son revueltas antes de extraer una segunda esfera y observar su color. (Considera que una vez que se ha elegido una esfera, se observa su color y luego vuelve a introducirse en la caja). ¿Cuál es el diagrama de árbol que representa los posibles resultados de esta situación?









2011 2° Reactivo 60

En una paletería venden 5 sabores de helado (chocolate, vainilla, fresa, coco, café) y 4 tipos de cubiertas para los helados (nuez, coco, amaranto, chocolate). ¿Cuántas combinaciones de helado de un solo sabor con una sola cubierta se pueden hacer, sin que el helado sea del mismo sabor que su cubierta?

A) 36 B) 20 C) 18 D) 9

2013 2° Reactivo 130

En un edificio nuevo hay cinco departamentos y cinco lugares para estacionarse. Los lugares de estacionamiento se identifican con letras de la A a la E. Se han habitado dos departamentos, el de Sofía y Miguel, quienes estacionan cada noche su auto en alguno de los lugares. ¿Cuántas son las formas en las que se pueden estacionar Sofía y Miguel?

Considera que el orden en que se acomodan sí importa.

A) 9 B) 11 C) 20 D) 29

PLANEA

El Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA) aplica instrumentos de evaluación a los alumnos de tercero de preescolar, sexto de primaria, tercero de secundaria y último grado de bachillerato. El Plan se inició a partir del ciclo escolar 2014-2015 con la evaluación de competencias de lenguaje y comunicación, y de matemáticas, en sexto año de primaria, tercero de secundaria y el último grado de educación media superior, según el siguiente esquema de aplicación.

Tabla IV.3.15.

Grados	Ciclos Escolares						
	2014 - 2015	2015-2016	2016-2017	2017-2018	2018-2019	Revisión del esquema	2019-2020
3° de Preescolar				$M_{PLANEA\ SEN}$			$M_{PLANEA\ SEN}$
6° de Primaria	$M_{PLANEA\ SEN}$ $M_{PLANEA\ Escuela}$	$M_{PLANEA\ Escuela}$		$M_{PLANEA\ SEN}$ $M_{PLANEA\ Escuela}$			
3° de Secundaria	$M_{PLANEA\ SEN}$ $M_{PLANEA\ Escuela}$	$M_{PLANEA\ Escuela}$	$M_{PLANEA\ SEN}$ $M_{PLANEA\ Escuela}$		$M_{PLANEA\ SEN}$ $M_{PLANEA\ Escuela}$		
Último grado de educación superior	$M_{PLANEA\ Escuela}$	$M_{PLANEA\ Escuela}$	$M_{PLANEA\ SEN}$ $M_{PLANEA\ Escuela}$				$M_{PLANEA\ SEN}$ $M_{PLANEA\ Escuela}$

$M_{PLANEA\ SEN}$ = Evaluación de PLANEA de Matemáticas referida al Sistema Educativo Nacional.

$M_{PLANEA\ Escuela}$ = Evaluación de PLANEA de Matemáticas referida a los Centros Escolares.

Esta prueba está vinculada al currículo nacional y se proponía unir paulatinamente al esquema de evaluación otras áreas de aprendizaje, como ciencias y tecnología o formación cívica y ética (hasta la elaboración de este trabajo, el propósito no se ha cumplido). PLANEA tuvo dos objetivos generales: evaluar el desempeño del Sistema Educativo Nacional (SEN) respecto de los aprendizajes en la educación obligatoria, y retroalimentar a todas las comunidades de primaria, secundaria y educación media superior respecto de los aprendizajes logrados.

Esta prueba se organiza a través de dos modalidades que se distinguen en sus propósitos y, en consecuencia, en el diseño de sus instrumentos y en la manera de administrarlos a los estudiantes. El INEE dirigió la modalidad conocida como “PLANEA SEN” y presenta información del SEN en los distintos niveles de la educación obligatoria. La SEP dirige la otra modalidad, llamada “PLANEA Escuelas”, y presenta información de los centros escolares. La diferencia entre ambas modalidades está en que PLANEA SEN une varios formatos de aplicación, en tanto que PLANEA Escuelas incluye uno solo, común a todos los estudiantes evaluados.

En esta prueba, se disponen cuatro niveles de logro acumulativos. En las tablas IV.3.16, IV.3.17 y IV.3.18 se explican los cuatro niveles de logro que comprende la prueba para secundaria, así como, los niveles de logro y la tabla parcial de contenidos para PLANEA 3° de secundaria.

Tabla IV.3.16. Niveles de logro para secundaria. Matemáticas

Descriptores de logro 3° de secundaria	
Nivel IV	Los alumnos son capaces de calcular términos de sucesiones y multiplicar expresiones algebraicas; resuelven problemas con números fraccionarios y decimales (combinados) usando notación científica, o una ecuación o un sistema de ecuaciones. Son capaces de solucionar problemas que suponen transformar figuras, propiedades de mediatrices, bisectrices y razones trigonométricas. Pueden calcular el área de sectores circulares y coronas, y el volumen de cuerpos redondos; **resolver problemas usando estrategias de conteo**; calcular la probabilidad de un evento simple, o abstraer información de tablas y gráficas. Logran modelar gráficamente un fenómeno que involucra funciones lineales y cuadráticas.
Nivel III	Los alumnos son capaces de resolver problemas con números fraccionarios o con signo, o potencias de números naturales. Pueden sumar o restar expresiones algebraicas e identificar la ecuación o el sistema de ecuaciones que modelan una situación. Logran resolver problemas con el teorema de Pitágoras, la imaginación espacial (sólidos de revolución), propiedades de ángulos en círculos o triángulos y relaciones de semejanza de triángulos. Son capaces de calcular el perímetro del círculo y de áreas de figuras compuestas, así como de resolver problemas de cálculo

	de porcentajes o reparto proporcional y modelar gráficamente un fenómeno que involucra únicamente funciones lineales.
Nivel II	Los alumnos son capaces de resolver problemas con números decimales, algoritmos elaborados como la raíz cuadrada y el máximo común divisor, y ecuaciones lineales sencillas. Pueden reconocer las relaciones de los ángulos de triángulos y los que forman parte entre paralelas cortadas por una transversal, así como las secciones que se generan al cortar un cono. También son capaces de calcular el volumen de cuerpos de caras planas, reconocer y expresar, de diferentes formas, relaciones de proporcionalidad directa, y plantear relaciones sencillas de proporcionalidad inversa.
Nivel I	Los alumnos son capaces de resolver problemas usando estrategias de conteo básicas y comparaciones, o cálculos con números naturales. Pueden expresar en lenguaje natural el significado de fórmulas geométricas comunes y viceversa. No son capaces de resolver problemas que impliquen: operaciones básicas con números decimales, fraccionarios y números con signo; el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor o los de valor faltante que suponen relaciones de proporcionalidad directa. Tampoco pueden calcular perímetros y áreas, o resolver ecuaciones de primer grado de la forma ax + b = c y sus expresiones equivalentes.

Tabla IV.3.17. Niveles de logro de PLANEA 3° de secundaria 2017. Matemáticas

Manejo de la información

Nivel I V	Nivel III	Nivel II	Nivel I
Los alumnos: **▪ Resuelven problemas que implican estrategias de conteo, cálculo de la probabilidad de un evento simple** o abstracción de transformación de tablas y gráficas estadísticas.	Los alumnos: ▪ Resuelven problemas de proporcionalidad que implican reparto, aplicación de factores sucesivos y múltiples, así como del cálculo de la tasa de porcentaje. ▪ Identifican la representación gráfica formada por segmentos de rectas que corresponde a un fenómeno y la representación algebraica de una función lineal.	Los alumnos: ▪Reconocen y expresan, de diferentes formas, relaciones de proporcionalidad directa e inversa entre dos conjuntos de cantidades, resuelven problemas de cálculo de porcentaje, e identifican la razón de cambio de una gráfica lineal.	Los alumnos: **▪Resuelven problemas que implican estrategias de conteo básicas (representación gráfica).**

Tabla IV.3.18.

Tabla parcial de contenidos de PLANEA 3° de secundaria 2017. Matemáticas

Niveles de logro y	Eje temático[99]	Contenido	Dificultad Rasch al 67%	Nacional %

[99] SNPA se refiere a Sentido Numérico y Pensamiento Algebraico; FEM, a Forma, Espacio y Medida, y MI, a Manejo de la Información.

puntos de corte				
Nivel IV 711-839	FEM	Resolver problemas que impliquen el cálculo del área de sectores circulares o de coronas.	839	0.5
	MI	Resolver problemas que impliquen la interpretación de información de polígonos de frecuencia.	726	4.1
	SNPA	Resolver problemas que involucran ecuaciones de segundo grado.	717	4.7
Nivel III 629-710	FEM	Resolver problemas que impliquen el cálculo de las relaciones de los ángulos interiores de triángulos o paralelogramos.	709	5.2
	MI	Identificar las representaciones (gráfica, tabla y expresión algebraica) que corresponde a una misma situación de proporcionalidad directa.	674	8.1
	SNPA	Traducir al lenguaje natural el significado de fórmulas geométricas y viceversa.	631	13.4
Nivel II 530-628	MI	Identificar la relación entre la pendiente y la razón de cambio	625	14.3
	FEM	Resolver problemas que impliquen el uso del teorema de Pitágoras	575	23.6
	SNPA	Resolver problemas aditivos con números decimales.	538	32.9
Nivel I 405-529	FEM	Identificar las secciones que se obtienen al cortar un cilindro o un cono recto con un plano	529	35.6
	MI	**Resolver problemas de conteo**	**505**	**43.3**

El modelo Rasch se utiliza para definir los puntos de corte de los niveles de logro mediante el método Bookmark con probabilidad de responder correctamente al menos el 67%. Enseguida se exponen los reactivos relacionados con los diagramas de árbol correspondientes al periodo 2015-2017. En 2018, la prueba se aplicó a alumnos de sexto grado de primaria; finalmente, **en 2019 la prueba fue aplicada a estudiantes de tercer grado de educación secundaria. Los reactivos explícitamente vinculados a los diagramas de árbol fueron excluidos.**

¿Por qué los diagramas de árbol no fueron parte de los Programas de Estudio de Educación Secundaria? Esta pregunta surge necesariamente si se toma en cuenta que se les ha identificado como un aprendizaje clave y que la evaluación de las matemáticas

[…] indaga el dominio de aprendizajes matemáticos del nivel educativo correspondiente, así como la capacidad para emplearlos y **transformarlos en herramientas que permitan a**

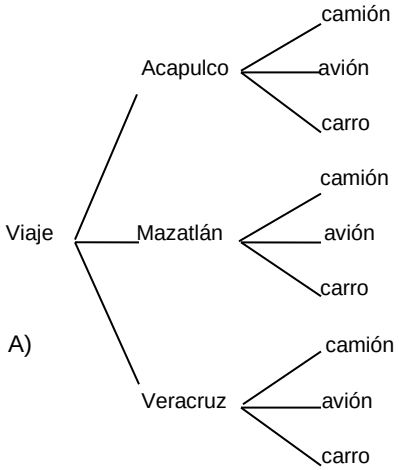
los alumnos comprender, interpretar, analizar y dar solución a diferentes problemas de su entorno y de otros campos disciplinares, empleando diferentes métodos y procedimientos: aritméticos, algebraicos, **gráficos**, geométricos, variacionales, estadísticos y probabilísticos (INEE, 2018, 16)

Prueba del alumno 2015 3° Reactivo 48.

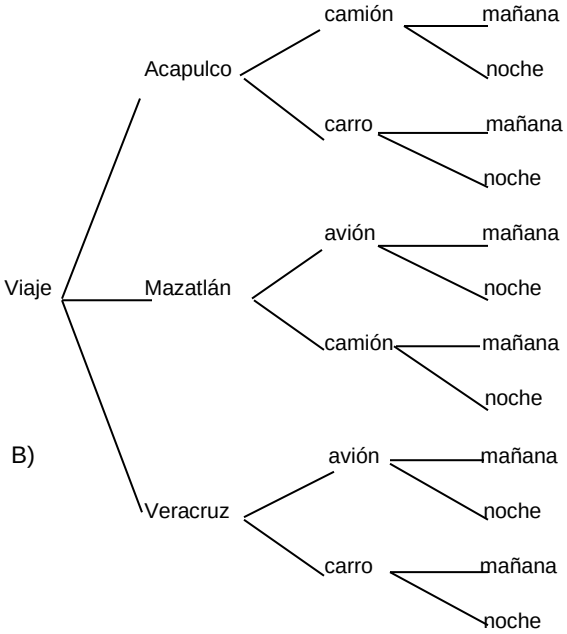
Este reactivo formó parte de la prueba EXCALE 09 en el año 2012. En la tabla IV.3.19 se reporta su clasificación y resultados.

Una persona realizará un viaje. Tiene la opción de ir a Acapulco, Veracruz o Mazatlán; puede hacerlo en avión, automóvil o camión, por la mañana o por la noche. ¿Cuál es el diagrama de árbol que muestra todas las opciones posibles?

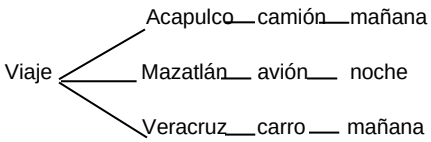
A)



B)



C)



D)

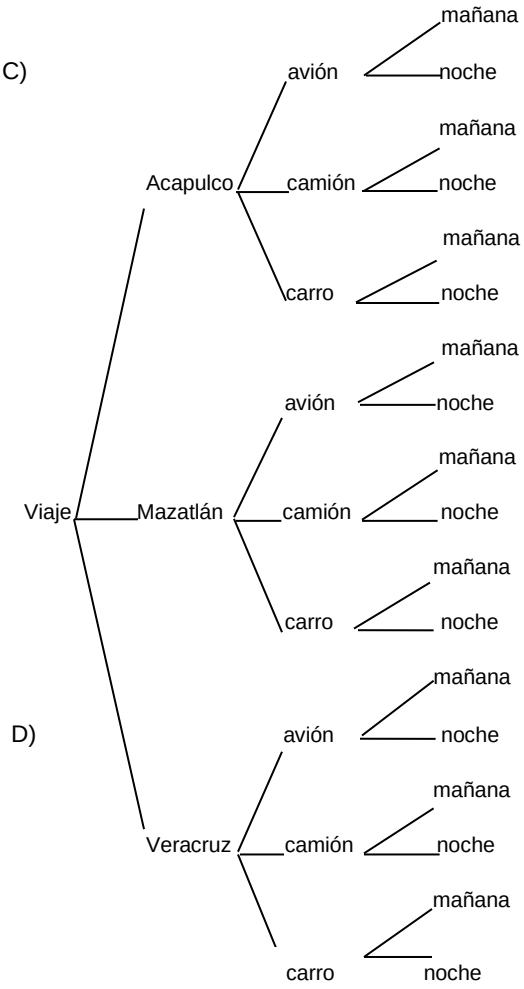


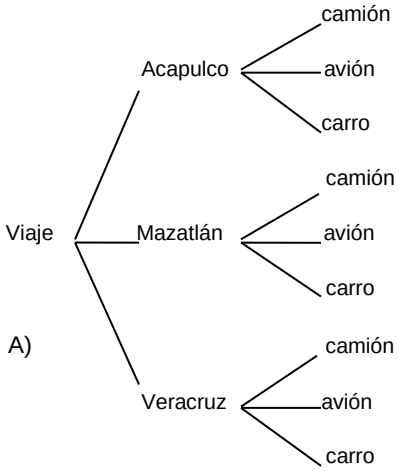
Tabla IV.3.19.

Clave	Contenido curricular	Dificultad	Muestral global	Porcentaje de aciertos obtenidos en la muestra por tipo de escuela				
				General Pública %	Técnica Pública %	Tele Secundaria %	Comunitaria %	Privada %
SMB23	Resolver problemas de conteo por medio de un diagrama de árbol	467	75%	71	69	69	60	83
SMC11	Resolver problemas de conteo por medio de permutaciones	743	33%	32	32	28	18	47

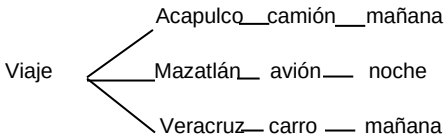
Prueba del alumno 2016 1° Reactivo 48

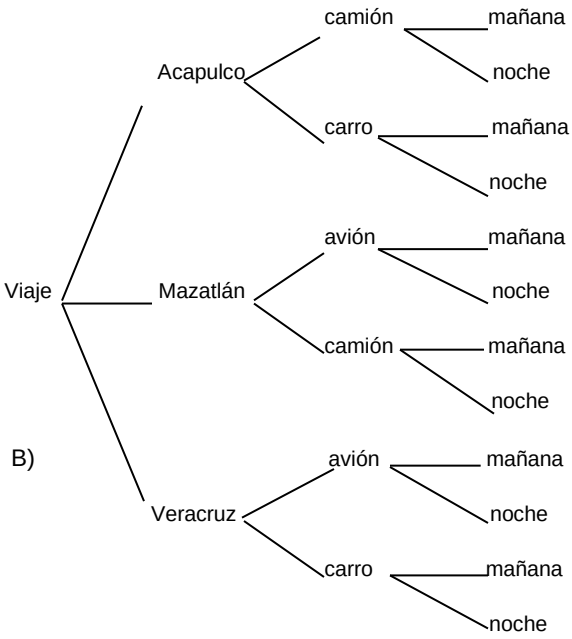
Una persona realizará un viaje. Tiene la opción de ir a Acapulco, Veracruz o Mazatlán; puede hacerlo en avión, automóvil o camión, por la mañana o por la noche. ¿Cuál es el diagrama de árbol que muestra todas las opciones posibles?

A)

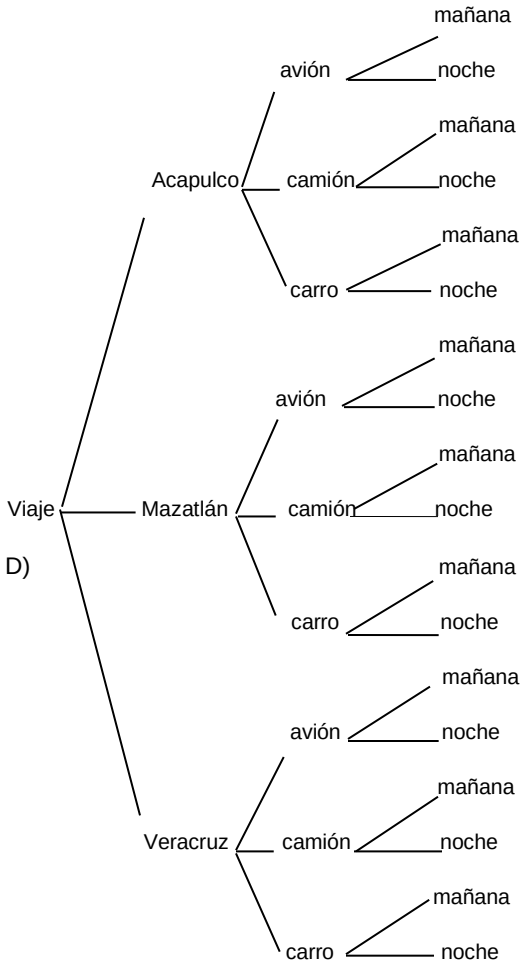


C)





B)



D)

Es el mismo reactivo que se aplicó en PLANEA 2015.

Prueba del alumno 2017 3° Reactivo 48

Se trata del mismo reactivo que se encuentra en la página siete de este documento. La tabla IV.3.20 expone su clasificación y resultados.

Tabla IV.3.20.

Eje	Tema	Aprendizaje esperado	Especificación del reactivo
Manejo de la información	Nociones de probabilidad	Compara cualitativamente la probabilidad de eventos simples	Resolver problemas de conteo

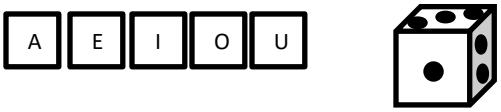
Número de reactivo	Contenido Curricular	Dificultad[100] Rasch	Porcentaje de alumnos evaluados en la muestra que responde correctamente el reactivo					
48 SMB_23	Resolver problemas de conteo	398*	Global	Tipo de escuela				
				General Pública	Técnica Pública	Tele secundaria	Comunitaria	Privada
			66	64	64	64	52	79

Prueba del alumno 2018. La prueba se aplicó a alumnos de sexto grado de educación primaria. No hubo reactivos relacionados con los diagramas de árbol.

Prueba del alumno 2019. **El Tema de Combinatoria y de los diagramas de árbol no está presente en la prueba.** En esta prueba se presentaron los siguientes reactivos sobre la asignatura de Probabilidad:

09 Secundaria Reactivo 9

Se tiene un dado y cinco fichas dentro de una urna (en cada ficha está escrita una vocal). ¿Cuál es la probabilidad de que al **azar** se saque la letra **O** de la urna y que al lanzar el dado caiga **6**?



A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{30}$ D) $\frac{2}{30}$

Reactivo 11

Si se tienen los dígitos: 3, 4, 5, 6, 7, ¿cuántos números distintos de 2 dígitos se pueden formar sin usar el mismo dígito dos veces en un mismo número?

A) 5 números de 2 dígitos B) 25 números de 2 dígitos

C) 4 números de 2 dígitos D) 20 números de 2 dígitos

Tabla IV.3.21. Cronograma de aplicaciones

Grado	2021	2022	2023	2024	2025
3° de Preescolar			M PLANEA SEN		

[100] Se muestra la dificultad del reactivo que reemplazó a su correspondiente en la prueba PLANEA Escuela.

6° de Primaria	$M_{PLANEA\ SEN}$ $M_{PLANEA\ Escuela}$			$M_{PLANEA\ SEN}$ $M_{PLANEA\ Escuela}$	
3° de Secundaria		$M_{PLANEA\ SEN}$ $M_{PLANEA\ Escuela}$			$M_{PLANEA\ SEN}$ $M_{PLANEA\ Escuela}$
Último grado de educación media superior			$M_{PLANEA\ SEN}$ $M_{PLANEA\ Escuela}$		

El cronograma que se muestra en la tabla IV.3.21, está dosificado para que todos los años se realicen uno o dos ejercicios de evaluación. 2017 y 2018 son años de transición respecto de las evaluaciones programadas previamente. Como puede observarse desde 2019, la aplicación de evaluaciones en un mismo grado escolar se realizará cada tres años. PLANEA tenía en cuenta una revisión de sus alcances y limitaciones tras el primer ciclo completo de aplicación, en 2021.

Como se aprecia, los reactivos, en conexión con los diagramas de árbol, evalúan la capacidad de los estudiantes para enumerar, ordenar y representar las posibles formas en que dos o tres conjuntos de elementos pueden asociarse bajo condiciones establecidas, como la característica que debe cumplir aquello que se debe contar, si existe un orden o si los elementos del conjunto pueden repetirse. En las pruebas presentadas los diagramas de árbol solo se encuentran en referencia a recuento de casos y a la construcción del espacio muestral de un experimento aplicado al cálculo de probabilidades.

He de insistir que el razonamiento combinatorio permite al alumno realizar conjeturas sobre eventos futuros, y la práctica de representaciones de los ordenamientos —como el diagrama de árbol— permite visualizar las posibles formas en que pueden asociarse los elementos de los conjuntos con o sin orden, con o sin repetición. Por lo anterior, la inclusión del tema diagramas de árbol en las evaluaciones de aprendizaje nacionales e internacionales contradice la ausencia de este tema en los programas de estudio en México.

Capítulo V

El tratamiento de los diagramas de árbol en los Programas de Estudio de matemáticas en educación primaria y secundaria de Brasil, Canadá, Chile, China, India y Rusia

En este capítulo me referiré a los temas de diagramas de árbol y combinatoria en los currículos de educación secundaria de otros países, expondré, ejercicios propuestos en sus libros de texto de primaria y secundaria, por tanto, tomaré los casos de la República Federativa de Brasil, Canadá, República de Chile, República Popular China, República de la India y la Federación de Rusia, en el entendido de que se trata de currículos en uso en el mismo periodo del Plan 2017. En los libros de texto, de la variedad de ejercicios, situaciones problema y problemas propuestos, únicamente se seleccionaron aquellos que incluyen un diagrama de árbol. A pesar de haber recopilado diversos ejercicios pertinentes al tema de esta investigación, estos no se presentan en este documento debido a limitaciones de espacio.

República Federativa de Brasil

El ciclo de educación básica sigue los programas oficiales. Los libros son proporcionados por el Estado y se utiliza el mismo libro para todos los alumnos de cada grado. A continuación, se exhibe el currículo de 5° a 9° año.

Tabla V.1 Currículo Enseñanza Fundamental. 5°- 9° año

MATEMÁTICAS – 5° AÑO		
UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONOCIMIENTOS	HABILIDADES
Probabilidad y Estadística	Espacio muestral, análisis de posibilidades de eventos aleatorios. Cálculo de la probabilidad de eventos equiparables.	• Presente todos los resultados posibles de un experimento aleatorio, estimando si estos resultados son igualmente probables o no. • Determine la probabilidad de que ocurra un resultado en eventos aleatorios, cuando todos los resultados posibles tengan la misma probabilidad de ocurrir (equiparables).
MATEMÁTICAS – 6TO AÑO		
Probabilidad y Estadística	Cálculo de probabilidad como la relación entre el	• Calcule la probabilidad de un evento aleatorio, expresándolo por un número

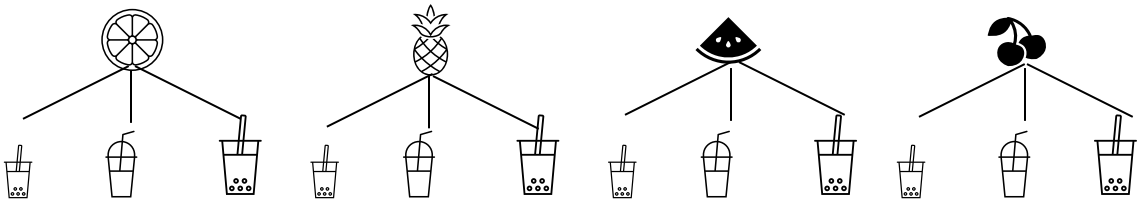
	número de resultados favorables y el total de resultados posibles en un espacio de muestra equiprobable. Cálculo de probabilidad a través de muchas repeticiones de un experimento (frecuencia de ocurrencias y probabilidad frecuente)	racional (fracción, decimal y porcentaje) y comparando este número con la probabilidad obtenida a través de experimentos sucesivos.
MATEMÁTICAS – 7° AÑO		
Probabilidad y Estadística	Experimentos aleatorios: espacio muestral y estimación de probabilidad por frecuencia de ocurrencias.	• Planifique y lleve a cabo experimentos o simulaciones aleatorias que impliquen el cálculo de probabilidades o estimaciones a través de la frecuencia de las ocurrencias.
MATEMÁTICAS – 8° AÑO		
Probabilidad y Estadística	Principio multiplicador de contar. Suma de probabilidades de todos los elementos de un espacio muestral.	• Calcule la probabilidad de eventos, basándose en la construcción del espacio muestral, utilizando el principio multiplicativo, y reconozca que la suma de las probabilidades de todos los elementos del espacio muestral es igual a 1.
MATEMÁTICAS – 9° AÑO		
Probabilidad y Estadística	Análisis de probabilidad de eventos aleatorios: eventos dependientes e independientes	• Reconozca, en experimentos aleatorios, eventos independientes y dependientes y calcule la probabilidad de que ocurran, en ambos casos.

A partir de lo anterior, se muestran actividades de combinatoria que se encuentran en libros de texto para la enseñanza fundamental. Es importante destacar que el tema de combinatoria se encuentra dentro del de probabilidad y que no se establecieron actividades introductorias al tema.

Projecto Teláris Matemática 6. p. 52

3ª idea asociada con la multiplicación: número de posibilidades o combinaciones.

En una cafetería hay 4 tipos de jugo: naranja, piña, sandía y acaí. Se sirven en vasos de 3 tamaños: pequeño, mediano y grande. ¿Cuántas opciones hay al pedir un jugo?



Como hay 4 tipos de jugo y para cada tipo hay 3 tamaños de vaso, las posibilidades totales están dadas por 4 x 3 = 12

También puede pensar en 3 tamaños de vasos y, para cada uno, 4 tipos de jugo, es decir, 3 x 4 = 12

Projecto Teláris Matemática 6. p. 237

Analiza los diagramas y complétalos. Haz cálculos mentalmente.

a) 3.75, +, 10, –, 0.11, x, 10

b) 9.35, 2.35, 7.5, 2.5, -, +, :, =

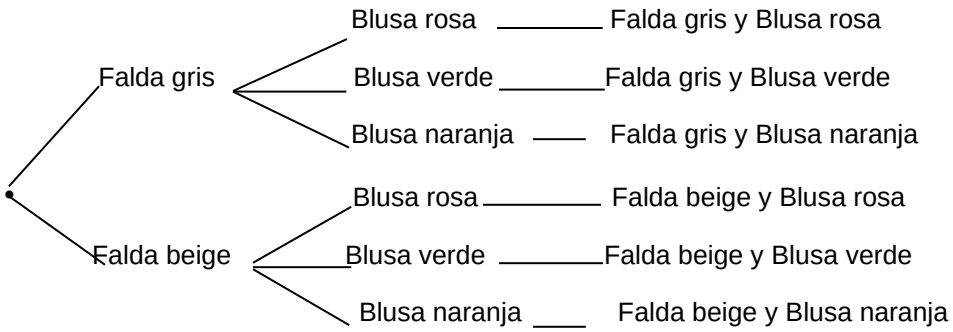
Projecto Teláris Matemática 9. pp.348-349

3. Combinatoria: métodos de conteo

Principio multiplicativo o principio fundamental de contar

Siga la resolución de esta solución problemática. Luciana no estaba decidida sobre que atuendo usar para ir a una fiesta. Tenía a su disposición 2 faldas en colores gris y beige y 3 blusas en rosa, verde y naranja. Sabiendo esto, ¿de cuántas maneras diferentes puede Luciana elegir un conjunto que consiste en una falda y una blusa para ir a la fiesta?

Podemos representar esta situación a través de un diagrama llamado árbol de posibilidades (o diagrama de árbol o árbol de enumeración). Es una forma muy útil de representar todos los modos de una decisión.



2 posibilidades (de faldas) 3 posibilidades (de blusas) 6 posibilidades (de conjuntos)

Practicando Matemática. 9° año. p.134

• Si lanzamos una moneda 4 veces, ¿cuál es la probabilidad de obtener cara en los cuatro lanzamientos?

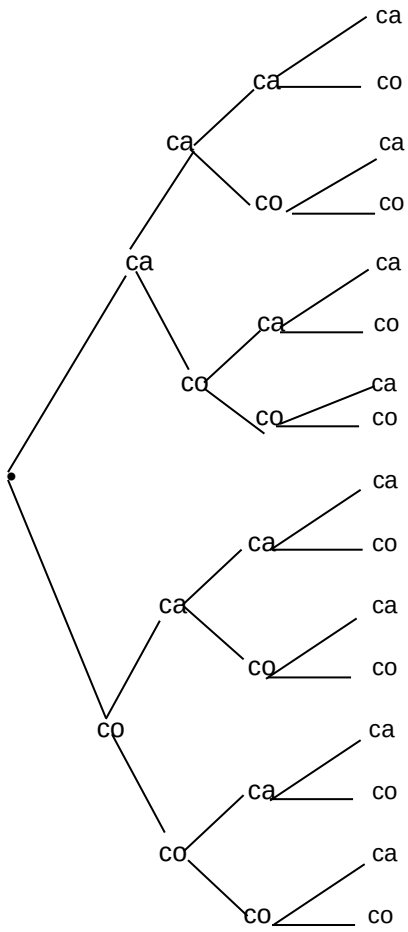
Podemos construir un **diagrama de árbol** para determinar todos los resultados posibles

Hay 16 resultados posibles.

Si recuerdas el principio multiplicativo ahorrarás tiempo: Hay dos posibilidades para cada lanzamiento: 2 • 2 • 2 • 2 = 16 posibilidades en total[101].

Entonces, la probabilidad de obtener cara en los 4 lanzamientos es $\frac{1}{16}$ o 0.0625,

o todavía 6.25%



Enseguida se expone un ejercicio de un manual destinado a los docentes.

Programa de Gestión del Aprendizaje Escolar. Gestar II

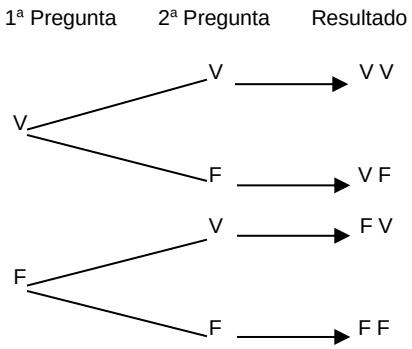
Educación continua para maestros/ últimos años de la enseñanza fundamental.

[101] En esta etapa al presentar situaciones problema que involucran multiplicaciones sucesivas de factores iguales, el objetivo es enfatizar la importancia del resultado (potencia) haciendo uso del diagrama de árbol.

Principio fundamental de contar. **Diagramas de árboles**

[…] La primera pregunta tiene dos posibilidades: puede ser Verdadera (V) o Falsa

(F). Para cada una de estas posibilidades, tenemos que imaginar las posibilidades para la segunda pregunta:



Este tipo de diagrama se conoce como "**diagrama de árbol**": cada línea o "rama" del árbol se ramifica en más líneas, o "ramas", dependiendo del número de posibilidades que se abren para cada opción.

Actividad 8.

Observe una rima infantil inglesa, que data del siglo XVIII, que plantea un interesante problema de conteo. Represente el problema con un diagrama y responda la pregunta que aparece al final de la rima.

De camino a St. Ives

De camino a St. Ives, conocí a un hombre con siete esposas, cada esposa tenía siete bolsas, cada bolsa tenía siete gatos, cada gato tenía siete cachorros, cachorros, gatos, bolsas y esposas. ¿Cuántos iban camino a St. Ives?

Nuevamente destacamos la importancia de utilizar el **diagrama de árbol** para enseñar el principio multiplicativo y la validez de los esquemas para ilustrar y visualizar este principio.

En conclusión, de esta revisión de los libros de texto brasileños se destaca la ausencia de una explicación detallada para elaborar y comprender diagramas de árbol en las actividades propuestas.

Canadá

En Canadá no hay ministerio o departamento de educación a nivel federal. Regidos por la Constitución Canadiense, los gobiernos provinciales tienen la responsabilidad

exclusiva de todos los niveles de educación. Los libros de texto varían de provincia a provincia y no son obligatorios ni gratuitos; se cobra una renta anual por su uso. Enseguida se expone el caso de la provincia de Ontario. La estructura del programa relacionado con los diagramas de árbol y la combinatoria es la siguiente:

Tabla V.2. Currículo de la Provincia de Ontario.

MATEMÁTICAS 6° Grado Manejo de datos y Probabilidad	
Expectativas generales	• Determinar la probabilidad teórica de un resultado en un experimento de probabilidad, y usarlo para predecir la frecuencia del resultado.
Probabilidad	• Expresar la probabilidad teórica como una relación entre el número de resultados favorables y el número total de resultados posibles, donde todos los resultados son igualmente probables (por ejemplo, la probabilidad teórica de sacar un número impar en un cubo es $\frac{3}{6}$ porque, de sus resultados igualmente probables solo tres son favorables es decir, los números impares 1, 3, 5). • Representar la probabilidad de un evento (es decir, la probabilidad que el evento ocurra) utilizando un valor del rango de 0 (nunca ocurre o es imposible) a 1 (siempre pasa o es seguro). • Predecir la frecuencia de un resultado de un experimento o juego de probabilidad simple, calculando y usando la probabilidad teórica de ese resultado (por ejemplo, “La probabilidad teórica de que al girar una ruleta se detenga en rojo es $\frac{1}{4}$, ya que hay cuatro áreas de diferentes colores que son iguales. Si giro mi ruleta 100 veces, predigo que el rojo debería aparecer unas 25 veces”).
MATEMÁTICAS 7° Grado Manejo de datos y Probabilidad	
Expectativas generales	• Comparar la probabilidad experimental con la probabilidad teórica de un resultado considerando dos eventos independientes.
Probabilidad	• Representar en una variedad de formas (por ejemplo, **diagramas de árbol**, tablas, modelos, listas sistemáticas) todos los posibles resultados de una probabilidad experimental involucrando dos eventos independientes (es decir, un evento no afecta al otro evento), y determinar la probabilidad teórica de un resultado específico incluyendo dos eventos independientes (Problema muestra: ¿Cuál es la probabilidad de que caiga un 4 y rojo, cuando giras una ruleta que está dividida en partes iguales en cuatro colores diferentes?)
MATEMÁTICAS 8° Grado Manejo de datos y Probabilidad	

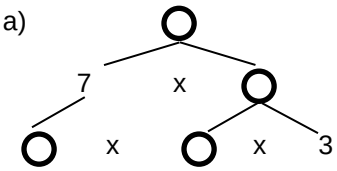
Expectativas generales	• Usar modelos de probabilidad para hacer predicciones sobre eventos de la vida real.

A continuación, se exhiben ejercicios relacionados con diagramas de árbol que se encuentran en libros de texto:

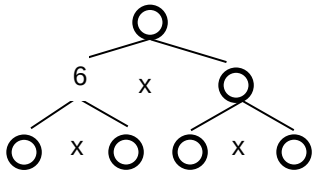
Math Makes Sense 6, p. 65

Copia y completa cada árbol de factores de tantas maneras diferentes como puedas.

a)



b)



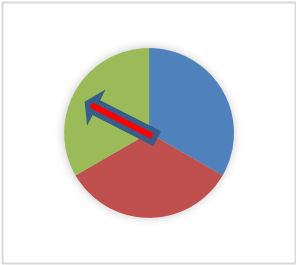
Math Makes Sense 7, pp. 284-297

7.6 **Diagramas de árbol**.

Podemos usar un **diagrama de árbol** para mostrar los posibles resultados de un experimento que tiene dos eventos independientes.

Ejemplo

En esta ruleta, la flecha se gira una vez. El color se registra.

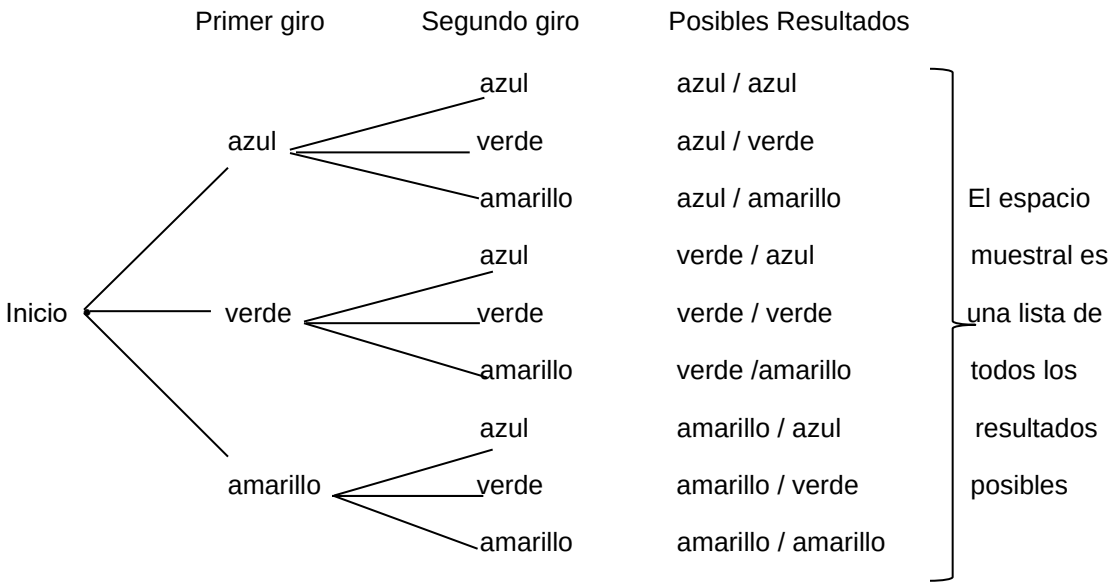


La flecha se gira por segunda vez. El color se registra.

a) Dibuja un **diagrama de árbol** para enumerar los posibles resultados.

Una solución

a) La primera rama del **diagrama de árbol** enumera los resultados igualmente probables del primer giro: azul, verde, amarillo. La segunda rama enumera los resultados igualmente probables del segundo giro: azul, verde, amarillo. Para cada resultado del primer giro, hay 3 resultados posibles para el segundo giro. Sigue la trayectoria de izquierda a derecha. Enumera todos los resultados posibles.



Math Makes Sense 8, pp.407-422

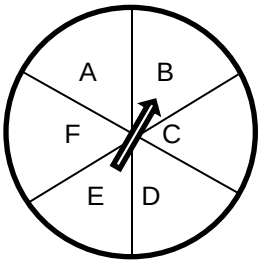
7.3 Probabilidad de eventos independientes. Trabaja con un compañero.

Usa un **diagrama de árbol**. Enumera los posibles resultados al girar la flecha de esta ruleta y lanzar la ficha de dos colores. ¿Cuál es la probabilidad de cada evento?

a) Se detenga en F

b) Cae rojo

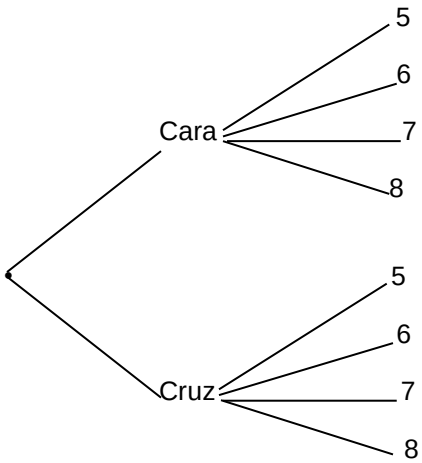
c) Se detiene en F y cae en rojo



Ejemplo 1. Se lanzan una moneda y un tetraedro regular con las etiquetas 5, 6, 7 y 8.

[…] b) Encuentra la probabilidad de que caiga cara o cruz y sacar un número par. Usa un **diagrama de árbol** para verificar tus respuestas.

Una solución. Usa un **diagrama de árbol** para verificar tus respuestas.



8. Un experimento consiste en lanzar un dado etiquetado del 3 al 8 y elegir una carta al azar de una baraja estándar de naipes.

a) ¿Cuál es la probabilidad de cada evento?

i) que caiga 6 y elegir una espada ii) que no caiga 4 y elegir un as

b) Usa un **diagrama de árbol** para verificar tu respuesta a la parte a, i. (que caiga 6 y elegir una espada).

Lección 7.3. Ejercicio 10. Un cajón contiene una camisa roja, dos azules, y una amarilla. Otro cajón contiene 2 pantalones café y un pantalón azul. Elige un artículo de cada cajón sin mirar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de elegir una camisa roja y un pantalón café?

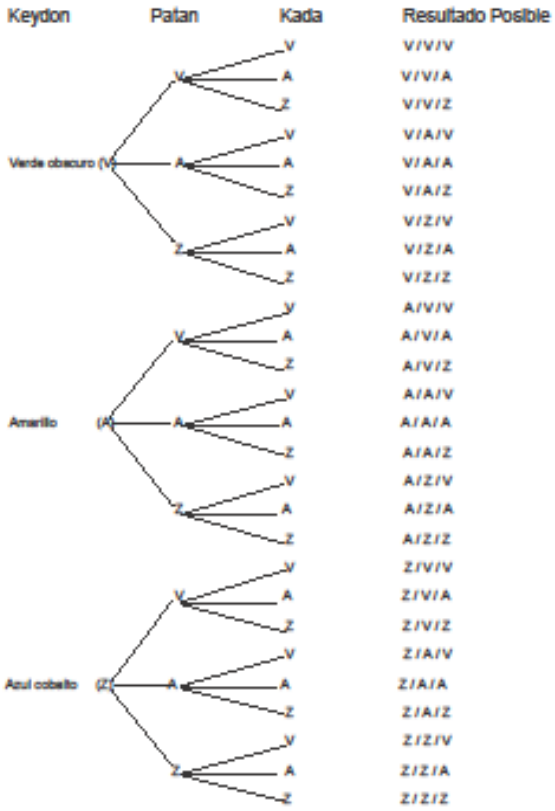
b) Usa un **diagrama de árbol** para verificar su respuesta.

Ejemplo 1.

Los estudiantes de una clase del Grado 8 estaban haciendo un diseño de gargantillas con cuentas de cuerno de búfalo. Los estudiantes podían elegir entre cuentas de color verde obscuro, amarillo y azul cobalto. Cada estudiante tiene la misma cantidad de cuentas de cada color. Keydon, Patan y Kada toman sus primeras cuentas sin mirar. Encuentra la probabilidad de que Keydon tome una cuenta amarilla, Patan tome una cuenta verde obscuro y Kada tome una cuenta amarilla.

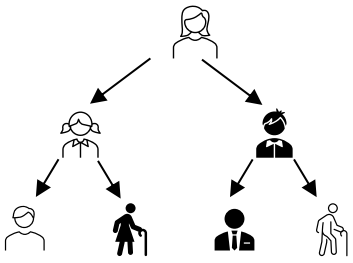
Una solución

Como cada estudiante tiene su propio conjunto de cuentas, los eventos son independientes. Usa un **diagrama de árbol**.



Math Makes Sense 9, p. 87

2.1. Ejercicio 5. Se utiliza un árbol telefónico para enviar mensajes. La persona en la parte superior llama a 2 personas. Cada persona llama a 2 personas más. Supongamos que toma 1 minuto llamar a alguien. Se transmite un mensaje hasta que la fila inferior del árbol tiene 256 personas. ¿Cuánto tiempo lleva esto? ¿Cómo lo sabes?



En relación a los libros de matemáticas en la provincia de Ontario, los diagramas de árbol se utilizan casi exclusivamente para calcular la probabilidad de un evento.

República de Chile

La educación básica y la educación media son obligatorias; con tal objeto, el Estado financia un sistema gratuito. Los libros de texto, hechos por editoriales comerciales, son entregados gratuitamente y en propiedad a los estudiantes. El currículo presentado enseguida está vinculado con la combinatoria y la probabilidad en la educación básica.

Tabla V.3

Matemáticas 7° básico	Matemáticas 8° básico	Matemática 1° medio
Unidad 4: Realiza tus propias encuestas.	Unidad 4: Mediciones.	Unidad 4: Desarrollar las reglas de probabilidad.
Realización de encuestas, representación de datos mediante tablas de frecuencia y utilización de gráficos.	Trabajo con los conceptos de medidas de posición, percentiles y cuartiles y representación de los datos, utilizando varios tipos de gráficos.	El objetivo es comenzar con la regresión lineal que se estudiará en cursos superiores. Asimismo, se busca que desarrollen las reglas de probabilidad, comenzando con experimentos sencillos, para obtener conjeturas y, a partir de estas, obtener una fórmula.

Propósito. En esta unidad, […] También efectúan experimentos aleatorios concretos para concluir, de manera inicial, sobre la probabilidad de un evento. Asimismo, utilizan la probabilidad obtenida de manera teórica y la probabilidad obtenida de manera experimental de eventos equiprobables y no equiprobables, y los comparan. Conocimientos previos. Diagramas de punto, tallo y hoja.	Propósito. En esta unidad, […] Pueden trabajar datos categóricos, numéricos o cuantitativos a fin de presentar datos y evaluar la forma en que están presentados; para esto, utilizan gráficos, tablas o esquemas (**diagramas de árbol**) y justifican su elección. Además trabajan con el principio combinatorio, comenzando con experimentos concretos, representándolos con tablas y **árboles** y llegando a calcular las probabilidades de un evento compuesto.	Propósito. En esta unidad, […] Asimismo, se busca que desarrollen las reglas de probabilidad, comenzando con experimentos sencillos, para obtener conjeturas y, a partir de estas, obtener una fórmula. Esto se inicia con un problema por resolver y se utilizan las fórmulas rutinarias para la resolución de problemas. También se espera que consoliden su noción de azar, que han trabajado durante los años anteriores.
Objetivos de la unidad Comparar las frecuencias relativas de un evento obtenidas al repetir un experimento de forma manual y/o con software educativo, con la probabilidad obtenida de manera teórica, usando **diagramas de árbol**, tablas o gráficos.	Objetivos de la unidad Explicar el principio combinatorio multiplicativo: A partir de situaciones concretas. Representándolo con tablas y **árboles** regulares, de manera manual y/o con software educativo. Utilizándolo para calcular la probabilidad de un evento compuesto. Usar modelos, realizando cálculos, estimaciones y simulaciones, tanto manualmente como con ayuda de instrumentos para resolver problemas de otras	Objetivos de la unidad Desarrollar las reglas de las probabilidades, la regla aditiva, la regla multiplicativa y la combinación de ambas, de manera concreta, pictórica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo, en el contexto de la resolución de problemas. Mostrar que comprenden el concepto de azar: -Experimentando con la tabla de Galton y con paseos aleatorios sencillos de manera manual y/o con software [102] educativo-.

[102] En la investigación *El impacto del software Árbol en el raciocinio combinatorio,* Azevedo, Costa y Borba (2011), afirman que es posible desarrollar estrategias para resolver diferentes tipos de problemas combinatorios mediante el uso del software Árbol.
Este software permitió a los estudiantes utilizar diagramas de árbol con los que podían reflexionar sobre la estructura de las soluciones, sin embargo, es necesario que el profesor señale los aspectos principales de cada tipo de pregunta, es decir, si se deben usar todos los elementos y si el orden de ellos puede influir o no en el resultado. Es necesario que el docente este capacitado para hacer un mejor uso del recurso.
Existen limitaciones en cuanto al uso de software con respecto a la autonomía de los alumnos, ya que es necesario que siempre haya una discusión con el docente y compañeros sobre cuáles son las

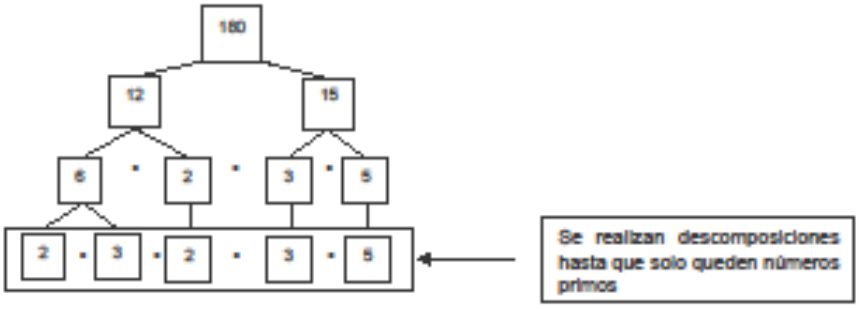
	asignaturas y de la vida diaria.	Utilizando probabilidades para describir el comportamiento azaroso. - Resolviendo problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.

A continuación se presentan actividades, situaciones problema y problemas asociadas con los diagramas de árbol y el estudio de la combinatoria.

Texto del estudiante. Matemáticas 6 básico, p. 25

Todo número compuesto lo puedes descomponer en una multiplicación de números primos. Esto se conoce como descomposición en factores primos y la puedes representar mediante un **diagrama de árbol**.

Ejemplo. Descompón en factores primos el número 180.
¿Cómo lo hago?
1. Representa en un diagrama de árbol la descomposición del número.



2. Escribe la descomposición del número en factores primos. 180 = 2•3•2•3•5

Experimentos aleatorios, pp. 246-249

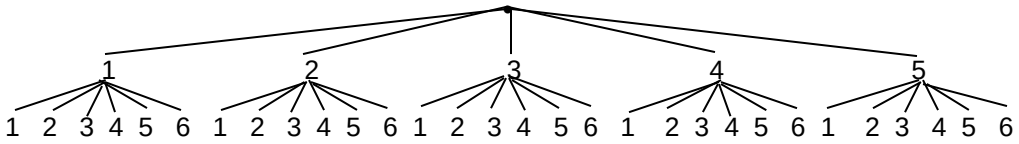
Aprendo. Ejemplo 2.

Se lanzan dos dados de seis caras y se observan los puntos obtenidos en las caras superiores. Escribe los resultados posibles.

¿Cómo lo hago?

posibilidades válidas para cada tipo de problema, especialmente si el software no tiene retroalimentación.

1. Puedes usar un **diagrama de árbol** para visualizar los resultados[103]



2. Escribe los casos posibles en el lanzamiento de los dos dados que se observan en el diagrama.

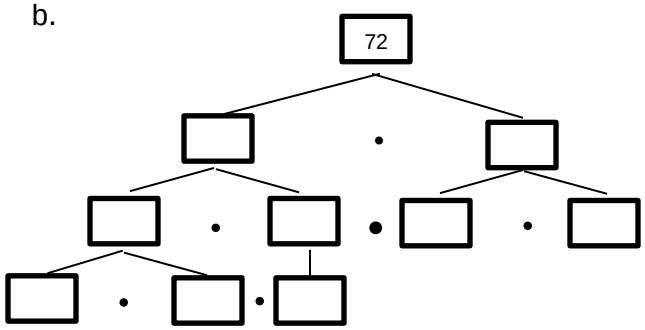
• Explica cómo construir un diagrama de árbol. ¿Para qué lo puedes usar?

Cuaderno de Ejercicios. Matemática 6° básico, p. 15

Tema1. Operaciones, múltiplos y factores.

5. Completa cada descomposición en factores primos

b.



Matemática 7° básico, pp. 154-157

Lección 51. ¿Cómo calcular probabilidades usando diagramas de árbol?

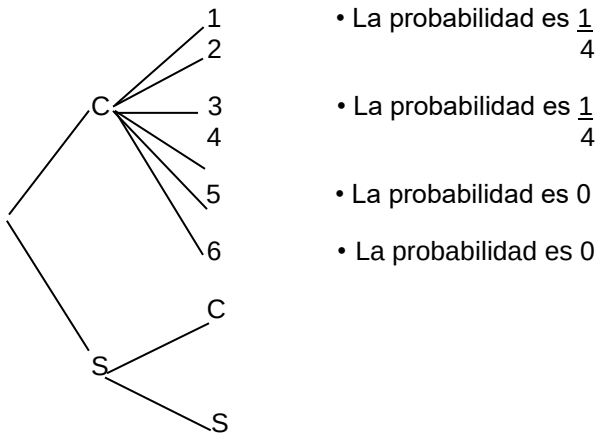
Propósito. Calcular probabilidades mediante diagramas de árbol.

Practiquemos lo aprendido. Aplica.

[…] k. Se realiza un experimento de lanzar una moneda, si sale cara se lanza un dado de seis caras, si sale sello se vuelve a lanzar la moneda, ¿Cuál es el espacio muestral del experimento? Realiza el **diagrama de árbol**.

• ¿Cuál es la probabilidad de obtener cara en el primer lanzamiento y sello en el segundo?

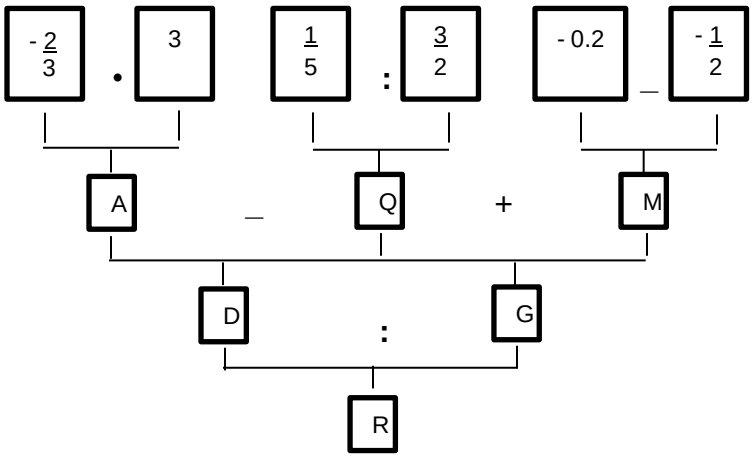
[103] El diagrama de árbol está incompleto.



Texto del estudiante. Matemática 8° básico, pp. 34, 40.

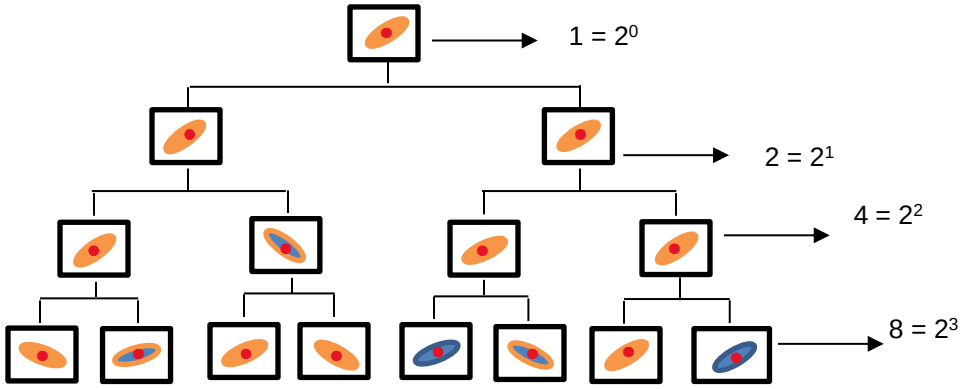
Unidad 1. Lección 2. Actividades

4. A partir del esquema, determina el número que representa cada letra.



Unidad 3. Lección 3. Potencias, raíz cuadrada y porcentajes

Ejemplo 4. Un paramecium es un organismo unicelular que se produce por división simple, es decir, se divide en 2 cada vez. Representa la situación con un **diagrama de árbol** y con potencias.

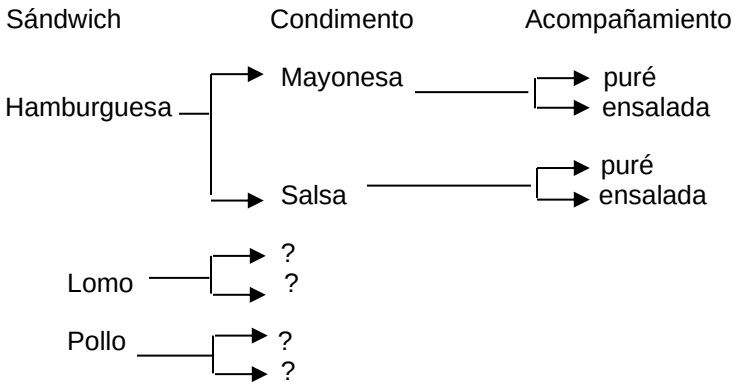


Cuando el exponente de una potencia es cero y su base es distinta de cero, su valor es 1. Es decir, si a ϵ N, entonces a°= 1

Actividades

[…] 2. En un restaurante se puede armar distintos menús formados por un sándwich, un condimento y un acompañamiento.

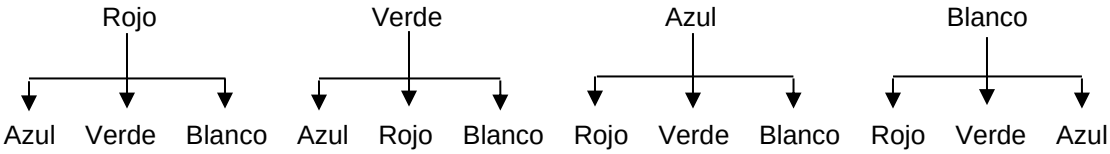
a. Completa en tu cuaderno el **diagrama de árbol** con todos los menús posibles



b. ¿Cuántos menús de los que escribiste tendrán puré como acompañamiento?

c. ¿Cuántos menús tendrán mayonesa y puré?

[…] 5. Observa el siguiente **diagrama de árbol**.



a. Realiza un listado con los posibles resultados representados en el diagrama de árbol.

b. Escribe una situación que pueda modelarse con la información.

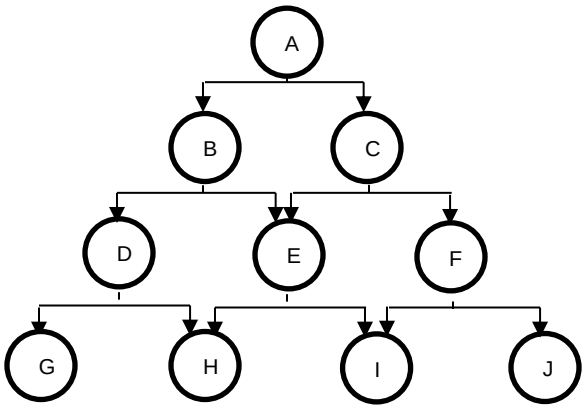
Reflexiona y responde

• Explica en qué consiste el principio multiplicativo

• ¿Crees que es útil representar datos en un diagrama de árbol?, ¿por qué?

Lección 2. Probabilidad

[…] 3. En el diagrama se elige un camino para ir desde A hasta H ¿Cuál es la probabilidad de E ?



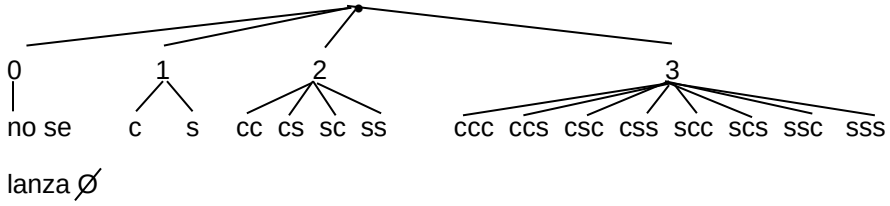
Matemática 1° intermedio. Texto del estudiante
Unión e intersección de eventos, pp. 247-248

Se lanza un dado de cuatro caras numerado del 0 al 3, y luego una moneda honesta tantas veces como el número que se obtenga en el dado, es decir, si sale 0 no se lanza la moneda, si sale 1 la moneda se lanza una vez, y así sucesivamente.

3. Ejemplo 1. Considera que los resultados del experimento aleatorio de la actividad inicial son equiprobables. Usa la regla de Laplace para calcular la probabilidad de la unión de los eventos C y D, en que C corresponde a los resultados, cuyo lanzamiento del dado se obtuvo 2 y D, a los resultados que tienen por lo menos dos sellos.

Para responder a la pregunta, puedes seguir estos pasos:

1. Construyes un **diagrama de árbol** para conocer los posibles resultados del experimento. Recuerda que cada rama representa un resultado.



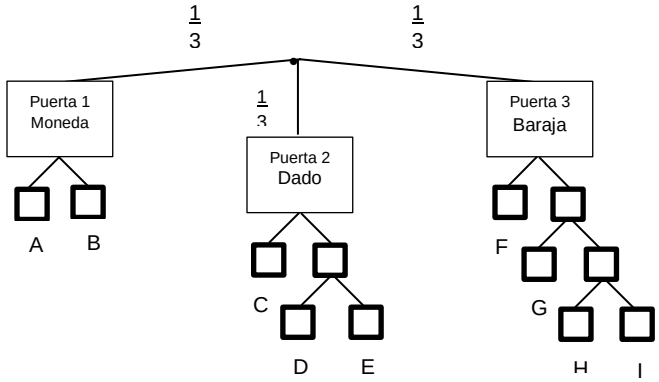
1. Analiza la situación y responde.
- Nuestra participante Josefa debe escoger entre tres puertas. Detrás de las puertas encontrará una moneda, un dado o una baraja de cartas, pero no sabe en qué puerta está cada objeto, por lo que su elección es al azar.

• Si escoge la puerta que contiene la moneda, deberá lanzarla y gana si obtiene cara.

• Si escoge la puerta que tiene el dado y si obtiene un puntaje mayor que 4, entonces podrá lanzar una moneda y ganará si obtiene cara.

• Si escoge la puerta que tiene la baraja, deberá extraer una carta y si saca un trébol entonces podrá lanzar un dado y si obtiene un puntaje mayor que, 4 podrá lanzar una moneda y ganará si obtiene cara.

a. Completa el **diagrama de árbol** con los resultados posibles y probabilidades.[104]



En los libros de texto chilenos, se presentan árboles que se emplean para resolver problemas de probabilidad condicional y se sugiere el uso de software educativo. Aunque se explica el principio multiplicativo utilizando árboles, en realidad, el objetivo de emplear un diagrama de árbol siguió siendo calcular la probabilidad de un evento. Los contextos en los que se llevan a cabo las actividades no se limitan únicamente a juegos de azar y menús, sino que también abarcan aspectos biológicos y sociales. Asimismo, se presentan ejercicios con árboles incompletos, y se pregunta a los estudiantes sobre los resultados en las fases incompletas. Además, se establece una comparación entre los árboles y otros recursos para resolver problemas relacionadas con el azar.

República Popular China

A continuación, se presenta el programa de estudio de combinatoria y probabilidad correspondiente al currículum de la ciudad de Shanghái, uno de los cuatro municipios bajo el control directo del gobierno central de China. El contenido del programa es el siguiente:

[104] Este problema es semejante al conocido como Monty Hall.

Grados 6-7

El contenido del tema manejo de datos se combinará con el trabajo anterior: la probabilidad dentro del estudio de fracciones, los símbolos algebraicos pueden representar probabilidades, las gráficas de barras y circulares en geometría, la media ponderada en problemas numéricos.

El estudio de la probabilidad teórica es restringido y depende de las decisiones de los maestros sobre cómo incluirla en otros temas.

Grados 8-9. Manejo de datos

• Probabilidad: comprender el concepto de probabilidad (como una medida del azar) en problemas clásicos y reales incluyendo modelos geométricos simples. La probabilidad de eventos simples (incluyendo una lista de todos los resultados posibles en una situación sencilla de azar para calcular la probabilidad).

Grados 10-12. Procesamiento de datos, estadística y probabilidad

• Permutaciones y combinaciones, teorema binomial.

• Triángulo Yang Hui.

• Probabilidad: eventos aleatorios y probabilidad, resultados igualmente probables, espacio muestral, probabilidad frecuencial.

• Probabilidad de eventos combinados simples (incluyendo el uso de diagramas de posibilidades y **diagramas de árbol** cuando sea apropiado).

• Principio multiplicativo. Principio aditivo. Eventos mutuamente excluyentes y eventos independientes.

Contenido extendido para los grados 10 y 11, primera parte

• Principios de conteo tales como el principio de inclusión-exclusión y el principio de la pichonera.

• Teoría de grafos: **árboles** y gráficas, problemas de conector mínimo y aplicaciones.

Contenido extendido para los grados 11 y 12, segunda parte

• Modelando con probabilidad, por ejemplo lotería, juegos de cartas, cumpleaños.

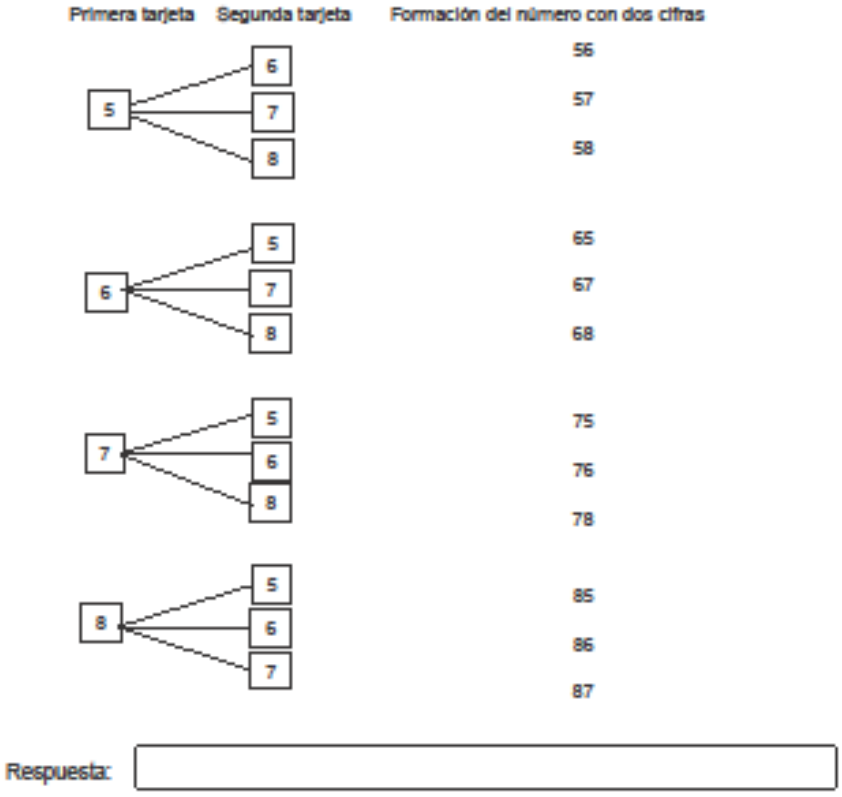
Durante los primeros 9 grados de enseñanza, es frecuente el empleo de los diagramas de árbol no propiamente como un tema de estudio en sí mismo, sino empleando las características de esta representación gráfica. La complejidad de los ejemplos y su nivel de dificultad es mayor que en los programas de estudio de otros países. Enseguida se exponen ejercicios relacionados con árboles, los cuales fueron incluidos en los libros de texto de la región de Shanghái.

Edición Educativa de Jiangsu. Matemáticas. Libro de tercer grado, p.68[105]

Números para posibles situaciones.

Hay cuatro tarjetas en la mesa numeradas con 5, 6, 7 y 8 escritos en las tarjetas. Al extraer dos de estas cuatro tarjetas una por una, puede formarse un número de dos dígitos. ¿Cuántos números de dos dígitos diferentes se pueden formar con estas cuatro tarjetas?

Puede crearse un **diagrama de árbol** para representar las distintas combinaciones:



Edición Educativa de Jiangsu. Matemáticas. Libro de cuarto grado, p.15

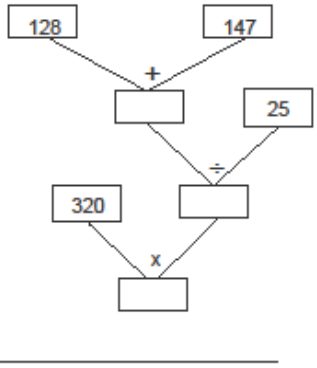
Ejercicio tres: Primero determina cuál es el orden de la operación, luego realiza la operación:

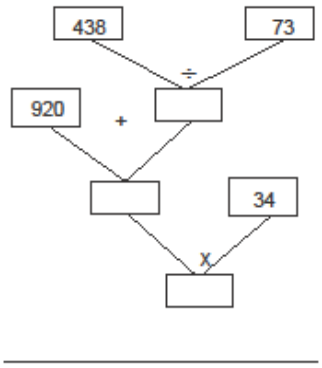
38 + 56 ÷ 7 x 4 450 + 390 ÷ 130 — 123

209 + 102 ÷ (52—35) 940 x [128 — (154 — 31)]

Realiza en orden las operaciones y escríbelas en los cuadros, luego ordena la fórmula sintetizándola:

[105] Traducido del chino por Oscar Balcázar, profesor de chino en el Centro de Enseñanza de Idiomas Acatlán, de la Facultad de Estudios Superiores de Acatlán.

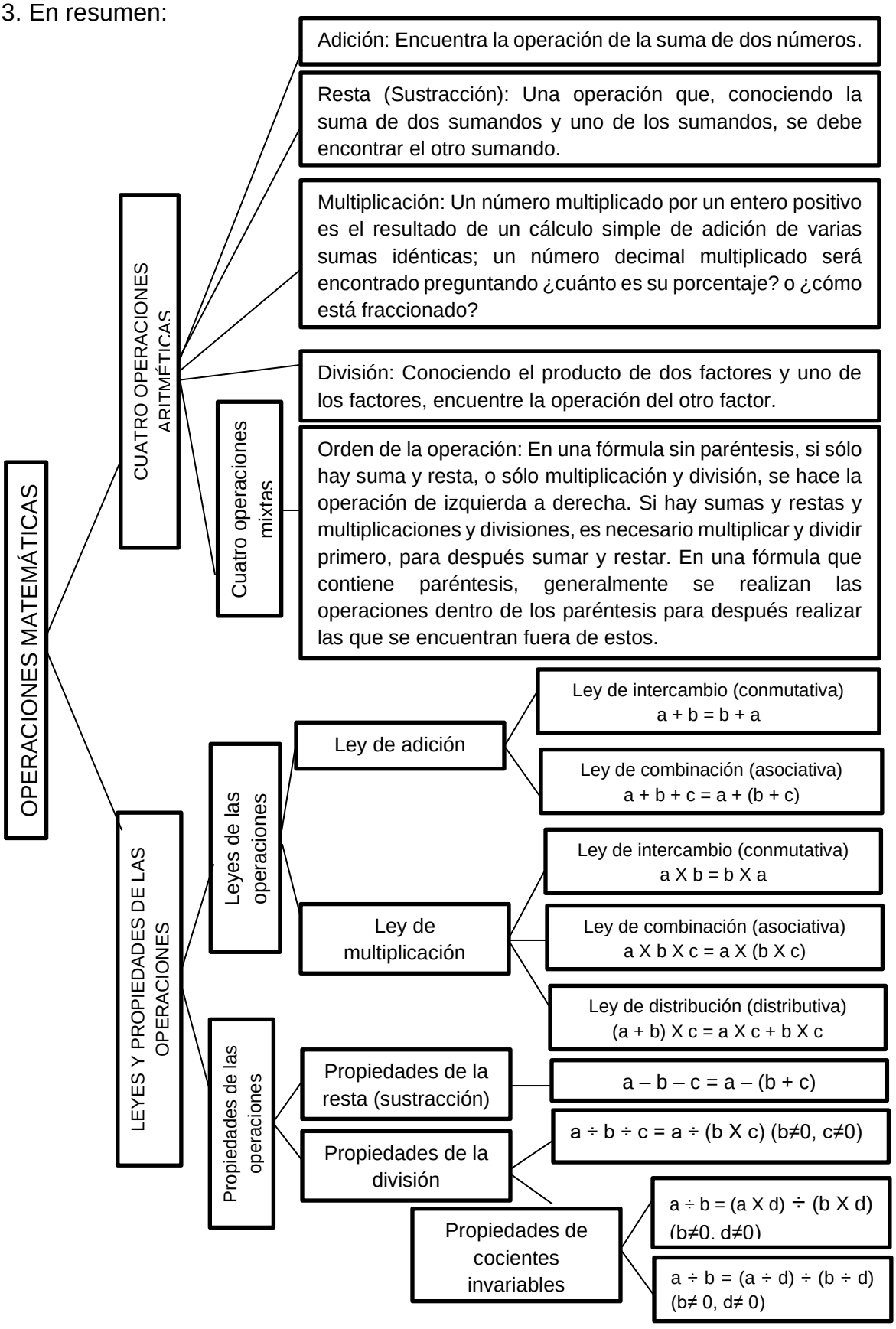




Un diagrama de árbol tiene un amplio alcance, el que se presenta a continuación se utilizó para estudiar aritmética

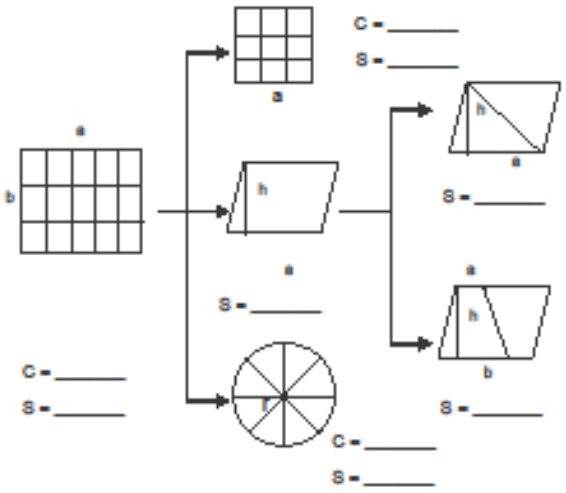
Edición Educativa de Jiangsu. Matemáticas. Libro de quinto grado, p.77

3. En resumen:



Edición de Educación Popular. Matemáticas Grado 6°, p. 8

[…] 2. Figuras y Geometría. Escribe la fórmula para calcular el perímetro y el área de las siguientes figuras (utiliza el diagrama)



Edición de Educación Popular. Escuela Secundaria Inferior. Matemáticas Grado 9°

25.2 Uso del método de enumeración para encontrar probabilidades, p.145

Ejercicio 3. Hay dos bolas idénticas en una primera bolsa marcadas con las letras A y B respectivamente. Tres bolas idénticas en una segunda bolsa se marcan con las letras C, D y E respectivamente. Dos bolas idénticas en una tercera bolsa están marcadas con las letras H e I, respectivamente. Una pequeña bola es tomada al azar de cada una de las tres bolsas.

De acuerdo con la información dada, se puede representar la probabilidad mediante un **diagrama de árbol**:

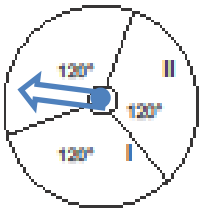
En el diagrama de árbol, se puede ver que hay 12 resultados posibles, a saber:

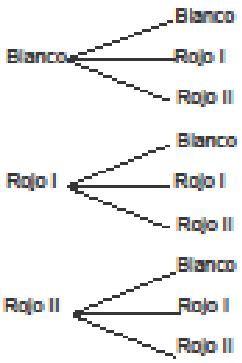
A	A	A	A	A	A	B	B	B	B	B	B
C	C	D	D	E	E	C	C	D	D	E	E
H	I	H	I	H	I	H	I	H	I	H	I

Escuela Secundaria Inferior.

Edición de Educación de Zhejiang. Matemáticas Grado 9, p. 50

EJERCICIO. La siguiente ruleta se ha girado dos veces, los resultados se muestran en el diagrama de árbol. ¿Cuál es la probabilidad de que en uno de los giros el resultado sea Blanco y en el otro sea Rojo I o Rojo II?





Entonces n = 3 X 3 = 9. La flecha del evento cae una vez en la zona de color blanco, y el otro cae en la zona de color rojo que contiene el número de resultados m = 4. Por consiguiente P = $\frac{4}{9}$

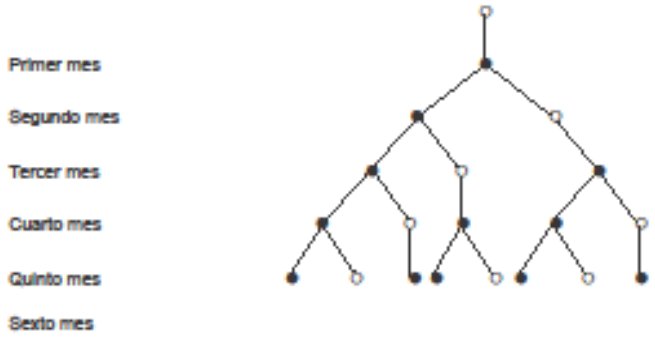
Escuela Secundaria Inferior

Edición de Educación de Zhejiang. Matemáticas Grado 12, p.59

SECUENCIA (SERIE NUMÉRICA) DE FIBONACCI:

Primeramente, tenemos un problema interesante: Imaginemos a un par de conejos recién nacidos que pasado un mes crecen hasta ser adultos. Al pasar el mes un nuevo par de conejos ha nacido. A partir de este punto, cada mes concebirán un par de conejos, si no suceden muertes, ¿cuántas parejas de conejos podrán reproducirse en un año a partir de una primera pareja?

Usamos • para representar una pareja de conejos adultos, y usamos ○ para representar una pareja de conejos pequeños. Supongamos que el nacimiento de la primera pareja se da a inicios de un mes determinado, la norma de la estadística mensual de parejas de conejos deberá ser calculado cada mes:



Recuerda, la función de parejas de conejos cada mes es F_n, por lo que:

$$F_1=1,\ F_2=1,\ F_3=2,\ F_4=3,\ F_5=5,\ F_6=8...$$

Al investigar las leyes o reglas de la secuencia (serie numérica), no es difícil darse cuenta, a partir del tercer elemento, que cada número es la suma de los dos números anteriores a éste, a saber:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad (n \in N)$$

De esta manera, podemos representarlo mediante una secuencia de números:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233….

Podemos saber, por lo tanto, que un par de conejos pueden reproducirse en 233 $(= F_{13})$ pares en un año.

República de la India

En el área de matemáticas, los programas de estudio enfatizan el razonamiento y la comprensión conceptual. Enseguida se expone el programa de estudio para educación básica vinculado con los diagramas de árbol y la combinatoria.

Tabla V.4 **Programa para clases a nivel elemental**

Clase VI	**Clase VII**	**Clase VIII**
Administración de datos (10 hrs)	**Administración de datos (15 hrs)**	**Administración de datos (15 hrs)**
(i) ¿Qué es un dato? - elección de datos para verificar una hipótesis (ii) Recolección y organización de datos-	(i) Recolección y organización de datos – elección de datos a recoger para verificar una hipótesis.	(i) Lectura de gráficos de barras, datos no agrupados, acomodo en grupos, representación de datos agrupados por medio

ejemplos de organización en barras y en una tabla. (iii) Pictograma- Necesidad de escalar en la interpretación y construcción de pictogramas. (iv) Elaboración de gráficos de barras para datos dados interpretando gráficos de barras.	(ii) Media, mediana y moda de datos no agrupados – entendiendo lo que representan. (iii) Construcción de gráficos de barras. (iv) El sentido de la probabilidad utilizando datos a través de experimentos. Noción del azar en eventos como el lanzamiento de monedas, dados, etc. Tabulación y conteo de ocurrencias de 1 a 6 en un número de lanzamientos. Comparación de la observación con aquella de una moneda. Observación de series de lanzamientos, noción de aleatoriedad.	de gráficos de barras, construcción e interpretación de gráficos de barras. (ii) Gráfico circular simple con números razonables de datos. **(iii)** Consolidación y generalización de la noción de azar en eventos como el de lanzar monedas, dados, etc. Relación con el azar en eventos de la vida. Representación visual de resultados frecuentes de lanzamientos repetidos de la misma clase de monedas y dados. Lanzamiento de un gran número de dados/monedas idénticos y agregando el resultado de los lanzamientos obtener un gran número de eventos elementales. Observar los números obtenidos en una gran cantidad de eventos repetidos. Comparar con los datos de una moneda. Observar cadenas de lanzamientos, noción de aleatoriedad.

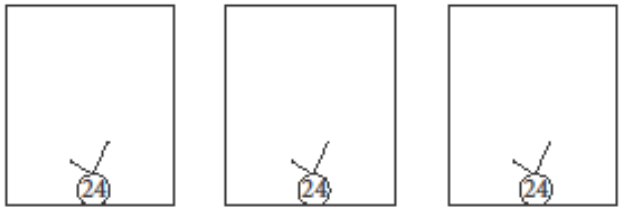
En el currículo de la India, existe una estructura similar a la que describe en el plan de estudio de la Provincia de Ontario. Esta estructura se refiere a los conocimientos y habilidades que los alumnos pueden adquirir en los diferentes ejes temáticos en los que se organizan los contenidos, como a continuación se presenta:

Matemáticas. Clase 5

Árbol de Factores, p.97

Observa el árbol de factores. Ahora bien, ¿puedes hacer otro árbol como éste?

¿De cuántas maneras puedes dibujar un árbol de factores para el número 24? Dibuja tres a continuación.



Intenta dibujar el árbol de factores utilizando otros números también.

Problemas de losetas

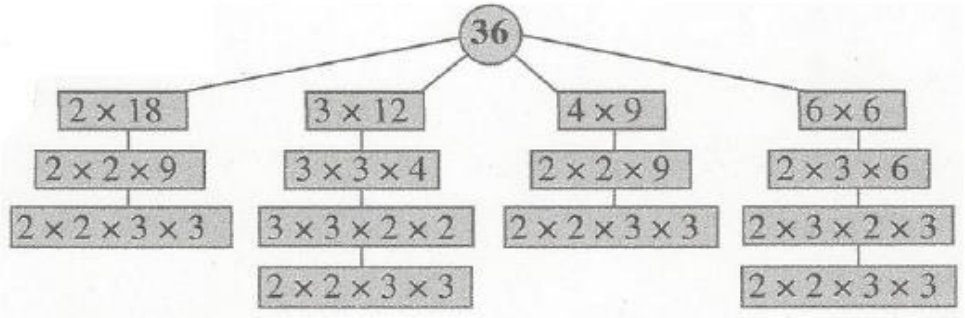
1) En la casa de Anu hay un jardín. En la parte media del jardín hay un camino. Decidieron colocar losetas en el camino utilizando tramos de 2 pies, de 3 pies y de 5 pies.

El albañil colocó la primera hilera con losetas de 2 pies, la segunda hilera con losetas de 3 pies y la tercera hilera con losetas de 5 pies. El albañil no cortó las losetas. Entonces, ¿cuál es el tramo más corto del camino? N.B. 1 PIE = 30.48 CM

Matemáticas. Clase 6, p. 60

3.7 Factorización en Números Primos

A la factorización de un número se denomina *factorización en números primos*.

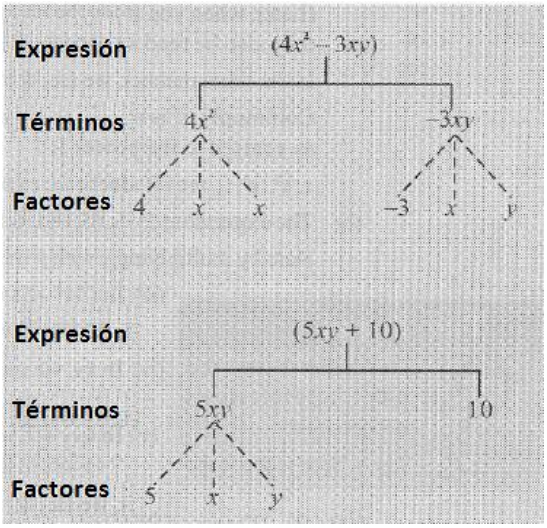


La factorización en números primos del número 36 es 2 x 2 x 3 x 3, es decir, es la única factorización en números primos del número 36.

Matemáticas. Clase 7.

Expresiones algebraicas, p. 231

Se pueden representar los términos y los factores de los términos de una expresión de manera cómoda y elegante por medio de un diagrama de árbol. El árbol para la expresión (***4x² – 3xy***) se muestra en la figura adyacente.



Nótese, en el diagrama de árbol, se utilizaron líneas punteadas para los factores y líneas continuas para los términos. Esto con el fin de evitar que se mezclen.

Dibújese un diagrama de árbol para la expresión ***5xy + 10***.

Los factores son tales que no pueden factorizarse más. Entonces, no se puede escribir ***5xy*** como ***5*** x ***xy***, porque ***xy*** puede factorizarse aún más. De modo similar, si ***x³*** fuera un término, se escribiría como ***x*** x ***x*** x ***x*** y no como ***x²*** x ***x***. También debe recordarse que el número **1** no se toma como un factor por separado.

Matemáticas. Clase 11

Permutaciones y Combinaciones, p. 135

Se nombran los tres pantalones como P_1, P_2, P_3 y las dos camisas como S_1, S_2. Entonces, estas seis posibilidades se pueden ilustrar en la Fig. 7.1.

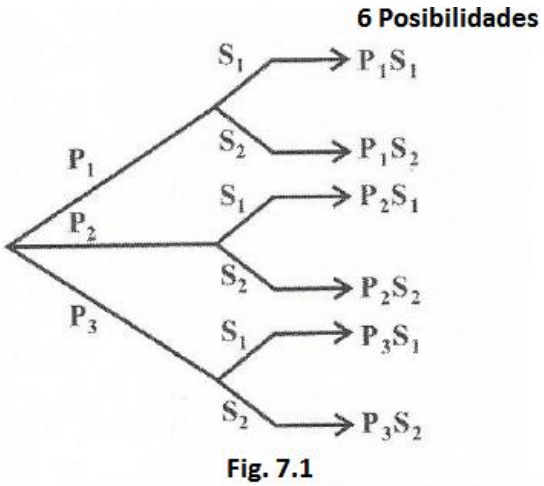


Fig. 7.1

Considérese otro problema del mismo tipo.

Sabnam tiene 2 mochilas, 3 loncheras y 2 botellas de agua. ¿De cuántas maneras puede llevar estos artículos (eligiendo uno de cada uno)?

Se puede elegir una mochila de 2 maneras diferentes. Una vez que se ha elegido una mochila, se puede elegir una lonchera de 3 maneras diferentes.

Por consiguiente, hay 2 x 3 = 6 pares de mochilas y una lonchera. Para cada uno de estos pares se puede elegir una botella de agua de 2 maneras diferentes.

Así pues, hay 6 x 2 = 12 maneras diferentes en las que Sabnam, puede llevar estos artículos a la escuela. Si se nombran las 2 mochilas como B1, B2, las tres loncheras como T1, T2, T3, y las dos botellas de agua como W1, W2, se pueden ilustrar estas posibilidades en la Fig. 7.2.

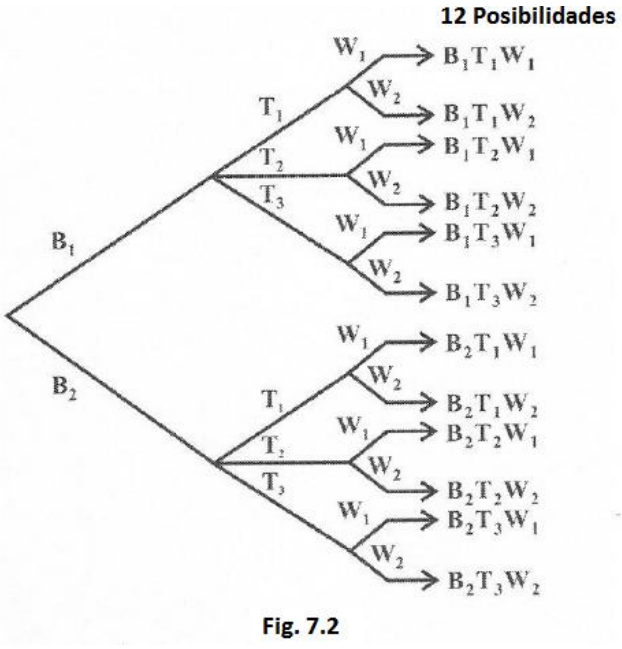


Fig. 7.2

Probabilidad, p. 537
Por lo tanto: $P(E \cap F) = \frac{2}{36}$

Entonces, la probabilidad que se requiere

$$P(E \mid F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{2}{5}$$

Para la probabilidad condicional planteada con anterioridad se ha considerado que los eventos elementales del experimento son igualmente probables y se utilizó la definición correspondiente de la probabilidad de un evento. Sin embargo, la misma definición también se puede utilizar en el caso general en donde los eventos elementales del espacio muestral no son igualmente probables, por consiguiente, se calculan las probabilidades P(E∩F) y P(F).

Tómese el ejemplo que sigue a continuación.

Ejemplo 7. Considérese el ejemplo de lanzar una moneda. Si la moneda cae de cara, se lanza de nuevo, pero si cae de cruz, entonces se lanza un dado. Encuentre la probabilidad condicional del evento en que 'el dado señala un número mayor a 4 siendo que 'existe al menos una cruz'.

Solución. Los resultados del experimento se pueden presentar de la siguiente manera diagramática denominada 'diagrama de árbol'.

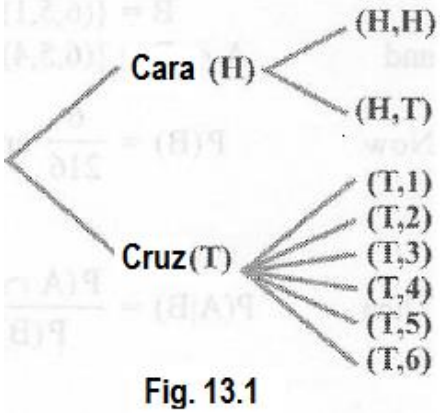


Fig. 13.1

El espacio de la muestra del experimento se puede describir como

S = {(H, H), (H, T), (T,1), (T,2), (T,3), (T,4), (T,5), (T,6)}

en donde (H, H) denota que ambos lanzamientos resultan en cara y (T, *i*); denotan que el primer lanzamiento resulta en una cruz y el número *i* aparece en el dado para *i* = 1,2,3,4,5,6.

Entonces, las probabilidades que se asignan a los 8 eventos elementales (H, H), (H, T), (T, 1), (T, 2), (T, 3), (T, 4), (T, 5), (T, 6)

son $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}$ respectivamente, lo que queda claro de la Fig. 13.1.

A partir de la información previa, es posible afirmar que los diagramas de árbol están presentes en los programas de matemáticas de educación de India desde los niveles elementales. Además de la combinatoria, los árboles también aparecen en otros temas, como el álgebra o la geometría según se evidencia en los libros de texto. Al igual que en los libros de texto de Chile, los libros de la India emplean diagramas de árbol para determinar la probabilidad condicional del evento B dado el evento A.

Federación de Rusia

Las autoridades locales y las escuelas tienen derecho a establecer una buena proporción del plan de estudios. En la práctica, cada escuela diseña su propio plan de estudios basándose en el estándar de educación estatal denominado Plan de Estudios Básico. Al analizar el contenido de este Plan relacionado con los diagramas de árbol y combinatoria se encuentra lo siguiente:

Plan de estudios básico

9. 5) Posesión de las habilidades para elaborar modelos probabilísticos de acuerdo con la condición del problema y calcular la probabilidad de ocurrencia de eventos, incluido **el uso de fórmulas de combinatoria** y los principales teoremas de la teoría de la probabilidad.

Un programa aproximado de educación básica general. Matemáticas. El plan de estudios aproximado de la asignatura determina la parte invariante (obligatoria) del plan de estudios y, junto con los requisitos del estándar relacionado con los resultados educativos, es una guía para elaborar programas de trabajo para todas las instituciones educativas que ofrecen educación básica general. El programa de

muestra no establece la secuencia para estudiar el material y distribuirlo en las clases. Los autores de libros de texto pueden ofrecer su propio enfoque para estructurar el material educativo y determinar la secuencia de su estudio.

Características del contenido de la educación básica general en matemáticas

[…] Aprender los conceptos básicos de combinatoria permitirá al estudiante considerar casos, enumerar y contar el número de opciones, incluso en los problemas aplicados más simples. […] Combinatoria. Resolver problemas combinatorios enumerando opciones. Regla combinatoria de multiplicación. Permutaciones y factoriales.

Tabla V.5 Contenido del programa. Primera opción de planificación

Contenido principal por tema	Descripción de las principales actividades del alumno
Matemáticas. Grados 5 y 6 (350 horas) 6. Estadística descriptiva. Probabilidad. Combinatoria. Conjuntos	
El concepto de experiencia y evento aleatorio. Evento creíble y evento imposible. Comparación de probabilidades. **Resolver problemas combinatorios enumerando opciones.**	Da ejemplos de eventos aleatorios, eventos creíbles e imposibles. Compara las probabilidades de que ocurran eventos; hace construcciones de voz usando las frases “más probable”, “improbable”, etc. **Busca todas las opciones posibles para combinar objetos, resalta aquellas combinaciones que cumplan condiciones específicas.**
Matemáticas. Grados 7, 8 y 9 (420 horas) Estadística, Elementos de combinatoria y Teoría de probabilidad	
[…] Fórmulas para el número de permutaciones, combinaciones, arreglos. Solución de problemas combinatorios. La fórmula binomial de Newton. Propiedades de los coeficientes binomiales. Triángulo de Pascal. Eventos elementales y complejos. El concepto de independencia de eventos. La probabilidad y frecuencia estadística de la ocurrencia de un evento.	[…] Ser capaz de: resolver los problemas combinatorios más simples mediante el método de enumeración, utilizando fórmulas bien conocidas, el triángulo de Pascal; calcular los coeficientes del binomio de Newton con la fórmula y el triángulo de Pascal; calcular las probabilidades de eventos en función del recuento de la cantidad de resultados (los casos más simples).

A continuación, se expone como ejemplo:

El Programa de Trabajo de Matemáticas de 5° Grado de la Escuela No. 39 “Centro de Educación Matemática y Física”. 2019-2020[106]

Elementos de estadística, probabilidad y problemas combinatorios

[106] La Escuela se encuentra en Riazán.

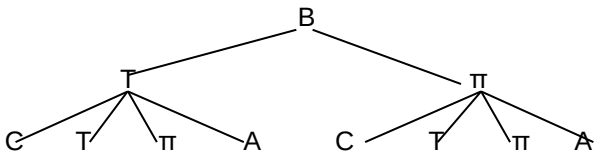
Evento aleatorio. Evento verosímil e imposible. La probabilidad de un evento aleatorio. Solución de problemas combinatorios	*Al final del curso, el alumno aprenderá a:* *• Resolver problemas combinatorios para encontrar el número de objetos o combinaciones.* *•Aprender algunas técnicas especiales para resolver problemas combinatorios.*

En contraste con los ejercicios, situaciones problema y problemas anteriores, en el caso ruso se seleccionaron ejercicios en los que se proporciona la solución correcta de antemano, y a partir de ella, el estudiante o el profesor construye un texto que corresponda a esa solución.

Matemática 3° grado. Peterson. Ejercicio No. 145

Volgograd – B, nombraremos los medios de transporte con las primeras letras de sus nombres: barco – T; avión – C; tren – π; autobús – A.

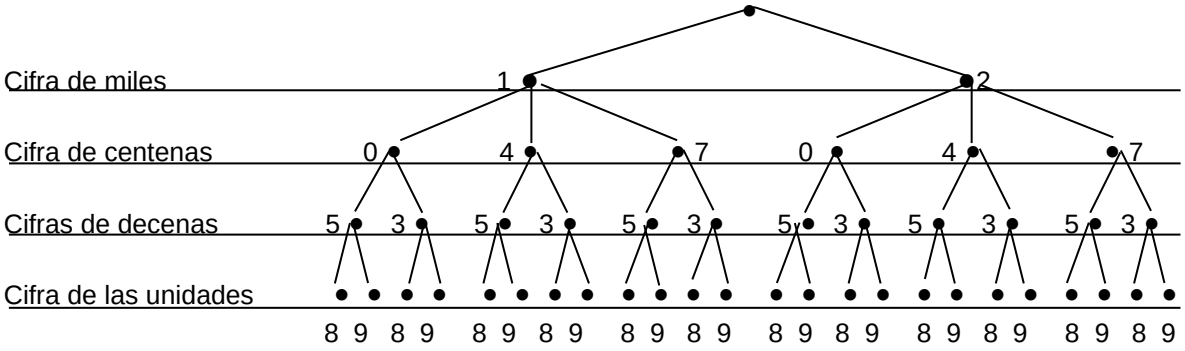
Construiremos el árbol de las variantes posibles:



TC, TT, Tπ, TA πC, πT, ππ, πA

Respuesta: 8 modos de llegar

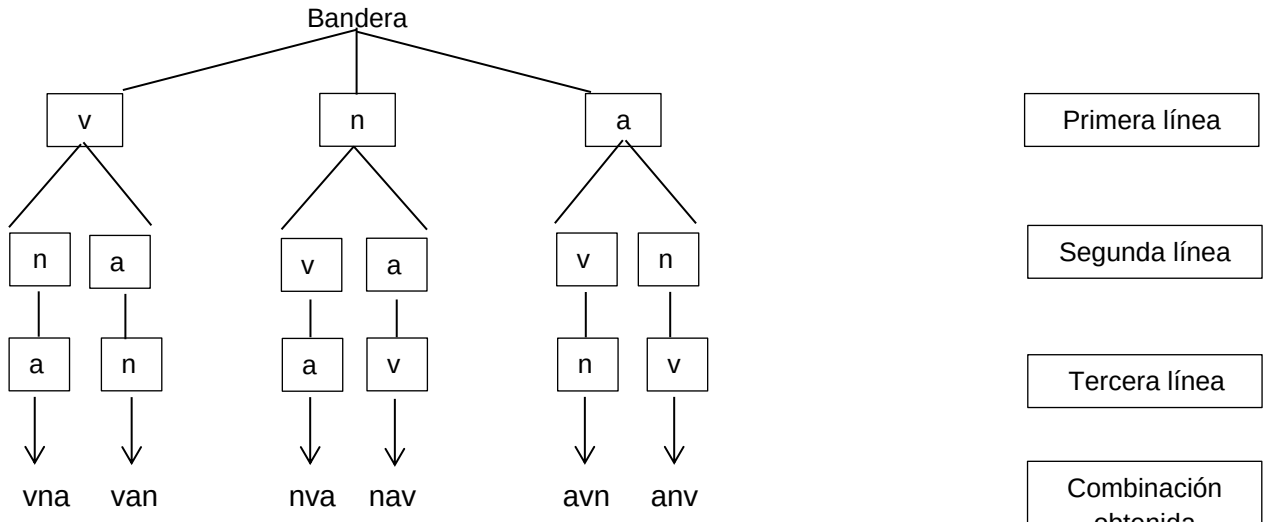
Matemática. 4° grado. Peterson. Ejercicio No. 19.



Tales números se pueden escribir 2 • 3 • 2 • 2 = 24. El menor de estos números 1038; el mayor 2759

Matemática 5° grado. Zubareva.

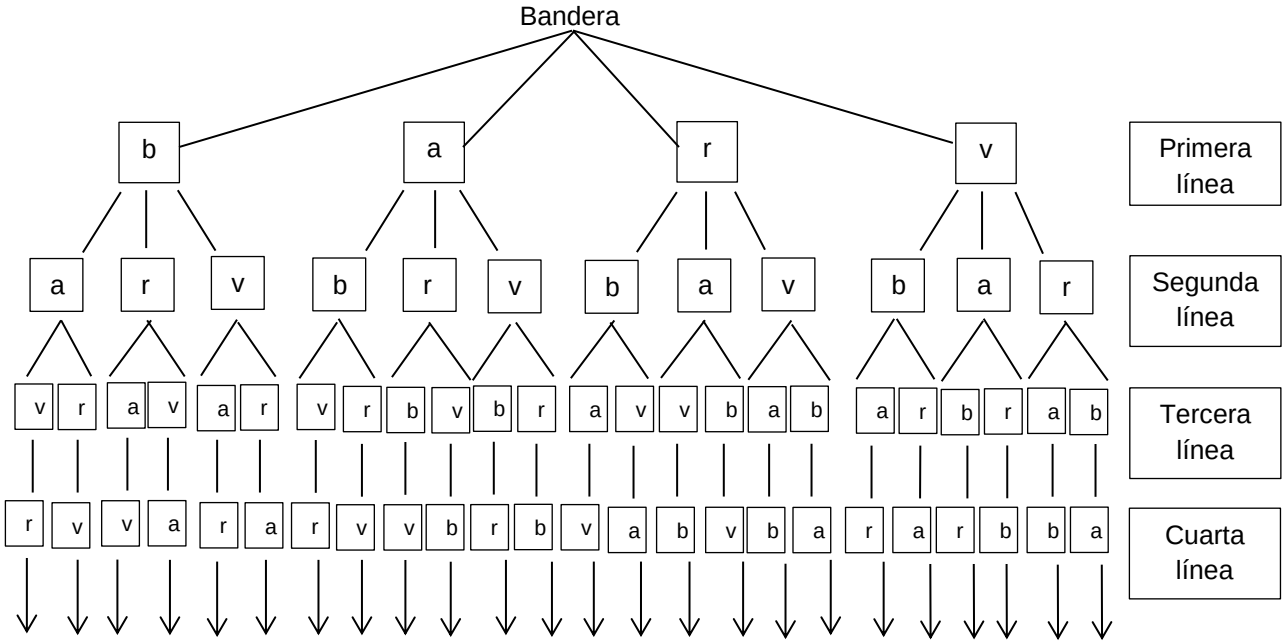
Ejercicio No. 969. Construir una imagen – esquema.



v = verde, n = negro, a = amarillo

Resultaron 6 combinaciones. Significa que los símbolos mencionados pueden ser utilizados en 6 países.

Ejercicio No. 970



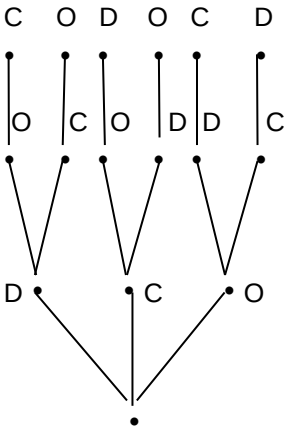
bavr barv brav brva bvar bvra abvr abrv arbv arvb avbr avrb rbav rbva ravb rabv rvab rvba vbar vbra vabr varb vrab vrba

b = blanco, a = azul, r = rojo, v = verde

Resultaron 24 combinaciones. Significa que los símbolos mencionados pueden ser utilizados por 24 países.

Matemáticas. 7° grado. Peterson

Ejercicio 1.9 Analiza el siguiente diagrama



L.	S.	K.
O	C	D
O	D	C
C	O	D
C	D	O
D	O	C
D	C	O

Se tienen 6 formas

Ejercicio 18.4

Escribe el texto del problema cuyos resultados son los siguientes:

Para examinar el tema de diagramas de árbol, combinatoria y probabilidad del programa de matemáticas de secundaria de México desde un punto de vista internacional, consideré un conjunto de elementos locales y generales. En el siguiente cuadro, se equiparan los contenidos de los siete programas analizados. El procedimiento empleado fue el siguiente: separar los temas de combinatoria y probabilidad de uno de los programas (Brasil), y registrar las ideas que comprenden con un punto en la columna correspondiente. A continuación, se separan de otro programa (Canadá) las ideas que comprende respecto de estos temas y se añaden al registro solo aquellos que no aparecieron en el programa anterior; los ya tomados en cuenta se señalan con un punto.

Tabla V.6

Comparación de los temas de probabilidad de los programas de secundaria de seis países y de México

	Brasil	Canadá	Chile	China	India	Rusia	México 2011	México 2017
Espacio muestral	•	•	•	•	•	•	•	•
Probabilidad teórica	•	•	•	•	•	•	•	•
Frecuencia relativa y probabilidad frecuencial	•	•	•	•	•	•	•	•
Principio multiplicativo de contar	•	•	•	•	•	•	•	
Diagramas de árbol	•	•	•	•	•	•	•	
Regla del producto para eventos independientes	•	•	•	•	•	•	•	
Cálculo de probabilidades	•	•	•	•	•	•	•	•
Modelación y simulación	•	•	•	•		•		•
Regla de la suma para eventos mutuamente excluyentes	•		•	•	•	•	•	•
Vocabulario y lenguaje de azar	•	•	•	•	•	•		
Solución de problemas de probabilidad	•	•	•	•	•	•	•	•
Usos sociales de procesos de azar		•	•	•	•	•		
Equiprobabilidad		•					•	
Predicción		•					•	
Combinatoria				•	•	•		

Hay aspectos comunes de los programas de 2017 de México, como el espacio muestral, con los programas de Brasil, Canadá, Chile, China, India y Rusia. Sin embargo, en los programas mexicanos no se mencionan los diagramas de árbol, el principio multiplicativo, la regla del producto para eventos independientes, la equiprobabilidad, la predicción y la combinatoria, los usos sociales de procesos de azar. Asimismo, no se promueven el uso de términos y expresiones relacionados con el azar.

En el caso mexicano la idea de espacio muestral no está vinculada con los árboles. Al suprimir los diagramas de árbol de los programas se eliminaron varios aprendizajes, como anticipar los resultados de una experiencia aleatoria y verificarla al realizar el experimento, el cálculo combinatorio, el cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto) o la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.

Todos los programas de estudio de los países seleccionados se enfocan en que los estudiantes calculen probabilidades y solucionen problemas de probabilidad desde un componente lúdico. Sin embargo, tienen en cuenta los procesos aleatorios haciendo énfasis en las técnicas de conteo, el cual se considera, en general, asociado a los diagramas de árbol. Es importante señalar que en los currículos de China, India y Rusia, la combinatoria se destaca como un tema independiente dentro de los programas de matemáticas.

En relación con las lecciones de los libros de texto vinculadas con los árboles, en general, inician con la noción, pasan a la definición, la introducción de ciertas técnicas y su posterior aplicación a problemas. En la mayoría de las tareas propuestas solo es necesario aplicar una operación combinatoria para resolverlas. Asimismo, los valores de los parámetros no son grandes y se da gran importancia al contexto algebraico y al cálculo. De la lectura de los libros de texto ya presentados llama la atención las actividades para minimizar las posibles dificultades en la resolución de problemas combinatorios, por ejemplo, enlistar todas las posibles opciones (o al menos una cantidad suficiente para poder generalizar la solución del problema), usando diagramas de árbol y con ello cuantificar para solucionar el problema.

Capítulo VI

Conclusiones

Del análisis expuesto anteriormente, se destacan los siguientes resultados acerca del discurso matemático escolar de los diagramas de árbol y la combinatoria en educación secundaria. Como se estableció al principio de esta tesis, la combinatoria es una rama de las matemáticas que posee múltiples aplicaciones y está relacionada con el estudio de arreglos construidos con los elementos de un conjunto, generalmente finito, de acuerdo con ciertas reglas. La combinatoria es susceptible de adaptarse a todos los niveles educativos y permite plantear problemas sencillos, contextualizados en actividades cotidianas, en los cuales se ponen en práctica diferentes estrategias de resolución.

En esta investigación, se mostró que los primeros elementos de la combinatoria se determinaron en los juegos de azar, en las relaciones de las posibilidades favorables o contrarias a los jugadores, por lo que se regularon de acuerdo con tales relaciones las posturas y las apuestas. Por una parte, las contribuciones de las culturas orientales a la combinatoria son significativas aunque no siempre han sido reconocidas en Occidente, lo que refleja la necesidad de una mayor inclusión y reconocimiento de la diversidad en la historia de las matemáticas. Por otra parte, antes de Fermat y de Pascal, no había principios y métodos para resolver los problemas combinatorios que generaban los juegos de azar al cálculo, ni habían resuelto preguntas de esta clase. Fue necesaria la incorporación de un nuevo paradigma que consideró nuevas estrategias de contar. Así, sin proponérselo, una actividad de ocio dio origen a una rama de las matemáticas con identidad propia.

En su origen, la combinatoria no entró en conflicto con ninguna teoría que le precediera, ya que surgió de manera informal e intuitiva, basada en ejemplos y problemas. Queda como inescrutable cuál es la naturaleza de este estadio, de qué manera el individuo inventa, o descubre que ha inventado un nuevo modo de conferir orden a la información que posee. En esta etapa, quienes fundaron la combinatoria manipularon objetos matemáticos sin centrarse demasiado en lo que dichos objetos

realmente significaban. La construcción de la teoría fue a partir de nuevos fundamentos, construcción que cambió algunos de sus métodos y aplicaciones, y que enfatizó más en el cálculo que en la teoría. Resalta el hecho de que el diagrama de árbol surgió de manera espontánea; fue empleado sin ninguna objeción.

Hubo un periodo de transición en el que se presentó una convergencia, pero nunca total entre los problemas que se podían resolver con los conocimientos anteriores y con el nuevo paradigma. Los matemáticos del siglo XVII (Huygens, Leibniz, Bernoulli) crearon definiciones, reunieron los diversos problemas relacionados con la combinatoria que ya habían sido resueltos y propusieron otros, reconocieron la analogía de un problema con los que ya se habían solucionado por el mismo método, incorporaron nuevas estrategias de contar (una de ellas el diagrama de árbol), construyeron una teoría general de las combinaciones y la aplicaron a situaciones relativas al azar; todo esto fue un proceso que no se llevó a cabo de la noche a la mañana. Una vez concluida la transición, había cambiado la visión de la combinatoria y sus métodos.

Al correr el tiempo, con Cayley se inició la teoría de grafos teniendo como antecedente la teoría matemática de isómeros y el estudio de los árboles. La historia de la combinatoria y de los diagramas de árbol que se ha narrado aquí sugiere una teoría perfectamente acabada. Sin embargo, esta historia aún no se ha terminado y los matemáticos actuales se enfrentan a problemas de combinatoria que pueden llevar a avances tan notables como los expuestos anteriormente. De este modo, la combinatoria sigue su propio desarrollo. Las nuevas aplicaciones como la química combinatoria o la optimización combinatoria, al margen de su propia utilidad, son necesarias para el progreso de otras ciencias. En suma, es a través de nuevos problemas y aplicaciones como la combinatoria está llamada a progresar; estos elementos constituyen la fuente de donde brotarán nuevas ramas de la combinatoria.

Asimismo, en este trabajo se explicó que el origen de la instrucción en una materia de estudio es la transmisión de las ideas fundamentales, como los diagramas de árbol, que deben estar presentes en todas las etapas del conocimiento, para

desarrollarlas y formalizarlas gradualmente. Además, se expuso cómo los modelos explicativos intuitivos son empleados en la enseñanza cuando las operaciones combinatorias son visualizadas mediante los diagramas de árbol (Heitele,1975). También se explicó por qué las actividades ejecutantes-icónicas dominan solamente en el plano intuitivo y las representaciones simbólicas en el plano formal (Fischbein,1975). El análisis de la literatura seleccionada para el desarrollo de esta investigación contribuyó al logro del primero de los objetivos generales: exponer la importancia de conocer algunos conceptos elementales de la combinatoria, entre ellos los diagramas de árbol.

A lo largo de esta tesis se evidenció que en los planes y programas de estudio de la educación primaria y secundaria se encuentran ideas estocásticas fundamentales. Se acepta que la intuición es un proceso riguroso, pero necesita de una instrucción. Así tenemos que las creencias intuitivas (“yo creo que”, “es más seguro que”) son normadas y los eventos obtienen su probabilidad en el intervalo [0,1].

Es importante destacar que no se llevaron a cabo evaluaciones preliminares antes de implementar cambios en los planes y programas para determinar los resultados de la propuesta para la enseñanza de los diagramas de árbol y la combinatoria. En cuanto a las diferencias entre los planes de estudios, éstas se justificaron a partir de diferentes reformas: una de ellas fue elevar la calidad educativa. Los propósitos de enseñar matemáticas fueron resolver ejercicios, problemas y situaciones problema, el desarrollo de competencias para la vida y el razonamiento matemático. Sin embargo, desde los programas de 1932 hasta los de 2017, persistió la misma visión: el planteamiento y la resolución de problemas son el medio para construir los conocimientos matemáticos.

Se elaboraron planes de estudio como los de 2011 y 2017 en los que se buscó el logro de conductas complejas a través de conductas simples. Ahora bien, aun cuando todo estudiante tuviera la capacidad de desarrollar por sí mismo caminos para alcanzar objetivos complejos a partir de elementos como el conocimiento de terminología o de hechos específicos, dar por verdadera esta capacidad al momento

de elaborar un programa de estudio colocaría al alumno en gran desventaja respecto de mejores opciones. Los programas de estudio tendrían que modificarse gradualmente para no introducir choques al sistema con el cambio total. Se observó también que los cambios en los currículums se han fundamentado en factores recurrentes.

En el tema de los planes de estudio, es posible afirmar que otra de las finalidades de los planes de secundaria fue la articulación, continuación y ampliación de la educación primaria. Es más, en los de 1993, 2006 y 2017, se estableció la congruencia y continuidad del aprendizaje entre los niveles de preescolar, primaria y secundaria para conseguir la formación general común. Entre los objetivos propuestos en los programas correspondientes a estos planes, se establecieron encontrar regularidades que permitan acortar caminos para hallar soluciones; anticipar resultados en problemas de conteo, con base en la identificación de regularidades; verificar los resultados mediante arreglos rectangulares, diagramas de árbol u otros recursos, encontrar procedimientos sistemáticos de enumeración y enunciar algunas expresiones algebraicas de recuento sencillas, combinaciones sin repetición, permutaciones, y espacio muestral.

Los diagramas de árbol en los programas de estudio de educación básica en México representan un fenómeno interesante. Su aparición y su permanencia durante casi cuatro décadas reflejan las dinámicas de cambio y continuidad en los planes de estudio. Aunque su enseñanza fue disminuyendo gradualmente con el tiempo, el hecho de que se mantuviera aún dentro de los mismos contextos y lenguaje de enseñanza sugiere que tienen un papel significativo en la formación de los estudiantes. No se explicaron las razones para su exclusión de los planes de estudio.

Además, la omisión de los diagramas de árbol y la combinatoria puede resultar en una educación que no cubre todas las áreas necesarias para el aprendizaje de los alumnos. Cada revisión curricular trae consigo la oportunidad de mejorar y ajustar los contenidos; entonces es crucial que todos los conceptos, incluidos los árboles y la combinatoria, se consideren y se integren adecuadamente. La exclusión de los

diagramas de árbol en el estudio, más allá de la aritmética o la probabilidad, puede ser una oportunidad pérdida para explorar su potencial en otras áreas. La integración de los árboles en diferentes lecciones de álgebra, geometría y estadística puede enriquecer la comprensión de los estudiantes y permitirles aplicar sus conocimientos de manera más efectiva en la resolución de problemas. Al relacionar los árboles con otros temas, se fomenta una apreciación más profunda de las interconexiones matemáticas. Asimismo, el diagrama de árbol debería de enriquecerse con más información; el propósito es construir árboles con una diversidad más amplia de formas.

En la educación básica, ha sido un desacierto considerar a la combinatoria como complementaria de la probabilidad. En la educación secundaria, los diagramas de árbol se han utilizado en ejercicios y problemas relacionados con la construcción de permutaciones (modelo de colocación), con ordenaciones y combinaciones (modelo de selección), ordinarias o con repetición, y con la idea de remarcar la estructura multiplicativa de estas situaciones. En el cambio de un plan a otro, surgieron diferentes propósitos y temas, pero, a medida que se profundizó en el estudio, se descubrió que algunos de estos son variaciones o repeticiones del mismo concepto.

En los programas que propusieron estudiar el enfoque clásico de la probabilidad, éste se ha centrado en ejercitar el razonamiento, por lo que ha ofrecido una base sólida para el pensamiento crítico y analítico. El enfoque frecuencial responde a la demanda de habilidades aplicables y conocimientos directamente relacionados con la experiencia cotidiana. Sin embargo, la transición del enfoque clásico de la probabilidad al frecuencial sugiere una preferencia por tratamientos que proporcionen resultados tangibles y habilidades utilitarias, lo cual puede ser indicativo de un cambio en los valores educativos hacia la funcionalidad y la inmediatez en la aplicación del conocimiento. Esta perspectiva se ve aplicada en los programas de 2006, 2011 y 2017.

Si el propósito es que los alumnos resuelvan problemas de probabilidad, entonces no es posible prescindir del lenguaje conjuntista. La capacidad de definir y manipular conjuntos con claridad es necesaria para evitar ambigüedades y errores de interpretación de información. Los diagramas de árbol de conjuntos son útiles para

representar relaciones entre conjuntos como uniones, intersecciones, diferencias y complementos, lo que ayuda a resolver problemas de relación lógica entre conjuntos.

La enseñanza de los árboles es sugerida en los diseños curriculares para la educación secundaria de varios países debido a sus múltiples aplicaciones dentro de la propia matemática, en otras disciplinas y en la vida cotidiana. Estas propuestas se podrían considerar apegadas al enfoque constructivista. Los objetivos específicos se encuentran distribuidos en su mayor parte en niveles de aplicación, comprensión y algoritmia. Al explorar cómo se enseñan los diagramas de árbol en los planes y programas de estudio de educación básica en México y al examinar los planes de estudio de matemáticas de los países seleccionados, se cumplió el segundo objetivo general establecido en esta investigación.

En realidad, los planes y programas de educación básica no repararon en que la enseñanza de los diagramas de árbol permite abandonar el énfasis en la unicidad de un resultado; por ejemplo, en los experimentos aleatorios, se obtiene más de un resultado individual y cada resultado individual no depende de los resultados previos. Además, las actividades sugeridas en este tema se encuentran en los niveles taxonómicos elementales (terminología, hechos específicos y comprensión). Los casos en los que se pretenda alcanzar objetivos específicos de alto nivel (síntesis o evaluación) con actividades de los primeros niveles (conocimiento) pueden considerarse como errores metodológicos del programa.

La concentración de una buena parte de las actividades sugeridas en los primeros niveles taxonómicos influye en la interpretación y en el desarrollo del programa por parte del profesor al adaptar a sus propios conocimientos los objetos por enseñar. Si no se cuenta con experiencias de aprendizaje adecuadas, se corre el riesgo de que el maestro utilice las propias actividades como experiencias de aprendizaje. La enseñanza de los árboles se debe potenciar también en la formación de profesores.

Los resultados de las investigaciones en el tema de la formación de maestros han mostrado que los problemas que enfrentan se relacionan fundamentalmente con

la combinatoria. Muy pocos demuestran habilidad para usar los diagramas de árbol (Salinas, 2007). El plan de estudios 2018 de la Licenciatura en Educación Primaria incluye el estudio del diagrama de árbol. Sin embargo, no se explica por qué el concepto posee interés o utilidad especial. El tema se abandona en el plan de estudios de la Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Secundaria. La renovación del plan de estudios y el cambio en los enfoques didácticos no siempre se traducen en una transformación de las prácticas de los profesores.

Existe una distancia importante entre el enfoque de enseñanza expresado en los programas oficiales y el enfoque implícito en los libros de texto. Si el libro de texto es lo dominante en las prácticas de enseñanza, entonces el enfoque y las orientaciones didácticas propuestas en el programa oficial tienen pocas posibilidades de concretarse en las aulas. En los libros de texto de educación básica en México, hasta la edición 2019, las situaciones de enseñanza relacionadas con los diagramas de árbol se realizaron de forma aislada y no se les relacionó con otros contenidos matemáticos, es decir, existió discontinuidad en el desarrollo de los temas de combinatoria y diagramas de árbol al pasar de un programa a otro. No ocurrió un intento de permitir construir árboles para resolver los problemas propuestos; tampoco se propició que el alumno analizara el tipo de agrupamiento involucrado en el problema. Este tratamiento se repitió edición tras edición.

Respecto a los libros de texto empleados en los países seleccionados en esta investigación, existen analogías en la construcción de los problemas, ya que presentan enunciados semejantes unos con otros, lo que estimula al alumno a asociar ciertas palabras clave o el tipo de fórmula que debe utilizar. Esta situación puede causar dificultades cuando el estudiante se enfrente a un enunciado diferente de los que está acostumbrado a resolver. En estos libros, las operaciones combinatorias más frecuentes son las combinaciones y las permutaciones. En relación con los ejercicios o problemas que involucran diagramas de árbol, consta de dos o tres fases y mantienen una simetría, a excepción de los árboles que se emplean para calcular la probabilidad condicional del evento B dado el evento A. Estos se muestran en los libros chilenos e indios.

Por otra parte, en los libros de texto mexicanos, el número de ejercicios relacionados con los diagramas de árbol y la combinatoria fue mayor en los de la generación 1972; a partir de esa etapa se observó una tendencia hacia la reducción de éstos, aunque el contexto y el tipo de preguntas permaneció. Además, no hubo diversidad en cuanto a la temática en la que se presentaban. Esta misma situación aparece en los programas y en los libros de texto de los países que fueron seleccionados en esta tesis. Al examinar cómo se abordan los diagramas de árbol en los libros de texto para la educación secundaria y adicionalmente evaluar cómo se presentan estos diagramas en los textos oficiales utilizados en las naciones seleccionadas, se alcanzó el tercero de los objetivos generales propuestos en este trabajo.

En los planes y programas de educación secundaria, se advierte la influencia de los planteamientos de las organizaciones que conciben, construyen y aplican los exámenes internacionales. En 2022, se realizó la más reciente aplicación de la prueba PISA. Los resultados de aprendizaje de matemáticas son preocupantes y no muestran una mejora respecto a otros resultados de evaluación. Los resultados de México en esta prueba deben ser motivo para abatir los niveles por debajo de 2 en todos los estudiantes matriculados e incrementar significativamente los niveles 3, 4 y 5. En las pruebas a gran escala nacionales e internacionales, están presentes reactivos relacionados con la combinatoria y otros que pueden responderse empleando diagramas de árbol, sin embargo, como se vio en páginas anteriores, tanto la combinatoria como los árboles fueron omitidos de los planes y programas.

Por lo anterior, el tema de diagramas de árbol, el de técnicas de conteo y la combinatoria deben incorporarse a los programas de estudio de matemáticas de educación secundaria. Los árboles, por su importancia, ameritan ser un tema de estudio independiente del de probabilidad. Se requiere una propuesta institucional que incluya a la combinatoria y a los diagramas de árbol de manera pertinente, de tal modo que se distingan de las demás disciplinas en los programas de matemáticas desde la educación preescolar. Si este desarrollo se inicia a temprana edad, se estarán

formando habilidades para razonar y argumentar en contextos que se presten a ser analizados mediante los diagramas de árbol.

La investigación sobre el tema de los diagramas de árbol ha descrito dificultades en su construcción e interpretación. Por ejemplo, al tratar de elaborar un árbol como ayuda a la enumeración, los estudiantes no llegan a completarlo o se equivocan en el número de nudos o ramas, por lo que terminan en soluciones incorrectas del problema y confunden el tipo de objetos por combinar, la existencia o falta de orden, y la posibilidad o no de repetir elementos.

El tema de diagramas de árbol puede ser tratado al principio, a la mitad o incluso en forma reiterada a lo largo del ciclo escolar, al emplear conceptos matemáticos como fracciones, números decimales, porcentajes, parejas ordenadas, técnicas de recuento para el cálculo de probabilidades, etcétera. Los alumnos resuelven, en principio, las situaciones problema intuitivamente y poco a poco se les presentan problemas más complejos lo cual institucionaliza el concepto de diagrama de árbol con el propósito de que discutan las soluciones encontradas.

En esta etapa, se plantean diversos problemas construidos con pocos elementos para que los estudiantes se familiaricen con el razonamiento combinatorio sin necesidad de detenerse en casos particulares, para después continuar con situaciones problema sobre ordenaciones, permutaciones y combinaciones que puedan ser resueltas contando, a fin de que estas actividades se realicen en un planteamiento que permita desarrollarlas de manera individual y grupal, y no necesariamente dentro de un salón de clases.

En relación con los planteamientos de los problemas de combinatoria, los enunciados se deben elaborar cuidadosamente formulando cada problema con claridad y trabajando en su interpretación a través de representaciones como el diagrama de árbol. Por ejemplo, sería posible formular dos problemas que sólo sean diferentes en el modelo combinatorio al que pertenecen y pedir a los estudiantes que analicen el texto. Otra alternativa es trabajar con situaciones problema en las que los estudiantes sólo usen la representación para llegar al número de resultados posibles,

sin introducirlos al principio de contar. En el Anexo I de este documento académico, se encuentra un conjunto de ejercicios y problemas originales de mi autoría, enfocados en la enseñanza de diagramas de árbol dentro de la educación básica. Con ésta actividad, se consiguió alcanzar el cuarto objetivo propuesto en este estudio.

Es conveniente entender el conocimiento histórico de las matemáticas como un tema que se eslabona a la enseñanza de esta materia y ha de estar siempre presente en la construcción del conocimiento matemático durante la educación secundaria. Es de gran importancia ubicar al alumno en el momento histórico para que él mismo comprenda las razones del surgimiento del tema. En los libros de texto presentados, no existe la intención de explorar hechos históricos relacionados con los diagramas de árbol, ya que no hay ningún comentario sobre el surgimiento de estos. Análogamente, si los profesores saben de dónde provienen los conceptos y qué controversias generó su primera formulación, estarán mejor preparados para utilizarlos como parte de su conocimiento matemático.

REFERENCIAS

Andrini, A., y Vasconcellos, M.J. (2015). *Praticando Matemática 9*. 3ª ed. Sao Paulo: Editora do Brasil, pp. 133-140.

Antequera, A.T. y Espinel, M.C. (2013). *Conocimientos matemáticos de profesores en planificación de competencias deportivas*. Recuperado de:

https://funes.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/tainacan-items/32454/1216318/Antequera2013ConocimientosSEIEM.pdf

Appel, R. et al. (2009). *Math Makes Sense 6*. United States: Pearson Education Canada, pp. 64-65.

Baron, L. et al. (2008). *Math Makes Sense 8*. United States: Pearson Education Canada, pp. 407-427.

____ (2009). *Math Makes Sense 9.* United States: Pearson Education Canada, p. 87.

Batanero, C., Godino, J. C., y Navarro-Pelayo, V. (1994). *Razonamiento Combinatorio.* Madrid: Síntesis.

Beer, G. (2000). *Darwin's plots. Evolutionary narrative in Darwin, Georg Eliot and nineteenth-century fiction.* Cambridge: Cambridge University Press.

Bell, E. T. (1985). *Historia de las Matemáticas* (Trad. R. Ortiz), pp.142-145. México: Fondo de Cultura Económica. (Obra original publicada en 1940).

Bernoulli, J. (1713). *Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ars Connjectandi)*. Tomo II. Traducido por R. Haussner (1899). Recuperado de:

https://archive.org/details/wahrscheinlichke03bernuoft

Biggs, N. L. (1979). The roots of combinatorics. *Historia Mathematica*, 6, 109-136

Bruner, J. (1960). *The process of education.* Cambridge, E.E.U.U.: Harvard University Press.

Burgos, M., Castillo, M. y Godino, J. (2022). *Elaboración de una guía de análisis de libros de texto de matemáticas basada en la teoría de la idoneidad didáctica.* Educacão e Pesquisa, São Paulo, v.48.

Castro, C. (2019). *Cuaderno de Ejercicios. Matemáticas 6° básico*. Santiago, Chile: Santillana del Pacífico S.A. de Ediciones, p. 15.

Céspedes, M.J., Burgos, M., y Godino, J. D. (2022). *Elaboración de una guía de análisis de libros de texto de matemáticas basada en la teoría de la idoneidad didáctica*. Recuperado de: http://www.scielo.br/j/ep/a/NXbLBWFwzFpfTSp97gYRjsh/?format=pdf&lang=es

Cayley, A. (1856). *Los documentos matemáticos recogidos*. Tomo III. Recuperado de: https://archive.org/details/collectedmathema03caylouft/page/n242.

____ (1889). A theorem on trees. *The Quarterly Journal of Mathematics,* 23, 376-378.

Chung, C., y Reimers, F. (eds.). (2016). *Enseñanza y aprendizaje en el siglo XXI: Metas, políticas educativas y currículo en seis países.* México: FCE.

Coll, C. (febrero, 2013). El currículo escolar en el marco de la nueva ecología del aprendizaje. *Revista Aula, (219).* Recuperado de: http://hdl.handle.net/2445/53975

Collete, J.-P. (1998). *Historia de las matemáticas,* Vol II, México: siglo veintiuno editores, p. 36

Couper, A. (1858). On a new chemical theory. *The London, Edinburgh, and Dublin. Philosophical Magazine and Journal of Science, 16(4),* 104-116.

Crosland, M. (1993). *Estudios Históricos en el Lenguaje de la Química*. México: UNAM, Instituto de Investigaciones Filosóficas.

Dante, L.R. (2015a). *Projeto Teláris Matemática 6*. 2ed. Sao Paulo: Editora Ática, pp. 53, 116, 237.

____ (2015b). *Projeto Teláris Matemática 9*. 2ed. Sao Paulo: Editora Ática, pp. 348-353.

David, F.N. (1998). *Games, Gods and Gambling. A History of Probability and Statistical Ideas.* Mineola, N.Y.: Dover.

Diaz, M. (1995). *Estrategias de enseñanza en la escuela secundaria: un estudio etnográfico*. México: DIE-CINVESTAV

Dirección General de Educación Superior para Profesionales de la Educación. DGESPE (2020). *Licenciatura en Educación Primaria. Programa del Curso Probabilidad y Estadística. Quinto Semestre.* Recuperado de: https://drive.google.com/file/d/192iZ4Aq4eJW5oodTi3S0LVJgQ140fw1t/view

____ (2020). *Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Secundaria. Programa del curso Estadística inferencial. Quinto Semestre.* Recuperado de:

https://drive.google.com/file/d/1Z-BzhVUMS_A0gil2wbMboZgUTZnOUPfU/view

Educación de Jiangsu. (n.d[107].) *Matemáticas. Libro de tercer grado*. Recuperado de: http://shuxue9.com/sujiao/xx3x/ebook/68.html

Educación de Jiangsu. (n.d.) *Matemáticas. Libro de cuarto grado.* Recuperado de: http://shuxue9.com/sujiao/xx4x/ebook/77.html

Educación Popular. (n.d.). *Matemáticas Grado Sexto*. Recuperado de: http://shuxue9.com/pep/xx6x/ebook/92.html

Educación Popular. (n.d). *Matemáticas Grado Noveno.* Recuperado de: http://shuxue9.com/pep/cz9s/ebook/145.html

Education Standars Authority. *New Syllabuses, board of Studies Teaching & Educational Standards NSW* Australia. (2012). Recuperado de: http://syllabus.nesa.nsw.edu.au/science/.

Falcón et al. (1995). *Condiciones en que se realiza la enseñanza secundaria. Dos estudios de caso.* Cd. Victoria, Tams: Informe de investigación presentado a la SEP.

Fermat, P., Tannery, P. y Henry, C. Paris (1896) *Oeuvres de Fermat*. Tomo III. Recuperado de: https://archive.org/details/oeuvresdefermat03ferm/page/n273.

Fernandes, I.M., Pires, D. y Villamañan, R.M. (2014). Educación científica con enfoque ciencia-tecnología-sociedad-ambiente: construcción de un instrumento de análisis de las directrices curriculares. *Formación Universitaria*, *7(5),* 23 –32. Recuperado de: http://www.scielo.cl/scielo.php?script=sci_arttext&pi-d=S0718-50062014000500004

Fernández, F. (2005). El currículum en la educación intercultural bilingüe algunas reflexiones acerca de la diversidad cultural en la educación. *Cuadernos interculturales,* 3 (4), 7-25.

[107] * n.d. notación en inglés significa sin fecha y en español se escribe s.f.

Fernández, S. (enero-junio, 2011). Nuevos desarrollos y propuestas curriculares. Programar a partir del MCER. *Suplementos* de MarcoELE, *(12)*. Recuperado de: http://marcoele.com/descargas/12/fernandez-programas.pd

Fischbein, E. (1975). Combinatorics. En J. Hintikka (Ed.), *The intuitive source of probabilistic thinkingin children* (pp. 99-116). Holland: Dordrecht.

Gal, I. (2005). Towards "probability literacy" for citizens: building blocks and instructional dilemmas. En G. Jones (ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 43-71). New York: Springer.

Garneau, M. et al. (2007). *Math Make Sense 7.* United States: Pearson Education Canada, pp. 284-297.

Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* RELIME, *14 (2),* 203-231.

Godino, J., y Batanero, C. (1996). *Azar y probabilidad.* Madrid: Síntesis.

Hacking, I. (1995). *El surgimiento de la probabilidad. Un studio filosófico de las ideas tempranas acerca de la probabilidad, la inducción y la inferencia estadística*. Barcelona: Gedisa.

Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics, 6,* 187-205.

Heredia, B. (coord.). (2016). *Consulta sobre el Modelo Educativo 2016,* México, PIPE-CIDE. Recuperado de: https://framework-gb.cdn.gob.mx/happenings/modelo-educativo-sep/05_Informe_ME2016.pdf

Hernández, F., y Ventura, M. (1992). *Organización del currículum por proyectos de trabajo. El conocimiento es un caleidoscopio.* Barcelona: Universidad de Barcelona.

Huygens, C. (1950). *Oeuvres complètes.* Digitale bibliotetheek voor the Nederlandse letteren. Recuperado de: https://www.dbnl.org/tekst/huyg003oeuv00_01/

International Association for the Evaluation of Educational Achievement. IEA (1999). *TIMSS 1999. Released Items. Mathematics-Eighth* Grade, Boston: TIMSS & PIRLS International Study Center. Recuperado de: http://timss.bc.edu/timss1999i/pdf/t99math_items.pdf

___ (2007). *TIMSS 2007. Released Items. Mathematics-Eighth* Grade, Boston: TIMSS & PIRLS International Study Center. Recuperado de: https://timssandpirls.bc.edu/TIMSS2007/items.html

___ (2011). *TIMSS 2011. Released Items. Mathematics-Eighth* Grade, Boston: TIMSS & PIRLS International Study Center. Recuperado de: https://timssandpirls.bc.edu/timss2011/international-release-items.html

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. INEE (2008). *El aprendizaje en tercero de preescolar en México*. Recuperado de: http://www.inee.edu.mx/images/stories/Publicaciones/Resultados_aprendizaje/preescolar/Completo/preescolar08_completoa.pdf

____ (2007). *Examen Enlace 2007. Secundaria, 3er. Grado*. México: INEE.

____ (2008). *Examen Enlace 2008. Secundaria, 3er. Grado*. México: INEE.

____ (2009). *Examen Enlace 2009. Secundaria, 1er. Grado, 2do. Grado.* México: INEE.

____ (2010). *Examen Enlace 2010. Secundaria, 1er. Grado, 2do. Grado.* México: INEE.

____ (2011). *Examen Enlace 2011. Secundaria, 1er. Grado, 2do. Grado.* México: INEE.

____ (2012). *Examen Enlace 2012. Secundaria, 7° Grado, 8° Grado.* México: INEE.

____ (2013a). *El aprendizaje en tercero de primaria en México.* Recuperado de: http://www.inee.edu.mx/index.php/72-publicaciones/resultados-de-aprendizaje-capitulos/564-el-aprendizaje-en-tercero-de-primaria-en-mexico-espanol-matematicas-ciencias-naturales-y-ciencias-sociales

____ (2013b). *Examen Enlace 2013. Secundaria, 9° Grado.* México: INEE.

____ (2015a). *Estudio comparativo de la propuesta curricular de Matemáticas en la educación obligatoria en México y otros países, 7 Informe final del estudio.* México: INEE.

____ (2015b). *Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes. Resultados nacionales 2015: Sexto de primaria y tercero de secundaria. Lenguaje y comunicación y Matemáticas.* México: INEE.

____ (2015c). *Examen Planea 2015. Secundaria, 19.01.BM09.* México: INEE.

____ (2015d). *El aprendizaje del Español y las Matemáticas en la educación básica en México. Sexto de primaria y tercero de secundaria.* Recuperado de: http://www.inee.edu.mx/index.php/72-publicaciones/resultados-de-aprendizaje-

capitulos/566-el-aprendizaje-del-espanol-y-las-matematicas-en-la-educacion-basica-en-mexico-sexto-de-primaria-y-tercero-de-secundaria

____ (2016a). *El aprendizaje en tercero de secundaria en México.* Recuperado de: http://publicaciones.inee.edu.mx/buscadorPub/P1/ D/315/P1D315.pdf

____ (2016b). *Examen Planea 2016. Secundaria, Matemáticas, 3º Grado.* México: INEE.

____ (2017a). *Estudio comparativo de la propuesta curricular de matemáticas en la educación obligatoria en México y otros países.* México: INEE.

____ (2017b). *Examen Planea 2017. Secundaria, Matemáticas, 3° Grado.* México: INEE.

____ (2019). *Orientaciones técnicas para la evaluación del diseño curricular. Evaluación de contenidos y métodos educativos.* México: autor, pp.11-13

International Association for the Evaluation of Educational Achievement IEA (1995). *TIMSS 1995. Released Items. Mathematics-Eighth Grade*, Boston: TIMSS & PIRLS International Study Center. Recuperado de: https://timssandpirls.bc.edu/TIMSS1995i/TIMSSPDF/BMItems.pdf

Isaacs, T. y Creese, B. (2015). *Aligned Instructional Systems: Shanghai*. Institute of Education University of London. Recuperado de: https://ncee.org/wp-content/uploads/2015/09/Shanghai-Jurisdiction-Report.pdf

Kline, M. (1976). *El Fracaso de la Matemática Moderna*, México: Siglo Veintiuno Editores, S.A.

Maldonado, L. y Castro, C. (2019). *Texto del estudiante. Matemática 6° básico*. 4° edición. Santiago de Chile: Editorial Santillana, pp. 25, 246-249, 258, 264.

Maldonado, L., Marambio, V. y Galasso, B. (2019). *Texto del estudiante. Matemática 1° medio*. Santiago (Chile): Santillana del Pacífico S.A. de Ediciones, pp. 247-248, 264.

Martzloff, J.-C. (1997). *A History of Chinese Mathematics*, Berlin: Springer-Verlag, pp. 17, 231.

Mayer, L. (2015). *Rutas de incertidumbre. Ideas alternativas sobre la génesis de la probabilidad, siglos XVI y XVII*, México: Fondo de Cultura Económica.

Ministério da Educação. Secretaria de educação básica. (2008). *Programa Gestao da Aprendizagem Escolar GESTAR II. Matemática. Cuaderno de teoría e prática no. 5.* Recuperado de: www.mec.gov.com

Ministerio de Educación y Ciencia. (2015). Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato España. *Boletín Oficial del Estado*, 3 de enero de 2015.

Ministerio de Educación y Ciencia de la Federación de Rusia. (junio, 2009). Programa aproximado de educación secundaria general (completa) en matemáticas. Nivel de perfil. *Matemática, 11*(673). Recuperado de: http://mat.1sept.ru/view_article.php?ID=200901102

___ (agosto, 2009). Un programa aproximado de educación básica general. Matemáticas: Proyecto. *Matemática, 16*(678). Recuperado de: http://mat.1sep.ru/view_article.php?ID=200901607

___ (2012). *Orden del Ministerio de Educación y Ciencia No. 413 de fecha 17 de mayo de 2012. "Con la aprobación del estándar educativo federal de educación secundaria general"*. Recuperado de: https://docs.edu.gov.ru/document/bf0ceabdc94110049a583890956abbfa/#

___ (2018). Recuperado de: https://resheba.com/gdz/matematika/1-kass

Ministry of Education. British Columbia. (2015). *BC´S New Curriculum.* Canada: Ministry of Education. Recuperado de: www.curriculum.gov.bc.ca

Ministry of Education. Ontario. (2015). *Ontario's Curriculum. Secondary Curriculum*. Canada: Ministry of Education. Recuperado de: www.edu.gov.on.ca/eng/teachers/curriculum.html

Ministry of Education. Singapur. (2014). Singapore. *Science Syllabus Secondary*. Singapur: Ministry of Education. Recuperado de: https://www.moe.gov.sg/docs/default-source/document/education/syllabuses/sciences/files/science-lower-upper-secondary-2014.pdf

Monterrubio, M.C. y Ortega, T. (2011). Diseño y aplicación de instrumentos de análisis y valoración de textos escolares en matemáticas, *PNA*, 5(3), 105-127.

National Council of Educational Research and Training. (2006). *Syllabus. elementary level. Volume I. Class 5, Chapter 2,* p.p.160-167*; Class 5, Chapter 6,* p.97, *Class*

6, Chapter 3, p.p. 60-62*; Class 7, Chapter 12,* p. 231*; Class 11, Chapter 7,* p. 135*; Volume II, Class 12, Chapter 13,* p. 537*.* Recuperado de: http://www.ncert.nic.in

National Council of Educational Research and Training (NCERT). (2017). *Class 5 Maths NCERT Book*. Recuperado de:

http://drive.google.com/file/d/1wWtilJePfoj85WBjGeaCj5CQncnlCVa9/view

_ (2018). *Class 6 Maths NCERT Book.* Recuperado de: http://drive.google.com/file/d/1k5AvTsYL585J2CHgc_6mVSPucv8Jvg7N/view

_ (2018). *Class 7 Maths NCERT Book*. Recuperado de: http://drive.google.com/file/d/1RgyR6sRNljhfdFNZjk28gRhAmXmsU12y/view

_ (2018). *Class 11 Maths NCERT Book*. Recuperado de: http://drive.google.com/file/d/1S_6-eV37neOw20gXevSWAgsDQvkKZtAo/view

_ (2018). *Class 12 Maths NCERT Book.* Recuperado de: http://drive.google.com/file/d/191E2ksU07RFfsV2bVwbdOypYua-goRK5/view

Needham, J. (1959). Science and Civilisation in China, Volume 3: *Mathematics and Sciences of the Heavens and the Earth.* London: Cambridge University Press.

Njeng'ere, D. (2014). *The role of curriculum in fostering national cohesion and integration: opportunities and challenges. Paris:* UNESCO. Recuperado de: http://www.ibe.unesco.org/fileadmin/user_upload/Publications/Working_Papers/nationalcohesion_kenya_ibewpci_11_eng.pdf

Oficina Internacional de Educación de la UNESCO. (2011a). *Datos Mundiales de Educación. India*. *VII Edición. 2010/2011*. Recuperado de: https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000211302?149

__ (2011b). *Datos Mundiales de Educación. Rusia. VII Edición. 2010/2011.* Recuperado de: https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf000021456597

Olvera, A. (2011). *Marcos curriculares para atender la diversidad étnica. Transformación posible de la educación para la niñez indígena: contextos, alianzas y redes.* México: SEP-DGEI.

Ore, O. (1960). *Pascal and the invention of probability theory, The American Mathematical Montly, 47,* pp.409-419.

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos. OCDE. (2002). *Conocimientos y aptitudes para la vida. Resultado de PISA 2000*, col. Aula XXI. México: OCDE/Santillana

___ (2015). Recuperado de: https://www.oecd.org/pisa/pisa-2015-results-infocus-ESP.pdf

___ (2019), “PISA 2018 Mathematics Framework”, *in PISA 2018 Assessment and Analytical Framework,* OECD Publishing, Paris. Recuperado de: https://doi.org/10.1787/13c8a22c-en

___ (2023), “PISA 2022 Results (Volume I): The State of Learning and Equity in education, PISA, OECD Publishing, Paris. Recuperado de: https://doi.doi.org/10.1787/53f23881-en

Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura. (2015). *Replantear la Educación ¿Hacia un bien común mundial?* París: UNESCO. Recuperado de: http://unesdoc.unesco.org/images/0023/002326/232697s.pdf

Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura. (2017). *Objetivos de desarrollo sostenible 4: Educación 2030*. Paris: UNESCO. Recuperado de: http://www.unesco.org/new/es/education/themes/leading-the-international-agenda/education-for-all/sdg4-education-2030/

Peterson, L. (2011). Matematica 7 Grado [version DX Reader]. Recuperado de: https://megaresheba.ru/gdz/matematika/7-klass/peterson

__ (2017a). *Matematica 3 Grado* [versión DX Reader]. Recuperado de: https://megaresheba.ru/publ/gdz/matematica/3klass/peterson-uchus-uchitsya

__ (2017b). *Matematica. Libro de trabajo de 4 Grado*. [versión DX Reader]. Recupeado de: https://megaresheba.ru/publ/gdz/matematica/4klass/rabochaya-tetrad-peterson-

Piaget, J. e Inhelder, B. (1975). *The Origin of the Idea of Chance in Children*. New York: W.W. Norton & Company, Inc.

Poder Ejecutivo Federal (1941). *La Educación Pública en México. 1° de Diciembre de 1934 a 30 de Noviembre de 1940*. (Vol. 2, pp. 191-200), México, D.F.

Pozo, J.I., y Gómez Crespo, M.A. (2006). *El aprendizaje de conceptos científicos: del aprendizaje significativo al cambio conceptual*. En *Aprender y enseñar ciencia* (pp.84-127). Madrid: Morata, S.L.

Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos. OCDE. (2016). *Estudiantes de bajo rendimiento. ¿Por qué se quedan atrás y cómo ayudarles a tener éxito? Resultados principales.* Paris: OCDE Publishing, Recuperado de:

http://www.oecd.org/pisa/keyfindings/PISA-2012-Estudiantes-de-bajo-rendimiento.pdf

Rocke, A. J. (1981). Kekulé Butlerov, and the historiography of the theory of chemical structure. *The British Journal for the History of Science, 14 (46)*, 27-57.

Roegiers, X. (2006). *¿Se puede aprender a bucear antes de saber nadar? Los desafíos actuales de la reforma curricular.* Paris: UNESCO. Recuperado de: http://www.ibe.unesco.org/sites/default/files/resources/wpci-03-curreform-challen-spa.pdf

Romberg, Thomas A. y Wilson, James W. (1969). *The development of test*. NLSMA report, no.7. Stanford, CA: School Mathematics Study Group.

Salinas, O. (2007). *Niveles de pensamiento de los maestros de primaria acerca de la probabilidad y su vínculo con los propósitos y contenidos de los materiales oficiales* (Tesis de maestría). Universidad Pedagógica Nacional, México.

Santis, M.A. (2017). *Cuaderno de ejercicios. Matemática 7° Básico*. Santiago de Chile: Ediciones SM Chile S. A., pp. 154, 206

Santos del Cerro, J. (2006). El Ars Conjectandi: un nuevo cálculo junto a un viejo concepto. *En* J. Santos del Cerro y M. García (Eds), *Historia de la probabilidad y estadística: III* (pp. 37-53). Madrid: Delta Publicaciones.

Secretaría de Educación Pública. SEP (1927). *Programas de Matemáticas para las Escuelas Secundarias*. Boletín, 11(6), 99-197.

___ (1928). *Programa para el Tercer Curso de Matemáticas*. Boletín, 4(7), 255-270.

___ (1933). *Programas Detallados para las Escuelas Secundarias*. México, D.F.: Departamento de Enseñanza Secundaria.

___ (1946). *La Obra Educativa en el Sexenio 1940-1946*. México, D.F.: SEP.

___ (1960a). *Mi cuaderno de trabajo de primer año*. 2ª ed., México, D.F.: Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos, pp. 213

___ (1960b). *Mi cuaderno de trabajo de segundo año. Aritmética y Geometría.* México, D.F.: Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos, pp. 109

___ (1960c). *Mi libro de tercer año. Segunda Parte. Aritmética y Geometría. Estudio de la Naturaleza.* México, D.F.: Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos, pp. 7-115

___ (1960d). *Mi cuaderno de trabajo de tercer año. Segunda Parte. Aritmética y Geometría. Estudio de la Naturaleza*. 2ª ed., México, D.F.: Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos, pp. 7-147

___ (1960e). *Mi cuaderno de trabajo de cuarto año. Segunda Parte. Aritmética y Geometría. Estudio de la Naturaleza*. 2ª ed., México, D.F.: Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos, pp. 9-73

___ (1960f). *Mi libro de cuarto año. Segunda Parte. Aritmética y Geometría. Estudio de la Naturaleza*. México, D.F.: Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos, pp. 9-114

___ *(1961). *Mi cuaderno de trabajo de quinto año. Segunda Parte. Aritmética y Geometría. Estudio de la naturaleza*. México, D.F.: Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos, pp. 11-178

___ (1960g). *Mi libro de quinto año. Segunda Parte. Aritmética y Geometría. Estudio de la Naturaleza*. México, D.F.: Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos, pp. 9-96

___ (1960h). *Mi libro de tercer año. Aritmética y Geometría. Estudio de la Naturaleza*. México, D.F.: Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos, pp. 7-115

___ (1960i). *Mi cuaderno de trabajo de cuarto año. Aritmética y Geometría. Estudio de la Naturaleza*. México, D.F.: Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos, pp. 9-85

___ *(1962a). *Mi libro de sexto año. Aritmética y Geometría*. México, D.F.: Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos, pp. 9-125

___ *(1962b). *Mi cuaderno de trabajo. Aritmética y Geometría*. México, D.F.: Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos, pp. 9-157

___ (1972a). *Matemáticas. Primer grado*. México, D.F.: Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos, pp. 144

___ (1972b). *Matemáticas. Segundo grado*. México, D.F.: Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos, pp. 135

___ (1972c). *Plan de estudio y programas para la educación primaria*. México, D.F.: Secretaría de Educación Pública.

___ (1973a). *Matemáticas. Tercer grado*. México, D.F.: Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos, pp. 293

___ *(1973b). *Matemáticas. Quinto grado*. México, D.F.: Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos, pp. 272

___ (1974a). *Matemáticas. Cuarto grado.* México, D.F.: Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos, pp. 255

___ (1974b). *Matemáticas. Sexto grado.* México, D.F.: Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos, pp. 192

___ (1975a). *Plan de estudios. Programa de Matemáticas. Primer Grado*. México: SEP-Consejo Nacional Técnico de la Educación, pp. 11-70

___ (1975b). *Plan de estudios. Programa de Matemáticas. Segundo Grado*. México: SEP-Consejo Nacional Técnico de la Educación, pp. 12-85

___ *(1980). *Mi libro de segundo. Unidad 3.* México, D.F.: Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos, pp. 76

___ (1981). *Programas para la educación media básica*. México: SEP-Consejo Nacional Técnico de la Educación, pp. 100-169

___ (1982a). *Mi libro de Primero. Parte 1*. 3ª ed., México, D.F.: Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos, pp. 239

___ (1982b). *Mi libro de Primero*. *Parte 2*. 3ª ed., México, D.F.: Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos, pp. 230

___ (1982c). *Mi libro de Segundo. Parte 2*. México, D.F.: Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos, pp. 311

___ (1982d). *Matemáticas. Tercer grado*. México, D.F.: Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos, pp. 271

___ *(1988). *Mi Libro de Segundo. Parte I*. México, D.F.: Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos, pp. 318 (Obra original publicada en)

___ (1993a). *Matemáticas. Primer grado.* México, D.F.: Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos, pp. 143

___ (1993b). *Plan y Programas de estudio. Educación básica. Secundaria*. México: SEP-Dirección General de Materiales y Métodos Educativos, pp. 35-51

___ (1994a). *Matemáticas. Segundo grado.* México, D.F.: Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos, pp. 175

___ *(1994b). *Matemáticas. Quinto grado.* México, D.F.: Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos, pp. 207 (Obra original publicada en)

___ *(1996). *Matemáticas. Sexto grado.* México, D.F.: Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos, pp.207 (Obra original publicada en)

___ *(1997a). *Matemáticas. Tercer grado.* México, D.F.: Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos, pp. 189 (Obra original publicada en)

___ (1997b). *Matemáticas. Cuarto grado.* México, D.F.: Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos, pp. 188 (Obra original publicada en)

___ (2001). *Matemáticas. Sexto grado.* México, D.F.: Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos, pp. 191

___ (2006). *Educación Básica. Secundaria. Matemáticas. Programa de estudios 2006.* México: SEP-Dirección General de Desarrollo Curricular.

___ (2007). *Matemáticas. Quinto grado.* 5ª ed., México, D.F.: Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos, pp. 191

___ (2009a). *Matemáticas 1. Cuaderno de trabajo para el alumno. Primer grado*. México, D.F.: Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos, pp. 239

___ (2009b). *Matemáticas 6. Cuaderno de trabajo para el alumno. Sexto grado.* México, Edo. de México: Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos, pp.175

___ (2010a). *Matemáticas. Segundo grado.* México, D.F.: Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos, pp. 147

___ (2010b). *Matemáticas. Quinto grado.* México, D.F.: Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos, pp. 181

___ *(2010c). *Matemáticas. Sexto grado.* México, D.F.: Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos, pp. 191 (Obra original publicada en)

___ (2011a). *Plan de Estudios 2011. Educación Básica.* México: SEP-Dirección General de Desarrollo Curricular.

___ (2011b). *Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas.* México: SEP-Dirección General de Desarrollo Curricular/Dirección General de Formación Continua de Maestros en Servicio.

___ (2011c). *Matemáticas. Cuarto grado.* 2ª ed., México, D.F.: Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos, pp. 185

___ (2011d). *Matemáticas. Sexto grado.* 2ª ed., México, D.F.: Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos, pp. 189

___ *(2012a). *Matemáticas. Tercer grado.* México, D.F.: Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos, pp. 181 (Obra original publicada en)

___ *(2012b). *Matemáticas. Quinto grado.* México, D.F.: Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos, pp. 192 (Obra original publicada en)

___ (2013a). *Programa Sectorial de Educación 2013-2018.* México: SEP.

___ (2013b). *Matemáticas. Primer grado.* 3ª ed., México, D.F.: Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos, pp. 184

___ (2013c). *Matemáticas. Segundo grado.* 3ª ed., México, D.F.: Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos, pp. 172

___ (2016a). *El modelo educativo 2016. El planteamiento pedagógico de la Reforma Educativa.* Recuperado de: https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/114501/Modelo_Educativo_2016.pdf

___ (2016b). *Propuesta Curricular para la Educación Obligatoria 2016.* Recuperado de: https://www.gob.mx/cms/uploads/docs/Propuesta-Curricular-baja.pdf

___ (2016c). *Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Primer grado*. Ciudad de México: Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos, pp. 141 (Obra original publicada en 2013)

___ (2016d). *Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Primer grado.* Ciudad de México: Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos, pp. 164 (Obra original publicada en 2013)

___ (2016e). *Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Segundo año.* Ciudad de México: Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos, pp.197 (Obra original publicada en 2013)

___ (2016f). *Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Segundo grado.* Ciudad de México: Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos, pp. 189 (Obra original publicada en 2013)

___ (2016g). *Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Tercer grado.* Ciudad de México: Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos, pp. 221 (Obra original publicada en 2013)

___ (2016h). *Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Tercer grado.* Ciudad de México: Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos, pp.253 (Obra original publicada en 2013)

___ (2016i). *Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Cuarto grado.* Ciudad de México: Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos, pp. 253 (Obra original publicada en 2013)

___ (2016j). *Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Cuarto grado.* Ciudad de México: Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos, pp. 335 (Obra original publicada en 2013)

___ (2016k). *Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Quinto grado.* Ciudad de México: Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos, pp. 223 (Obra original publicada en 2013)

___ (2016l). *Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Quinto grado.* Ciudad de México: Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos, pp. 312 (Obra original publicada en 2013)

___ (2016m). *Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Sexto grado.* Ciudad de México: Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos, pp.181 (Obra original publicada en 2013)

___ *(2016n). *Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Sexto grado.* Ciudad de México: Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos, pp. (Obra original publicada en 2013)

___ (2017a). *APRENDIZAJES CLAVE PARA LA EDUCACIÓN. Plan y programas de estudio para la educación básica.* México: SEP-Dirección General de Desarrollo Curricular.

___ (2017b). *APRENDIZAJES CLAVE PARA LA EDUCACIÓN INTEGRAL. Matemáticas. Educación secundaria. Plan y programas de estudio, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación.* México: SEP-Dirección General de Desarrollo Curricular.

___ (2017c). *APRENDIZAJES CLAVE PARA LA EDUCACIÓN INTEGRAL. EDUCACIÓN PRIMARIA 3°. Plan y programas de estudio, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación.* México: SEP-Dirección General de Desarrollo Curricular, pp. 232, 241-242

___ (2017d). *APRENDIZAJES CLAVE PARA LA EDUCACIÓN INTEGRAL. EDUCACIÓN PRIMARIA 4°. Plan y programas de estudio, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación.* México: SEP-Dirección General de Desarrollo Curricular, p. 232

___ (2017e). *APRENDIZAJES CLAVE PARA LA EDUCACIÓN INTEGRAL. EDUCACIÓN PRIMARIA 5°. Plan y programas de estudio, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación.* México: SEP-Dirección General de Desarrollo Curricular, pp. 232, 245-247

___ (2017f). *APRENDIZAJES CLAVE PARA LA EDUCACIÓN INTEGRAL. EDUCACIÓN PRIMARIA 6°. Plan y programas de estudio, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación.* México: SEP-Dirección General de Desarrollo Curricular, pp. 234, 251-253

Sung, Bing. (1966). *Translation from James Bernoulli* (con prefacio de A. P. Dempster). Departamento de Estadística, Harvard University, Cambridge, Massachusetts.

Tedesco, J. C., Opertti, R., y Amadio, M. (2013). Por qué importa hoy el debate curricular. *IBE Working Papers on Curriculum Issues, (10) 1-20,* Recuperado de: http://unesdoc.unesco.org/images/0022/002213/221328S.pdf

Torres, C.V. y Caroca, M.V. (2019). *Texto del estudiante. Matemática 8° básico*. Santiago de Chile: Santillana del Pacífico S.A. de Ediciones, pp. 34, 40.

Vázquez, R. (2007). *La escuela a examen. Diagnóstico Pedagógico del Sistema Educativo Escolar*. México: Correo del Maestro.

Villella, J. (2007). *Matemática escolar y libros de texto. Un estudio desde la Didáctica de la Matemática.* Buenos Aires: UNASAM

Zubareva, I. y Mordkoviu, A. (2019). *Matemática 5 Grado*. [versión DX Reader] Recuperado de: http://resheba.me/gdz/matematika/5-klass/zubareva/nomer-969

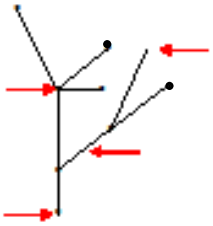
Zubareva, I. y Mordkoviu, A. (2019). *Matemática 5 Grado*. [versión DX Reader]. Recuperado de: http://resheba.me/gdz/matematika/5-klass/zubareva/nomer-970

Zubareva, I. y Mordkoviu, A. (2019). *Matemática 5 Grado*. [versión DX Reader]. Recuperado de: http://resheba.me/gdz/matematika/5-klass/zubareva/nomer-971

Anexo I. A continuación, presento algunos ejercicios y problemas que he diseñado; estos promueven el uso de estrategias combinatorias con el apoyo del empleo de diagramas de árbol para organizar la información y determinar los resultados, considerando la clasificación NLSMA construida previamente para educación primaria. Educación primaria. Escribe en el cuadernillo todas las operaciones que utilices en la resolución del problema. No borres las operaciones que realices mientras resuelves un ejercicio o un problema sin importar que parezca equivocada o si en algún momento te parece que no conducirá a la solución.

A.1. A continuación se presenta la imagen de un árbol, identifica la raíz, el tronco, las ramas, los nudos y las hojas. Reproduce este árbol, usa puntos para representar la raíz y los nudos, segmentos de recta para representar el tronco y las ramas.

A.2. En el siguiente árbol escribe las palabras raíz, nudo, nudo terminal y rama, donde corresponde.



A.3. A partir del siguiente árbol dibuja el diagrama que se obtiene al rotarlo 180°

Cristina de Suecia

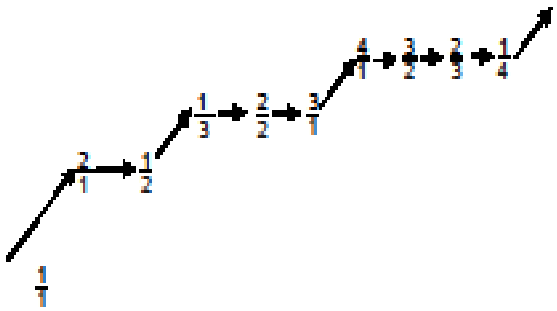
B.1. Hace mucho tiempo en Suecia vivió una princesa a la que le gustaba resolver problemas matemáticos, se llamó Cristina. Esta princesa no tuvo hermanos; su madre se llamaba María y su padre Gustavo. Los abuelos maternos de Cristina se llamaron Juan y Ana; los abuelos paternos fueron Cristina y Carlos. La princesa tuvo tíos y primos, los hermanos de su madre se llamaron Jorge, Catalina y Sofía; los hermanos de su padre fueron María, Cristina y Carlos. Solo dos de los tíos tuvieron hijos, Jorge fue el padre de Luisa, Federico, Sofía y Juan; por su parte Isabel fue hija de Carlos.

Si un árbol genealógico es un diagrama en que podemos ver a todos los miembros que hay en una familia y este diagrama representa la ascendencia (padres, tíos, abuelos, bisabuelos) y descendencia (hijos, sobrinos, nietos, bisnietos) de una persona, entonces construye el árbol genealógico de la princesa Cristina.

B.2. Usando diagramas de árbol representamos la descomposición en sumas de los números 20 y 37.

Escribamos en orden a los sumandos obtenidos 2, 3, 5, 13, 34.

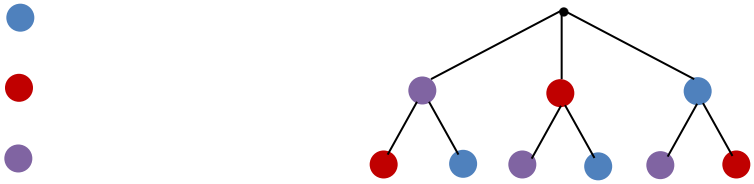
Ahora elige un número al azar, descomponlo en una suma de números y añade los sumandos a la lista anterior; si algún sumando ya está en la lista, no lo incluyas. Observa a los sumandos que se han formado, ¿existe alguna relación entre ellos?



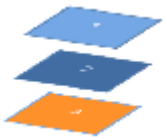
B.3. A continuación te propongo construir un diagrama de árbol de fracciones. ¿cuáles son las fracciones que continúan en las ramas de este nivel?

¿cuáles son las fracciones que forman el séptimo nivel?

B.4. Imaginemos que hay cuentas de tres colores distintos, por ejemplo, azul, rojo y amarillo. ¿Cuántas cadenas distintas podemos formar con ellas? ¿Cuántos grupos de dos cuentas podríamos formar? Observa el siguiente diagrama de árbol.



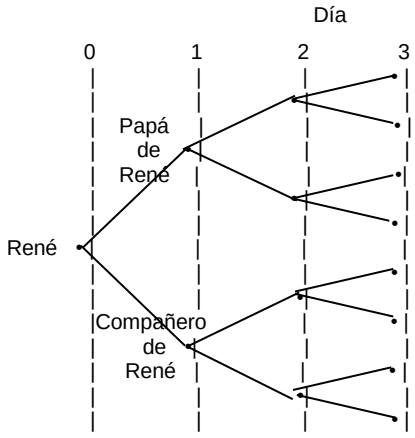
B.4 Daniela se está vistiendo en la madrugada y hay un corte de luz. En el primer cajón de un mueble guarda 5 pares de calcetines azules y 5 pares de calcetines blancos, pero todos sueltos. Tiene que sacar, sin poder verlos, algunos calcetines, pero quiere estar segura de que con ellos podrá armar un par del color. ¿Cuál es la mínima cantidad de calcetines que tiene que sacar? Sugerencia: construye un diagrama de árbol.



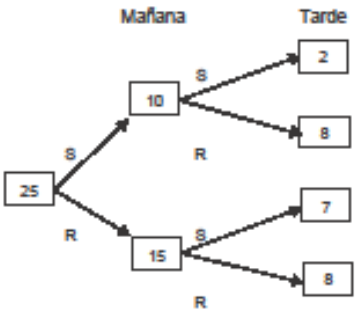
B.5. La cerradura de una puerta funciona a través de tres placas colocadas en su interior, estas se han marcado con los números 1, 2, 3. Un cerrajero debe cambiar el orden de las placas para cambiar la combinación de la cerradura. ¿De cuántas maneras diferentes puede cambiar las placas?

B.5. Una mañana llegó a un pueblo un mensajero que traía una noticia de interés para todos los habitantes. En el hotel donde se hospedó, el mensajero comunicó la noticia a tres vecinos del pueblo. Al conocer la noticia, cada uno de estos tres vecinos se apresuró a comunicarla a tres más. Cada uno de estos nuevos informados la comunicó a otros tres habitantes del pueblo. Dibuja un diagrama de árbol para explicar cómo se difunde el rumor.

B.6. René está resfriado desde hace dos días; él ha contagiado a su papá y a un compañero de la escuela. Cuando una persona se ha infectado del virus de resfriado común puede contagiar a dos personas. El siguiente diagrama de árbol nos muestra el ritmo en que se trasmite la enfermedad. ¿Cuántas personas se infectaron en siete días?

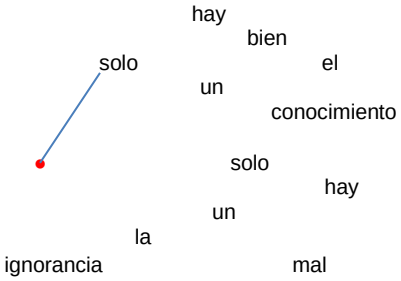


B.6. En el siguiente diagrama de árbol está registrada la información del clima durante 25 días. Si el día estaba soleado se representó con la letra S y, si estaba lluvioso con la letra R. Además, se consideró si la observación se hizo en la mañana o en la tarde.



Observa la rama más alta ¿cuál es la situación que representa? Se obtienen cuatro posibles resultados, ¿cuáles son?

C.1. Modelo de letras. A continuación encontrarás un diagrama de árbol incompleto que contiene una frase. Completa el árbol y descubre cuál es la frase.



C.1. El Chef Enrico Bocaditto afirma que para crear sus famosos platillos necesita por lo menos los siguientes ingredientes: cebolla, jitomate, tomate y una proteína que puede ser pescado, cerdo, res o pollo. ¿De cuántas maneras distintas puede combinar los ingredientes? Dibuja un diagrama de árbol.

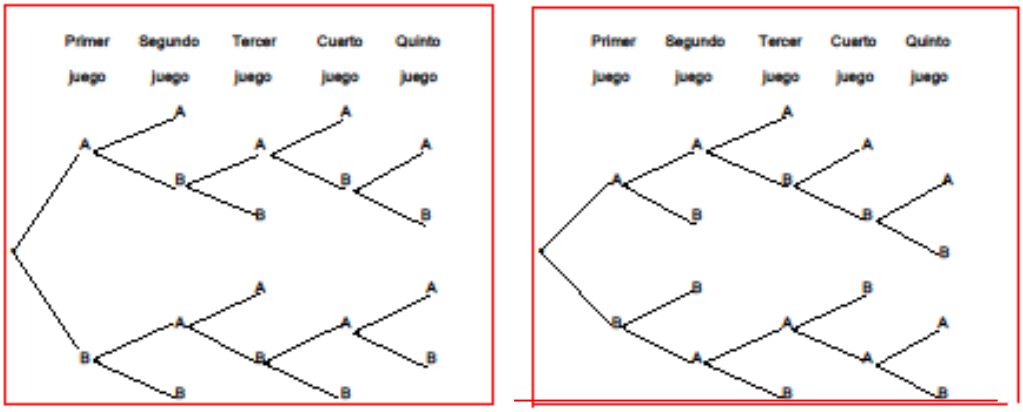
Enrico Bocaditto

C.1. El empleado de una empresa de mensajería y paquetería ofrece a sus clientes hacer entregas cobrando tarifas económica, exprés o internacional. Los envíos en las categorías económica y exprés pueden tener destino nacional o internacional.

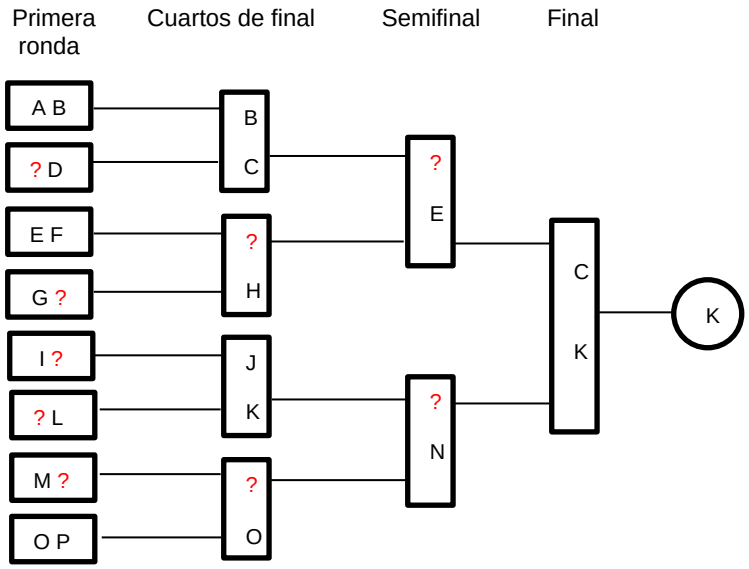
Si la tarifa es económica y el destino es nacional, el envío llegará en camión o en avión; si es internacional, será por avión. Si la tarifa es exprés y el destino es nacional, el envío llegará en camión o en avión; si es internacional, será por avión y puede suceder que se necesiten dos aviones para dos rutas distintas. Si la categoría es internacional, el envío llegará por avión.

¿Cuál es el diagrama de árbol que representa todos los servicios que esta empresa ofrece?

C.2. Los equipos de baloncesto de los grupos 6° A y 6° B juegan un torneo. El primer equipo que gane dos juegos seguidos o un total de tres juegos gana el torneo. Las letras A y B representan a los grupos 6° A y 6° B respectivamente. ¿Cuál de los siguientes diagramas de árbol representa esta situación? Explica por qué.

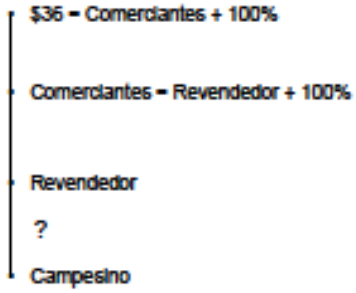


C.3. En un torneo de tenis hay 16 jugadores; cada uno usa una camiseta con una letra diferente; ganó el torneo el jugador que llevaba en su camiseta la letra K. ¿Qué jugadores llegaron a la semifinal? ¿Quiénes avanzaron a cuartos de final? ¿Quiénes no avanzaron a cuartos de final?



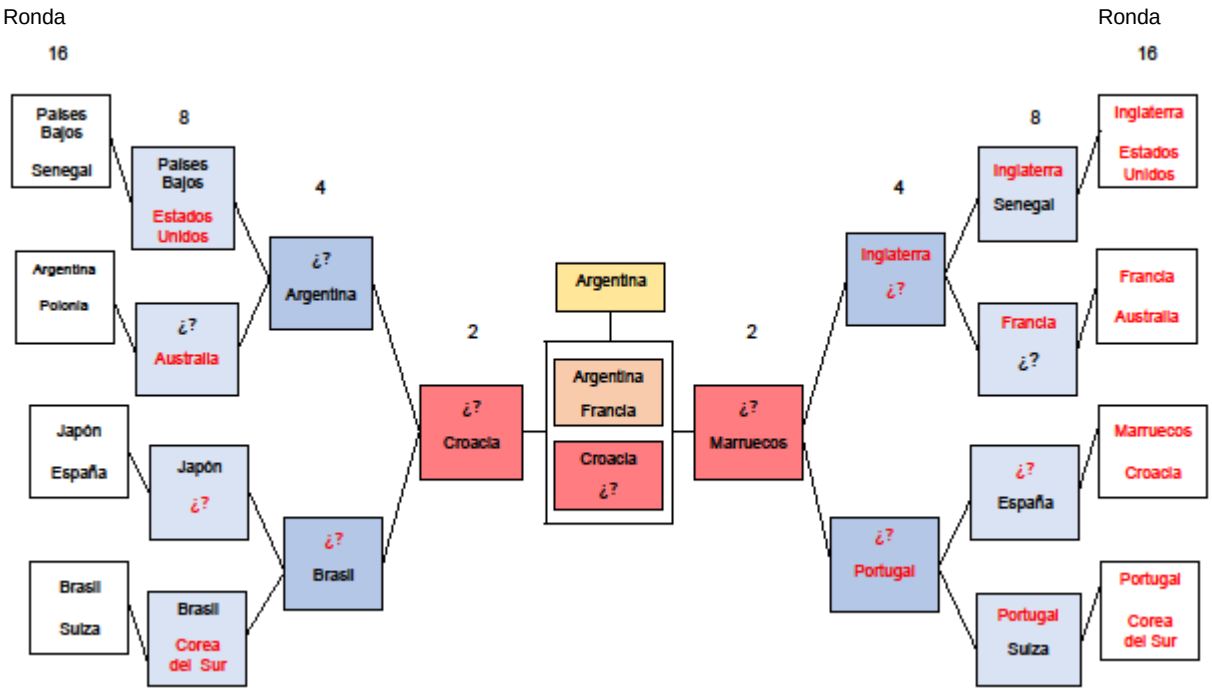
C.3. Un campesino vende los tomates que cultiva en sus terrenos a un revendedor. El revendedor los ofrece a los pequeños negocios cobrándoles el 100% de recargo sobre lo que él pagó. Los comerciantes, a su vez, nos cobran el 100% más de lo que pagaron por los jitomates.

Si pagamos $36 por un kilo de jitomate, ¿cuánto le pagó el revendedor al campesino por el mismo kilo? Sugerencia: observa el siguiente árbol.



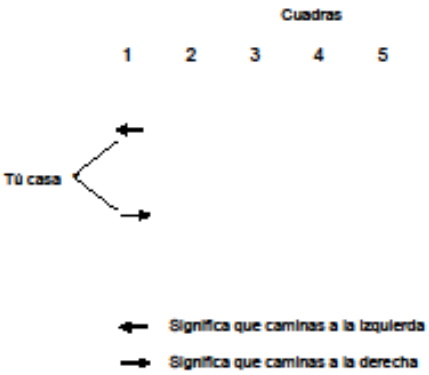
C.3. En la Copa Mundial de la FIFA Catar 2022 estos fueron algunos de los resultados después de la primera eliminatoria. ¿Cuál fue el camino que recorrió la selección Argentina hacia el campeonato? Hubo dos selecciones que se enfrentaron dos veces durante el torneo ¿de quienes se trata?

La única selección de la zona de América del Norte que pasó a la ronda de 16 fue la de Estados Unidos, ¿qué juegos tendría que haber ganado para ser el campeón del torneo? ¿Cuál sería el diagrama si solo pasan 12 equipos a la ronda de 16?



C.3. Supongamos que te regalan unos tenis. Si tus tenis tienen dos ojales en cada zapato, ¿cuántos caminos pueden recorrer las agujetas por los ojales de un tenis?, ¿y si tienen cuatro ojales?

C.4. Caminas a tu escuela que queda a 7 cuadras de tu casa, como puedes ver en el siguiente plano, pero primero pasas por tu amigo. Te aburre tomar siempre el mismo camino, pero tampoco quieres caminar más de 7 cuadras y te das cuenta de que podrías ir a la escuela siguiendo un camino diferente cada día. ¿Cuántos caminos diferentes puedes seguir para llegar a tu escuela? Sugerencia: continúa la construcción del diagrama de árbol.



C.4. Si un niño se infecta del virus de la varicela puede infectar a tres personas durante los catorce días que el virus estará en su organismo. ¿Cuántas personas pueden ser infectadas en catorce días? Sugerencia: usa un diagrama de árbol.

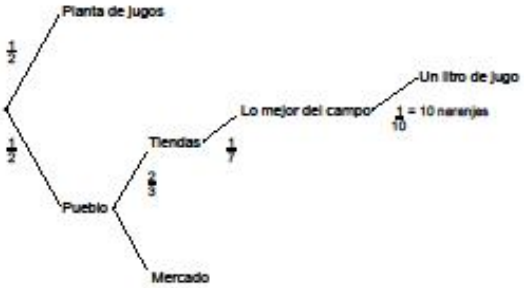
D.1. Al entrar a una oficina hay un perchero con cuatro ganchos para colgar abrigos, chamarras, sacos o suéteres. Al llegar a la oficina Daniela colocó su chamarra, después llegó Bruno y colocó su saco. ¿De cuántas formas diferentes se puede colocar la chamarra y el saco en el perchero?

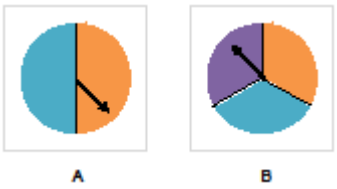
Si más tarde llegó Carlos y colocó su suéter, ¿de cuántas maneras se pueden colocar las tres prendas?, ¿son más o menos que el caso de la chamarra y el saco? Si Alicia coloca su abrigo, ¿cuántas maneras habrá de colocar las cuatro prendas? Sugerencia: construye un diagrama de árbol.

D.2. El poblado de Álamo en el Estado de Veracruz es el mayor productor de naranjas en México. En Álamo existen muchas huertas; en una de ellas la mitad de las naranjas cosechadas se lleva a la planta de jugos y la otra mitad al pueblo.

De la mitad que llevan al pueblo, dos terceras partes se reparten en las tiendas y el resto en el mercado. De las que se llevan a las tiendas, hay una que se llama “Lo mejor del campo” que compra la séptima parte.

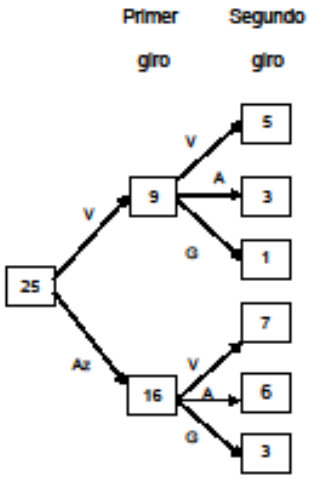
Tú compras en esa tienda la décima parte de lo que se dejó ahí para preparar un litro de jugo. Si son necesarias 10 naranjas para preparar un litro de jugo, ¿cuántas naranjas se cosecharon ese día en la huerta? Sugerencia: distingue y separa las fases del diagrama de árbol correspondiente.





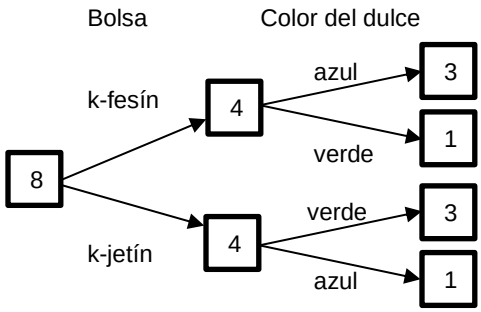
D.2. La ruleta A se gira y se anota el resultado, después se gira la ruleta B y también se anota el resultado. Este procedimiento se repite 25 veces, todos los resultados se muestran en el siguiente diagrama de árbol.

Haz una lista de todos los resultados posibles. Si 25 veces se hizo girar cada ruleta, ¿qué proporción de ellas resultan ser Verde y Verde? y ¿Azul y Verde?

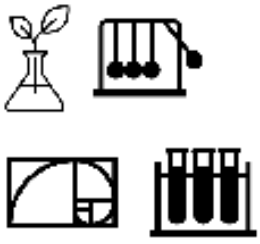


D.3. En la tiendita de la esquina Don Lalo vende caramelos, unos se llaman k-fesín y otros k-jetín. La bolsa de k-fesín contiene 3 caramelos de envoltura azul y 1 de envoltura verde. La bolsa de k-jetín contiene 1 caramelo de envoltura azul y 3 de envoltura verde.

Don Lalo elije una bolsa al azar y toma un caramelo. Si el caramelo es azul, ¿es posible que venga de la bolsa de k-fesín? Observa el siguiente diagrama de árbol y justifica tu respuesta.



D.4. En un restaurante hay 10 trabajadores: una persona que prepara bebidas y postres (le llaman fuentero), una persona que hace la limpieza (le llaman garrotero), cuatro meseros, dos chefs, una cajera y un gerente. ¿De cuántas maneras distintas se pueden formar equipos de 2 trabajadores?

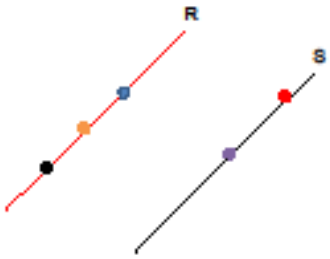


D.4. Valeria, Natalia, Fátima, Laura, Ramón, Juan, Daniel y Tomás se han inscrito al Concurso Olimpiada de Ciencias. Las reglas indican que los participantes deben presentar proyectos de manera individual o en equipos de dos integrantes. ¿De cuántas maneras distintas se puede organizar?

D.4. El calcio es muy importante para que nuestros dientes y huesos estén saludables. La siguiente tabla explica cuánto calcio contienen algunos alimentos.

Si el consumo diario recomendado para niños y adolescentes (9 a 18 años) es 1300 mg, ¿de cuántas maneras distintas es posible combinar estos alimentos para reunir el consumo necesario? Sugerencia: emplea un diagrama de árbol

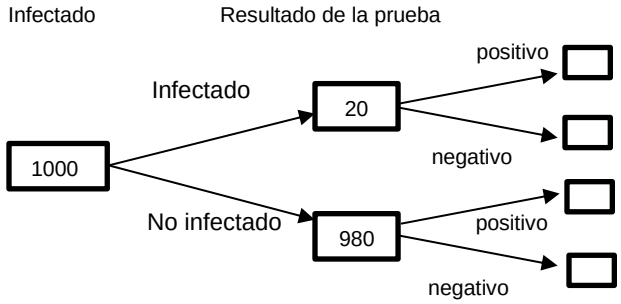
Alimento	Cantidad	Calcio
Leche descremada	1 taza	300 mg
Yogurt	125 g	380 mg
Queso manchego	60 g	400 mg
Carne de res	100 g	10 mg
Pollo	100 g	15 mg
Pescado	100 g	20 mg
Brócoli	100 g	100 mg
Espinaca	$\frac{1}{2}$ taza	80 mg



D.5. Tres puntos están marcados en una línea recta R. Sobre otra recta S paralela a R están marcados dos puntos. ¿Cuántos triángulos se pueden formar con vértices en tres de estos puntos? Construye el diagrama de árbol que representa esta situación.

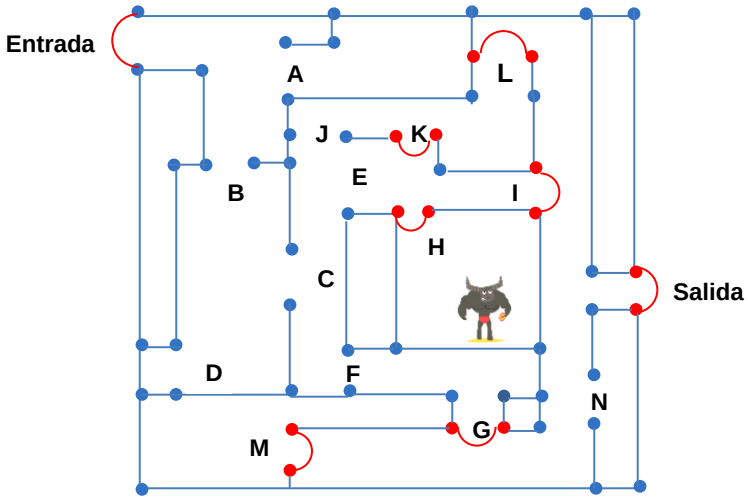
D.5. Una prueba de detección del virus que causa la enfermedad Covid-19 dice que es 95% precisa. Lo que significa que 95% de las personas infectadas, y el 95% de las que no están infectadas, serán clasificados correctamente.

Si se aplican 1000 pruebas entonces, se afirma que 20 personas están infectadas, de las cuales 95% serán correctamente detectadas. Pero de las 980 no infectadas, 5% serán incorrectamente positivas. Esto indica un total de 68 pruebas positivas, de las cuales 19 sí están infectados. Con la información anterior completa el siguiente diagrama de árbol.



D.5. Un relato griego dice que hace mucho tiempo el rey de una ciudad llamada Creta envió a su ejército a apoderarse de la ciudad de Atenas y ordenó que cada año, catorce jóvenes, siete varones y siete mujeres atenienses fueran llevados a Creta para que el Minotauro los devorara.

El Minotauro, un monstruo con cabeza de toro y cuerpo de hombre que se alimentaba de carne humana, vivía encerrado en un laberinto. Cierto día, el hijo del rey de Atenas de nombre Teseo, decidió enfrentar al Minotauro.



¿Cuántos caminos distintos tiene Teseo para salir del laberinto?

¿Cuántos caminos distintos tiene para enfrentar al Minotauro?

Observa que los arcos en color rojo son salidas. Construye el diagrama de árbol.

Anexo II. Se presenta una selección de ejercicios extraídos de los libros de texto de educación secundaria relacionados con los diagramas de árbol publicados entre 1977 y 2013.

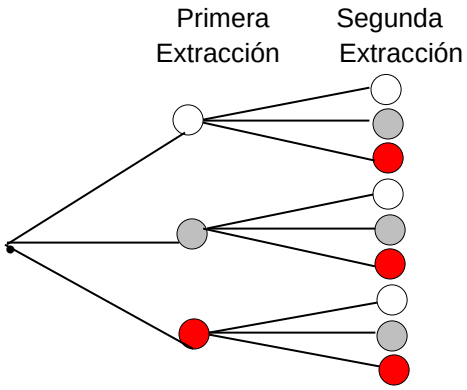
Matemáticas. Tercer curso

Editado en México por Compañía Editorial Continental, S.A. 1977

Probabilidad. Eventos independientes.

Dispongamos de una bolsa con tres canicas, una blanca, una roja y una gris. El experimento consiste en lo siguiente: Se revuelven las canicas, se extrae una, se anota su color *y* se regresa a la bolsa, nuevamente se revuelven las canicas, se efectúa una segunda extracción y se anota el color de la canica extraída.

Aún sin realizar el experimento podemos hacer un análisis y describir los resultados posibles por medio del diagrama de la Pág. 280.



Supongamos que al realizar el experimento descrito anteriormente, en la primera extracción resulta canica blanca, regresamos ésta a la bolsa y efectuamos una segunda extracción donde resulta canica roja. Parece natural aceptar que el resultado de la primera extracción no afecta la probabilidad de obtener canica roja en la segunda extracción. Es decir, parece razonable pensar que los eventos “sacar canica blanca” y después “sacar canica roja” son “*independientes”*.

Si llamamos A al evento “sacar canica blanca” y B al evento “sacar canica roja” (habiendo regresado la canica blanca y después sacar canica roja) con $A \cap B$.

Después de resolver el siguiente ejercicio usted podrá observar que en este caso también se cumple que $P(A) \bullet P(B) = P(A \cap B)$

Ejercicio. 19 En relación al experimento anterior y de acuerdo con la notación mencionada, obtenga las siguientes probabilidades.

P(A) = P(B) = P(A) • P(B) = P(A ∩ B) =

Matemáticas. Primer grado – Enseñanza Secundaria

Editado en México por Editorial Limusa. Quinta reimpresión 1981.

Plan de estudios por áreas, vigente a partir de septiembre de 1975 en el primer grado.

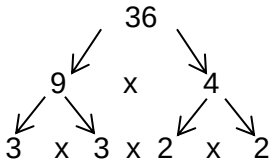
El libro se encuentra estructurado en ocho unidades, como señala el programa.

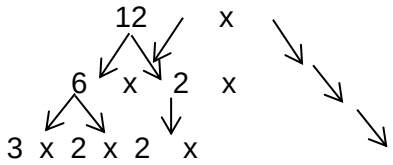
Se observa que la coherencia entre los planteamientos de los programas y el del libro es casi absoluta.[108]

Descomposición de un entero positivo en factores primos.

Cuando todos los factores de un número compuesto son números primos, diremos que hemos realizado una factorización total.

Enseguida te mostraremos las formas que nos ayudarán a encontrar la *factorización total* de números enteros. (Esta técnica se llama diagrama de árbol).





36 = 3 x 3 x 2 x 2 36 = 3 x 2 x 2 x 3

Unidad 8. Registros estadísticos y probabilidad.

Introducción. Tipos de datos. Registros. Gráficas de datos. Azar y probabilidad.

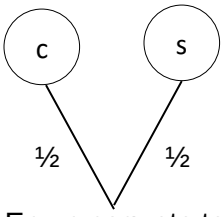
Ejercicio 8.8.

Con frecuencia es de utilidad representar las probabilidades mediante un diagrama que llamaremos diagrama de árbol.

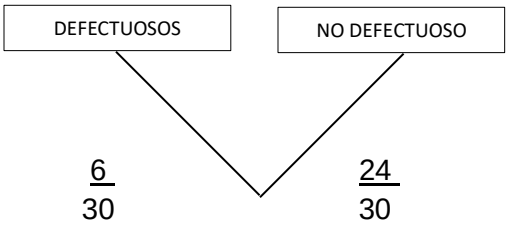
a) Árbol de probabilidad del tiro moneda.

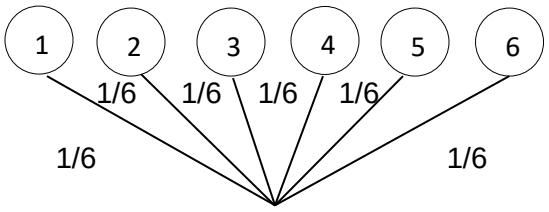
b) Árbol de probabilidad del tiro de una de un dado.

[108] Generalmente, existe una distancia importante entre el enfoque de enseñanza expresado en los programas y el enfoque implícito en los libros de texto.

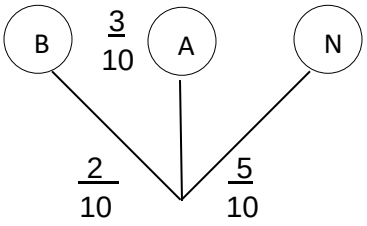


c) En un paquete tenemos 6 tornillos y 24 tornillos no defectuo- diagrama de árbol es:





d) Si seleccionamos una canica defectuosos de una cajita que tiene dos blan- osos; su cas, tres amarillas y cinco negras.



Matemáticas 1. Educación Media Básica.

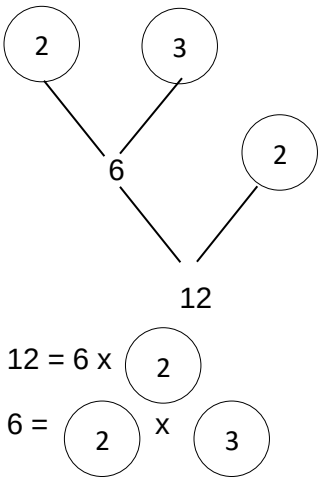
Editado en México por Ediciones Pedagógicas, S.A. de C. V. Primera edición 1978. Edición revisada 1986.

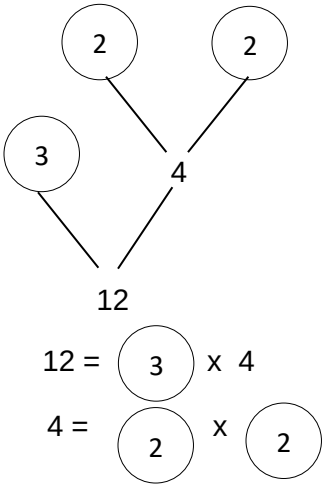
Unidad IV. Factorización.

4. Factorización total.

A las factorizaciones anteriores se les da el nombre de *Factorización total* ya que ningún factor se puede descomponer más.

Por ejemplo:

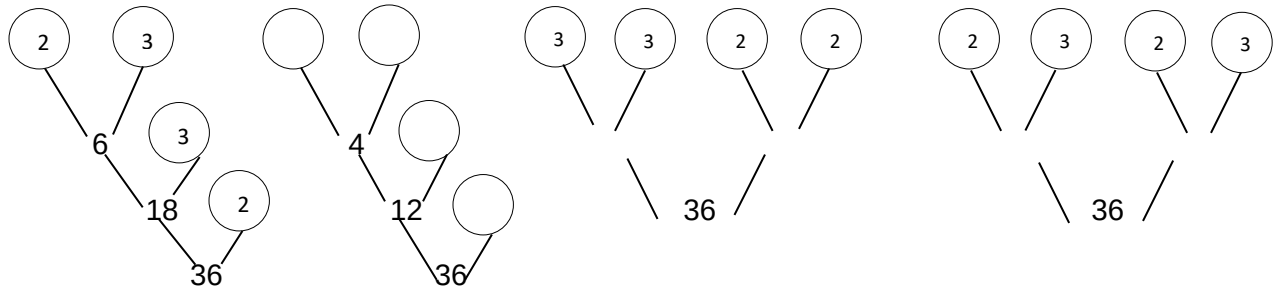




Observa que los extremos de las ramas ya no se pueden descomponer más. Por lo tanto, 12 = 2 x 2 x 3

También se puede escribir lo anterior utilizando notación exponencial[109] $12 = 2^2 \times 3$

Veamos el siguiente ejemplo: 36 = 18 x 2 = 12 x 3 = 9 x 4 = 6 x 6



$$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^2$$

Observa que en todos los casos la descomposición es igual, por lo que podemos afirmar que un número natural sólo admite una descomposición única, lo único que podría cambiar es el orden de los factores[110].

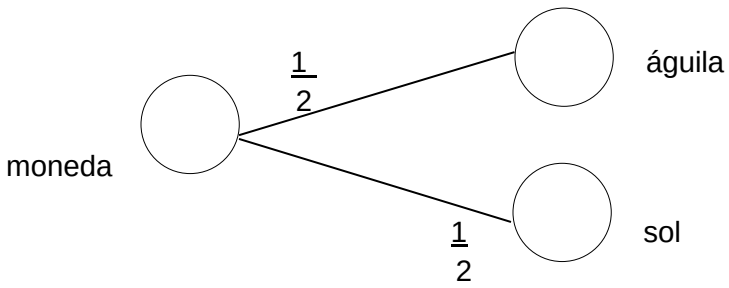
Unidad VIII

Registros estadísticos y probabilidad.

8. Árboles estocásticos: representación gráfica de la probabilidad.

Al lanzar una moneda al aire, ¿cuál es la probabilidad de que caiga *águila*?, ¿cuál es la probabilidad de que caiga *sol*?

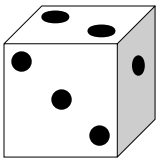
$P(A) = \frac{1}{2}$ $P(C) = \frac{1}{2}$



Al lanzar un dado, ¿cuál es la probabilidad de que la cara superior muestre: 1, 2, 3, 4, 5 o 6?

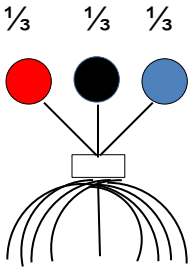
[2] Nada se dice respecto a los elementos que forman un diagrama de árbol, tampoco sobre las características de esta representación.

[110] El diagrama de árbol solo se presenta para dirigir a los estudiantes a aprender los conceptos de factorización y potenciación.

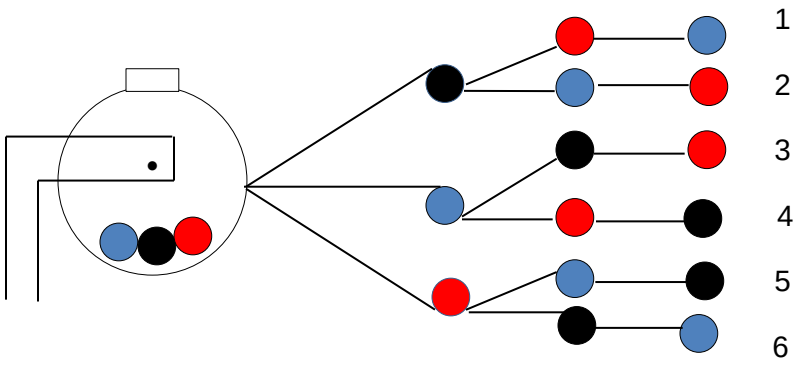


A estas representaciones gráficas, debido a su apariencia, se les llama árboles y debido a su aplicación en Probabilidad, se denominan árboles estocásticos.

De una urna que contiene 3 canicas; de color rojo, negro y azul respectivamente el árbol que representa la probabilidad de sacar al azar una de ellas es:



Los árboles son de gran utilidad en experimentos más complicados y para calcular la probabilidad de sus eventos. Si tenemos en la urna 3 canicas, azul, negra y roja, respectivamente, ¿qué probabilidad hay de sacar al azar, primero la negra, luego la azul y por último la roja?



Matemáticas. Primer Curso

Editado en México por Publicaciones Cultural. Primera edición 1978. Octava reimpresión 1989.

Octava Unidad. Registros Estadísticos y Probabilidad

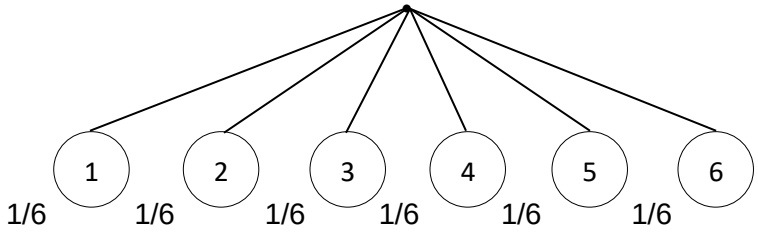
15. Representación gráfica

Ya hemos visto cómo se puede calcular la probabilidad de un suceso aleatorio. Por ejemplo, al tirar un dado podemos calcular la probabilidad de que salga

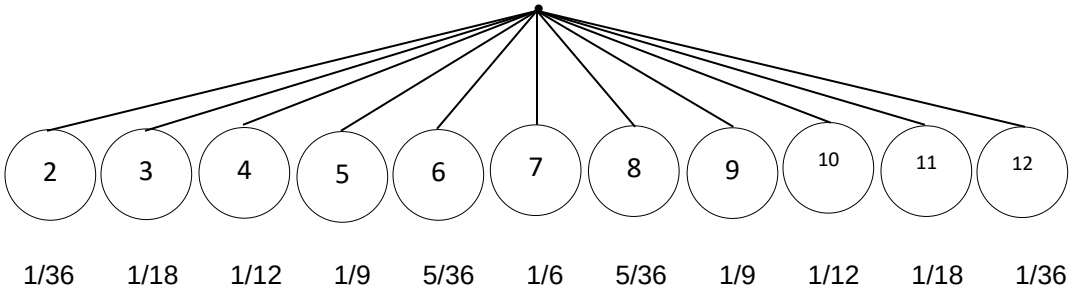
El 1 probabilidad 1/6 El 2 probabilidad 1/6 El 3 probabilidad 1/6

El 4 probabilidad 1/6 El 5 probabilidad 1/6 El 6 probabilidad 1/6

Estos resultados los podemos resumir con una representación gráfica:



En el ejemplo del inciso 11 de esta unidad tenemos otro ejemplo en el que podemos encontrar fácilmente cuál es la probabilidad al echar dos dados, de que salga un número entre 2 y 12. Haciendo un diagrama del mismo tipo que el anterior, tendremos la siguiente representación:



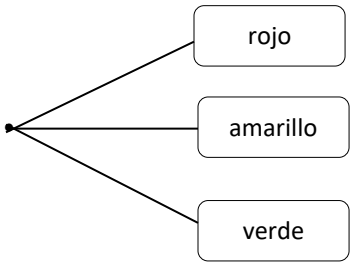
Estas representaciones son útiles puesto que concentran todas las probabilidades de un suceso aleatorio en un espacio[111]. A estas representaciones se les llama árboles.

Matemáticas 1. Teoría y Práctica

Editado en México por Editorial Trillas. Primera edición 1994. Primera reimpresión, agosto 1995.

1.5. Problemas de conteo

Al aproximarse un automovilista a un semáforo, el posible color que observa es uno de los que siguen:

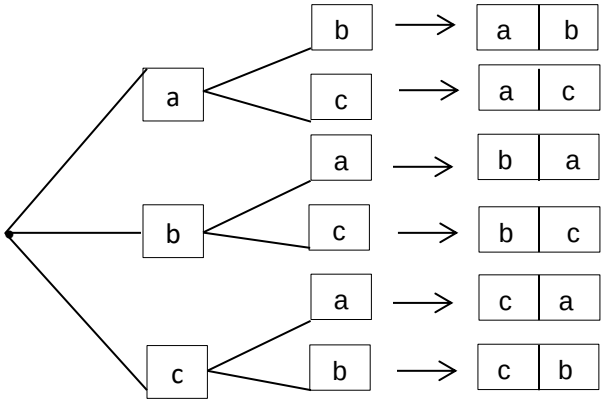


[111] Un diagrama de árbol puede mostrar la multiplicidad de pasos de un experimento y todos los resultados posibles.

Un diagrama como el anterior se llama diagrama de árbol. Los diagramas de árbol se usan como un recurso para contar todas las posibles combinaciones o las ordenaciones que pueden hacerse con dos o más objetos tomados de dos en dos, de tres en tres, etcétera.

Ejemplo 1. Se van a confeccionar banderas de dos franjas con tres colores de telas. ¿Cuántas banderas de dos colores distintos se pueden confeccionar?

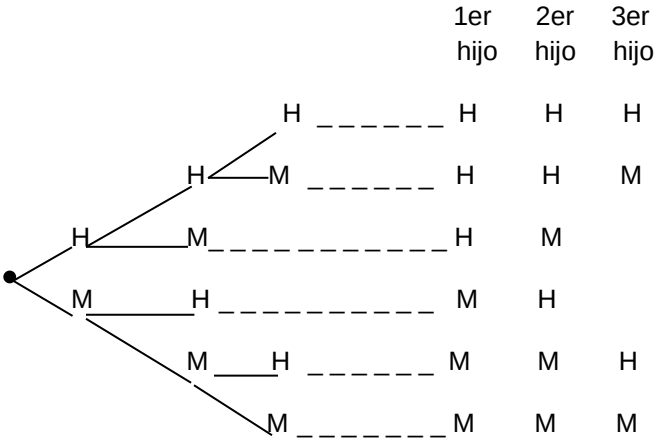
Solución. Supón que los tres colores son a, b y c. Para encontrar el número de banderas de dos franjas sin repetición de color, frente a cada color se colocan los otros dos colores. Observa:



De acuerdo con lo diagramado, ¿cuál es la respuesta? _____

Ejemplo 2. Dos recién casados deciden que dejarán de procrear hijos cuando tengan tres hijos del mismo sexo o dos de sexo diferente. ¿De cuántas maneras diferentes podrá quedar integrada la familia?

Solución. El diagrama de árbol que sigue, da varias formas en que puede quedar integrado el número de hijos observa:



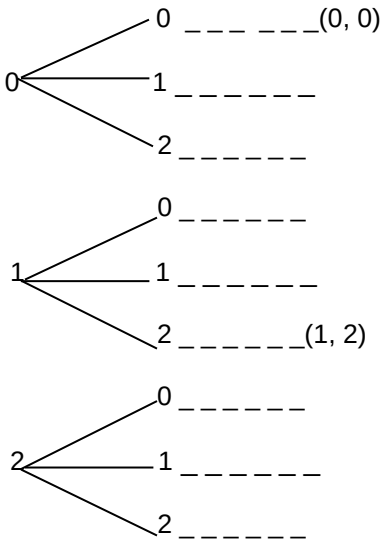
Ejercicios

1. Al cambiar sólo de saco y el pantalón, Jorge tiene 12 atuendos. Él tiene 4 pantalones, ¿cuántos sacos tiene?

[…] 4. Jaime y Miguel van a jugar frontón. El vencedor será el primero en ganar dos juegos seguidos o un total de tres juegos. Haz el diagrama de árbol que permite ver el número de juegos posibles para obtener vencedor.

5. Si se excluyeran del juego de dominó las fichas que tienen un 3, un 4, un 5 o un 6, se obtendría un minidominó.

a) Completa el diagrama de árbol que sigue, para obtener el número de fichas del minidominó.

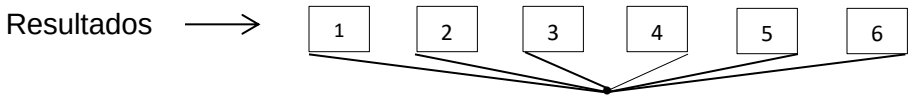


b) ¿Cuántas mulas hay en este minidominó?

[…] 7. En el trayecto de la casa de Amadeo a la escuela, hay sólo dos semáforos. Escribe todas las posibles parejas de colores que se pueden formar con las luces que se encuentran en ambos semáforos cuando se recorre dicho trayecto.

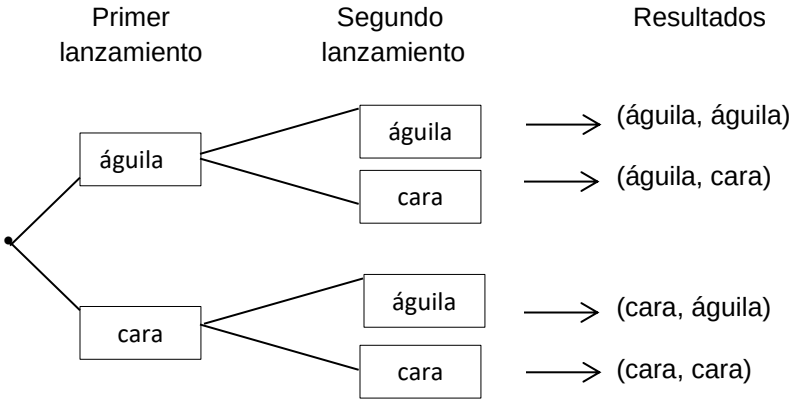
0.3. Uso de diagramas de árbol y rectangulares en la exploración y enumeración de los posibles resultados de una experiencia aleatoria.

Ejemplo 1. Al lanzar un dado, los posibles resultados se representan gráficamente así:



¿Cuántos resultados son? _____

Ejemplo 2. Al lanzar dos veces una moneda, los posibles resultados son parejas de casos igualmente posibles, las cuales se obtiene mediante el siguiente diagrama de árbol.



Nota. El resultado (águila, cara) significa que en el primer lanzamiento apareció águila y que en el segundo lanzamiento cayó cara.

¿Cuántos resultados fueron? _____

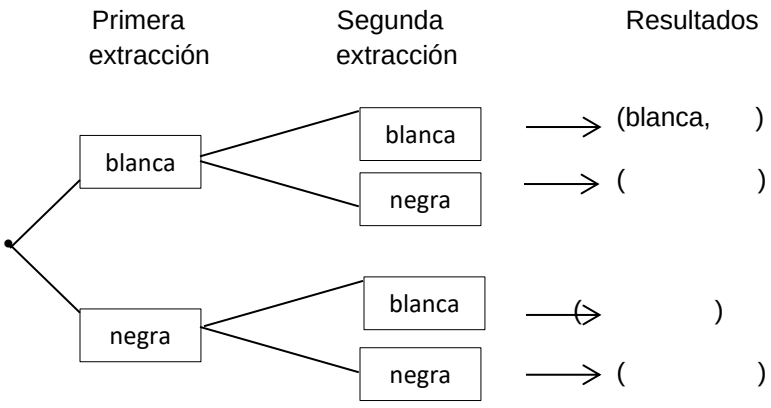
Escribe los resultados en que cayó cara en el segundo lanzamiento_____

_____

Enumera los resultados en que apareció águila en el primer lanzamiento. _____

Ejercicios

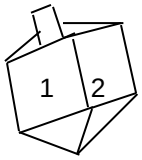
1. En una urna hay una bola blanca y una negra. Al extraer primero una de las bolas y luego la otra, ¿cuáles son los posibles resultados?



En este ejercicio no se mencionó que la extracción es con reemplazo.

2. Se va a seleccionar en forma aleatoria una pareja de vocales de un total de tres voluntarios para ser vocal. Para ello se colocaron en una urna las iniciales A, B y C de sus nombres. Con un diagrama de árbol, determina todas las posibles parejas de vocales que pueden resultar al extraer primero a uno y luego al otro de los vocales de la urna.

3. Se tiene una perinola en forma de prisma cuadrangular con los números 1, 2, 3 y 4 en sus caras laterales. Haz un diagrama de árbol para encontrar todos los posibles resultados que se obtienen al girar dos veces la perinola.



Matemáticas 1 – Primer Grado de Secundaria

Editado en México por Oxford University Press Harla México en 1997

Diagrama de árbol

Definición. Es la representación gráfica de un hecho mediante líneas que permite observar las posibilidades de manera objetiva y tomar de decisiones.

Proceso

a) Se marca un punto de origen y se trazan a partir del mismo, tantas líneas como indica el problema.

b) De cada una de estas, se trazan otras líneas, tantas como indiquen las opciones.

c) Se trazan tantas líneas como sean necesarias para concluir el diagrama.

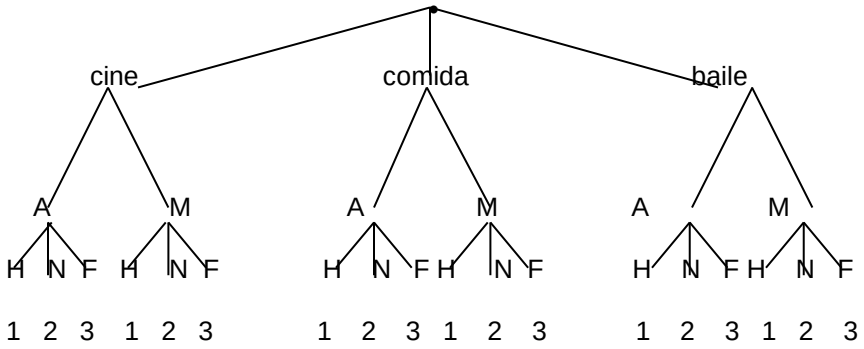
d) Se cuenta las últimas líneas del diagrama para obtener las posibilidades y tomar una decisión[112].

Ejemplos

1. Una joven tiene tres opciones para salir hoy: ir al cine, ir a comer o ir a bailar. Tiene dos opciones para trasladarse: en automóvil o en metro, y como ella piensa pagar, sólo puede invitar a una persona, a su novio, a su hermana o a una amiga; decide dejar la selección al azar, pero se interesa en conocer las posibilidades que tenía. Para ello hizo un diagrama de árbol de la siguiente manera.

A = auto H = hermana F = amiga M = metro N = novio

[112] En esta exposición de la construcción de un diagrama de árbol no se explica el carácter recursivo de esta representación.

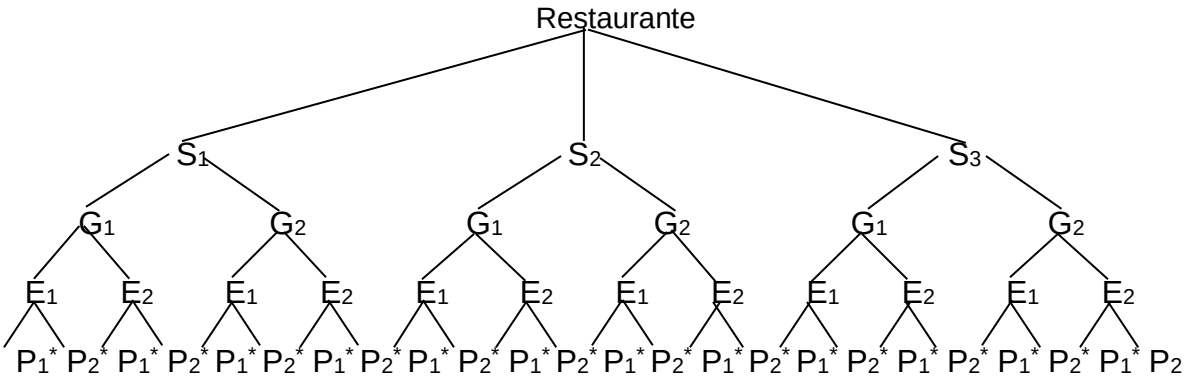


Por lo tanto, la joven tiene 18 posibilidades para elegir.

2. En un restaurante hay tres sopas, dos guisados, dos ensaladas y dos postres. ¿De cuántas formas distintas se puede hacer un menú?

Primero definiremos todos nuestros elementos con letras representativas:

3 Sopas:	2 Guisados:	2 Ensaladas:	2 Postres:
S_1	G_1	E_1	P_1
S_2	G_2	E_2	P_2
S_3			



Contamos las posibilidades, marcándolas con un asterisco (*).

Por lo tanto existen 24 diferentes menúes para ofrecer.

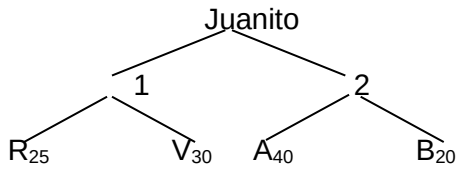
3. Juanito tiene dos cajas de canicas, cada una de ellas tiene dos colores. En la primera son 25 rojas y 30 verdes y en la segunda tiene 40 ágatas y 20 blancas. ¿Cuántas canicas tiene en total?

Primero definimos a cada caja con un número y también a las canicas.

Caja 1 y Caja 2

25 Rojas = R_{25} 40 Ágatas = A_{40}

30 Verdes = V_{30} 20 Blancas = B_{20}



Sumamos el número de canicas al final del árbol y tenemos:

$$25 + 30 + 40 + 20 = 115$$

Por tanto, Juanito tiene 115 canicas.

Existen prescripciones que establecen lo que hay que hacer paso a paso, sin proyectarse a las interrogantes ni a los propósitos. Tampoco hay indicios de que las conjeturas del alumno tengan un espacio reconocido.

Métodos de Conteo

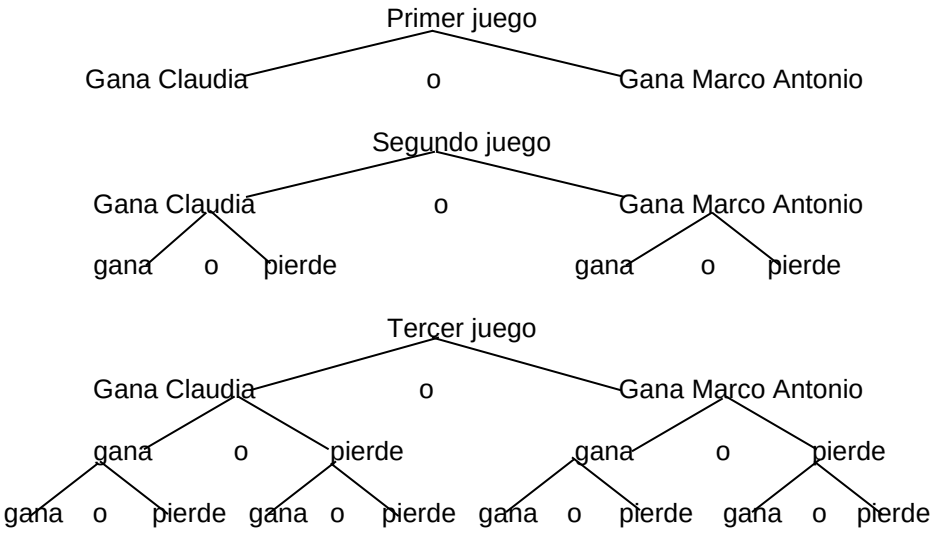
Diagramas de árbol

Definición: Es la representación gráfica mediante líneas de un evento, que permite observar las distintas posibilidades de un suceso de manera objetiva y tomar decisiones.

Un diagrama de árbol se utiliza para determinar el número de elementos que integran un espacio muestral.

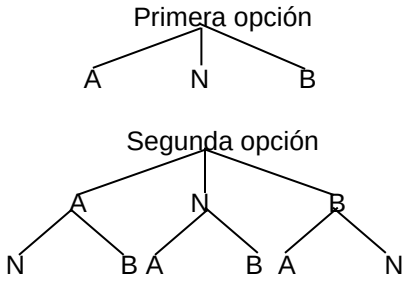
Ejemplos

1. En una secundaria, Marco Antonio y Claudia jugarán tres partidas de dominó, sin tomar en cuenta los empates y utilizando un diagrama de árbol, ¿de cuántas maneras distintas se pueden dar los juegos?



Por tanto, son ocho las posibilidades que tienen Claudia o Marco Antonio de ganar los tres juegos.

En un frasco se tienen tres canicas, una azul, una negra y una blanca; se ofrece un regalo a quien saque dos canicas, pero que una sea negra y la otra blanca. Utilizar el diagrama de árbol, ¿cuántas probabilidades se tienen para ganar?



Por lo tanto, hay dos probabilidades de sacar una canica negra y una blanca para obtener el regalo[113].

Matemáticas en Contexto. Primer curso

Editado en México por grupo Editorial Iberoamérica en 1998.

Contar puede ser un problema difícil cuando los objetos o los eventos que debemos contar son muchos. Las matemáticas nos enseñan métodos de conteo que nos facilitan la tarea. La representación por medio de diagramas y cuadros puede ser útil, como veremos a continuación.

Diagramas de árbol

Este método sirve para contar objetos, personas o eventos que se van multiplicando conforme transcurre el tiempo, de manera uniforme[114]. El ejemplo de la difusión de la noticia es uno de estos procesos posibles de resolver con este método.

El evento, o el objeto inicial, constituye el tronco de nuestro “árbol”, y cada una de las personas, objetos o eventos que de él resultan forman las ramas, que a su vez se “ramifican”.

[113] Una de las principales causas de los errores en la resolución de problemas de combinatoria es la confusión sobre la relevancia del orden.

[114] Si en cada nivel de ramificación el número de ramas es el mismo en todos los nudos entonces es posible aplicar el principio de la multiplicación, lo que no ocurre en todos los casos.

I. En la zona escolar se ha organizado el campamento anual de futbol con las siguientes reglas:

1. Cada una de las ocho escuelas de la zona selecciona un equipo que la represente.

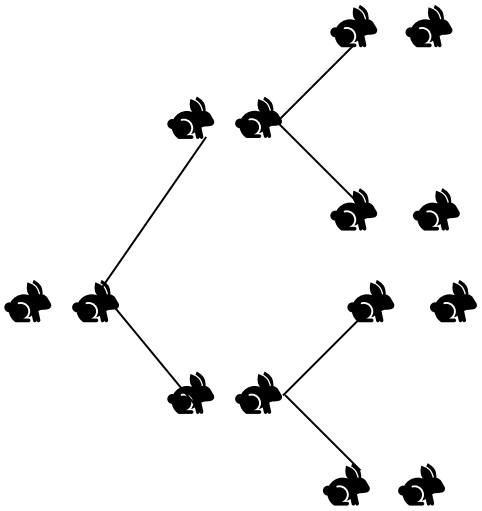
2. En la primera ronda, cada equipo juega una sola vez con cada uno de los siete restantes.

3. Los cuatro mejores equipos pasan a la segunda ronda, donde cada equipo vuelve a jugar una sola vez contra los restantes.

4. Los dos equipos mejor calificados juegan la final en dos partidos, uno como local y otro como visitante. El ganador es el que tiene el mejor resultado global en estos dos últimos partidos.

II. Una raza especial de conejos se reproduce de tal manera que cada pareja da lugar a dos machos y dos hembras después de veinte días de gestación.

Copia en tu cuaderno el siguiente diagrama, complétalo y encuentra cuál es la población generada por una pareja después de 100 días, suponiendo que cada pareja sólo se cruza una vez[115].



E j e r c i c i o s

¿De Cuántas Formas Cuentas…?

En la escuela se entrevistará a los padres de familia que Situación Problema tengan tres hijos. ¿Cuál es la probabilidad de que dos de

[115] Es una oportunidad para vincular este ejercicio con el tema de potenciación.

los tres hijos de una familia sean mujeres? ¿Y cuál de que dos o tres de los hijos sean del sexo femenino?

(Considera que la probabilidad de que un hijo al nacer sea de sexo masculino o femenino es de $\frac{1}{6}$)

Antes de continuar leyendo imagina una forma de Estrategia de Solución responder a las preguntas que se han planteado. Coméntalas con tus compañeros y tu profesor.

1. ¿Cómo puedes visualizar y contar todos los resultados posibles? ¿Recuerdas cómo elaborar un diagrama de árbol (lección 5)?

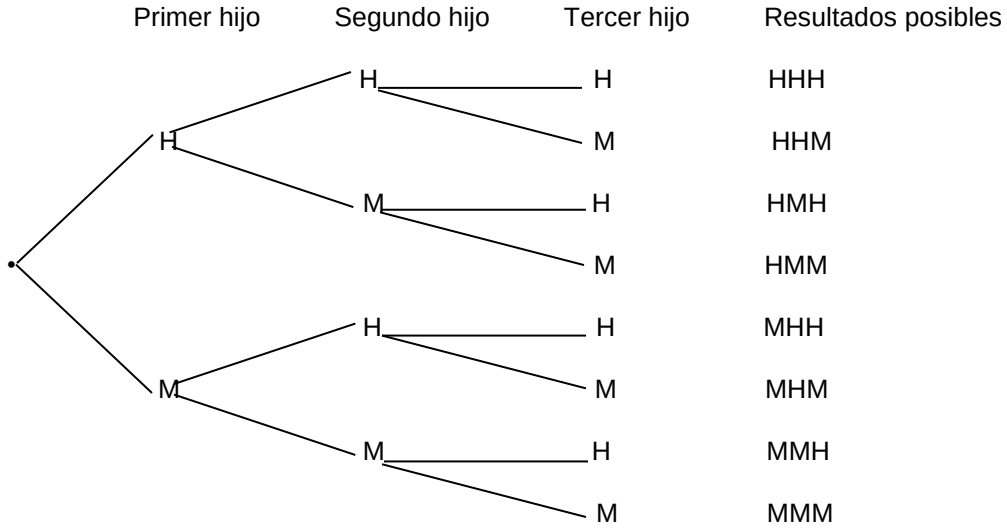
2. ¿Todos los resultados son igualmente probables?

3. Encuentra cuáles son los casos o formas en que puede ocurrir el evento o resultado que nos interesa, de dos mujeres entre un total de tres hijos.

Los diagramas de árbol facilitan las tareas de contar. Formalización

También permiten ver cómo se van construyendo los casos o resultados del experimento aleatorio.

Aplicándolos al problema de las familias con tres hijos, se tienen las siguientes posibilidades:



El primer hijo tiene una probabilidad de $\frac{1}{2}$ de ser mujer. Al nacer el segundo hijo,

la probabilidad de que sea niña también es de $\frac{1}{6}$[116]. Si se considera en conjunto a los dos primeros hijos, la probabilidad de que sean mujeres será la mitad de la mitad, o sea:

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

De igual manera, si se consideran los tres hijos en conjunto, la probabilidad de tres hijas es la mitad de la mitad de la mitad:

$$\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \right) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

De hecho, cualquiera de los ocho resultados posibles señalados en la columna del extremo derecho del diagrama de árbol, tiene la misma posibilidad de ocurrir, de $\frac{1}{8}$

Hasta aquí, ¿hay variaciones entre estos libros?

Prácticamente todos los textos en el tema de diagramas de árbol utilizan los mismos materiales y la misma exposición; solo el orden es diferente. Los problemas suelen presentar poca variación estructural, de manera que las reglas recién enseñadas se aplicaban sin mucha dificultad. Al estar repitiendo reglas, ¿se propicia que los alumnos empleen los diagramas de árbol para interpretar información matemática?

Matemáticas 1

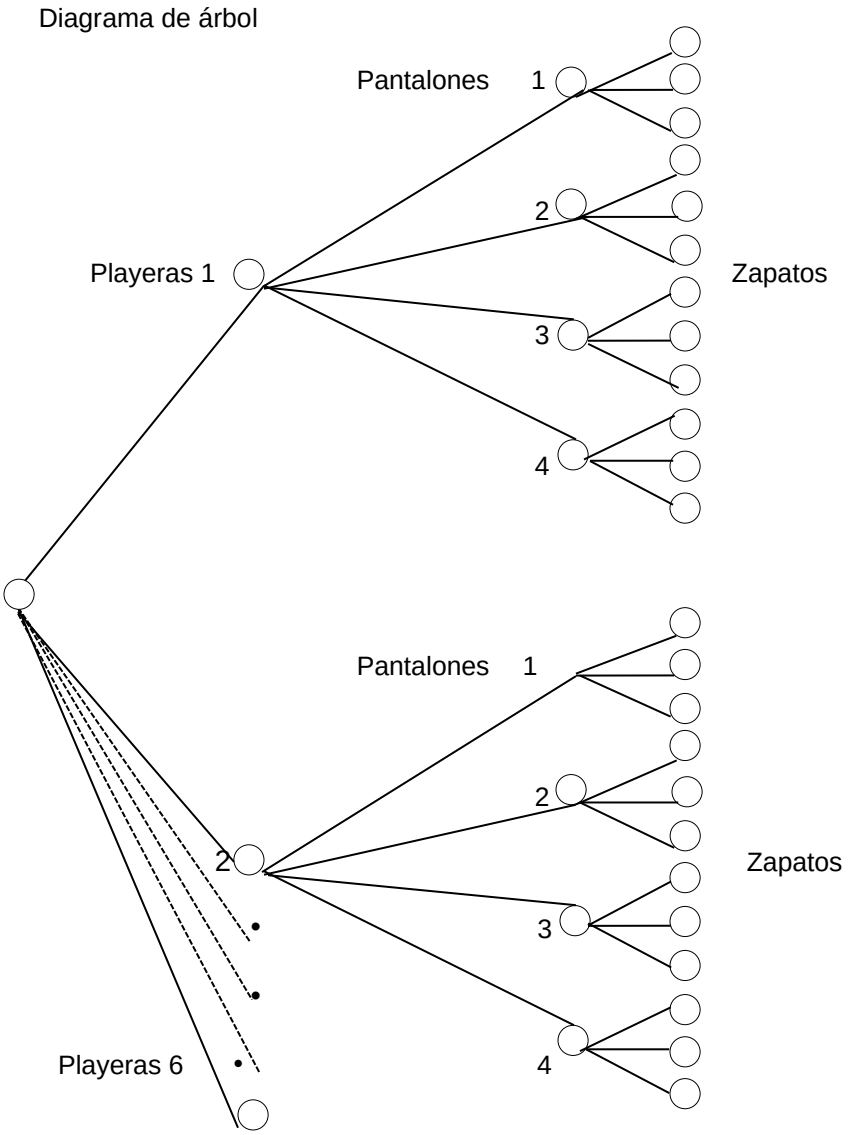
Editado en México por Editorial Santillana XXI Secundaria. Primera edición: abril de 2003. Segunda reimpresión marzo de 2005.

Conteo Conceptos y procedimientos

…Primero escogemos una playera y un pantalón, y una vez hecho esto podemos escoger 3 pares de zapatos diferentes para vestirnos. Ahora, por cada playera podemos escoger 4 diferentes pantalones, y por cada uno de los pantalones podemos escoger 3 pares de zapatos distintos. Por lo que por cada playera tenemos $4 \times 3 = 12$ formas de combinar los zapatos y los pantalones. Como en total tenemos 6 playeras y por cada una de ellas podemos formar 12 combinaciones, entonces tenemos $6 \times 4 \times 3 = 6 \times 12 = 72$ combinaciones posibles.

[116] Debe decir: Al nacer el segundo hijo, la probabilidad de que sean niña también es de $\frac{1}{2}$

A este método para contar las cosas se le llama diagrama de árbol. Copia y termina el diagrama de la izquierda en tu cuaderno.



Actividades

[…] 6. Richard Paul Lohse, un pintor suizo, creó este cuadro con rectángulos en 15 columnas; en cada una pintó 15 tonalidades entre los colores verde, amarillo, naranja y rojo. ¿Cuántas tonalidades usó en este cuadro?

Diagramas de árbol y arreglos rectangulares

Conceptos y procedimientos.

…Volvamos con el ejemplo de lanzar tres veces seguidas una moneda o lanzar tres monedas iguales al mismo tiempo.

[…] Susana le dijo a Antonio que cuando lanzas una moneda tres veces seguidas es más probable que salgan dos águilas y un sol y no que salgan tres soles. Antonio dice que eso no es cierto, pues la combinación AAS es una de las ocho posibles, lo mismo que SSS y ambas deberían ser igualmente probables. ¿Quién tiene razón? _____

Escribe un argumento para convencer a tus compañeros y compañeras de lo que piensas. Puedes usar un diagrama de árbol para apoyar tu argumento.

Cuando los resultados de un experimento son igualmente probables[117], un diagrama de árbol o un arreglo rectangular nos permite saber qué eventos son más probables, pues basta con contar cuántos son posibles y cuántos favorables.

Actividades

4. Construye un diagrama de árbol y completa la tabla de la siguiente columna según la cantidad de monedas.

Número de monedas	1	2	3	4	5
Número de posibles combinaciones					

¿Qué relación encuentras entre el número de monedas y la cantidad de posibles combinaciones?

ÁBACO 1. Matemáticas

Editado en México por SM de Ediciones, S.A. de C.V. Primera edición 2006.

Lección nueve

PROBLEMAS DE CONTEO

…El conteo es un procedimiento que permite determinar con exactitud cuántos y cuáles eventos se pueden derivar de una situación determinada, lo cual permite elegir la combinación de eventos deseada y la posibilidad de que ocurra. En esta lección estudiarás problemas de conteo.

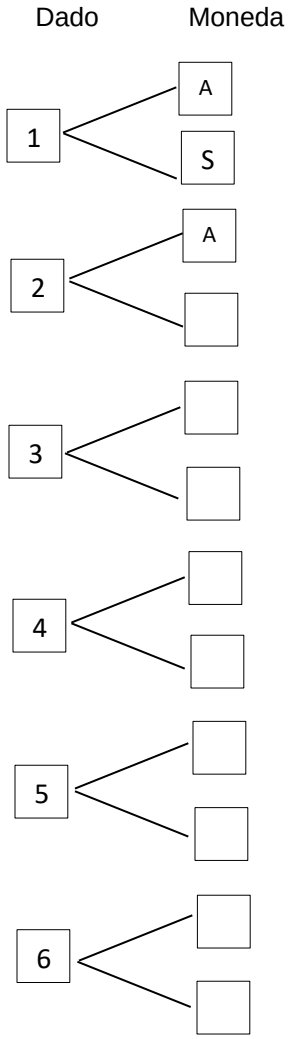
RESUELVE

[117] Y cuando no, también

[…] dos jóvenes deben decidir quién comenzará el juego. Uno propone que cada quién lance una moneda al aire, y que si caen dos caras iguales, él será el primero; pero que si son diferentes, será el otro quien inicie. ¿Podrías ayudar al segundo joven a saber si esta forma de decisión es buena, o si es necesario buscar otra?

Si al mismo tiempo lanzamos un dado y una moneda, ¿cuántas posibles combinaciones se pueden obtener?

4 Completa el diagrama de árbol en tu cuaderno.



5. Contesta en tu cuaderno.

a) ¿Cuántas opciones se tienen al lanzar el dado?

b) ¿Cuántas opciones se tienen al lanzar la moneda?

c) ¿Cuántas combinaciones obtuviste al construir el diagrama de árbol?

d) ¿De qué manera, conociendo las opciones del dado y de la moneda, es posible anticipar el número de posibles combinaciones? Apóyate en el ejemplo anterior y en la actividad inicial[118].

e) Comparen sus respuestas y comenten sobre la distribución obtenida en las ramas de los árboles que elaboraron.

Matemáticas 1

Editado en México por Ediciones Larousse. Primera edición 2008.

1.8 Diagramas y tablas Problemas de conteo

Conocimientos y habilidades

Resolverás problemas de conteo utilizando diversos recursos, como tablas, diagramas de árbol y otros procedimientos personales.

¿Qué sabemos de… problemas de conteo? △

Lección 25 Trabaja en equipo ○□

[…] 2. ¿Cuántos saludos ocurren entre seis amigos si todos se saludan entre sí?_____

¿Y si son ocho? _____

Expliquen brevemente cómo resolvieron estos problemas: _____

3. Cuatro amigos van al cine y todos quieren sentarse en una misma fila. ¿De cuántas formas pueden hacerlo si dos de ellos no quieren sentarse juntos? _____

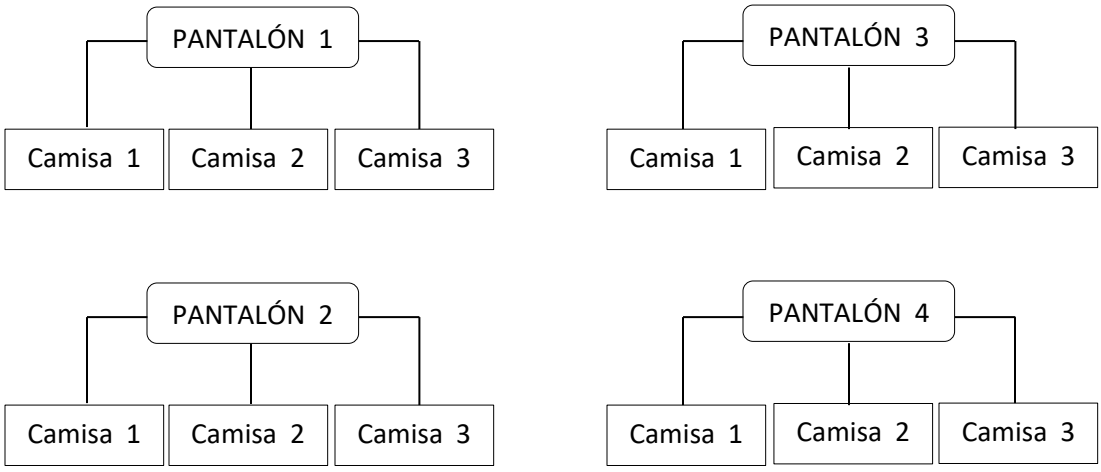
Para saber más de… problemas de conteo △

Lección 26 Trabaja individualmente

Imagina que para vestirte cuentas con 4 pantalones y 3 camisas, ¿de cuántas maneras distintas podrías vestirte?

[118] Las investigaciones señalan que la primera operación combinatoria que se debe estudiar cuando se utiliza el diagrama de árbol es la de ordenaciones con repetición seguido por las permutaciones, y por último las combinaciones. Los problemas más difíciles antes de recibir instrucción en Combinatoria son los problemas de permutación, seguido de las ordenaciones con repetición, ordenaciones sin repetición y los menos difíciles son los de combinaciones. Luego de la instrucción cambian el orden y los que tienen la mayor dificultad de respuesta correcta son las combinaciones y las permutaciones las de mayor respuesta.

1. Para resolverlo, Pepe se apoyó en el siguiente diagrama:



a) Entonces, ¿cuántas combinaciones puedes realizar? _____

b) ¿Cómo lo hubieras resuelto tú? Coméntalo con tus compañeros

[…] 3. Determina cuántos números de dos cifras, sin repetición de cifras, pueden escribirse con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5. Luego determina cuántos de esos números cumplen las siguientes condiciones:

Empiezan con 1_____ Son pares _____

Terminan en 5 _____ Son múltiplos de 5 _____

Empiezan con 1 y terminan en 5_____ Son mayores que 30 _____

4. Determina cuántas palabras distintas pueden formarse con las letras de la palabra AMOR, sin repetición de letras, aunque éstas no tengan significado en español. Luego determina cuántas de esas palabras cumplen las siguientes condiciones.

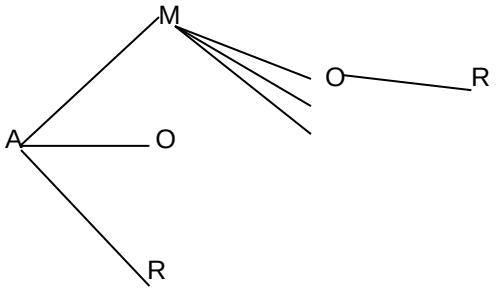
Terminan en A_____ Empiezan con vocal _____

Empiezan con M_____ Tienen vocal y consonante alternadas ___

Empiezan con R y terminan en A _____

Si te sirve de algo, apóyate en el siguiente diagrama[119]:

[119] De esta manera se dibujó en el texto.



6. Cinco jueces de clavados disponen de una cartulina que tiene un 1 en un lado y un 0 en el otro. ¿Cuántas combinaciones de ceros y unos pueden hacer los cinco jueces?

_____

Lección 27 Trabaja individualmente △

1. Determina cuántos saludos ocurren entre el siguiente número de personas si todas se saludan una a la otra: 5, 6, 7 y 8. Generaliza tus resultados para cualquier número de personas.

Matemáticas 1

Editado en México por Ediciones Castillo. Primera edición: diciembre de 2013. Primera reimpresión: diciembre de 2015.

Secuencia 30 Resuelvo y aprendo

Diagrama de árbol y tablas de entrada múltiple

En equipos resuelvan las siguientes actividades.

1. Para una visita escolar, se hizo una encuesta a los alumnos para decidir entre todos un museo y un centro de diversión. La encuesta se muestra en la figura 30.2

Visita escolar

Selecciona un museo y un centro de diversión

Museo		Centro de diversión	
Museo de Ciencias	◯	Acuario	◯
Museo de Arte	◯	Cine	◯
		Zoológico	◯
		Feria	◯

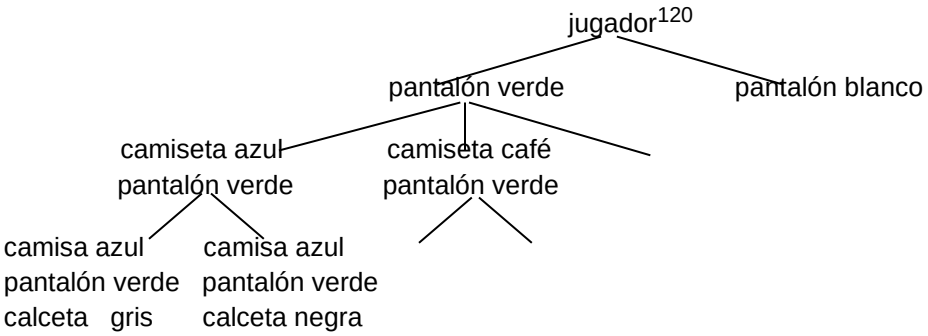
Fig. 30.2

a) ¿Cuántas maneras posibles hay para realizar la visita?

Describan la forma en que obtuvieron la respuesta

2. Los integrantes de un equipo de futbol quieren comprar un nuevo uniforme. Los posibles colores para el pantalón corto son el blanco y el verde; para la camiseta, se tiene el azul, el café o el morado, y los colores para las calcetas serán el gris o el negro.

a) Completen y coloreen el siguiente diagrama



(v, a, g) Fig. 30.3

b) ¿De cuántas maneras diferentes se puede formar el uniforme? _____

c) ¿Cuántas combinaciones de uniformes hay con playeras de color azul?_____

d) Si sólo importa la cantidad de combinaciones, ¿cómo se puede obtener el número de uniformes posibles mediante operaciones básicas? _____

Discutan y analicen la siguiente definición.

Un diagrama de árbol es un recurso gráfico utilizado para listar todos los resultados posibles de una secuencia de eventos de un experimento aleatorio.

Integración

[…] 7. En grupo, con ayuda del docente, completen los siguientes párrafos.

Para listar todos los resultados de dos eventos A y B con _____ se dibuja un punto inicial del que partirán tantas ramas distintas como elementos tenga A, de las cuales partirán tantas ramas distintas como elementos tenga B.

Integración

[120] En el libro, este diagrama se realizó empleando dibujos.

[…] 12. En grupo con ayuda del docente, completen el siguiente enunciado.

Si un suceso puede ocurrir de m maneras distintas y otro suceso independiente puede ocurrir de n formas distintas, entonces ambos pueden tener lugar de _____ x _____ maneras distintas. Validen las actividades 8 a 11 a partir del enunciado que acaban de completar.

3. Andrés debe elegir una actividad deportiva y una artística para cursar el presente año escolar.

Actividades deportivas	Basquetbol	Atletismo	Voleibol	Gimnasia	Futbol
Actividades Artísticas	Música	Pintura	Teatro	Baile folclórico	

Fig. 30.6

a) ¿De cuántas maneras puede Andrés escoger sus dos actividades? _____

Matemáticas 1. Secundaria. Conect@ Estrategias

Editado en México por SM Ediciones. Primera edición, 2013. Quinta reimpresión 2014.

Secuencia 6/ lección 89. Tarjetas de felicitación.

Contar no siempre es fácil. A veces se requieren técnicas especiales. Por ejemplo, ¿cuántas parejas de baile se pueden formar en una reunión donde hay seis hombres seis mujeres? ¿De cuántas maneras se puede llenar una quiniela de futbol? Preguntas como las anteriores se responden mediante técnicas de conteo.

resolver 1. Para el Día de San Valentín, Pati hará tarjetas en tres colores diferentes y las decorará con corazones o cupidos. Le gusta poner solamente un color y un tipo de adorno por tarjeta.

amarillo azul corazón cupido
verde

a) Enlista, en tu cuaderno, todas las tarjetas que puede hacer. Por ejemplo, una combinación posible es azul con cupidos.

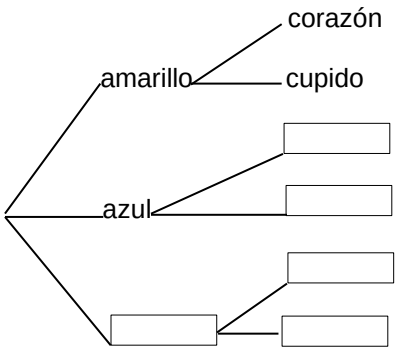
b) ¿Cuántas tarjetas diferentes puede hacer?_____

2. Pati consiguió otro tipo de adorno

a) ¿Cuántas tarjetas diferentes puede hacer si aumenta este adorno? _____

4. Para saber las maneras de combinar los colores y adornos es posible elaborar un diagrama. Complétalo con los colores y adornos de la actividad 1.

técnicas



Ya sabemos

Esta manera de organizar los datos se llama

diagramas de árbol

Secuencia 6/lección 90. Futbol.

…Los problemas de la lección anterior y esta son problemas de conteo. Es posible formar algunos con una multiplicación.

Por ejemplo, si se tienen dos playeras y tres shorts, el número de uniformes diferentes que se pueden formar es 3 x 2 = 6

4. En la primera semana del torneo se jugarán dos partidos: Halcones contra Búhos y Toros contra Vaqueros. Los alumnos quieren hacer una quiniela; esta se llena sombreando el recuadro del equipo que se supone que ganará o el del centro si se piensa que empatarán.

1	☐	HALCONES	☐	BÚHOS	☐	1
2	☐	TOROS	☐	VAQUEROS	☐	2

a) Si se sombrea un cuadro por partido, ¿cuántas maneras hay de llenar la quiniela? _____

b) Si la quiniela fuera de tres partidos, ¿de cuántas maneras podría llenarse? _____

Reflexionemos °

¿Cuántas formas hay de llenar una quiniela de 14 partidos?