SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
UNIDAD 092, AJUSCO

PROGRAMA EDUCATIVO
MAESTRÍA EN DESARROLLO EDUCATIVO
LÍNEA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

TÍTULO

LA ENSEÑANZA DE LAS FRACCIONES: UNA SECUENCIA DIDÁCTICA CON ESTUDIANTES DE SEXTO GRADO DE PRIMARIA DE UNA ESCUELA PÚBLICA

OPCIÓN DE TITULACIÓN
TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN DESARROLLO EDUCATIVO

P R E S E N T A:

IGNACIO ACEVES OTERO

ASESORA: DRA. CRISTIANNE BUTTO ZARZAR

ESTA TESIS FUE FINANCIADA CON UNA BECA COMISIÓN DE LA SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

CIUDAD DE MÉXICO, OCTUBRE 2024

Ciudad de México, a 16 de octubre de 2024

DESIGNACIÓN DE JURADO AUTORIZACIÓN DE ASIGNACIÓN DE FECHA DE EXAMEN

La Coordinación de Posgrado tiene el agrado de comunicarle que ha sido designado miembro del Jurado del Examen Profesional del pasante **ACEVES OTERO IGNACIO** con matrícula **220927050**, quien presenta el Trabajo Recepcional en la modalidad de **TESIS** bajo el título: **"LA ENSEÑANZA DE LAS FRACCIONES: UNA SECUENCIA DIDÁCTICA CON ESTUDIANTES DE SEXTO GRADO DE PRIMARIA DE UNA ESCUELA PÚBLICA"** Para obtener el Título de la **MAESTRÍA EN DESARROLLO EDUCATIVO**

Jurado	Nombre
Presidente	**MTRA. RUTH ANGELICA BRIONES FRAGOSO**
Secretario	**DRA. CRISTIANNE MARIA BUTTO ZARZAR**
Vocal	**DRA. ALICIA LILY CARVAJAL JUAREZ**
Suplente 1	**DRA. EDDA NORMA JIMENEZ DE LA ROSA Y BARRIOS**
Suplente 2	**DRO. JOSE LUIS CORTINA MORFIN**

Con fundamento al acuerdo tomado por los sínodos y del egresado, se determina la fecha de examen para:

el miércoles 30 de octubre de 2024 a las 1:00 pm
EXAMEN PRESENCIAL

Atentamente
"EDUCAR PARA TRANSFORMAR"

MIGUEL ANGEL VERTIZ GALVAN
COORDINADOR DE POSGRADO

Cadena Original:
[]281[2024-10-16 10:54:22[092]220927050[ACEVES OTERO IGNACIO[D[MAESTRÍA EN DESARROLLO EDUCATIVO[3[M[3[13[LA ENSEÑANZA DE LAS FRACCIONES: UNA SECUENCIA DIDÁCTICA CON ESTUDIANTES DE SEXTO GRADO DE PRIMARIA DE UNA ESCUELA PÚBLICA[MTRA.]RUTH ANGELICA BRIONES FRAGOSO[DRA.]CRISTIANNE MARIA BUTTO ZARZAR[DRA.]ALICIA LILY CARVAJAL JUAREZ[DRA.]EDDA NORMA JIMENEZ DE LA ROSA Y BARRIOS[DRO.]JOSE LUIS CORTINA MORFIN[2024-10-30[13:00[1313[0[uBQIgni4z7[]
Firma Electrónica:
nm+GLuN8r/Q99kom6MM2tJPZTYWJfjZFrintVCM3wlzp0pVlyNFu6V9IwP67WkOOoFcx27b7M/cVEfH7vfOZvGKivkfC8ZtQ2Zep9qcM253ljgpd7SpEvdx+0+NYn4BvdvWAw0urmHBJIE2xnQq2bTkPu62MzrlASqpFDP//YpLN3GjIIQ2V0eNy90kV9I6AfiuIoeaZPRYwML4yDU9gVxDf6NI2NNIgZrVzEtXlz6QOUk9r30Rx/N8gpTyBusTdBZ50mh4/uofA6gFuBBB65GyG2+jS8zbIr0S59G+BXLcd3gTB36vLWckvHnw/2kT7mgQfPx3gQTuEhJhcgIfn/gdL6C/o+tedNIsKKGirHsf7GyB/vQ3vAQXDVzPoOuWp+iLIXSbnWyzqo4EpaEKDPow2eZzTdhwjKrD4pROxjzC+wUwblq4yvUNNcDXaah5N27wRW5kRHEkg+I/HiKHX+eOs3CY10WG7Ha6yh0M9z3C0dRpqsHg2y5p4HibJfD3GRdojRc75H6sEf0rz5M7bAMUXE4GqdKUQTao/fYaXdkd5b3mAwR8gFqgj+4ZIHExdio2aurWaHwSTtpb+VEmryu66L5nePxIJaWFuQBvD8VpwLpWDZniRUgzjn2qVwG9S6sV/3643yMyo5dGb4wuhfEE7DHjuCCIdijYtJdlVA=
Fecha Sello:
2024-10-16 10:54:22

*El presente acto administrativo ha sido firmado mediante el uso de la firma electrónica avanzada del funcionario competente, amparada por un certificado

Resumen

El concepto de fracción está presente en diversos contextos de uso. En el contexto escolar, los números fraccionarios hacen parte del currículo de la educación primaria. Los estudiantes pasan un tiempo razonable de instrucción escolar. A pesar de esto, muchos estudiantes continúan presentando dificultades con este contenido escolar. Se reporta un estudio sobre el aprendizaje de las fracciones con estudiantes de 6° grado de una escuela pública de la Ciudad de México. Los objetivos del estudio fueron: 1.Identificar las dificultades y habilidades que los estudiantes tienen con el aprendizaje de los números fraccionarios, 2. Diseñar y aplicar una propuesta didáctica y 3. Investigar cómo evoluciona el pensamiento matemático de los niños sobre los números fraccionarios. El marco teórico del estudio se fundamentó en el modelo recursivo de Kieren (1993), el referido autor argumenta que el conocimiento integral del número racional requiere de la comprensión de cada idea y también de cómo éstas se interconectan entre sí. Para el referido autor, dicho aprendizaje puede ser visualizado a partir de la idea de constructo y lo define como la acción en la que el sujeto aprehende del mundo un objeto mental y a su vez lo concibe como el entendimiento de las fracciones por sub-constructos. Metodología, el corte del estudio es cualitativo. Participaron del estudio 24 alumnos de 6° de primaria de una escuela pública ubicada al sur de la Ciudad de México; de los cuales 16 eran niñas y 8 eran niños con edades que oscilaban entre los 11 y 12 años de edad. Las etapas de la investigación fueron tres: la primera etapa consistió en la aplicación de un cuestionario inicial de fracciones, seguido de una entrevista clínica individual aplicada a los estudiantes participantes del estudio, y una entrevista semiestructurada aplicada al docente. La segunda etapa consistió en el diseño y aplicación de una secuencia didáctica y la tercera etapa, aplicación de un cuestionario final. Los resultados de la primera etapa del estudio revelaron que los alumnos presentaron dificultades con la idea entero o unidad y mitad en figuras no canónicas, en la representación de fracciones en la recta numérica, representación gráfica en cantidades discretas, la idea de fracción continua discretizada y en las operaciones con fracciones. Después de la aplicación de la secuencia didáctica, los alumnos presentaron un buen avance conceptual, pudieron superar algunas dificultades encontradas en la primera etapa del estudio y transitar hacia niveles más altos de conceptualización matemática. Eso revela que la comprensión de los números fraccionarios es un proceso gradual, que requiere de la comprensión de los diversos subconstructos involucrados en el campo conceptual de los números racionales.

Abstract

The concept of fraction is present in various contexts of use. In the school context, fractional numbers are part of the primary education curriculum. Students spend a reasonable amount of time in school instruction. Despite this, many students continue to have difficulties with this school content. A study is reported on the learning of fractions with 6th grade students from a public school in Mexico City. The objectives of the study were: 1. To identify the difficulties and skills that students have with learning fractional numbers, 2. To design and implement a didactic proposal and 3. To investigate how children's mathematical thinking about fractional numbers evolves. The theoretical framework of the study was based on Kieren's recursive model (1993). The aforementioned author argues that comprehensive knowledge of the rational number requires understanding each idea and also how they are interconnected with each other. For the aforementioned author, such learning may be visualized from the idea of construct and defines it as the action in which the subject apprehends a mental object from the world and in turn conceives it as the understanding of fractions by sub-constructs. Methodology, the cut of the study is qualitative. 24 students from 6th grade of primary school from a public school located in the south of Mexico City participated in the study; of which 16 were girls and 8 were boys with ages ranging between 11 and 12 years old. The stages of the research were three: the first stage consisted of the application of an initial questionnaire of fractions, followed by an individual clinical interview applied to the students participating in the study, and a semi-structured interview applied to the teacher. The second stage consisted of the design and application of a didactic sequence and the third stage, application of a final questionnaire. The results of the first stage of the study revealed that the students had difficulties with the idea of whole or unit and half in non-canonical figures, in the representation of fractions on the number line, graphical representation in discrete quantities, the idea of discretized continued fraction and in operations with fractions. After the application of the didactic sequence, the students showed good conceptual progress, were able to overcome some difficulties found in the first stage of the study and move on to higher levels of mathematical conceptualization. This reveals that the understanding of fractional numbers is a gradual process, which requires the understanding of the various subconstructs involved in the conceptual field of rational numbers.

ÍNDICE

Resumen **iii**
Abstract **iv**
ÍNDICE **v**
LISTA DE FIGURAS **viii**
LISTA DE TABLAS **x**
Agradecimientos **xi**
Introducción **1**
Planteamiento del problema 13
Preguntas de investigación 14
Objetivos 14
Capítulo I **17**
Antecedentes del estudio: números fraccionarios **17**
1.1 Estudios relevantes de números fraccionarios 17
1.2 El análisis fenomenológico del concepto u objeto matemático 19
1.3 La teoría de los campos conceptuales de Vergnaud 21
1.4 El modelo recursivo de Thomas Kieren 25
1.5 El abordaje realista de Streefland 30
1.6 Otras investigaciones sobre los números racionales 31
1.7 Estudios recientes 33
1.8 Contribución de los estudios al abordaje de la enseñanza de los números fraccionarios 41
Capítulo II **45**
Marco teórico **45**
2.1. El modelo recursivo de Kieren y Pirie: Evolución del concepto de comprensión 45
2.1.1 La comprensión como superación de obstáculos cognitivos 47
2.1.2 La comprensión como generador de imágenes del concepto y definición del concepto 48
2.1.3 La comprensión durante la operación con representaciones múltiples 48
2.1.4 La comprensión como construcción de las concepciones operacionales y estructurales 50
2.1.5 El modelo de comprensión de Pirie y Kieren 51
2. 2 Evolución del pensamiento de Kieren acerca del concepto de fracción 58
2.2.1 Subconstructos del concepto de fracción 62
2.2.2 Modelo Recursivo 66
2.3 Relevancia del modelo de entendimiento matemático recursivo en la investigación y diseño de la secuencia didáctica 73
2.4 La relevancia de las fracciones en la educación escolar 74
Capítulo III **75**
Metodología **75**
3.1 Corte del estudio: mixto 75
3.1.1 Diseño del estudio: Secuencial 77

3.2 Participantes del estudio 77
3.2.1 Características de la población 78
3. 3 Etapas del estudio 78
3.3.1 Primera etapa 78
3.3.1.1 Cuestionario inicial de fracciones 78
3.3.1.2 Entrevistas clínicas piagetianas 82
3.3.1.3 Entrevista semiestructurada a la maestra 84
3.3.2 Segunda Etapa 86
3.3.2.1 Aplicación de la secuencia de actividades 88
3.3.3 Tercera etapa 89
3.3.3.1 Cuestionario final 89
3.4 Análisis de los datos 90
3.4.1 Primer nivel de análisis 91
3.4.2 Segundo nivel de análisis 91
3.4.3 Tercer nivel de análisis 95
3.5 Estudio piloto y sus implicaciones para el estudio principal 95
Capítulo IV **98**
Resultados de la primera etapa **98**
4.1 Análisis de los datos obtenidos del cuestionario inicial 98
4.1.1 Clasificación tipo acierto, error y no responde 98
4.1.2 Clasificación según el tipo de error 121
4.1.3 Estrategias de resolución de problemas 130
4.2 Entrevista a la docente 134
4.2.1 Conclusiones sobre la entrevista realizada con la profesora 138
4.3 Conclusiones de la primera etapa del estudio 139
Capítulo V **142**
Resultados de la segunda etapa: secuencia de actividades **142**
5.1 Objetivo y características 142
5.2 Aplicación de la secuencia 143
5.3 Descripción de las interacciones en la instrucción guiada 145
5.4 Primera parte: Parte-parte, parte-todo 149
5.4.1 Hojas de trabajo 153
5.5 Segunda parte: Cantidades discretas 156
5.5.1 Hoja de trabajo 158
5.6 Tercera parte: Recta numérica y no numérica 160
5.6.1 Hoja de trabajo 162
5.7 Consideraciones finales de la secuencia didáctica 164
5.8 Conclusiones de la segunda etapa del estudio 165
Capítulo VI **168**
Resultados de la tercera etapa **168**
6.1 Cuestionario final de fracciones 168
6.2 Primer nivel de análisis: acierto , error y no responde 168
6.3 Segundo nivel de análisis: tipos de errores 172
6.4 Tercer nivel de análisis: estrategias de resolución de problemas 182

7.5 Conclusiones de la tercera etapa del estudio 195
Capítulo VII **200**
Conclusiones **200**
7.1 Consideraciones finales 204
Referencias bibliográficas 206
ANEXO 1 **212**
Cuestionario inicial de fracciones **212**
ANEXO 2 **226**
Cuestionario inicial de fracciones **226**
fase II **226**
ANEXO 3 **240**
Entrevista semiestructurada a la docente **240**
ANEXO 4 **243**
Hojas de datos de la secuencia de actividades **243**
ANEXO 5 **256**
Cuestionario final de fracciones **256**

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Esquema de los ocho niveles de comprensión de Susan Pirie y Thomas Kieren (1989) 52
Figura 2. Característica igual a un fractal donde el todo está en las partes y las partes están en el todo 55
Figura 3. Característica del retornar atrás del modelo de Pirie y Kieren 56
Figura 4. Esquema de fronteras innecesarias 58
Figura 5. Esquema de los diferentes subconstructos y su relaciones 64
Figura 6. Esquema de los diferentes subconstructos 65
Figura 7. Ejemplo de error por descuido 92
Figura 8. Ejemplo de error por desconocimiento de la respuesta 93
Figura 9. Ejemplo de errores por defectos en la comprensión del concepto 93
Figura 10. Ejemplo de aplicación sistemática de procesos erróneos 94
Figura 11. Porcentaje de cada pregunta del cuestionario inicial fase I 99
Figura 12. Pregunta 1, mitad en un todo continuo 101
Figura 13. Pregunta 2, idea de entero en un todo continuo. 101
Figura 14. Pregunta 4, idea de representación de la fracción propia e impropia en la recta numérica. 102
Figura 15. Pregunta 1, mitad en un todo continuo, con figuras canónicas y no canónicas 102
Figura 16. Gráfica: idea de mitad en un todo continuo en figura canónica de la pregunta 1 103
Figura 17. Gráfica de mitad en un todo continuo en figura no canónica de la pregunta 1 103
Figura 18. Figura no canónica de la pregunta 1 del cuestionario inicial fase I 104
Figura 19. Pregunta 2 con figuras canónicas y no canónicas 106
Figura 20. Gráfica de entero en un todo continuo en las figuras canónicas de la pregunta 2 107
Figura 21. Gráfica de entero en un todo continuo en la figura no canónica de la pregunta 2 107
Figura 22. Figura de la pregunta 2 del cuestionario inicial fase I 109
Figura 23. Pregunta 5 idea de representación de fracciones mixtas en la recta numérica. 111
Figura 24. Pregunta 14 idea de representación gráfica de fracción continua discretizada 111
Figura 25. Pregunta 15 idea de representación gráfica de fracción continua discretizada 112
Figura 26. Pregunta 8, idea de representación de la fracción en la recta no numérica a partir de representaciones gráficas. 113
Figura 27. Pregunta 9, idea de representación de la fracción escrita y en la recta a partir de representaciones gráficas. 113
Figura 28. Pregunta 12, idea de proporcionalidad 114
Figura 29. Porcentaje de cada pregunta del cuestionario inicial fase II 114
Figura 30. Pregunta 7, idea matemática: División cuotitiva 116
Figura 31. Pregunta 9, idea matemática Cociente 116
Figura 32. Pregunta 10, idea matemática razón 117
Figura 33. Pregunta 5 idea matemática: Proporcionalidad aritmética. 118
Figura 34. Pregunta 6 idea matemática Proporcionalidad aritmética. 118

Figura 35. Pregunta 14 idea matemática:Idea de Escala: 1:2 y 1:3 119
Figura 36. Pregunta 3, idea matemática: Suma de fracciones impropias. 120
Figura 37. Pregunta 4, idea matemática: Suma y resta de fracciones impropias. 120
Figura 38. Pregunta 12, idea matemática: Decimal 121
Figura 39. Porcentaje de tipos de error en el cuestionario inicial fase I 122
Figura 40. Porcentaje de tipos de error por pregunta en el cuestionario inicial fase II 129
Figura 41. Primera parte de la secuencia de actividades: parte-parte, parte-todo , 151
Figura 42 . Primera parte de la secuencia de actividades: parte-parte, parte-todo. 151
Figura 43. Primera parte de la secuencia de actividades: parte-parte, parte-todo 154
Figura 44. Hojas de trabajo de la primera parte de la secuencia “parte-todo, parte-parte”. 155
Figura 45. Porcentaje de aciertos y errores de las hojas de trabajo 156
Figura 46. Segunda parte de la secuencia de actividades: cantidades discretas 159
Figura 47. Hojas de trabajo de la segunda parte de la secuencia “cantidades discretas” 159
Figura 48. Porcentaje de aciertos y errores de la hoja de datos 160
Figura 49. Tercera parte de la secuencia de actividades: recta numérica 161
Figura 50. Hojas de trabajo de la tercera parte de la secuencia de actividades: recta numérica 163
Figura 51. Porcentaje de aciertos y errores de la hoja de trabajo 164
Figura 52. Gráfica: resultados primer análisis 169
Figura 53. Gráfica de resultados de los 6 niños entrevistados sobre el cuestionario final 170
Figura 54. Gráfica de contraste entre el cuestionario inicial y final de fracciones 171
Figura 55. Gráfica de los resultados del tipo de error de los 6 alumnos entrevistados 172
Figura 56. Tipos de error de los 6 alumnos entrevistados en el cuestionario final 174
Figura 57. Cuestionario final, alumna 4Ch, pregunta 1 174
Figura 58. Cuestionario final, alumna 6J, pregunta 2 175
Figura 59. Cuestionario final, Alumna 5 N, pregunta 3 176
Figura 60. Cuestionario final, alumno 3L, pregunta 4. 177
Figura 61. Cuestionario final, alumna 1X, pregunta 5 177
Figura 62. Cuestionario final, alumno 3L, pregunta 6. 178
Figura 63. Cuestionario final, alumna 1X, pregunta 7 178
Figura 64. Cuestionario final, alumno 3L, pregunta 8. 179
Figura 65. Cuestionario final, alumno 5N, pregunta 9. 180
Figura 66. Gráfica de contraste sobre los tipos de error presentados entre el cuestionario inicial y final de fracciones en los 6 niños entrevistados 181

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Cuestionario inicial fase I por ideas matemáticas 80
Tabla 2. Cuestionario inicial fase II por ideas matemáticas 81
Tabla 3. Entrevista a la docente por categorías de análisis 85
Tabla 4. Cuestionario final por ideas matemáticas 90
Tabla 5. Porcentaje de resultados de las preguntas con mayores errores por defectos en la comprensión 123
Tabla 6. Porcentaje de resultados de las preguntas con menos errores por defectos en la comprensión 125
Tabla 7. Porcentaje de resultados de la pregunta por aplicación sistemática de procesos erróneos 128
Tabla 8. Estrategias de resolución del cuestionario inicial fase I 130
Tabla 9. Entrevista semi estructurada por categorías 135
Tabla 10. Organización de las sesiones de la secuencia de actividades 144
Tabla 11. Estrategias de resolución de los 6 alumnos entrevistados del cuestionario final de fracciones 183
Tabla 12. Comparación de estrategias de la primera idea matemática. 185
Tabla 13. Comparación de estrategias de la segunda idea matemática. 187
Tabla 14. Comparación de estrategias de la idea de representación gráfica de fracciones propias e impropias. 189
Tabla 15. Comparación de estrategias de la idea de fracciones en la recta numérica y no numérica. 190
Tabla 16. Comparación de estrategias de la idea de cantidades discretas 194

Agradecimientos

A mi amada patria México.

Agradezco a la Secretaría de Educación Pública por haberme otorgado la Beca Comisión, sin la cual no hubiera sido posible el estudio y conclusión de la Maestría en Desarrollo Educativo en la Línea Educación Matemática.

A la Universidad Pedagógica Nacional, unidad Ajusco, por haberme brindado la oportunidad de estudiar en sus instalaciones.
A sus maestros que con su trabajo enriquecen la comprensión de la educación en México.

A mi asesora de tesis, la doctora Cristianne Butto Zarzar, quien en todo momento estuvo dispuesta a orientarme en mi trabajo con actitud afable.

A mi familia y muy especialmente a mi hermana Bertha que está conmigo a donde quiera que vaya.

Introducción

El interés por el tema de esta investigación surge de mi labor como profesor de educación primaria, específicamente en lo que refiere a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. El tema de los números fraccionarios, es uno de los contenidos en el que los estudiantes presentan dificultades. Estas dificultades tienen diversos orígenes; epistemológicos, psicológicos y didácticos, pues comprende, múltiples significados y formas de representación, además de ser un contenido fundamental para la adquisición de conceptos matemáticos más avanzados.

El estudio de los números fraccionarios forma parte de la instrucción escolar, las diferentes ideas que involucran estos números representan un reto para la enseñanza y el aprendizaje escolar, por lo que es común que los estudiantes tengan dificultades en la adquisición de dicho contenido matemático. Estas dificultades, son en parte derivadas del modelo parte-todo, del uso restringido del simbolismo a/b, simbolismo que se hace como parte del proceso de transposición didáctica del campo matemático para el trabajo didáctico-pedagógico, donde la fracción es vista como una partición, como la conjugación de dos acciones: dividir/tomar (dividir/comer, dividir/pintar) (Butto, 2013), esta idea reduce el concepto de fracción. Según esta autora, la fracción aparece como cosas que no son números e impide la comprensión de dicho contenido, además señala que la transición de los números enteros a los números fraccionarios es un proceso gradual que requiere comprensión de diversos sub-constructos (relación parte-todo y parte-parte, cociente, razón, operador y medida) relacionados con los números racionales; por lo que el modelo conceptual parte todo que predomina en la enseñanza genera diversas dificultades, por ejemplo, en la representación de fracciones propias e impropias, especialmente en la representación de fracciones impropias; problemas para reconocer la parte del todo en el fraccionamiento en cantidad discreta; obstáculos en la comprensión de problemas (Butto, 2013) y algoritmos relacionados con fracciones debido a la valoración del cero de los símbolos y la lógica subyacente; y

promueve una tendencia a una aproximación mecanicista de las fracciones, alejándose de la realidad y utilizando normas rígidas (Bezerra, 2002 y Streefland, 1993, en Butto, 2013). Además se debe considerar que se trata de otra familia numérica distinta de los naturales.

En este sentido, los usos que tienen los números fraccionarios en los diferentes contextos y situaciones en las que se presentan: relación parte-todo y parte-parte, cociente, razón, operador y medida no son debidamente articulados y relacionados para lograr un concepto de fracción. Se recurre por tanto a las soluciones rutinarias, proporcionar algoritmos y definiciones, resolver ejercicios. Aspectos que no favorecen el aprendizaje integral del concepto de fracción.

Por su parte, Llinares (1997) señala que las dificultades que plantea la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones, son producto de la manera en que se presentan en el ámbito escolar, donde se enseña demasiado pronto su carácter algebraico como un par ordenado de números naturales a/b, donde a es el número de partes que se toma del entero y b el número de partes en que se divide el entero, esta definición inicial y el uso del algoritmo en las operaciones de adición y multiplicación que se proporcionan a los alumnos se debe a la facilidad para resolver ejercicios, pero produce un aprendizaje mecanicista sin comprensión por lo que considera necesario desarrollar primero un esquema conceptual a partir de situaciones concretas y prácticas que generen el fundamento para el aprendizaje de las situaciones de cálculo más abstractas sin contexto, para que las operaciones algebraicas no se conviertan en algo sin sentido para los alumnos.

Además agrega que la idea de fracción indicada como un par ordenado de números naturales escritos de la forma a/b es utilizada en la enseñanza escolar como única manera de explicar los diferentes usos del concepto de fracción, idea que se lleva a cabo a través de la representación gráfica en círculos y cuadrados, esperando que los alumnos sean capaces de trasladar esta comprensión y destreza a interpretaciones y contextos diferentes (Llinares, 1997). Sin embargo, la capacidad de trasladar esa comprensión a situaciones distintas, no se da en automático por ejemplo en la representación de fracciones en la recta numérica o

en cantidades discretas, el alumno puede entender el significado de una fracción en una representación gráfica y realizar operaciones de suma o resta con fracciones de forma mecánica pero esto no garantiza que sea capaz de utilizarla idea de fracción en otros contextos (Llinares, 1997).

Para que los alumnos logren comprender el concepto de fracción y manejar las operaciones de adición y multiplicación con números fraccionarios se necesita que la enseñanza escolar presente situaciones con las distintas interpretaciones del concepto de fracción, porque el aprendizaje del concepto de fracción no se logra de inmediato, lleva tiempo, es necesario que los alumnos adquieran los esquemas mentales que se relacionan con las que las diferentes ideas con que el concepto está asociado. (Llinares, 1997).

A su vez, Streefland (1993) establece la necesidad de saber cómo adquieren los y las niñas una comprensión del significado de las fracciones, es uno de los principales asuntos de la educación matemática tanto histórica como actualmente sigue siendo motivo de interés en la enseñanza y el aprendizaje de este contenido. En este sentido, diversos estudios se han centrado a lo largo de las últimas décadas en cómo comprenden los alumnos el significado de las fracciones generando diversas propuestas (Meel 2003). Streefland, a su vez, propone que en un primer momento se le puede llamar porciones a las fracciones ya que es más familiar para los alumnos, agrega que no se debe abandonar demasiado pronto el vínculo que niños y niñas tienen en su ambiente cotidiano con las fracciones en nombre de una representación simbólica porque eso constituye un error y un factor de distracción.

Por su parte, Fazio y Siegler (2010) mencionan que una de las dificultades que el estudiantado enfrenta en el aprendizaje de los números fraccionarios es de origen didáctico debido a que los estudiantes se les enseña a calcular y operar sin que comprendan los procedimientos, estos se adquieren de forma mecánica a través del algoritmo, debido a que los docentes se centran en la obtención de resultados sin considerar si alumnos comprenden los conceptos matemáticos.

Diversos autores, señalan que las propiedades de los números naturales y los números fraccionarios son distintas, por ejemplo, cuando se multiplica el resultado no siempre es mayor que los multiplicandos; cuando se divide no siempre la respuesta obtenida es menor al dividendo; y los números fraccionarios no tienen un solo sucesor, esto genera una comprensión parcial de las fracciones, que confunde a los alumnos en cuanto al significado de las fracciones mayores a 1 y al significado de las fracciones negativas.

El error común que se presenta al operar con las fracciones en el caso de la adición es sumar o restar los numeradores y luego sumar o restar denominadores como si fueran números naturales, error que se produce por no entender que las fracciones son números con magnitudes.(Fazio y Siegler, 2010).

Dejar el denominador sin cambios en problemas de multiplicación de fracciones. Al multiplicar fracciones con denominadores iguales, los estudiantes a menudo dejan el denominador sin cambios, por ejemplo: 4/5 x 1/5 = 4/5 (Fazio y Siegler, 2010).

Estas dificultades resaltan la complejidad del aprendizaje de fracciones y la importancia de abordarlas de manera integral, considerando tanto los aspectos cognitivos, epistemológicos y didácticos.

De acuerdo a Fandiño (2015), las dificultades que enfrentan los estudiantes al aprender el concepto de fracción pueden estar relacionadas con la abstracción del concepto, la variedad de interpretaciones posibles, la rigidez de los modelos mentales y el enfoque de enseñanza utilizado en el aula.

Conocer las dificultades del aprendizaje de los alumnos acerca de los números fraccionarios puede proporcionar información para crear una propuesta didáctica que contribuya a resolver este problema, como lo señala Kieren (1991), la investigación de las dificultades que los estudiantes de todo el mundo presentan en el aprendizaje de las fracciones constituye todo un campo de conocimiento para la toma de decisiones de los profesores. Estas dificultades son producto del proceso de comprensión que los alumnos deben lograr de los números

naturales a los fraccionarios y de las estructuras cognitivas que los alumnos deben ir generando para aprender y de la instrucción guiada que el maestro proporciona.

A continuación, se hace una breve revisión de la literatura destacando los estudios que han aportado a la investigación de los números racionales. Tanto en las dificultades y errores comunes que presentan los estudiantes como en los procesos de comprensión involucrados en la adquisición del concepto así como en los aspectos didácticos propuestos para mejorar su enseñanza.

La revisión de la literatura se basó en autores clásicos de los números fraccionarios; por ejemplo: Freudenthal (1983), Vergnaud (1990), Streefland (1978, 1991), Behr, Lesh y Post (1982), Fernandez y Llinares (2010), sobre todo en lo que se refiere a su contribución o relación al modelo de entendimiento matemático recursivo propuesto por Kieren y Pirie (1994), base conceptual de este trabajo. También se revisaron otros autores que han investigado sobre el concepto de fracción Butto (2013), Fandiño (2015), Figueras (2013), Cortina (2014), Pazos (2009), Fazio y Siegler (2011).

Para Freudenthal (1983) en "Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas" considera las matemáticas como una actividad humana, no como un acervo que se transmite a los alumnos. Señala que los objetos matemáticos (números fraccionarios) no existen de forma independiente a la actividad matemática que los crea, por lo que destaca la importancia de la constitución de objetos mentales en la enseñanza de las matemáticas, los objetos mentales son las representaciones que los alumnos tienen de los conceptos matemáticos. Estos objetos son vistos como medios de organización que crecen y se amplían al incorporarse a ellos mismos, solicitando nuevos medios de organización que den cuenta de sus propiedades y las acciones realizadas sobre ellos. Por lo tanto, la constitución de los objetos mentales es fundamental para comprender y trabajar con los conceptos matemáticos de manera significativa y profunda. Se retoma también en los antecedentes de la investigación, el análisis didáctico y el análisis fenomenológico que forma parte del anterior.

El análisis didáctico es el análisis de los contenidos matemáticos números fraccionarios para la organización de su enseñanza en el ámbito escolar éste contribuye al trabajo de los profesores en las áreas de organización de un tema,considera los errores y dificultades en el aprendizaje.

El análisis didáctico está integrado por el análisis de los contenidos matemáticos, propiedades de los números fraccionarios, el análisis cognitivo, las estructuras mentales u objetos mentales implicados de los alumnos; análisis de instrucción, conocimiento didáctico del profesor y análisis de actuación, la puesta en marcha de la enseñanza. Tiene como objetivo proponer y diseñar actividades sobre las nociones matemáticas, que guían a los estudiantes en el desarrollo de sus procesos cognitivos, lograr la comprensión del contenido y obtener un significado del concepto y los procesos matemáticos.

El análisis fenomenológico del concepto u objeto matemático es la descripción del concepto en relación con los fenómenos que organiza y la manera en que actúa sobre ellos.

Vergnaud (1990) en la teoría de los campos conceptuales, define un campo conceptual como un conjunto coherente de situaciones, conceptos y relaciones que comparten un núcleo común de significado y que están interconectados de manera significativa. Estos campos conceptuales representan áreas específicas de conocimiento en las cuales los conceptos y las relaciones entre ellos están organizados de manera estructurada y coherente, plantea cómo los conceptos matemáticos (números fraccionarios) adquieren sentido para los alumnos no en las definiciones sino en las situaciones y problemas que se pretenden resolver, resalta por tanto el carácter pragmático de las matemáticas señalando que el conocimiento racional es operatorio o no es conocimiento lo que implica el concepto en acto y conocimiento en acto o invariantes operatorios, resalta también el papel de los esquemas mentales en el aprendizaje de las matemáticas. Un esquema mental es la forma en que los sujetos organizan su ideas o conocimientos para actuar en una situación determinada , se compone de reglas de acción y de anticipaciones con el fin de lograr un objetivo, los sujetos deben operar con ellos conceptos en situaciones variadas en problemas prácticos y teóricos (Vergnaud, 1990).

Esta idea del campo conceptual es retomada por Kieren (1993) para definir a los números racionales y fraccionarios como un campo cociente. Se retoma también el concepto de estructura multiplicativa que son un campo conceptual que se centra en situaciones que requieren operaciones de multiplicación, división y combinaciones de estas operaciones, las estructuras multiplicativas y las fracciones están relacionadas en el sentido de que las fracciones son una representación numérica de las operaciones multiplicativas. En el contexto de las estructuras multiplicativas, las fracciones se utilizan para expresar cantidades que son partes de un todo o que representan una proporción de una cantidad mayor.

Las fracciones se consideran una operación multiplicativa implícita, ya que una fracción representa una división de un número en partes iguales. Por ejemplo, la fracción 1/2 representa la mitad de una cantidad, lo cual implica una operación de división implícita, se utilizan comúnmente en situaciones de proporcionalidad y escalamiento, que son conceptos fundamentales en las estructuras multiplicativas. Al resolver problemas de proporción, se pueden utilizar fracciones para expresar las relaciones entre las cantidades involucradas,uno 1/2 , uno es a dos, uno de dos. Streefland (1978), analiza cómo los estudiantes construyen mentalmente su comprensión de las fracciones y cómo aplican este conocimiento a diferentes contextos matemáticos mediante observaciones detalladas en el entorno de aula.

El autor enumera una serie de componentes importantes en la estructura mental del concepto de fracción, incluida la comprensión de la relación entre las partes y el todo, la representación visual de fracciones y la habilidad de comparar y usar fracciones. Proporciona una visión detallada de los errores comunes, los obstáculos conceptuales y los patrones de desarrollo presentes en el aprendizaje de este concepto matemático a través del análisis cualitativo de las respuestas de los estudiantes a una variedad de tareas y problemas relacionados con las fracciones.

El estudio de Streefland (1978) no sólo proporciona ideas útiles sobre cómo los estudiantes construyen su comprensión del concepto de fracción, sino que también proporciona

recomendaciones para métodos pedagógicos efectivos que pueden ayudar a los estudiantes a aprender este concepto en el aula.

En 1991 Streefland presenta un enfoque educativo centrado en las fracciones. Defiende una enseñanza de matemáticas que se centre en situaciones y problemas del mundo real y no solo en conceptos abstractos. Según Streefland (1991), las fracciones son cruciales en la vida cotidiana y en varios campos, por lo que los estudiantes deben comprenderlas y enseñarlas de manera contextualizada y significativa. Por lo que el uso de modelos visuales, esquemas y diagramas es necesario para transitar de lo concreto a lo abstracto.

El estudio de Behr, Post y Wachsmuth (1982), examinó cómo los niños aprendían el concepto de equivalencia y orden en los números racionales. Los investigadores evaluaron cómo los niños desarrollaban su comprensión de estas matemáticas mediante una variedad de tareas y pruebas. Se descubrió que los niños pasaron de una comprensión básica a una comprensión más avanzada de la equivalencia y el orden de los números racionales. Se comprobó que el contexto y la manipulación de objetos concretos facilitaban el aprendizaje de estos conceptos. Este estudio proporciona datos significativos sobre el desarrollo cognitivo de los niños en relación con los números racionales y propone métodos pedagógicos útiles para enseñar estos conceptos en el aula.

Fernández y Llinares (2010) realizan una investigación sobre cómo los estudiantes de educación primaria desarrollan su comprensión de la razón, examinando las conexiones entre el pensamiento aditivo y multiplicativo en este proceso. El objetivo principal del estudio de Fernández y Llinares (2010), es investigar cómo los estudiantes de educación primaria construyen la idea de razón y cómo esta construcción está relacionada con su pensamiento aditivo y multiplicativo. El objetivo de la investigación es encontrar patrones y conexiones en el desarrollo conceptual de los estudiantes en relación con la razón. Un marco teórico que integra elementos del pensamiento aditivo y multiplicativo, así como teorías sobre el desarrollo conceptual en matemáticas, sirve como base para el estudio. Se examina cómo

los estudiantes comprenden y aplican conceptos relacionados con la razón utilizando sus habilidades aditivas y multiplicativas.

El estudio de estos autores (Fernández y Llinares, 2010) se llevó a cabo a través de la observación en el aula, entrevistas con estudiantes, análisis de tareas y evaluaciones de desempeño en matemáticas. Los autores examinan los datos recopilados para encontrar patrones y relaciones entre el pensamiento aditivo y multiplicativo en la construcción de la idea de razón e identificar las estrategias cognitivas que utilizan los estudiantes y las dificultades que se encuentran con frecuencia durante este proceso. Basándose en los hallazgos del estudio, se llegan a conclusiones sobre cómo los estudiantes de educación primaria desarrollan su comprensión de la razón y cómo su pensamiento aditivo y multiplicativo afecta esta comprensión. Se ofrecen sugerencias para la enseñanza de la razón que tomen en cuenta estas relaciones y ayuden a los estudiantes a desarrollar una comprensión sólida y conectada de este concepto matemático.

Butto (2013), presenta una propuesta de enseñanza en dos ambientes para ayudar a los estudiantes a comprender mejor los conceptos matemáticos básicos. El estudio encontró varias dificultades que los estudiantes presentan cuando se enfrentan al aprendizaje de los números fraccionarios. Estas dificultades destacan la complejidad del aprendizaje de fracciones y la importancia de abordarlo de manera integral, considerando tanto los aspectos matemáticos como cognitivos.

Pazos (2009), encontró que muchos estudiantes pueden hallar las fracciones difíciles de comprender. La autora aborda este problema desde una perspectiva pedagógica y proporciona métodos para abordar y superar los problemas de comprensión y manipulación de fracciones en el proceso de enseñanza y aprendizaje de matemáticas.

Pazos (2009), aborda algunos puntos clave como:

1. Identificación de problemas comunes que enfrentan los estudiantes cuando aprenden sobre fracciones. Estos problemas incluyen confundir numerador y denominador, comprender la equivalencia de fracciones y realizar operaciones con fracciones.
2. Estrategias de enseñanza efectivas: propone una variedad de enfoques pedagógicos para abordar los problemas de fracciones. Para mejorar la comprensión de los conceptos fraccionarios, los estudiantes pueden participar en actividades prácticas, representaciones visuales y manipulaciones.
3. Contextualización y relevancia: enfatiza en la importancia de contextualizar el aprendizaje de las fracciones y demostrar su relevancia en situaciones de la vida real. Esto puede ayudar a los estudiantes a comprender la importancia y el uso de las fracciones fuera del salón de clases de matemáticas.
4. Apoyo y recursos adicionales: proporciona recursos como ejercicios prácticos, problemas de aplicación y métodos diferentes para satisfacer las necesidades específicas de los estudiantes con respecto al aprendizaje de fracciones.

Fandiño (2015), menciona que la noción de fracción tiene múltiples significados que tienen un impacto significativo en la enseñanza cuando se busca una definición única

> Se tiene una unidad-todo y se divide en partes iguales; cada una de estas partes es una "unidad fraccionaria"; por ejemplo, si la unidad-todo se divide en 4 unidades fraccionarias, cada una de ellas se llama "un cuarto" y se escribe 1⁄4. Esta definición inicial es fácilmente comprensible por lo que entra de inmediato en el cognitivo más profundo, pero después no se puede modificar y adecuar a las distintas necesidades que se presentan en las diversas interpretaciones del concepto de fracción y dificultan su enseñanza (Fandiño, 2015, párrafo 4).

En la idea de parte todo destaca que hay una gran diferencia si el todo es continuo o discreto, lo que suscita confusiones. Por ejemplo, si el todo es continuo, cómo tomar cinco partes de una pizza que fue dividida en cuatro, 5/4, obstáculo que se deriva de concebir el todo cómo un entero, y si es discreto, cómo obtener 3/5 de un grupo de doce niños, por lo que , las

fracciones impropias o iguales a la unidad no adquieren sentido y necesitan una justificación específica por lo que las afirmaciones teóricas del concepto pierden sentido en el proceso de construcción conceptual, por ejemplo; el término de dividir en partes iguales se refiere a la forma o a la porción.

Al ver una fracción como un cociente**,** los estudiantes tienen dificultades para interpretar la división indicada, especialmente cuando se trata de dividir objetos en partes desiguales, la autora señala que si la división a/b es continua genera pocos problemas pero que si es discreta puede generar confusión (Fandiño, 2015).

En la idea de operador que es la más utilizada en la escuela, el modelo parte todo pierde sentido cuando se pide a los alumnos «Encontrar 4/5 de 20 peras» significa operar como sigue: (20÷5)×4 peras

> La fracción como operador, entonces, actúa sobre los números puros más que sobre los conjuntos o sobre los objetos; es, de hecho, una nueva operación que combina división y multiplicación" (Fandiño.2015) Al utilizar la fracción como operador en situaciones donde la división no es intuitiva, como dividir un conjunto en partes que no son divisibles exactamente, los estudiantes pueden enfrentar dificultades para visualizar y comprender el proceso por empleo ⅘ de 22 peras (Fandiño, 2015, párrafo 3).

Al utilizar fracciones como medida**,** los estudiantes enfrentan dificultades para interpretar la fracción como una cantidad específica en relación con una unidad de medida, especialmente si no están familiarizados con la representación de fracciones en contextos de medición por ejemplo:

> Sobre las botellas de vino con frecuencia se lee 0,75 l, que indica una cantidad, una medida, en la unidad decimal litro. Cualquier persona está en capacidad de entender que se trata de 3/4 de un litro. Sin embargo... ¿Se trata de una fracción en el sentido primitivo (una unidad–todo dividida en 4 partes iguales de las cuales se tomaron 3) o

> simplemente de un número para expresar una cantidad? Una cosa es tener una botella graduada de 1 litro y decidir llenar los 3/4 , y otra bien distinta es tener una botella de vino que ya tiene como medida 0,75 (Fandiño, 2015, párrafo 1).

En resumen las aportaciones de estos estudios muestran que las dificultades que enfrentan los estudiantes al aprender el concepto de fracción están relacionadas con la abstracción del concepto, la variedad de interpretaciones posibles, la rigidez de los modelos mentales y el enfoque de enseñanza utilizado en el aula.

El concepto de fracción como: una relación parte-todo puede resultar abstracto y desafiante, especialmente cuando se trata de dividir una unidad en partes iguales ya que implica una comprensión precisa de la igualdad en la división de la unidad. La necesidad de adaptar la comprensión de la fracción como parte de un todo a diferentes contextos y situaciones puede requerir una flexibilidad cognitiva que algunos estudiantes pueden encontrar difícil de desarrollar.

La variedad de interpretaciones y significados que puede tener el término "fracción" puede generar confusión en los estudiantes, ya que una definición inicial puede no ser suficiente para abarcar todos los significados que el término asumirá a lo largo de los estudios. La elección de una definición inicial de fracción que luego no se puede modificar puede llevar a la formación de modelos mentales rígidos en los estudiantes, lo que dificulta la adaptación a diferentes necesidades y contextos en los que se utiliza el concepto.

Planteamiento del problema

La enseñanza de las fracciones ha sido uno de los temas más estudiados en las últimas décadas, desde diferentes perspectivas y enfoques, y destacan estudios realizados en torno

conceptual, cognitivo y didáctico. Se han identificado varios factores que influyen en su enseñanza, el dominio de los contenidos matemáticos por parte de los profesores es un elemento central del problema ya que la literatura demuestra que no distinguen las diferentes ideas involucradas con el concepto de fracción y que su capacitación dentro del tema es necesario para mejorar la enseñanza, otro aspecto relevante son las dificultades que los alumnos presentan en el aprendizaje de las fracciones, dificultades que se han estudiado en varios países y que al parecer son las mismas, confunden el denominador con el numerador, no pueden representar las fracciones impropias, no tienen noción de unidad o de un todo en cantidades continuas y discretas, no ubican proporcionalmente fracciones en recta numérica, éstas dificultades constituyen todo un campo de conocimiento para la toma de decisiones por parte de los profesores y el diseño del curriculum. La literatura señala que las dificultades se deben en gran medida al modelo de enseñanza parte- todo.

En este sentido, el interés de esta investigación fue conocer el proceso de comprensión de los estudiantes de sexto grado de primaria, en lo que se refiere al concepto de fracción: idea de mitad, entero, representación gráfica de fracciones propias e impropias, representación de las fracciones en la recta numérica y no numérica, representación de cantidades discretas, idea proporcionalidad, suma y resta de fracciones, cociente, razón, porcentaje, decimal y escala: 1:2 y 1:3. El estudio se centró en estudiar las dificultades y habilidades que presentan los estudiantes con dicho contenido escolar. Posteriormente, se diseñó una secuencia de actividades con el objetivo de incidir en el aprendizaje de las fracciones y verificar si hubo un cambio conceptual en los estudiantes.

Preguntas de investigación

Las preguntas de investigación son:

1. ¿Cuáles son las dificultades y habilidades que los estudiantes presentan en el aprendizaje de los números fraccionarios?
2. ¿De qué forma el diseño y la aplicación de una propuesta didáctica ayuda a la comprensión de los números fraccionarios?
3. ¿Cómo, a partir de la propuesta diseñada, evoluciona el pensamiento matemático de los niños sobre los números fraccionarios?

Objetivos

Los objetivos del estudio son:

1. Identificar las dificultades y habilidades de los estudiantes con el aprendizaje de los números fraccionarios.
2. Diseñar y aplicar una propuesta didáctica para mejorar el aprendizaje de los números fraccionarios.
3. Investigar, a partir de la propuesta diseñada, cómo evoluciona el pensamiento matemático de los niños sobre los números fraccionarios.

El marco teórico

El marco teórico de esta investigación se sustentó en el modelo recursivo de Kieren y Pirie (1991), quienes después de revisar la evolución del concepto de comprensión o entendimiento matemático proponen un modelo recursivo. El modelo recursivo de entendimiento matemático se refiere a un enfoque dinámico y no lineal del crecimiento del conocimiento matemático. Este modelo sugiere que el conocimiento matemático se desarrolla a través de interacciones mutuas, tanto con otros como, con uno mismo, y que implica niveles de acción, pensamiento y lenguaje que se retroalimentan y se construyen de manera recursiva. El modelo recursivo de entendimiento matemático destaca la importancia de la retroalimentación y la reflexión en el proceso de aprendizaje matemático, así como la interacción con diferentes niveles de conocimiento y la creación de nuevas estructuras cognitivas a medida que se avanza en la comprensión de los conceptos matemáticos.

Este enfoque reconoce la complejidad y la no linealidad del proceso de aprendizaje matemático, y enfatiza la importancia de la autoevaluación y la observación del conocimiento personal y de otros para el crecimiento y la extensión del entendimiento matemático. Este modelo responde a la descripción constructivista del entendimiento como un proceso (Glasersfeld, 1987). Glasersfeld (1987), a su vez lo retoma del trabajo de los filósofos Maturana y Varela (Kieren, 1993) quienes vieron a las personas como seres autorreferenciales, capaces a partir del lenguaje de hacer distinciones de su propio comportamiento y de sus propias interacciones con el medio ambiente y con otros. Para Thomas Kieren y Susan Pirie (1993) el conocimiento se considera como la habilidad para tomar acción efectiva y el conocimiento crece recursivamente, proponen ocho niveles de desarrollo del entendimiento recursivo usando distinciones hechas en conocimientos previos: actividad primitiva, creación de imágenes, retención de imágenes, detección de propiedades, formalización, observación, estructuración e invención. Entonces para ellos el entendimiento es un proceso que involucra retroalimentación de uno mismo para el crecimiento extensivo y recreación.

Bajo este modelo, el entendimiento de números racionales se caracteriza como un todo dinámico del conocimiento de números racionales a partir de diferentes niveles de comprensión. Este conocimiento se organiza a su vez en otros niveles que son trascendentes pero recursivos, y en los cuales la retroalimentación caracteriza el entendimiento intuitivo y el formal (Kieren 1993).

Metodología

El estudio fue mixto, este tipo de estudios se caracteriza por usar tanto datos cuantitativos como cualitativos. El tipo del estudio es secuencial debido a que se recaban datos cuantitativos y a continuación se recogen y analizan datos cualitativos.

Participantes

Los participantes del estudio 24 alumnos de sexto grado de primaria de los cuales 16 son niñas y 8 son niños de una escuela primaria pública del turno vespertino, ubicada al sur de la Ciudad de México, en la zona media del Ajusco, en la colonia Pedregal de San Nicolás, Alcaldía de Tlalpan.

Etapas del estudio

Las etapas de la metodología son tres:

1. Primera etapa: diseño y aplicación de los instrumentos de investigación (cuestionario inicial, entrevista clínica piagetiana a los alumnos focalizados y entrevista semiestructurada a la docente titular de sexto grado).
2. Segunda etapa del estudio: diseño y aplicación de la secuencia de actividades.
3. Tercera etapa del estudio: diseño y aplicación de un cuestionario final de fracciones.

La presente tesis se organiza en siete capítulos. En la “Introducción” se describe brevemente cada capítulo. El primer capítulo “Antecedentes del estudio: los números fraccionarios” refiere a la revisión de la literatura sobre el estudio de las fracciones. El segundo capítulo “Marco Teórico”, es sobre el modelo recursivo de Kieren y Pirie (1991) y su relevancia para la tesis. El tercer capítulo “Metodología” describe el corte y tipo de estudio, así como las tres etapas que conforman el estudio. En el cuarto capítulo se presentan los “Resultados de la primera etapa” del estudio, allí se presentan los resultados obtenidos del cuestionario inicial de fracciones, entrevistas clínicas piagetianas y la entrevista semiestructurada a la docente titular del grupo de sexto grado. El quinto capítulo presenta los ““Resultados de la segunda etapa” , ésta versa sobre la descripción y los resultados de la aplicación de la secuencia didáctica propuesta. El sexto capítulo presenta los ““Resultados de la tercera etapa” correspondiente a la aplicación del cuestionario final de fracciones. Finalmente, el séptimo capítulo “Conclusiones” presenta las conclusiones del estudio.

Capítulo I

Antecedentes del estudio: números fraccionarios

En este capítulo inicia con la revisión de la literatura sobre los números fraccionarios. Se inicia con los estudios más relevantes que han contribuido al estudio y comprensión de los números fraccionarios: Freudenthal (1983), Vergnaud (1990), Streefland (1993), Behr, Lesh y Post (1982). Posteriormente, se hace una revisión de autores como Fernández y Llinares (2010) y Llinares (1997) sobre todo en lo que se refiere a su relación con el modelo de entendimiento matemático recursivo propuesto por Kieren y Pirie (1994) y Kieren (1976, 1983 y 1991), base conceptual y metodológica de este trabajo. A continuación, se revisaron estudios recientes de autores que han investigado sobre el concepto de fracción; Butto (2013), Fandiño (2015), Cortina (2014), Pazos (2009), Arenas (2021),Iglesias (2022),Gerez (2023), González (2023), Cruz-Ortiz (2024).

1.1 Estudios relevantes de números fraccionarios

Freudenthal (1983) en Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas, plantea que las matemáticas son una actividad humana, por lo tanto solo adquieren sentido para los alumnos en la práctica, pero no de manera empírica sino a través de la reinvención guiada. Considera que las fracciones son el aspecto fenomenológico (aplicaciones) de los números racionales.

Varias ideas de este autor tienen relación con el modelo recursivo de Kieren como son: la distinción entre objetos matemáticos y objetos mentales, el concepto de fenomenología y análisis fenomenológico, los cuatro tipos de fenomenología, el análisis didáctico, la reinvención guiada.

Para Freudenthal (1983), los objetos matemáticos (números fraccionarios) no tienen una existencia independiente de la actividad matemática que los crea, los conceptos matemáticos no son entidades estáticas y preexistentes, son medios de organización que evolucionan y

se expanden a medida que se incorporan a sí mismos, esto implica que los objetos matemáticos requieren constantemente de nuevos medios de organización para dar cuenta de sus propiedades y las acciones que se realizan sobre ellos (Freudenthal 1983). Este concepto tiene relación con el modelo de entendimiento recursivo de Kieren que considera el aprendizaje no lineal que crece y se expande a medida que avanza la comprensión de los alumnos.

Los objetos mentales se refieren a la concepción que una persona tiene de un concepto matemático, que puede ser parte de la matemática o no. Los objetos mentales son la representación interna que una persona construye sobre un concepto matemático, y se consideran como medios de organización de fenómenos (Freudenthal 1983). Este concepto tiene relación con la creación de imágenes que es uno de los niveles del entendimiento recursivo de Kieren.

La adquisición de conceptos u objetos matemáticos se refiere al proceso mediante el cual los estudiantes incorporan y comprenden los conceptos matemáticos en su repertorio cognitivo. Aunque la adquisición de conceptos es importante, Freudenthal (1983) la considera secundaria en comparación con la constitución de objetos mentales. Es decir, antes de adquirir un concepto matemático, es fundamental que los estudiantes hayan desarrollado una comprensión profunda y significativa del objeto mental correspondiente. El objeto matemático tiene relación con lo que el nivel de Kieren llama retención de imágenes.

Esto significa que los estudiantes deben ser capaces de relacionar los conceptos matemáticos con situaciones reales, entender sus propiedades y aplicaciones, y ser capaces de utilizarlos de manera efectiva en diversos contextos.

La diferencia clave entre objetos mentales y adquisición de conceptos radica en que los objetos mentales representan la concepción interna que los estudiantes tienen de un concepto matemático, mientras que la adquisición de conceptos se refiere al proceso de incorporar y comprender esos conceptos en el pensamiento matemático de los estudiantes. La prioridad en la educación matemática es la constitución de objetos mentales sólidos, lo

que facilita la adquisición y comprensión efectiva de los conceptos matemáticos (Freudenthal, 1983).

Según Freudenthal (1983), el objetivo principal de la escuela debe ser la construcción de objetos mentales en los estudiantes, seguido por la adquisición de conceptos matemáticos. Esto implica un enfoque en el desarrollo de una comprensión profunda y significativa de los objetos.

Además, propone la fenomenología como un método de análisis de los contenidos matemáticos, implica la descripción detallada de los fenómenos matemáticos, centrándose en cómo se relacionan con los conceptos matemáticos y en cómo se adquieren en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

A continuación, se describe cada uno de los análisis propuestos por el autor:

1.2 El análisis fenomenológico del concepto u objeto matemático

El análisis fenomenológico del concepto u objeto matemático es la descripción del objeto matemático, busca comprender cómo se organizan los conceptos matemáticos a partir de los fenómenos que los sustentan, considerando tanto los aspectos teóricos como los aspectos prácticos de la enseñanza de las matemáticas.

El análisis fenomenológico se hace con una intención didáctica, previo a todo diseño o desarrollo curricular y es un componente del análisis didáctico (Freudenthal, 1983).

Distingue cuatro tipos de fenomenologías:

1. Fenomenología pura: Se refiere al conocimiento de las matemáticas y sus aplicaciones, centrándose en la comprensión de los conceptos matemáticos en sí mismos. A las propiedades de los números, a cómo se construyen. Es la descripción de los conceptos matemáticos en relación con los fenómenos que organizan y para lo que fueron creados y la manera en que actúan sobre ellos y que poder nos da sobre esos fenómenos.

2. Fenomenología histórica: Implica analizar los fenómenos matemáticos a lo largo de la historia, considerando cómo han evolucionado y se han desarrollado a lo largo del tiempo. El autor señala que en el sistema escolar, los conceptos(definiciones) se enseñan antes que los fenómenos que organizan (contextos de uso), los alumnos deben construir los objetos mentales para organizar los fenómenos y tener los conceptos que la historia proporciona. En la historia de las matemáticas los conceptos matemáticos no existen fuera de la experiencia ni a los fenómenos que organizan son resultado de quehacer matemático ; los conceptos matemáticos son consolidaciones de objetos mentales que se desarrollaron a través de la historia.. (Freudenthal, 1983).
3. Fenomenología didáctica: Se enfoca en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, investigando cómo se adquieren y se relacionan los conceptos matemáticos en el contexto educativo. Aquí el autor propone empezar por los fenómenos que deben ser organizados por los conceptos y enseñar a los alumnos más que los conceptos esos medios de organización, por ello los docentes deben centrar su mirada en los fenómenos que obligan a los alumnos a crear los objetos mentales que están siendo matematizados por el concepto.
4. Fenomenología genética: Se centra en el crecimiento cognitivo de los alumnos, explorando cómo se desarrollan las capacidades matemáticas a lo largo del tiempo y a través de la experiencia educativa. Como los objetos metales son previos a la conceptualización matemática, donde la matematización es una actividad cognitiva que organiza los fenómenos matemáticos a partir de los conceptos.

Estos tipos de fenomenología ofrecen diferentes perspectivas para comprender y analizar los fenómenos matemáticos, tanto desde un punto de vista teórico como práctico en el ámbito de la educación matemática.

El análisis didáctico: Este es el análisis de los contenidos matemáticos (números fraccionarios), para la organización de su enseñanza en el ámbito escolar, contribuye al

trabajo de los profesores en las tareas de planificación y organización de los temas, toma en cuenta los errores y dificultades detectadas en el aprendizaje, está integrado por el análisis de los contenidos matemáticos, propiedades de los números fraccionarios, el análisis cognitivo, las estructuras mentales u objetos mentales implicadas de los alumnos; análisis de instrucción, conocimiento didáctico del profesor, y el análisis de actuación la puesta en marcha de la enseñanza. Tiene como objetivo proponer y diseñar actividades sobre las nociones matemáticas, que guían a los estudiantes en la adquisición de esquemas mentales que les permita la comprensión del objeto y dar solución al problema de la falta de significado y uso de conceptos y procesos matemáticos (Freudenthal, 1983)

Enfoque operativo: Freudenthal (1983), enfatiza el aspecto operativo de las fracciones, es decir, la importancia de comprender las fracciones como operadores matemáticos que permiten realizar diversas acciones y operaciones. Abogaba por una enseñanza que destaque el carácter operativo de las fracciones y que permitiera a los estudiantes utilizar las fracciones de manera activa y significativa en diferentes contextos matemáticos.

1.3 La teoría de los campos conceptuales de Vergnaud

Vergnaud (1990), define la teoría de los campos conceptuales como una teoría psicológica del concepto o la conceptualización de lo real. Su principal objetivo es proporcionar un marco teórico para investigar las actividades cognitivas complejas, especialmente en relación con el aprendizaje técnico y científico. Con la ayuda de esta teoría, es posible encontrar y analizar las conexiones y desconexiones entre los conocimientos desde la perspectiva de su contenido conceptual. Además, facilita el análisis de la relación entre conceptos como conocimientos explícitos e invariantes operatorias implícitas en las conductas del sujeto en situaciones. La teoría de los campos conceptuales también analiza cómo se relacionan los significados con los significantes en el desarrollo de competencias complejas.

Este autor, describe un campo conceptual como un conjunto de situaciones, conceptos y relaciones que comparten un núcleo común de significado y que están interconectados de manera significativa. Estos campos conceptuales representan áreas específicas de conocimiento en las cuales los conceptos están relacionados entre ellos, están organizados de manera estructurada y coherente.

De acuerdo a Vergnaud (1990) son las situaciones y problemas que se presentan al niño y que le exigen ser resueltas lo que le permite adquirir el significado de un concepto, el aprendizaje es un proceso de elaboración pragmática, se debe tomar en cuenta la manera en que el conocimiento toma en la acción del sujeto (Vergnaud, 1990), por lo que se debe distinguir, señala el autor, entre las situaciones donde el sujeto cuenta con un conjunto de habilidades para responder a una situación y situaciones donde no cuenta con un repertorio o competencias para dar respuesta a una situación y de la cual depende que logre responder o no. A estos repertorios del sujeto, los denomina esquemas y define un esquema como la forma que un sujeto organiza sus ideas, pensamientos y conocimientos para modelar su conducta ante una situación dada (Vergnaud, 1990), los esquemas no funcionan de la misma manera en las clases de situaciones donde el sujeto cuenta con un repertorio o competencias que le permiten dar respuesta o no a una situación, en las clases de situaciones donde cuenta con un repertorio la respuesta es mecanica, automatica y es un solo esquema el que opera, en las situaciones donde no cuenta con un repertorio operan varios esquemas que entran en conflicto que se contraponen que compiten y da lugar al descubrimiento.

Desde esta teoría las habilidades matemáticas se sostienen por esquemas que organizan la conducta, que se automatizan progresivamente en la mente del niño y al mismo tiempo le permiten ejercer decisiones conscientes y tomar en cuenta las variables de la situación. La certeza del alumno se apoya en el conocimiento que tiene del algoritmo y del problema a resolver.

De hecho los algoritmos son esquemas o los esquemas son algoritmos por lo que la conducta humana tiene una parte de automaticidad y una de decisión consciente. de aquí surgen otros dos conceptos, el “concepto-en-acto” y “teorema-en-acto” conocimientos a los que llama “invariantes operatorios” (Vergnaud, 1990). En una situación el sujeto puede utilizar varios esquemas a un mismo tiempo, cuando esta situación es nueva para el sujeto, por lo que las respuestas dependen de los esquemas disponibles.

Según Vergnaud (1990), en el aprendizaje de las matemáticas están involucrados diferentes esquemas y cada esquema responde a una situación específica, como el de las estructuras multiplicativas. El esquema, es considerado desde esta teoría como la forma en que los sujetos organizan su acción para responder a una situación, un esquema se componen de reglas de acción, de anticipaciones e inferencias con el fin de lograr un cierto objetivo (Vergnaud, 1990).

En este sentido, el concepto está compuesto de tres elementos

> el conjunto de situaciones que dan sentido al concepto (referencia), el conjunto de invariantes sobre los cuales reposa la operacionalidad de los esquemas (el significado) y conjunto de las formas lingüísticas y no lingüísticas que permiten representar simbólicamente el concepto, sus propiedades, las situaciones y los procedimientos de tratamiento (el significante) (Vergnaud, 1990, p. 7).

Por esta razón, el campo conceptual de las estructuras multiplicativas implica una o varias multiplicaciones o divisiones, y los conceptos que permiten analizar estas situaciones, por lo tanto los procesos cognitivos y las respuestas de los alumnos son producto de las situaciones en las cuales están involucrados.

Existe una gran variedad de situaciones en un campo conceptual, estas variables de situación generan los conocimientos de los alumnos, los cuales son modelados por las situaciones con las que son confrontados que van dominando progresivamente.

Por lo que la organización de una situación didáctica para la clase debe considerar los aspectos epistemológicos de los conceptos matemáticos y la significación social de éstos. (Vergnaud, 1990). Las situaciones son las que dan sentido a los conceptos matemáticos, pero el sentido no está en la situación sino en la relación del sujeto con la situaciones y los significantes.

> La teoría de los campos conceptuales reposa sobre un principio de elaboración pragmática de los conocimientos. No se puede teorizar sobre el aprendizaje de las matemáticas ni a partir sólo del simbolismo, ni a partir sólo de las situaciones. Es necesario considerar el sentido de las situaciones y de los símbolos. La clave está en considerar la acción del sujeto en situación, y la organización de su conducta (Vergnaud, 1990, p. 20).

En la teoría de los campos conceptuales, los conceptos explícitos y los invariantes operatorios implícitos en las conductas del sujeto en situación están estrechamente relacionados. Los conceptos explícitos son conocimientos que se pueden expresar y discutir de manera consciente, mientras que los invariantes operatorios son procesos cognitivos automáticos y no siempre conscientes que guían la acción del sujeto en situaciones específicas.

Los conceptos explícitos son la parte visible y discutible de la conceptualización, mientras que los invariantes operatorios son la base oculta y fundamental de la misma. Esta es la relación entre ambos. Los conceptos explícitos no tendrían sentido y no podrían ser utilizados de manera efectiva en situaciones particulares sin los invariantes operatorios. Como resultado, comprender y analizar tanto los conceptos explícitos como los invariantes operatorios es esencial para comprender mejor la cognición y el aprendizaje.

El enfoque en los campos conceptuales permite a los educadores crear estrategias de enseñanza más efectivas y significativas en la práctica educativa. Los maestros pueden adaptar sus métodos de enseñanza para promover un aprendizaje más profundo y duradero

al comprender cómo se relacionan los conceptos explícitos con los invariantes operatorios implícitos en el comportamiento de los estudiantes.

1.4 El modelo recursivo de Thomas Kieren

Por su parte, Kieren (1976, 1983 y 1991), hace una revisión de los números racionales, revisión epistemológica que retoma de Freudenthal, para concebir a los números fraccionarios como la expresión fenomenológica de los números racionales como su aplicación y manipulación práctica de los objetos matemáticos (números racionales) y la manera en que las estructuras cognitivas se favorecen con las distintas representaciones en el proceso de comprensión de los objetos y conceptos matemáticos.

El modelo recursivo surge a partir de distintos análisis: epistemológico en cuanto a las propiedades de los números y cómo se construyen históricamente ; psicológico en cuanto a las estructuras cognitivas involucradas en la construcción de los números, los objetos mentales y su relación con los objetos matemáticos; didáctico en cuanto al papel de la instrucción guiada o reinvención guiada donde la historia de las matemáticas o de los números racionales se vincula con la historia de la enseñanza de las matemáticas en el desarrollo cognitivo individual. A partir de estos tipos de análisis, que el hace, el autor propone el modelo recursivo en colaboración con Susan Pirie de quien retoma la idea de recursividad.

Kieren (1993), retoma la idea de Freudenthal de qué aspectos del mundo organizan los objetos mentales, y la respectiva manipulación de dichos objetos mentales, los cuales son números fraccionarios o racionales, el análisis realizado independientemente por Vergnaud (1983), Freudenthal (1983), y Kieren (1976, 1980). Los tres consideraron tal conocimiento en términos de esquemas mentales que permitían acciones prácticas particulares (Kieren 1993). En un trabajo previo, Kieren tomó la construcción fraccional como una colección de varios elementos del conocimiento, los cuales identificó como subconstructos. Junto con Vergnaud

y Freudenthal, Kieren identificó cuatro de tales sub-construcciones para números fraccionarios y racionales, como cocientes, medidas, operadores y razones por lo que propone tomar en cuenta para la instrucción guiada, las propiedades formales de los números racionales, la teoría de la construcción de los números racionales como fuente de conocimiento aplicativo y para la creación de modelos para aprender y entender matemáticas y promover una comprensión de las acciones y patrones de comportamiento que lo estudiantes realizan a medida que estos aprenden y evolucionan en su pensamiento en torno a la variedad de conceptos que tienen los números racionales.

Desde esta perspectiva el conocimiento no se adquiere de forma pasiva por parte del sujeto sino activamente. La comprensión es entendida como un proceso continuo de elaboración de esquemas a través de abstracción reflexiva, donde los sujetos construyen y reconstruyen sus esquemas en un plano más elevado de pensamiento.

De acuerdo a Pirie y Kieren (1994), la comprensión puede ser entendida como una figura geométrica en forma de anillos concéntricos, que implican diferentes niveles, donde los sujetos transitan de forma dinámica y no lineal sino de forma recursiva no jerárquica donde la identificación del nivel de comprensión es necesaria para la introducción de nuevos contenidos, y determinar si los estudiantes pueden lidiar con cierto nivel de abstracción.

Respecto a esto, el autor hace una revisión de la ideas de varios autores que hacen referencia a estas relaciones entre las estructura matemática de los números racionales, la estructura cognitiva de los alumnos y la creación de situaciones instructivas por los docentes para promover su comprensión. Este trabajo del modelo E, I, TS y AD lleva a Kieren y Pirie (1991) a colaborar en un modelo de entendimiento como un proceso dinámico, no lineal, que se considera parte de una teoría recursiva de entendimiento matemático (Pirie y Kieren, 1991). Esta teoría responde a la descripción constructivista del entendimiento como un proceso (Glasersfeld, 1987). Esta es retomada del trabajo de los filósofos Maturana y Varela (1987), quienes vieron a las personas como seres autoreferenciales, capaces a partir del lenguaje de

hacer distinciones de su propio comportamiento y de sus propias interacciones con el medio ambiente y con otros. El conocimiento para estos autores, se considera como la habilidad para tomar acción efectiva y el conocimiento crece recursivamente, usando distinciones hechas con conocimientos previos; actividad primitiva - creación de imágenes - retención de imágenes - detección de propiedades - formalización - observación - estructuración – invención. Entonces, para ellos el entendimiento es un proceso que involucra retroalimentación de uno mismo para el crecimiento extensivo y recreación (Pirie y Kieren, 1991).

El entendimiento de ese modelo se representa con ocho “niveles” de conocimiento o acción efectiva para la descripción de la evolución de la comprensión de los conceptos matemáticos; donde los estudiantes parten de un punto común y pueden avanzar o retroceder ya que cada nuevo nivel contiene a los anteriores.

1. Llamamos al núcleo de la acción actividad primitiva, en el sentido que corresponde a lo que se asume una persona puede hacer como base o punto de partida del desarrollo de un entendimiento matemático particular. Se puede observar el repartir, o el dividir equitativamente, como la base de actividad primitiva para comprender fracciones (como hiciera Mack, 1990).
2. Creación de imágenes. Esto indica trabajo en varios problemas de “repartir” y en el hacer registro de tales acciones, usando lenguaje fraccional de una manera que esté cercanamente atada a los resultados.
3. Retención de imágenes. Se supone una recursión en las actividades de creación de imágenes y en la percepción de algunos patrones locales en estos (ejemplo: “ puedo usar diferentes divisiones y fracciones para mostrar la misma cantidad; las fracciones nos dicen acerca de dividir cantidades”). Requiere una respuesta lingüística hacia otras personas, la retención de imágenes hace posible la división de un objeto mental en un niño, es una idea que tiene más que simplemente la acción de respuesta a lo que se le pide.

4. Detección de propiedades. Es una recursión de los primeros tres niveles. Un niño puede notar que puede generar una cadena de fracciones equivalentes a una fracción dada. Puede ser capaz de discutir fracciones que ya no puede "ver" en un sentido físico (357/4 horas son 89 ¼ horas).
5. Formalización. El niño entra en pensamiento autoconsciente, viendo las cosas en términos de "para todos los números fraccionarios", y sabe que a/b puede ser cualquier número fraccional donde b ≠ 0.
6. Observación tal como "no hay un número fraccional que sea el menos positivo". Esto contrastaría con una actividad de detección de propiedades, "puedo hacer una fracción más pequeña al hacer su denominador más grande".
7. Estructurar las observaciones de un mismo nivel previo en términos de un conjunto sistemático de acciones. La suma de fracciones no es una acción de combinar cantidades, o una propiedad de equivalencia, ni siquiera una observación que relacione numeradores y denominadores en general. Es una consecuencia lógica de las propiedades de campo y de la naturaleza de equivalencia formal.
8. Invención. Supondría el alterar la forma completa en que se piensa acerca de un tema sin destruir la estructura y entendimiento del viejo sistema.

Los niveles recién mencionados son el conocimiento organizado por el entendimiento. Las recursiones propiamente dichas utilizadas en formar el nivel exterior constituyen partes de ese entendimiento.

El desafío consiste en encontrar las interrelaciones entre estos tipos de conocimiento y su ubicación apropiada en el plan de estudios. Debido a esto, el conocimiento a nivel más externo puede derivarse ya sea del proceso o de las formas provenientes de niveles internos. Bajo este modelo, el entendimiento de números racionales se caracteriza como un todo dinámico del conocimiento de números racionales a muchos niveles simultáneos. Este

conocimiento se organiza a muchos niveles que contienen a su vez otros niveles y que son trascendentes pero recursivos, y en los cuales la retroalimentación caracteriza el entendimiento intuitivo y el formal (Kieren, 1993).

El autor propone un modelo recursivo que rompe con la idea tradicional que el entendimiento matemático es lineal que va de menos a más sin ninguna retroalimentación de los alumnos, explora cómo los estudiantes desarrollan la comprensión de los números racionales a través de diferentes etapas cognitivas. Se aborda la progresión desde una comprensión intuitiva primaria hasta una comprensión más profunda y recursiva donde los alumnos avanzan y retroceden en los esquemas de su entendimiento.

La secuencia propuesta por Kieren a partir del modelo recursivo para el aprendizaje de los números fraccionarios considera las estructuras cognitivas de los alumnos y los errores y habilidades en la medida que avanzan y evoluciona su pensamiento en el conocimiento de los números fraccionarios a través de la instrucción guiada es la base teórica metodológica para el diseño y análisis de los instrumentos diagnóstico, entrevistas, secuencia, cuestionario final del trabajo de investigación. Su propuesta de los diferentes subconstructos medida, operador, cociente y razón permite considerar los diferentes contextos y significados del concepto de fracción así como la forma en que se relacionan aspecto fundamental para superar los obstáculos de la enseñanza. En la investigación, este modelo teórico se aplica para analizar el proceso de comprensión de los estudiantes en relación con un concepto matemático específico, como las fracciones. Se utiliza para identificar los niveles de comprensión de los estudiantes, analizar su progreso a lo largo del tiempo, y diseñar estrategias educativas efectivas que promuevan un aprendizaje significativo y profundo en matemáticas.

1.5 El abordaje realista de Streefland

Streefland (1993), comenta acerca del abordaje realista sobre que la enseñanza de la matemáticas está íntimamente conectada con la realidad y de cómo la realidad es una fuente

de aplicación para las matemáticas, por lo que el término realista se refiere a cómo los estudiantes comprenden las fracciones y la importancia de que en la enseñanza y aprendizaje de las fracciones se necesita crear un puente entre lo concreto y lo abstracto a través de herramientas como modelos visuales, esquemas, diagramas. Estrategias que ayudan a los alumnos a comprender de manera profunda las fracciones. Propone actividades de reparto equitativo, realizar actividades donde los estudiantes reparten objetos de manera equitativa como pizzas entre un grupo de personas para que comprendan las fracciones como partes iguales de un todo, porque las porciones son herramientas lingüísticas que más tarde serán llamadas fracciones.

Estas actividades proveen a los alumnos de un concepto significativo y operativo de la fracción. La utilización de los modelos visuales y concretos como los diagramas representa una progresión entre los símbolos y el pensamiento matemático de los niños, plantear situaciones donde los alumnos tengan que comparar y ordenar fracciones utilizando el precio por porción les ayuda a realizar comparaciones, porque las fracciones sólo pueden ser entendidas cuando representan algo por lo que su enseñanza debe llevarse a cabo en contextos reales el material a utilizar debe ser rico y diverso para crear un fundamento sólido.

Propone una situación modelo a la que llamaron división francesa de donde se desarrolló todo un trabajo monográfico de representación simbólica de las fracciones que produjo un proceso cognitivo que hizo posible situaciones de división equivalentes y la matematización horizontal y vertical, que permite moverse desde los problemas reales hacia lo simbólico haciendo un progreso estructurando y ordenando los contenidos matemáticos de manera creciente que permita la reflexión sobre el proceso de aprendizaje identificando los obstáculos como los errores al trabajar las fracciones como si fueran números naturales al combinar estas estrategias en la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones los alumnos pueden desarrollar una comprensión más profunda del concepto matemático de la fracción.

Streefland (1993), ofrece una visión diferente sobre la enseñanza de las fracciones la cual debe estar vinculada a la realidad, para ello se necesita utilizar modelos visuales combinados de manera creativa y variada como una herramienta poderosa para facilitar la comprensión del concepto de fracción que permite a los estudiantes visualizar conceptos abstractos de una manera concreta y significativa, a través de una esquematización progresiva.

1.6 Otras investigaciones sobre los números racionales

El estudio de Behr, Post y Wachsmuth (1982) analizó cómo los niños aprendieron el concepto de equivalencia y orden en los números racionales. Los investigadores evaluaron cómo los niños desarrollaban su comprensión de estos conceptos matemáticos por medio de una variedad de tareas y pruebas. Se descubrió que los niños comprenden la equivalencia y el orden de los números racionales en varias etapas, desde una comprensión básica hasta una comprensión más avanzada. Se descubrió que el contexto y la manipulación de objetos concretos facilitaban el aprendizaje de estas ideas.

Este estudio proporcionó ideas importantes sobre el desarrollo cognitivo de los niños en relación con los números racionales y propuso métodos pedagógicos útiles para enseñar estas ideas en el aula. Los resultados de un experimento clínico sobre la enseñanza de los conceptos de equivalencia y orden en números racionales se presentan en el informe "La adquisición de los niños del concepto de equivalencia y orden en números racionales (Informe de un experimento clínico de enseñanza)" (Behr, et al. 1982).

El informe "La adquisición de los niños del concepto de equivalencia y orden en números racionales" se presentó en la reunión anual de la Asociación Americana de Investigación Educacional en Nueva York en 1982. El objetivo principal fue investigar a través de un experimento clínico de enseñanza cómo los niños aprenden el concepto de equivalencia y orden en números racionales.Se utilizó una técnica experimental para enseñar a los

participantes del estudio los conceptos de equivalencia y orden en números racionales. Los participantes fueron niños en edad escolar. Se estudió cómo los niños comprenden y aprenden el concepto de equivalencia en números racionales, es decir, la idea de que dos fracciones pueden representar la misma cantidad. El informe también analiza cómo los niños comprenden y aprenden el concepto de orden en números racionales, es decir, cómo pueden comparar y clasificar fracciones en función de su tamaño.

Dicho estudio reveló técnicas que parecen ser efectivas para enseñar estas ideas, así como dificultades y errores comunes que enfrentan los niños durante el proceso de aprendizaje.

En un experimento realizado para enseñar a los niños los números racionales, se utilizó un enfoque basado en el uso de ayudas manipulativas. Este enfoque se centró en el uso de materiales físicos como piezas circulares y rectangulares de laminado de colores, para facilitar la comprensión de los conceptos matemáticos. Además se implementaron 13 lecciones a lo largo de 18 semanas, combinando actividades individuales y grupales para involucrar a los niños en el proceso de aprendizaje.

Durante las entrevistas los niños desarrollaron diversas estrategias para comparar fracciones. Algunos niños utilizaron estrategias basadas en el tamaño de las fracciones, mientras que otros se apoyaron en la relación entre numeradores y denominadores. También se observó que algunos niños recurrieron a estrategias más primitivas como la dominancia de números enteros al enfrentarse a situaciones de desequilibrio cognitivo. Estas estrategias reflejaron la inseguridad en el conocimiento de los números racionales y la tendencia a retroceder a enfoques menos sofisticados.

Los conocimientos previos de los niños sobre los números tuvieron un impacto significativo en su comprensión de los números racionales. Durante las primeras lecciones, se observó que muchos niños aún estaban luchando por separar su pensamiento sobre fracciones de sus esquemas para números enteros. Sin embargo, a medida que avanzaban en el experimento de enseñanza, la mayoría de los niños lograron aprender a ordenar fracciones con los mismos denominadores, lo que sugiere una mejora en su comprensión.

Además, se encontró que los niños que tenían un conocimiento adecuado de los números racionales y podían emplear estrategias apropiadas para enfrentar fracciones tenían una mayor disposición para lidiar con problemas que implican razonamiento proporcional. Por lo tanto, el dominio de conceptos previos relacionados con los números racionales fue fundamental para el desarrollo de habilidades en este ámbito.

Según el texto, se presentan diversas dificultades en la enseñanza de fracciones, entre las cuales destacan las siguientes:

1. Interferencia de conocimientos previos: los niños pueden experimentar interferencia continua por parte de su conocimiento de números enteros al tratar con fracciones, lo que dificulta la separación de los esquemas utilizados para cada tipo de números
2. Necesidad de determinar la adecuación de los esquemas: simplemente informar a los niños sobre la adecuación de sus esquemas para tratar con números enteros no es suficiente; los niños necesitan aprender a tomar decisiones por sí mismos sobre todo cuando aplican ciertos esquemas.
3. Dependencia de medios manipulativos: algunos niños pueden depender en exceso de ayudas manipulativas durante un periodo prolongado de instrucción, lo que puede limitar su capacidad para alcanzar a realizar tareas que no involucren estos objetos.

Estas dificultades resaltan la complejidad de enseñar y aprender fracciones, así como la importancia de abordar de manera efectiva el proceso educativo.

1.7 Estudios recientes

Butto (2013) presenta un estudio que incluyó una primera etapa exploratoria donde indaga ideas importantes sobre los números fraccionarios seguido de una propuesta de enseñanza en dos ambientes de aprendizaje (lápiz y papel, recursos interactivos), en dicha secuencia se exploraron las ideas de: relación parte-parte, parte-todo y formación de la unidad, equivalencia y ampliar la noción de fracción; representación partes de la unidad (traslaciones entre las representaciones), fracciones en la recta numérica, representación de fracciones propias e impropias con la finalidad de interconectar dichos contenidos matemáticos en dos

ambientes. El estudio encontró que los estudiantes presentaban diversas dificultades en la representación de fracciones impropias; problema para identificar el fraccionamiento en cantidades discretas, entre otras ideas.

Después de la aplicación de la secuencia didáctica, se observó que los estudiantes lograron superar varias de las dificultades iniciales identificadas en el cuestionario inicial, lo que indica que han avanzado en su comprensión de las fracciones. Se destacó que la transición de los números enteros a los números racionales es un proceso gradual que requiere una comprensión de varios subconstructos relacionados con los números racionales, como la partición, la equivalencia y la formación de la unidad.

Se demostró que algunos estudiantes estaban en el nivel inicial del modelo matemático propuesto de Kieren, que implica un conocimiento básico. Estos resultados demuestran la importancia de desarrollar estrategias educativas efectivas que mejoren las dificultades presentadas por los estudiantes en el aprendizaje de fracciones.

Fandiño (2015), señaló que el concepto de fracción tiene varias acepciones aspecto que tienen serias repercusiones sobre la enseñanza, donde se pretende dar una definición definitiva, la definición de la fracción como parte de un todo continuo que es dividido en partes, un entero dividido en cuatro donde cada parte es llamada un cuarto. Definición que no satisface todos los significados que el término asumirá en el curso de los estudios que realizan los alumnos, pero como es fácilmente comprensible se establece cognitivamente como un modelo que después no se puede modificar.

En las diferentes interpretaciones que se tiene del concepto de fracción señala situaciones que representan un reto en su enseñanza, en la idea de parte todo menciona que hay una gran diferencia si el todo es continuo o discreto y que este planteamiento suscita confusiones por ejemplo si el todo es continuo como tomar cinco partes de una pizza que fue dividida en cuartos 5/4 y si el todo es discreto como obtener 3/5 de un conjunto de doce niños.

Otra de las dificultades conceptuales relativas al concepto de fracción es el adjetivo “igual”: «dividir una unidad en partes “iguales”» afirmación que representa una complicación cognitiva cuando al niño se le propone un modelo concreto en un hecho real sobre los que centrará su atención y no sobre la abstracción que supone el adulto, una rebanada de pizza o de pastel pueden ser iguales en proporción pero no en los ingredientes que muestran, un rectángulo puede ser dividido en cuatro partes iguales en proporción a su área pero no a su forma.

En la fracción como cociente a/b la división puede verse como efectuada si el todo es continuo 3/5 puede representar tres partes de un todo dividido en cinco, si el todo es discreto la división es indicada tres objetos dividido entre cinco personas o el cociente efectuado 0.6.

En la fracción como relación de dos magnitudes o razones el numerador y el denominador pueden ser intercambiables por ejemplo : AB= 4/5 CD o bien CD = 5/4 de AB el segmento y su forma de representación cambia también 4/5 puede expresarse como 4:5.

En la fracción como operador que es de las más usadas en la escuela podemos encontrar 4/5 de 20 peras lo que implica dividir y multiplicar (20÷5) ×4 peras; pero no podemos encontrar 4/5 de 22 peras.

El autor, concluye diciendo que en lenguaje cotidiano y en la didáctica de las fracciones se inclinan por un primer contacto “informal”, el estilo didáctico más difundido y generalizado pero es necesario presentar los distintos usos de las fracciones en la vida diaria para que el estudiante logre alcanzar una conceptualización integral del concepto.

Cortina (2014), trata sobre las aportaciones de las investigaciones realizadas en torno a cuatro preocupaciones principales, la primera es puntualizar la naturaleza didáctica del concepto, de las nociones matemáticas como parte-todo, medida, razón y operador, la segunda identificar y describir los esquemas mentales implicados en el aprendizaje, la tercera las propuestas de enseñanza encaminadas a mejorar el aprendizaje del concepto y la última, la evaluación y los niveles de comprensión alcanzados por los estudiantes.

Estas investigaciones se han basado en la metodología de los experimentos de diseño creada para la educación matemática, cuyo objetivo principal es desarrollar recursos teóricos metodológicos para mejorar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la escuela. Implica la puesta en práctica de una THA Trayectoria Hipotética de Aprendizaje, que son las conjeturas de cómo llevar a cabo el aprendizaje de un concepto matemático específico y los medios para impulsar el proceso.

La investigación trata de cuatro estudios que se realizaron. El primero consistió en entrevistar en forma individual a 14 estudiantes de 4° de primaria de una escuela urbana marginada en Chiapas donde compararon el tamaño de diferentes tipos de vasos $(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10})$ en relación a cuántos vasos de cada tipo podían ser llenados con la leche contenida en un cartón de leche (1 litro).

El segundo estudio se centró en explorar los alcances de una THA que partiera de nociones básicas de proporcionalidad con estudiantes de secundaria. El estudio consistió en la aplicación de 297 cuestionarios de 6 reactivos de comparación de fracciones (con las mismas proporciones que las del primer estudio) a alumnos de 6° de 13 escuelas primarias en Chiapas y 7 en la Ciudad de México.

El tercer estudio se concentró en determinar las concepciones iniciales que tienen los estudiantes de las carreras económico-administrativas sobre las relaciones multiplicativas. Se utilizaron encuestas y entrevistas, el criterio aplicado para determinar si un estudiante tenía el nivel de comprensión suficiente de un concepto, fue que al resolver un problema: lo hiciera correctamente, justificar su respuesta y la creación de una representación gráfica congruente a su explicación. Se identificó que son capaces de desarrollar conceptos multiplicativos cada vez más complejos y útiles para sus profesiones.

Para el cuarto estudio se instrumentó un experimento de diseño con alumnos de 4° de primaria para favorecer el aprendizaje de las fracciones como números que cuantifican magnitudes a partir de una fracción unitaria como un número que da cuenta del tamaño de

cierto atributo. Se exploró la medición usando una vara de 24 cm y posteriormente un popote que mide la mitad de la vara. Los alumnos recortan diferentes medidas del popote (1/3, ¼, 1/5, y 1/6), las comparan y repiten para alcanzar la longitud de la vara y promover el razonamiento de orden inverso presente en las fracciones unitarias y sobre el tamaño.

Pazos (2009), señaló que las prácticas habituales de la enseñanza de las fracciones se centran en que los alumnos tengan éxito en la resolución de ejercicios, práctica que representan un obstáculo que no aseguran la compresión del concepto de fracción, dentro las prácticas habituales señala, que el trabajo con fracciones se lleva acabo en la escuela apartir del modelo parte todo principalmente a través de representaciones gráficas como rectángulos o círculos; trabaja principalmente sobre cantidades continuas (Pazos 2009) por lo que el trabajo se centra en el conteo de las partes sin considerar la relación de la parte y el todo, tampoco se hace una distinción entre cantidades continuas y discretas suponiendo que el trabajo de las primeras es suficiente para comprender las segundas cuando no es lo mismo la cuarta parte de una figura que la cuarta parte de un conjunto, además que se deja de lado otros contextos de uso de las fracciones y las relaciones que se deberían establecer entre otros significados como el de reparto, la equivalencia, la división la medida, los decimales, la proporcionalidad, cuyo recorrido es necesario para acercarse a la construcción del concepto de fracción y que se descuidan cuando la práctica se centra en esta representación.

Cuando se lleva a cabo de esta manera se centra la atención en la parte sombreada de la figura que ya está discretizada Se centran en el conteo de partes, priorizando el número de partes y no la relación entre la parte y el todo y el alumno mecánicamente cuenta la cantidad de partes y las coloca como denominador y las partes sombreadas como numerador pero no establece una relación de la parte con el todo y puede confundirse e invertirlos es necesario por lo menos presentar figuras no discretizada para que establezcan dicha relación. No se trabaja la independencia de las formas si estas son figuras no canónicas no tiene cómo identificar la relación sobre todo por la idea de igualdad. No tiene en cuenta la necesaria

equidad de las partes sobre todo porque en el entrenamiento escolar las figuras se dan discretizadas y cuando ellos dividen no toman en cuenta esta relación y si la figura está dividida en cuatro para ellos son cuartos aunque no tengan la misma proporción. No se trabaja con fracciones mayores que la unidad por lo general se trabaja a partir de la unidad y son pocas las veces que se propone a los alumnos la reconstrucción de la unidad a partir de sus partes, reconstruir la unidad a partir de una figura mayor a la unidad, representar una fracción a partir de otra fracción de la misma unidad. No se hace hincapié en la relación número de partes y tamaño de las mismas. Lo que hace que ¼, 1/7, 1/9 lo representen del mismo tamaño sobre todo cuando se les da papel cuadriculado. No se representan distintas fracciones en una misma unidad. En la presentación escolar se les pide que en cada unidad debe representarse sólo una fracción cuando deberían representar varias fracciones en una misma unidad. La autora concluye diciendo que se deben enriquecer y variar las representaciones gráficas e ir complejizándolas a lo largo del ciclo escolar para establecer las relaciones entre estas representaciones y otros contextos de uso de las fracciones. El estudio ofrece una visión crítica y reflexiva sobre las prácticas habituales de la enseñanza de las fracciones en la escuela. Prácticas que obstaculizan la comprensión de los alumnos por lo que propone implementar diferentes contextos de uso de las fracciones y ofrece estrategias para complejizar las representaciones gráficas.

Arenas (2021), señaló que la enseñanza de las fracciones en la educación primaria es uno de los contenidos matemáticos de mayor dificultad para el aprendizaje aspecto fundamental si se considera que el dominio de este contenido es fundamental para la comprensión de otros conceptos matemáticos que los alumnos revisaran en secundaria como son los dominios de medida, álgebra, geometría y probabilidad. Esto se debe en gran medida a la falta de comprensión del concepto de fracción producto de sus diferentes interpretaciones, el autor menciona que el primero en señalar que el concepto de fracción implica varias interpretaciones fue Kieren (1976) quien propuso cuatro subconstructos: razón, operador, cociente y medida, más tarde Behr et al. (1983; 1992) agregaron dos categorías a las

expresadas por Kieren, las que llamaron subconstructos del megaconcepto, las categorías fueron: parte todo que estaría en la base de todas las categorías porque se relaciona con todas y la categoría de la fracción como decimal. Posteriormente, Fandiño (2009) agrega ocho diferentes formas de entender la fracción a las ya citadas por Kieren y Behr haciendo un total de catorce que son: La fracción como probabilidad, la fracción como número racional,la fracción como punto de una recta orientada,la fracción como indicador de cantidad de elección, la fracción como porcentaje, la fracción en el lenguaje cotidiano,la fracción en los puntaje. Arenas (2021) también mencionó sobre las principales dificultades en la enseñanza de las fracciones que Fandiño (2009) reporta: dificultad en el ordenamiento, dificultad en la realización de las operaciones,dificultad en el reconocimiento de esquemas, dificultad en la gestión del adjetivo “igual”, dificultad es la relativa a la gestión de la equivalencia, dificultad en la gestión de la “fracción irreducible,dificultad en la gestión de figuras no estándar,a dificultad la relativa a determinar a partir de una fracción la unidad que la generó,Y, la dificultad en la gestión autónoma o espontánea de esquemas, figuras o modelos (Arenas, 2021).

El trabajo "La enseñanza de las fracciones aplicando la metodología Singapur" de Crespo (2022), abordó un estudio sobre la implementación del Método Singapur en la enseñanza de fracciones en la educación primaria. Este método se caracteriza por un enfoque concreto-pictórico-abstracto, que facilita la comprensión matemática a través de manipulativos y representaciones visuales antes de llegar a conceptos abstractos. Crespo Gutiérrez analiza cómo esta metodología puede mejorar el entendimiento y la retención de conceptos fraccionarios en los estudiantes, comparándola con métodos tradicionales y destacando sus beneficios en la educación matemática.

Iglesias (2022) hizo una propuesta de mejora en la enseñanza de fracciones en Educación Primaria", explora el uso del enfoque japonés "Lesson Study" para mejorar la enseñanza de fracciones en la educación primaria. Esta metodología implica un proceso colaborativo entre docentes que incluye la planificación, implementación, observación y revisión de lecciones.

El objetivo es identificar y superar las dificultades en la comprensión de las fracciones, promoviendo un aprendizaje más profundo y efectivo en los estudiantes a través de la reflexión y mejora continua de las prácticas pedagógicas.

Gerez (2023) examinó los retos que enfrentan los docentes de educación primaria en la modalidad de Educación de Jóvenes y Adultos (EPJA) al enseñar fracciones. El estudio analiza las metodologías empleadas por los maestros y las dificultades para lograr que los estudiantes adultos comprendan este concepto matemático. Resalta que uno de los principales desafíos es aplicar estrategias que conecten las fracciones con situaciones cotidianas, las cuales a menudo no son efectivas. También se evalúa cómo las normativas educativas en esta modalidad abordan el significado de los conceptos matemáticos. Además, el estudio incluye análisis de clases para proponer enfoques que faciliten la comprensión significativa de las fracciones en la educación de adultos. Critica las prácticas pedagógicas actuales y subraya la necesidad de estrategias más efectivas que permitan a los estudiantes adultos entender profundamente las fracciones, en lugar de solo memorizar procedimientos.

González (2023), en su estudio, se centró en transformar la práctica pedagógica para mejorar la comprensión de las fracciones en los estudiantes de secundaria. González aboga por abandonar la pedagogía tradicional, que se centra en la exposición de información por parte del docente, en favor de un enfoque más participativo y colaborativo. Propone revalorizar el papel del docente y transformar las prácticas pedagógicas tradicionales, enfatizando la importancia de un enfoque didáctico que involucre activamente a los estudiantes en su propio aprendizaje de las fracciones.

Cruz-Ortiz (2024) propuso un estudio para mejorar la enseñanza de las fracciones, destacando la importancia de desarrollar métodos pedagógicos eficaces para facilitar la comprensión de estas por parte de los estudiantes. El estudio utiliza una metodología cualitativa y se basa en la revisión de múltiples estudios previos. Los resultados sugieren que

las estrategias innovadoras y dinámicas pueden mejorar significativamente el aprendizaje de las fracciones en comparación con los métodos tradicionales.

1.8 Contribución de los estudios al abordaje de la enseñanza de los números fraccionarios

Los antecedentes de la investigación permitieron conocer la manera en que las últimas décadas se ha trabajado, desde diferentes perspectivas la enseñanza de las fracciones. Al mismo tiempo nos permitió seleccionar un horizonte conceptual teórico metodológico para el abordaje del problema de investigación, retomando algunos de los resultados de las investigaciones realizadas por los diferentes autores y formas de aproximarse al problema.

La fenomenología didáctica de Freudenthal (1983), contribuye al estudio de los números fraccionarios al distinguir los objetos matemáticos (números fraccionarios) y las estructuras cognitivas (objetos mentales), aspecto importante para la instrucción guiada. Freudenthal enfatizó la importancia de que los estudiantes comprendan los números fraccionarios y racionales relacionados con situaciones concretas y fenómenos matemáticos reales.

El referido autor señalaba que las fracciones eran el aspecto fenomenológico de los números racionales a partir de las cuales se construyen los objetos mentales y después los objetos matemáticos. Resaltó la riqueza fenomenológica de los diferentes significados y usos de la fracciones, la fracción como fracturador (parte todo), comparador (equivalencia y medida), operador (multiplicación y división) y razón (porcentaje), nociones que inspiraron a Kieren para la idea de subconstructos (medida, cociente, operador y razón). El análisis fenomenológico y didáctico generó el interés por investigar las propiedades de los números, aspecto (epistemológico), en relación con las estructuras cognitivas de los alumnos (objetos mentales) y la instrucción guiada a través del concepto de reinvención guiada y la secuencias o trayectorias progresivas de aprendizaje.

En otro orden de ideas, la aportación de Vergnaud (1990) sobre el estudio de los números fraccionarios radica en definirlos como un campo conceptual, es decir, un conjunto de situaciones, conceptos y relaciones que comparten un núcleo común de significado. Lo que implica observar la relación que existe entre los contenidos matemáticos y las situaciones en las que se presentan además de tomar en cuenta los esquemas conceptuales y esquemas cognitivos de los alumnos.

En 1976 Kieren propone cuatro subconstructos para entender el campo de los números racionales. Kieren retoma la idea de subconstructo de Freudenthal. En 1976 Kieren propone un esquema donde considera que el modelo que posee un orden implícito sobre el pensamiento de los números racionales.

De Kieren (1993), retomamos el modelo de entendimiento matemático recursivo, base teórica metodológica de este trabajo. En dicho modelo recursivo, los autores Kieren y Pirie refieren 8 niveles de entendimiento de los números racionales: actividad primitiva, creación de imágenes, retención de imágenes, detección de propiedades, formalización, observación, estructurar las observaciones de un mismo nivel previo en términos de un conjunto sistemático de acciones e invención. Diseñar el cuestionario inicial de fracciones explorando diferentes ideas matemáticas relacionadas con el concepto de fracción, diseñar la secuencia didáctica y observar el pensamiento de alumnos a medida que aprenden los números fraccionarios.

De acuerdo a Butto (2013), menciona que en el nivel más bajo del modelo contiene el conocimiento básico de las herramientas intuitivas y ahí están las ideas de partición, equivalencia y la formación de la unidad. En el nivel II están las ideas de medida, cociente, razón y operador que conforman el constructo escalar y funcional, ahí está el pensamiento formal multiplicativo y en el nivel IV representa el conocimiento estructural de los números racionales. En 1993 el autor argumenta sobre el conocimiento integral de los números racionales y menciona que éste no sólo requiere el entendimiento de cada idea sino de cómo

estas ideas se interconectan entre sí. Para el referido autor, dicho aprendizaje solo puede ser visualizado a partir de la idea de constructo y lo define como la acción en la que el sujeto aprende del mundo un objeto mental y concibe la comprensión de las fracciones por subconstructos y reconoce cuatro: relación parte todo y parte parte, cociente, razón, operador y medida.

En este trabajo se consideró el modelo propuesto por Kieren en 1976 y se trabajó a partir del nivel más bajo del modelo, éste contiene el conocimiento básico de las herramientas intuitivas y de las ideas de partición, equivalencia y formación de la unidad que los estudiantes investigados necesitaron trabajar debido a las dificultades presentadas en la primera etapa del estudio. En la primera etapa diagnóstica se trabajó en el nivel I y II del modelo y en la segunda etapa, la secuencia didáctica, solo se trabajó en el nivel I, pues los estudiantes presentaron dificultades con las ideas del siguiente nivel de entendimiento.

Respecto a la segunda etapa, se retomó el trabajo de Coxford y otros (1975, en Butto, 2013) como orientación de las actividades que se propusieron. Se consideraron los siguientes puntos: unidad, partes de una unidad usando materiales concretos, nombres orales para partes de la unidad, escribir fracciones para representar partes de la unidad (traslaciones entre las representaciones), representar fracciones con dibujos y ampliar la noción de fracción. También se retoman las diferentes ideas matemáticas relacionadas con el concepto de fracción así como las dificultades detectadas en cada una de ellas como lo muestra Fandiño (2015).

Capítulo II

Marco teórico

En este capítulo se presenta el marco teórico del estudio. Se inicia con la descripción del modelo recursivo de Kieren. En seguida, se describe cómo este autor retomó otros estudios para su modelo recursivo. En esta revisión se hizo el análisis de la evolución del concepto de comprensión matemática a partir del estudio realizado por David Meel (2003) destacando los enfoques más relevantes: La compresión como superación de obstáculos cognitivos propuesta por Cornu (1991), la comprensión como generador de imágenes del concepto y definición del concepto propuesta por Tall y Vinner (1991),La comprensión durante la operación con representaciones múltiples Kaput (1989), la comprensión como construcción

de las concepciones operacionales y estructurales (Sfard, 1991) (modelos que Kieren revisó para su propuesta) y el modelo de comprensión de Pirie y Kieren (1989).

Se revisa la evolución del concepto de fracción de Thomas Kieren (1976, 1981, 1989), a partir del estudio realizado por Mancera (1992) para finalmente analizar el modelo de entendimiento recursivo de Pirie y Kieren (1993) donde se propone una secuencia didáctica para la enseñanza de los números fraccionarios a partir del modelo de entendimiento recursivo, con el que se trabajó el diseño de los instrumentos y análisis de los resultados, para el análisis de este apartado nos apoyamos en Mancera(1992), Meel (2003) y Arenas (2018).

2.1. El modelo recursivo de Kieren y Pirie: Evolución del concepto de comprensión

La comprensión matemática es uno de los retos esenciales en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. ¿Qué significa entender o comprender en matemática?, y más aún, ¿cómo podemos saber si los alumnos han entendido? Son preguntas necesarias para distinguir entre un entrenamiento matemático que consiste en aprender fórmulas y procedimientos sin ninguna comprensión (Lockhart 2009) y una educación matemática que lleve a los alumnos a pensar matemáticamente (Liljedahl 2020), distinción necesaria si queremos progresar en la enseñanza de las matemáticas y en particular en la enseñanza de los números fraccionarios.

La resolución de un problema matemático no es la implementación de un algoritmo enseñado, ni la ejecución fluida de una fórmula, ni un proceso lineal de aprendizaje que vaya de menos a más y que facilite la tarea escolar, la resolución de un problema matemático implica la mayoría de las veces quedarse estancado y aprender a pensar (si se sabe la solución del problema ya no es un problema es un ejercicio) y cuando los alumnos aprenden a pensar aprenderán matemáticas, aprenderán sobre sí mismos (Liljedahl 2020).

Antes de 1978 no había distinción entre comprensión y conocimiento matemático, éste se entendía como el desarrollo de las conexiones en el contexto de la realización de algoritmos y resolución de problemas, desde entonces se han elaborado diferentes modelos y teorías acerca de la comprensión matemática (Meel, 2003).

Fue a partir del trabajo de Skemp en 1976, quien hace el primer contraste entre comprensión instrumental (tener reglas sin razón) y una comprensión relacional (saber qué hacer y por qué se debe hacer, que inició la tarea de definir qué es la comprensión matemática (Meel, 2003).

Las concepciones más recientes separan la comprensión del conocimiento sin embargo, la comunidad matemática no ha logrado un acuerdo unilateral respecto al significado de comprensión debido a que los autores tienen distintos puntos de vista. La mayoría de estas teorías derivan de una perspectiva constructivista por lo que tienen elementos en común como la idea de que la comprensión del estudiante se construye a partir de objetos mentales y la conexión entre ellos (Meel, 2003).

Siguiendo a Meel (2003), se destacan cuatro ideas de comprensión: la comprensión como superación de obstáculos cognitivos, la comprensión como generador de imágenes del concepto y definiciones del concepto, la comprensión durante la operación con representaciones múltiples y la comprensión como construcción de las concepciones operacionales y estructurales.

2.1.1 La comprensión como superación de obstáculos cognitivos

De la comprensión como superación de obstáculos cognitivos propuesta por Cornu (1991), se desprenden además los obstáculos epistemológicos. Los obstáculos cognitivos son psicológicos o genéticos, los obstáculos epistemológicos se deben a la estructura o naturaleza de los conceptos matemáticos y los obstáculos didácticos a la forma de enseñar

(Meel 2003), los dos primeros son inevitables, sólo los obstáculos didácticos pueden ser modificados (Cortina 2013). Porque estos se deben a la enseñanza de las fracciones donde prevalece el modelo conceptual parte todo, se pueden generar otras formas de aproximar a los estudiantes al conocimiento de las fracciones como puede ser la medida, la razón, el cociente, el operador.

Este concepto de superación de las barreras cognitivas para la comprensión también está contenido en el trabajo de Sierpinski (1990), quien define la comprensión como una actividad relacionada con el proceso de interpretación que surge de ideologías, sesgos, prejuicios y preconcepciones. Lamentablemente, estas nuevas formas de conocimiento pueden crear nuevos obstáculos epistemológicos. En particular, superar las barreras epistemológicas puede permitir a los estudiantes ingresar a un campo más amplio que incluye otras barreras epistemológicas (Meel 2003).

2.1.2 La comprensión como generador de imágenes del concepto y definición del concepto

Tall y Vinner (1991) señalan que los estudiantes aprenden conceptos mediante la construcción de imágenes conceptuales. Esta imagen resultante es una imagen que está activa en diferentes momentos en un momento dado y puede causar conflictos. Las descripciones de la comprensión de los estudiantes pueden crear variaciones adicionales porque la definición de un concepto es una descripción personal del mismo. La construcción de estas imágenes ocurre cuando los estudiantes descubren nueva información y la integran en estructuras cognitivas preexistentes. La incorporación incluye los conceptos de asimilación y adaptación de Piaget. La generalización es el proceso de aplicar parámetros en un contexto más amplio, mientras que la abstracción ocurre al centrarse en las propiedades de un objeto y considerarlas de forma aislada. Harel y Tall (1991) definieron tres tipos de generalización: generalización extensiva, generalización reconstructiva y generalización disyuntiva. La

generalización extendida ocurre cuando el alumno expande su esquema en lugar de reconstruirlo y expande sus aplicaciones. La generalización reconstructiva ocurre cuando los estudiantes reconstruyen un esquema para ampliar sus aplicaciones potenciales. Desde un punto de vista pedagógico, la generalización disyuntiva es más preocupante porque amplía el alcance al construir nuevas soluciones independientes. La generalización disyuntiva supone una carga adicional para los estudiantes y puede conducir al fracaso (Meel 2003).

2.1.3 La comprensión durante la operación con representaciones múltiples

Según Kaput (1989), la energía cognitiva reside en representaciones múltiples e interrelacionadas. Permiten a los estudiantes suprimir ciertos aspectos de ideas complejas y enfatizar otros. El concepto de representación contiene diversas definiciones, cognitiva, perceptiva, computacional, interpretativa, matemática y simbólica. La representación matemática o simbolismo matemático es un sistema de representaciones especiales en el que el mundo representado es una estructura matemática y el mundo representado es un esquema simbólico que contiene correspondencias especiales. Kaput (1989) mencionó que el desarrollo y expresión del significado matemático de los estudiantes se puede observar desde la perspectiva de la construcción de formas y estructuras no operativas en representaciones mentales, donde la representación mental es el medio por el cual los individuos organizan y expresan el significado matemático. Desde esta perspectiva, el crecimiento del significado matemático es la construcción y uso de representaciones y simbolizaciones. Cuando los estudiantes construyen significado personal, hay una negociación entre dos mundos diferentes: operaciones físicas observables y operaciones mentales hipotéticas.

La comprensión es un proceso de aprendizaje que se centra en la construcción de formas mentales y no operativas. En el desarrollo de la comprensión, los estudiantes están en el centro de las organizaciones relacionadas con la actividad matemática. La comprensión es la

transición de las operaciones en el mundo físico de las operaciones a las operaciones en el mundo psicológico de las operaciones. El desarrollo de la comprensión es el cambio de actividades entre diferentes sistemas simbólicos, comenzando con la traducción y construcción de modelos matemáticos correspondientes a la traducción y coordinación de la organización cognitiva. Los dos últimos mecanismos corresponden a la integración, que es la transformación de operaciones en objetos y relaciones de un nivel que pueden operar en otro nivel. Un tercer mecanismo crea significado a través del aprendizaje de patrones y la gramática a través de transformaciones presentadas en un sistema semiótico determinado, que pueden involucrar o no preferencias o significados externos. Este crecimiento es una reorganización del sistema de símbolos que crea una jerarquía. La cognición de sistemas simbólicos produce así significado matemático a través de la encarnación de la acción y la energía cognitiva (Meel 2003).

2.1.4 La comprensión como construcción de las concepciones operacionales y estructurales

La comprensión como construcción de las concepciones operacionales y estructurales (Sfard 1991), se refiere a dos entidades: concepto y concepción. El concepto se refiere a una idea oficial definida matemáticamente, mientras que la concepción involucra un grupo de representaciones y vínculos internos del estudiante causados por el concepto. Estas dos definiciones se relacionan con el análisis de Vinner (1991) sobre la definición del concepto formal y la descripción por parte de una imagen del concepto.

Una concepción estructural es más abstracta, integrada y menos detallada que una concepción operacional. Sfard (1991) propone que las concepciones estructurales reciben el apoyo de imágenes mentales compactas e integradoras en vez de representaciones verbales que requieren un proceso serial. Esta visualización permite al estudiante desarrollar una

visión holística del concepto y observaciones desde varias perspectivas, conservando la identidad de una relación dentro del concepto.

El desarrollo conceptual llega más allá de una capacidad de resolver problemas o probar teoremas. Sin embargo, existe una profunda brecha ontológica entre las concepciones operacionales y estructurales. La construcción operacional observa el concepto como un proceso, mientras que la concepción estructural iguala el concepto con un objeto estático trascendente de las raíces de sus procesos.

En el desarrollo histórico de cualquier concepto matemático, la sociedad pasa por una serie de etapas que culminan en la concepción estructural. La interiorización se presenta cuando un estudiante se familiariza con los procesos, y la condensación permite concebir una secuencia como un solo proceso y relacionan su entrada y salida. La reificación es responsable del desarrollo de los objetos matemáticos, permitiendo la capacidad de ver algo familiar desde una perspectiva totalmente distinta (Meel, 2003).

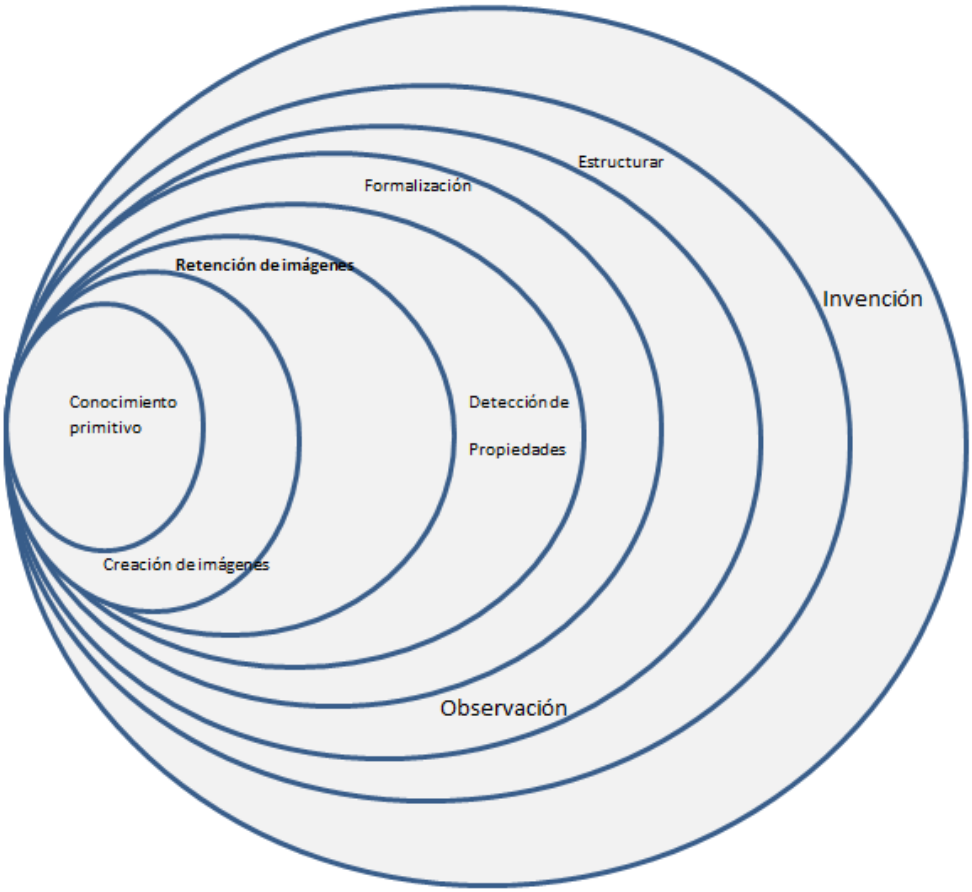
2.1.5 El modelo de comprensión de Pirie y Kieren

A continuación se describe el modelo recursivo de Kieren y Susan Pirie (1993).

Se basa en la definición constructivista de Glasersfeld (1987), que se refiere al crecimiento de la comprensión matemática como un proceso continuo para organizar las estructuras del conocimiento de una persona. A partir de esta definición concibieron al organismo de la experiencia como un constructor de estructuras comunicativas que resuelve los problemas conforme el organismo los percibe o los concibe, entre los cuales se encuentra el problema interminable de las organizaciones consistentes de dichas estructuras que podemos llamar comprensión.Describen la comprensión matemática como un proceso estable pero no lineal, un fenómeno recursivo que parece ocurrir cuando el pensamiento cambia los niveles de complejidad. De hecho, cada nivel de comprensión está contenido en niveles posteriores. Cada nivel depende de su forma y proceso, y también está limitado por factores ajenos a él.

El modelo de Pirie y Kieren conceptualiza el crecimiento de la comprensión matemática a lo largo de ocho niveles subyacentes (Pirie y Kieren, 1989).

Figura 1. *Esquema de los ocho niveles de comprensión de Susan Pirie y Thomas Kieren (1989)*



Nota. Tomado de Arenas, J. (2018). Compresión del concepto de fracción como razón a través del modelo de Pirie y Kieren. [Tesis de maestría]. Universidad Autónoma de Guerrero.

El modelo recursivo de Thomas Kieren y Susan Pirie (1989), inicia en el centro del modelo llamado **el estrato del conocimiento primitivo**, el contenido central es toda la información que el estudiante atrae la situación de aprendizaje, también se le conoce como conocimiento intuitivo, conocimiento situado conocimiento previo o informal, en el segundo estrato de

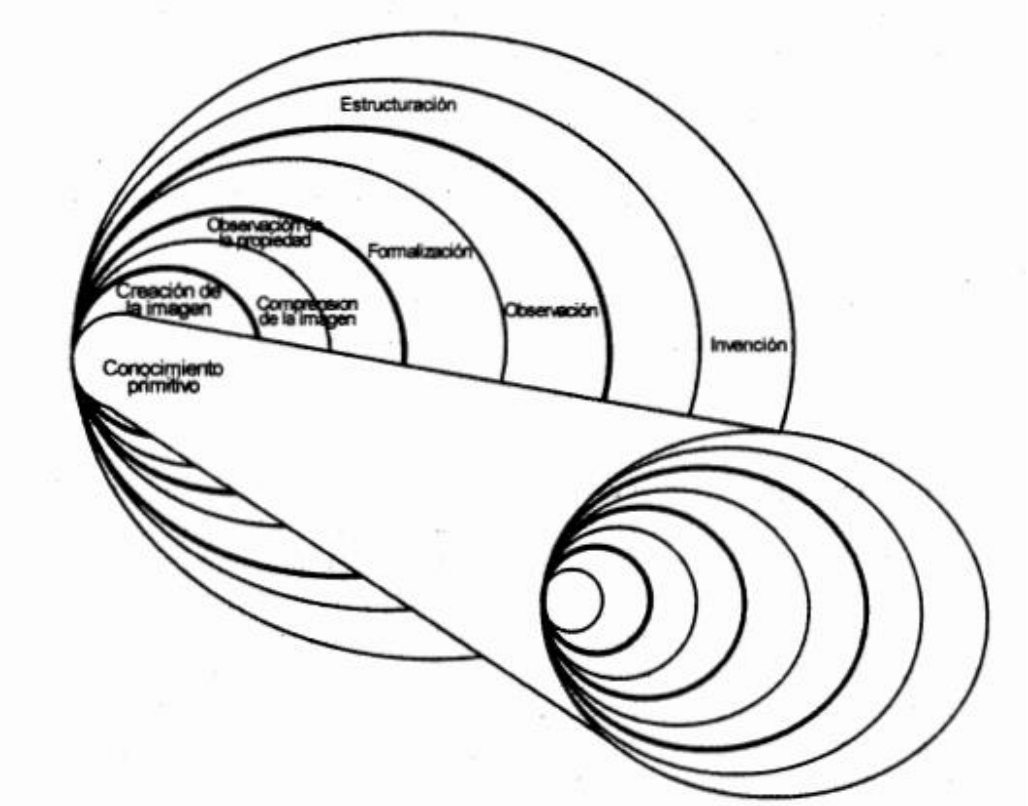
comprensión llamado **creación de imagen** que el estudiante es capaz de realizar distinciones con base en capacidades y conocimientos anteriores, mientras el estudiante está realizando actividades de doblado o cortado puede desarrollar una imagen de fracciones como cosa que obtuvo a partir de cortar algo en piezas iguales y más pequeñas, desarrolla las conexiones entre los referentes y los símbolos. En el siguiente estrato llamado **comprensión de la imagen,** las imágenes asociadas con una sola actividad se reemplazan por una imagen mental, las imágenes mentales se han analizado con distintos nombres, como imagen de conceptos marcos y estructuras de representación del conocimiento y esquemas alternativos de los estudiantes. En el cuarto estrato que se conoce como **observación** de la propiedad el estudiante puede examinar una imagen mental y determinar los distintos atributos asociados con dicha imagen; la diferencia entre la obtención de una imagen y la observación de la propiedad es la capacidad de observar una conexión entre las imágenes y explicar y verificar la conexión, la capacidad de observar las equivalencias y explicar las técnicas necesarias para desarrollarlas. En el quinto extracto llamado **formalización,** el estudiante es capaz de conocer las propiedades para abstraer las cualidades comunes de las clases de imágenes, respecto a las fracciones el estudiante puede hablar de las fracciones como una clase de objetos formales no conectados con ejemplos específicos y representar esta clase en términos de a/b. El siguiente estrato de comprensión **la observación** el estudiante tiene la capacidad de considerar y utilizar como referencia al pensamiento formal, más allá de la relación del estudiante en la metacognición es capaz de observar, estructurar y organizar los procesos de pensamiento personales así como conocer la ramificaciones de los procesos del pensamiento, puede producir verbalizaciones relacionadas con la cognición sobre el concepto formalizador. En el caso de las fracciones el estudiante ha progresado en la producción de verbalizaciones relacionadas con la cognición, conectadas con las fracciones en el estrato de la organización. Después de que el estudiante logró dicha conciencia puede explicar la interrelación de dichas observaciones mediante un sistema axiomático, este estrato se llama **estructuración** las fracciones se conciben como más allá de las entidades físicas asociadas con el estrato de creación de una imagen las equivalencias orientadas a la acción y asociadas

con de observación de las propiedades y el resultado de los algoritmos formales asociados con el estrato de la formalización . El último estrato llamado **invención** se utiliza para indicar la capacidad de liberarse del conocimiento estructurado que representa la comprensión total y crear preguntas totalmente nuevas que tendrán como resultado el desarrollo de un concepto nuevo (Kieren, 1993).

El modelo presenta cuatro características fundamentales que lo definen como un proceso no lineal; cualidad parecida a una fractal, redoblar o volver hacia atrás, la complementariedad de la acción y la expresión y fronteras no necesarias.

La cualidad parecida a una fractal, es una de las características que muestra que la comprensión no es limitada, ni finita, sino “recursiva” en su estructura básica puede reincidir a diferentes escalas, contiene un dinamismo inherente en particular la parte central del modelo el conocimiento primitivo tiene una cualidad dinámica subyacente, consecuencia obvia de este modelo es que los niveles externos crecen en forma recursiva desde los niveles internos pero el conocimiento a un nivel externo retiene los niveles internos y los niveles externos se insertan y envuelven a los internos. Una persona durante el nivel de invención puede considerarse por el observador como una comprensión previa total como una nueva acción primitiva, la comprensión tiene por lo tanto una cualidad fractal.

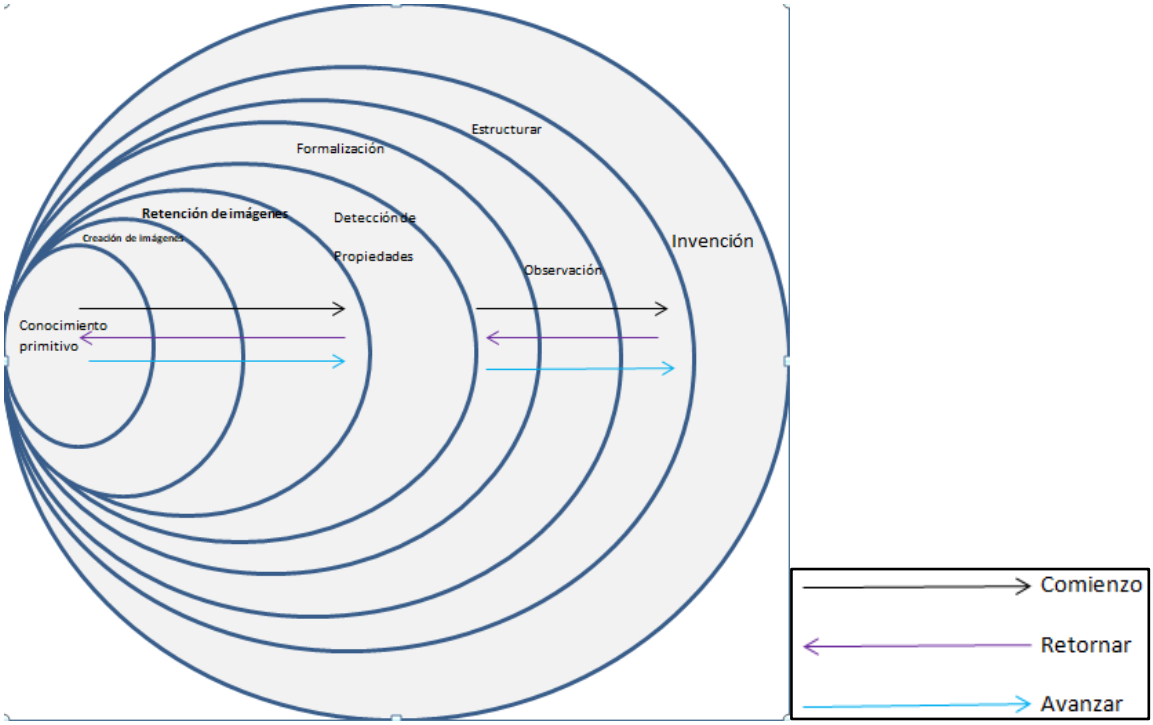
Figura 2. *Característica igual a un fractal donde el todo está en las partes y las partes están en el todo*



Nota. Tomado de Arenas, J. (2018). Compresión del concepto de fracción como razón a través del modelo de Pirie y Kieren. [Tesis de maestría]. Universidad Autónoma de Guerrero.

La característica de redoblar o volver hacia atrás, es una de las características más importantes del modelo, redoblar o volver hacia atrás se lleva a cabo cuando un estudiante se encuentra con un problema cuya solución no se puede resolver de forma inmediata, entonces se ve en la necesidad de volver hacia atrás a un estrato más interno para extender la comprensión actual inadecuada, el proceso de volver a doblar o regresar a un estrato anterior más interno, provoca la re examinación de la comprensión de un estrato en forma diferente a partir de las acciones que aparecieron originalmente cuando se trabajó en dicho estrato.

Figura 3. *Característica del retornar atrás del modelo de Pirie y Kieren*



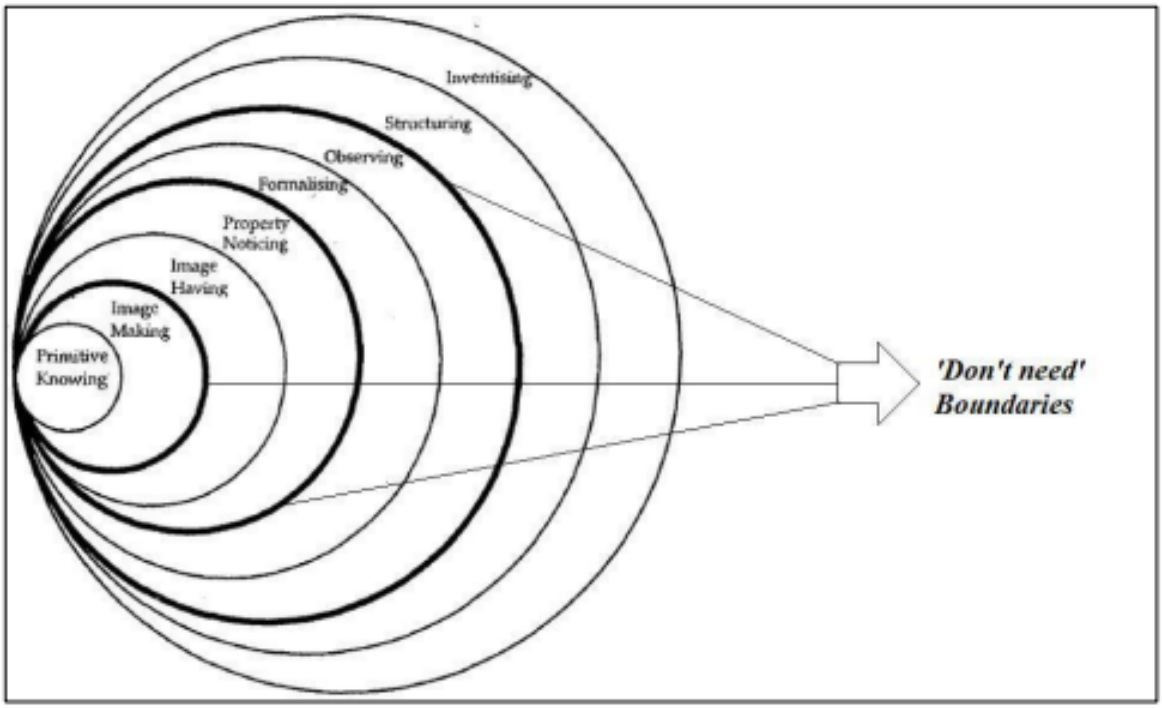
Nota. Tomado de Arenas, J. (2018). Compresión del concepto de fracción como razón a través del modelo de Pirie y Kieren. [Tesis de maestría]. Universidad Autónoma de Guerrero.

La naturaleza complementaria de la acción y la expresión significa que cada nivel (excepto el primero y el último) está estructurado de manera que la comprensión crece primero a través de la acción y luego a través de la expresión. Cada nivel más allá del conocimiento primitivo consiste en una complementariedad de acciones y expresiones, y cualquier aspecto del crecimiento de la comprensión es necesario antes de otro nivel, porque si los estudiantes solo realizaran acciones sin expresiones correspondientes, su comprensión se vería obstaculizada y no podrían aprobar. A nivel de comprensión de imágenes, existen dos elementos complementarios: visualización de imágenes y expresión de imágenes. La capa de observación de imágenes tiene dos complementariedades: predicción de atributos y registro de atributos. La capa de formalización tiene dos complementariedades: aplicación de métodos y demostración de métodos. La capa de observación contiene la complementariedad

tanto de la identificación de la propiedad como de la descripción de la propiedad. La capa estructurada contiene conjeturas y demostraciones de teoremas (Meel, 2003).

Esta función es opcional, se refiere a los pasos mediante los cuales los estudiantes desarrollan una comprensión más refinada y estable, que no necesariamente requiere elementos de nivel inferior, por ejemplo, es necesario aprender, por lo que desde el conocimiento inicial dimensiones crean imágenes o elementos, y el movimiento dentro de la falta de necesidad significa cambios cualitativos esenciales en la comprensión humana. Un cambio cualitativo similar ocurre cuando se alcanza el nivel formal o estructurado, ya que las actividades matemáticas ya no requieren imágenes o significado concreto, pero superar las limitaciones de la falta de necesidad significa que los estudiantes tal vez nunca regresen, los límites necesarios a menudo se cruzan nuevamente al comprender en el nivel inferior. se reorganiza y reconstruye para ampliar la comprensión en múltiples niveles externos (Meel, 2003).

Figura 4. *Esquema de fronteras innecesarias*



Nota. Tomado de Arenas, J. (2018). Compresión del concepto de fracción como razón a través del modelo de Pirie y Kieren. [Tesis de maestría]. Universidad Autónoma de Guerrero.

2. 2 Evolución del pensamiento de Kieren acerca del concepto de fracción

Una de las principales dificultades en la enseñanza y aprendizaje de fracciones es la multiplicidad de significados asociados al concepto y las diferentes formas de representarlos (Mancera, 1992), por lo que el nivel de comprensión humana no es sólo producto de generalizaciones de determinadas actividades del aula. perspectivas, pero tampoco es el resultado de la abstracción de la nueva comprensión de clase.

Para el desarrollo de la investigación de este trabajo así como para la intervención llevada a cabo en la escuela primaria se tomó como marco de referencia el modelo recursivo de enseñanza propuesto por Thomas Kieren y Susan Pirie (1989).

El primero en señalar las diferentes ideas asociadas al concepto de fracción fue Kieren, quien en un principio señaló siete ideas asociadas a este concepto que a continuación se muestran:

1. Números racionales son fracciones que se pueden comparar, sumar, restar, etc. Dentro de esta primera idea se encuentran las fracciones propias e impropias de los números racionales positivos, no se hacen referencia al fraccionamiento de la unidad ni a la relación parte – todo, se enfatizan los aspectos operatorios en vez de los conceptuales (Mancera, 1992).

2. Los números racionales son fracciones decimales que forman una extensión natural (a través de nuestro sistema de numeración) de los números enteros. Los racionales son vistos como una extensión del sistema decimal, se puede operar con ellos como con los números enteros pero se corre el riesgo en esta definición de que se pierda el aspecto algebraicos de las operaciones con fracciones, experiencia pre algebraica necesaria para los niños (Mancera, 1992).

3. Los números racionales son clases de equivalencia de fracciones, por lo tanto; 1/2, 2/4, 3/6 y 2/3, 4/6, 6/9 son números racionales. Se retoma en esta interpretación la construcción de los números racionales a partir del producto cartesiano de los enteros y el conjunto cociente generado por una relación de equivalencia dotadas de una estructura algebraica. En los ejemplos se concreta a números racionales positivos aunque cabe la posibilidad que se estén considerando también los negativos.

Una observación importante es que resalta una diferencia entre la operación definida en el conjunto cociente:

$$[(a,b)] + [(c,d)] = [(ad + bc, bd)]$$

de la definida para la interpretación relativa a los cocientes de enteros con razones de enteros, la cual corresponde mejor con la noción de espacio vectorial (no es muy claro Kieren al respecto), debido a que en este caso es posible que:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

o de otra forma (a,b) + (c,d) = (a+c,b+d).

Esto lo señalan también otros investigadores, por ejemplo, Borasi (1985).

La relación parte todo se ilustra, pero se pone mayor énfasis en la operatividad y formalización (Mancera 1992).

4. Los números racionales son números de la forma p/q, donde p, q son enteros y q no es igual 0. De esta forma, los números racionales son números de "razón".

Vale la pena señalar que esta interpretación está estrechamente relacionada con el concepto de proporción (como proporcionalidad) y, por lo tanto, sugiere cómo se pueden realizar operaciones entre fracciones reduciéndolas cuando hay sumas de fracciones con el mismo denominador. Una diferencia con la explicación anterior puede ser que esta sección permite encontrar partes equivalentes representadas gráficamente en una doble cruz, lo cual se logra algebraicamente simplemente multiplicando los elementos de la clase de equivalencia por una operación subyacente constante o aspecto algebraico. Por otra parte, se liga a esta interpretación con el proceso de medición (Mancera 1992).

5. Los números racionales son operadores multiplicativos (p. ej., ensanchadores, encogedores, etc.).

En esta interpretación, el concepto de fracción se utiliza en combinación con proporciones y transformaciones geométricas, de modo que una transformación seguida de otra se considera un todo, e incluso es posible sustituir dos transformaciones por una tercera transformación (producto). Por tanto, esta explicación implica la multiplicación de fracciones, lo que la distingue de otras explicaciones. Se dice que esta explicación requiere reversibilidad de ideas, lo que la hace más compleja que otras explicaciones gráficas o formales que enfatizan reglas.

Se hace la observación de cómo, esta interpretación, se resalta la estructura de grupo subyacente, en la composición de transformaciones (Mancera, 1992).

6. Los números racionales son elementos de un cociente ordenado infinito campo. Son números de la forma x=p/q donde x satisface la ecuación qx= p.

En este caso, los números racionales se representan en términos de símbolos formales y la ecuación "ax = b" tiene una solución donde a y b son números enteros y a $\neq 0$, es una solución. En este sentido, se representan como extensiones algebraicas de números enteros. Estas acciones siguen reglas formales. Usando estas reglas, se construye un dominio de coeficientes y la secuencia se puede definir y la secuencia es infinita (Mancera 1992).

7. Los números racionales son medidas o puntos en una recta numérica (Kieren 1993)

La atención se centra principalmente en la partición de unidades y la relación entre diferentes estrategias de partición. En esta interpretación, las secuencias, acciones y conceptos asociados a la recta numérica aparecen de forma natural. Es inherentemente más intuitivo.

Kieren menciona la necesidad del manejo de todas las interpretaciones y que ha sido una práctica común que los racionales tienen una sola interpretación y todas las nociones sobre éstos se desarrollan a partir de esa sola interpretación, lo cual conduce a deficiencias en el aprendizaje (Mancera 1992).

Según (Mancera 1992), Kieren en 1981 modificó esta clasificación y propuso cuatro subconstructos de los números racionales: medida, cociente, operador y razón, ésta interpretación pudo haberse debido, señala el autor, al considerar los números fraccionarios o racionales como un constructo teórico el cual se construye a partir de nociones más simples llamadas subconstructos que están interrelacionadas donde la equivalencia y la partición operan en cada uno de estos subconstructos y están en la base, en el primer nivel de comprensión de los números fraccionarios.

2.2.1 Subconstructos del concepto de fracción

Mancera (1992), explica cada uno de estos subconstructos que a continuación se presentan:

1. Relación parte-todo y medición.

Las relaciones entre las partes y el todo a menudo se expresan mediante regiones geométricas, conjuntos de objetos discretos y ejes. Obviamente incluye ideas relacionadas con los conceptos de longitud y área. El procesamiento de relaciones parte-todo depende de la capacidad de dividir una cantidad continua o un conjunto de objetos discretos en partes iguales. En este caso, el símbolo m/n representa una fracción de una cantidad. Por ejemplo, ⅝ puede referirse a dividir un todo en ocho partes y eliminar cinco de ellas, pero también puede referirse a dividir cinco elementos entre ocho personas.

2. Número racional como razón.

En este subconstructo subyace la noción de magnitudes relativas, en el sentido de que la razón es un índice de comparación más que un número.

En este caso el símbolo m/n representa una relación entre dos cantidades. Por ejemplo, 8/13 puede interpretarse como ocho de cada trece personas tienen cierta característica o como se hace en los deportes, un jugador realizó correctamente una tarea ocho veces en trece intentos.

3. Números racionales como divisiones indicadas y elementos de un campo cociente.

En este subconstructo se considera la parte formal del manejo de los números racionales, en el sentido de que está más ligada a sistemas algebraicos abstractos. En este caso el símbolo m/n se refiere a una operación de división indicada. De esta forma 5/4 representa la división $5 \div 4$, la cual no se ha efectuado.

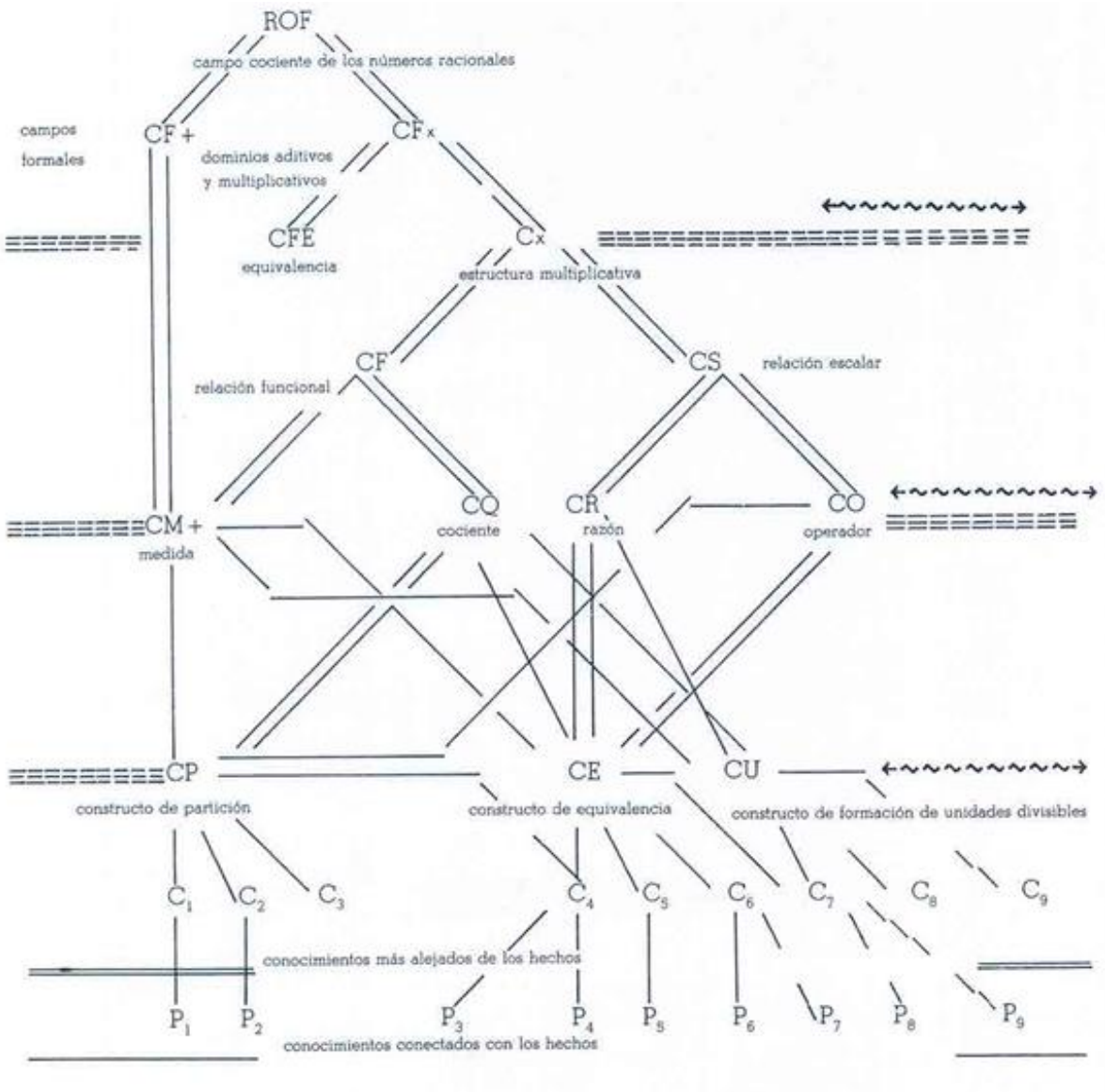
4. Número racional como operador

Aquí se consideran los casos en que el número racional opera como una función o una regla la cual transforma una cantidad en otra o una figura geométrica en otra.

En este caso el símbolo m/n representa la manera en que un objeto o una cantidad se transforma. Por ejemplo, (⅔) aplicado a 90 reduce esta cantidad a 60 (Kieren; 1981).

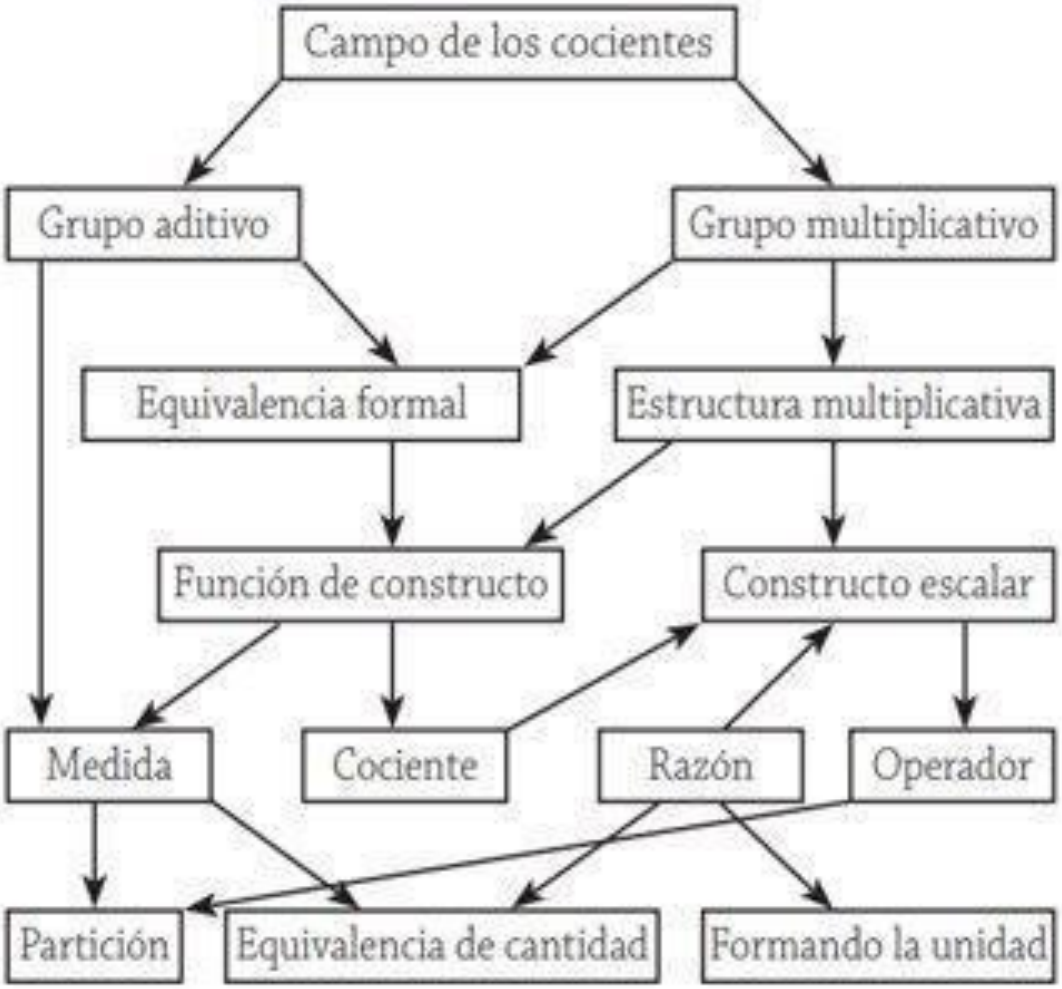
En 1988 quieren proponer un esquema con cinco caras de la construcción del conocimiento matemático, retoma la idea de los cuatro subconstructos: medida, cociente, operador y razón y plantea diversos niveles del conocimiento de los números racionales (Mancera 1992).

Figura 5. *Esquema de los diferentes subconstructos y su relaciones*



Nota. Mancera, E. (1992). Significados y significantes relativos a las fracciones. *Educación Matemática* vol 4, no 2, pág 30 -54.

Figura 6. *Esquema de los diferentes subconstructos*



Nota. Tomado de Butto, C. (2013). El aprendizaje de fracciones en educación primaria: una propuesta de enseñanza en dos ambientes. *Horizontes Pedagógicos,* vol 15. Nº 1. págs. 33-45.

2.2.2 Modelo Recursivo

En 1992 con la colaboración de Pirie, Kieren propone un nuevo planteamiento para la comprensión matemática de las fracciones; el modelo recursivo.

Kieren (1992), hizo una revisión de distintos modelos de enseñanza donde se hace referencia a las relaciones entre las estructura matemática de los números racionales (las formas de manejo matemático que se han enfatizado en la enseñanza de cada interpretación), la estructura cognitiva de los alumnos (habilidades de carácter cognitivas explicadas en términos de esquemas mentales que subyacen en la experiencia típica de cada interpretación) y la creación de situaciones instructivas por los docentes (una serie de experiencias derivadas y necesarias en la en la enseñanza típica de cada interpretación) (Mancera, 1992). Tres elementos necesarios para promover su comprensión (Kieren, 1993). En la revisión que hace señala los siguientes estudios:

El de Harrison Bye y Bridley quienes probaron un enfoque activo informal para promover experiencias con los diferentes constructos de los números racionales, cociente, medida, razón, operador a través de actividades intuitivas que sirvieran como base para que los estudiante relacionen el conocimiento informal con el trabajo simbólico de los conceptos antes de enseñar los procedimientos. Concluyendo que para diseñar o seleccionar experiencias para instruir, el conocimiento del profesor de los números racionales como una actividad humana y su conocimiento en que el niño aprende los números racionales son aspectos fundamentales (Kieren, 1993).

Otro de los estudios que señala es el de Carpenter y Fennema (1992) quienes propusieron un modelo para la investigación del plan de estudios, tomando como base los roles del conocimiento del profesor y las cogniciones de los estudiantes afirmando que hay un campo coherente de conocimiento para problemas de los números racionales y las respuestas de los estudiante a estos problemas, lo cual sirve de base para la toma de decisiones del profesor

y es al mismo tiempo un soporte teórico y empírico de su propia habilidad para promover una instrucción guiada cognitivamente a los estudiantes (Kieren, 1993).

Menciona también a Von Glaserfeld (1983) quien señala que los profesores deben tener un modelo de conceptualizaciones de números racionales hacia los cuales dirigir la enseñanza guiada de los niños. Concluyen que lo que se necesita es ver el conocimiento matemático en términos de lo que se debe hacer para construir las estructuras conceptuales que se asociarán con símbolos (Kieren, 1993).

Otros autores como Bohm y Peat (1987) usaron los conceptos de órdenes implicativo (o implícito) y generativo para contrastar lo explícito (patrones observables secuencialmente). El orden implicativo tiene la característica de un pensamiento que crece y se expande que al mismo tiempo envuelve y asimila ideas previas. El orden generativo observa el desenvolvimiento de un tema intuitivo general central hacia un tipo de jerarquía de formas crecientemente más elaboradas y sofisticadas. Estos autores sugieren que el acto creativo de un matemático es percibir el germen de esta vasta estructura de relaciones, y en conducirla hacia una estructura aún más desarrollada y que la construcción del conocimiento infantil y la creación del plan de estudios y procedimientos asociados para el profesor son un acto creativo del mismo orden (Kieren, 1993).

Señalan que el conocimiento intuitivo involucra el uso simultáneo de la imaginación, herramientas mentales o mecanismos constructivistas y el uso informal del lenguaje. Las imágenes se consideran para representar la importancia de patrones físicos, geométricos, visuales, o numéricos. Las dos herramientas de pensamiento intuitivo que han sido estudiadas en el comportamiento matemático de niños son: hacer correspondencias y contar. Sobre los números fraccionales “repartir” puede ser considerado una herramienta de pensamiento intuitivo. En este tipo de conocimiento intuitivo el lenguaje es usado como una metáfora (Kieren, 1993).

En el empleo de herramientas mentales como la reproducción de patrones o correspondencia y herramientas de conteo, el significado de la intuición es claro porque hay uso de la imaginación y el uso del lenguaje como metáfora.

Esa definición de intuición refuerza el rol que juega el lenguaje oral en el aprendizaje matemático (Kieren 1993).

Skemp (1976), habló del contraste entre el entendimiento instrumental y relacional. Otros sugirieron otras formas de entendimiento, como intuitivo, formal, construido. Otros como Tall (1978), concibieron el entendimiento como un vector de desempeño entre los distintos tipos de entendimiento (Kieren, 1993).

Piere (1988), puso en duda el uso de estos tipos de entendimiento de caracterización de procesos de construcción y organización de estructuras de conocimiento, activos en los niños. Utilizando los protocolos de actividad de aprendizaje para un estudio a gran escala sobre discusiones matemáticas, Piere (1988) mostró que la construcción del conocimiento y entendimiento de la división de fracciones, en dos niños de 11 años, no fue bien caracterizada en los tipos de entendimiento de investigaciones previas. Ella observó el entendimiento como un proceso dinámico completo y no como una adquisición simple o combinación lineal de tales tipos de adquisición o de conocimiento (Kieren, 1993).

Ese trabajo de Piere (1988) y el modelo E, I, TS y AD los lleva a colaborar en un modelo de entendimiento como un proceso dinámico, no lineal, que se considera parte de una teoría recursiva de entendimiento matemático (Pirie y Kieren, 1991). Esta teoría responde a la descripción constructivista del entendimiento como un proceso (Glaserfeld, 1987). Este se simula por el trabajo de los filósofos del sistema Maturana y Varela (1987), quienes vieron a las personas como seres autoreferenciantes, capaces a partir del lenguaje de hacer distinciones de su propio comportamiento y de sus propias interacciones con el medio ambiente y con otros. El conocimiento, para ellos, se considera como la habilidad para tomar

acción efectiva y el conocimiento crece recursivamente, usando distinciones hechas en conocimientos previos.

Tomm (1989) concibió el conocimiento y el crecimiento del mismo ubicados en la interacción mutua, tal como con un colega estudiante o profesor. Esto supone niveles desde la acción a la acción lingüística, al lenguaje y pensamiento autoconsciente y más allá.

Actividad o conocimiento primitivo - creación de imágenes - retención de imágenes - detección de propiedades - formalización - observación - estructuración - invención.

Este modelo tiene la característica recursiva, nivelada, del trabajo de Maturana, Varela y Tomm, pero supone un crecimiento del conocimiento como posiblemente ocurre en la interacción con uno mismo y a través de la observación del conocimiento personal, como así también del conocimiento de otros. Este modelo y la teoría del entendimiento matemático como un todo recursivo trascendentalmente dinámico, no lineal, utiliza la idea de recursión en varios sentidos.

Con Vitale (1989), vemos la recursión como una via de apreciación al fenómeno que involucra el que una cosa contenga otra, auto- similaridad, y escalamiento de nivel, El entendimiento matemático también se ve como recursivo en lo que involucra el uso de la misma secuencia de procesos, pero a un nuevo nivel, con nuevos elementos de acción.
El entendimiento matemático es un proceso dinámico que involucra retroalimentación de uno mismo para el crecimiento, extensión y re-creación.
El entendimiento de ese modelo se representa teniendo incorporados ocho “niveles” de conocimiento o acción efectiva.

1. Núcleo de la acción **actividad primitiva**, en el sentido que corresponde a lo que se asume una persona puede hacer como base o punto de partida del desarrollo de un entendimiento matemático particular. Se puede observar el repartir, o el dividir

equitativamente, como la base de actividad primitiva para comprender fracciones como hiciera Mack (1990).

2. **Creación de imágenes** esto indica trabajo en varios problemas de “repartir” y en el hacer registro de tales acciones, usando lenguaje fraccional de una manera que esté cercanamente atada a los resultados.

3. **Retención de imágenes** supone una recursión en las actividades de creación de imágenes y en la percepción de algunos patrones locales en estos. Ejemplo: “Oh, puedo usar diferentes divisiones y fracciones para mostrar la misma cantidad; las fracciones nos dicen acerca de dividir cantidades” (Kieren, 1993). Requiere una respuesta lingüística hacia otras personas, la retención de imágenes hace posible la división de un objeto mental en un niño, es una idea que tiene más que simplemente la acción de respuesta a lo que se le pide.

4. **Detección de propiedades**, es una recursión de los primeros tres niveles. Un niño puede notar que puede generar una cadena de fracciones equivalentes a una fracción dada. Puede ser capaz de discutir fracciones que ya no puede “ver” en un sentido físico (357/4 horas son 89 ¼ horas).

5. **Formalización**, el niño entra en pensamiento autoconsciente, viendo las cosas en términos de “para todos los números fraccionales”, y sabe que a/b puede ser cualquier número fraccional donde b ≠ 0.

6. **Observación**, tal como “no hay un número fraccional que sea el menos positivo”. Esto contrastaría con una actividad de detección de propiedades, “puedo hacer una fracción más pequeña al hacer su denominador más grande”.

7. **Estructurar** las observaciones de un mismo nivel previo en términos de un conjunto sistemático de asunciones. La suma de fracciones no es una acción de combinar cantidades, o una propiedad de equivalencia, ni siquiera una observación que relacione numeradores y denominadores en general. Es una consecuencia lógica de las propiedades de campo y de la naturaleza de equivalencia formal.

8. **Invención**, supondría el alterar la forma completa en que se piensa acerca de un tema sin destruir la estructura y entendimiento del viejo sistema (Kieren, 1993).

Los niveles recién mencionados son el conocimiento organizado por el entendimiento. Las recursiones propiamente dichas utilizadas en formar el nivel exterior constituyen partes de ese entendimiento. En otras palabras, el nivel más externo no solo aparece y luego se asocia a los demás. Vemos a cada uno de los seis niveles entre la actividad y la inventiva como siendo formados por 6 pares de acciones complementarias, una de las cuales tiene un carácter de proceso, y las demás carácter de forma. Esto permite al niño notar la propiedad de que se pueden crear fracciones equivalentes a una fracción dada, al multiplicar numerador y denominador por el mismo factor. El niño registra cada par a medida que se crean por lo menos mentalmente.

Así, la detección de propiedades, como todos los otros tipos de conocimiento, involucra críticamente tanto al proceso como al registro, o una forma. Estos indican “no necesitar” fronteras; así es, una persona con una imagen de lo que son los números fraccionales no necesita que se le indiquen ejemplos específicos o preguntas para discutirlos. Una persona con una imagen no necesita acción. Similarmente, una persona con un conocimiento formal de fracciones no requiere de ejemplos numéricos específicos para convencerse así misma acerca de una observación formal. Una persona que funciona a nivel estructural puede hacer comentarios sobre propiedades enteramente a un nivel lógico meta- matemático. No necesita el significado que proveen los niveles de conocimiento más internos. El entender fracciones como imágenes, formalización, o estructura, permite a uno funcionar como si no se supiera de todas las experiencias de las cuales aquel nuevo nivel de funcionamiento creció. El poder

de las matemáticas consiste en que nos permite separar los actos de conocimiento a nivel más externo de un nivel interno de conocimiento más intuitivo.

Hay una cualidad complementaria crítica del entendimiento matemático. Al conocer con entendimiento, las personas que aprenden “se retroalimentan” con los niveles más internos de conocimiento

Por ejemplo, al observar que no hay un racional menos positivo, una persona puede retroalimentarse con la imagen de la propiedad de “tomar la mitad” o multiplicar por una mitad, de manera de construir el conocimiento del nivel externo. Esta actividad a nivel interno no es la misma que la actividad original inicial a nivel interno. Es la actividad con una intención generada por el conocimiento a nivel externo.

El conocimiento a nivel externo o los intentos de construcción de conocimiento a este nivel, puede forzar el extenderse y el elaborar un conocimiento más intuitivo. En el caso discutido previamente, un niño podía generar resultados simbólicos o de partir físicamente por la mitad, no como acciones en sí, sino como propiedades a nivel interno para conocimiento a nivel externo.

El asunto de la validez de este modelo como parte de una teoría de entendimiento de números racionales y fraccionales se examina brevemente al considerar su uso, ¿cómo puede este modelo y su teoría brindar una percepción de la observación del desempeño?

El modelo recursivo de entendimiento matemático también nos invita a reflejar en el patrocinio de planes de estudio el crecimiento de un conocimiento matemático personal sobre las diversas subconstrucciones de números racionales. Mack (1990), sugirió que se puede desarrollar “una rama de números racionales basados en el repartir, y entonces... expandir esa concepción a otras ramas, una vez que los estudiantes puedan relacionar los símbolos y procedimientos matemáticos con su conocimiento informal, y puedan reflejar relaciones”. En términos del modelo recursivo, esto sugiere que se pueden construir planes de estudios

posteriores utilizando lo que hemos llamado conocimiento de detección de propiedades, sino utilizando conocimiento formal basado en los racionales como cocientes.

2.3 Relevancia del modelo de entendimiento matemático recursivo en la investigación y diseño de la secuencia didáctica

Primero, se ha argumentado que como resultado de ver las matemáticas como una actividad humana se puede concluir que el pensamiento, conocimiento, y entendimiento de números racionales, a pesar que se relacionan con todo el conocimiento numérico, son distintos de estos e independiente de los mismos. Es mejor ver tales formas de conocimiento numérico como entrelazadas.

El autor argumenta que se necesita una variedad de experiencias con diversas interpretaciones de los números racionales. Por lo que propone siete interpretaciones que sirven como base para el análisis de números racionales, Kieren (1976).

Dentro de los distintos modelos de comprensión matemática mencionados en este capítulo el modelo recursivo de entendimiento matemático de Susan Pirie y Thomas Kieren considera los elementos cognitivos, las estructuras mentales o esquemas mentales involucrados en el aprendizaje de los números fraccionarios; elementos epistemológicos, las propiedades de los números fraccionarios y racionales, como se construyen, y sus aplicaciones; y didácticos, como guiar la instrucción guiada a partir de considerar estos aspectos, tomando en cuenta los errores y habilidades de los estudiantes en el aprendizaje de las fracciones en el diseño e implementación de la secuencia didáctica a partir de identificar el nivel de comprensión matemática en que se encuentran los alumnos de grupo y considera la evolución de su comprensión matemática en la medida que avanzan en aprendizaje de los números fraccionarios.

2.4 La relevancia de las fracciones en la educación escolar

Al comprender y trabajar con fracciones, los estudiantes desarrollan habilidades matemáticas clave, como la capacidad de comparar magnitudes, realizar operaciones aritméticas, entender proporciones y trabajar con números racionales. Además, las fracciones son esenciales en situaciones cotidianas como cocinar medir dividir objetos en partes iguales entre otros En el contexto educativo, dominar el concepto de fracciones es crucial para avanzar en el aprendizaje matemático y prepararse para conceptos más avanzados, como los números racionales. Las fracciones son la base para comprender operaciones matemáticas más complejas y son fundamentales en el desarrollo de habilidades matemáticas sólidas.

Por lo que el modelo recursivo de entendimiento matemático de Kieren nos permite:

1. Considerar el conocimiento de los números racionales en la toma de decisiones del profesor para diseñar estrategias de enseñanza efectivas .

2. Utilizar el conocimiento de las propiedades formales de los números racionales en la creación de modelos educativos para facilitar el aprendizaje significativo de las matemáticas

3. Y promover un enfoque activo informal para generar experiencias con los diferentes constructos de los números racionales(medida, operador, razón y cociente) conectando el conocimiento informal con el trabajo simbólico de los conceptos.

Capítulo III

Metodología

El capítulo Metodología, se inicia con el tipo de estudio, seguido del diseño metodológico, los participantes del estudio y sus características. Posteriormente, se mencionan las etapas del estudio, descripción, aplicación y la propuesta de análisis de los datos. Finalmente, se presentan los resultados del estudio piloto y las implicaciones para el estudio principal.

3.1 Corte del estudio: mixto

El estudio mixto se caracteriza por usar datos cuantitativos y cualitativos, combinar ambos permite hacer un análisis más amplio y profundo. El estudio cuantitativo permite identificar las tendencias y el estudio cualitativo profundiza en sus causas.

De acuerdo a Hernández-Sampieri, Fernández y Baptista (2014), los métodos mixtos expresan una agrupación de procesos sistemáticos, empíricos y críticos de investigación e involucran la recolección y el análisis de datos cuantitativos y cualitativos, además de su integración y discusión conjunta para hacer inferencias resultado de la información recolectada y obtener una mejor comprensión del fenómeno que se estudia.

De acuerdo a los referidos autores, una de las ventajas del método mixto es que este enfoque aprovecha la naturaleza complementaria de las aproximaciones cuantitativas y cualitativas. Por lo tanto, los métodos mixtos caracterizan a los objetos de estudio mediante números y lenguaje e intentan recopilar una amplia gama de evidencia para reforzar y ampliar nuestra comprensión de ellos. La triangulación, la expansión o ampliación, la profundización y el incremento de evidencia mediante la utilización de diferentes enfoques metodológicos nos dan mayor seguridad y certeza sobre las conclusiones científicas.

Entonces, se exploran distintos niveles del problema de estudio mientras que la evaluación de las dificultades en las indagaciones a lo largo del proceso de investigación también es más extensa. Según Creswell “ los métodos mixtos logran obtener una mayor variedad de perspectivas del fenómeno: frecuencia, amplitud y magnitud (cuantitativa), así como

profundidad y complejidad (cualitativa); generalización (cuantitativa) y comprensión (cualitativa)" (citado en Hernández-Sampieri et al. 2014, p. 537).

A través de la multiplicidad de observaciones se enriquecen los datos, por ejemplo, en este estudio, para la identificación y análisis de las estrategias de resolución de problemas empleadas por los alumnos en el cuestionario inicial de fracciones, contar con los resultados de cada pregunta conforme al tipo de error (análisis cuantitativo) aunado a la respuesta dada en la entrevista sobre su forma de resolver cada pregunta (análisis cualitativo) permitió obtener mayor información en la descripción para inferir con más solidez una clasificación para las estrategias de resolución, que si sólo se hubiera empleado un método.

Otra de las razones prácticas que se argumentan para la "coexistencia" de los métodos es que ambos asumen valores comunes: confianza en la indagación sistemática, la realidad es múltiple y construida, la posibilidad de cometer errores y la premisa de que la teoría está definida por los hechos. Se determina usar un método mixto porque agrega un valor al estudio al abarcar más de un sólo enfoque, cuantitativo o cualitativo, pues, al integrar ambos se profundiza y amplía el análisis.

De acuerdo a los referidos autores, argumentan que dentro de los factores que influyen para elegir la metodología es usar el método que armoniza o se adapta más al planteamiento del problema, por ejemplo, los problemas donde se desea establecer tendencias, un diseño cuantitativo es más adecuado. Por otra parte, los problemas que requieren ser explorados para conseguir un vasto entendimiento precisan un diseño cualitativo. Sin embargo, cuando el problema es complejo, se opta por un método mixto.

En este caso, debido a la complejidad que encierra la enseñanza de las fracciones al involucrar varias significaciones y representaciones, se llevó a cabo un análisis cuantitativo para identificar el conocimiento de las ideas matemáticas sobre los números fraccionarios, con el propósito de identificar dificultades y habilidades en dichas ideas matemáticas. Por otro lado, se realizó un análisis clínico sobre las entrevistas.

Sobre el proceso en un estudio mixto, el planteamiento del problema sugiere la formulación de objetivos y preguntas cuantitativas y cualitativas y se escriben preguntas para cada etapa de la investigación. Hernandez-Sampieri, Fernández y Baptista, plantean que de forma explícita o implícita, desde el planteamiento deben combinarse las aproximaciones cuantitativas y cualitativas (Hernández-Sampieri et al. 2014).

3.1.1 Diseño del estudio: Secuencial

Los estudios secuenciales se distinguen por recolectar y analizar en un primer momento datos cuantitativos o cualitativos y posteriormente recabar y analizar los datos del otro método. De esta forma, la información recabada y analizada durante el primer momento es utilizada para dar razón al segundo momento.

En cuanto al diseño de este estudio secuencial, se caracteriza por una fase inicial donde se recaban datos cuantitativos y a continuación se recogen y analizan datos cualitativos. La unión entre ambos métodos se da cuando los resultados cuantitativos iniciales indican a la recolección de los datos cualitativos, es decir, cuando la segunda fase se establece sobre los resultados de la primera. Por último, los resultados de las 2 fases se conforman en la interpretación y elaboración del reporte del estudio.

Por ejemplo, en el presente estudio, con base en el resultado del cuestionario inicial (análisis cuantitativo) se eligieron a los seis estudiantes de los tres niveles: básico intermedio y avanzado para realizar las entrevistas (análisis cualitativo) y, a partir del análisis de ambos métodos se elaboró la secuencia didáctica. Así como en los estudios secuenciales, inicialmente se usó un método cuantitativo que dio paso a uno cualitativo y posteriormente el análisis de ambos generó una secuencia de actividades.

3.2 Participantes del estudio

Participaron del estudio 24 alumnos de 6° de primaria de los cuales dieciséis son niñas y ocho son niños de una escuela primaria pública del turno vespertino, ubicada al sur de la Ciudad de México, en la zona media del Ajusco, en la colonia Pedregal de San Nicolás, alcaldía de

Tlalpan. La escuela se encuentra en la colonia Pedregal de San Nicolás, población que tiene el 60% de la matrícula, el resto de los y las alumnas acuden de las colonias cercanas como Bosques Pedregal, López Portillo, 2 de Octubre, Belvedere para las cuales no hay rutas de transporte por lo que tienen que caminar o solicitar el servicio de transporte privado que brindan algunas personas en camionetas viejas.

3.2.1 Características de la población

La población de la escuela se caracteriza por ser de nivel socioeconómico bajo, la mayoría de las familias tiene más de dos hijos. A pesar de los apoyos federales que se otorgan a los niños mensualmente, no cuentan con los recursos suficientes para adquirir dispositivos tecnológicos y cubrir los gastos de Internet. Su asistencia es irregular sobre todo en aquellos alumnos que presentan mayores dificultades.

3. 3 Etapas del estudio

El estudio se organizó en tres etapas donde se aplicaron los instrumentos correspondientes en cada una. A continuación se describe cada etapa:

3.3.1 Primera etapa

Diseño y aplicación de los instrumentos de investigación

El objetivo del cuestionario inicial era identificar las dificultades y las habilidades de los estudiantes con los números fraccionarios mediante el cuestionario inicial de fracciones seguido de entrevistas clínicas piagetianas.

3.3.1.1 Cuestionario inicial de fracciones

Inicialmente se hizo una revisión de diferentes estudios, tesis de licenciatura y maestría sobre los números fraccionarios y de sus instrumentos de investigación. Se analizaron las ideas matemáticas de los instrumentos aplicados y el propósito de las preguntas. A partir de esa

exploración y del orden de complejidad en los números fraccionarios. Se elaboró el cuestionario inicial de fracciones partiendo de las ideas básicas a las más difíciles de tratar a nivel primaria con el objetivo de hallar las dificultades y habilidades que presentaban los estudiantes de sexto grado de primaria con este contenido escolar. Por lo tanto, en esta primera etapa, trabajamos en el nivel I y II del modelo de Kieren.

Se diseñó y aplicó, el cuestionario de fracciones en dos fases debido al número total de preguntas del cuestionario y tomando en cuenta la mejor disposición de los niños para terminar el cuestionario.

Aplicación del cuestionario inicial

Para su diseño, como se mencionó anteriormente, se hizo una revisión de artículos, estudios y tesis relativos al concepto de fracción y, además, se basó en un cuestionario piloto aplicado a niños de sexto grado.

Se plantearon 30 preguntas que fueron organizadas en dos fases para no cansar a los niños y optimizar la obtención de las respuestas. Se abarcó variedad en las ideas matemáticas sobre los números fraccionarios con el propósito de tratar la mayor cantidad de los temas que se proponen a partir de tercero de primaria en el Programa de estudio 2011 de la asignatura de matemáticas. Las preguntas formuladas se hicieron a partir de lo que los autores señalan sobre las ideas relacionadas con el concepto de fracción. Tuvo una duración aproximada de 90 minutos.

Tabla 1. Cuestionario inicial fase I por ideas matemáticas

No. de pregunta	Idea matemática	Solicitud de la pregunta
1.	Idea de mitad en un todo continuo	Se solicita que el estudiante identifique en un conjunto de figuras la idea de mitad.
2	Idea de entero	Se solicita encierre las figuras cuya parte sombreada representa un entero.
3	Representación gráfica de fracciones propias e impropias	Escribir la fracción que corresponda al dibujo de la figura sombreada dada.
4	Representación gráfica de fracciones propias e impropias en cantidad continua	Se solicita representar la fracciones propias e impropias en cantidad continua.
5	Representación de la Fracción en la recta numérica	Se solicita ubique en la recta numérica las fracciones dadas ¾, 7/4, 3/2 y 1 entero.
6	Representación de fracciones impropias en la recta numérica	Se solicita ubique en la recta numérica las fracciones dadas 1 ¼, 2 1/3, 1 3/6 y 2 3/4
7	Representación de la fracción en la recta numérica	Se solicita representar las fracciones dadas 1/3, ¼, 6/8 y ⅕ en la recta numérica
8	Representación de la fracción en la recta no numérica a partir de representaciones gráficas.	Se solicita representar en la recta las dos fracciones.
9	Representación de la fracción escrita y en la recta a partir de representaciones gráficas.	Se solicita representar en la recta las tres fracciones representadas gráficamente 3/6, 2/3 y 1 2/4
10	Representación gráfica en cantidades discretas	Se solicita representar la fracción en cantidad discreta.
11	Idea de proporcionalidad	Se solicita determinar la cantidad de litros para preparar una sopa para un número determinado de personas. En seguida, se

		pide llenar una tabla de valores y responder dos preguntas.
12	Idea de proporcionalidad	Se solicita transforme la información de la tabla a una gráfica y responda dos preguntas.
13	Suma y resta de fracciones con representación gráfica	Se solicita realizar las operaciones con fracciones
14	Representación gráfica de fracción continua discretizada. figura 1	Se solicita representar la fracción en cantidad continua discretizada.
15	Representación gráfica de fracción continua discretizada. figura 2	Se solicita representar la fracción en cantidad continua discretizada.
16	Representación gráfica de la parte y el todo continuo discretizado. figuras 4, 5 y 6	Se solicita representar la fracción en cantidad continua discretizada.

Aplicación del segundo cuestionario inicial de fracciones

Se diseñó como continuación del primer cuestionario de fracciones donde se exploraron ideas matemáticas de mayor dificultad y complejidad. Se aplicó igualmente a los veinticuatro alumnos del grupo de 6°. y tuvo una duración aproximada de 50 minutos.

Tabla 2. *Cuestionario inicial fase II por ideas matemáticas*

Número de pregunta	Idea matemática	Solicitud de la pregunta
1	Suma de fracciones propias	Se solicita sume las fracciones ¾ + ½ +⅛
2	Suma de fracciones impropias	Se solicita sume las fracciones 1 ¼ +½ + 5 1/4

3	Suma de fracciones impropias	Se solicita sume las fracciones 1 ¾ +11/2 +1 1/4
4	Suma y resta de fracciones impropia	Se solicita sume las fracciones 1 ⅔ + 2 ⅙ +1 ½ y el resultado lo restan a 18 ¾
5	Proporcionalidad aritmética	Se solicita se llene una tabla de proporcionalidad de relación ¼ por cada 15
6	Proporcionalidad aritmética	Se solicita se llene una gráfica de barras con los resultado obtenidos de la tabla anterior
7	División cuotitiva	Se solicita reparta 120 alumnos entre autobuses con 40 asientos cada uno.
8	División partitiva	Se solicita reparta 200 alumnos en 5 autobuses
9	Cociente	Se solicita repartir 15 bombones entre cuatro niños sin que sobre nada
10	Razón	Se solicita escoger la razón que más conviene entre 1 por cada cuatro y 2 por cada cinco.
11	Porcentaje	Se solicita escoger el descuento que más conviene el 20 % de 450 o el 50% de 700
12	Decimal	Se solicita completar una tabla donde debe expresar la división de un segmento en número fraccionario y su equivalencia en decimal
13	Proporcionalidad aritmética	Se solicita que a partir de observar la parte de una figura complete la unidad
14	Idea de Escala: 1:2 y 1:3	Se le solicita que dibuje el doble y el triple de una casa a partir de una figura dada en una cuadrícula.

En las preguntas expuestas se presentaron figuras y/o imágenes que apoyan los planteamientos hechos para tener la información suficiente para responder.

Para la aplicación del cuestionario se hicieron los trámites correspondientes vía Estructuras ante la Secretaría de Educación Pública para tener acceso al plantel educativo y aplicarlo al grupo de sexto grado.

Antes de iniciar, el aplicador se presentó e hizo la aclaración de que el cuestionario no era una evaluación para los estudiantes, sino que los resultados eran de interés para saber cómo resolvían las actividades; esto con el fin de eliminar tensión y ansiedad en los niños al resolver el cuestionario.

Posteriormente, se leyeron cada una de las preguntas al grupo en cada ocasión (fase I y fase II) y se dieron las orientaciones para resolver con la instrucción específica del aplicador de no usar goma de borrar y que, en caso de una equivocación, señalaran cuál era su respuesta correcta. La duración del cuestionario fase I (anexo 1) fue de 90 minutos aproximadamente y de la fase II (anexo 2), 50 minutos.

3.3.1.2 Entrevistas clínicas piagetianas

La entrevista clínica buscó indagar sobre la manera en que piensan los niños y niñas a partir del cuestionario inicial de números fraccionarios que se les aplicó al inicio del estudio. La entrevista clínica se le puede describir cómo los niños y niñas piensan y actúan frente a una situación problema (Delval 2001 citado en Butto 2013). En este sentido, la intención de la entrevista fue analizar la manera cómo los estudiantes respondieron frente a un cuestionario sobre números fraccionarios, así como también indagar sobre las estrategias de resolución de problemas que los estudiantes utilizan y cómo las representan por medio de los registros escritos.

De acuerdo a los resultados arrojados en el cuestionario inicial de fracciones, se entrevistaron a 6 niños, 2 de cada nivel de logro: inicial, medio y avanzado con el fin de conocer y profundizar sobre las respuestas al cuestionario inicial. La determinación de estos tres niveles fue a partir del número de respuestas correctas del diagnóstico inicial. Para la realización de

las entrevistas clínicas individuales, se solicitó la autorización de la Autoridad Educativa y de los padres de familia, se videograba cada entrevista sin mostrar el rostro de los niños.

Aplicación de las entrevistas clínicas piagetianas

Para la realización de las entrevistas se pidieron permisos adicionales dirigidos a los padres de familia y gestionados por el plantel escolar debido a que se videograbaron, aunque los rostros de los involucrados no figuran en las grabaciones y dichas entrevistas no se divulgaron por ningún medio.

Se aplicó una entrevista clínica piagetiana una semana después de la aplicación del diagnóstico, a los seis alumnos focalizados con la intención de conocer su pensamiento sobre las respuestas dadas en el cuestionario inicial.

Este tipo de entrevistas "permite investigar cómo piensan, perciben, actúan y sienten los niños que tratan de descubrir aquello que está por debajo de la apariencia de su conducta, ya sea en acciones o en palabras" (Delval, 2012, p.69).

El análisis de la entrevista se llevó a cabo explorando el pensamiento de los alumnos tomando en cuenta sus respuestas escritas y las notaciones utilizadas en el cuestionario. Se realizó una exploración de los procesos cognitivos de los alumnos por medio de las estrategias de resolución y de los modos de representación que los niños usan para representar las fracciones. Se les preguntó qué significaban los elementos gráficos utilizados, descubriendo de esta manera su forma de pensar y entender las ideas matemáticas implicadas en el concepto de fracción, haciendo consciente sus "errores" y teniendo la posibilidad de corregir, elemento que marcó una diferencia en la evaluación final donde se notó una evolución del pensamiento de los niños entrevistados. Las entrevistas posibilitaron indagar sobre los aspectos del cuestionario final.

Las entrevistas se videograbaron para su posterior transcripción y análisis.

Las entrevistas duraron entre 40 y 50 minutos.

3.3.1.3 Entrevista semiestructurada a la maestra

Este tipo de entrevista se caracteriza por tener una serie de preguntas iniciales que son comunes para todos los sujetos y que van cambiando según las respuestas que los mismos sujetos proporcionan. Son las respuestas las que guían el curso de la entrevista pero siempre se regresa a los temas establecidos inicialmente. En este caso, se hizo un guión que orientó las preguntas hechas durante la entrevista a la docente titular de sexto grado de primaria.

Los objetivos particulares de la entrevista son: conocer cómo concibe la enseñanza de las fracciones y las dificultades que observa en sus alumnos.

Se indagó en diversas categorías de análisis que son: 1. Datos generales, 2.Formación académica, 3. Experiencia profesional, 4. Práctica docente, 5. Conocimiento de los planes y programas de estudio y libro de texto y 6. Sistema de evaluación.

La entrevista se aplicó a la maestra titular dentro del plantel escolar y tuvo una duración de 50 minutos. La maestra mostró en todo momento disposición para cooperar en el proceso de recopilación de datos tanto de los alumnos como de su entrevista. La entrevista se organizó en 6 diferentes categorías (ver tabla 3).

Tabla 3. *Entrevista a la docente por categorías de análisis*

CATEGORÍAS	PREGUNTAS
Datos de identificación de la profesora	● Nombre ● Edad ● Escuela en que labora ● Años de experiencia docente en esa escuela
Formación académica	● Grado Académico ● Institución académica de procedencia ● Cursos de actualización docente
Experiencia profesional	● Años de experiencia ● Grados en los que ha impartido docencia
Práctica docente	● Cómo enseñar fracciones ● Dificultades de los alumnos en el aprendizaje de los números fraccionarios ¿Me podría dar un ejemplo ● Revisión de planes y/o programas sobre la enseñanza de las

	fracciones ● Recursos y/o materiales para la enseñanza de las fracciones
Conocimiento de los planes y programas de estudio y de libros de texto (Plan de Estudios 2011, Aprendizajes Clave 2017 y Programas Sintéticos de la NEM)	● De acuerdo a su experiencia profesional, ¿Qué desafíos presentan mayor dificultad para su enseñanza? ● De acuerdo al desafío matemático #8 de la página 19 "El equipo de caminata" ¿Cómo lo lleva a cabo? ● ¿Y el desafío 55 de la página 112 "Los jugos"? ¿Cómo lo lleva a cabo? ● ¿Qué contenidos matemáticos del plan y programa de estudios de 2017 trabaja en el aula?
Sistema de Evaluación	● Cómo evalúa a los estudiantes

Antes de iniciar, se hizo la aclaración de que la grabación de la entrevista sería con propósitos de análisis, que la información sería tratada únicamente por el aplicador y sus datos personales no serían divulgados y/o publicados por ningún medio.

Durante la entrevista surgieron preguntas adicionales, necesarias para ahondar y comprender mejor las respuestas dadas por la profesora.

El análisis se hizo de acuerdo a las categorías descritas.

3.3.2 Segunda Etapa

Diseño y aplicación de la secuencia didáctica.

Para el diseño de la segunda etapa del estudio, inicialmente nos apegamos a los pasos realizados en la secuencia propuesta por Coxford y otros (1975, en Butto, 2013), éste pone énfasis en los siguientes puntos de los conceptos de fracción:

1. Unidad

- Identificar el número de unidades.

- Identificar cantidades mayores o menores de la unidad.

2. Partes de una unidad usando materiales concretos:

- Identificar el número de partes de una unidad.

- Identificar partes del mismo tamaño.

- Dividir una unidad en partes iguales.

3. Nombres orales para partes de la unidad:

- Establecer el nombre de las fracciones.

- Usar las fracciones para contestar a ¿cuántos?

- Identificar fracciones iguales a uno.

4. Escribir fracciones para representar partes de la unidad (traslaciones entre las representaciones);

- De forma oral a forma escrita:

- De forma escrita a forma oral.

- De una forma concreta a forma escrita.

- De forma escrita a alguna forma concreta.

5. Representar fracciones con dibujos:

- Transición de objetos a diagramas

- Repetición de los pasos anteriores pero con los diagramas

6. Ampliar la noción de fracción:

- Fracciones mayores que uno

- Números mixtos

- Modelo discreto, utilización de conjuntos

- Comparar fracciones, fracciones equivalentes

Así como de las aportaciones de autores como Llinares y Sánchez sobre las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de las fracciones, que según Kieren pueden estar relacionadas con las ideas del nivel I del modelo propuesto: partición, equivalencia y la formación de la unidad.

El objetivo de la propuesta de actividades hecha para este estudio, siguiendo a Llinares y Sánchez (1997), fue crear un esquema conceptual a partir de situaciones concretas; en este

caso la manipulación de materiales concretos antes de recurrir al algoritmo para que las operaciones no se conviertan en algo sin sentido para los estudiantes.

Según Llinares y Sánchez (1997), debe existir un equilibrio entre el significado de las fracciones en contextos concretos prácticos (situaciones problemáticas) y en situaciones más abstractas-cálculo sin contexto (carácter algebraico) para desarrollar la destreza necesaria de retención de los símbolos y operaciones relativas a las fracciones que los estudiantes deben adquirir.

Sin embargo, dentro de la instrucción escolar la enseñanza de las fracciones se centra en el desarrollo de secuencias que tienden a focalizarse rápidamente en un tratamiento formal y logarítmico del tema (Streefland, 1994, citado en Llinares y Sánchez, 1997), lo que dificulta la comprensión del concepto de fracciones en los niños.

Por otra parte, otros autores como Ellerbruch y Payne (1978, citados en Llinares y Sánchez, 1997), sostienen que se debe usar una interpretación simple (contexto de área, continuo) para introducir a los alumnos al estudio de las fracciones, indicando que la relación parte-todo es la interpretación más natural para los niños, además de ser un buen modelo para proveer de significado la suma de fracciones. Cabe señalar que no debe ser el único contexto de uso, se debe presentar al alumno otras situaciones donde se manejen las diferentes ideas del concepto de fracción.

Por lo tanto, con base en el análisis de los resultados arrojados en la primera etapa se diseñó un programa de actividades apoyado en las ideas matemáticas elementales sobre el concepto de fracción. Siguiendo a Kieren (1983), partición, equivalencia y formación de la unidad. Se trabajó con conceptos básicos para una posterior comprensión de conceptos más complejos de los números fraccionarios: parte-todo, parte-parte, cantidades continuas y discretas y la fracción en la recta numérica con el uso de material concreto para resolver situaciones problemáticas y operaciones.

3.3.2.1 Aplicación de la secuencia de actividades

Se aplicó a todo el grupo en 8 sesiones de 1 hora y media y los niños trabajaron en grupos de 2 y 4. Cada sesión se organizó a partir de la solución de actividades apoyadas con material y hojas de trabajo con el contenido revisado en cada ocasión.

En la primera secuencia de actividades “parte-todo y parte-parte” se utilizó material hecho de fomi organizado en 10 círculos de 20 cm cada uno, correspondientes a diferentes fracciones: entero, medios, tercios, cuartos, quintos, sextos, séptimos, octavos, novenos y décimos. El material lo elaboraron los niños con la ayuda del compás, el transportador, las escuadras, se recuperaron los conocimientos de los ángulos y sus grados como el de la división. Con el uso del material respondieron la hoja de trabajo. Para el manejo del material, primero se identificaron cada una de las fracciones hechas con los círculos y se compararon entre sí, posteriormente los círculos se superponían entre ellos para identificar la equivalencia de fracciones en una cantidad continua y finalmente se trabajó la suma y resta de fracciones sin el uso del algoritmo.

En la segunda secuencia de actividades “cantidades discretas", se utilizaron fichas redondas de plástico de un solo color para apoyar la representación de las cantidades discretas y trabajar diferentes temas y responder la hoja de trabajo. El manejo del material sirvió para identificar fracciones unitarias en cantidades discretas.

En la tercera secuencia de actividades “recta numérica”, se usaron tiras de papel de diferentes tamaños: 1 metro, ½ metro, ¼ de metro y ⅛ de metro, para medir objetos diversos del salón de clases. El material fue elaborado por los niños, con lo que identificaron el entero y las fracciones unitarias trabajadas anteriormente en las secuencias “parte-todo” y “cantidades discretas”. Posteriormente, respondieron la hoja de trabajo. El manejo del material sirvió para ubicar fracciones en la recta numérica y responder las situaciones problemáticas planteadas en la hoja de trabajo.

3.3.3 Tercera etapa

Esta etapa se caracteriza por el diseño y aplicación de un cuestionario final de fracciones.

3.3.3.1 Cuestionario final

En la tercera etapa se diseñó y aplicó un cuestionario final donde se exploraron las ideas matemáticas trabajadas en la secuencia de actividades: idea de entero, idea de mitad, cantidades continuas, cantidades discretas y fracciones en la recta numérica.

Aplicación de cuestionario final

Se elaboró el cuestionario final con el propósito de evaluar la secuencia de actividades propuesta y contrastar los resultados entre el cuestionario inicial y el final para verificar el avance en la comprensión de los números fraccionarios y sus estrategias de resolución. Se diseñó partiendo del cuestionario inicial y la secuencia de actividades, constó de 9 preguntas.

Tabla 4. *Cuestionario final por ideas matemáticas*

No. de pregunta	Idea matemática	Solicitud de la pregunta
1	Idea de mitad en un todo continuo	Se solicita que el estudiante identifique en un conjunto de figuras que son dadas aquellas cuya parte sombreada representa una mitad.
2	Idea de entero, todo continuo	Se solicita encierre las figuras cuya parte sombreada representa un entero.
3	Representación gráfica de fracciones propias e impropias	Escribir la fracción que corresponda al dibujo de la figura sombreada dada.
4.	Representación de la Fracción en la recta numérica	Se solicita ubique en la recta numérica las fracciones dadas ¾, 7/4, 3/2 y 1 entero.

5	Representación de fracciones impropias en la recta numérica	Se solicita representar en la recta numérica las fracciones dadas 1 ¼, 2 1/3, 1 3/6 y 2 3/4
6	Representación de la fracción en la recta	Se solicita representar en la recta las fracciones dadas 1/3, ¼, 6/8 y 1/5
7.	Representación de la fracción en la recta no numérica a partir de representaciones gráficas.	Se solicita *ubique* en la recta las 2 fracciones representadas gráficamente 4/6 y 1 3/4
8	Representación de la fracción escrita y en la recta a partir de representaciones gráficas.	Se solicita *escriba y ubique* en la recta las 3 fracciones representadas gráficamente 3/6, 2/3 y 1 2/4
9	Representación gráfica en cantidades discretas	Se solicita que *observe* los grupos de figuras y *escriba* la fracción que está encerrada. y *encerrar* en un círculo la fracción dada.

3.4 Análisis de los datos

Se mencionan tres niveles de análisis empleados para estudiar la información de la primera y tercera etapa del estudio, mismos que más adelante se ampliarán en su descripción y aplicación. Los tres niveles son:

Primer nivel de análisis: Clasificación en acierto, error y no responde

Segundo nivel de análisis: Clasificación según el tipo de error

Tercer nivel de análisis: Estrategias de resolución de problemas

De esta forma, se pudo establecer el nivel de comprensión sobre el concepto de fracción de cada estudiante, lo que sirvió para focalizar a 6 niños: dos de cada nivel (inicial, medio y avanzado) y aplicar el segundo instrumento.

3.4.1 Primer nivel de análisis

El primer nivel de análisis se refiere a la clasificación de cada respuesta de los cuestionarios inicial y final de cada alumno en: acierto, error y no responde. Se elaboró una tabla para organizar cada pregunta de acuerdo con la idea matemática correspondiente, una imagen de la respuesta del alumno, la clasificación del resultado y las observaciones pertinentes acerca

de cada solución dada. Este primer nivel de análisis ayudó para la posterior identificación de las estrategias de resolución del tercer nivel de análisis.

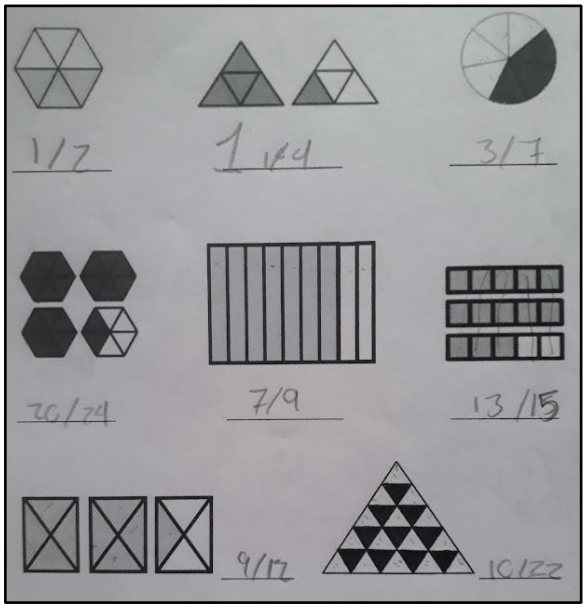
3.4.2 Segundo nivel de análisis

El segundo nivel de análisis hace mención a la clasificación de los errores de cada pregunta (García, 2015) de los cuestionarios inicial y final de todos los alumnos y saber qué tipo de error fue el más común para indagar posteriormente en las posibles causas. Las categorías de análisis de este nivel son 4 (González, 2015):

- Errores por descuido o distracción (1): Aquí se encuentran los errores relativos a la falta de concentración y/o distracción de los alumnos. Estos errores se dan de manera esporádica y aleatoria.
- Errores por desconocimiento de la respuesta (2): Quedan incluidas las respuestas en blanco, sin terminar o resultados hechos al azar. Este tipo de errores se atribuyen a carencias en los conocimientos previos.
- Errores por defectos en la comprensión del concepto (3): En esta categoría se encuentran los errores debidos a fallos en procesos aritméticos o a carencias en los conceptos relacionados con el tema de fracciones.
- Aplicación sistemática de procesos erróneos (4): Se encuentran los errores debidos a que los estudiantes no han comprendido completamente las reglas que deben seguir al momento de operar con fracciones.

A continuación, se muestran ejemplos de cada uno de los tipos de errores cometidos en el cuestionario inicial de fracciones.

Figura 7. *Ejemplo de error por descuido*

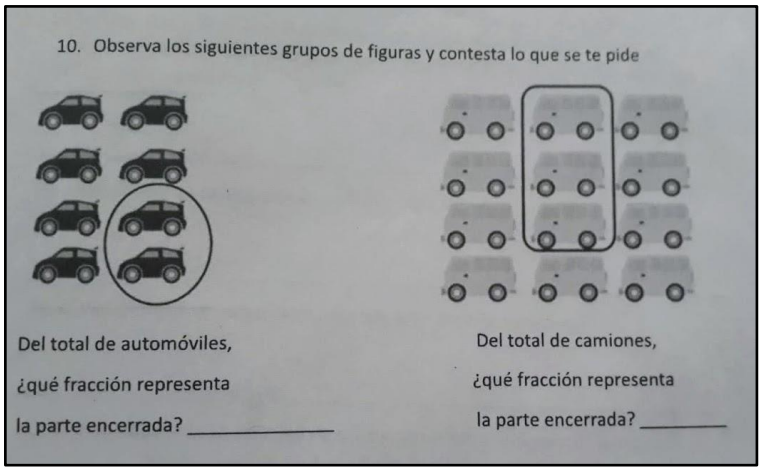


Nota. Cuestionario inicial. Alumno 2. Pregunta 3. Idea matemática: Representación gráfica de fracciones propias e impropias.

Tipo de error señalado: (1) Error por descuido o distracción

El error de la última figura se debió a un mal conteo. En el denominador puso 22 en lugar de 25.

Figura 8. *Ejemplo de error por desconocimiento de la respuesta*



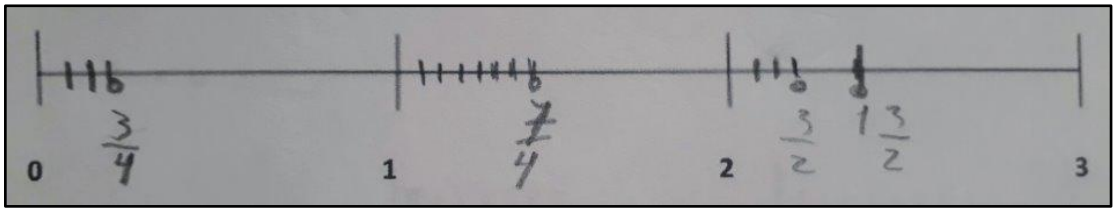
Nota. Cuestionario inicial. Alumno 6. Pregunta 10.

Idea matemática: Representación gráfica en cantidades discretas.

Tipo de errores marcados: (2) Errores por desconocimiento de la respuesta.

No escribió ninguna de las fracciones correspondientes a las cantidades discretas.

Figura 9. *Ejemplo de errores por defectos en la comprensión del concepto*



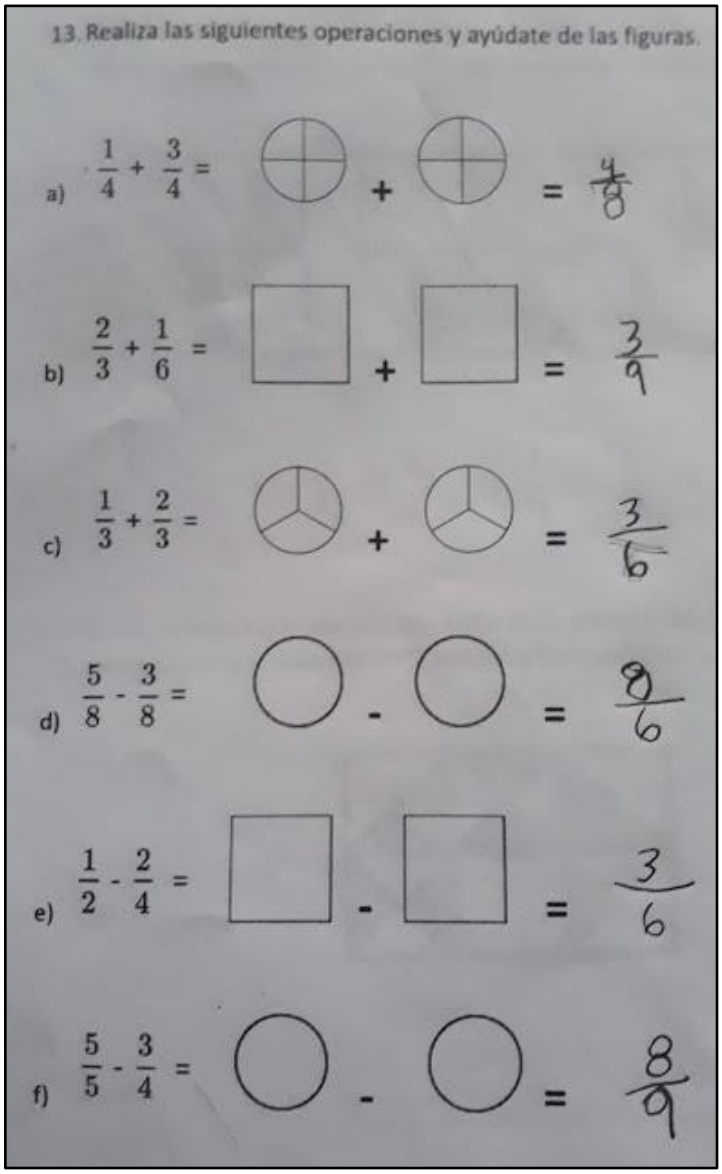
Nota. Cuestionario inicial. Alumno 23. Pregunta 5.

Idea matemática: Representación de la fracción en la recta numérica.

Tipos de errores: (3) Error por defectos en la comprensión del concepto.

Los 4 reactivos de esta pregunta son erróneos, la ubicación equivocada de las fracciones señaladas debido a una falta de distribución equitativa supone una falta de comprensión en la representación de una fracción.

Figura 10. *Ejemplo de aplicación sistemática de procesos erróneos*



Nota: Cuestionario inicial. Alumno 8. Pregunta 13.

Idea matemática: Suma y resta de fracciones con representación gráfica.

Tipo de errores: (4) Aplicación sistemática de procesos erróneos.

En los seis reactivos de la pregunta aplicó la misma estrategia para resolver las operaciones fraccionarias sin tomar en cuenta si era una suma o una resta: valora la fracción como dos números distintos, el numerador y el denominador como números naturales y, posteriormente, los suma.

Lo anterior, también denota Error por defecto en la comprensión del concepto (3) al valorar la fracción como dos números naturales y Error por desconocimiento de la respuesta (2) al dejar

en blanco las figuras para resolver las operaciones. Cabe señalar que se les indicó verbalmente a los niños utilizar las figuras para resolver las sumas de fracciones.

3.4.3 Tercer nivel de análisis

En el tercer nivel de análisis se establecieron las estrategias de resolución empleadas por los estudiantes para resolver cada pregunta. En este proceso se utilizó la tabla hecha durante el primer nivel de análisis así como las entrevistas clínicas aplicadas.

Las estrategias de resolución se determinaron a partir de las nueve preguntas compartidas entre el cuestionario inicial y el cuestionario final de fracciones de los seis alumnos.

Las estrategias de resolución de problemas se describen y analizan en los capítulos de resultados de la primera y tercera etapa que corresponden a la revisión de los cuestionarios respectivos.

3.5 Estudio piloto y sus implicaciones para el estudio principal

El estudio piloto constó de un cuestionario inicial de fracciones que exploró las habilidades y dificultades que tienen los alumnos en la comprensión de los números fraccionarios. Contiene once preguntas que exploraron las ideas matemáticas de: idea de mitad, idea de entero, representación gráfica de fracciones propias e impropias, representación de la fracción en la recta numérica, representación gráfica en cantidades discretas, idea de proporcionalidad, idea de proporcionalidad (tabla), suma y resta de fracciones con representación gráfica y representación gráfica de fracción continua discretizada.

El cuestionario de fracciones piloto se aplicó a 25 alumnos de sexto grado de primaria de una escuela primaria pública ubicada en la alcaldía Tlalpan, al sur de la ciudad de México.

El grupo al que se aplicó el cuestionario piloto es distinto al grupo con que se trabajó el cuestionario inicial, secuencia y final.

Las respuestas del cuestionario inicial de fracciones de todos los alumnos se vaciaron en una tabla que contiene el número del alumno, solicitud de la pregunta, idea matemática asociada, imagen de la respuesta, la respectiva clasificación de la respuesta en: acierto, error y no

contestó, y las observaciones.

De acuerdo a este estudio, las ideas matemáticas que mejor manejan los alumnos son: idea de mitad en un todo continuo, idea de entero todo continuo y representación gráfica de fracciones propias e impropias. Identificaron correctamente las representaciones de mitad en las diferentes figuras canónicas y no canónicas así como la distribución de sombreados, ubican las figuras canónicas y no canónicas que representan un entero y representan gráficamente fracciones propias e impropias buscando la igualdad de las partes en las figuras hechas.

Por otra parte, las ideas matemáticas que presentan mayor dificultad para los alumnos y las posibles razones o causas que las determinan son: la representación de fracciones en la recta numérica, la representación gráfica en cantidades discretas y la representación gráfica de fracción continua discretizada. Sus respuestas muestran que no identifican el entero en la recta numérica, confunden o invierten el numerador con el denominador, y no conciben la unidad en las magnitudes discretas.

El hacer un estudio piloto permitió hacer ajustes en los instrumentos de la primera etapa al observar la resolución por parte de los niños y sus dificultades al hacerlo. Se utilizó para saber si el número de preguntas era suficiente o si era necesario abordar otras ideas matemáticas.

A partir de los resultados encontrados en este estudio, se definió el cuestionario inicial de fracciones del estudio principal añadiendo 19 preguntas para indagar más ideas matemáticas que no se exploraron inicialmente, así como mejorar algunas de las preguntas modificando su contenido e imágenes, así como el acercamiento pedagógico que se debía tener con los alumnos.

En cuanto al análisis de datos, se enriqueció siendo que para el estudio piloto se utilizó únicamente un primer nivel de análisis (acierto, error y no contestó) que sentó las bases para ampliar y profundizar en los resultados del estudio principal, donde el análisis de datos se compone de tres niveles: primer nivel de análisis (acierto, error y no contestó), segundo nivel (clasificación de acuerdo al tipo de error) y tercer nivel (estrategias de resolución). Al hacer las observaciones de las respuestas del cuestionario inicial del estudio piloto (primer nivel de

análisis) se hizo necesario agregar un segundo y tercer nivel para completar y definir las dificultades presentadas por parte de los niños en la resolución del cuestionario inicial de fracciones.

Capítulo IV

Resultados de la primera etapa

El capítulo presenta los resultados obtenidos en la primera etapa del estudio correspondiente al cuestionario inicial de fracciones (fase I y II), las entrevistas clínicas piagetianas realizadas con los estudiantes que participaron del estudio y la entrevista semiestructurada a la docente titular del grupo de sexto grado de primaria. Finalmente, se concluye con los resultados obtenidos.

4.1 Análisis de los datos obtenidos del cuestionario inicial

Para el análisis de los datos, se usaron tres niveles: primer nivel, clasificación en acierto, error y no responde; segundo nivel, clasificación según el tipo de error y tercer nivel, estrategias de resolución de problemas. A continuación se describe cada nivel de análisis de los datos.

4.1.1 Clasificación tipo acierto, error y no responde

En este tipo de análisis nos concentramos en las respuestas acertadas, erróneas y las respuestas a las que los estudiantes no respondieron.

Este primer acercamiento a las respuestas se hizo para determinar con qué ideas matemáticas de las fracciones estaban más familiarizados, identificar sus conocimientos previos, en cuáles tenían errores, cuáles no eran conocidas por ellos y conocer el origen de los errores que se identificó en la siguiente categoría de análisis.

Se cuantificó cada respuesta del cuestionario inicial de fracciones en una tabla que contiene: el alumno, idea matemática, la solicitud de la pregunta, la imagen de la respuesta del alumno, el registro del resultado en: acierto, error y no responde, y la observación correspondiente a su resolución.

Respuesta correcta: esta categoría es aquella donde el estudiante responde de manera acertada a la solicitud de la pregunta y eso refleja su nivel de dominio de las ideas matemáticas abordadas en el instrumento.

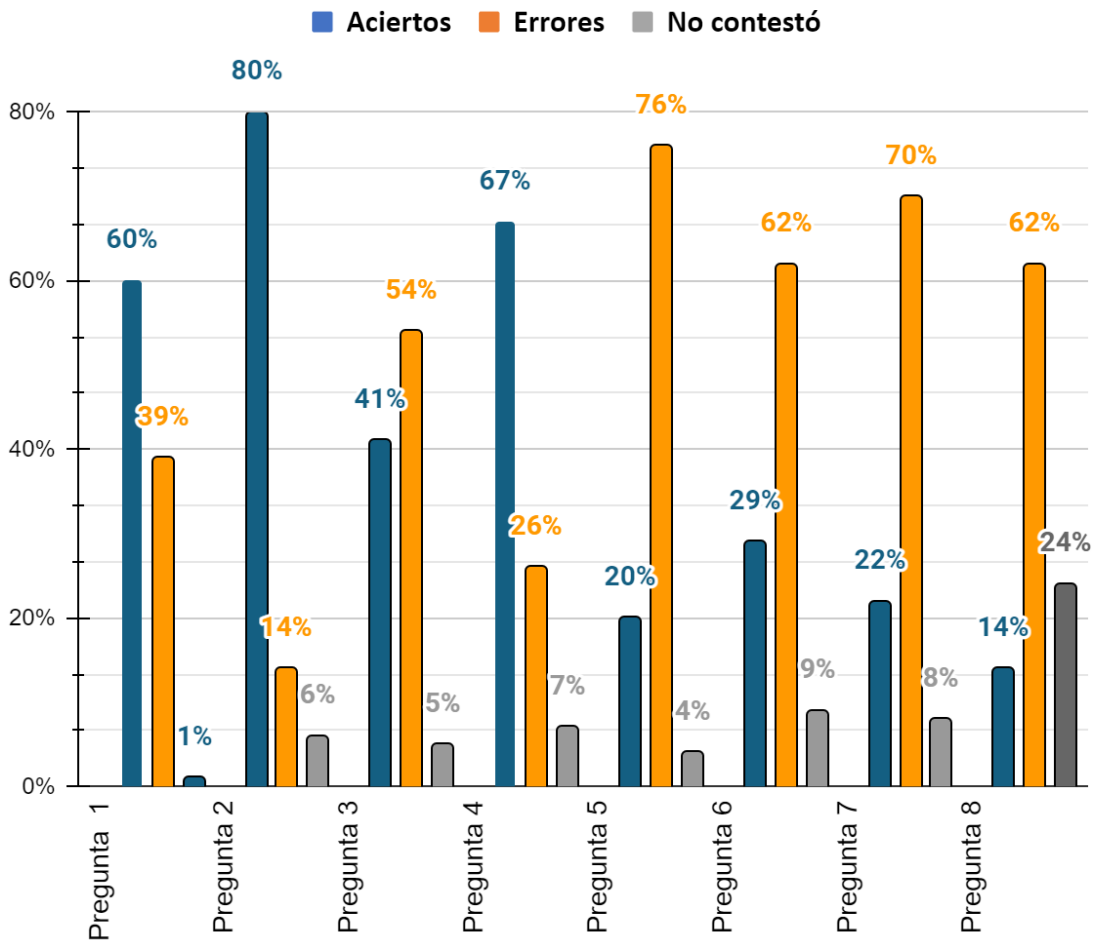
Respuesta incorrecta: esta categoría es aquella donde el estudiante presenta errores de carácter conceptual, procedimental u otro tipo de error, o responde de manera incompleta.

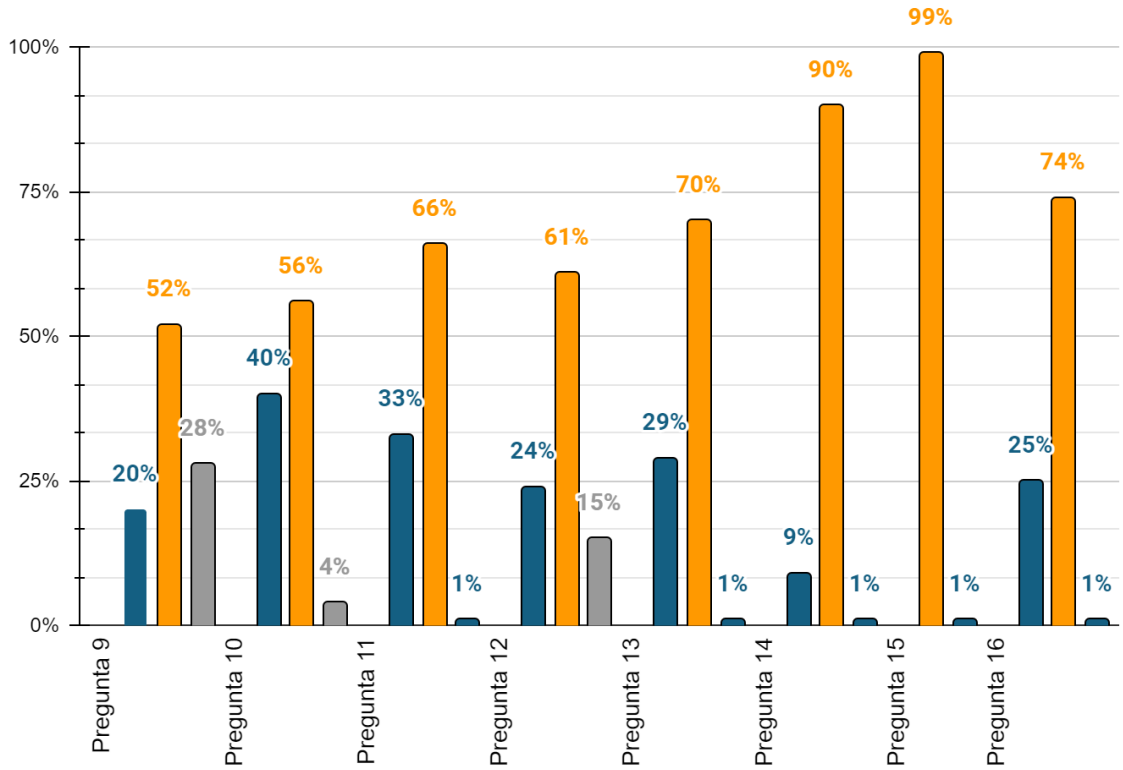
No responde: esta categoría corresponde a una pregunta sin respuesta.

Este tipo de análisis sirvió de referencia para la construcción del segundo y tercer nivel de análisis; tipos de error y estrategias de resolución de problemas.

A continuación se presenta una gráfica que muestra todas las preguntas del cuestionario inicial de fracciones su: acierto, error y no contestó:

Figura 11. *Porcentaje de cada pregunta del cuestionario inicial fase I*





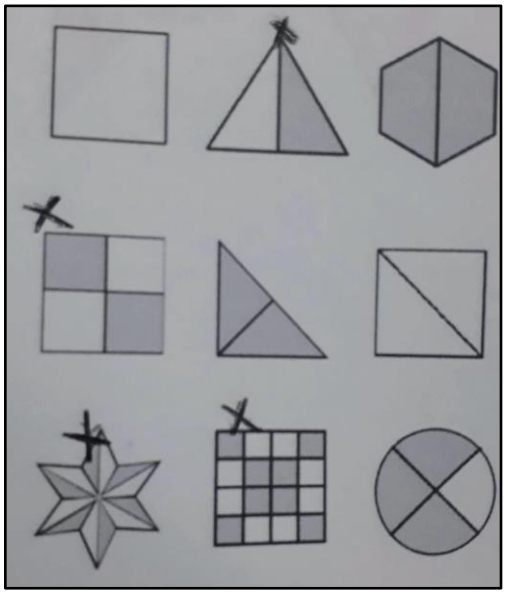
De acuerdo a los resultados obtenidos, se tiene que las preguntas con mayores aciertos son:

- Pregunta 1 con 64%. Idea de mitad en un todo continuo
- Pregunta 2 con 80%. Idea de entero en un todo continuo
- Pregunta 4 con 67%. Idea de representación de la fracción propia e impropia en la recta numérica.

Se atribuyen los aciertos a que la enseñanza de las fracciones en la escuela prevalece el modelo de enseñanza parte todo donde se utiliza la representación gráfica como un recurso visual (círculos, cuadrados) para el manejo de este contenido, que es con el que están más familiarizados (Butto, 2013 y Llinares, 1997).

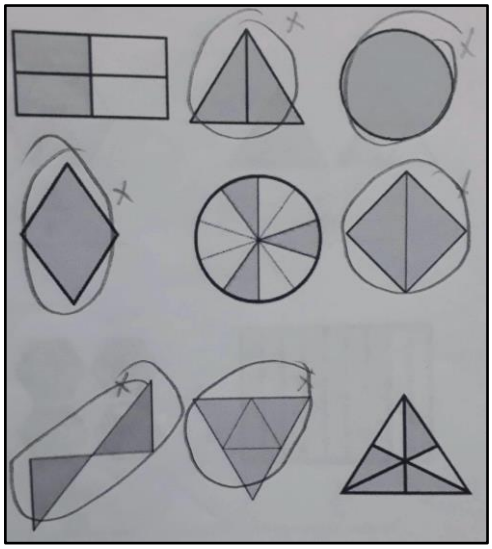
Ejemplos:

Figura 12. *Pregunta 1, mitad en un todo continuo*



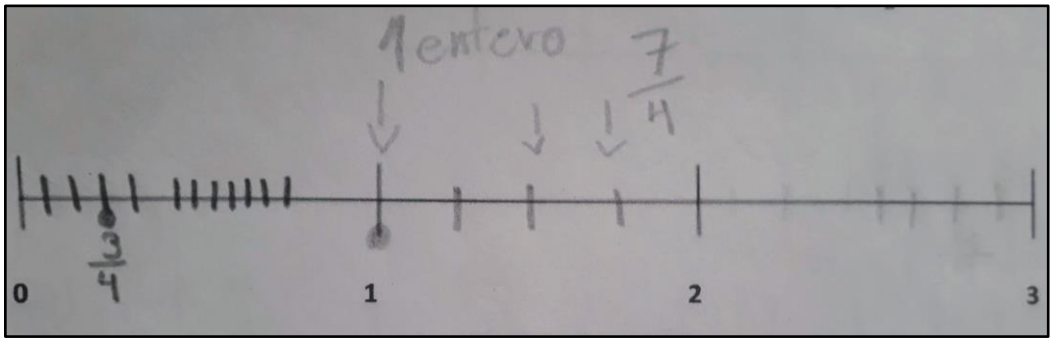
Nota. Alumno 3. Identificó correctamente la mitad de todas las figuras canónicas y no canónicas.

Figura 13. *Pregunta 2, idea de entero en un todo continuo*.



Nota. Alumna 5. Identifica la idea de entero en figuras canónicas y no canónicas así como en enteros divididos en partes.

Figura 14. *Pregunta 4, idea de representación de la fracción propia e impropia en la recta numérica.*

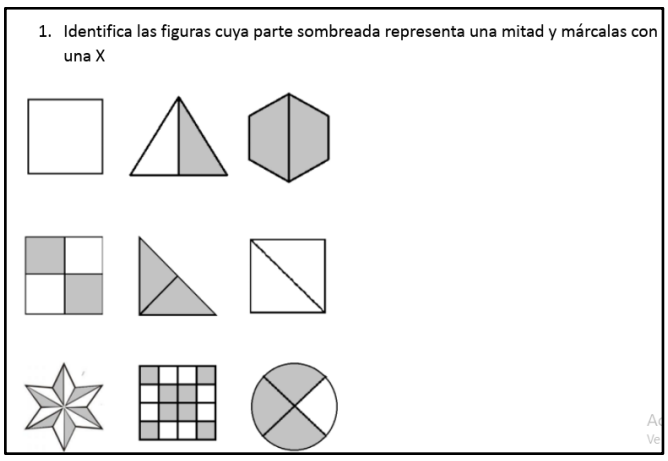


Comentario: Alumna 1. Para la fracción impropia 7/4, la ubicó dividiendo en 4 partes casi iguales entre el 1 y el 2 y señaló la tercera marca. Ubicó el entero correctamente.

Aunque marcó con una flecha la fracción impropia 3/2, omitió señalar que se refería a esta fracción pero la ubicación es correcta. Ubicó ¾ dividiendo en once partes desiguales entre el 0 y el 1 y señaló ¾ en la tercera marca.

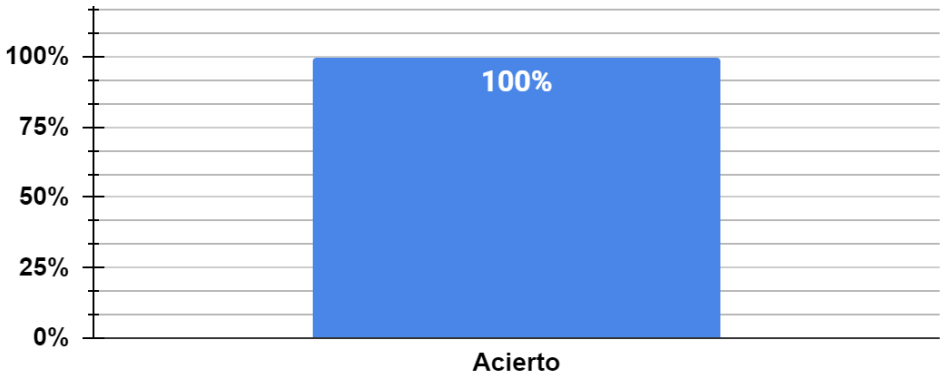
Ahora, respecto a las figuras canónicas y no canónicas de las preguntas analizadas 1 y 2, de la pregunta 1, mitad de un todo continuo, en la que se solicita identificar la mitad entre nueve figuras; seis canónicas y tres no canónicas, donde las figuras que representan la mitad son cuatro; una canónica y tres no canónicas (figura 15), se destacan los siguientes resultados:

Figura 15. *Pregunta 1*, *mitad en un todo continuo*, *con figuras canónicas y no canónicas*



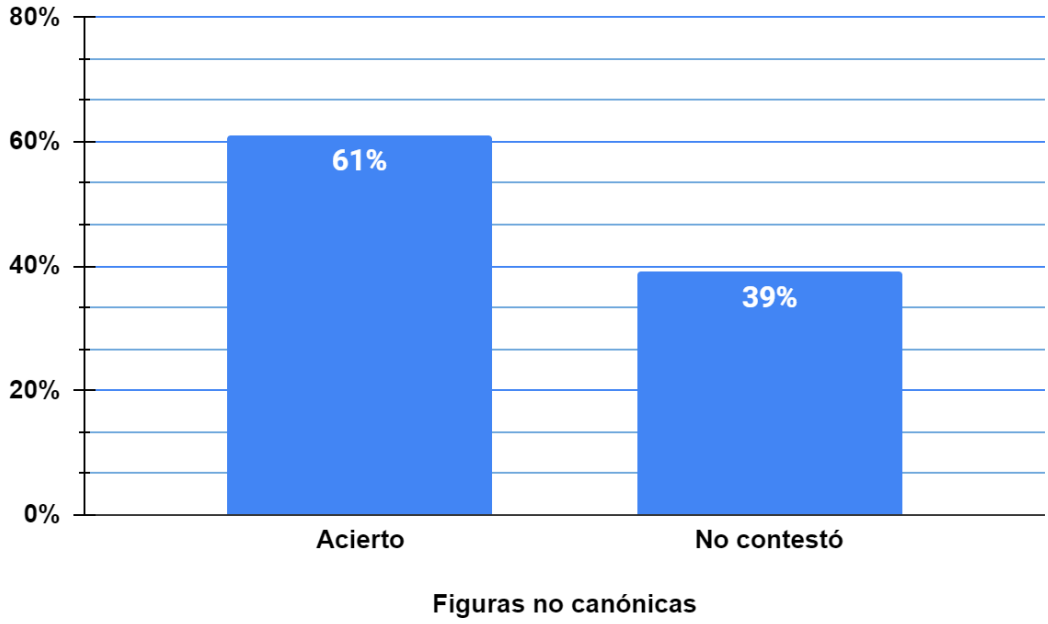
Respecto a la figura canónica que representa la mitad el 100% la identificó.

Figura 16. *Gráfica: idea de mitad en un todo continuo en figura canónica de la pregunta 1*



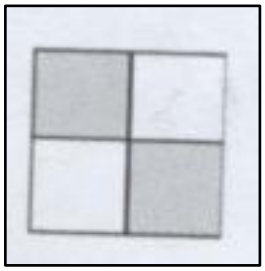
No ocurrió lo mismo con las 3 figuras no canónicas que representan la mitad, donde el 61% logró señalar la mitad en las 3 figuras no canónicas y el 39% de las respuestas en este rubro las dejaron en blanco.

Figura 17. *Gráfica de mitad en un todo continuo en figura no canónica de la pregunta 1*



A continuación, un fragmento de la entrevista clínica hecha a la alumna J referente a la representación de la mitad en figuras canónicas y no canónicas:

Figura 18. *Figura no canónica de la pregunta 1 del cuestionario inicial fase I*



A continuación se describe una parte de la entrevista clínica realizada. En esta parte de la entrevista la alumna expresa cómo representó las fracciones en figuras no canónicas.

E- ¿Qué representa esa?

J- dos cuartos

E- Y ¿qué pasaría si éste (se señala el ¼ sombreado en la parte superior izquierda) lo paso para abajo?

J- Pues se hace un medio

E- Entonces, ¿podría ser un medio?

J- Representaría 2 cuartos porque sigue dividido en cuatro

E- Pero me habías dicho también que podía representar… ¿Qué?

J- Un medio …

E- ¿Crees que ésta representa también un medio?

J- Puede ser

E- Entonces, ¿la consideras como mitad o no?

J- No

Comentario: Al preguntarle por la idea de mitad en una figura no canónica dividida en 4 partes y sombreada 2 de forma alternada, nos dice que no, se insiste en la pregunta al cuestionarle qué pasaría si se recorriera uno de los cuadros sombreados, qué formaría y dice que se formaría un medio y que entonces sí sería una mitad o se formarían dos cuartos.

Sin embargo, en otra parte de la entrevista clínica realizada con la alumna como la figura está dividida en cuatro partes ya no la considera una mitad. Consideramos que esto se debe a que

sólo identifica la mitad en figuras canónicas, cuando la representación de la mitad de la figura es ½ sombreado, si no tiene esa forma canónica no la considera como mitad.

E- ¿Crees que ésta representa también un medio?

J- Puede ser

E- Entonces ¿quieres ponerla como mitad o no?

J- No

E- ¿No? sigues pensando que no es una mitad, y ¿de las otras?

J- Pues, tampoco

E- Tampoco. ¿Ninguno es una mitad? Entonces para que sea una mitad, según lo que tú me estás diciendo y es lo que estoy entendiendo, tiene que estar dividido ¿en cuántas partes una mitad?

J- Pues debe estar dividido en dos

Cuando se le pregunta en cuántas partes debe estar dividida una figura para ser considerada una mitad, responde en dos partes.

No logra identificar la división en una figura no canónica.

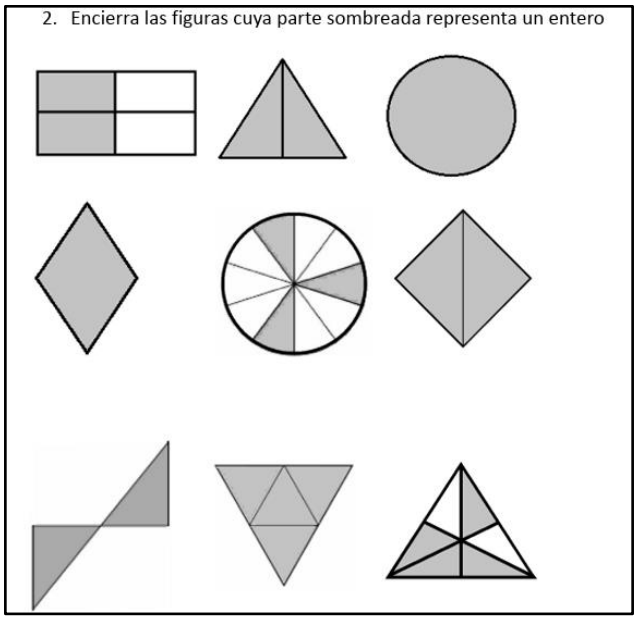
No logra identificar como mitad el cuadrado dividido en 16 partes que tiene 8 sombreadas, tampoco logra identificar como mitad la estrella.

Aquí consideramos importante señalar que dentro de la enseñanza escolar es necesario presentar a los alumnos cuando se aborde la idea de mitad figuras no convencionales, no canónicas en donde la mitad sea expresada de diferentes maneras con 3/6 juntos o separados, con 2/8 juntos o separados, con 4/8 juntos o separados o de otras formas. Lo que implica trabajar con fracciones equivalentes.

Continuando con la pregunta 2, entero en un todo continuo, en la que se solicita identificar el entero entre nueve figuras; ocho canónicas y una no canónica, donde las figuras que

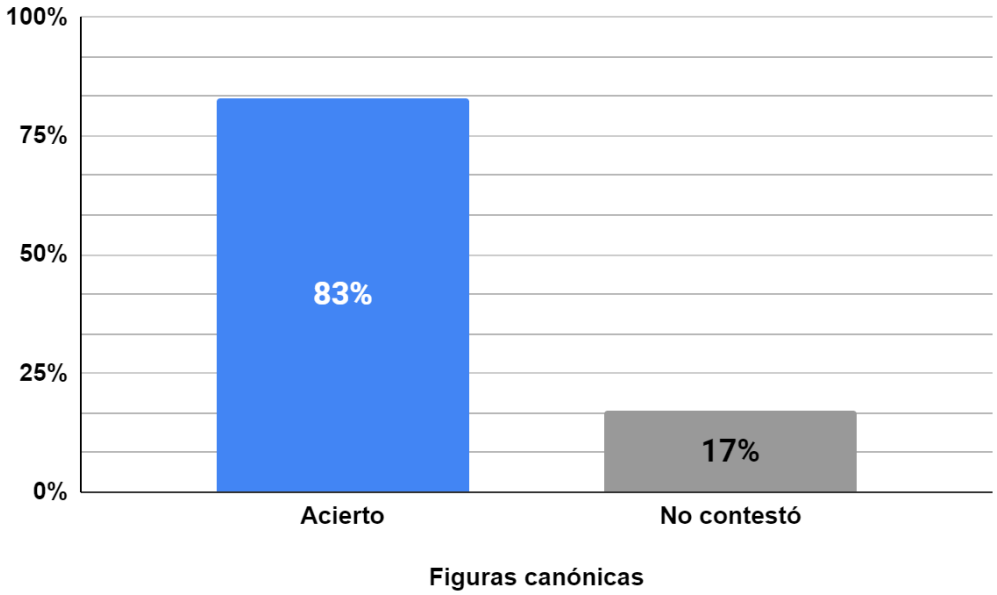
representan el entero son seis; cinco canónicas y una no canónica (figura 19), se destacan los siguientes resultados:

Figura 19. *Pregunta 2 con figuras canónicas y no canónicas*



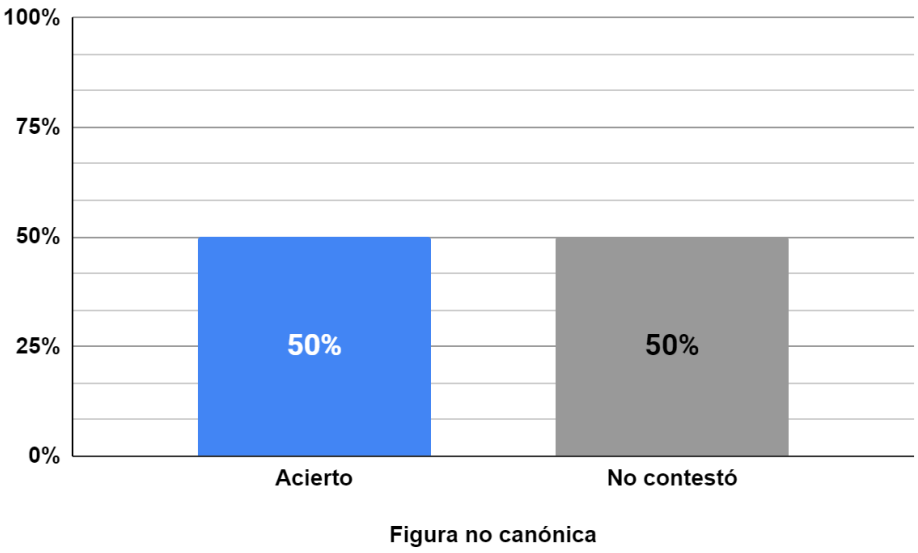
Respecto a las respuestas dadas por los 6 alumnos entrevistados a las cinco figuras canónicas que representan el entero, el 83% se identificaron y el 17% no se señalaron (figura 20).

Figura 20. *Gráfica de entero en un todo continuo en las figuras canónicas de la pregunta 2*



Sobre la figura no canónica, se identificó en un 50% y el otro 50% no contestó (figura 21).

Figura 21. *Gráfica de entero en un todo continuo en la figura no canónica de la pregunta 2*



A continuación, un fragmento de la entrevista clínica hecha a la alumna J referente a la representación de entero en figuras canónicas y no canónicas:

E- ¿Por qué éste sí fue un entero?

J- porque éste es un entero y aparte está sombreado

E- ¿y éste? (el triángulo dividido en dos y sombreado)

J- Este tiene dos

E- ¿no es un entero?

J- Que yo sepa, no

E- ¿Por qué?

J- Por que está dividido en dos

E- ¿Y si está dividido aunque esté sombreado ya no es un entero?

J- No

E- ¿Este sí es un entero? (rombo sombreado sin división)

J- Sí

E- ¿por qué?

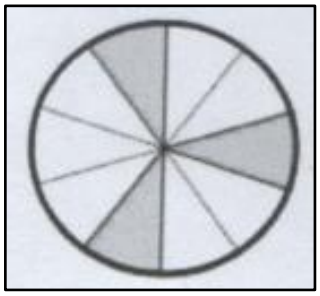
J- Porque no tiene ninguna división y está sombreado

E- ¿éste? (rombo sombreado dividido en dos)

J- no

Sus respuestas son interesantes sobre la concepción de entero. Considera en un principio entero solamente las figuras que están sombreadas pero que no tienen ninguna división y señala el rombo y el círculo, cuando se le pregunta por un triángulo sombreado que tiene una división en dos, nos contesta que ese ya no es un entero, que no lo considera entero porque ya está partido en dos. Entonces ella concibe el entero cuando no está dividido.

Figura 22. *Figura de la pregunta 2 del cuestionario inicial fase I*



E- ¿este?

J- no

E- ¿por qué?

J- está dividido en varias partes

E- ¿y aparte?

J- Aparte tiene las estas blancas, o sea solamente tiene sombreadas tres partes

E- ¿y si estuvieran sombreadas todas, sí sería un entero?

J- No, creo que no

E- ¿Y si fuera una pizza y estuvieran todas las rebanadas aquí? ¿sería una pizza entera o no? No porque ya está dividida ¿ya no es una pizza entera?

J- No pues entonces eso sí

E- Entonces, ¿este sería un entero o no sería un entero?

J- Sí

E- Entonces ¿si quieres encerrar éste, o no?

J- Sí

Comentario: Cuando se le pregunta por un círculo dividido en ocho partes y tiene sombreadas tres y se le pide imaginar que sea una pizza y que si tuviera todas las rebanadas sería un entero o no, reflexiona y contesta que sí sería un entero. Entonces, considera sus respuestas anteriores y empieza a corregir.

Corrige un triángulo que estaba dividido en cuatro partes y totalmente sombreado, lo encierra también como entero, encierra también el rombo dividido en dos partes que está totalmente sombreado.

Cuando se le pregunta por la figura no canónica, donde aparenta ser dos triángulos unidos solamente por la punta dice que ese no es un entero, que si tuviera otra forma sí sería un entero.

Las preguntas con mayores errores:

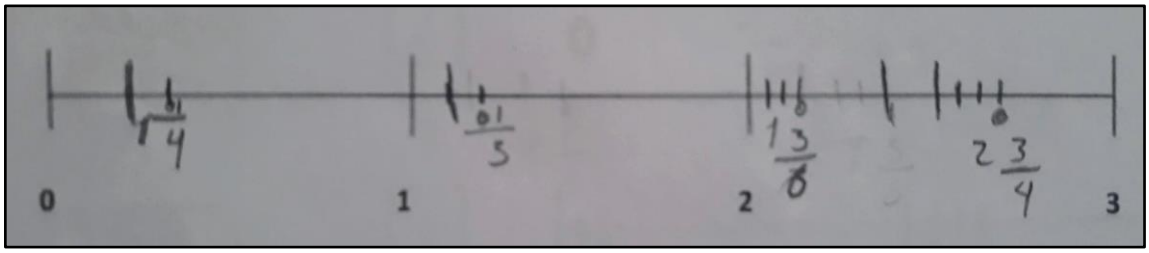
- Pregunta 5 con 76%. Idea de representación de fracciones mixtas en la recta numérica.
- Pregunta 14 con 90%. Idea de representación gráfica de fracción continua discretizada
- Pregunta 15 con 99%. Idea de representación gráfica de fracción continua discretizada

Respecto a los errores en la recta numérica, muy probablemente se deba también al modelo de enseñanza donde la definición a/b que corresponde a un entero dividido en n número de partes (denominador), donde se tienen n número de partes (numerador), no permite la comprensión de las fracciones mayores a la unidad como tomar 5/4 de un entero que fue dividido en cuartos. Además que se pretende que los alumnos lleven esta definición a otros contextos de uso como es la recta numérica en donde su utilización no es clara (Llinares, 1997). Es decir, que a partir de la comprensión de la fracción mediante el modelo parte todo, se pretenda que el niño logre utilizarlo en otros contextos de uso.

Dentro del modelo de enseñanza que prevalece en la institución escolar que es el modelo parte todo se utiliza principalmente la representación gráfica con figuras canónicas por lo que al presentarles figuras no canónicas, no identifican la fracción correspondiente (Pozo, 2009).

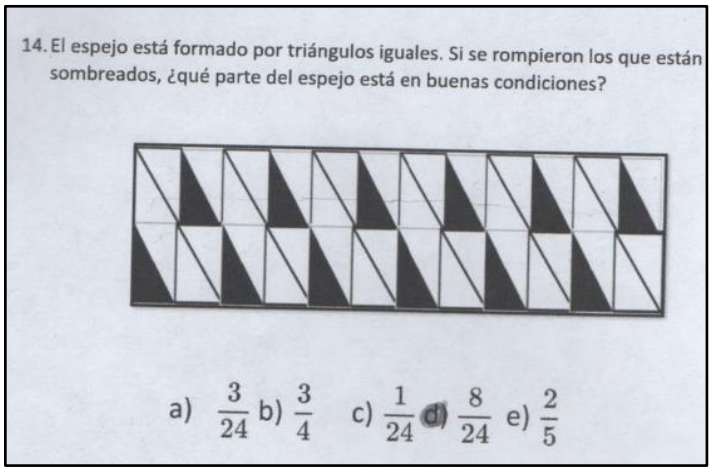
Ejemplos:

Figura 23. *Pregunta 5 idea de representación de fracciones mixtas en la recta numérica.*



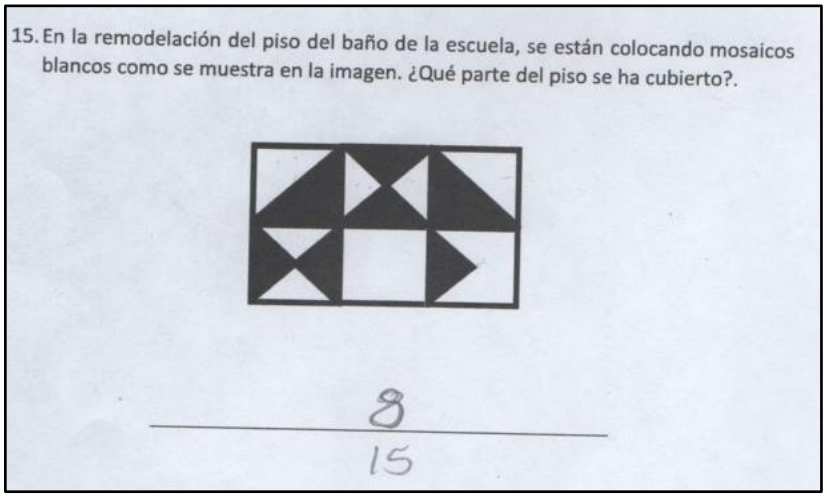
Comentario: Alumna 4. No es clara su resolución, ubicó cada fracción de maneras distintas sin aparente conexión entre ellas, al azar. Para 1 ¼, hizo dos marcas entre el 0 y el 1 cerca del 0 (no proporcional) y ubicó la fracción en la segunda marca. Ubicó 1/3 en la segunda marca que hizo entre el 1 y el 2, las marcas no mantienen espacios proporcionales. Para 1 3/6, hizo 3 primeras marcas no equidistantes entre el 2 y el 3 y ubicó la fracción en la tercera marca. Para 2 ¾. Hizo 2 marcas más largas aproximadamente a la mitad de la recta entre el 2 y el 3 (pareciendo marcar enteros), después de la segunda marca, hizo otras 3 más cortas y ubicó la fracción en la última marca.

Figura 24. *Pregunta 14 idea de representación gráfica de fracción continua discretizada*



Comentario: Alumna 4. Para determinar el denominador correspondiente no cuenta el total de las partes en que se divide la figura, contó los rectángulos pero no tomó en cuenta que cada uno de ellos se divide a su vez en dos dando un total de 48, no 24, que después debía simplificar.

Figura 25. *Pregunta 15 idea de representación gráfica de fracción continua discretizada*



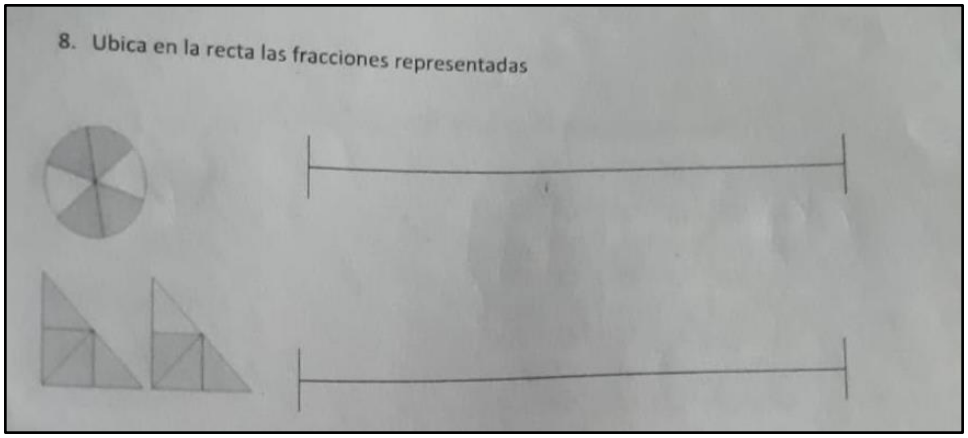
Comentario: Alumna 4. Determina que el denominador son las partes en blanco del rectángulo, no el número total de las partes en que se divide el rectángulo. Tampoco determina correctamente el numerador.

Las preguntas que más dejaron en blanco:

- Pregunta 8 con 24%. Idea de representación de la fracción en la recta no numérica a partir de representaciones gráficas.
- Pregunta 9 con 24%. Idea de representación de la fracción escrita y en la recta a partir de representaciones gráficas.
- Pregunta 12 con 15%. Idea de proporcionalidad

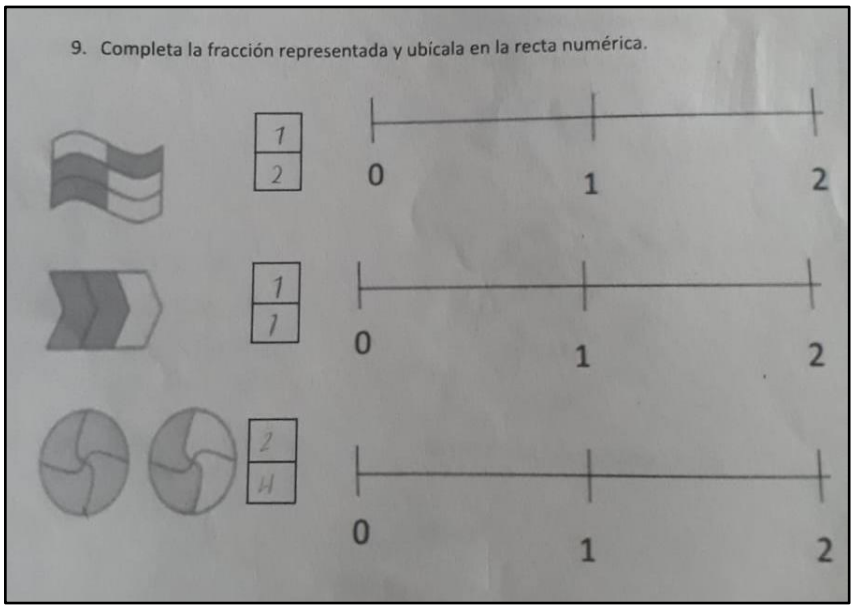
Se pretende que con la definición del modelo parte todo a/b, los alumnos puedan utilizar esta definición en otros contextos, el que un alumno pueda ubicar o representar la fracción 1/2 en una figura geométrica, no significa que esta comprensión le permita identificar o representar esta fracción en una recta numérica o determinar ½ de una cantidad discreta (Linares, 1997).

Figura 26. *Pregunta 8, idea de representación de la fracción en la recta no numérica a partir de representaciones gráficas.*



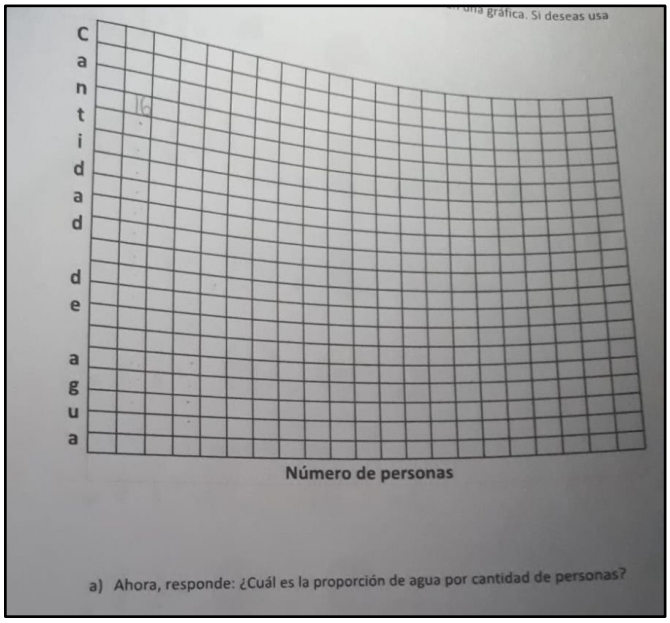
Nota. Alumno 3. Dejó en blanco la pregunta

Figura 27. *Pregunta 9, idea de representación de la fracción escrita y en la recta a partir de representaciones gráficas.*



Nota. Alumno 3. Aunque escribió fracciones en los espacios (sólo la primera correcta), dejó en blanco la recta numérica.

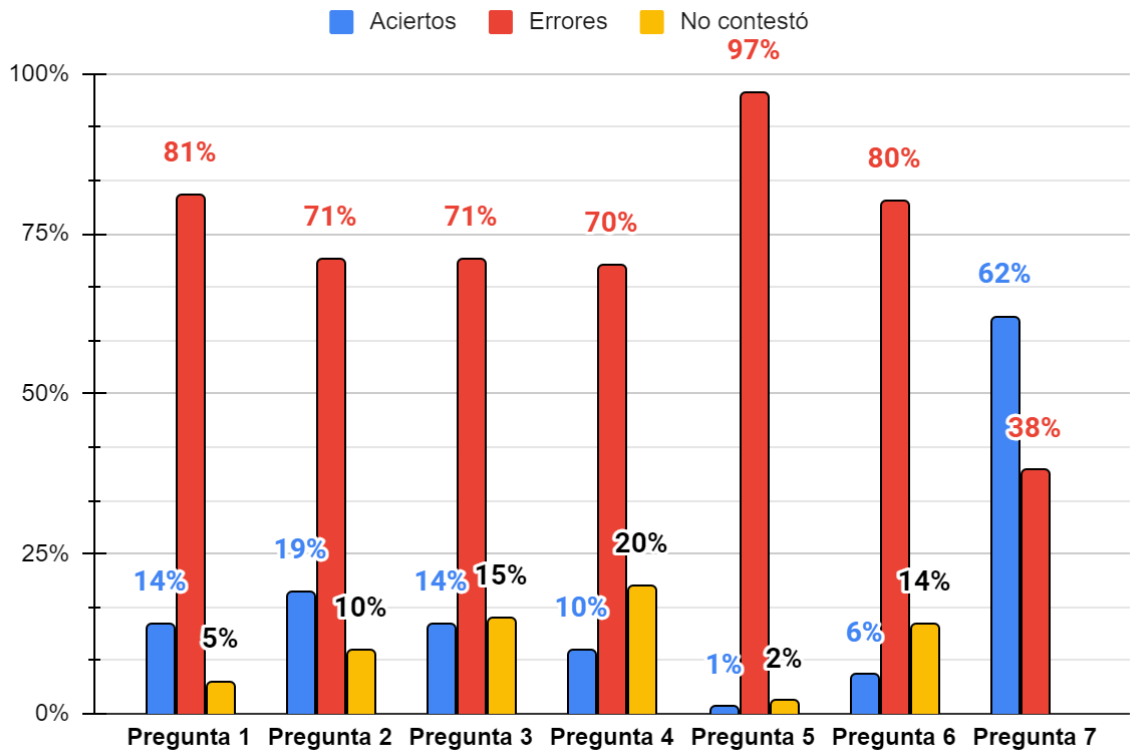
Figura 28. *Pregunta 12, idea de proporcionalidad*

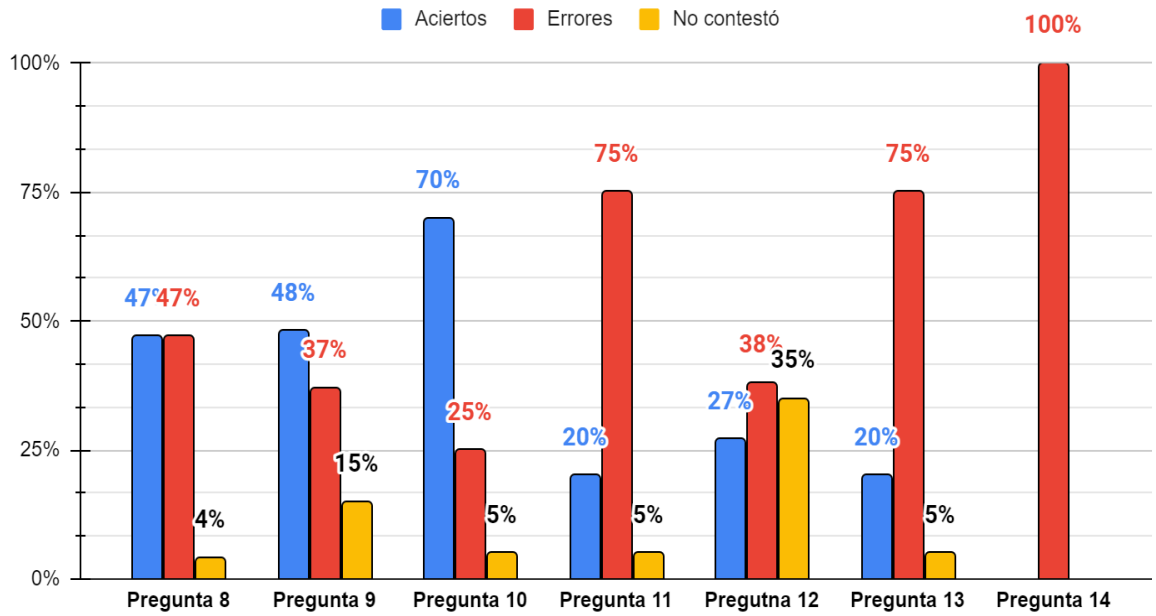


Alumna 6. Dejó en blanco la pregunta

Cuestionario inicial Fase II

Figura 29. *Porcentaje de cada pregunta del cuestionario inicial fase II*



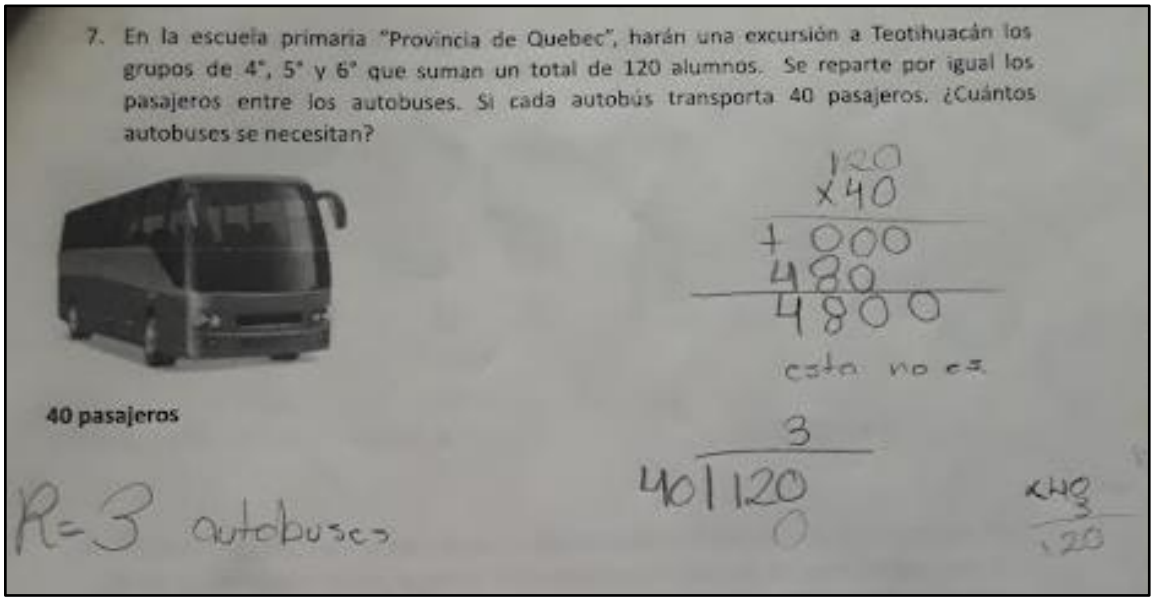


De acuerdo a los resultados obtenidos, se tiene que las preguntas con mayores aciertos son:

- Pregunta 7 con 62%. Idea matemática: División cuotitiva
- Pregunta 9 con 48%. Idea matemática Cociente
- Pregunta 10 con 70%. Idea matemática: Razón.

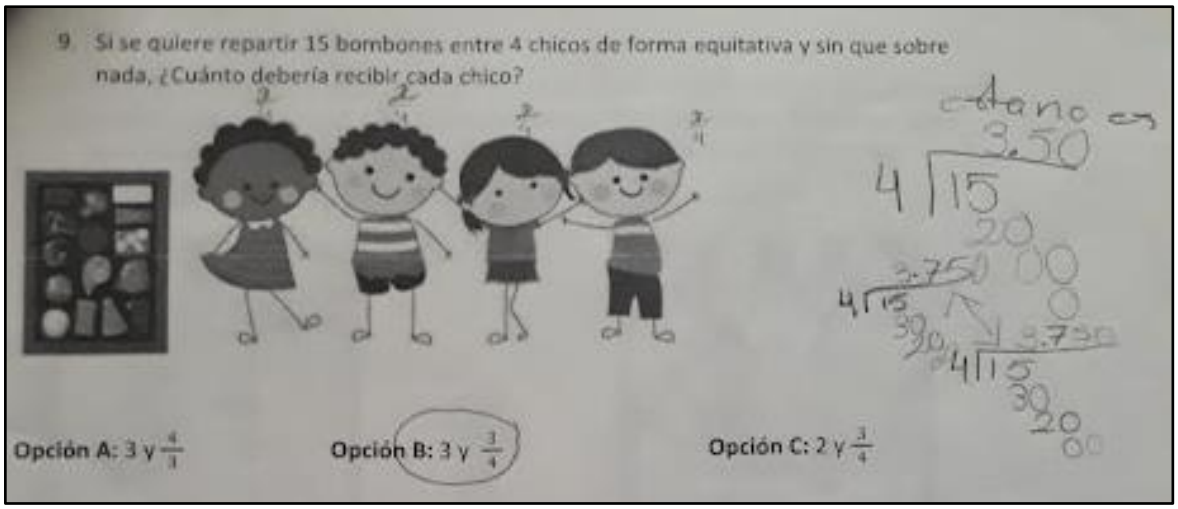
Estas respuestas tuvieron un mayor porcentaje de aciertos debido al conocimiento intuitivo con el que cuentan los alumnos al ingresar a la escuela producto de su contacto con las fracciones en su contexto cotidiano, donde se enfrentan a situaciones de reparto, la mitad de ; una tercera parte de, 50% de descuento, 2 X 1 (Llinares, 1997).

Figura 30. *Pregunta 7, idea matemática: División cuotitiva*



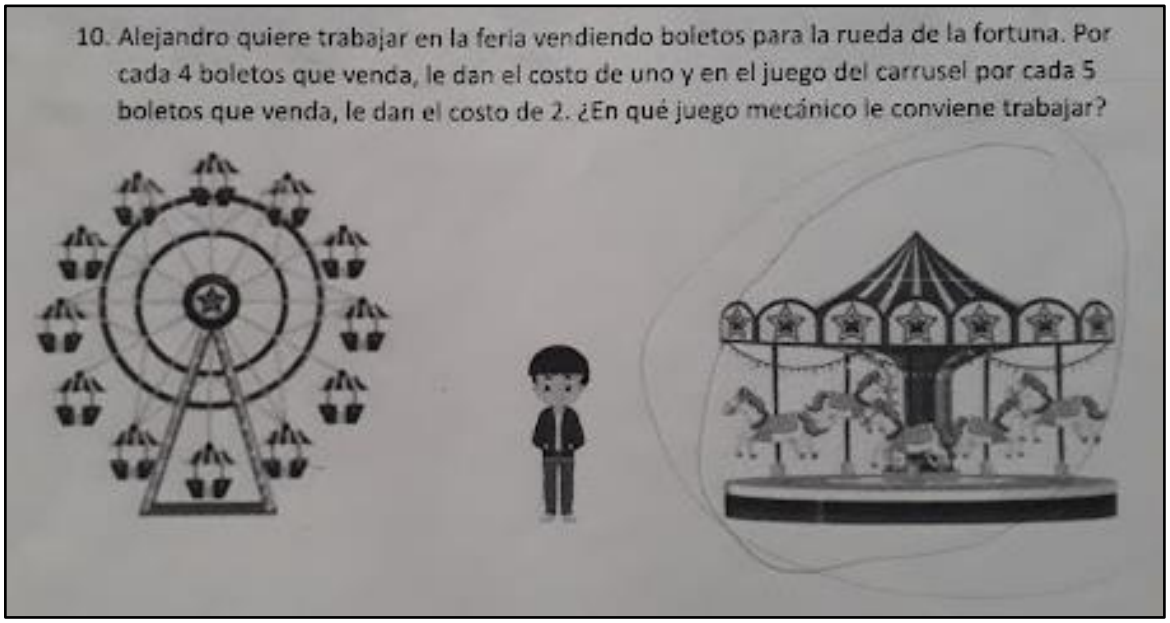
Nota. Ejemplo de respuesta Alumna 1. Aunque multiplicó 120 por 40, rectificó dividiendo 120 entre 40 y, de hecho, comprobó el resultado multiplicando 40 por 3.

Figura 31. *Pregunta 9, idea matemática Cociente*



Nota. Respuesta de respuesta Alumna 1. Dividió con decimales y los traduce para identificar la respuesta correcta.

Figura 32. *Pregunta 10, idea matemática razón*



Nota. Respuesta Alumno 2. Eligió correctamente la respuesta aunque no escribió cómo llegó al resultado.

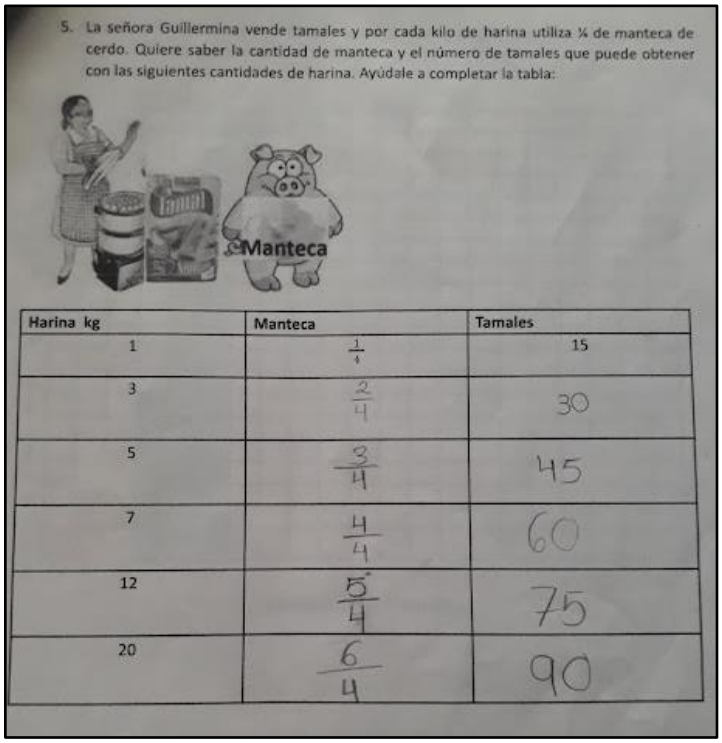
Las preguntas con mayores errores:

- Pregunta 5 con 97%. Idea matemática: Proporcionalidad aritmética.
- Pregunta 6 con 80%. Idea matemática Proporcionalidad aritmética.
- Pregunta 14 con 100%. Idea matemática:Idea de Escala: 1:2 y 1:3

En general, el grupo se encuentra en el primer nivel de comprensión matemática de acuerdo al modelo de Kieren (1993), por lo que esas ideas matemáticas correspondientes a un nivel más avanzado, no logran entenderlas.

Ejemplos:

Figura 33. *Pregunta 5 idea matemática: Proporcionalidad aritmética.*



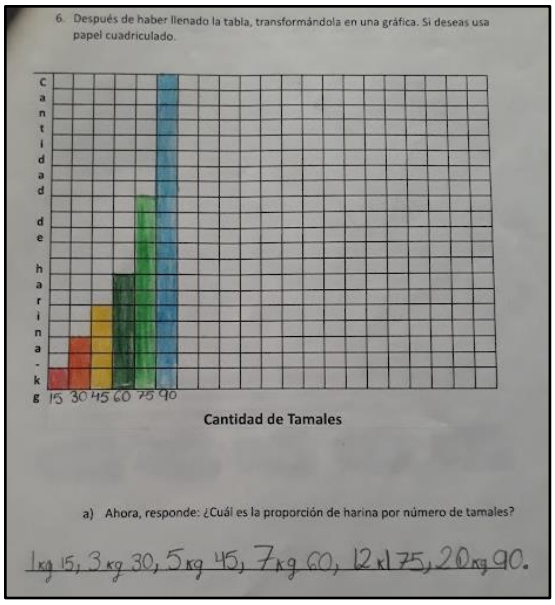
5. La señora Guillermina vende tamales y por cada kilo de harina utiliza ¼ de manteca de cerdo. Quiere saber la cantidad de manteca y el número de tamales que puede obtener con las siguientes cantidades de harina. Ayúdale a completar la tabla:

Manteca

Harina kg	Manteca	Tamales
1	$\frac{1}{4}$	15
3	$\frac{2}{4}$	30
5	$\frac{3}{4}$	45
7	$\frac{4}{4}$	60
12	$\frac{5}{4}$	75
20	$\frac{6}{4}$	90

Nota. Alumno 3. Todas las respuestas de la tabla son erróneas.

Figura 34. *Pregunta 6 idea matemática Proporcionalidad aritmética.*



6. Después de haber llenado la tabla, transformándola en una gráfica. Si deseas usa papel cuadriculado.

Cantidad de harina - kg

15 30 45 60 75 90

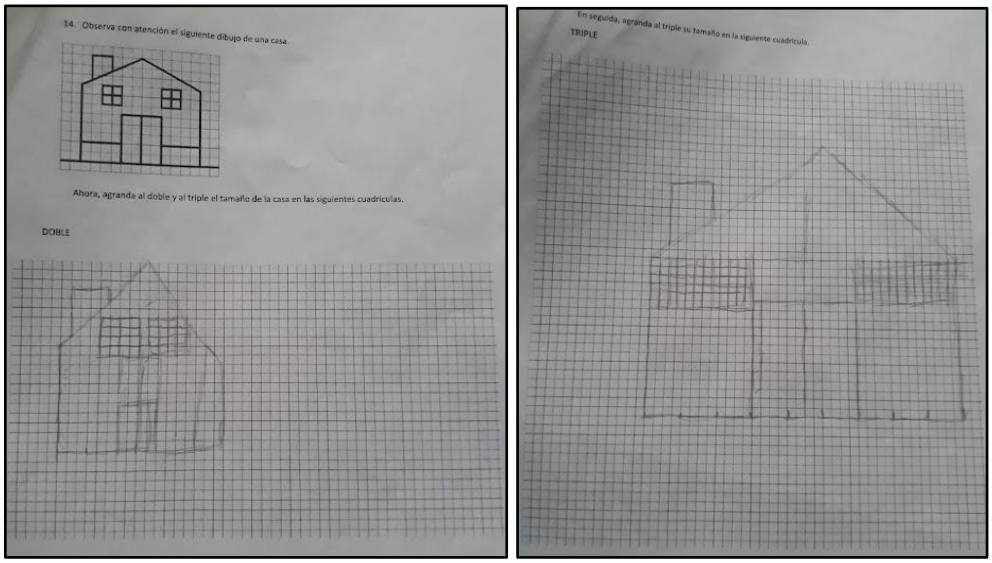
Cantidad de Tamales

a) Ahora, responde: ¿Cuál es la proporción de harina por número de tamales?

1kg 15, 3kg 30, 5kg 45, 7kg 60, 12kg 75, 20kg 90.

Nota. Alumno 3. Al tener todas las respuestas de la pregunta anterior equivocadas, los datos para graficar también lo están, por lo tanto la gráfica es errónea.

Figura 35. *Pregunta 14 idea matemática:Idea de Escala: 1:2 y 1:3*



Nota. Alumna 4. No toma en cuenta el número de cuadros que miden cada uno de los elementos del dibujo como la ventana, la puerta o la chimenea para duplicar y triplicar el tamaño.

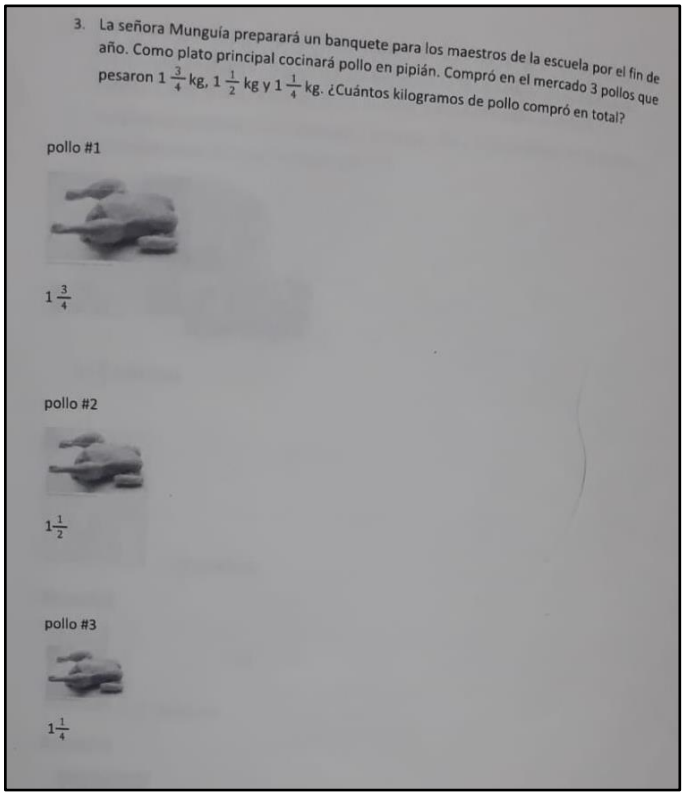
Las preguntas que más dejaron en blanco:

- Pregunta 3 con 15%. Idea matemática: Suma de fracciones impropias.
- Pregunta 4 con 2%. Idea matemática: Suma y resta de fracciones impropias.
- Pregunta 12 con 35%. Idea matemática: Decimal

Confunden el algoritmo de la suma con el de la multiplicación (González, 2015).

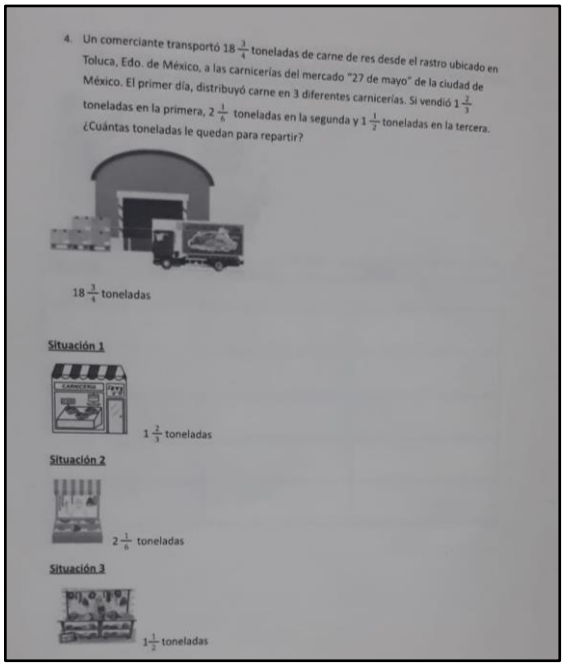
Ejemplos:

Figura 36. *Pregunta 3*, *idea matemática: Suma de fracciones impropias.*



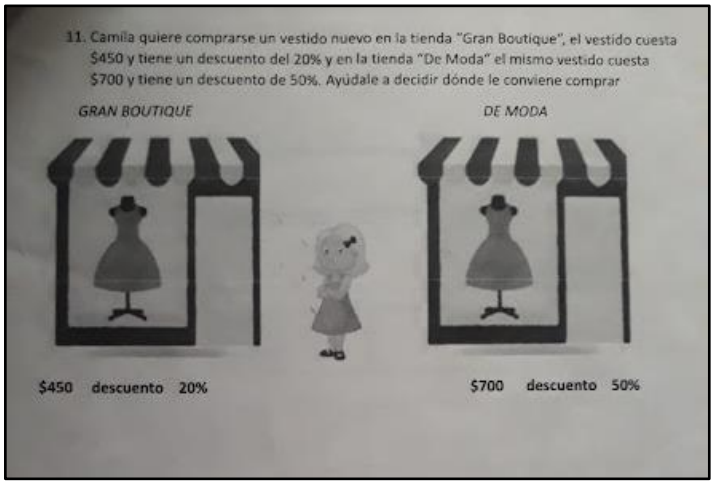
Nota. Alumno 6. No respondió

Figura 37. *Pregunta 4*, *idea matemática: Suma y resta de fracciones impropias.*



Nota. Alumno 6. No respondió

Figura 38. *Pregunta 12*, *idea matemática: Decimal*



Nota. Alumna 5. No respondió

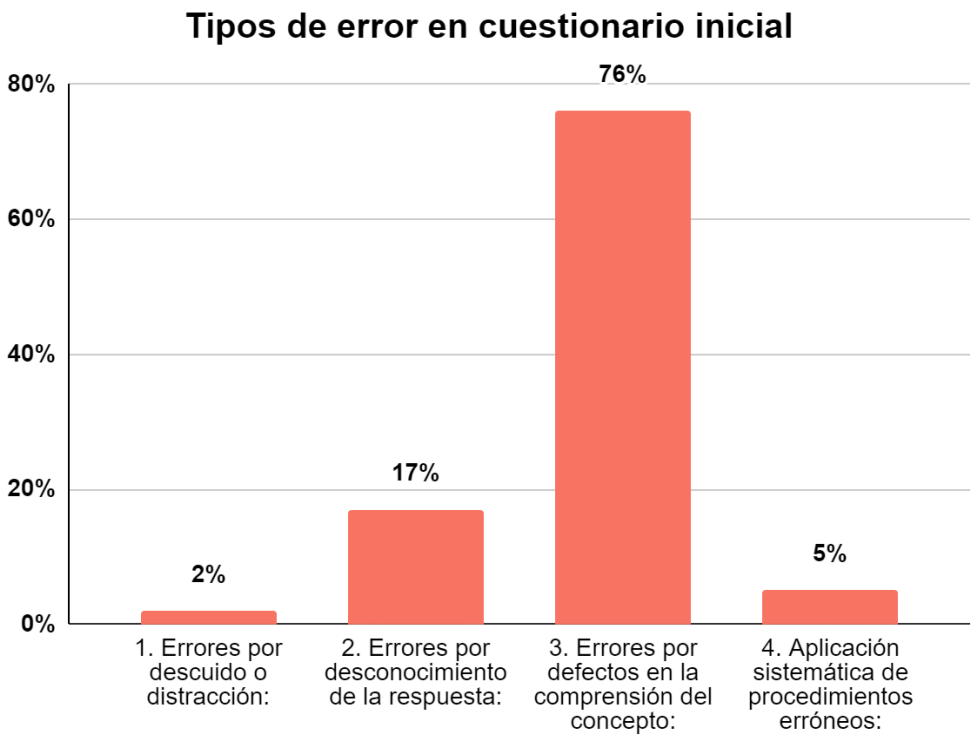
Como puede verse, en el cuestionario fase II, al manejar ideas matemáticas más complejas existe un mayor porcentaje de errores en los estudiantes, factor que se tomó en cuenta para trabajar y afianzar las ideas matemáticas elementales acerca de los números fraccionarios en la secuencia de actividades.

4.1.2 Clasificación según el tipo de error

Ahora se analizan únicamente los errores cometidos en el cuestionario inicial de fracciones, se clasifican de acuerdo a su tipo de error en: errores por descuido o distracción, errores por desconocimiento de la respuesta, errores por defectos en la comprensión del concepto y aplicación sistemática de procesos erróneos (González, 2015).

Primero se presenta el porcentaje del grupo total de los 24 estudiantes del grupo sobre los tipos de errores para tener un panorama general sobre las equivocaciones.

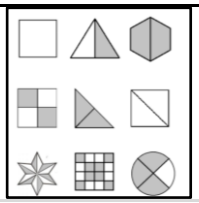
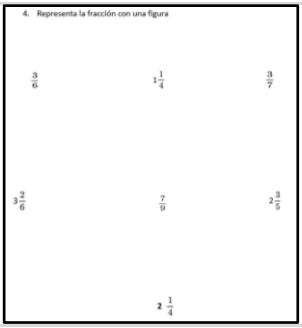
Figura 39. *Porcentaje de tipos de error en el cuestionario inicial fase I*



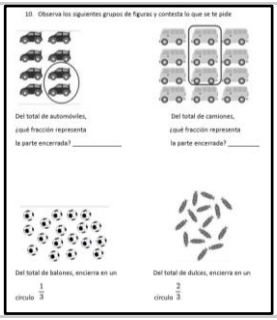
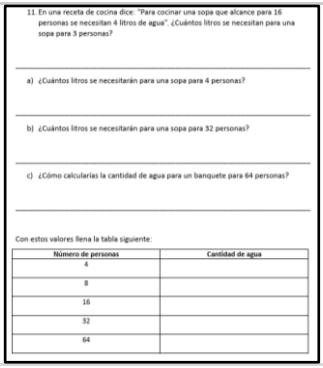
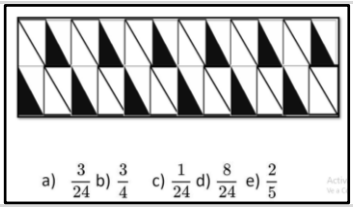
El tipo de error más cometido es por defectos en la comprensión del concepto fracción, lo que es congruente con el resultado del primer nivel de análisis donde el alto porcentaje de respuestas erróneas en el cuestionario inicial de fracciones es en las ideas matemáticas más complejas y los aciertos se encuentran en las ideas matemáticas más básicas, lo que ubicó al grupo en el primer nivel de comprensión. de acuerdo al modelo recursivo de Kieren, que es partición, formación de la unidad y equivalencia.

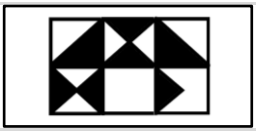
A continuación, se presentan las preguntas que tuvieron los mayores porcentajes del tipo de error por defectos en la comprensión del concepto. Primero se expone el porcentaje correspondiente a los alumnos que contestaron correctamente la pregunta, después del total de errores, es decir del 100% de los errores, se desglosa el porcentaje de cada tipo de error.

Tabla 5. *Porcentaje de resultados de las preguntas con mayores errores por defectos en la comprensión*

Preguntas con mayores errores por defectos en la comprensión[1]		
Pregunta 1. Mitad en un todo continuo.		
Solución correcta:	60%	
Errores por descuido o distracción:	4%	La mayoría de los alumnos marcan las figuras canónicas divididas exactamente a la mitad independientemente de que esté o no sombreada la mitad. En menor medida, los alumnos tienen dificultad para identificar la mitad en figuras no canónicas.
Errores por desconocimiento de la respuesta:	2%	
Errores por defectos en la comprensión del concepto:	**94%**	
Pregunta 4. Idea matemática: Representación gráfica de fracciones propias e impropias.		
Solución correcta:	67%	
Errores por descuido o distracción:	5%	En las fracciones mixtas no representan el número correcto de enteros. No identifican el concepto de entero cuando hay más de uno. En menor medida, representan los enteros con figuras diferentes al resto de la fracción y/o no dividen equitativamente la figura en la fracción correspondiente. También sombrean el número correspondiente al denominador (numerador y denominador invertidos).
Errores por desconocimiento de la respuesta:	11%	
Errores por defectos en la comprensión del concepto:	**84%**	

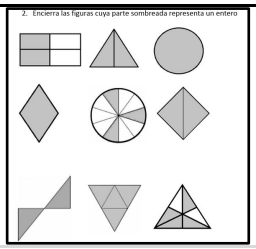
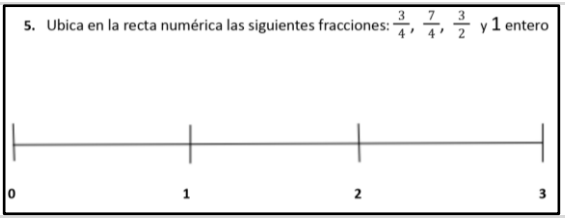
[1] Para el desglose en porcentajes de los tipos de errores se considera el total de errores como el 100% y a partir de ahí se distribuyen los porcentajes.

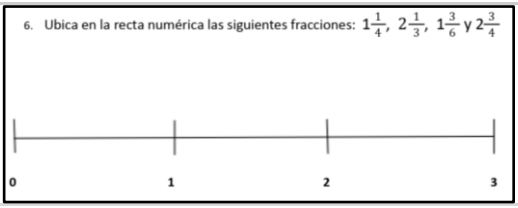
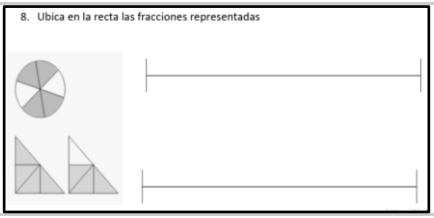
Pregunta 10. Idea matemática: Representación gráfica en cantidades discretas.		
Solución correcta:	40%	
Errores por descuido o distracción:	3%	Para identificar la fracción en magnitudes discretas tienen más errores a la hora de encerrar el número de objetos ante una fracción dada que a la hora de señalar la fracción en una colección con objetos encerrados. Hay quienes identifican cada elemento de la colección como un entero, no consideran el conjunto como entero.
Errores por desconocimiento de la respuesta:	7%	
Errores por defectos en la comprensión del concepto:	**90%**	
Pregunta 11 Idea de proporcionalidad		
Solución correcta:	22%	
Errores por descuido o distracción:	1%	Para calcular la cantidad de sopa (litros) para 32 y 64 personas suelen responder correctamente. No así para menos de 16 personas.
Errores por desconocimiento de la respuesta:	1%	
Errores por defectos en la comprensión del concepto:	**98%**	
Pregunta 14 Representación gráfica de fracción continua discretizada		
Solución correcta:	40%	
Errores por desconocimiento de la respuesta:	5%	La estrategia utilizada es el conteo sin embargo la gran mayoría de los niños no cuentan todas las partes en que está dividido el entero, sino que lo dejan en 24, a la mitad, y eligen una de las tres opciones que se ofrecen con ese denominador.
Errores por defectos en la comprensión del concepto:	**95%**	

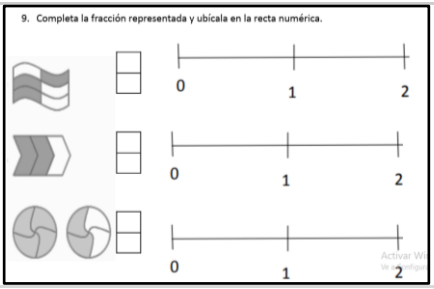
Pregunta 15 Representación gráfica de fracción continua discretizada.		
Solución correcta:	33%	
Errores por desconocimiento de la respuesta:	4%	A pesar de que los alumnos cuentan las partes correspondientes a la fracción solicitada, no la forman correctamente. En algunos casos invierten el denominador por el numerador y viceversa; en otros juntan 2 partes y la cuentan como una.
Errores por defectos en la comprensión del concepto:	**96%**	

Enseguida se revisan las preguntas que tienen el porcentaje más bajo en los errores por defectos en la comprensión y, por lo tanto, tienen un porcentaje más alto en el error del tipo por desconocimiento de la respuesta, aunque ese porcentaje no fue mayor al del tipo 3, que en todas las preguntas representó el porcentaje más alto.

Tabla 6. *Porcentaje de resultados de las preguntas con menos errores por defectos en la comprensión*

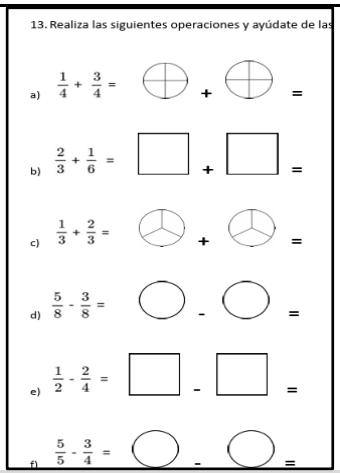
Preguntas con menor porcentaje de errores por defectos en la comprensión		
Pregunta 2. Idea matemática: Entero en un todo continuo		
Solución correcta:	80%	
Errores por desconocimiento de la respuesta:	48%	No marcan la figura no canónica en forma de moño o hélice y, en menor medida, tampoco marcan las figuras divididas en partes y que representan un entero. Identifican el entero en figuras canónicas no fraccionadas.
Errores por defectos en la comprensión del concepto:	52%	
Pregunta 5. Idea matemática: Representación de la fracción en la recta numérica.		

Solución correcta:	20%	
Errores por desconocimiento de la respuesta:	32%	En los errores por desconocimiento de la respuesta se incluyeron las respuestas que parecen al azar o inventadas al no tener relación entre las ubicaciones marcadas y/o con los denominadores y numeradores. En los errores por defectos en la comprensión del concepto, la gran mayoría de los alumnos no ubican correctamente las fracciones impropias en la recta: 7/4 y 3/2.
Errores por defectos en la comprensión del concepto:	68%	
Pregunta 6. Idea matemática: Representación de fracciones impropias en la recta numérica		
Solución correcta:	29%	
Errores por descuido o distracción:	2%	No toman en cuenta los enteros para ubicar las fracciones en la recta numérica En otros niños, el orden que ocupan para ubicar los enteros es independiente de los enteros ya marcados en la recta. A veces su lógica para ubicar obedece al orden de aparición de las fracciones dadas en el reactivo.
Errores por desconocimiento de la respuesta:	36%	
Errores por defectos en la comprensión del concepto:	62%	
Pregunta 8. Idea matemática: Representación de fracción propia e impropia en una recta no numérica a partir de una figura.		
Solución correcta:	14%	
Errores por desconocimiento de la respuesta:	33%	La gran mayoría, en principio, no representa correctamente la fracción que rebasa el entero y, por lo tanto, tampoco la ubican en la recta. Otros niños, aunque representen correctamente la fracción de la figura, no la ubican en la recta, dividiéndola en el número que ponen como numerador (numerador y denominador invertidos en la recta).
Errores por defectos en la comprensión del concepto:	67%	

Pregunta 9. Idea matemática: Representación de fracción propia e impropia en una recta numérica a partir de una figura.		
Solución correcta:	20%	
Errores por descuido o distracción:	2%	Aunque varios representan correctamente las fracciones propias a partir de las figuras dadas, no las ubican en la recta. Y, ubican la fracción que rebasa el entero 1 2/4 antes del entero.
Errores por desconocimiento de la respuesta:	34%	
Errores por defectos en la comprensión del concepto:	64%	
Pregunta 12. Idea matemática: Idea de proporcionalidad		
Solución correcta:	24%	
Errores por descuido o distracción:	2%	Aunque algunos alumnos tienen correctos los datos de la tabla anterior, no utilizan los datos para hacer la gráfica. En cuanto a la pregunta: ¿Cuál es la proporción de agua por cantidad de personas?, sólo 2 alumnos contestaron correctamente.
Errores por desconocimiento de la respuesta:	19%	
Errores por defectos en la comprensión del concepto:	79%	

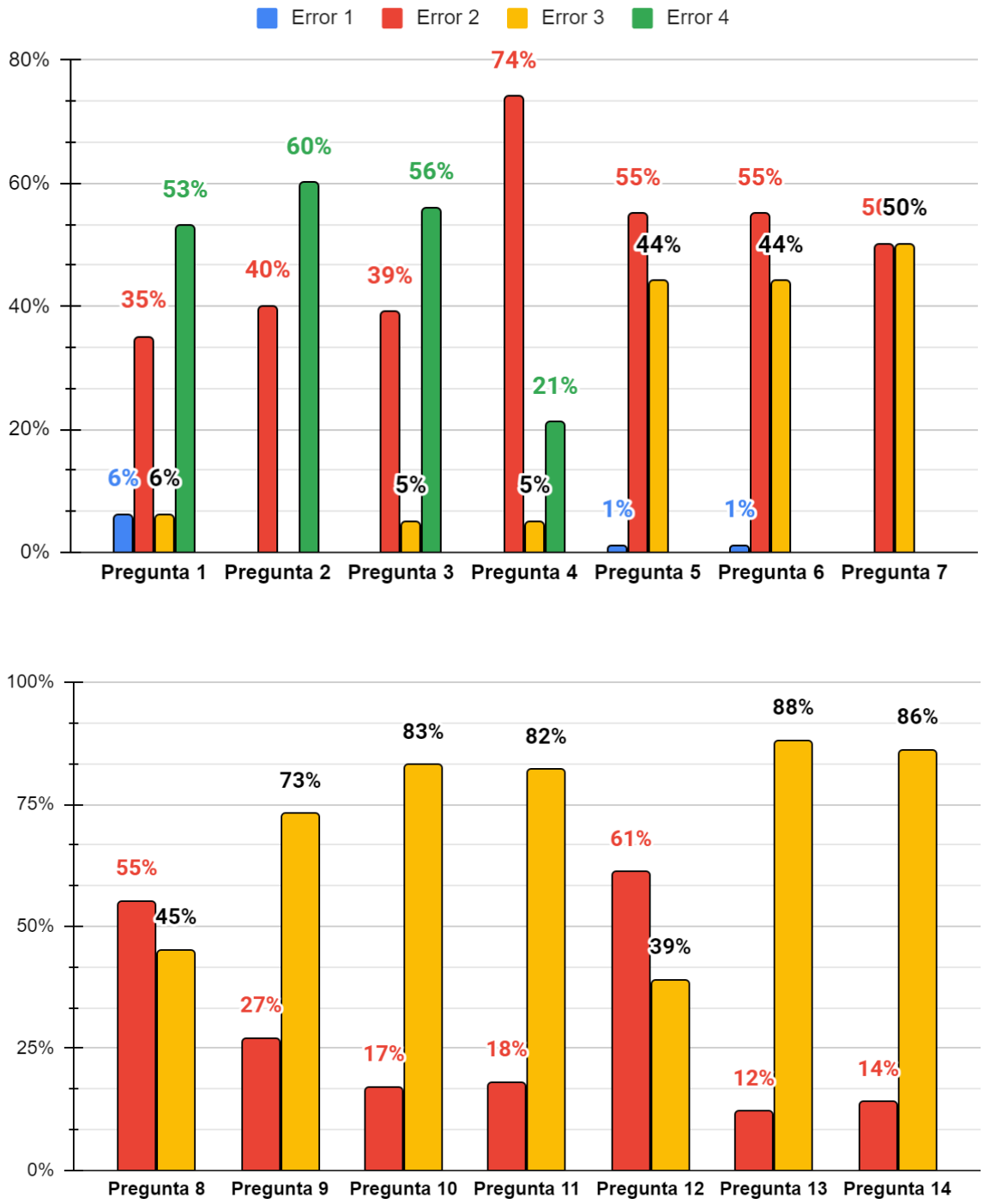
En cuanto a los errores por aplicación sistemática de procesos erróneos en el cuestionario inicial de fracciones fase I, únicamente se encontró en la pregunta 13.

Tabla 7. *Porcentaje de resultados de la pregunta por aplicación sistemática de procesos erróneos*

<table>
<tr><th colspan="3">Pregunta con porcentaje por aplicación sistemática de procesos erróneos</th></tr>
<tr><td colspan="2">Pregunta 13. Idea matemática: Suma y resta de fracciones con representación gráfica</td><td> 
</td></tr>
<tr><td>Solución correcta:</td><td>29%</td><td></td></tr>
<tr><td>Errores por descuido o distracción:</td><td>7%</td><td rowspan="4">Presentan errores en el algoritmo de suma y resta debido a que los alumnos no han comprendido en su totalidad las reglas que deben seguir a la hora de operar con fracciones.
En cuanto a los aciertos, los niños que se apoyan en las figuras para resolver la operación y no ocupan el algoritmo, llegan al resultado directo, a diferencia del algoritmo donde simplifican.</td></tr>
<tr><td>Errores por desconocimiento de la respuesta:</td><td>1%</td></tr>
<tr><td>Errores por defectos en la comprensión del concepto:</td><td>38%</td></tr>
<tr><td>Aplicación sistemática de procedimientos erróneos:</td><td>54%</td></tr>
</table>

Sin embargo, en el cuestionario inicial de fracciones fase II que manejó ideas matemáticas más complejas se encontraron más errores del tipo 4, aplicación sistemática de procedimientos, donde se encontró el error en el algoritmo suma en las 4 primeras preguntas como se muestra en la siguiente gráfica:

Figura 40. *Porcentaje de tipos de error por pregunta en el cuestionario inicial fase II*



Según González (2015), Godino (2004) y Abrate et al (2006) encontraron errores en el algoritmo de suma fraccionaria, principalmente al confundir este algoritmo con el algoritmo de multiplicación. Mata & Porcel (2006) realizaron un análisis presentando diferentes modificaciones realizadas por los estudiantes en base al algoritmo.

Por otra parte, en el cuestionario inicial fase II también se encontraron más errores del tipo 2, por desconocimiento de la respuesta, donde parte de sus resoluciones fueron al azar y la otra parte no contestó.

En general, en cuanto a la escritura de los números fraccionarios, no se tiene la comprensión de que representa un número, se perciben en forma separada el numerador y el denominador, como números naturales.

En su representación gráfica no identifican la fracción impropia y/o mixta.

A continuación, se hace una descripción del tercer tipo de análisis: las estrategias de resolución.

4.1.3 Estrategias de resolución de problemas

A continuación, las estrategias de resolución de los 6 alumnos entrevistados, donde algunos de ellos tienen más de una estrategia para resolver los diferentes reactivos de una misma pregunta (tabla 8).

Tabla 8. *Estrategias de resolución del cuestionario inicial fase I*

No. de pregunta	Idea matemática	Estrategias de resolución de problemas	Número de respuestas
1	Idea de mitad en un todo continuo	Conteo. El alumno cuenta todas las partes en que está dividida la figura y los compara con el número de partes sombreadas de la figura para saber si representa 1/2.	2
		Retención o creación de imagen. (Kieren, 1993). Imagina recorrer todas las partes sombreadas de la figura a un mismo lado para que estén juntas y pueda visualizar si representa la mitad de la figura o no.	2
		Dificultad para reconocer la idea de mitad. En esta categoría el estudiante marca todas las figuras divididas a la mitad independientemente si están o no sombreadas y sin son figuras canónicas o no canónicas.	2
2	Idea de entero en	Reconoce el entero. Identifica que toda la figura (canónicas y no	2

	magnitud todo continuo	canónicas) está sombreada y por lo tanto determina que es un entero.	
		Dificultad para reconocer la idea de entero. En esta categoría el estudiante identifica los enteros cuyas figuras no están fraccionadas.	2
		Dificultad para reconocer la idea de entero en figuras no canónicas. En esta categoría, el estudiante identifica el entero únicamente en figuras canónicas y no en las no canónicas.	3
3	Representación gráfica de fracciones propias e impropias	Reconoce las fracciones propias. Identifica la fracción que corresponde a las figuras que no rebasan el entero.	5
		DIficultad para reconocer las fracciones impropias a partir de su representación gráfica. En esta categoría, el estudiante representa la fracción correspondiente a las figuras que rebasan el entero contando el número de partes sombreadas de todos los enteros y lo representa como numerador. En seguida, cuenta el número total de partes de todos los enteros y lo pone como denominador. Hace el conteo como si fuera una sola figura.	6
4	Representación gráfica de fracciones propias e impropias en cantidad continua	Fraccionan irregularmente la figura. Dividen la figura, el entero, en partes no equitativas. Aunque sí identifican la fracción correspondiente.	5
5	Representación de la fracción propia e impropia en la recta numérica.	Dificultad para identificar los enteros en la recta numérica. En esta categoría, el estudiante representa, la fracción con señalizaciones de enteros independientes a las ya marcadas que ellos mismos hacen. No toman en cuenta los enteros marcados en la recta numérica.	2
		Dificultad para representar las fracciones en la recta numérica en forma precisa. En esta categoría, el estudiante, representa la fracción mediante la estimación y cálculo. Después de los enteros marcados no hacen señalamientos de división o conteo de partes para marcar la fracción. Señalan la fracción solicitada de forma no equitativa.	2
6	Representación de fracciones	Dificultad para representar las fracciones en la recta numérica en forma precisa. En esta categoría, el estudiante, representa la fracción mediante la estimación y cálculo. Después de los enteros marcados no hacen señalamientos de división o conteo de partes para marcar la fracción y quienes hacen marcas, éstas	5

	mixtas en la recta numérica.	no son equidistantes.	
		Dificultad para identificar los enteros en la recta numérica. En esta categoría, el estudiante representa, la fracción con señalizaciones de enteros independientes a las ya marcadas que ellos mismos hacen. No toman en cuenta los enteros marcados en la recta numérica.	3
7	Representación de la fracción en la recta no numérica.	Concepción del denominador como número natural en la recta no numérica. En esta categoría, el estudiante representa las fracciones en la recta no numérica tomando en cuenta el denominador como número natural, de esta forma colocaron primero ⅓, segundo ¼ y tercero ⅕.	4
		Dificultad para representar las fracciones en la recta no numérica de forma precisa. En esta categoría, el estudiante representa la fracción mediante el cálculo, no mide, divide, señala o hace marcas de conteo o algún tipo para estimar la ubicación precisa.	4
8	Representación de la fracción en la recta no numérica a partir de representaciones gráficas.	Dificultad para representar las fracciones en la recta no numérica en forma precisa. En esta categoría, el estudiante representa la fracción mediante el cálculo, no mide, divide, señala o hace marcas de conteo o de algún tipo para estimar la ubicación precisa.	3
		Dificultad para representar las fracciones impropias en la recta no numérica. En esta categoría, el estudiante cuenta todas las partes sombreadas de todos los enteros y lo representa como numerador. En seguida, cuenta el número total de partes de todos los enteros y lo pone como denominador. Hace el conteo como si fuera una sola figura.	4
		Dificultad para representar la fracción mediante el cálculo, no mide, no divide. En esta categoría, el estudiante no señala o hace marcas de conteo o de algún tipo para estimar la ubicación precisa.	4
	Representación de la fracción escrita en la	Dificultad para reconocer las fracciones impropias a partir de su representación gráfica. En esta categoría, el estudiante escribe la fracción correspondiente a las figuras que rebasan el entero contando el número de partes sombreadas de todos los enteros y lo representa como numerador. En seguida, cuenta el número total de partes de todos los enteros y lo pone como denominador. Hace el conteo como si fuera una sola figura.	3

9	recta a partir de representaciones gráficas.	Dificultad para reconocer los enteros en la recta numérica. En esta categoría, el estudiante representa las fracciones sin considerar las unidades. En algunos casos, utiliza la primera unidad (1) para dividirla en el número de partes de acuerdo al numerador, y la segunda unidad (2), la divide en el número de partes según el denominador.	2
		Dificultad para reconocer las unidades en la recta numérica. En esta categoría, el estudiante representa la fracción sin considerar las unidades. Representa, la fracción y la reordena de forma independiente a las unidades representadas en la recta.	2
10	Representación gráfica en cantidades discretas.	Dificultad para representar la cantidad correcta de elementos en la colección según la fracción dada. No encierran la cantidad correcta de elementos en la colección según la fracción dada. Escriben la fracción correspondiente a los elementos encerrados en la colección dada. No así en la segunda parte de la pregunta donde deben encerrar el número de elementos de una colección dada según la fracción dada.	5
11	Idea de proporcionalidad	Cálculo de proporciones superiores a la cantidad dada. Responden correctamente para calcular la cantidad de sopa (litros) para 32 y 64 personas, es decir, para duplicar y cuadruplicar la proporción, no así para menos de 16 personas, la cantidad dada inicialmente.	3
		Respuestas sin procedimiento escrito No apuntan procedimiento alguno para llegar a la respuesta: calculan, o copian, o responden al azar. La mayoría de estas resoluciones son incorrectas.	3
		Estimación matemática Al identificar que 4 litros corresponde a 16 personas, estima la proporción correspondiente a 4 personas con cálculo mental dividiendo. A partir de ahí, estima la proporción de sopa correspondiente a 3 personas. Lo mismo ocurre para identificar la proporción que corresponde a 32 personas y 64 personas.	
12	Idea de proporcionalidad	Dificultad para graficar conforme los datos Invirtieron el orden de lo que debían graficar en el eje de la X y de la Y	2
		Identificación de datos para graficar Grafican conforme a los datos proporcionados.	2

13	Suma y resta de fracciones con representación gráfica	Suma y resta de fracciones sin algoritmo Apoyándose en la representación gráfica de las fracciones dadas resolvieron la suma y resta.	3
		Suma y resta de fracciones con algoritmo Cabe señalar que utilizan el algoritmo para sumar fracciones con igual y diferente denominador.	3
14	Representación gráfica de fracción continua discretizada	Conteo y división Contó el número total de triángulos y determinó a partir de una división, la fracción unitaria de los triángulos sombreados correspondientes a ¼	1
		Conteo impreciso La estrategia utilizada es el conteo sin embargo la gran mayoría de los niños no cuentan todas las partes en que está dividido el entero, sino que lo dejan en 24, a la mitad, y eligen una de las tres opciones dentro de las respuestas que se ofrecen con ese denominador.	5
15	Representación gráfica de fracción continua discretizada	Conteo Contaron el número de partes del entero (8 cristales de la ventana) y determinaron la fracción que se ve, 2 cristales igual a 2/8	6
16	Representación gráfica de la parte y el todo continuo discretizado	Duplicar Duplicaron el tercio de los cristales	5

4.2 Entrevista a la docente

A continuación se muestra el análisis realizado con la entrevista semi-estructurada realizada con la profesora responsable del grupo.

El análisis de la entrevista se realizó de acuerdo a las categorías elaboradas, previas a la entrevista.

Tabla 9. *Entrevista semi estructurada por categorías*

CATEGORÍA	PREGUNTAS	RESPUESTAS
Datos de identificación del profesor	¿Cómo se llama?	*Mi nombre es V V*
	¿Cuál es su edad?	*45 años*
	Escuela en que labora :	*La escuela se llama V M M D*
	¿Cuántos años lleva laborando en esta escuela?	*8 años*
Formación académica	¿Cuál es su grado académico?	*Soy licenciada en pedagogía.*
	¿Cuál es la institución académica de procedencia?	*Yo vengo de la Universidad Pedagógica Nacional.*
	¿Qué cursos de actualización ha tomado?	*No, ninguno. Porque mire yo laboro en 2 turnos; en la mañana y ahorita en la tarde y pues es muy difícil porque también pues soy mamá y tengo el trabajo con mis hijos y no, pues está muy, muy apretado el tiempo.*
Experiencia profesional	¿Cuántos años de experiencia tiene en escuelas públicas?	*En públicas 10 años, pero ya llevaba 5 años trabajando en particulares hasta que hice mi examen y entré a la SEP.*
	¿En qué grados ha impartido clase?	*Todos*
Práctica docente	¿Cómo aprendió usted el tema de las fracciones?	*Pues a lo largo de mi trayectoria escolar, en la primaria, en la secundaria, en la preparatoria.*
	¿Lo enseña de la misma forma?	*La mayoría, sí. Porque en la formación profesional no hay materias vinculadas a ningún contenido en específico, no somos propiamente maestros y menos de matemáticas.*
	¿Qué dificultades ha detectado que presentan sus alumnos en el	*Pues de manera general que no ven la fracción como como un número, sino que los ven como números naturales de manera separada, por ejemplo: 1/5 me lo manejan como más grande que 1/2, porque el 5 es*

	aprendizaje de los números fraccionarios? ¿Me podría dar un ejemplo?	*más grande que el 2, no lo ven como 1/2 y 1/5. Y yo creo que también las fracciones mixtas y las impropias, las que rebasan el entero. Esas son lo que yo veo que les cuesta más trabajo porque como rebasan el entero, no saben cómo dibujar más allá del entero y entonces lo que hacen es dividirme la figura en el numerador y lo invierten por el denominador. Y pues no, no entienden que ya rebasa el entero, es un entero más una fracción.*
	¿Existen aspectos en su práctica docente que haya retomado de la revisión de planes y/o programas sobre la enseñanza de las fracciones? ¿Cuál?	*Pues sí maestro mire el plan de 2011 sugiere empezar con las fracciones unitarias, es decir, un medio 1/4, 1/8, y luego ya pasar a 2/4, 3/4, y bueno, también en el caso de las operaciones como la suma y la resta empezamos con las de igual denominador para después pasar con las de diferente denominador.*
	¿Qué recursos y/o materiales utiliza para la enseñanza de las fracciones?	*Bueno, yo he utilizado las regletas. Las regletas y la verdad es que yo sí me apoyo mucho en el material recortable que viene en los libros de desafíos matemáticos como en el de tercero y sexto año.*
	¿Cuál es el programa que usted utiliza para trabajar el tema de las fracciones maestra?	*Por el momento, sigo trabajando con el programa del 2011 porque a pesar de que en 2016, 2017 sacaron el programa de aprendizajes clave, en realidad, era muy parecido al del 2011, la diferencia fue que cambiaron esa palabrita de aprendizajes esperados por aprendizajes clave, pero en realidad era casi lo mismo. Y poquito después del 2017 se vino lo de la nueva escuela mexicana, y aquí en la nueva escuela mexicana nos piden trabajar por proyectos y no hay un tiempo asignado para matemáticas, a diferencia de los anteriores. Éste está muy confuso, los libros también. Todavía no acabamos de entender bien cómo aplicar o cómo insertar la materia de matemáticas, porque la verdad todo está muy revuelto y por eso seguimos utilizando el del 2011, porque también otra cosa maestro, el libro no cambió. O sea, el libro que seguimos usando es el del 2011, el de desafíos matemáticos. Y ése es el que trabajo. Nosotros de manera independiente imprimimos los desafíos y los trabajamos con los alumnos porque es el material con el que contamos ya que en los nuevos libros el contenido matemático está muy reducido y*

		no viene mayor explicación ni para los niños ni para el maestro.
Conocimiento de los planes y programas de estudio y de libros de texto	De acuerdo a su experiencia profesional, ¿Qué desafíos representan mayor dificultad para su enseñanza? ¿Cuáles?	*Todos tienen su grado de dificultad y mire sobre todo después de la pandemia. En estos últimos años ha sido muy difícil trabajar matemáticas con los niños porque vienen con mucho rezago. En general, los desafíos matemáticos, matemáticas, es ha sido más difícil trabajarlo ahorita y más las fracciones y con el rezago, pues mucho más. Y si tomamos en cuenta que nosotros seguimos trabajando con el libro de desafíos, por ejemplo, en el libro la mayoría de los desafíos son sobre fracciones entonces pues si no tenemos un tiempo asignado como lo teníamos antes, que era lo que sugería el programa de 2011, pues todavía más difícil todavía con este con este programa de la nueva escuela mexicana, porque nos piden el trabajo por proyectos, nos piden incluir el tema de las fracciones, pero ¿si no hay un material y un tiempo asignado especialmente para enseñar eso, pues cómo lo vamos a tratar dentro de un proyecto si no lo han aprendido los niños antes? Con todo eso nos enfrentamos maestro.*
	De acuerdo al desafío matemático #8 de la página 19 "El equipo de caminata" ¿Cómo lo lleva a cabo?	*Lo leo: El equipo de caminata de la escuela recorre un circuito de 4 km. El maestro está registrando en una tabla como la de abajo, las vueltas y los kilómetros recorridos por cada uno de los integrantes, analiza la tabla y completa. Bueno, para empezar este siempre a los niños les doy un tiempo para que para ver si ellos lo pueden resolver. Les doy alrededor de unos 10 minutos más o menos. Se ponen en parejas como sugiere la consigna, y, si de plano veo que no pueden resolverlo, porque este desafío en particular es de los de los más difíciles, porque requiere que sepan sumar, que sepan restar, que sepan pasar de fracción mixta a fracción común, que sepan de pasar de decimal a fracción y viceversa. O sea, implica el conocimiento de varias cosas, por eso es*

		complejo este desafío. Y, cuando observo que no saben cómo resolverlo, empezamos dibujando o simulando la pista, les dibujo un círculo y ya con el círculo nos vamos a los medios, a los cuartos y a los octavos. De aquí, maestro, pues yo ya me voy a qué cuánto ha recorrido, cuánto recorre en cada fracción de la pista.
Evaluación	¿Cómo verifica lo aprendido por los alumnos?	*Con los exámenes y los ejercicios que realizamos todos los días, maestro.*
	¿Con qué frecuencia evalúa a sus estudiantes? ¿De qué forma?	*Diariamente, precisamente con los ejercicios, con los desafíos, con las tareas de matemáticas, diariamente estoy registrando lo que cada uno de ellos logra o no.*
	¿Cómo utiliza usted esta evaluación para mejorar su práctica docente?	*Salta mucho cuando los alumnos tienen el mismo error varias veces, es cuando ya me enfoco en cierto tema o en cierto procedimiento, por ejemplo, pasar de decimal a fracción o viceversa.*

4.2.1 Conclusiones sobre la entrevista realizada con la profesora

La entrevista semiestructurada realizada a la docente proporcionó información para comprender porqué el grupo de sexto grado se ubica en el primer nivel de comprensión matemática propuesto por Kieren (1993) que corresponde a las ideas matemáticas de partición, equivalencia de cantidad y formando la unidad, es un nivel muy bajo para alumnos de sexto grado. Esta situación de rezago puede ser explicada por la información que proporcionó la maestra en la entrevista semi estructurada, donde señaló que este grupo es atípico, que si bien la enseñanza de las fracciones siempre es un tema complicado según su experiencia, las características de este grupo son distintas, son alumnos que vivieron el aislamiento de la pandemia, por lo que cursaron, tercer grado a distancia (2020 -2021) ciclo en que se inicia la enseñanza de las fracciones y donde el número de horas se redujo, porque solo tenía dos clases a la semana de hora y media y muchos temas de matemáticas no se revisaron. Cuarto grado lo cursaron de forma híbrida (2021 -2022) asistían dos días a la

semana y los otros tres días realizaban, sin supervisión, actividades de “aprende en casa” (programa de televisión implementado por el gobierno federal y la SEP para atender la educación durante el periodo de aislamiento de la pandemia). Quinto grado (2022-2023), si bien el horario se estableció de forma regular, el 30% de los alumnos de la escuela no asistieron de forma regular hasta después del segundo trimestre, a principios de diciembre. Finalmente sexto grado que corresponde al ciclo actual (2023- 2024), se enfrentan al reto de trabajar con un nuevo modelo educativo (La Nueva Escuela Mexicana, NEM) donde se trabaja por proyectos y no se determina el número de horas destinadas a la enseñanza de las matemáticas además de que no se cuenta con un libro de actividades o ejercicios puramente de matemáticas que a diferencia de la NEM y el Programa Sintético sólo vienen los contenidos y depende del docente cómo integrarlos a los proyectos.

4.3 Conclusiones de la primera etapa del estudio

En la primera etapa de la investigación correspondiente al cuestionario inicial fases I y II, entrevistas clínicas piagetianas y entrevista semiestructurada a la docente, se comprobó lo que señala la literatura acerca de los errores comunes que presentan los estudiantes en torno al concepto de fracción y sus diferentes significados y contextos de uso. Conciben los números fraccionarios como dos números separados, numerador y denominador, en la comparación de fracciones los entienden como números naturales, consideran que ⅕ es mayor a ½ porque 5 es mayor que 2, no identifican la idea de mitad y de entero en figuras no canónicas, tiende a considerar como mitad toda figura dividida en dos partes independientemente de que esté sombreada o no, consideran como entero solo aquellas figuras que no estén divididas, tienen dificultad para leer y representar gráficamente fracciones impropias y mixtas, cuentan todas las partes de los enteros y las consideran como denominador y las partes sombreadas como numerador, no identifican la unidad en la recta numérica consideran el entero como toda la recta independientemente de que ya esté dividida en enteros. No discretizan la recta numérica de forma proporcional. Dentro de las estrategias

de resolución ocupan la retención de imágenes para concebir la mitad y el entero en figuras no canónicas, en la suma y resta de fracciones trabajada en la segunda parte del cuestionario inicial confunden el algoritmo de la suma con el de la multiplicación y la división, utilizan la estimación matemática y la representación gráfica de manera intuitiva para obtener los resultados.

Cabe señalar que el diagnóstico es un trabajo distinto a las evaluaciones convencionales que se lleva a cabo para evaluar los contenidos matemáticos aprendidos durante el ciclo escolar donde sólo se busca asignar un puntaje, una calificación que determina si el alumno sabe o no. Pero pocas veces o nunca se investiga las causas de los errores. Durante la aplicación de un examen escolar, el docente interviene para favorecer a los alumnos en la obtención de los resultados, los alumnos copian respuestas presionados para obtener una calificación. En cambio, el diagnóstico no busca asignar una calificación que justifique el aprovechamiento escolar sino explorar el pensamiento del niño en torno a las ideas matemáticas relacionadas con el concepto de fracción. Al no haber una calificación implicada en la actividad, se espera que los alumnos, libres de presión, respondan de forma natural y personal. En la aplicación del diagnóstico, se tuvo el cuidado de que los alumnos no copiaran ni borraran sus respuestas y notaciones que ocuparon en la solución aunque se hubieran percatado de haberse equivocado, se les solicitó que añadieran a un lado la corrección que consideraban necesaria. También se evitó que el docente interviniera sugiriendo respuestas, proporcionando orientación adicional que orientase a una posible solución.

Las entrevistas clínicas piagetianas fueron un elemento importante que proporcionó información sobre los procesos cognitivos que los alumnos desarrollan cuando resuelven actividades matemáticas. Información que permitió conocer las concepciones de los estudiantes, sus dificultades conceptuales y procedimentales, las estrategias de resolución y dar sentido a sus notaciones gráficas, para diseñar la secuencia didáctica y guiar la enseñanza.

Con base al diagnóstico de la primera etapa, cuestionario y entrevistas, se observó que los estudiantes se encuentran en las ideas matemáticas iniciales referentes al concepto de

fracción de acuerdo al modelo de entendimiento recursivo de Kieren, que son partición , equivalencia y formación de la unidad. Por lo que la secuencia didáctica se trabajó a partir de la propuesta de Coxford y otros (1975, citado en Butto, 2013) con la idea de mitad y de entero en cantidades continuas y discretas, representación de fracciones propias e impropias en figuras geométricas y en cantidades discretas y en la recta numérica y no numérica y suma y resta de fracciones sin algoritmo, a partir de la elaboración y manipulación de material concreto: círculos, tiras de papel y fichas.

Capítulo V

Resultados de la segunda etapa: secuencia de actividades

El capítulo presenta los resultados obtenidos en la segunda etapa del estudio correspondiente a la secuencia didáctica sobre números fraccionarios. Inicialmente, se presenta el objetivo de la secuencia, seguido de las características de la misma, la aplicación de la secuencia, así como la descripción de las interacciones en la instrucción guiada. Posteriormente se describen las actividades llevadas a cabo con los estudiantes participantes del estudio y se termina con las consideraciones finales de la secuencia didáctica.

5.1 Objetivo y características

El objetivo de la secuencia de actividades hecha para este estudio, es crear un esquema conceptual a partir de situaciones concretas (Llinares y Sánchez, 1997).

De acuerdo a los resultados obtenidos en el cuestionario inicial de fracciones fase I y II y las entrevistas realizadas a los 6 alumnos, se observó que estos se encuentran en el primer nivel de comprensión matemática según el modelo de entendimiento recursivo de Kieren (1993): partición, equivalencia de cantidad y formación de unidad, que es el nivel más básico en cuanto al concepto de fracción, por lo que se trabajaron en la secuencia de actividades la ideas de: parte-parte y parte-todo, suma y resta de fracciones sin algoritmo, cantidades discretas, recta numérica y recta no numérica.

Los errores que los estudiantes cometen en el aprendizaje de las fracciones, constituye todo un campo de conocimiento para la instrucción guiada y la toma de decisiones por parte de los profesores (Kieren, 1993). Por lo que el diagnóstico inicial y la entrevista clínica individual nos permitió comprobar lo que la literatura señala acerca de cuáles son los errores más comunes que los estudiantes de todo el mundo presentan en el aprendizaje de las fracciones. Uno de

ellos es considerar a los denominadores como números naturales, lo que implica que si el numerador es más grande consideran que la fracción es mayor. Por lo tanto, considerando estos errores el diseño de la secuencia permite generar situaciones en donde los alumnos experimenten y comprueben, que el orden de los números fraccionarios es distinto; entre más grande el denominador, y más pequeña la fracción. Por eso, para implementar la secuencia, es fundamental considerar estos errores para guiar la instrucción y generar situaciones que, junto con el material, permitirán que el alumno compruebe, experimente esa propiedad de los números fraccionarios y esa distinción con los números naturales, ya que los números naturales son un obstáculo en la transición para aprender los números fraccionarios. De tal manera que el objetivo de la secuencia no es obtener respuestas correctas, sino enseñar a razonar matemáticamente a los alumnos.

La elaboración y manejo del material también se pensó como una oportunidad para que los estudiantes revisen, corrijan y comprueben sus afirmaciones matemáticas. Las actividades están diseñadas para que los estudiantes comprueben cómo funcionan los números fraccionarios (sentido numérico) explicando el propósito de los materiales que habían construido y describir cómo debían usarse, estableciendo una conexión con los contenidos.

5.2 Aplicación de la secuencia

La secuencia se trabajó con los 24 alumnos del grupo en 6 equipos de 4 integrantes para el manejo del material, donde quedaron distribuidos los 6 alumnos entrevistados, y de forma binaria la resolución de la hoja de datos correspondiente a cada parte de la secuencia. Se señala que para el análisis de los resultados de la segunda etapa del estudio únicamente se tomaron en cuenta las respuestas de los 6 alumnos entrevistados, porque es con estos 6 alumnos con los que se llevó a cabo un seguimiento de cómo evolucionó su pensamiento respecto a los números fraccionarios.

En seguida, se presenta un esquema de cómo se organizó la secuencia de actividades, mencionada previamente en el capítulo de la Metodología.

Tabla 10. *Organización de las sesiones de la secuencia de actividades*

Número de sesión	Objetivo	Contenido matemático	Duración	Material	Forma de Trabajo
1	Que los niños reconozcan la idea de parte-todo, parte-parte mediante la actividad y el uso del material propuesto.	Parte-todo y Parte-parte	Hora y media	Material hecho de fomi organizado en 10 círculos de 20 cm cada uno, correspondientes a diferentes fracciones: entero, medios, tercios, cuartos, quintos, sextos, séptimos, octavos, novenos y décimos. Hojas de trabajo.	De forma binaria en grupos de 2 y 4 niños.
2			Hora y media		
3	Que los niños reconozcan la idea de cantidades discretas mediante la actividad y el uso del material propuesto.	Cantidades discretas	Hora y media	Fichas de un solo color. Hojas de trabajo	De forma binaria en grupos de 2 y 4 niños.
4			Hora y media		
5	Que los niños reconozcan la idea de fracciones en la recta numérica mediante la actividad y el uso del material propuesto.	Recta numérica	Hora y media	Tiras de papel de diferentes tamaños: 1 metro, ½ metro, ¼ de metro y ⅛ de metro. Hojas de trabajo	De forma binaria en grupos de 2 y 4 niños.
6			Hora y media		
7			Hora y media		
8			Hora y media		

Antes de pasar a la explicación de las sesiones, es importante señalar que la secuencia se desarrolló bajo una instrucción guiada sustentada en Lamper (2001) y establecida desde el inicio de la secuencia, lo que permitió estructurar la forma y modo de desarrollar el trabajo con el grupo, por ello, se describe más adelante.

El registro y las observaciones quedaron hechas en las notas de campo de cada sesión. Al respecto, las notas de campo son observaciones puntuales, recogidas la mayoría de las

veces de forma inmediata, “sobre el terreno”, por su relevancia y que no pueden abandonarse a la memoria (McKerman, 2001).

Las notas de campo complementaron el análisis de los resultados registrados en las hojas de trabajo.

5.3 Descripción de las interacciones en la instrucción guiada

El quehacer matemático y el aprendizaje de los contenidos matemáticos depende de las interacciones entre el instructor y los alumnos, entre el instructor y los contenidos matemáticos, entre los alumnos y los contenidos matemáticos, y las relaciones entre los propios alumnos, las cuales no se reducen a los intereses académicos (Lamper, 2001). Por lo que el establecimiento de normas de acción e interacción son necesarias para llevar a cabo la instrucción guiada de la secuencia didáctica y generar lo que Lamper (2001) considera una cultura del aula donde la enseñanza de las matemáticas no se reduce al aprendizaje de contenidos académicos de forma mecánica, sin comprensión donde los prejuicios establecidos tradicionalmente sobre que hay alumnos “inteligentes para las matemáticas” y “otros que no lo son” puedan ser superados a partir de las interacciones de razonar y expresar afirmaciones matemáticas públicamente, por lo que en las ocho sesiones de la secuencia didáctica se promovieron normas de interacción.

Dentro de las normas de acción e interacción que se establecieron dentro del aula se destaca que todos los estudiantes participen dentro de la actividad, se estructuró el entorno y la organización de los equipos para evitar, en la medida de lo posible, los distractores y centrar el trabajo en las actividades y no se persiguieran otras intenciones que se generan cuando se trabaja en equipos.

El establecimiento de estas normas permite regular el trabajo. Para lograr este fin, se distribuyeron las bancas de modo que los estudiantes se sentaran en grupos de cuatro y pudieran ver el pizarrón.

Generar una forma de socializar y participar forma parte de esas normas por lo que se señaló que pensar y trabajar en colaboración era una condición para el estudio, que la tarea no era cómo resolver un problema en particular con los números fraccionarios sino los principios generales que gobiernan las propiedades de estos números.

Las siguientes son las normas de acción, de acuerdo a Lamper (2001), que se promovió para llevar a cabo la secuencia durante las ocho sesiones. Estas normas de acción permiten modelar las interacciones entre los alumnos para que los estudiantes participen en la búsqueda de sentido matemático:

1. Emitir juicios

Cuando los estudiantes hablen, tendrían que hacerlo de una manera que todos pudieran escuchar, tendrían que aprender a hablar y escuchar matemáticas.

Les dije a los estudiantes que era su responsabilidad hablar de manera que todos pudieran escuchar las ideas de los demás. Esto les permitiría pensar en lo que otra persona había dicho.

2. Razonar y reflexionar sobre la naturaleza de la práctica matemática.

El trabajo va más allá de simplemente escuchar, debían reflexionar sobre lo que habían oído de tal manera que verían si estaban de acuerdo o en desacuerdo, y si alguien tenía algo que agregar.

3. Solicitar más de una contribución

Se considerarían múltiples ideas que pudiesen hacer una contribución útil incluso si alguien más hubiese hablado primero. Las explicaciones, podrían basarse, y de hecho se hace, en el pensamiento de los demás.

4. Responder a cada contribución de una manera que comunique mi comprensión (no necesariamente aprobación) de lo que el estudiante dice; y pedir a los estudiantes que repitan las contribuciones de otros estudiantes

Estas reglas de acción están encaminadas a generar relaciones de trabajo entre los estudiantes

5. Pensar la idea y comunicar lo que está pensando a otra gente.

Es enseñar a los estudiantes a razonar sobre sus acciones investigando el significado en público. Revisar es investigar el significado en público, es tener una idea y ver si se esta de acuerdo o en desacuerdo y si tengo algo que agregar.

Cada estudiante necesita aprender que sus contribuciones serán tomadas en serio, que no se agota el tema con una sola respuesta por lo que revisar el propio trabajo y el de los demás permite que los estudiantes observen la evolución de su pensamiento y reemplacen una respuesta incorrecta por la correcta y hablar de lo que se está haciendo repasando una y otra vez las propias ideas, de esta manera la revisión se convierte en un método de estudio.

Cuando los estudiantes revisan sus ideas en un contexto matemático permite cambiar lo que piensan sobre los roles de los compañeros de clase "inteligentes" y “menos inteligentes” y sobre cómo interactuar con ellos. Al evaluar sus propias afirmaciones o las de sus pares para decidir si tales afirmaciones necesitaban o no ser revisadas, promueve el razonamiento matemático y utilizar el razonamiento matemático para estudiar contenidos. Lo que implica aprender nuevas formas de pensar en hacer matemáticas y en lo que significa ser bueno en matemáticas para que todos tengan acceso al razonamiento matemático como modo de estudio, estudiantes considerados por ellos mismos y por sus compañeros como de menor capacidad tendría que poder estar en desacuerdo con los estudiantes considerados "inteligentes" en matemáticas. Por el contrario, los estudiantes de mayor capacidad necesitarían respetar el pensamiento de todos los estudiantes, y si no estaban de acuerdo con alguien, poder explicar por qué (Lamper, 2001). Este método de estudio permite aprender

tanto contenidos matemáticos como prácticas matemáticas. Al reflexionar sobre si sus propias afirmaciones y las de sus compañeros eran razonables, podrían participar en una actividad que les haría intercambiar ideas y procedimientos en sus mentes, examinando los procedimientos que se estaban siguiendo e investigando interpretaciones alternativas de los problemas y sus consecuencias, soluciones.

Así como también reconocer la corrección manteniendo el civismo en las interacciones de los estudiantes entre sí, permite estar en desacuerdo con la afirmación de otro estudiante, cómo usar argumentos matemáticos para estudiar lo que necesitaban aprender

Para tener este tipo de "intercambio" en el que un estudiante escucha a otro y cuestiona la afirmación hecha por el orador es fundamental el “modelado del desacuerdo” para que no sea contraproducente social e intelectualmente para el estudiante que ha hecho la afirmación inicial, percibiendo su error como la capacidad que tiene para hacer matemáticas y no la particular afirmación que hizo y que estaba siendo cuestionada. Esa percepción amenaza las relaciones de los estudiantes.

6. Modelado de desacuerdo

Se puede estar de acuerdo o en desacuerdo sobre una afirmación pero debemos presentar razones. El modelado del desacuerdo debe ser respetuoso y fomentarse bajo condiciones que sean razonables y extender la responsabilidad más allá del profesor para evaluar cualquier afirmación. Es un procedimiento para investigar desacuerdos entre afirmaciones a través de razonamientos para saber qué conjetura tiene o no sentido, lo que implica cambiar el énfasis de la solución del problema como meta a la defensa de la conjetura como punto final. Es una manera de hacer públicas muchas "soluciones" posibles sin competencia para que los estudiantes puedan ver dónde está su pensamiento en relación con sus pares, resaltando los supuestos importantes y el significado compartido, es una manera de impulsar el refinamiento de una idea parcialmente correcta; juzgar sus propios trabajo y el trabajo de otros para evaluar lo que tiene sentido, conversando entre sí y aprender a dar forma en las

interacciones al emitir sus afirmaciones y enseñando a sus compañeros por qué sus soluciones tienen sentido. Por lo que se debe estar dispuesto a ayudar a cualquier persona en su grupo que pregunte y su grupo es la gente en tu mesa.

La gente tiene que acostumbrarse a preguntar, unos a otros para pedir ayuda cuando la necesitan.

Como se mencionó al inicio del capítulo, el registro de las interacciones quedó plasmado en las notas de campo y se utilizaron algunas de ellas para complementar el análisis de los resultados asentados en las hojas de trabajo.

5.4 Primera parte: Parte-parte, parte-todo

En la primera sesión de la secuencia de actividades “parte-todo y parte-parte” se utilizó material hecho de fomi en 10 círculos de diferentes colores de 20 cm cada uno, correspondientes a diferentes fracciones: entero, medios, tercios, cuartos, quintos, sextos, séptimos, octavos, novenos y décimos. Para la elaboración de este material se utilizó compás, transportador, escuadras y se recuperaron los conocimientos previos acerca del trazo de círculos, ángulos, la graduación de las escuadras y la división.

Para elaborar los medios, se trazó una línea a la mitad pasando por el centro, para los cuartos se trazó una segunda línea que dividiera en cuatro el círculo.

Para elaborar los sextos, se empleó la escuadra de 60°, para los octavos se usó la escuadra de 45°.

Para los tercios, quintos, séptimos, novenos y décimos se dividió la circunferencia (360°) entre el número de partes solicitado (3,5,7,9 y 10) para obtener los grados; 120°, 72°, 51.4°, 40° y 36° y con ayuda del transportador se dividieron los círculos en las partes correspondientes.

En la segunda sesión, se organizó el grupo en 6 equipos de 4 integrantes. Primero se identificaron cada una de las fracciones hechas con los círculos y se recordó su nombre colocando el número fraccionario en cada una de las partes: ½, ⅓, ¼, ⅕, ⅙, 1/7, ⅛, 1/9, 1/10.

Se les preguntó por el significado del numerador y el denominador y se solicitó que tomaran una fracción de cada uno de los círculos y las ordenaran de mayor a menor, se les preguntó qué sucedía con el denominador a medida que la fracción se iba haciendo más pequeña, los alumnos reconocieron que al ordenar las fracciones en el orden; ½, ⅓, ¼, ⅕, ⅙, 1/7, ⅛, 1/9, 1/10, el denominador se iba haciendo más grande y las fracciones del círculo más pequeño, orden contrario a los números naturales, aspecto fundamental para la ubicación de fracciones en la recta numérica.

Posteriormente se trabajó la comparación de fracciones unitarias, para reforzar la noción de que entre más grande es el denominador, menor es el tamaño de la fracción. Ejemplo: ¿qué es más grande; ½ o 1/5?, los niños que insistían en el orden de los números naturales y señalaban que ⅕, se les pedía que lo comprobaran con el material tomando el ½ y el 1/5 . Después de varios ejercicios, se pasó a comparar equivalencias. Se les preguntó: ¿½ a cuántos tercios, cuartos, quintos, sextos, séptimos, octavos, novenos y décimos es igual, sin que le falte, ni le sobre? Algunos niños comenzaron comparando las fracciones una frente a otra para medir sus tamaños:

Figura 41. *Primera parte de la secuencia de actividades: parte-parte, parte-todo*

Nota. Los estudiantes comparan tamaños con el material.

Otros utilizaron una hoja y dibujaron el contorno del medio y sobre ella el contorno del resto de las fracciones como medida y otros superpusieron las fracciones:

Figura 42 . *Primera parte de la secuencia de actividades: parte-parte, parte-todo.*

Nota. Los estudiantes superponen las fracciones.

Después de realizar la actividad se les pidió que comentaran la manera en la que cada uno lo resolvió, lo que permitió identificar la forma más conveniente de comprobar los tamaños de las fracciones, coincidiendo en que no era necesario dibujar, ni comparar una frente a otra sino superponerlas.

Se reconoció que ½ sólo tiene equivalencias con cuartos, sextos, octavos y décimos, y que en tercios, quintos y décimos no hay equivalencia con los medios.

Recuperando la estrategia de superposición de las fracciones, se les solicitó que buscaran diferentes maneras de formar ½, combinando las fracciones entre sí por ejemplo; si se tiene ¼, ¿qué otra fracción, diferente a ¼ puedo agregar para formar ½ ?

El alumno 1-O contestó, casi inmediatamente, sin usar el material: “2/8”, se les solicitó lo comprobaran.

Otra alumna Ch dice: “⅓”, N interviene y dice “no, ⅓, no, se pasa”, se les solicitó comprobar. Ch corrige diciendo: “sí, se pasa” y ella misma agrega después de comprobar “con el tercio sería ⅓ con ⅙” y se les pidió comprobar.

Se les pregunta si hay alguna otra manera de obtener ½ y después de probar con diferentes fracciones. El alumno 3-L dice: “⅕ y 3/10”.

Finalmente se trabajó suma y resta de fracciones a partir de lo ya explorado y la formulación de preguntas.

Se comienza con suma con igual denominador y fracciones unitarias; ¼ + ¼, ⅛ + ⅛ , ½ + ½, etc y se les solicita decir si hay otra manera de expresar los resultados para integrar la equivalencia. Por ejemplo:l alumno 1-O contesta que ¼ + ¼ son 2/4 pero que también es ½. X contesta que ⅛ +⅛ son 2/8 pero también es ¼, otro agrega que ½ + ½ son 2/2 pero que también es un entero.

Dado los resultados obtenidos y las equivalencias detectadas, se les pide contestar cuánto es “½ menos ¼”, “¼ menos ⅛”, “⅓ menos ⅙”. Comenzando de esta manera el trabajo de la adición con diferente denominador.

Posteriormente, se les pregunta cuánto es ½ más ¼ , ⅓ más ⅙, ¼ más ⅛, 2/8 más 3/6, ⅕ más 2/10, conforme van respondiendo se les pide que expliquen su respuesta y lo comprueben con el material.

A continuación, se trabajó las fracciones impropias o mixtas sumando fracciones unitarias y no unitarias. Se les solicitó sumaran 2/2 más ½ , contestando ya sin el material, varios de los alumnos: “3/2”, se les pregunta si hay otra forma de expresarlo, O contesta “sí, 1 ½ “, “cómo lo sabes?”, “si un medio más un medio es un entero y tenemos 3/2 entonces es 1 ½” señala esto al mismo tiempo que coloca los 2/2 sobre el entero, después toma el entero con una mano, los levanta y dice: “aquí tenemos 2/2” mostrando el entero “más ½, 1 entero ½” se les solicita a todos comprobarlo.

como: “si tengo ¼, cuánto me falta para tener ½ “, “cuánto es ¼ más 2/8”, “cuánto es ⅓ más 2/6”.

En la tercera sesión se trabajó de forma binaria para llenar la hoja de trabajo.

5.4.1 Hojas de trabajo

Al concluir la exploración y manejo del material, se procedió a contestar la hoja de trabajo

Las hojas de trabajo se resolvieron en forma binaria con el apoyo del material, aunque hubo alumnos que la contestaron ya sin el material.

Figura 43. *Primera parte de la secuencia de actividades: parte-parte, parte-todo*

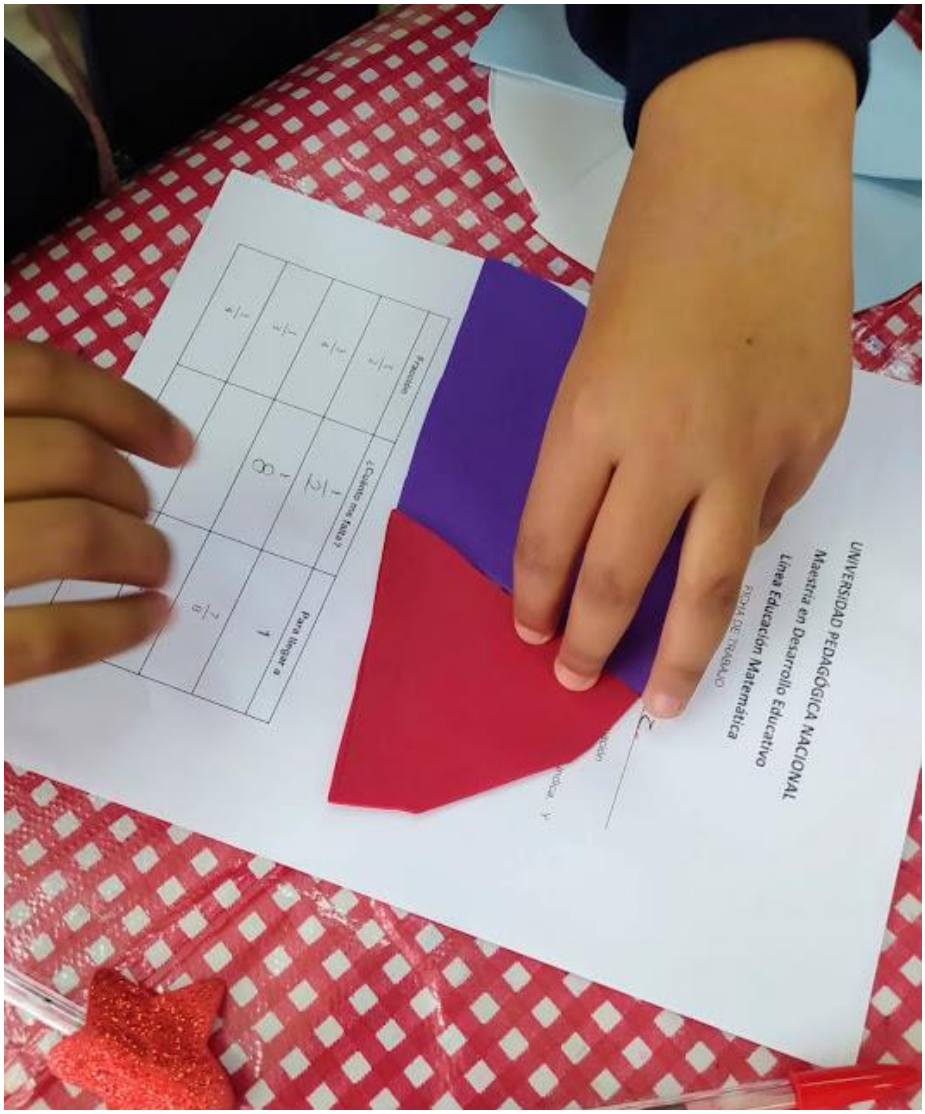
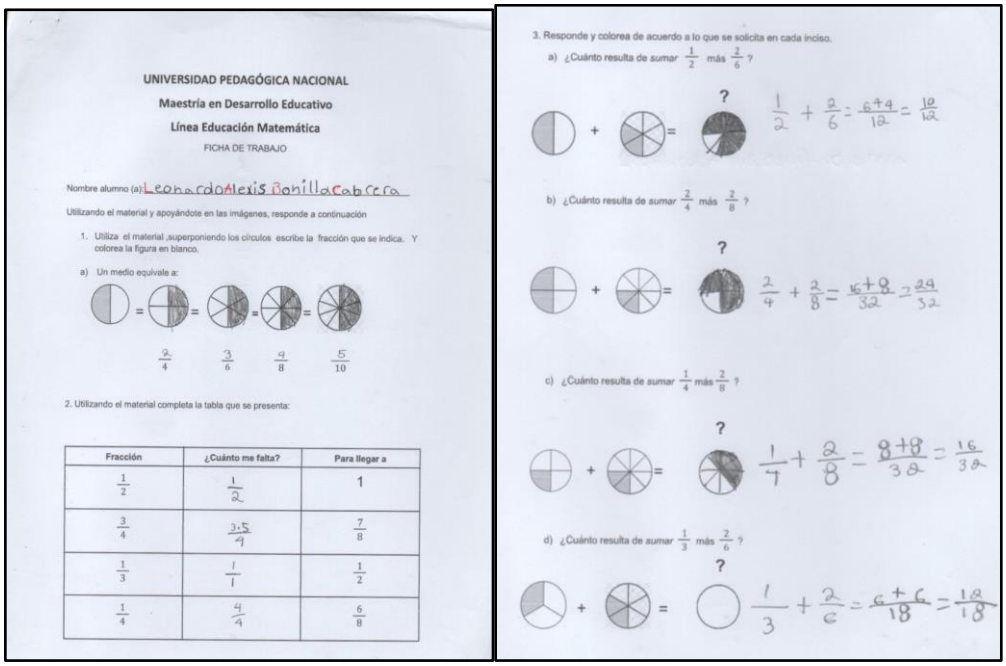


Figura 44. *Hojas de trabajo de la primera parte de la secuencia "parte-todo, parte-parte".*



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

Maestría en Desarrollo Educativo

Línea Educación Matemática

FICHA DE TRABAJO

Nombre alumno (a): Leonardo Alexis Bonilla Cabrera

Utilizando el material y apoyándote en las imágenes, responde a continuación

1. Utiliza el material ,superponiendo los círculos escribe la fracción que se indica. Y colorea la figura en blanco.

a) Un medio equivale a:

= = = = =

$\frac{2}{4}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{4}{8}$ $\frac{5}{10}$

2. Utilizando el material completa la tabla que se presenta:

Fracción	¿Cuánto me falta?	Para llegar a
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{3}{4}$	$\frac{3.5}{4}$	$\frac{7}{8}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{6}{8}$

3. Responde y colorea de acuerdo a lo que se solicita en cada inciso.

a) ¿Cuánto resulta de *sumar* $\frac{1}{2}$ más $\frac{2}{6}$?

? + = $\frac{1}{2} + \frac{2}{6} = \frac{6+4}{12} = \frac{10}{12}$

b) ¿Cuánto resulta de *sumar* $\frac{2}{4}$ más $\frac{2}{8}$?

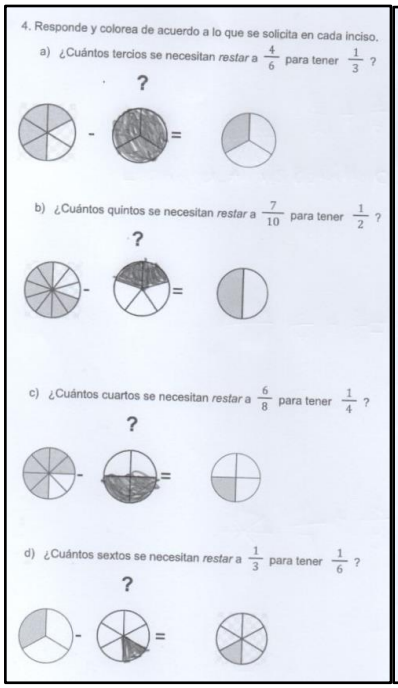
? + = $\frac{2}{4} + \frac{2}{8} = \frac{16+8}{32} = \frac{24}{32}$

c) ¿Cuánto resulta de *sumar* $\frac{1}{4}$ más $\frac{2}{8}$?

? + = $\frac{1}{4} + \frac{2}{8} = \frac{8+8}{32} = \frac{16}{32}$

d) ¿Cuánto resulta de *sumar* $\frac{1}{3}$ más $\frac{2}{6}$?

? + = $\frac{1}{3} + \frac{2}{6} = \frac{6+6}{18} = \frac{12}{18}$



4. Responde y colorea de acuerdo a lo que se solicita en cada inciso.

a) ¿Cuántos tercios se necesitan *restar* a $\frac{4}{6}$ para tener $\frac{1}{3}$?

? - =

b) ¿Cuántos quintos se necesitan *restar* a $\frac{7}{10}$ para tener $\frac{1}{2}$?

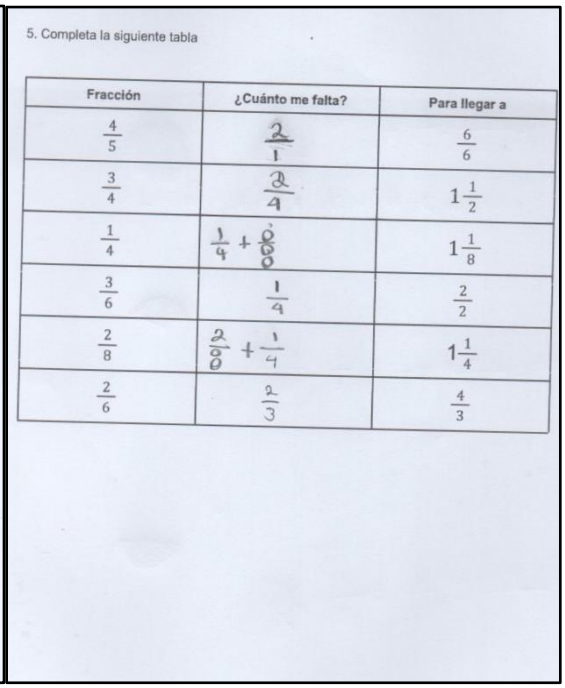
? - =

c) ¿Cuántos cuartos se necesitan *restar* a $\frac{6}{8}$ para tener $\frac{1}{4}$?

? - =

d) ¿Cuántos sextos se necesitan *restar* a $\frac{1}{3}$ para tener $\frac{1}{6}$?

? - =



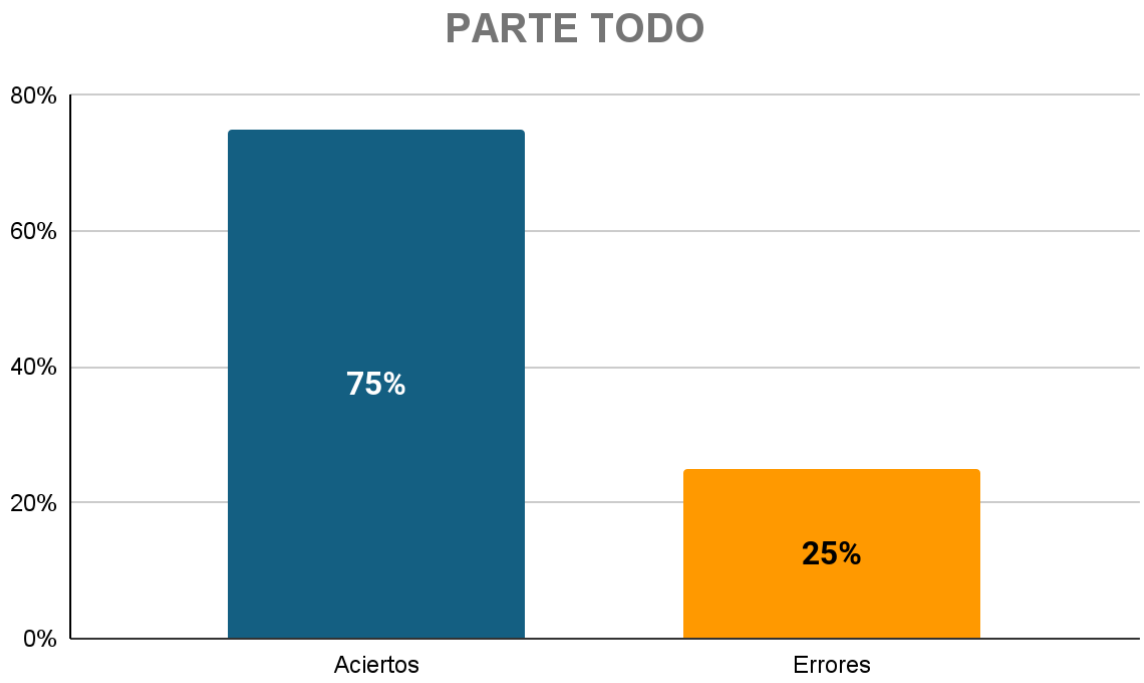
5. Completa la siguiente tabla

Fracción	¿Cuánto me falta?	Para llegar a
$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{6}{6}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{4}$	$1\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} + \frac{2}{8}$	$1\frac{1}{8}$
$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{2}$
$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8} + \frac{1}{4}$	$1\frac{1}{4}$
$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$

Nota. Los estudiantes resuelven las hojas de trabajo con el material propuesto. Las hojas de trabajo completas pueden revisarse en el ANEXO 4.

A continuación se muestran los resultados obtenidos de las hojas de trabajo:

Figura 45. *Porcentaje de aciertos y errores de las hojas de trabajo*



5.5 Segunda parte: Cantidades discretas

Se utilizaron fichas de un solo color para trabajar diferentes temas y responder la hoja de datos. Se trabajó con diferentes unidades o enteros considerando que el conjunto de fichas determina la unidad o el entero y que ésta puede variar dependiendo del número de elementos. Se empezó determinando el número de alumnos del grupo por cantidad de fichas (24 alumnos igual a 24 fichas), se les pidió que determinaran con el apoyo de las fichas a

cuánto correspondía la mitad del grupo, un tercio del grupo, un cuarto, un sexto y un octavo del grupo.

Primero, cada equipo puso 24 fichas al centro de la mesa, y hubo distintas resoluciones.

En el equipo 3, inicialmente separaron una por una el total de las fichas para saber cuánto era ½ de ellas. La alumna 4-Ch, se refirió a este proceso como: “estamos separando una y una (apartando en dos lados opuestos las fichas) para sacar la mitad”. Luego contaron las fichas de cada parte y concluyeron que ½, la mitad del grupo, eran 12.

El equipo 1 rápidamente determinó el 1/2 , “son 12” respondió el alumno 2-O, “la mitad del grupo son 12”, sin hacer uso del material. Se les pidió comprobar su respuesta y acomodaron las fichas en dos secciones con 3 columnas de 4 fichas cada una, “hay lo mismo en los dos lados” contestó el alumno 3-L.

El equipo 2 y 4 separaron sus fichas en dos montones sin contarlas inicialmente y fueron determinando la mitad pasando fichas al montón que lo requiriera.

El equipo 2, empezó a contar las fichas después de haberlas separado: tenían 11 y 13 y concluyeron pasar una ficha del montón de 13 al de 11 fichas. “Hay 12 y 12”, señalando la alumna 1-X cada montón de fichas.

El equipo 4, después de separar las fichas en 2 montones indeterminados, comenzó a acomodar las fichas de tal manera que tuvieran la misma forma. De dos en dos, acomodaron 6 filas e iban pasando fichas del montón que tenía más al otro para lograr tener la misma cantidad en ambos lados. “Ya está, la mitad y la mitad, aquí hay 12 fichas y aquí también” dijo la alumna 5-N señalando.

Para ordenar las fichas en tercios, nuevamente el alumno 3-O respondió rápidamente que la tercera parte correspondía a 8 fichas, al preguntarle cómo lo resolvió contestó que “dividiendo” y al momento de comprobarlo con el material, el equipo organizó en 3 partes las fichas y cada parte estaba organizada en 2 columnas de 4 fichas cada una.

El equipo 3, usó el mismo método que usó para resolver la mitad de las fichas, fue separando de una en una el total de las fichas en tres distintos lugares, acomodándolas en esta ocasión una detrás de otra quedando tres filas de ocho fichas.

Nuevamente los equipos 2 y 4, decidieron dividir la cantidad total de fichas en tres montones calculando partes iguales al tanteo y a continuación definen la cantidad de cada montón contando las fichas y comparando hasta llegar a 3 cantidades equivalentes.

De la misma forma, se trabajaron los cuartos, sextos y octavos. El proceso de resolución de los equipos continuó de la misma forma.

A continuación, se les solicitó que determinaran la fracción respectiva a los niños y a las niñas en el grupo (16 niñas y 8 niños), lo que de inicio provocó algunas dudas sobre cómo resolver dicho planteamiento y, a diferencia de las fracciones anteriores, tardaron un poco más en contestar.

Un alumno comentó que los niños representaban una tercera parte del grupo porque “si se divide el grupo (24 alumnos) en 3, daba 8 y los niños eran 8” y que por lo tanto las niñas correspondían a dos terceras partes del grupo.

Finalmente, para enfatizar el manejo de fracciones en cantidades discretas se plantearon situaciones donde no era posible fraccionar la unidad. Se preguntó a los niños que qué pasaría si se pidiera dividir en quintos el grupo; a lo que, inicialmente, los niños reaccionaron queriendo dividir la cantidad total de alumnos pero al percatarse que no quedaban fracciones iguales dijeron que no se podía. Al preguntar porqué el alumno 2-O respondió: “no se puede partir un niño…” y al plantear si sucedería lo mismo con el grupo de 6° C donde hay 25 alumnos, él mismo dijo que sí se podrían formar quintos ya que 25 sí puede dividirse exactamente entre cinco.

5.5.1 Hoja de trabajo

Las hojas de trabajo de la segunda parte de la secuencia de actividades, se resolvieron en forma binaria con el apoyo del material, aunque hubo alumnos que la contestaron ya sin el material.

Figura 46. *Segunda parte de la secuencia de actividades: cantidades discretas*

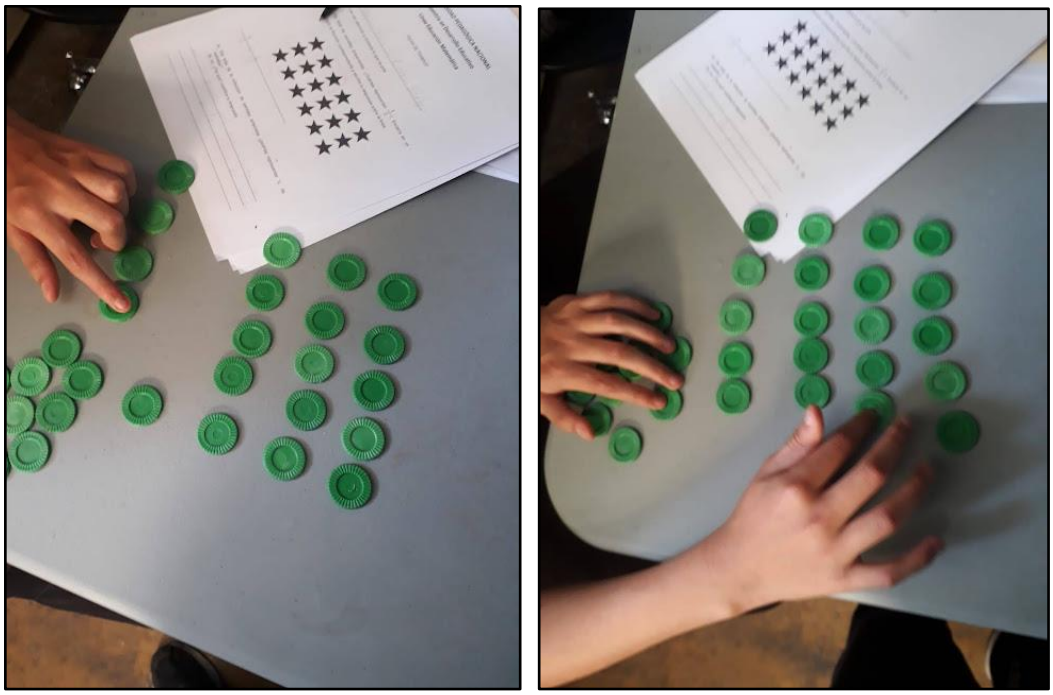
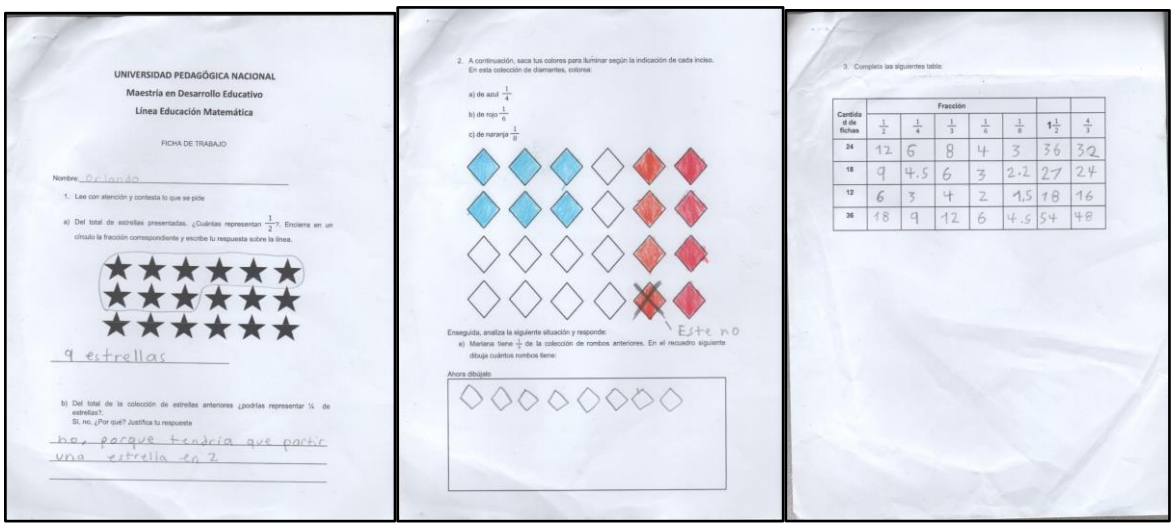


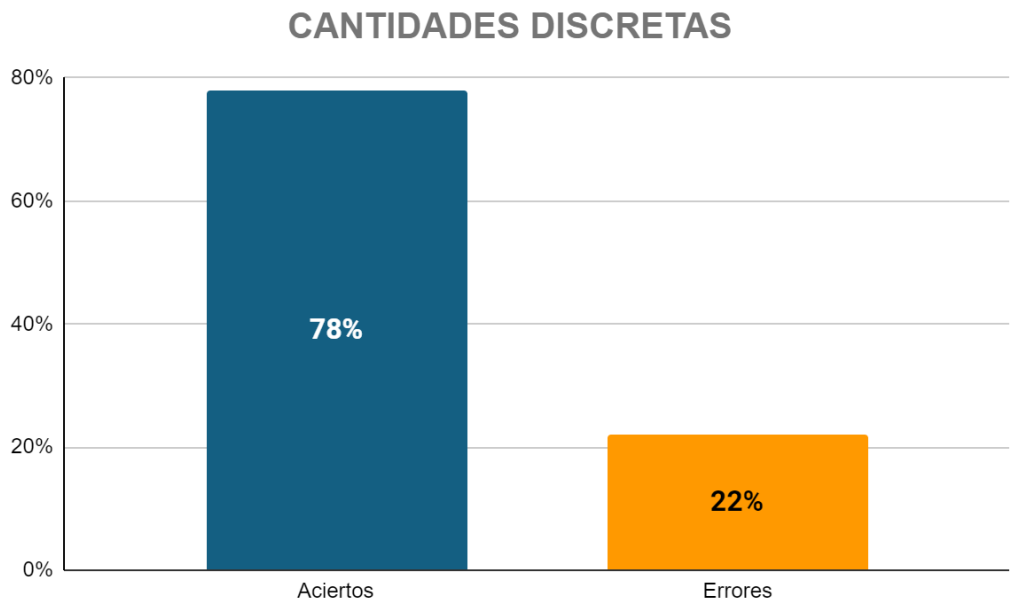
Figura 47. *Hojas de trabajo de la segunda parte de la secuencia “cantidades discretas”*



Nota. Los estudiantes resuelven la hoja de datos con el material propuesto. Las hojas de trabajo completas pueden revisarse en el ANEXO 4.

A continuación se muestran los resultados obtenidos de la hoja de datos

Figura 48. *Porcentaje de aciertos y errores de la hoja de datos*



5.6 Tercera parte: Recta numérica y no numérica

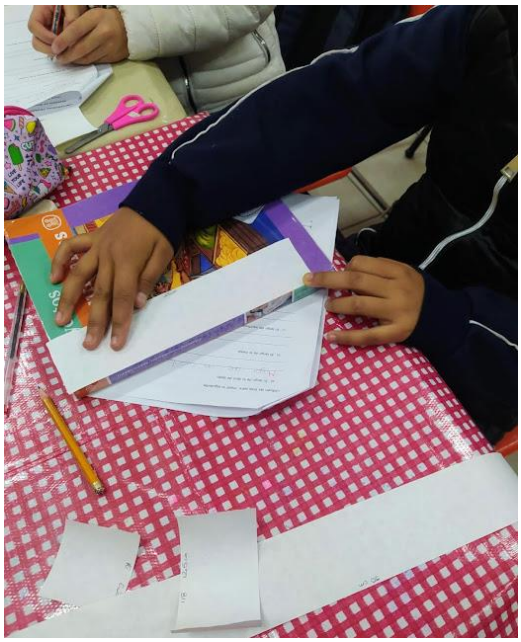
En la tercera parte de la secuencia de actividades “recta numérica”, se usaron tiras de papel de diferentes tamaños: 1 metro, ½ metro, ¼ de metro y ⅛ de metro, para medir objetos diversos del salón de clases: libro de texto, escritorio de la maestra, sus mesas y pizarrón. El material fue elaborado por los niños, con lo que identificaron el entero y las fracciones unitarias trabajadas anteriormente en las secuencias “parte-todo” y “cantidades discretas”.

En la primera sesión, se elaboraron las tiras de papel. Se les proporcionó una tira de un metro como unidad de medida para que ellos en equipos de cuatro integrantes, determinaran las

tiras de ½ y 1/4 . Para ello, cortaron dos tiras de un metro y las doblaron a la mitad y las recortaron para que cada integrante tuviera ½ . Posteriormente, cortaron otra tira de ½ y la dividieron en 4, doblando a la mitad y después otra vez a la mitad para obtener las tiras de ¼ . A continuación, se les preguntó qué otras medidas se podían obtener a partir de las medidas ya dadas, contestaron que si doblaban la tira de ¼ a la mitad, tendrían ⅛ , se les solicitó que lo hicieran y que comprobaran marcando la tira de 1 metro iterando con la fracción de ⅛ para determinar cuántas veces cabe en la tira de un metro; comprobaron que cabe ocho veces.

Se les preguntó qué otras fracciones se podían obtener y contestaron que si la tira de 1 metro se divide en tres partes, se tienen tercios, que si la dividen en cinco, obtienen quintos. Se les preguntó qué objetos del salón podríamos medir con las tiras de papel y determinar cuáles medían menos de un metro y cuáles rebasaban la unidad, cuáles podían ser medidos de manera exacta y cuáles de manera aproximada.

Figura 49. *Tercera parte de la secuencia de actividades: recta numérica*



Nota. Los estudiantes miden distintos objetos con las tiras de papel hechas.

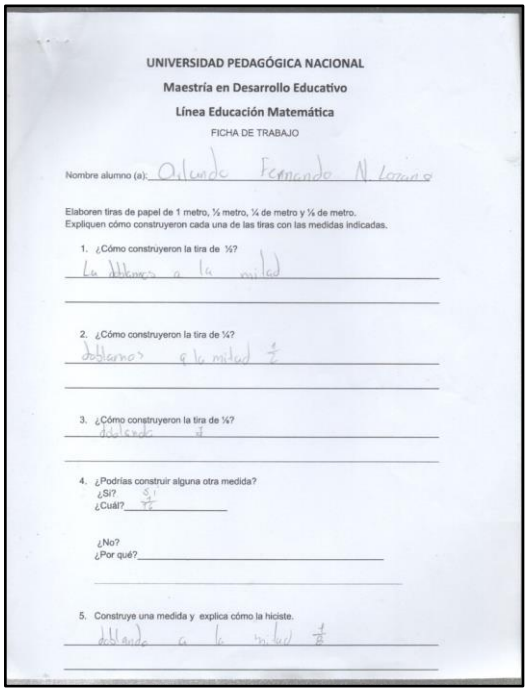
Posteriormente, en la segunda sesión respondieron la primera hoja de datos y en la tercera sesión la segunda hoja de datos.

El manejo del material sirvió para ubicar fracciones en la recta numérica y responder las preguntas en la hoja de datos.

5.6.1 Hoja de trabajo

Las hojas de trabajo de la tercera parte de la secuencia de actividades, se resolvieron en forma binaria con el apoyo del material, aunque hubo alumnos que la contestaron ya sin el material.

Figura 50. *Hojas de trabajo de la tercera parte de la secuencia de actividades: recta numérica*



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

Maestría en Desarrollo Educativo

Línea Educación Matemática

FICHA DE TRABAJO

Nombre alumno (a): Orlando Fernando N. Lozano

Elaboren tiras de papel de 1 metro, ½ metro, ¼ de metro y ⅛ de metro.
Expliquen cómo construyeron cada una de las tiras con las medidas indicadas.

1. ¿Cómo construyeron la tira de ½?
La doblamos a la mitad

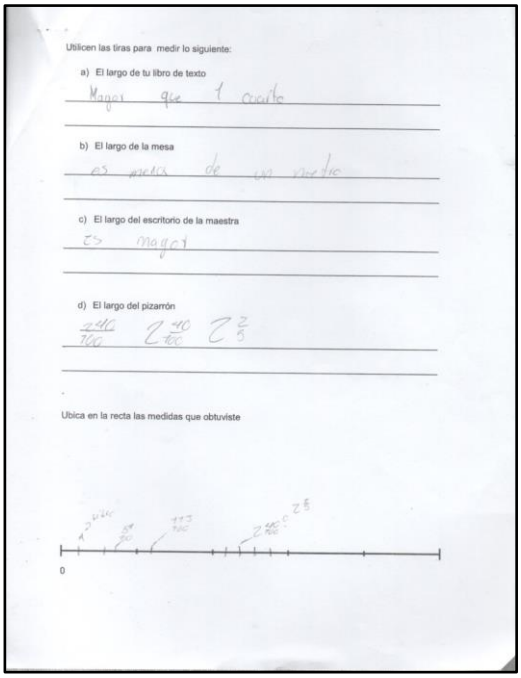
2. ¿Cómo construyeron la tira de ¼?
doblamos a la mitad $\frac{1}{2}$

3. ¿Cómo construyeron la tira de ⅛?
doblando $\frac{1}{4}$

4. ¿Podrías construir alguna otra medida?
¿Sí? Si
¿Cuál? $\frac{1}{2}$

¿No?
¿Por qué?

5. Construye una medida y explica cómo la hiciste.
doblando a la mitad $\frac{1}{8}$



Utilicen las tiras para medir lo siguiente:

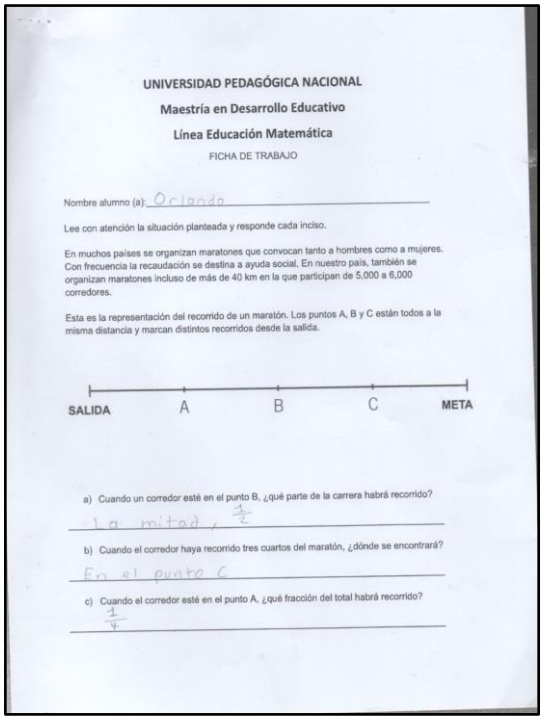
a) El largo de tu libro de texto
Mayor que 1 cuarta

b) El largo de la mesa
es menos de un metro

c) El largo del escritorio de la maestra
es mayor

d) El largo del pizarrón
$\frac{240}{100}$ $2\frac{40}{100}$ $2\frac{2}{5}$

Ubica en la recta las medidas que obtuviste



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

Maestría en Desarrollo Educativo

Línea Educación Matemática

FICHA DE TRABAJO

Nombre alumno (a): Orlando

Lee con atención la situación planteada y responde cada inciso.

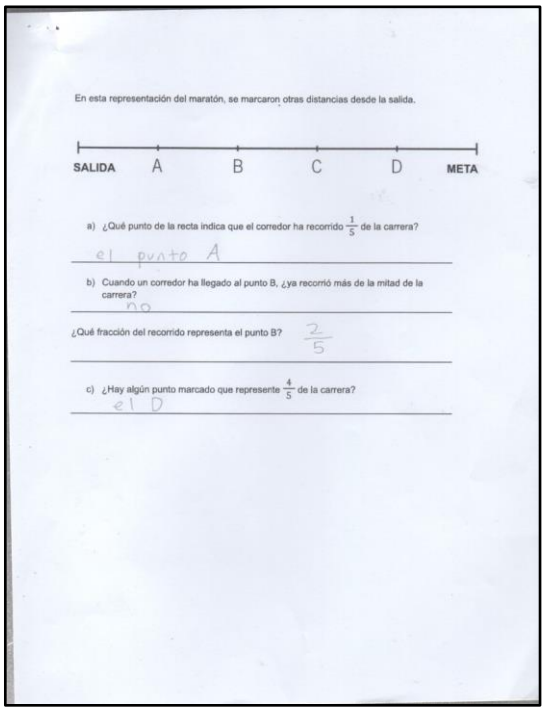
En muchos países se organizan maratones que convocan tanto a hombres como a mujeres. Con frecuencia la recaudación se destina a ayuda social. En nuestro país, también se organizan maratones incluso de más de 40 km en la que participan de 5,000 a 6,000 corredores.

Esta es la representación del recorrido de un maratón. Los puntos A, B y C están todos a la misma distancia y marcan distintos recorridos desde la salida.

a) Cuando un corredor esté en el punto B, ¿qué parte de la carrera habrá recorrido?
La mitad, $\frac{1}{2}$

b) Cuando el corredor haya recorrido tres cuartos del maratón, ¿dónde se encontrará?
En el punto C

c) Cuando el corredor esté en el punto A, ¿qué fracción del total habrá recorrido?
$\frac{1}{4}$



En esta representación del maratón, se marcaron otras distancias desde la salida.

a) ¿Qué punto de la recta indica que el corredor ha recorrido $\frac{1}{5}$ de la carrera?
el punto A

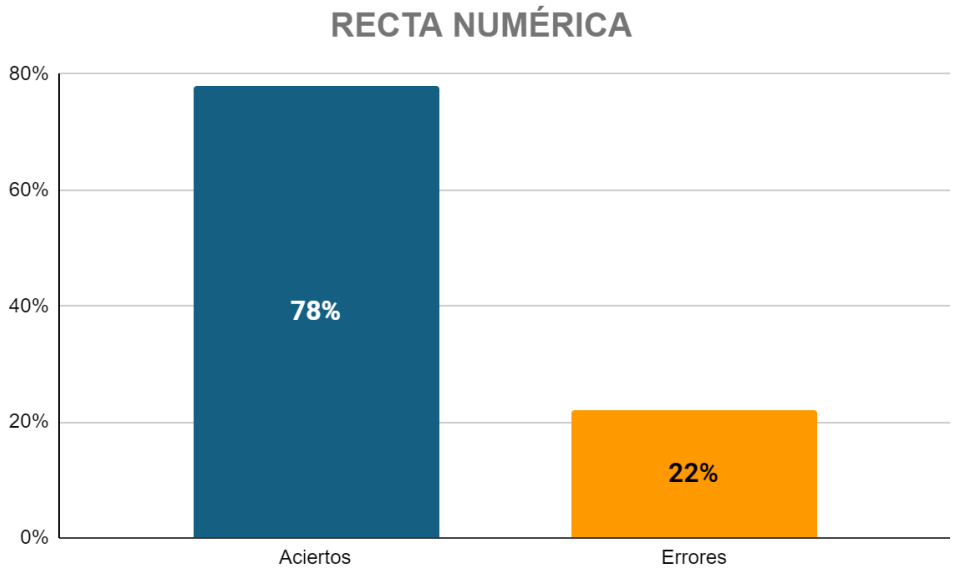
b) Cuando un corredor ha llegado al punto B, ¿ya recorrió más de la mitad de la carrera?
no

¿Qué fracción del recorrido representa el punto B? $\frac{2}{5}$

c) ¿Hay algún punto marcado que represente $\frac{4}{5}$ de la carrera?
el D

A continuación se muestran los resultados obtenidos de la hoja de trabajo

Figura 51. *Porcentaje de aciertos y errores de la hoja de trabajo*



5.7 Consideraciones finales de la secuencia didáctica

En este punto, cabe recordar que el objetivo particular de la secuencia se determinó a partir de los resultados del cuestionario inicial de fracciones donde los alumnos se encuentran en el nivel de comprensión de los números fraccionarios más básico y el mayor porcentaje de los errores fue por defectos en la comprensión del concepto de fracción.

El objetivo de la secuencia didáctica fue promover el interés, la motivación y el gusto por el quehacer matemático considerando lo que Freudenthal menciona que las matemáticas son una actividad humana y no un acervo de conocimientos que se transmitan a los alumnos ya que éstas cobran sentido en la práctica, por ello el diseño de la secuencia consideró los errores comunes que los alumnos enfrentan en el aprendizaje de los números fraccionarios, los que se deben en gran medida al modelo de enseñanza parte-todo, la forma mecánica y aproximarlos a este contenido y a los prejuicios y al aspecto punitivo que tienen los errores. Para ello, la implementación de la secuencia no se basó en la búsqueda de respuestas correctas sino en establecer una cultura del aula basada en el razonamiento, la argumentación y las afirmaciones matemáticas a partir de la investigación pública del significado y de pensar y actuar colaborativamente. Para este propósito la implementación de

la secuencia se llevó a cabo preparando el entorno físico (distribución de los equipos dentro del aula y elaboración de los materiales) y el ambiente mental y social de las interacciones entre los alumnos, razón por la que se establecieron las normas de acción e interacción señaladas en este capítulo. Mismas que permitieron un ambiente mental y anímico de cooperación en la realización de las actividades que produjo que los alumnos observarán la evolución de su pensamiento adquiriendo confianza y seguridad para emitir sus juicios trascendiendo de esta manera con el estereotipo de que “hay buenos y malos alumnos para matemáticas”, porque si bien es cierto que hay diferencias en cuanto a las habilidades y comprensión de los estudiantes en los números fraccionarios esto no implica clasificarlos en niveles, si no hacer evolucionar su pensamiento a partir de la identificación de los errores y considerar a éstos, no como una barrera si no como parte del proceso de comprensión de los números fraccionarios.

5.8 Conclusiones de la segunda etapa del estudio

La secuencia didáctica implementada tomó como modelo el trabajo de Coxford y otros (1975, citado en Butto 2013) que propone los siguientes seis pasos: unidad, partes de una unidad usando materiales concretos, nombres orales para partes de la unidad, escribir fracciones para representar partes de la unidad (traslaciones entre las representaciones), representar fracciones con dibujos y ampliar la noción de fracción.

Así se validó el trabajo del referido autor y se comprobó la necesidad de iniciar el trabajo de fracciones con la idea de unidad o entero y que distingan entre un todo continuo y discreto, para después trabajar la relación con las partes, agotando la unidad o el entero y señalando la importancia de la igualdad entre las partes y volver a formar la unidad preguntándoles cuantos tercios tiene un entero, cuántos cuartos tiene un entero en las cantidades continuas y en las discretas de una colección de veinte objetos a cuánto corresponde un quinto, para ello se utilizó el material concreto cuando el todo es continuo y fichas cuando el todo es discreto.

En ambos casos se les solicitó que nombraran las partes en que fueron divididas las cantidades, empezando por las fracciones unitarias por ejemplo: un medio, un tercio, un cuarto, un octavo; y posteriormente nombrar las fracciones no unitarias como: dos tercios, tres cuartos, etc.

A continuación, el cuarto paso, escribir fracciones para representar partes de la unidad (traslaciones entre las representaciones), se pidió a los niños identificar el todo en el material concreto tanto en cantidades continuas (círculos de fomi) como en cantidades discretas (fichas). Por ejemplo, en cantidades discretas, se les dijo: aquí el todo son veinte fichas, si parto el conjunto de fichas a la mitad ¿cómo se le llama a cada parte?. Luego de responder, lo escribían y en seguida se les solicitaba representar otra fracción con el material (primero fracciones unitarias y después fracciones no unitarias), contestando qué fracción se había formado.

Para trabajar los cuartos, primero se trabajó nuevamente la idea de entero para después plantear a los niños la división del entero en cuartos y preguntar cuántas partes debían ser, luego se tomaban un número de fichas y se cuestionaba qué parte representaba. Entonces los niños comparaban esa parte con el entero y contestaban explicando su respuesta para finalmente anotarla. Así con las fracciones unitarias y no unitarias. Es decir que se pasaba de lo oral a lo concreto y de lo concreto a lo oral.

Posteriormente, en el paso cinco, representar fracciones con dibujos, se solicitó a los alumnos representar fracciones propias e impropias en cantidades continuas y discretas y en la recta numérica y no numérica con dibujos y así de esta manera ampliar la noción de fracción distinguiendo las fracciones mayores que uno, los números mixtos, el modelo discreto, utilización de conjuntos y finalmente comparar fracciones equivalentes.

Se observó interés y motivación de los alumnos en la elaboración de los materiales y en su participación en la realización de las actividades así como en contestar las hojas de datos donde aplicaron los conocimientos logrados durante la secuencia. Se nota un avance en la progresión del conocimiento intuitivo apoyado con los materiales hasta la simbolización algebraica. Mejoraron en la ideas matemáticas de parte todo. idea de mitad, idea de entero,

representación de fracciones propias e impropias en cantidades continuas y la identificación y representación de fracciones en cantidades discretas así como la ubicación de fracciones en la recta numérica y no numérica. Se destaca el uso del material para generar un esquema conceptual apoyado en lo concreto antes de pasar a la representación simbólica sin contexto. Cabe señalar que las normas de acción e interacción mencionadas fueron un factor importante en la implementación de la secuencia sobre todo, el trabajo de modelar los desacuerdos para no afectar la participación y el interés de los alumnos.

Capítulo VI

Resultados de la tercera etapa

El capítulo presenta los resultados obtenidos en la tercera etapa del estudio correspondiente al cuestionario final de fracciones aplicado a un grupo de estudiantes que participaron del estudio. Se presentan los resultados y se finaliza con las conclusiones de esta parte del trabajo de investigación.

6.1 Cuestionario final de fracciones

En el capítulo se presentaron los resultados del cuestionario final de fracciones correspondiente a un grupo de estudiantes que participaron del estudio. El análisis de los resultados se organizó en tres niveles:

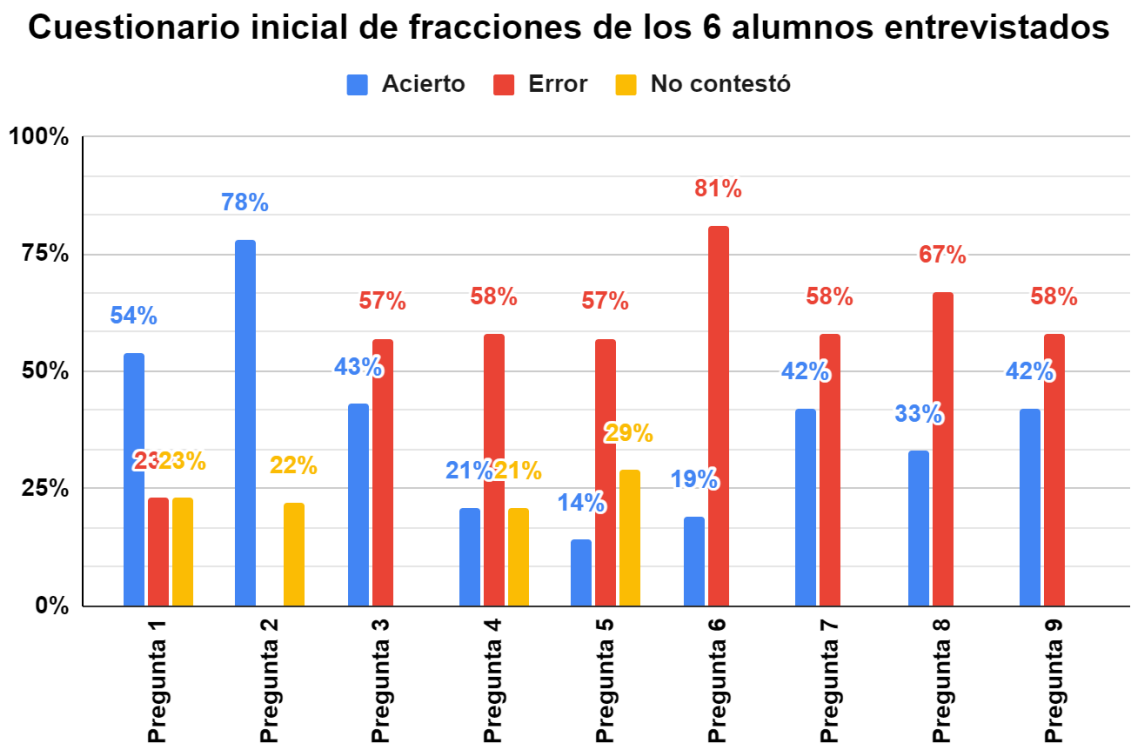
6.2 Primer nivel de análisis: acierto , error y no responde

Este primer nivel de análisis, se refiere a la clasificación de cada respuesta de los cuestionarios inicial y final de cada alumno en: acierto, error y no responde.

Se distinguen los resultados del cuestionario inicial de fracciones de los 6 alumnos entrevistados para poder hacer la comparación correspondiente con el cuestionario final. Como se detalla en la Metodología, las 9 preguntas del cuestionario final se eligieron con base en los resultados del cuestionario inicial fase I y II.

Entonces, se presentan primero los resultados del cuestionario inicial de los 6 alumnos, después los resultados del cuestionario final para, finalmente, hacer un contraste posterior entre el cuestionario inicial y final de fracciones.

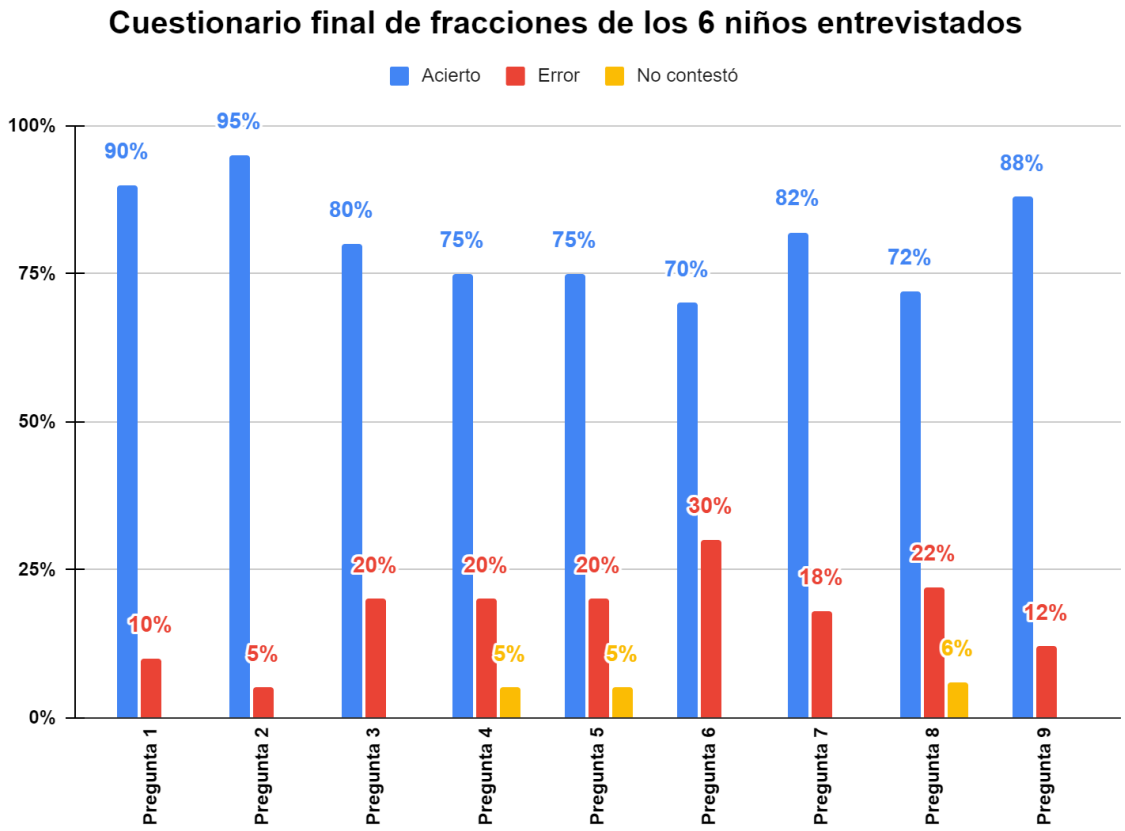
Figura 52. *Gráfica: resultados primer análisis*



Se observa que los resultados de los alumnos entrevistados, el porcentaje de aciertos y errores en el cuestionario inicial es similar al resultado total del grupo. Las preguntas con mayores aciertos son las que manejan las ideas más básicas de comprensión de los números fraccionarios: idea de mitad y entero en cantidades continuas, y las preguntas con los mayores errores son las relativas a las ideas de: representación de la fracción en la recta numérica y no numérica y representación gráfica en cantidades discretas.

Por otra parte, en comparación con los resultados del total del grupo, hubo un menor porcentaje de respuestas en blanco. Las preguntas que presentaron respuestas sin contestar son las que manejan las ideas de: idea de mitad y entero en cantidades continuas, representación de la fracción en la recta numérica y representación de fracciones impropias en la recta numérica.

Figura 53. *Gráfica de resultados de los 6 niños entrevistados sobre el cuestionario final*

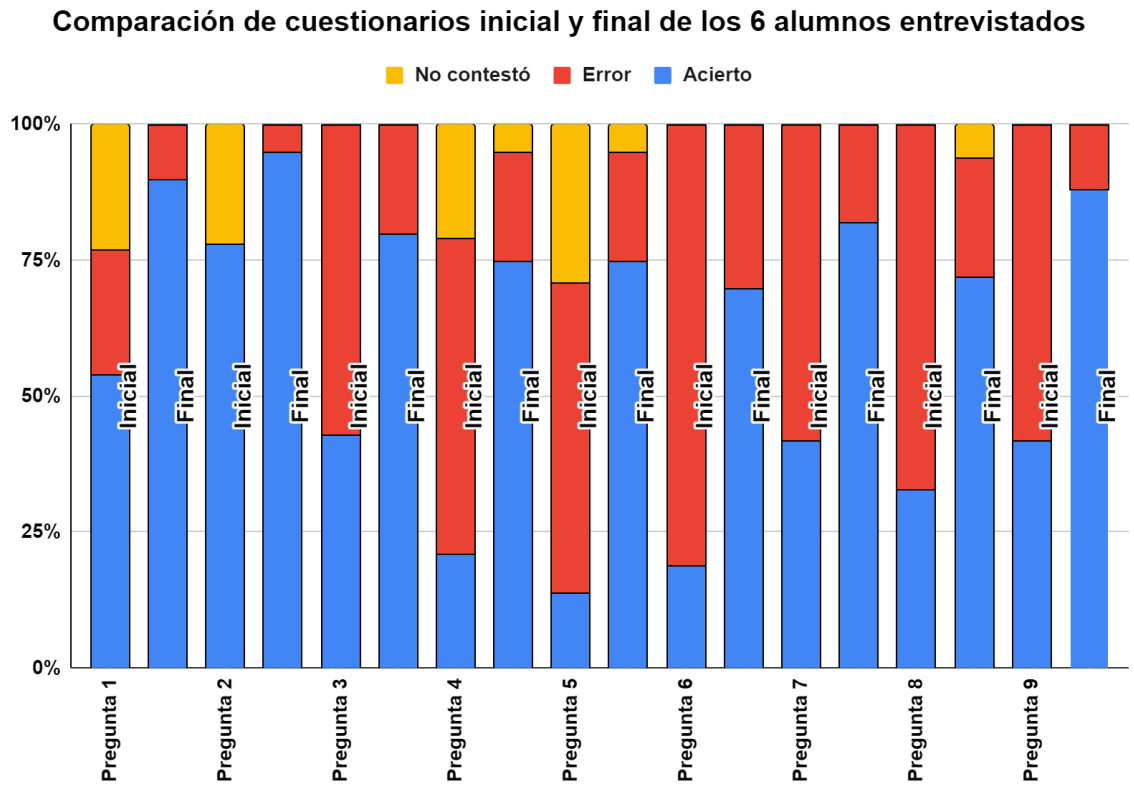


Se observa que las preguntas con mayores aciertos fueron, como en el cuestionario inicial, las que manejan la idea matemática de mitad y entero en cantidades continuas además de la pregunta 9, idea matemática representación gráfica en cantidades discretas.

Respecto a los errores, ninguno de los porcentajes de las preguntas hechas rebasó el 30% aunque en todas se presentaron errores. La de menor porcentaje fue la pregunta 2, idea de mitad en cantidad continua.

En este cuestionario, sólo hubo 3 preguntas que presentaron porcentajes menores de 5% y 6% en la categoría de “no contestó”: pregunta 4, 5 y 8; idea de representación de la fracción en la recta numérica, representación de fracciones impropias en la recta numérica y representación de la fracción escrita y en la recta a partir de representaciones gráficas, respectivamente.

Figura 54. *Gráfica de contraste entre el cuestionario inicial y final de fracciones*



Se observa que los resultados entre el cuestionario inicial y final de fracciones de los 6 alumnos, se destaca que hubo un avance en todas las ideas matemáticas presentadas: idea de mitad y entero en un todo continuo, representación gráfica de fracciones propias e impropias, representación de la fracción en la recta numérica, representación de fracciones impropias en la recta numérica, representación de la fracción en la recta, representación de la fracción en la recta no numérica a partir de representaciones gráficas, representación de la fracción escrita y en la recta a partir de representaciones gráficas y representación gráfica en cantidades discretas.

Las ideas matemáticas donde hubo un mayor avance fueron: representación de la fracción en la recta numérica (pregunta 4), representación de fracciones impropias en la recta numérica (pregunta 5) y representación de la fracción en la recta (pregunta 6).

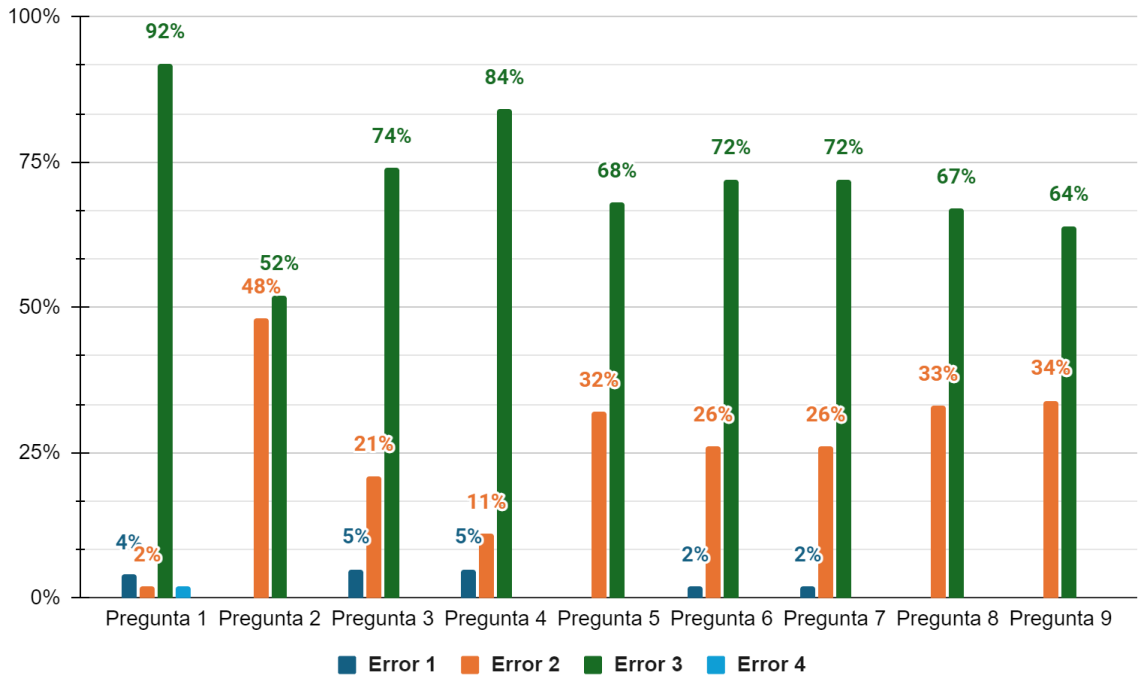
A diferencia del cuestionario inicial, donde 7 de las 9 preguntas presentaron un mayor porcentaje de errores que de aciertos, en el cuestionario final todas las preguntas tuvieron un porcentaje significativamente mayor en los aciertos que en los errores.

6.3 Segundo nivel de análisis: tipos de errores

Este segundo nivel de análisis hace mención a la clasificación de los errores: errores por descuido o distracción (1), errores por desconocimiento de la respuesta (2), errores por defectos en la comprensión del concepto (3) y aplicación sistemática de procesos erróneos (4) (García, 2015), descritos ampliamente en el capítulo IV Metodología.

Se presentan primero los resultados del tipo de error de las primeras nueve preguntas del cuestionario inicial, que son las que se comparten con el cuestionario final de fracciones, únicamente de los 6 alumnos entrevistados. Después se muestran los resultados del tipo de error del cuestionario final para, finalmente, hacer un contraste posterior entre el cuestionario inicial y final de fracciones en cuanto a los tipos de errores encontrados.

Figura 55. *Gráfica de los resultados del tipo de error de los 6 alumnos entrevistados*

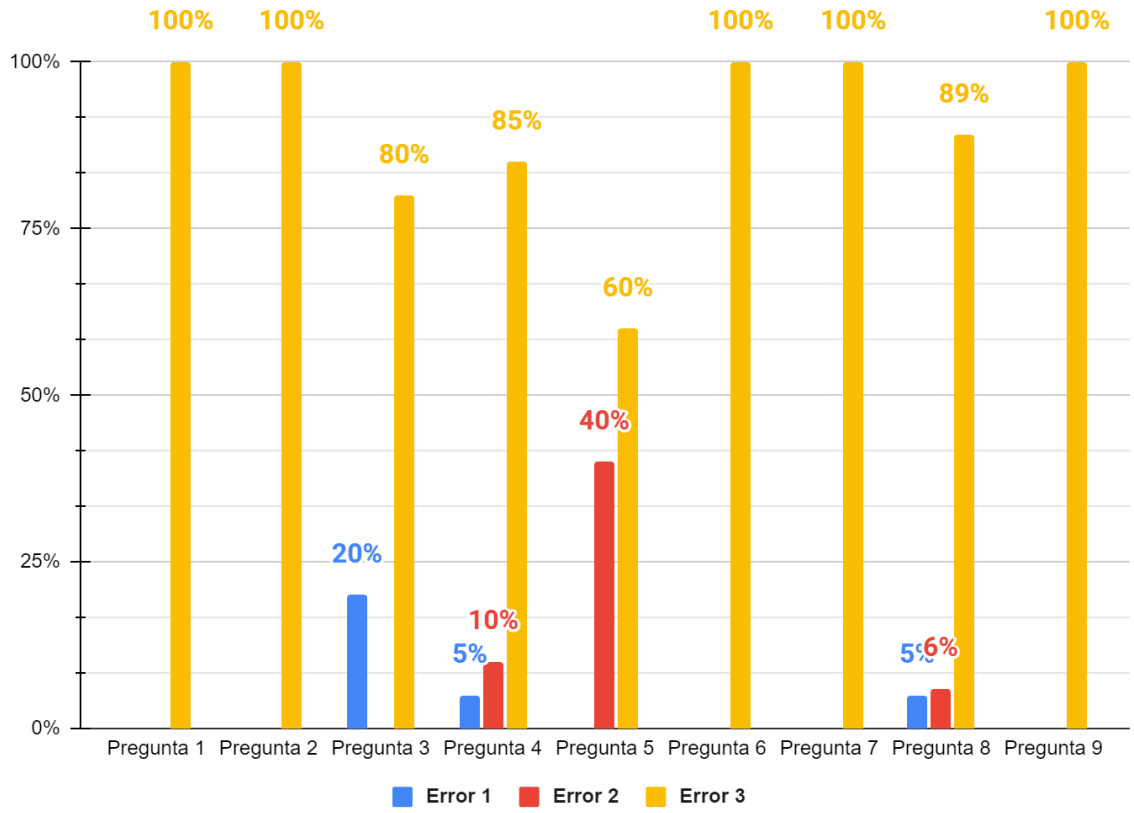


En los resultados de los alumnos entrevistados, el porcentaje de tipos de error en el cuestionario inicial es muy similar al resultado total del grupo. El mayor número de porcentaje se encuentra en los errores tipo 3, errores por defectos en la comprensión del concepto con 92% en la pregunta 1, idea de mitad y del tipo 2, errores por desconocimiento de la respuesta con 48% en las pregunta 2, idea de entero. La descripción y análisis de los tipos de error encontrados por pregunta en el cuestionario inicial se encuentran en el capítulo V Resultados de etapa I.

Retomando los resultados del primer nivel de análisis, se menciona que en el cuestionario final el porcentaje más alto de errores fue de 30% en la pregunta 6, representación de la fracción en la recta no numérica, y el porcentaje de los errores del resto de las preguntas oscila entre el 5 y el 22% (figura 53), por lo que los errores clasificados fueron pocos.

Se señala que el siguiente análisis de los tipos de error toma el total de los errores de cada pregunta como el 100%, se clasifica y cuantifica. No se presentaron errores tipo 4, aplicación sistemática de procesos erróneos, en el cuestionario final por lo que se omite esta clasificación en la gráfica siguiente.

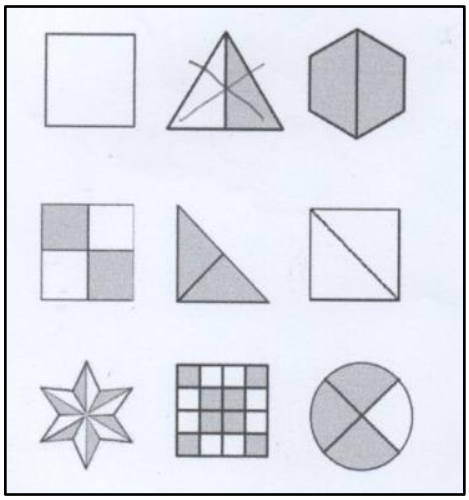
Figura 56. *Tipos de error de los 6 alumnos entrevistados en el cuestionario final*



A continuación ejemplos de los errores encontrados en el cuestionario final.

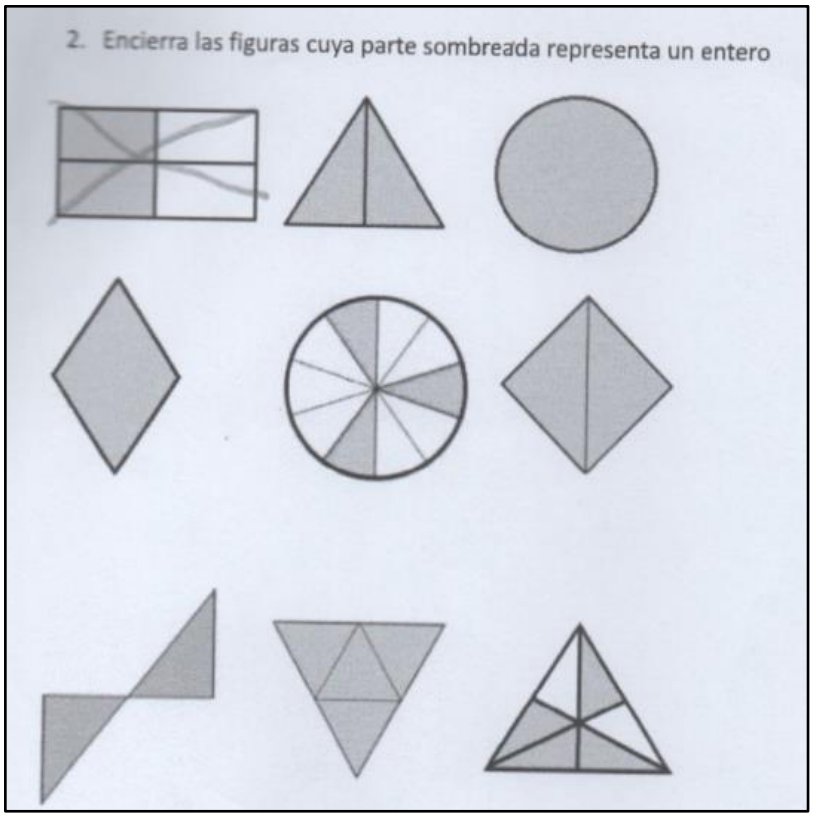
Se menciona que en la pregunta 1, idea de mitad, la alumna 4Ch aún no identifica la mitad en las figuras no canónicas pero no así en la idea de entero, donde no tuvo problema.

Figura 57. *Cuestionario final, alumna 4Ch, pregunta 1*



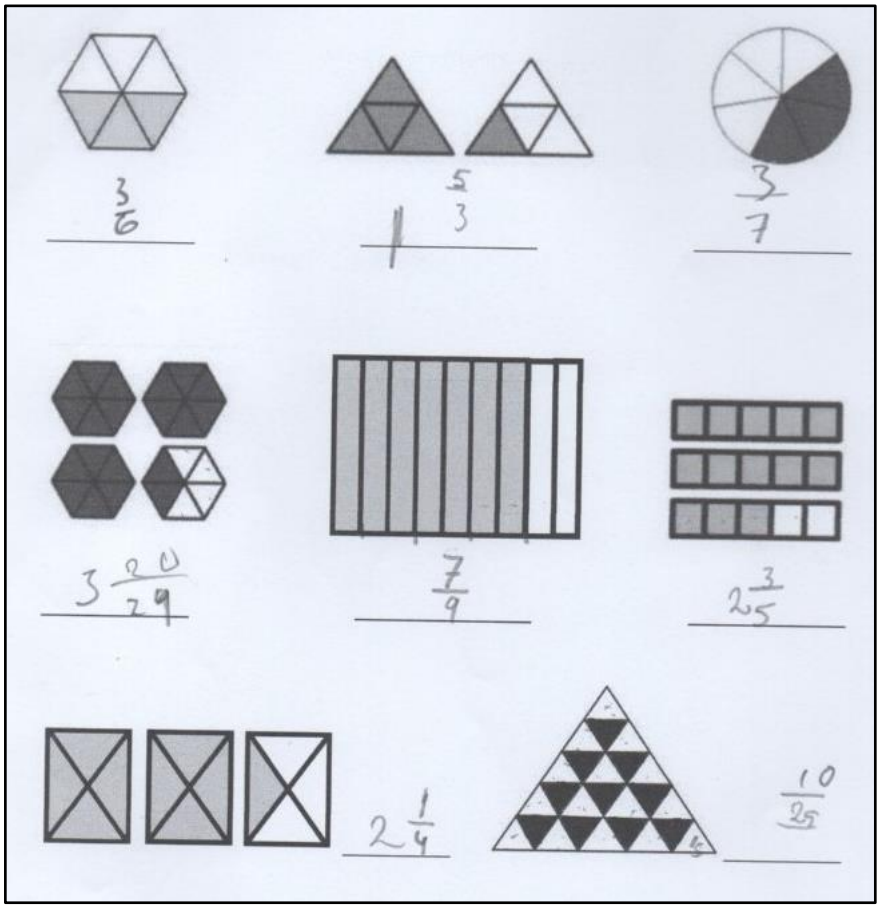
Respecto a la pregunta 2, idea de mitad, la alumna 6J aún no identifica los enteros en las figuras no canónicas pero sí la idea de mitad de la pregunta 1.

Figura 58. *Cuestionario final, alumna 6J, pregunta 2*



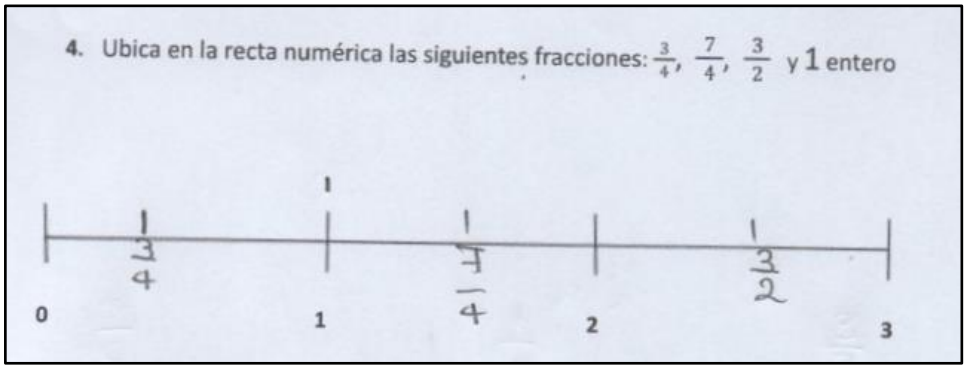
En la pregunta 3, representación gráfica de fracciones propias e impropias, en los errores del tipo 1, no se cuantificó correctamente el número de partes totales en que se divide la última de las figuras. En los errores del tipo 3, la alumna 5N aún presenta problemas para representar fracciones impropias a partir de las figuras dadas, aunque ahora reconoce el entero, en la parte fraccionaria de dos de las figuras que representan fracciones impropias, contó el número de partes sombreadas y lo colocó como numerador y el número de partes totales de todas las figuras como denominador, las otras dos figuras que representan una fracción impropia están escritas correctamente.

Figura 59. *Cuestionario final, Alumna 5 N, pregunta 3*



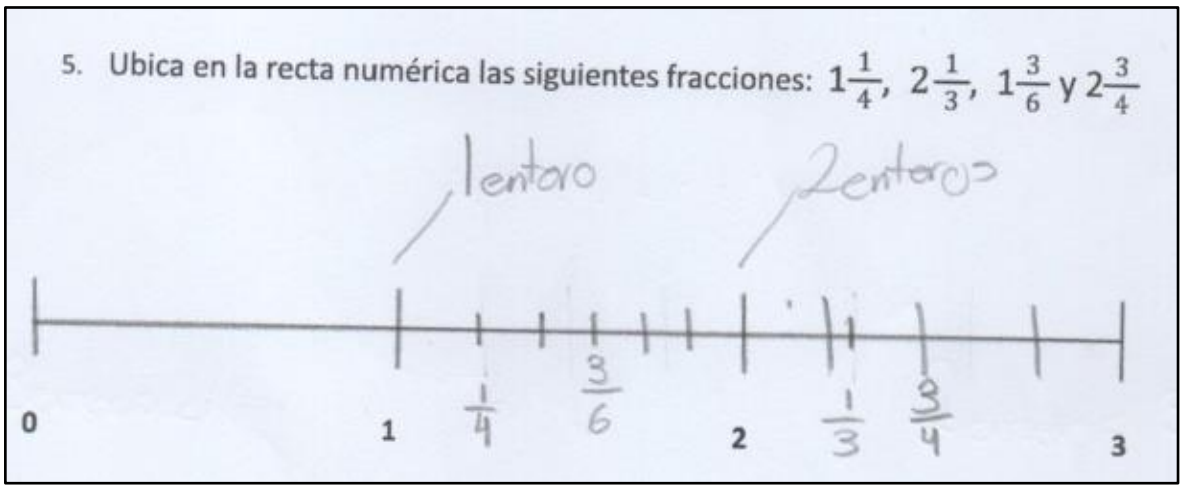
En la pregunta 4, representación de la fracción en la recta numérica, en los errores tipo 1, ubicaron correctamente la fracción dada pero en la recta escribieron otra. En los errores tipo 2, omitieron ubicar algunas de las fracciones dadas. En los errores tipo 3 no ubican correctamente la fracción, aunque varios de los niños ya hacen señalamientos para dividir la recta, algunos de ellos no lo hacen de forma equitativa como el alumno 3L que no hace señalamientos o marcas que dividan la recta y le ayuden a ubicar la fracción.

Figura 60. *Cuestionario final, alumno 3L, pregunta 4.*



En la pregunta 5, representación de fracciones impropias en la recta numérica, en los errores tipo 2, dos de los niños omitieron ubicar algunas de las fracciones dadas. En los errores tipo 3, aunque el orden de la ubicación de las fracciones dadas es correcto, no lo es la distribución de la fracción, de tal forma que, por ejemplo, la alumna 1 X ubicó 2 3/4 en 2 1/2 y ubicó correctamente el resto de las fracciones dadas.

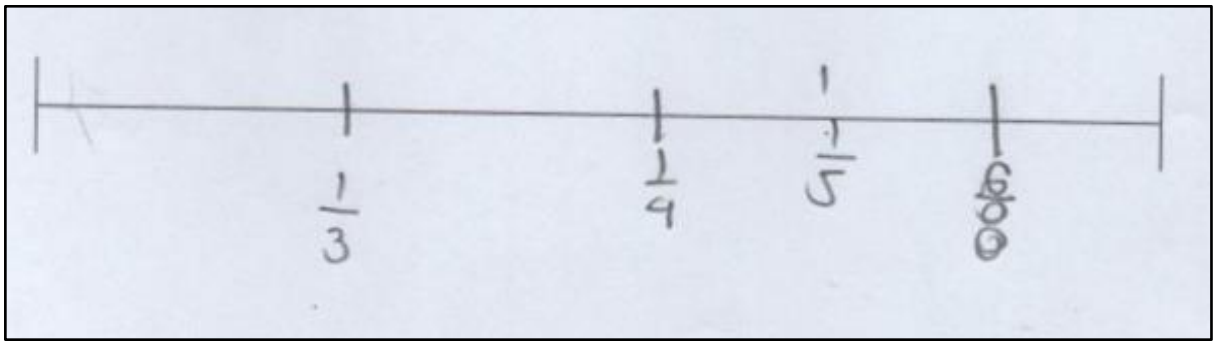
Figura 61. *Cuestionario final, alumna 1X, pregunta 5*



En la pregunta 6, representación de la fracción en la recta, los errores presentados en esta pregunta se debieron al incorrecto orden de las fracciones dadas. En el contexto de la recta no numérica, el alumno 3L, sigue considerando que el tamaño de las fracciones es según el

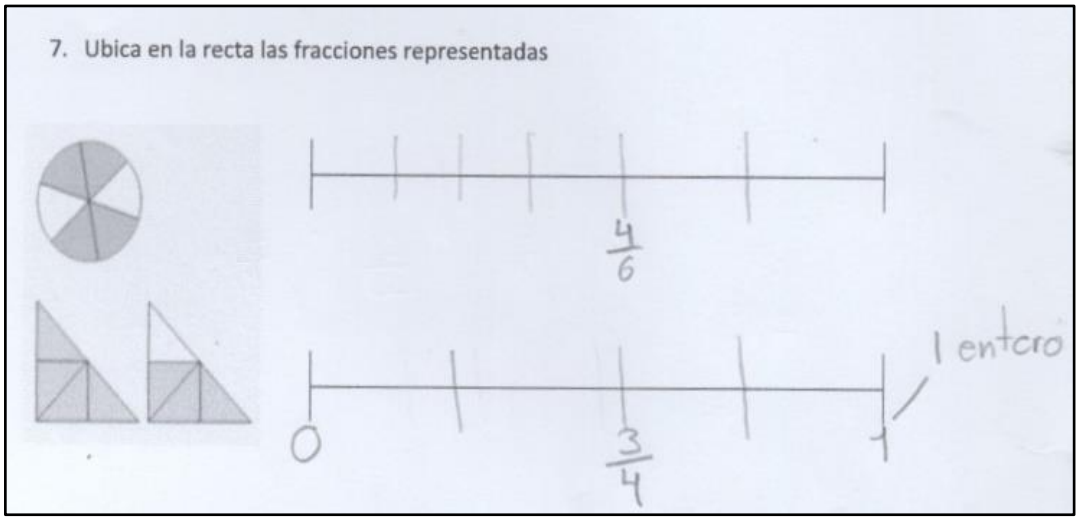
denominador que tenga la fracción, entre más grande el denominador, más extensa la fracción.

Figura 62. *Cuestionario final, alumno 3L, pregunta 6.*



En la pregunta 7, representación de la fracción en la recta no numérica a partir de representaciones gráficas, los errores que se presentan son en la figura que representa una fracción impropia donde la alumna 1X no ubica correctamente la fracción.

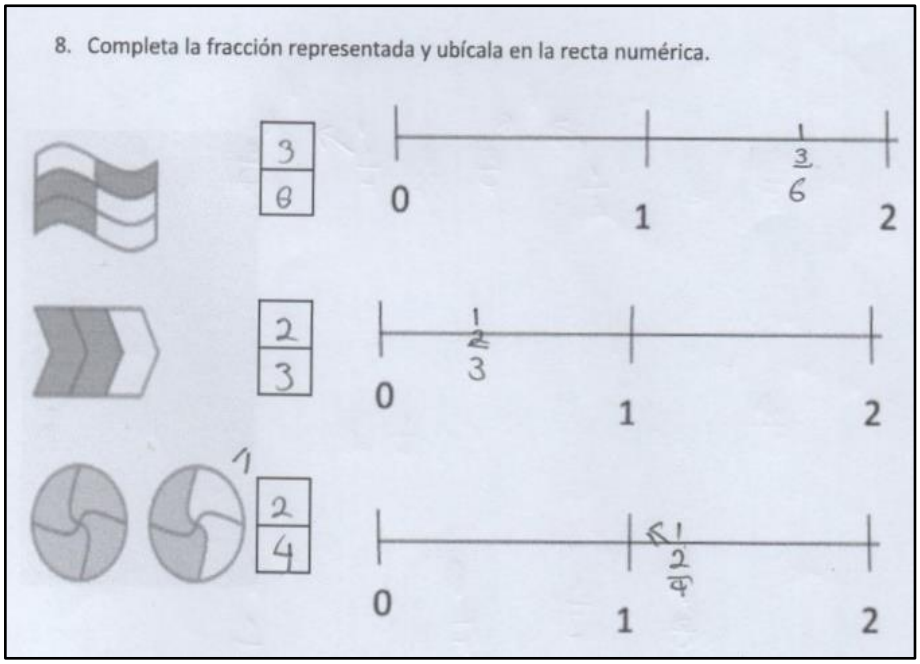
Figura 63. *Cuestionario final, alumna 1X, pregunta 7*



En la pregunta 8, representación de la fracción escrita y en la recta a partir de representaciones gráficas, en los errores tipo 3, aunque ya todos escriben correctamente la fracción que representa la figura (incluyendo la fracción impropia), no todos ubican

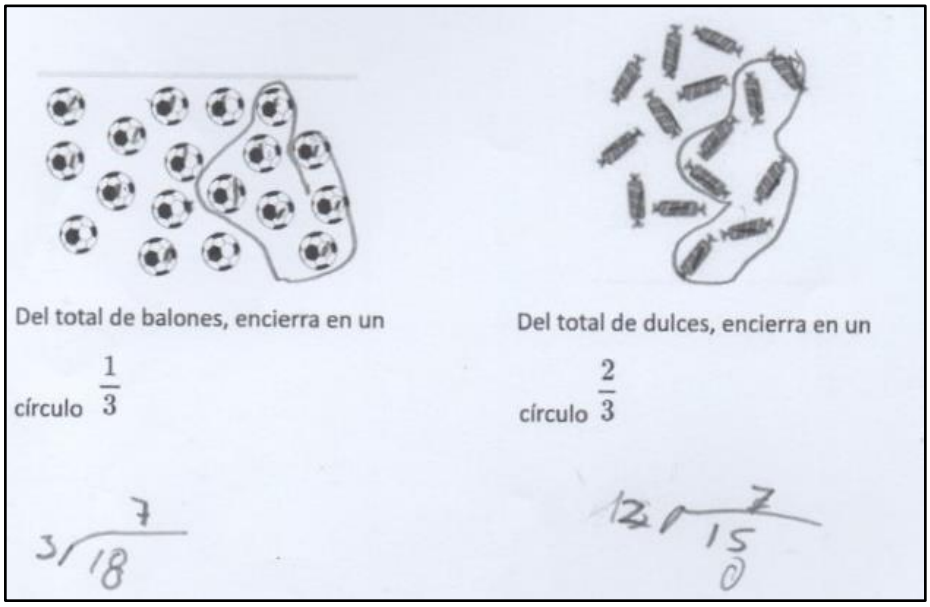
correctamente la fracción en la recta numérica. El alumno 3L ubica 3/6 en la segunda unidad de la recta, 2/3 no lo ubica de forma precisa así como 1 2/4. No hizo marcas o señalamientos para la ubicación.

Figura 64. *Cuestionario final, alumno 3L, pregunta 8.*



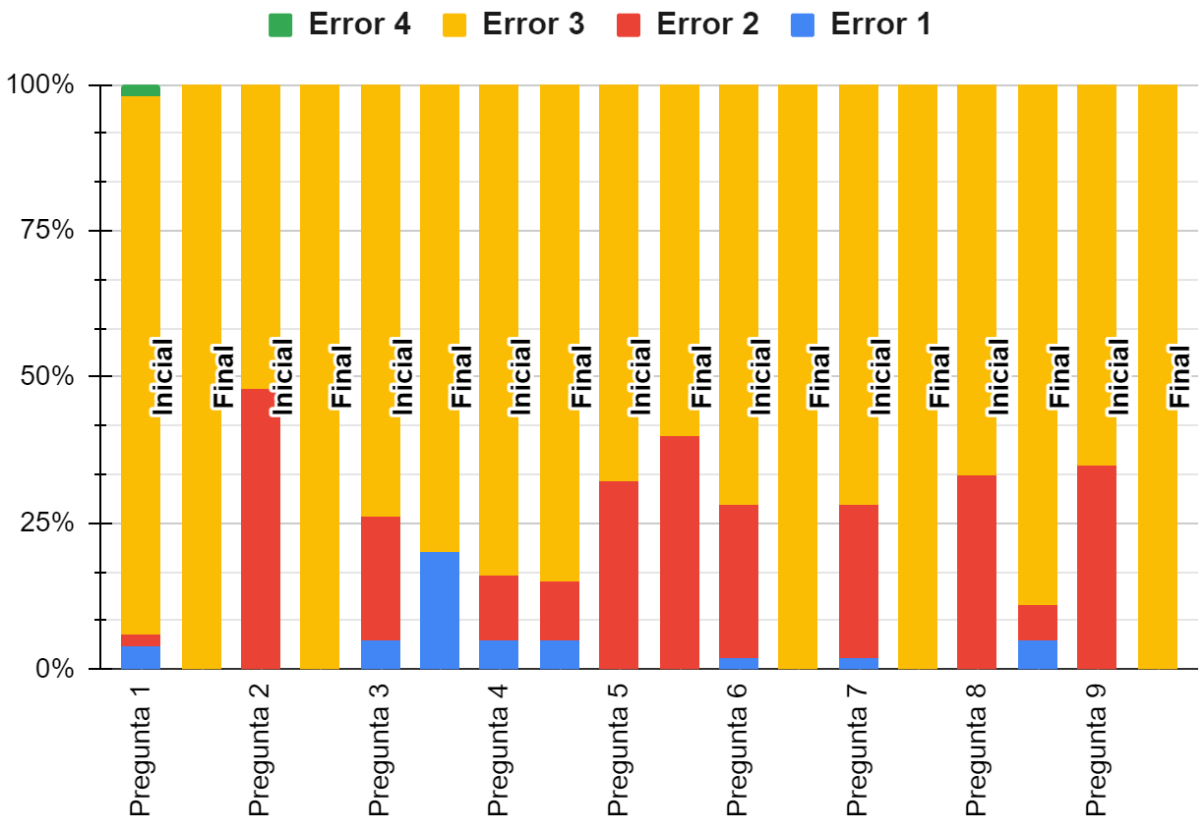
En la pregunta 9, representación gráfica en cantidades discretas, en los errores tipo 3 aunque ya no tienen problema para escribir correctamente la fracción que corresponde al número de objetos encerrados en una cantidad discreta, dos de las alumnas 4Ch y 5N, aún presentan problemas para encerrar el número de objetos según la fracción dada. La alumna 5N divide el número total de objetos entre el numerador pero el resultado de la división, en ambos ejercicios, es incorrecto.

Figura 65. *Cuestionario final, alumno 5N, pregunta 9.*



Una vez obtenidos los resultados de los tipos de error de los cuestionarios inicial y final de los 6 niños entrevistados, haremos una comparación entre ellos.

Figura 66. *Gráfica de contraste sobre los tipos de error presentados entre el cuestionario inicial y final de fracciones en los 6 niños entrevistados*



El tipo de error 4. Este tipo de error, aplicación sistemática de procesos erróneos, no aparece en las preguntas del cuestionario final de los seis alumnos entrevistados por lo tanto, no hubo respuestas con ese tipo de error.

El tipo de error 2. Este tipo de error por desconocimiento de la respuesta, en el cuestionario final casi desaparece presentándose en un bajo porcentaje sólo en tres preguntas; 3, representación gráfica de fracciones propias e impropias, 4, representación de la fracción en la recta numérica y la pregunta 8, representación de la fracción escrita y en la recta a partir de representaciones gráficas.

Los errores que persisten en la idea matemática de parte-todo, parte-parte, en menor medida, es en la identificación de mitad y entero en figuras no canónicas.

Los errores que se mantienen en la idea matemática de representación gráfica de las fracciones propias e impropias, en 1 alumna, es en la correcta representación de la fracción

impropia porque aunque reconoce el entero, para escribir la parte fraccionaria cuenta las partes de las figuras como si fueran una sola.

Tipos de errores que permanecen en la idea de representación gráfica en cantidades discretas, en 2 alumnas, es en la segunda parte de la pregunta donde se pide encerrar el número de elementos en una colección según la fracción dada.

Los errores que continúan en la identificación de las fracciones en el contexto de la recta numérica y no numérica, donde se encontró el mayor porcentaje de los errores, el 30%, se refieren a la conceptualización de la extensión de la fracción en la recta, siendo que algunos aún consideran las fracciones como 2 números, de forma separada y toman el tamaño del denominador como si fuera un número natural.

Cabe recordar que los tipos de errores presentados en el cuestionario final de este capítulo, como se describe más arriba, se refiere en cada caso a uno o dos alumnos.

6.4 Tercer nivel de análisis: estrategias de resolución de problemas

A continuación, se presentan las estrategias de resolución empleadas por los 6 niños entrevistados en el cuestionario final de fracciones (tabla 11).

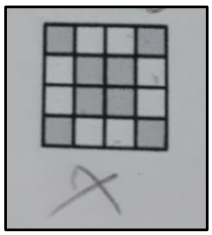
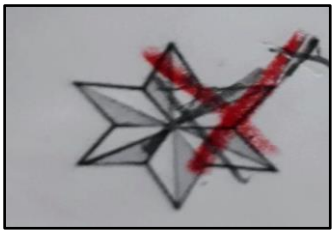
Tabla 11. *Estrategias de resolución de los 6 alumnos entrevistados del cuestionario final de fracciones*

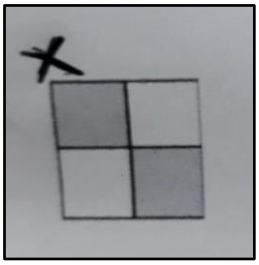
No. de pregunta	Idea matemática	Estrategias de resolución de problemas	Número de respuestas
1	Idea de mitad en un todo continuo	Conteo. El alumno cuenta todas las partes en que está dividida la figura y los compara con el número de partes sombreadas de la figura para saber si representa 1/2.	6
		Retención o creación de imagen. (Kieren, 1993). Imagina recorrer todas las partes sombreadas de la figura a un mismo lado para que estén juntas y pueda visualizar si representa la mitad de la figura o no.	2
2	Idea de entero en magnitud todo continuo	Reconoce el entero. Identifica que toda la figura (canónicas y no canónicas) está sombreada y por lo tanto determina que es un entero.	5
		Dificultad para reconocer la idea de entero en figuras no canónicas. En esta categoría, el estudiante identifica el entero únicamente en figuras canónicas y no en las no canónicas.	1
3	Representación gráfica de fracciones propias e impropias	Reconoce las fracciones propias. Identifica la fracción que corresponde a las figuras que no rebasan el entero.	6
		Reconoce las fracciones propias impropias. Identifica la fracción que corresponde a las figuras que rebasan el entero.	5
4	Representación de la fracción propia e impropia en la recta numérica.	Reconocen los enteros en la recta numérica. Los estudiantes representan la fracción con señalizaciones de enteros, hacen marcas de conteo. Toman en cuenta los enteros marcados en la recta numérica.	6
		Identificación de fracciones en la recta numérica en forma equitativa. En esta categoría, el estudiante, representa la fracción dividiendo el segmento correspondiente en partes iguales según la fracción dada.	5
5	Representación de fracciones mixtas en la recta numérica.	Identificación de las fracciones en la recta numérica en forma precisa. En esta categoría, el estudiante, representa la fracción dividiendo el segmento en forma equidistante en el número de partes según la fracción dada.	5

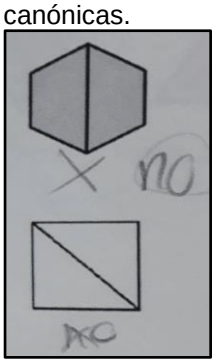
6	Representación de la fracción en la recta no numérica.	Identificación de fracciones en la recta no numérica. Dividen la unidad según el denominador de la fracción dada y marcan la respuesta de acuerdo a la fracción.	5
7	Representación de la fracción en la recta no numérica a partir de representaciones gráficas.	Representación de las fracciones en la recta no numérica en forma precisa. Representa la fracción haciendo señalamientos de medición; divide, señala o hace marcas de conteo o de algún tipo para estimar la ubicación y precisa.	4
8	Representación de la fracción escrita en la recta a partir de representaciones gráficas.	Reconocimiento de las fracciones impropias a partir de su representación gráfica. En esta categoría, el estudiante escribe la fracción correspondiente a las figuras que rebasan el entero contando el número de partes en que se divide el entero y lo pone como denominador. En seguida, cuenta el número de partes sombreadas y lo pone como numerador.	6
		Reconocimiento de las fracciones impropias en la recta numérica. En esta categoría, el estudiante representa las fracciones propias e impropias en la recta numérica, divide la unidad en el número de enteros representados y ubica la fracción haciendo señalamientos de conteo en la recta.	5
9	Representación gráfica en cantidades discretas.	Representación de la cantidad correcta de elementos en la colección según la fracción dada. Encierran la cantidad correcta de elementos en la colección según la fracción dada. Escriben la fracción correspondiente a los elementos encerrados en la colección dada.	6

Ahora, realizamos un comparativo de estrategias entre el cuestionario inicial y final por idea matemática.

Tabla 12. *Comparación de estrategias de la primera idea matemática.*

<table>
<tr><th colspan="3">Comparación de estrategias</th></tr>
<tr><td>Idea matemática</td><td>Estrategias en Cuestionario inicial</td><td>Estrategias en Cuestionario final</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Idea de mitad en un todo continuo</td><td>Conteo.
El alumno cuenta todas las partes en que está dividida la figura y los compara con el número de partes sombreadas de la figura para saber si representa 1/2.
 
Alumno 2 O
<u>Estudiante:</u>- Conté los cuadritos y los dividí entre dos y vi que era la misma cantidad que estaba sombreada
<u>Entrevistador:</u>- ¿Cuántos son?
O- Son 16
E- Y ¿cuántos están sombreados?
O- Ocho y 8 por 2 son 16</td><td>Conteo.
El alumno cuenta todas las partes en que está dividida la figura y los compara con el número de partes sombreadas de la figura para saber si representa 1/2.
 
Alumna 5 N</td></tr>
<tr><td>Retención o creación de imagen. (Kieren, 1993).
Imagina recorrer todas las partes sombreadas de la figura a un mismo lado para que estén juntas y pueda visualizar si representa la mitad de la figura o no.

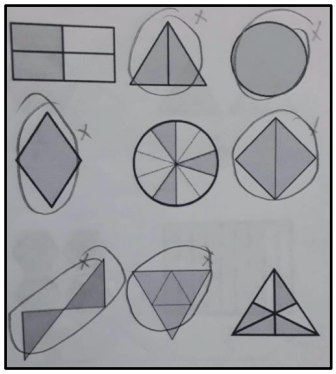
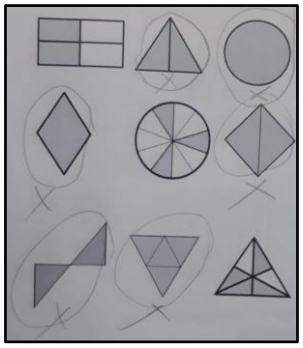
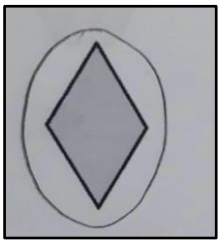
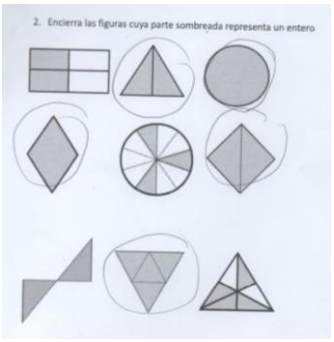
Alumno 3 L
<u>Estudiante-</u> Si estos negros de acá de la estrella se pudieran juntar en estas tres cosas negras de acá, se pudieran juntar acá arriba, ya sería una mitad</td><td>Retención o creación de imagen. (Kieren, 1993).
Imagina recorrer todas las partes sombreadas de la figura a un mismo lado para que estén juntas y pueda visualizar si representa la mitad de la figura o no.
 
Alumno 3 L</td></tr>
<tr><td>Dificultad para reconocer la idea de mitad.
En esta categoría el estudiante marca todas las figuras divididas a la mitad independientemente si están o no</td><td></td></tr>
</table>

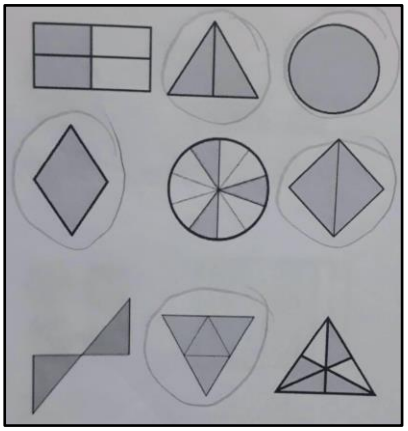
	sombreadas y si son figuras canónicas o no canónicas.  **Alumna 1 X** Aunque corrigió durante la entrevista originalmente marcó esas dos figuras de la pregunta 1. *Estudiante- Pensé que era (la mitad) porque estaba dividido a la mitad y después no, por eso puse no.*	

Como se observa, los niños abandonan la categoría tres “dificultad para reconocer la idea de mitad” y mejoran en su conceptualización matemática de la idea de mitad.

A diferencia de las estrategias empleadas para el cuestionario inicial de fracciones, para la **idea de mitad**, los niños identifican los medios tanto en figuras canónicas como no canónicas. Realizan el conteo de las partes en que se divide el entero y lo comparan con el número de partes sombreadas para determinar la mitad de la figura. En menor medida, los niños imaginan recorrer todas las partes sombreadas de la figura a un mismo lado para que estén juntas y puedan visualizar si representa la mitad de la figura o no. Conciben la mitad de la figura más allá de la división tradicional de la figura en dos. En este sentido, podemos concluir que los estudiantes abandonan una de las estrategias erróneas y mejoran en su conceptualización.

Tabla 13. *Comparación de estrategias de la segunda idea matemática.*

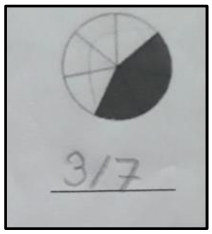
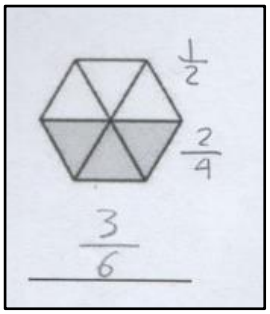
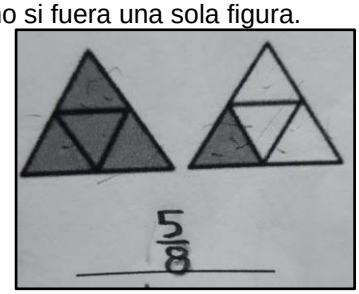
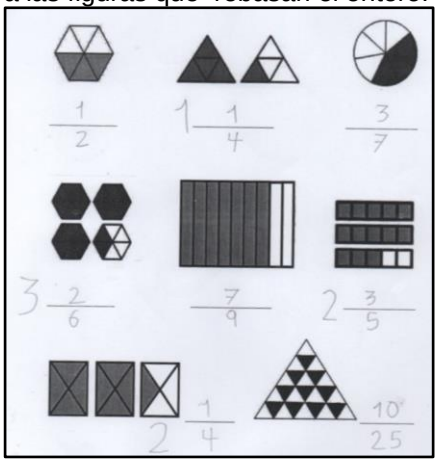
<table>
<tr><th colspan="3">Comparación de estrategias</th></tr>
<tr><th>Ideas matemática</th><th>Estrategias en Cuestionario inicial</th><th>Estrategias en Cuestionario final</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Idea de entero en magnitud todo continuo</td><td>Reconoce el entero.
Identifica que toda la figura (canónicas y no canónicas) está sombreada y por lo tanto determina que es un entero.
 
Alumna 5 N</td><td>Reconoce el entero.
Identifica que toda la figura (canónicas y no canónicas) está sombreada y por lo tanto determina que es un entero.
 
Alumno 2 O</td></tr>
<tr><td>Dificultad para reconocer la idea de entero.
En esta categoría el estudiante identifica los enteros cuyas figuras no están fraccionadas.
 
Alumna 6 J
<u>Entrevistador-</u> ¿Este sí es un entero?
J- Sí
E- ¿por qué?
J- Porque no tiene ninguna división y está sombreado</td><td>Dificultad para reconocer la idea de entero en figuras no canónicas.
En esta categoría, el estudiante identifica el entero únicamente en figuras canónicas y no en las no canónicas.
 
Alumna 4 Ch
La única figura que faltó por identificar fue la no canónica.</td></tr>
<tr><td>Dificultad para reconocer la idea de entero en figuras no canónicas.
En esta categoría, el estudiante identifica el entero únicamente en figuras canónicas y no en las no canónicas.</td><td></td></tr>
</table>

	 **Alumna 1 X** La única figura que falta por identificar fue la no canónica.	

Los niños abandonan la categoría dos del cuestionario inicial “dificultad para reconocer la idea de mitad entero”.

En la **idea de entero**, como en la idea de mitad, contemplan las figuras no canónicas sombreadas y divididas en diferentes partes para concebirlas como enteros a diferencia de las estrategias empleadas en el cuestionario inicial.

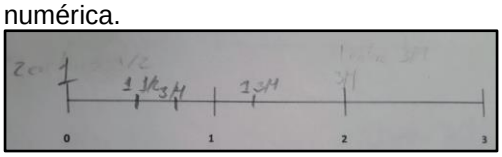
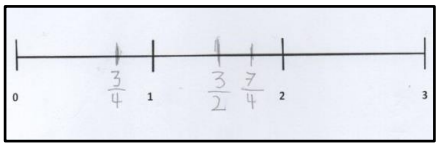
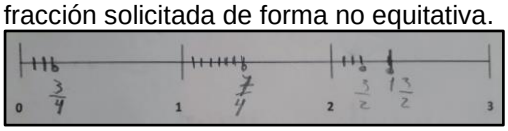
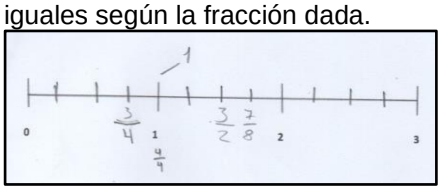
Tabla 14. *Comparación de estrategias de la idea de representación gráfica de fracciones propias e impropias.*

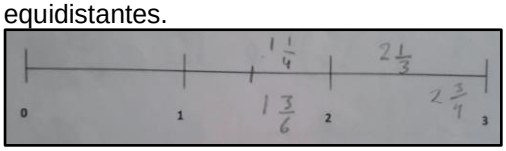
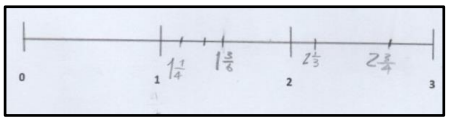
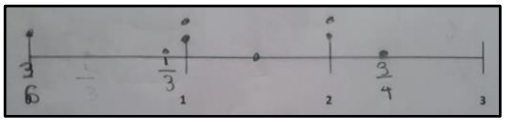
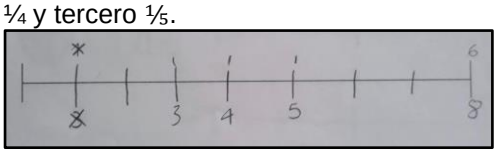
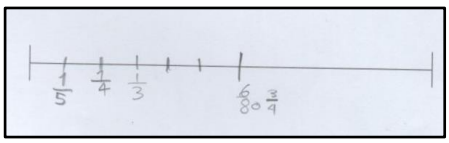
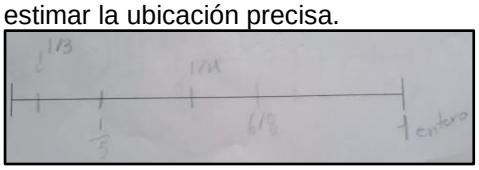
Comparación de estrategias		
Ideas matemática	Estrategias en Cuestionario inicial	Estrategias en Cuestionario final
Representación gráfica de fracciones propias e impropias	**Reconoce las fracciones propias.** Identifica la fracción que corresponde a las figuras que no rebasan el entero.  **Alumna 1 X**	**Reconoce las fracciones propias.** Identifica la fracción que corresponde a las figuras que no rebasan el entero.  **Alumna 6 J** Los estudiantes respondieron correctamente la fracción que representa la primera figura, logran identificar que son 3/6 e incluso usan equivalencias para representarlas.
	Dificultad para reconocer las fracciones impropias a partir de su representación gráfica. En esta categoría, el estudiante representa la fracción correspondiente a las figuras que rebasan el entero contando el número de partes sombreadas de todos los enteros y lo representa como numerador. En seguida, cuenta el número total de partes de todos los enteros y lo pone como denominador. Hace el conteo como si fuera una sola figura.  **Alumna 5 N**	**Reconoce las fracciones impropias.** Identifica la fracción que corresponde a las figuras que rebasan el entero.  **Alumno 2 O**

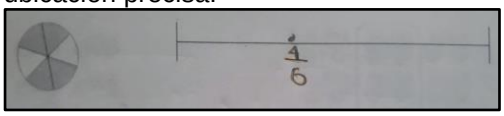
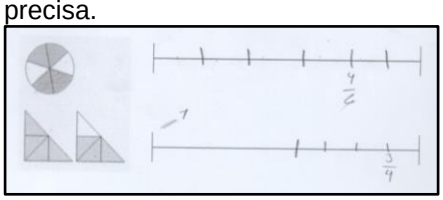
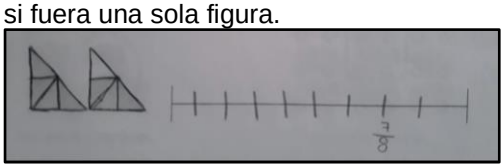
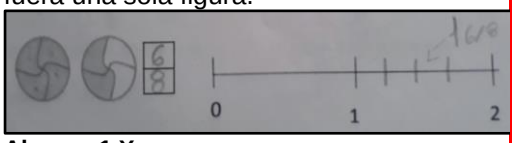
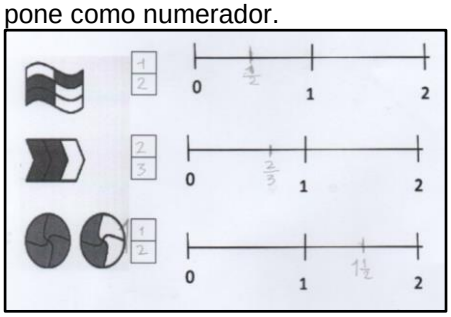
Comentario: Los niños abandonan la categoría dos del cuestionario inicial “dificultad para reconocer las fracciones impropias a partir de su representación gráfica” señaladas en rojo.

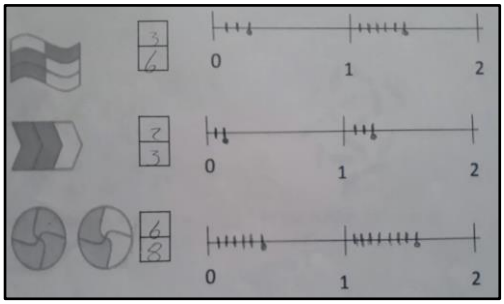
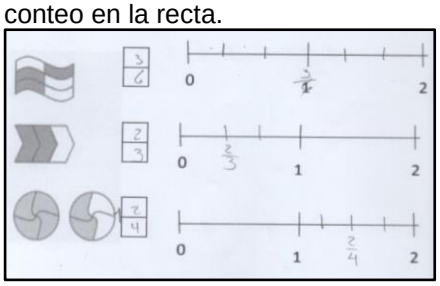
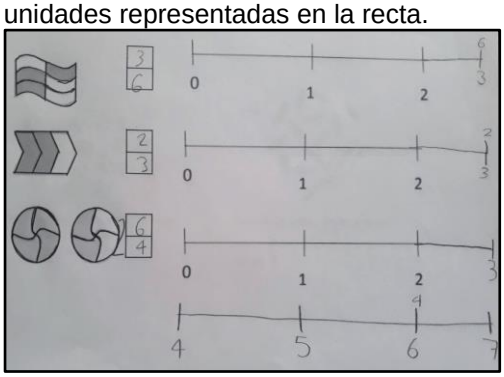
Para la **idea de representación gráfica de fracciones propias e impropias**, ya conciben más de una unidad en la representación gráfica y lo representan en la fracción, realizan el conteo correspondiente a las partes en que se divide la unidad y lo colocan como denominador y hacen lo correspondiente para el numerador. A diferencia del cuestionario inicial donde invierten la función del numerador y el denominador dentro de una figura dada para representar una fracción.

Tabla 15. *Comparación de estrategias de la idea de fracciones en la recta numérica y no numérica.*

Comparación de estrategias		
Ideas matemática	Estrategias en Cuestionario inicial	Estrategias en Cuestionario final
Representación de la fracción propia e impropia en la recta numérica.	**Dificultad para identificar los enteros en la recta numérica.** En esta categoría, el estudiante representa, la fracción con señalizaciones de enteros independientes a las ya marcadas que ellos mismos hacen. No toman en cuenta los enteros marcados en la recta numérica.  **Alumno 2 O** Ubicó el entero en el 0	**Reconocen los enteros en la recta numérica.** Los estudiantes representan la fracción con señalizaciones de enteros, hacen marcas de conteo. Toman en cuenta los enteros marcados en la recta numérica.  **Alumno 2 O** El mismo alumno, en el cuestionario final, ubicó correctamente el entero.
	Dificultad para representar las fracciones en la recta numérica en forma precisa. En esta categoría, el estudiante, representa la fracción mediante la estimación y cálculo. Después de los enteros marcados no hacen señalamientos de división o conteo de partes para marcar la fracción. Señalan la fracción solicitada de forma no equitativa.  **Alumna 4 Ch**	**Identificación de fracciones en la recta numérica en forma equitativa.** En esta categoría, el estudiante, representa la fracción dividiendo el segmento correspondiente en partes iguales según la fracción dada.  **Alumna 4 Ch**
	Dificultad para representar las fracciones en la recta numérica en forma precisa.	**Identificación de las fracciones en la recta numérica en forma precisa.** En esta categoría, el estudiante,

Representación de fracciones mixtas en la recta numérica.	En esta categoría, el estudiante, representa la fracción mediante la estimación y cálculo. Después de los enteros marcados no hacen señalamientos de división o conteo de partes para marcar la fracción y quienes hacen marcas, éstas no son equidistantes.  **Alumna 5 N**	representa la fracción dividiendo el segmento en forma equidistante en el número de partes según la fracción dada.  **Alumno 2 O**
	Dificultad para identificar los enteros en la recta numérica. En esta categoría, el estudiante representa, la fracción con señalizaciones de enteros independientes a las ya marcadas que ellos mismos hacen. No toman en cuenta los enteros marcados en la recta numérica.  **Alumno 3 L**	
Representación de la fracción en la recta no numérica.	**Concepción del denominador como número natural en la recta no numérica.** En esta categoría, el estudiante representa las fracciones en la recta no numérica tomando en cuenta el denominador como número natural, de esta forma colocaron primero ⅓, segundo ¼ y tercero ⅕.  **Alumna 6 J**	**Identificación de fracciones en la recta no numérica.** Ordenan las fracciones en la recta no numérica de acuerdo al tamaño de la fracción.  **Alumno 2 O** Aunque la ubicación de las fracciones no es precisa, el orden sí lo es.
	Dificultad para representar las fracciones en la recta no numérica de forma precisa. En esta categoría, el estudiante representa la fracción mediante el cálculo, no mide, divide, señala o hace marcas de conteo o algún tipo para estimar la ubicación precisa.  **Alumna 1 X**	
	Dificultad para representar las fracciones en la recta no numérica en	**Representación de las fracciones en la recta no numérica en forma**

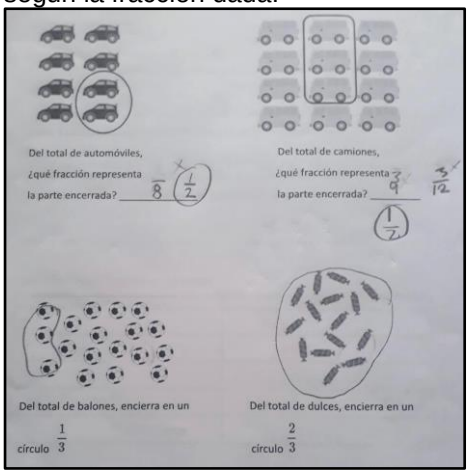
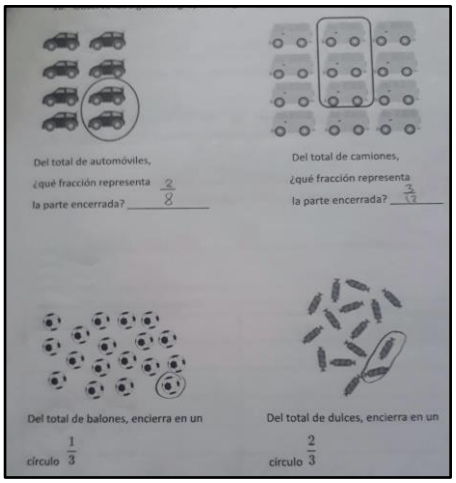
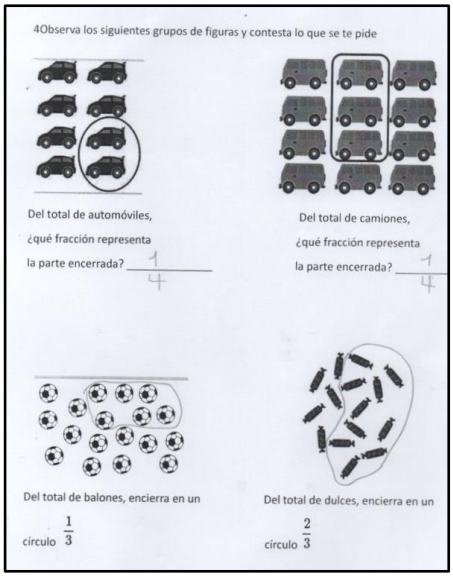
Representación de la fracción en la recta no numérica a partir de representaciones gráficas.	**forma precisa.** En esta categoría, el estudiante representa la fracción mediante el cálculo, no mide, divide, señala o hace marcas de conteo o de algún tipo para estimar la ubicación precisa.  **Alumno 3 L**	**precisa.** Representa la fracción haciendo señalamientos de medición; divide, señala o hace marcas de conteo o de algún tipo para estimar la ubicación y precisa.  **Alumna 4 Ch**
	Dificultad para representar las fracciones impropias en la recta no numérica. En esta categoría, el estudiante cuenta todas las partes sombreadas de todos los enteros y lo representa como numerador. En seguida, cuenta el número total de partes de todos los enteros y lo pone como denominador. Hace el conteo como si fuera una sola figura.  **Alumna 6 J**	
Representación de la fracción escrita en la recta a partir de representaciones gráficas.	**Dificultad para reconocer las fracciones impropias a partir de su representación gráfica.** En esta categoría, el estudiante escribe la fracción correspondiente a las figuras que rebasan el entero contando el número de partes sombreadas de todos los enteros y lo representa como numerador. En seguida, cuenta el número total de partes de todos los enteros y lo pone como denominador. Hace el conteo como si fuera una sola figura.  **Alumna 1 X**	**Reconocimiento de las fracciones impropias a partir de su representación gráfica.** En esta categoría, el estudiante escribe la fracción correspondiente a las figuras que rebasan el entero contando el número de partes en que se divide el entero y lo pone como denominador. En seguida, cuenta el número de partes sombreadas y lo pone como numerador.  **Alumno 2 O**
	Dificultad para reconocer los enteros en la recta numérica. En esta categoría, el estudiante representa las fracciones sin considerar las unidades. En algunos casos, utiliza la primera unidad (1) para dividirla en el número de partes de acuerdo al	**Reconocimiento de las fracciones impropias en la recta numérica.** En esta categoría, el estudiante representa las fracciones propias e impropias en la recta numérica, divide la unidad en el número de enteros representados y ubica la

	numerador, y la segunda unidad (2), la divide en el número de partes según el denominador.  **Alumna 4 Ch**	fracción haciendo señalamientos de conteo en la recta.  **Alumna 4 Ch**
	Dificultad para reconocer las unidades en la recta numérica. En esta categoría, el estudiante representa la fracción sin considerar las unidades. Representa, la fracción y la reordena de forma independiente a las unidades representadas en la recta.  **Alumna 6 J**	

Los niños abandonan las categorías marcadas en rojo dos del cuestionario inicial.

Para las preguntas donde se maneja la **representación de fracciones propias e impropias en la recta numérica y no numérica**, el cambio de estrategias es más notorio. En el cuestionario inicial, donde hay varios niños que conciben la fracción como 2 números naturales y que, según sea el denominador, éste representa el tamaño de la fracción siendo que a mayor sea el número, más grande es la fracción; en las estrategias empleadas en el cuestionario final el niño comprende el concepto de fracción y relaciona el tamaño de la fracción con el denominador de forma correcta donde para la ubicación de fracciones en la recta, coloca las fracciones unitarias de menor a mayor según el número de partes en que se divide el entero, es decir, el denominador. Comprenden la función del numerador y denominador en la fracción dentro del contexto de la recta.

Tabla 16. *Comparación de estrategias de la idea de cantidades discretas*

Comparación de estrategias		
Ideas matemática	Estrategias en Cuestionario inicial	Estrategias en Cuestionario final
Representación gráfica en cantidades discretas.	**Dificultad para representar la cantidad correcta de elementos en la colección según la fracción dada.** No encierran la cantidad correcta de elementos en la colección según la fracción dada. Escriben la fracción correspondiente a los elementos encerrados en la colección dada. No así en la segunda parte de la pregunta donde deben encerrar el número de elementos de una colección dada según la fracción dada.  Del total de automóviles, ¿qué fracción representa la parte encerrada? 8 1/2 Del total de camiones, ¿qué fracción representa la parte encerrada? 9 3/12 1/2 Del total de balones, encierra en un círculo 1/3 Del total de dulces, encierra en un círculo 2/3 **Alumna 5 N**  Del total de automóviles, ¿qué fracción representa la parte encerrada? 2/8 Del total de camiones, ¿qué fracción representa la parte encerrada? 3/12 Del total de balones, encierra en un círculo 1/3 Del total de dulces, encierra en un círculo 2/3 **Alumna 6 J**	**Representación de la cantidad correcta de elementos en la colección según la fracción dada.** Encierran la cantidad correcta de elementos en la colección según la fracción dada. Escriben la fracción correspondiente a los elementos encerrados en la colección dada.  4Observa los siguientes grupos de figuras y contesta lo que se te pide Del total de automóviles, ¿qué fracción representa la parte encerrada? 1/4 Del total de camiones, ¿qué fracción representa la parte encerrada? 1/4 Del total de balones, encierra en un círculo 1/3 Del total de dulces, encierra en un círculo 2/3 **Alumno 2 O**

Los niños abandonan la categoría “dificultad para representar la cantidad correcta de elementos en la colección según la fracción dada”

En la pregunta respecto al **manejo de cantidades discretas** donde, en el cuestionario inicial, encerraban el número de elementos que indicaba el numerador de la fracción sin tomar en cuenta el denominador, ahora logran concebir la unidad en el contexto de cantidades discretas e identificar la fracción solicitada mediante el reparto de elementos de la unidad y la toma correspondiente de elementos.

7.5 Conclusiones de la tercera etapa del estudio

En el cuestionario final se observó mayor seguridad y confianza en la resolución de las preguntas notando una mejoría en comparación con el cuestionario inicial comprobando la viabilidad de la secuencia y el uso del material.

En el análisis de tipo acierto, error, no responde, todas las preguntas del cuestionario final obtuvieron un porcentaje significativamente mayor en los aciertos que en los errores.

En el análisis por tipos de error, en el cuestionario final los errores tipo 4, aplicación sistemática de procesos erróneos, no son considerados porque no hubo preguntas que abordaron este contenido y los errores tipo 2, errores por desconocimiento de la respuesta, se presentaron únicamente en tres de las preguntas en un bajo porcentaje.

En el análisis de las estrategias de resolución de problemas se encontró que desaparecieron casi en su totalidad las dificultades presentadas en el cuestionario inicial.

Los resultados del cuestionario inicial arrojaron que los estudiantes tenían dificultad para identificar la idea de mitad y de entero en figuras no canónicas, no reconocían fracciones equivalentes, solo identificaban y representaban gráficamente fracciones propias, no identificaban ni representaban gráficamente fracciones impropias, no identificaban ni representaban fracciones en cantidades discretas, ni representaban fracciones propias e impropias en la recta numérica y no numérica mostraban dificultad en la suma y resta de fracciones con y sin algoritmo con igual y diferente denominador. En el cuestionario final respecto a la idea de mitad y de entero pudieron identificarlas en figuras canónicas y no canónicas, reconocer fracciones equivalentes, identificar y representar gráficamente

fracciones propias e impropias, identificar y representar fracciones en la recta numérica y no numérica y sumar y restar fracciones con el apoyo del material en fracciones con igual y diferente denominador.

Dentro del avance que se observó y registró en esta última etapa, las estrategias de resolución que los alumnos ocuparon en el cuestionario final de fracciones las corrigieron y mejoraron como puede observarse en las tablas de comparación de estrategias de este capítulo. Por ejemplo, en la tabla 14, en la idea matemática representación gráfica de fracciones propias e impropias, la alumna 6J no sólo escribió la fracción correspondiente a la figura presentada (tres sextos) sino que anotó dos equivalencias (un medio y dos cuartos) de forma espontánea, sin ser parte de la instrucción, como se trabajó en la primera parte de la secuencia de actividades parte-todo.

De lo anterior, podemos concluir que los alumnos pasaron de un nivel de entendimiento de creación de imágenes a retención de imágenes de acuerdo al modelo de entendimiento de Kieren (1993), que identifica otras propiedades como la equivalencia de fracciones gracias a un nivel de la retención de la imágen en su mente de un medio, que es igual a dos cuartos y tres sextos, aunque nada más se haya representado en el cuestionario la representación fraccionaria de tres sextos. Es decir que ya sabe representar un medio de diferentes maneras, ya visualiza la equivalencia debido a la retención en su mente de un medio, ha superado el obstáculo cognitivo que presentaba donde la idea de mitad únicamente la entendían en las figuras que estaban divididas en dos partes, no como una proporción. Ahora ya sabe que tres sextos es la misma proporción que un medio, incluso independientemente de que las partes sombreadas de las figuras estén juntas o separadas como en el caso de las figuras no canónicas (tabla 12), donde imaginaban pasar de un lado a otro las partes sombreadas para decir que también es un medio. Se llega al objetivo de comprender que un medio es la mitad de algo, adquirieron la idea de mitad perfeccionando su estrategia de resolución.

Entonces, se puede decir que las estrategias de resolución mejoraron, las que tenían los alumnos en donde utilizaban el conteo para distinguir al numerador del denominador

progresaron al comprender la unidad, que la unidad puede ser un entero, en el caso de las cantidades continuas, y en el caso de las cantidades discretas que el entero está compuesto por una colección de unidades y que lo que se fracciona es el conjunto, no cada unidad. Dentro de las matemáticas realistas, la revisión de las cantidades discretas cobró sentido para los alumnos porque se cuestionó el dividir un conjunto de balones (y otros objetos) donde un balón debía partirse a la mitad para representar un medio de un conjunto de número impar, echándose a perder el balón. O en el caso de plantear la fracción de un grupo de niños, donde no se puede partir o dividir a un niño para que la fracción fuera exacta como tener un tercio de diez niños. De ahí la importancia de la secuencia didáctica donde lo primero fue la comprensión de la idea de unidad, donde en una cantidad continua la unidad puede dividirse pero en cantidades discretas la unidad mantiene su forma, su tamaño. A lo que le siguió la comprensión de la idea de mitad y la creación de un esquema conceptual basado en un material concreto que fue permitiendo al niño visualizar la relación del entero con las partes (un entero dividido en quintos, cuántas partes tiene) y la relación de las partes con las partes donde tiene que haber una igualdad entre ellas y volver a formar la unidad (si tenemos dos tercios, cuántos tercios faltan para formar la unidad). Todo ello trabajado antes de haber escrito la fracción y abordar el algoritmo, comprendido a partir del lenguaje y del material, lo que dió paso al aspecto simbólico, a la representación de la fracción de forma escrita donde el niño ya comprendió que un medio, o cualquier otra fracción, es un número y no dos, que el numerador y denominador es un número que representa una parte de algo, una fracción, sea un todo continuo o discreto.

En este punto, se destaca otra dificultad superada con los alumnos, que era concebir un octavo mayor a un cuarto y a un medio porque ocho es más grande que cuatro y dos, pero al crear las imágenes mentales (Kieren, 1993) de las partes de una unidad usando materiales concretos (Coxford y otros, 1975, citado en Butto 2013), se pudo comprender la proporción que representaba cada fracción.

En cuanto al manejo de las fracciones impropias, la comprensión de la unidad radicó en distinguir que el entero podía ser más de uno y que se sigue teniendo como referencia la fracción de la unidad porque, por ejemplo, en dos enteros dos sextos, los enteros se fraccionaron también en sextos para comprender la relación. Para los niños era difícil identificar el entero en una cantidad continua porque ese entero era más de uno, su estrategia de resolución era contar el número total de partes en que se dividían todos los enteros y ponerlo como denominador para después contar el número total de partes sombreadas de todos los enteros y ponerlo como numerador (tabla 14). No había distinción de la unidad en las fracciones impropias, lo que se superó al volver a la formación de la unidad dentro de una fracción impropia con el manejo del material concreto de las cantidades continuas.

Por lo tanto, se concluye que hubo una superación de los obstáculos cognitivos que presentaban los niños en cuanto a las ideas matemáticas básicas trabajadas en la secuencia, pasando de un nivel de entendimiento a otro de acuerdo al modelo recursivo de Kieren (1993). Superación reflejada en la depuración de sus estrategias de resolución y los resultados del cuestionario final gracias al apoyo del material concreto que les permitió ir visualizando cómo se construyen los números fraccionarios dentro de una situación específica, como planteaba Vergnaud (1990), el campo conceptual abarca tanto a los números como las situaciones en donde se llevan a cabo la utilización de esos números. Un campo conceptual, de acuerdo a Kieren (1993), no son los números sino lo que explicas también con los números, lo que creas a partir de los números, lo que comprendes a partir de los números y las situaciones en las que se llevan a cabo la explicación y el aprendizaje de esos números que están implicados dentro de ese campo conceptual de tal forma que no se pueden enseñar los números racionales sin las fracciones, por eso siguen siendo necesarias porque las fracciones es el aspecto fenomenológico de los números racionales, es decir su aplicación porque sin su aplicación, sin su uso, no hay forma de que los niños lo aprendan.

Capítulo VII

Conclusiones

El aprendizaje de las fracciones en educación primaria constituye uno de los retos de la enseñanza escolar porque es uno de los contenidos donde los estudiantes presentan mayores dificultades. En las últimas décadas los estudios realizados se han centrado en el aspecto conceptual, cognitivo y didáctico; la información obtenida de estos estudios ha

generado todo un campo de conocimientos para la toma de decisiones de los profesores para mejorar su enseñanza en lo que se refiere a los errores más comunes que presentan y las estrategias de resolución.

El estudio se centró en los conocimientos de los estudiantes de sexto grado de primaria sobre el concepto de fracción. Los objetivos fueron: 1. Identificar las dificultades y habilidades de los estudiantes en el aprendizaje de los números fraccionarios, 2, Diseñar, y aplicar una propuesta didáctica para mejorar el aprendizaje de los números fraccionarios y 3. Investigar, a partir de la propuesta diseñada, como evoluciona el pensamiento matemáticos de los niños sobre los números fraccionarios.

Respecto al marco teórico elegido para la investigación, el modelo recursivo de comprensión matemática de Kieren y Pirie (1991), propuesta teórico metodológica, incluye aspectos epistemológicos, propiedades de los números fraccionarios; aspectos ontogenéticos, estructuras cognitivas de los alumnos implicadas en el aprendizaje de las fracciones y aspectos didácticos, elementos que orientan el trabajo guiado de los docentes. Se consideró llevar a cabo la investigación a partir del modelo de Pirie y kieren sobre todo en lo que se refiere a la concepción del aprendizaje como un proceso recursivo, no lineal, que no va de menos a más sino que los estudiantes retroceden y avanzan en su comprensión en la medida que se les presentan nuevas situaciones y se ven en la necesidad de elaborar nuevos esquemas. El modelo de comprensión matemática de Pirie y Kieren fue el fundamento teórico metodológico a partir de cual se diseñaron los instrumentos de recopilación de datos, el cuestionario diagnóstico, entrevista clínica piagetiana, secuencia didáctica y cuestionario final y desde donde se analizó el avance de los estudiantes. Cabe señalar que el tema de la comprensión matemática generó un interés para una futura investigación, sobre todo distinguirlo del aprendizaje, porque puede haber aprendizaje sin comprensión (aprendizaje mecanicista) y por otra parte, hay quien señala que sin comprensión no hay aprendizaje.

Respecto a la metodología, la investigación se llevó a cabo en tres etapas. La primera, el diagnóstico inicial, consistió en la implementación de dos cuestionarios donde se exploraron

las ideas matemáticas relacionadas con el concepto de fracción y una entrevista clínica piagetiana que fue aplicada a seis alumnos y una entrevista semiestructurada a la docente del grupo.

Resumen de los resultados

En el primer cuestionario se exploraron las siguientes ideas: idea de mitad e idea de entero en un todo continuo, fracciones propias e impropias a partir de representaciones gráficas, representación gráfica de fracciones propias e impropias en cantidad continua, representación de fracciones propias, impropias y mixtas en la recta numérica, representación de fracciones en la recta no numérica a partir de representaciones gráficas, representación de fracciones escritas en la recta numérica a partir de representaciones gráficas, representación gráfica de fracciones en cantidades discretas, proporcionalidad, suma y resta de fracciones con representación gráfica, representación gráfica de fracción continua discretizada, representación gráfica de la parte y el todo continuo discretizado.

En el segundo cuestionario se exploraron las siguientes ideas matemáticas: suma y resta de fracciones propias, impropias y mixtas, proporcionalidad aritmética, división cuotitiva y partitiva, cociente, razón, porcentaje, decimal y escala 1:2 y 1:3. Posteriormente se llevó a cabo una entrevista clínica piagetiana con seis estudiantes de tres niveles de logro, dos de un nivel básico o inicial, dos de un nivel medio y dos de un nivel avanzado. Cabe señalar que las entrevistas piagetianas se llevaron a cabo con el primer cuestionario, debido a que los estudiantes dejaron secciones en blanco del segundo cuestionario.

Con la implementación del cuestionario inicial y las entrevistas se encontró que a pesar de que las fracciones son enseñadas en la primaria y que forman parte del currículum de matemáticas de educación primaria desde tercer grado, los estudiantes presentan dificultades con conceptos básicos, por ejemplo, la idea de mitad, la idea de entero, la representación de fracciones en cantidades continuas y discretas, la representación de

fracciones en la recta numérica y no numérica, entre otras ideas, lo que representa un obstáculo que dificulta que aprendan nuevos conceptos propuestos en niveles educativos superiores.

La primera etapa diagnóstica permitió comprobar lo que señala la literatura acerca de los errores y dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de las fracciones, no identifican la idea de mitad ni de entero en figuras no canónicas, conciben el numerador y el denominador como dos números separados, al comparar fracciones consideran que ⅕ es mayor que ½ porque cinco es mayor que dos lo que indica que siguen viendo los números fraccionarios como números naturales, presentan problemas con el algoritmo de la adición de las fracciones, lo confunden con el de la multiplicación, no conciben la unidad en la recta numérica.

Un tercer elemento de la etapa diagnóstica fue la entrevista semiestructurada a la profesora, que brindó información acerca de cómo la enseñanza de las fracciones representa un obstáculo para el trabajo como docente dentro del aula debido a varios factores que són: su formación, que no le permite un dominio de los contenidos matemáticos, el no contar con un libro de texto de matemáticas y un tiempo asignado para la asignatura de matemáticas y la forma en que son agregados los números fraccionarios dentro del currículum escolar dentro de la NEM en el campo formativo Saberes y Pensamiento Científico.

La entrevista clínica piagetiana contribuyó en la exploración del pensamiento de los alumnos, sobre todo en lo que se refiere a las estructuras cognitivas implicadas en su aprendizaje y las notaciones que utilizan para dar respuesta. Una vez identificadas las ideas matemáticas en donde los estudiantes presentan mayores dificultades y sus estrategias de resolución, continuamos con la segunda etapa de la investigación donde se diseñó e implementó una secuencia de actividades para avanzar en el conocimiento de las fracciones donde presentaron mayores dificultades. Las ideas que se trabajaron fueron idea de mitad y de entero en un todo continuo, equivalencia, cantidades discretas, representación gráfica de

fracciones, representación de fracciones en la recta numérica y no numérica, y suma y resta de fracciones sin algoritmo.

Con la secuencia de actividades se mostró que los estudiantes tienen interés y disposición a trabajar cuando se utiliza material concreto que ellos puedan manipular y actividades que les sean significativas.La secuencia de actividades permitió a los estudiantes avanzar en sus conocimientos sobre las fracciones como se comprobó con la implementación del cuestionario final donde se observó un avance en el dominio de la ideas matemáticas de idea de mitad y de entero en un todo continuo, representación de fracciones en cantidades discretas, representación gráfica de fracciones, propias , impropias y mixtas y representación de fracciones en la recta numérica y no numérica, la idea de equivalencia y la suma y resta de fracciones sin algoritmo. La creación y manejo del material por parte de los estudiantes contribuye a crear una base conceptual sin llegar al algoritmo.

Queda pendiente profundizar en las dificultades que presentan los estudiantes en cada una de la ideas matemáticas sobre todo del segundo cuestionario e identificar cuál es su origen, y contribuir de esta manera al campo de conocimientos que constituye esta área para os docentes, queda pendiente también, diseñar actividades dirigidas a los docentes que les permitan orientar su enseñanza en este tema, y por último aplicar entrevistas despues del cuestionario final, para explorar y comprobar a qué se debe el avance.

Respecto a la pregunta general de investigación de cómo se deben enseñar las fracciones. Consideramos que se debe crear un esquema conceptual de los números fraccionarios a partir de materiales y situaciones en sus diferentes contextos donde se hace necesario la utilización de estos números, superar y diversificar el modelo de enseñanza parte todo y no recurrir prontamente al algoritmo.

Podemos concluir que tanto los errores como las estrategias de resolución de los alumnos observadas en las tres fases de la investigación presentaron un desarrollo en la comprensión de las ideas matemáticas trabajadas en la secuencia pudiendo avanzar los alumnos del nivel

de entendimiento matemático propuesto por Kieren y Pirie (1993) del nivel de creación de imágenes a retención de imágenes.

7.1 Consideraciones finales

En mi experiencia como profesor de primaria, los contenidos matemáticos son los conocimientos que más disfruto trabajar con mis alumnos, en particular la enseñanza de las fracciones, sin embargo al observar que no todos mis alumnos lograban comprender y manejar estos contenidos, me vi en la tarea de buscar la manera de profesionalizar mi función como docente, motivo por el cual ingresé a la maestría en Desarrollo Educativo en la línea de Educación Matemáticas en la Universidad Pedagógica Nacional y realizar el proyecto de investigación sobre la enseñanza de las fracciones y diseñar, implementar y una secuencia didáctica.

Otro aspecto que me impactó fue saber que la enseñanza de las las fracciones era un tema de investigación que habían estudiado en las últimas décadas por diversos autores y que a pesar de todos estos estudios, este problema seguía vigente en la institución escolar, motivo que me llevó a reflexionar y a valorar la importancia de mi trabajo de investigación sobre todo en lo que se refiere a resignificar mi práctica docente.

La tarea de llevar a cabo el diseño y una evaluación diagnóstica que incluyera las diferentes ideas matemáticas que iba a explorar para conocer las dificultades y habilidades de los niños no fue una tarea sencilla, como maestro estaba acostumbrado a realizar exámenes y ejercicios de evaluación que tenían otras características pero aquí se trataba de encontrar las preguntas más adecuadas para poder conocer esas ideas matemáticas que tienen relación con el concepto de fracción, como son la idea de medida, razón, operador, cociente, proporción, , porcentaje entre otras. Esta fue una tarea que modificó mis creencias, no era de mi conocimiento, que el concepto de fracción tuviera tantos significados y contextos de

uso, a pesar de que en los libros de desafíos se trabajaba diferentes ejercicios que tenían que ver con estas ideas.

Referencias bibliográficas

Arenas, J. (2018). Compresión del concepto de fracción como razón a través del modelo de Pirie y Kieren. [Tesis de maestría]. Universidad Autónoma de Guerrero. Recuperado de: http://ri.uagro.mx/bitstream/handle/uagro/459/16347050_TM2016.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Arenas.J y Rodríguez, F. (2021) Enseñanza y aprendizaje del concepto fracción en la

educación primaria: estado del arte Cultura, Educación y Sociedad, 12(2), 49-64. Recuperado de: https://doi.org/10.17981/culteduso c.12.2.2021.03

Behr, M., Lesh, R., Post, T. y Silver E. (1983). Rational Number Concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), Acquisition of Mathematics Concepts and Processes, (pp. 91-125). New York: Academic Press. Recuperado de: https://www.researchgate.net/profile/Edward-Silver-2/publication/258510439_Rational_number_concepts/links/57598dc808aed884620b0d82/Rational-number-concepts.pdf

Behr, M. J., Post, T. R. y Silver, E. A. (1983). Conceptos de los números racionales. La adquisición de los niños del concepto de equivalencia y orden para los números racionales (pág. 92-144). Nueva York: Académico.

Butto, C. (2013). El aprendizaje de fracciones en educación primaria: una propuesta de enseñanza en dos ambientes. *Horizontes pedagógicos.* Volumen 15. No 1, México: Iberoamericana, pp. 33-45. Recuperado de https://horizontespedagogicos.ibero.edu.co/article/view/403

Cortina, J., Zúñiga, C. y Visnovska, J. (2013). La equipartición como obstáculo didáctico en la enseñanza de las fracciones. Educación Matemática, 25 (pp. 77-29). Recuperado de: https://www.redalyc.org/pdf/405/40528961002.pdf

Cortina, J. (2014) Investigar las fracciones: experiencias inspiradas en la metodología de los experimentos de diseño.Educación Matemática, 25 años. Recuperado de: https://www.redalyc.org/pdf/405/40540854014.pdf

Crespo, M. (2023). La enseñanza de las fracciones aplicando la metodología Singapur. [Tesis de grado, Universidad de Valladolid] Repositorio Documental de la Universidad de Valladolid https://uvadoc.uva.es/handle/10324/57833

Cruz-Ortiz, A. (2024). Estrategias de enseñanza de fracciones heterogéneas y homogéneas para docentes del área de matemática. Polo del conocimiento, Vol. 9, No 2 Febrero 2024, pp. 1480-1494. Disponible en Estrategias de enseñanza de fracciones heterogenias y homogéneas para docentes del área de matemática | Cruz Ortiz | Polo del Conocimiento

Delval, J. (2012). Descubrir el pensamiento de los estudiantes. Introducción a la práctica del método clínico. México: Siglo Veintiuno Editores.

Fandiño, M. (2009). Las fracciones: aspectos conceptuales y didácticos. Bogotá, D.C.: Editorial Magisterio.

Fandiño, M. (2015). Las fracciones: aspectos conceptuales y didácticos. Capítulo 2 del libro: Tendencias en la educación matemática basada en la investigación. Volumen 1. Puebla (México): BUAP Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (Facultad de Ciencias Físico Matemáticas). Pág. 25-38.

Fazio, L. y Siegler, R. (2011). La enseñanza de las fracciones (Prácticas Educativas 22). Ginebra: Oficina Internacional de Educación-OIE.

Figueras, O., Gómez, B., Real, R. (2013). Aspectos de la fracción en los modelos de enseñanza: El caso de un libro de texto. Épsilon -Revista de Educación Matemática-, vol. 30 (3), no. 85, 21-36. Disponible en https://www.researchgate.net/publication/341396664_Aspectos_de_la_fraccion_en_los_modelos_de_ensenanza_El_caso_de_un_libro_de_texto

Freudenthal, H (1994). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas*. (L. Puig, Trans). Centro de Investigación de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Departamento de Matemática Educativa. (Trabajo original publicado en 1983).

Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: Reidel. Mathematics Education Library. Springer Science+Business Media, B. V.

Gerez, J. (2023). La integración del sentido de las fracciones como dificultad del oficio docente en instituciones de Educación de Jóvenes y Adultos en Córdoba, Argentina. Educación Matemática, vol. 35, núm. 3, pp. 151-177. Disponible en https://doi.org/10.24844/EM3503.05

González, C. (2023). La enseñanza y el aprendizaje de las fracciones en la educación secundaria: reflexión y análisis desde la práctica docente. Innovus.mx. Disponible en https://innovus.press/la-ensenanza-y-el-aprendizaje-de-las-fracciones-en-la-educacion-secundaria-reflexion-y-analisis-desde-la-practica-docente/

González, D. (2016) Errores comunes en el aprendizaje de las fracciones: Un estudio con alumnos de 12/13 años 2016 [Tesis de maestría] Universidad de Cantabria. Recuperado de: https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/6903/GonzalezdelOlmoDario.pdf

Gravemeijer, K.P.E.; Terwel, J. (2000) Hans Freudenthal, un matemático en Didáctica y teoría curricular Journal of Curriculum Studies, 32(6), 777-796.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, M. (2014). Metodología de la investigación (6th ed., pp 3-119). México: McGraw-Hill/Interamericana. Recuperado de: https://www.esup.edu.pe/wp-content/uploads/2020/12/2.%20Hernandez,%20Fernandez%20y%20Baptista-Metodolog%C3%ADa%20Investigacion%20Cientifica%206ta%20ed.pdf

Iglesias, A. (2022). Lesson Study y propuesta de mejora en la enseñanza de fracciones en Educación Primaria. [Tesis de grado, Universidad de Valladolid]. Repositorio Documental de la Universidad de Valladolid https://uvadoc.uva.es/handle/10324/57772

Kieren, T. (1976). On the mathematical, cognitive and instructional foundation of rational

numbers. En R. A. Lesh, y D.A. Bradbar (Eds.), Number and measurement, Papers from a Reseach Workshop (pp 101-144). Columbus, OH: ERIC/SMEAC. Recuperado de: https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED120027.pdf

Kieren, T. E. (1992). Rational and fractional numbers as mathematical and personal knowledge: Implications for curriculum and instruction. En G. Leinhardt, R. Putnam, y R.A. Hattrup (Eds.), Analysis of arithmetic for mathematics teaching (pp. 323-371). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kieren, T. E. (1993). Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. En T. P. Carpenter, E. Fennema y T. A. Romberg (Eds.), Rational numbers: An integration of research. (pp. 50-84). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlabaum

Lamper,M. (2001)Teaching Problems and the Problems of Teaching Library of Congress Cataloging-in-Publication Data

Liljedahl, P. (2020) Building Thinking Classrooms in Mathematics CORWIN Mathematics

Llinares, S y Sánchez, V. (1997). Fracciones. La relación parte-todo. Síntesis

Lockhart, P. (2009.) El lamento de un matemático. En La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española vol. 11, no. 4, 2008, págs. 737–766. Recuperado de: https://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=824

Mancera, E. (1992). Significados y significantes relativos a las fracciones. *Educación Matemática* vol 4, no 2, pág 30 -54. Recuperado de: https://www.redalyc.org/pdf/405/40517204.pdf

Meel, D. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la Teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 6, núm. 3, pp. 221-278. Recuperado de: https://www.redalyc.org/pdf/335/33560303.pdf

Pazos, L.(2009) Las fracciones son un problema. 40 / QUEHACER EDUCATIVO.

Recuperado de: https://www.fumtep.edu.uy/didactica/item/342-las-fracciones-son-un-problema

McKerman, J. (2001). Investigación y acción del currículum. Métodos y recursos para profesionales reflexivos. Madrid. Ed. Morata

Streefland, L. (1993). Fractions: A Realistic Approach. En T.P. Carpenter, E. Fennema, T.A. Romberg (eds), Rational Numbers. An Integration of Research. Nueva Yersey, Estados Unidos: University of Wisconsin Madison Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Streefland, L. (1991). Fractions in realistic mathematics education. A paradigm of development research. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers

Streefland, L. (1978). Algunos resultados de la observación concerniente la constitución mental del concepto de fracción. Estudios Educacionales de la Matemática 9 (1), 51-73. Recuperado de: https://new.gpdmatematica.ar/wp-content/uploads/2021/03/12.-Streefland-Las-fracciones.-Un-enfoque-realista.pdf

Streefland, L. (1984). Como enseñar las fracciones para que sean útiles. Utrecht, Países Bajos: OW y OC.

Streefland, L. (1991). Las fracciones en la educación de la matemática realista. Un paradigma de la investigación del desarrollo: Dordrecht, Países Bajos: Editores académicos Kluwer.

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. En CNRS y Université René Descartes. Recherches en Didáctique des Mathématiques, Vol. 10,nº 2, 3, pp. 133-17. Recuperado de: https://www.ecosad.org/laboratorio-virtual/images/biblioteca-virtual/bibliografiagc/teoria-de-campos-conceptuales-vergnaud-1990.pdf

ANEXO 1

Cuestionario inicial de fracciones

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

Maestría en Desarrollo Educativo

Línea Educación Matemática

CICLO ESCOLAR 2022 – 2023

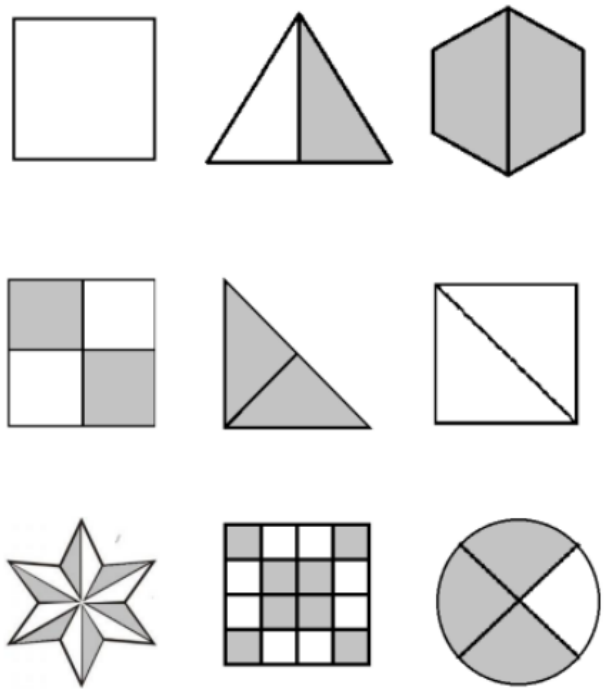
Evaluación diagnóstica de matemáticas 6°

Nombre del alumno (a):

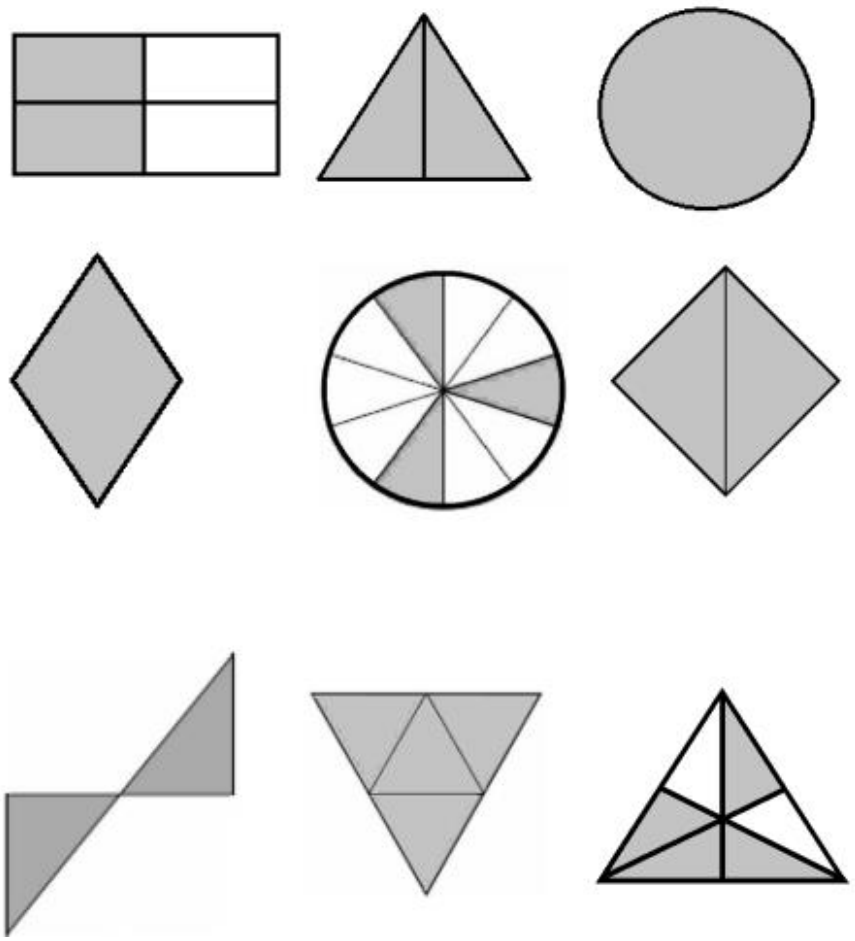
_____

Instrucciones: Lee con atención el cuestionario y responde lo que sigue. Si tienes alguna duda, cualquiera que sea, pregunta por favor al aplicador.

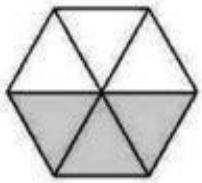
1. Identifica las figuras cuya parte sombreada representa una mitad y márcalas con una X



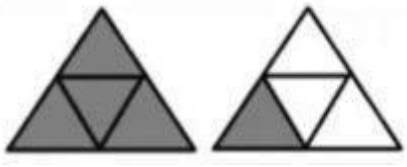
2. Encierra las figuras cuya parte sombreada representa un entero



3. Escribe la fracción que representa la figura



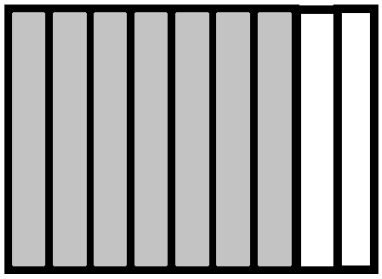
_____



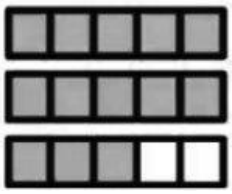
_____

_____

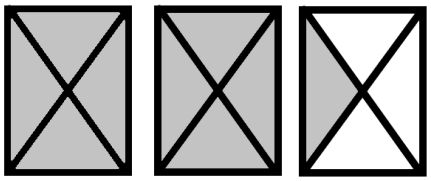
_____



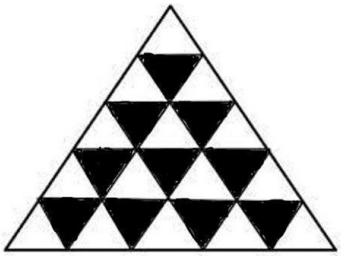
_____



_____



_____



_____

4. Representa la fracción con una figura

$\frac{3}{6}$ $1\frac{1}{4}$ $\frac{3}{7}$

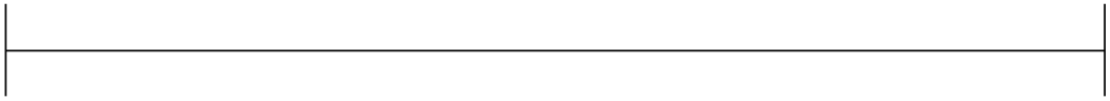
$3\frac{2}{6}$ $\frac{7}{9}$ $2\frac{3}{5}$

2 $\frac{1}{4}$

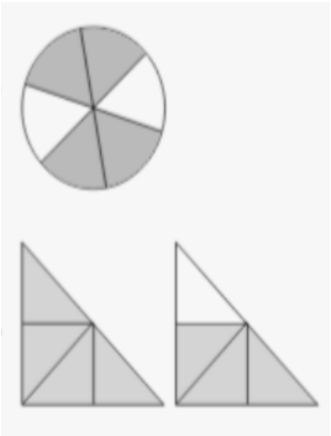
5. Ubica en la recta numérica las siguientes fracciones: $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{3}{2}$ y 1 entero

6. Ubica en la recta numérica las siguientes fracciones: $1\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{3}$, $1\frac{3}{6}$ y $2\frac{3}{4}$

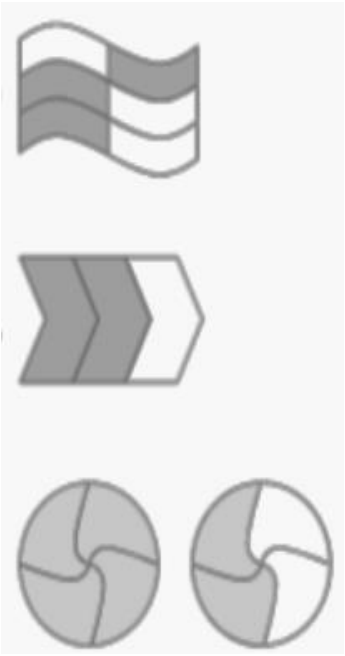
7. Representa las siguientes fracciones en la recta $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{6}{8}$ y $\frac{1}{5}$

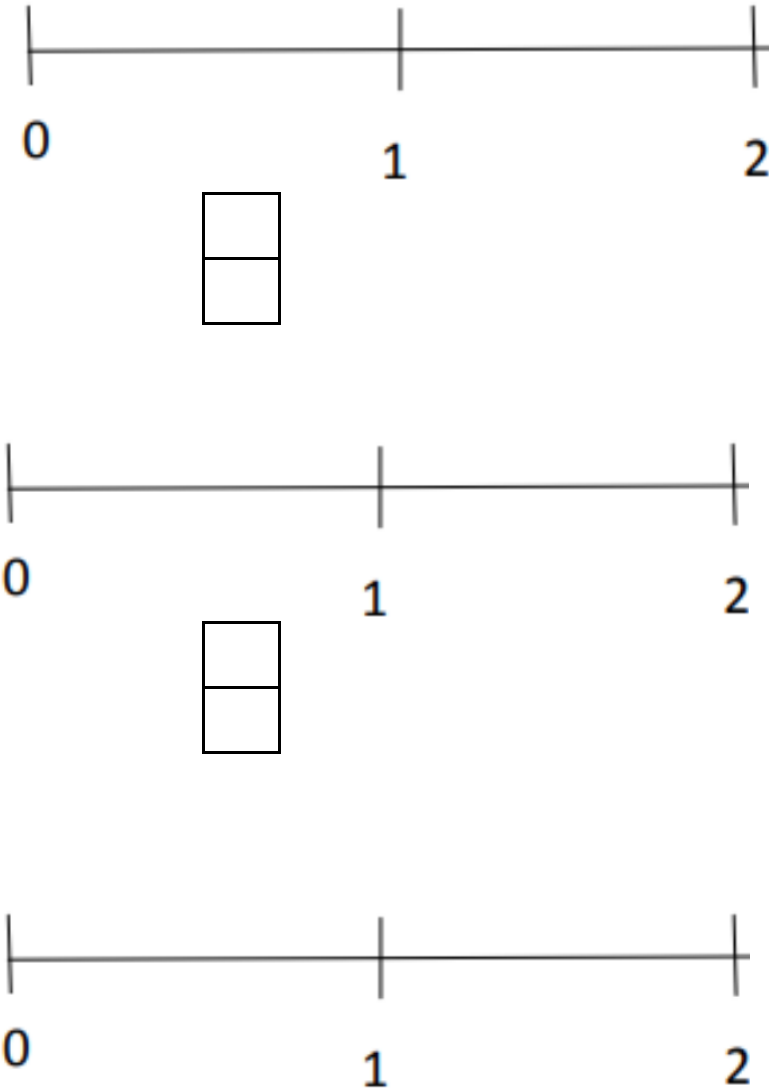


8. Ubica en la recta las fracciones representadas

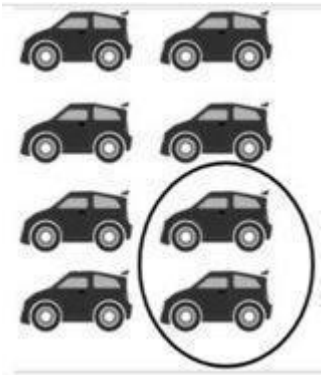


9. Completa la fracción representada y ubícala en la recta numérica.





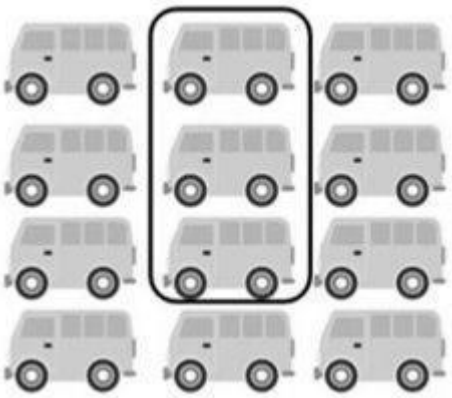
10. Observa los siguientes grupos de figuras y contesta lo que se te pide



Del total de automóviles,

¿qué fracción representa

la parte encerrada? _____



Del total de camiones,

¿qué fracción representa

la parte encerrada? _____

Del total de balones, encierra en un

círculo $\frac{1}{3}$

Del total de dulces, encierra en un

círculo $\frac{2}{3}$

11. En una receta de cocina dice: “Para cocinar una sopa que alcance para 16 personas se necesitan 4 litros de agua”. ¿Cuántos litros se necesitan para una sopa para 3 personas?

_____

a) ¿Cuántos litros se necesitarán para una sopa para 4 personas?

_____

b) ¿Cuántos litros se necesitarán para una sopa para 32 personas?

_____

c) ¿Cómo calcularías la cantidad de agua para un banquete para 64 personas?

_____

Con estos valores llena la tabla siguiente:

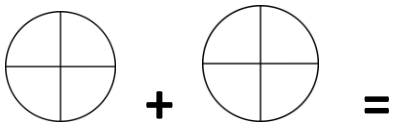
Número de personas	**Cantidad de agua**
4	
8	
16	
32	
64	

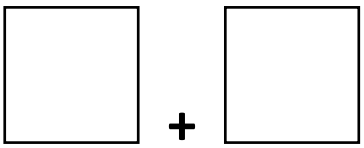
12. Después de haber llenado la tabla, transformándola en una gráfica. Si deseas usa papel cuadriculado.

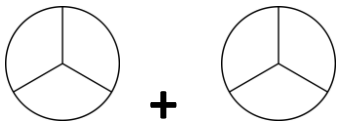
a) Ahora, responde: ¿Cuál es la proporción de agua por cantidad de personas?

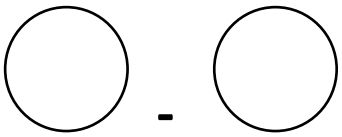
_____

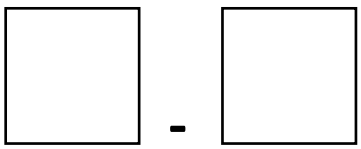
13. Realiza las siguientes operaciones y ayúdate de las figuras.

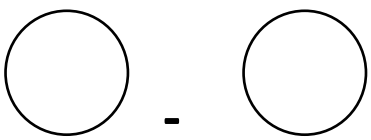
a) $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} =$  =

b) $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} =$  =

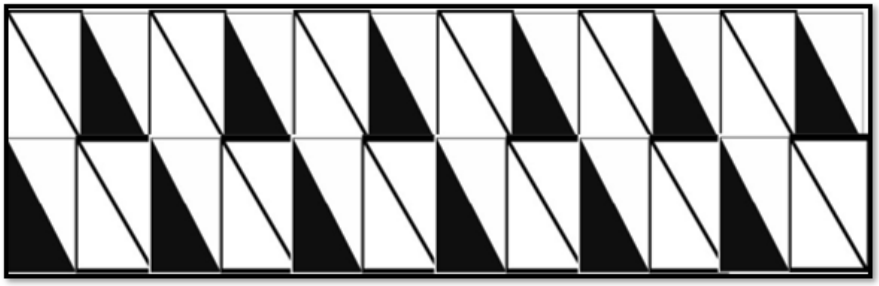
c) $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} =$  =

d) $\frac{5}{8} - \frac{3}{8} =$  =

e) $\frac{1}{2} - \frac{2}{4} =$  =

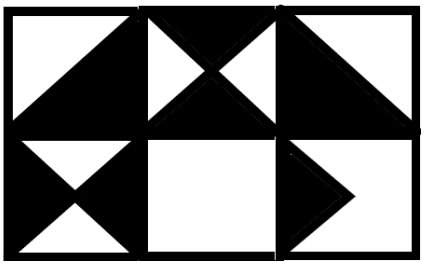
f) $\frac{5}{5} - \frac{3}{4} =$  =

14. El espejo está formado por triángulos iguales. Si se rompieron los que están sombreados, ¿qué parte del espejo está en buenas condiciones?



a) $\frac{3}{24}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{24}$ d) $\frac{8}{24}$ e) $\frac{2}{5}$

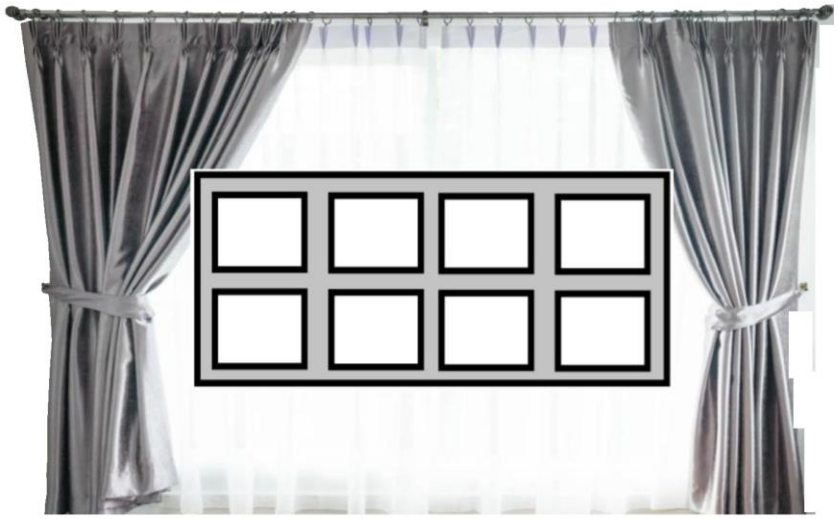
15. En la remodelación del piso del baño de la escuela, se están colocando mosaicos blancos como se muestra en la imagen. ¿Qué parte del piso se ha cubierto?.



_____

Lee con atención y escribe tu respuesta.

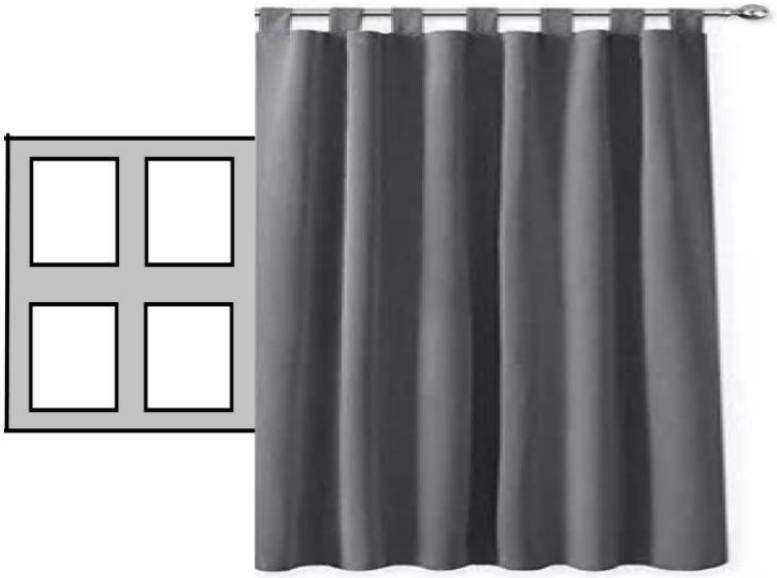
16. Esta ventana tiene 8 cristales cuadrados



¿Qué fracción de la ventana puede verse ahora?

Escribe tu respuesta: _____

En este otro caso puedes ver $\frac{1}{3}$, de la ventana.



¿Cuántos cristales tiene la ventana? _____

ANEXO 2

Cuestionario inicial de fracciones

fase II

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

Maestría en Desarrollo Educativo

Línea Educación Matemática

CICLO ESCOLAR 2022 – 2023

Evaluación diagnóstica de matemáticas 6° FASE II

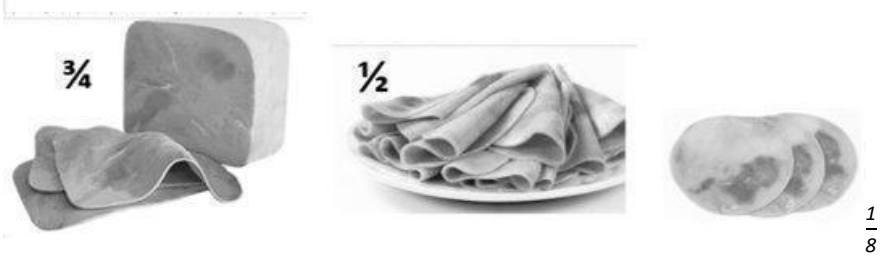
Nombre del alumno (a):

_____

Instrucciones: Lee con atención el cuestionario y responde lo que sigue. Si tienes alguna duda, cualquiera que sea, pregunta por favor al aplicador.

1. Don José tiene una tortería, el día lunes vendió 20 tortas cubanas y para ello ocupó $\frac{3}{4}$ kg de jamón, el día miércoles vendió 15 tortas hawaianas y ocupó $\frac{1}{2}$ kg de jamón y el día viernes vendió 5 tortas de huevo con jamón y ocupó $\frac{1}{8}$ kg de jamón. Ayúdale a saber cuánto jamón ha ocupado.

Lunes **Miércoles** **Viernes**



$\frac{1}{8}$

2. A la señora Rosa le tocó llevar crema para preparar espaguetti en la escuela de sus hijos para el convivio del día del niño. Para el grupo de su hijo Pedro tiene que traer ½

litro y $\frac{1}{4}$ de litro y para el grupo de su hija Renata 5 envases de $\frac{1}{4}$ de litro. ¿Cuántos litros de crema debe comprar?

Pedro

Renata

Sra. Rosa

3. La señora Munguía preparará un banquete para los maestros de la escuela por el fin de año. Como plato principal cocinará pollo en pipián. Compró en el mercado 3

pollos que pesaron $1\frac{3}{4}$ kg, $1\frac{1}{2}$ kg y $1\frac{1}{4}$ kg. ¿Cuántos kilogramos de pollo compró en total?

pollo #1

$1\frac{3}{4}$

pollo #2

$1\frac{1}{2}$

pollo #3

$1\frac{1}{4}$

4. Un comerciante transportó $18\frac{3}{4}$ toneladas de carne de res desde el rastro ubicado en Toluca, Edo. de México, a las carnicerías del mercado “27 de mayo” de la ciudad de México. El primer día, distribuyó carne en 3 diferentes carnicerías. Si vendió $1\frac{2}{3}$

toneladas en la primera, $2\frac{1}{6}$ toneladas en la segunda y $1\frac{1}{2}$ toneladas en la tercera. ¿Cuántas toneladas le quedan para repartir?

$18\frac{3}{4}$ toneladas

Situación 1

$1\frac{2}{3}$ toneladas

Situación 2

$2\frac{1}{6}$ toneladas

Situación 3

$1\frac{1}{2}$ toneladas

5. La señora Guillermina vende tamales y por cada kilo de harina utiliza ¼ de manteca de cerdo. Quiere saber la cantidad de manteca y el número de tamales que puede obtener con las siguientes cantidades de harina. Ayúdale a completar la tabla:

Harina kg	Manteca	Tamales
1	$\frac{1}{4}$	15
3		
5		
7		
12		
20		

6. Después de haber llenado la tabla, transformándola en una gráfica. Si deseas usa papel cuadriculado.

a) Ahora, responde: ¿Cuál es la proporción de harina por manteca?

_____

7. En la escuela primaria “Provincia de Quebec”, harán una excursión a Teotihuacán los grupos de 4°, 5° y 6° que suman un total de 120 alumnos. Se reparte por igual los pasajeros entre los autobuses. Si cada autobús transporta 40 pasajeros. ¿Cuántos autobuses se necesitan?

40 pasajeros

8. En la escuela “Domingo Paredes” turno vespertino realizarán una visita al museo Universum. La comunidad escolar está integrada por 190 alumnos y 10 maestros. Si se tienen 5 autobuses ¿cuántos pasajeros viajarán en cada uno?

9. Si se quiere repartir 15 bombones entre 4 chicos de forma equitativa y sin que sobre nada, ¿Cuánto debería recibir cada chico?

Opción A: 3 y $\frac{4}{3}$ **Opción B:** 3 y $\frac{3}{4}$ **Opción C:** 2 y $\frac{3}{4}$

10. Alejandro quiere trabajar en la feria vendiendo boletos para la rueda de la fortuna. Por cada 4 boletos que venda, le dan el costo de uno y en el juego del carrusel por cada 5 boletos que venda, le dan el costo de 2. ¿En qué juego mecánico le conviene trabajar?

11. Camila quiere comprarse un vestido nuevo en la tienda “Gran Boutique“, el vestido cuesta $450 y tiene un descuento del 20% y en la tienda “De Moda“ el mismo

vestido cuesta $700 y tiene un descuento de 50%. Ayúdale a decidir dónde le conviene comprar

GRAN BOUTIQUE *DE MODA*

$450 descuento 20% **$700 descuento 50%**

12. Jorge y Luis del grupo de 6°A tienen listones de diferente longitud que deben ser cortados en partes iguales para la decoración del salón.

El siguiente dibujo representa el listón completo. Debajo de éste dibuja las fracciones que se indican:

a) $\frac{1}{2}$

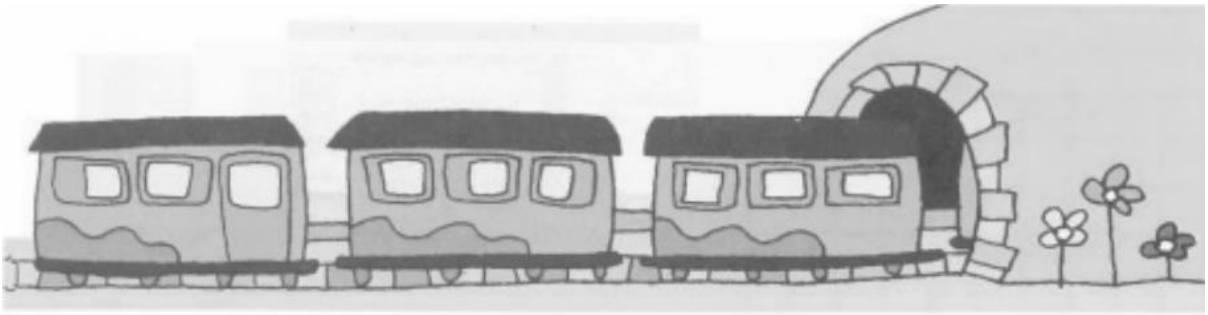
b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{8}$

Completa la siguiente tabla:

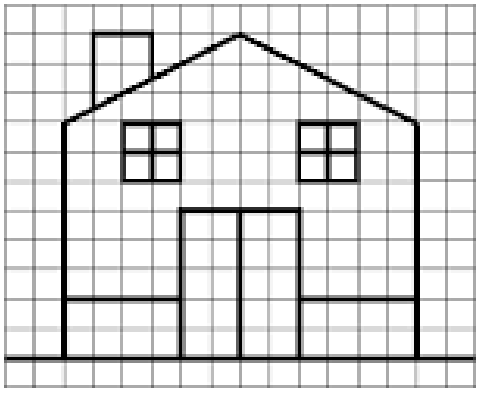
Longitud del listón (m)	**Número de partes iguales en que se cortará**	**Tamaño de cada una de las partes, expresada como fracción (m)**	**Tamaño de cada una de las partes, expresada como punto decimal (m)**
1	2		
1	4		
3	2		
5	4		
2	5		
4	5		
6	5		

13. Observa la siguiente imagen:



Tu puedes ver sólo $\frac{1}{4}$ de este tren. El resto del tren está en el túnel. Dibuja en el recuadro siguiente el tren completo.

14. Observa con atención el siguiente dibujo de una casa.

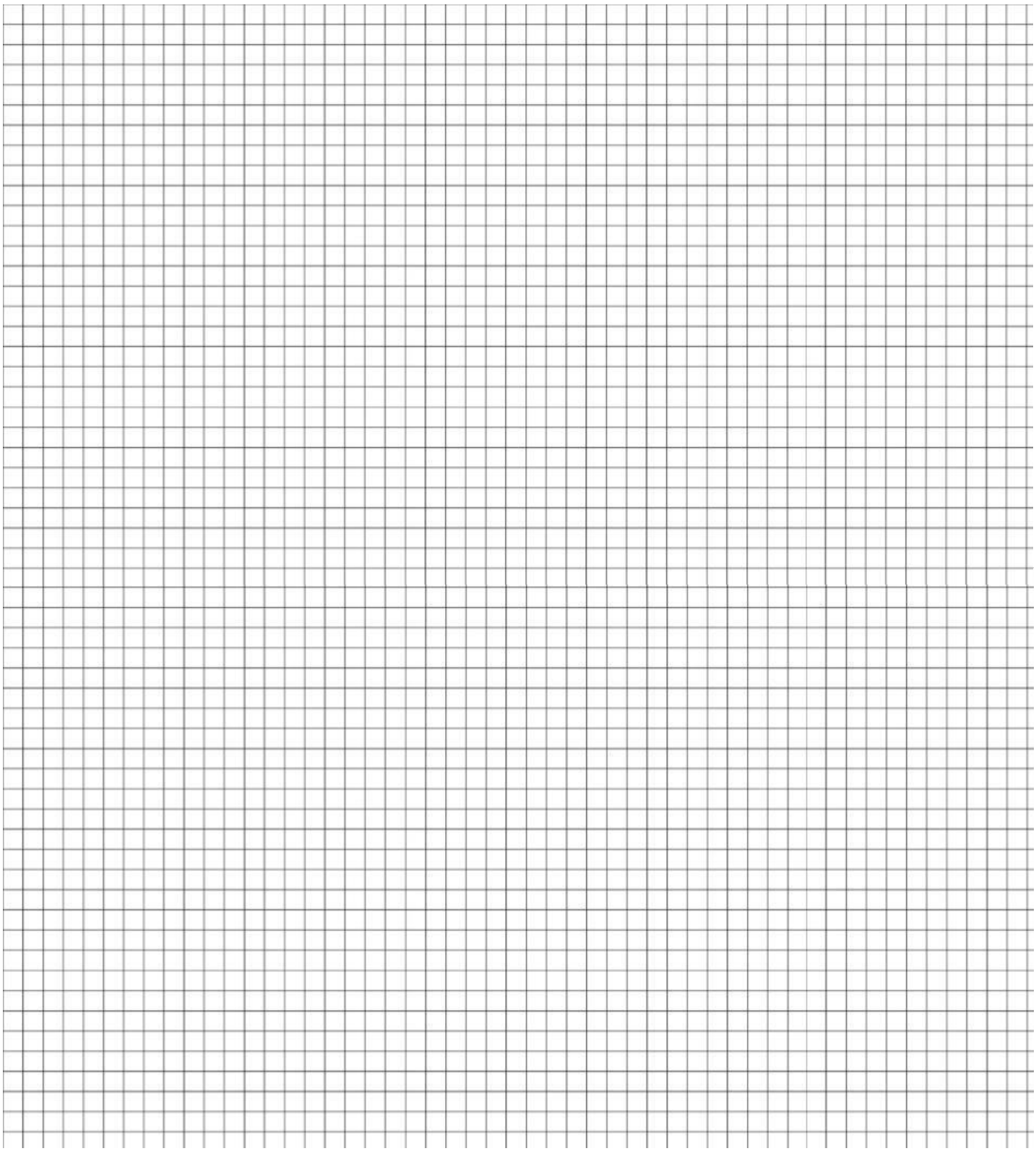


Ahora, agranda al doble y al triple el tamaño de la casa en las siguientes cuadrículas.

DOBLE

En seguida, agranda al triple su tamaño en la siguiente cuadrícula.

TRIPLE



ANEXO 3

Entrevista semiestructurada a la docente

Entrevista semiestructurada a la docente

CATEGORÍA	PREGUNTAS
Datos de identificación del profesor	¿Cómo se llama? ¿Cuál es su edad? Escuela en que labora : ¿Cuántos años lleva laborando en esta escuela?
Formación académica	¿Cuál es su grado académico? ¿Cuál es la institución académica de procedencia? ¿Qué cursos de actualización ha tomado?
Experiencia profesional	¿Cuántos años de experiencia tiene en escuelas públicas? ¿En qué grados ha impartido clase?
Práctica docente	¿Cómo aprendió usted el tema de las fracciones? ¿Lo enseña de la misma forma? ¿Qué dificultades ha detectado que presentan sus alumnos en el aprendizaje de los números fraccionarios? ¿Me podría dar un ejemplo? ¿Existen aspectos en su práctica docente que haya retomado de la revisión de planes y/o programas sobre la enseñanza de las fracciones? ¿Cuál? ¿Qué recursos y/o materiales utiliza para la enseñanza de las fracciones?
Conocimiento de los planes y programas de estudio y de libros de texto	De acuerdo a su experiencia profesional, ¿Qué desafíos representan mayor dificultad para su enseñanza? ¿Cuáles? De acuerdo al desafío matemático #8 de la página 19 "El equipo de caminata" ¿Cómo lo lleva a cabo? ¿Y el desafío 55 de la página 112 "Los jugos"? ¿Cómo lo lleva a cabo?

	¿Qué contenidos matemáticos sobre las fracciones del programa 2017 trabaja? ¿Cuál es la diferencia con el anterior?
Evaluación	¿Cómo verifica lo aprendido por los alumnos? ¿Con qué frecuencia evalúa a sus estudiantes? ¿De qué forma?

ANEXO 4

Hojas de datos de la secuencia de actividades

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

Maestría en Desarrollo Educativo

Línea Educación Matemática

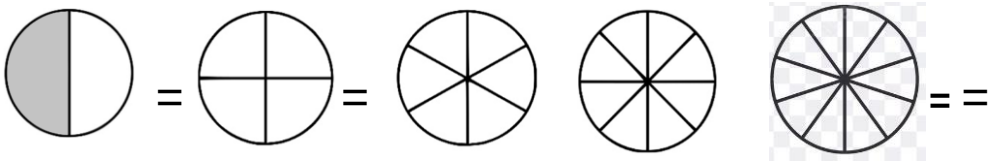
FICHA DE TRABAJO

Nombre alumno (a):_____

Utilizando el material y apoyándote en las imágenes, responde a continuación

1. Utiliza el material ,superponiendo los círculos escribe la fracción que se indica. Y colorea la figura en blanco.

a) Un medio equivale a:



$\frac{\blacksquare}{4}$ $\frac{\blacksquare}{6}$ $\frac{\blacksquare}{8}$ $\frac{\blacksquare}{10}$

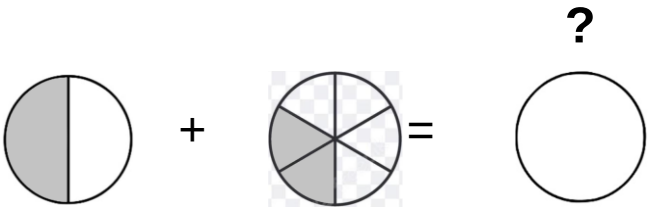
2. Utilizando el material completa la tabla que se presenta:

Fracción	¿Cuánto me falta?	Para llegar a
$\frac{1}{2}$		1
$\frac{3}{4}$		$\frac{7}{8}$
$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$

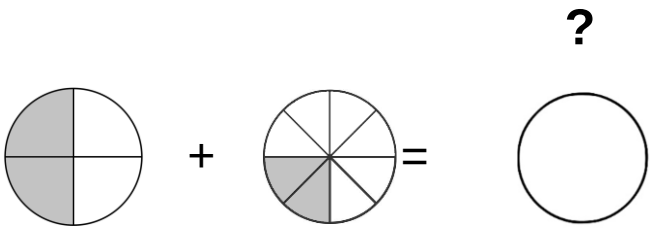
$\frac{1}{4}$		$\frac{6}{8}$

3. Responde y colorea de acuerdo a lo que se solicita en cada inciso.

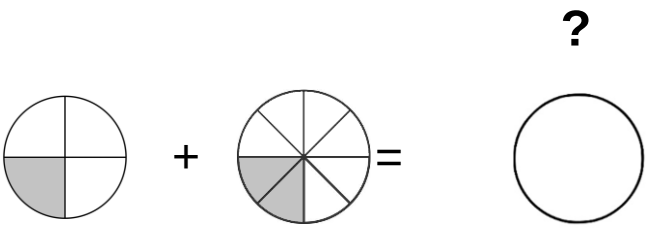
a) ¿Cuánto resulta de *sumar* $\frac{1}{2}$ más $\frac{2}{6}$?



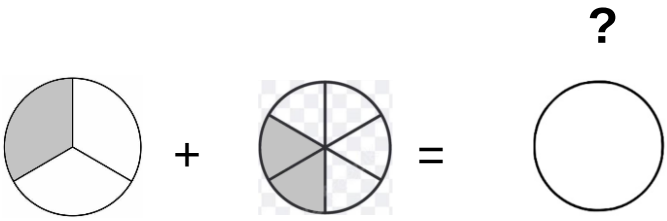
b) ¿Cuánto resulta de *sumar* $\frac{2}{4}$ más $\frac{2}{8}$?



c) ¿Cuánto resulta de *sumar* $\frac{1}{4}$ más $\frac{2}{8}$?

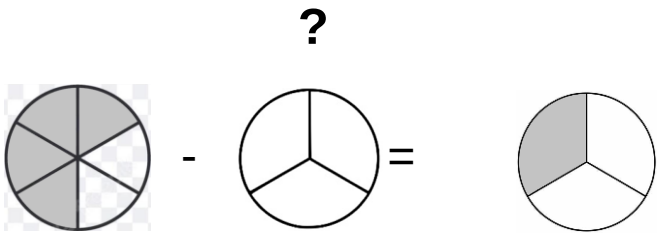


d) ¿Cuánto resulta de *sumar* $\frac{1}{3}$ más $\frac{2}{6}$?

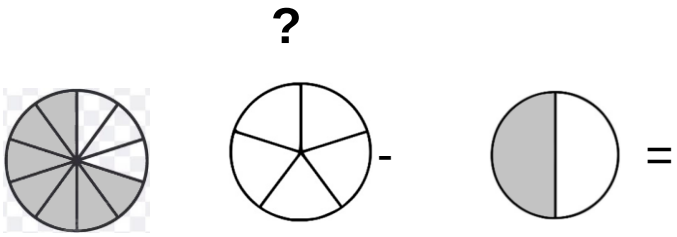


4. Responde y colorea de acuerdo a lo que se solicita en cada inciso.

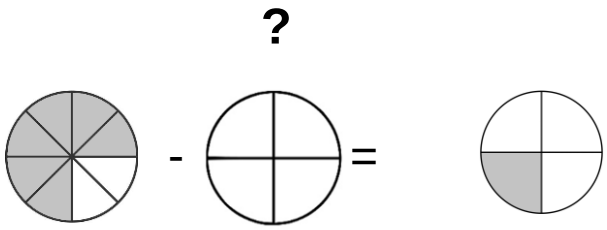
a) ¿Cuántos tercios se necesitan *restar* a $\frac{4}{6}$ para tener $\frac{1}{3}$?



b) ¿Cuántos quintos se necesitan *restar* a $\frac{7}{10}$ para tener $\frac{1}{2}$?

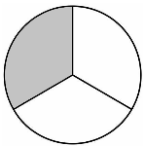


c) ¿Cuántos cuartos se necesitan *restar* a $\frac{6}{8}$ para tener $\frac{1}{4}$?



d) ¿Cuántos sextos se necesitan *restar* a $\frac{1}{3}$ para tener $\frac{1}{6}$?

?

 - =

5. Completa la siguiente tabla

Fracción	¿Cuánto me falta?	Para llegar a
$\frac{4}{5}$		$\frac{6}{6}$
$\frac{3}{4}$		$1\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}$		$1\frac{1}{8}$
$\frac{3}{6}$		$\frac{2}{2}$
$\frac{2}{8}$		$1\frac{1}{4}$
$\frac{2}{6}$		$\frac{4}{3}$

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

Maestría en Desarrollo Educativo

Línea Educación Matemática

FICHA DE TRABAJO

Nombre:_____

1. Lee con atención y contesta lo que se pide

a) Del total de estrellas presentadas. ¿Cuántas representan $\frac{1}{2}$?. Encierra en un círculo la fracción correspondiente y escribe tu respuesta sobre la línea.

_____

b) Del total de la colección de estrellas anteriores ¿podrías representar ¼ de estrellas?. Sí, no, ¿Por qué? Justifica tu respuesta

_____

_____

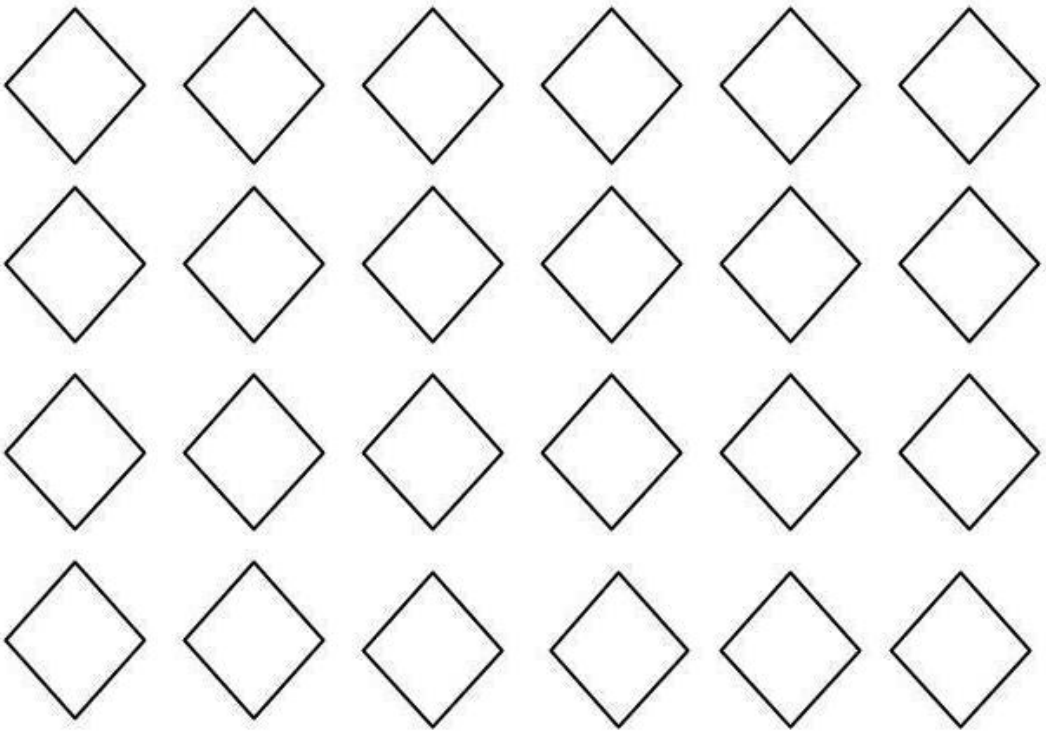
_____

2. A continuación, saca tus colores para iluminar según la indicación de cada inciso. En esta colección de diamantes, colorea:

   a) de azul $\frac{1}{4}$

   b) de rojo $\frac{1}{6}$

   c) de naranja $\frac{1}{8}$



Enseguida, analiza la siguiente situación y responde:

a) Mariana tiene $\frac{1}{3}$ de la colección de rombos anteriores. En el recuadro siguiente dibuja cuántos rombos tiene:

Ahora dibújalo

3. Completa las siguientes tabla:

Cantidad de fichas	**Fracción**						
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$1\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}$
24							
18							
12							
36							

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

Maestría en Desarrollo Educativo

Línea Educación Matemática

FICHA DE TRABAJO

Nombre alumno (a):_____

Elaboren tiras de papel de 1 metro, ½ metro, ¼ de metro y ⅛ de metro.
Expliquen cómo construyeron cada una de las tiras con las medidas indicadas.

1. ¿Cómo construyeron la tira de ½?

_____

_____

2. ¿Cómo construyeron la tira de ¼?

_____

_____

3. ¿Cómo construyeron la tira de ⅛?

_____

_____

4. ¿Podrías construir alguna otra medida?
   ¿Si?
   ¿Cuál?_____

   ¿No?
   ¿Por qué?_____

   _____

5. Construye una medida y explica cómo la hiciste.

_____

_____

Utilicen las tiras para medir lo siguiente:

a) El largo de tu libro de texto

_____

_____

b) El largo de la mesa

_____

_____

c) El largo del escritorio de la maestra

_____

_____

d) El largo del pizarrón

_____

_____

.

Ubica en la recta las medidas que obtuviste

0

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

Maestría en Desarrollo Educativo

Línea Educación Matemática

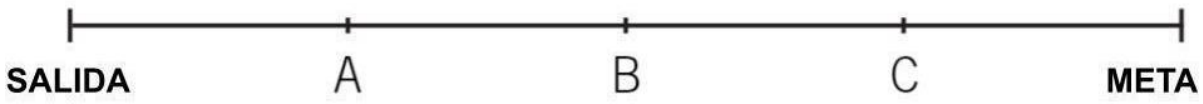
FICHA DE TRABAJO

Nombre alumno (a):_____

Lee con atención la situación planteada y responde cada inciso.

En muchos países se organizan maratones que convocan tanto a hombres como a mujeres. Con frecuencia la recaudación se destina a ayuda social. En nuestro país, también se organizan maratones incluso de más de 40 km en la que participan de 5,000 a 6,000 corredores.

Esta es la representación del recorrido de un maratón. Los puntos A, B y C están todos a la misma distancia y marcan distintos recorridos desde la salida.



a) Cuando un corredor esté en el punto B, ¿qué parte de la carrera habrá recorrido?

---

b) Cuando el corredor haya recorrido tres cuartos del maratón, ¿dónde se encontrará?

---

c) Cuando el corredor esté en el punto A, ¿qué fracción del total habrá recorrido?

En esta representación del maratón, se marcaron otras distancias desde la salida.

a) ¿Qué punto de la recta indica que el corredor ha recorrido $\frac{1}{5}$ de la carrera?

---

b) Cuando un corredor ha llegado al punto B, ¿ya recorrió más de la mitad de la carrera?

¿Qué fracción del recorrido representa el punto B?

---

c) ¿Hay algún punto marcado que represente $\frac{4}{5}$ de la carrera?

ANEXO 5

Cuestionario final de fracciones

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

Maestría en Desarrollo Educativo

Línea Educación Matemática

CICLO ESCOLAR 2022 – 2023

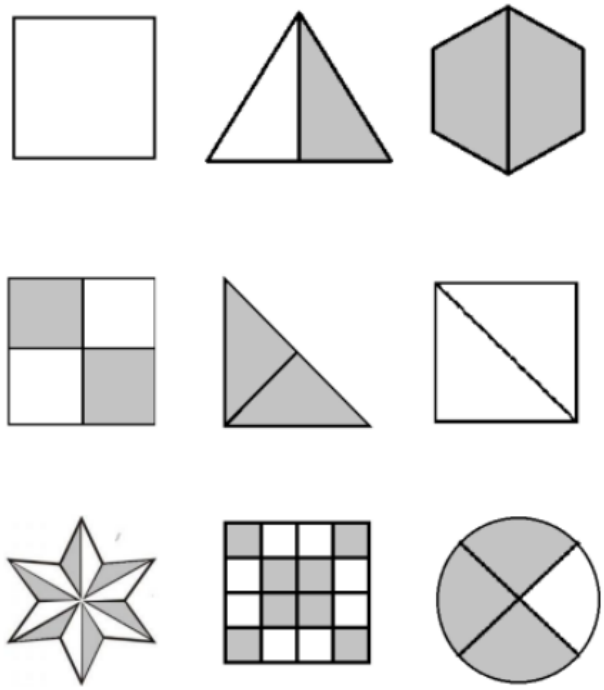
Evaluación final de matemáticas 6°

Nombre del alumno (a):

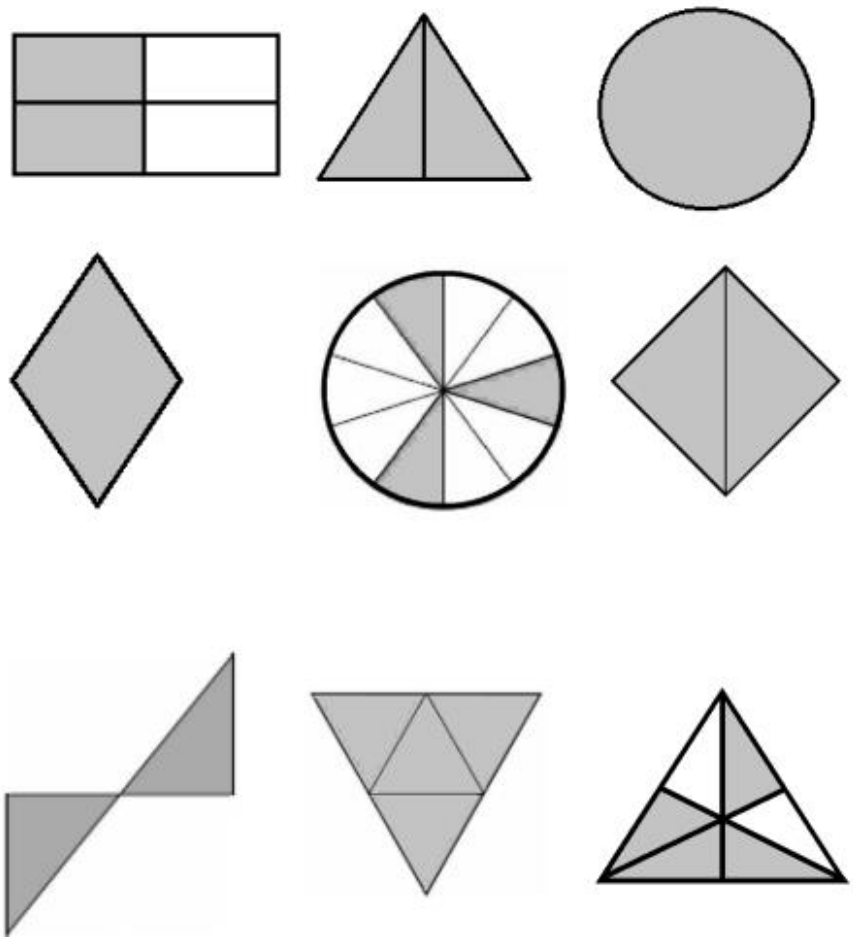
_____

Instrucciones: Lee con atención el cuestionario y responde lo que sigue. Si tienes alguna duda, cualquiera que sea, pregunta por favor al aplicador.

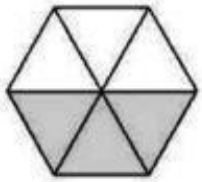
1. Identifica las figuras cuya parte sombreada representa una mitad y márcalas con una X



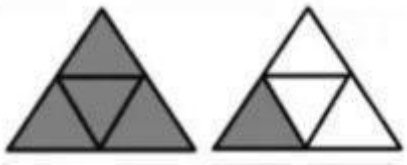
2. Encierra las figuras cuya parte sombreada representa un entero



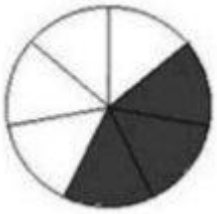
3. Escribe la fracción que representa la figura



_____

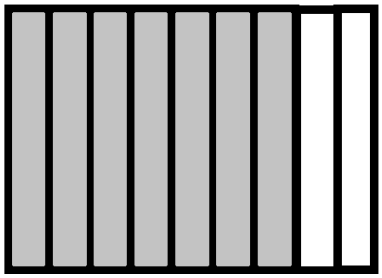


_____

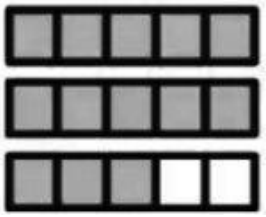


_____

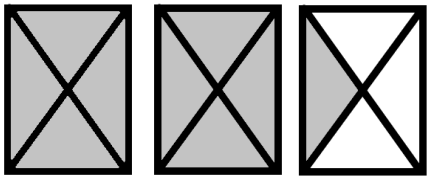
_____



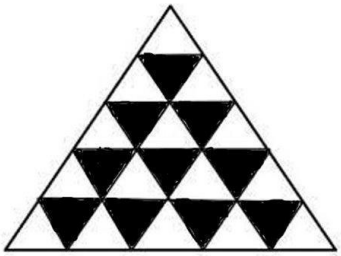
_____



_____



_____

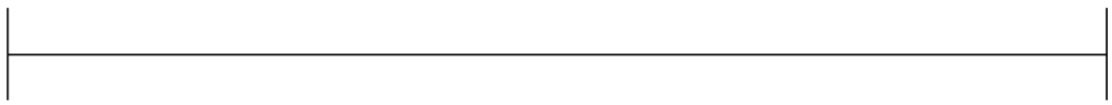


_____

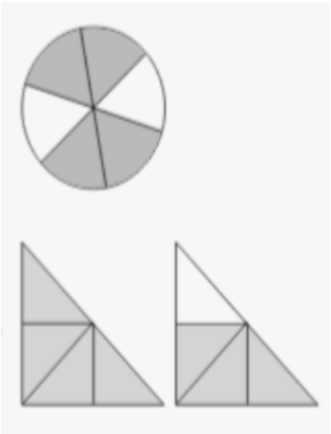
4. Ubica en la recta numérica las siguientes fracciones: $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{3}{2}$ y 1 entero

5. Ubica en la recta numérica las siguientes fracciones: $1\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{3}$, $1\frac{3}{6}$ y $2\frac{3}{4}$

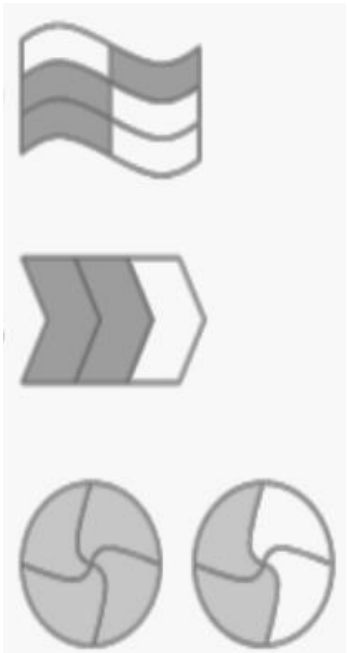
6. Representa las siguientes fracciones en la recta $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{6}{8}$ y $\frac{1}{5}$

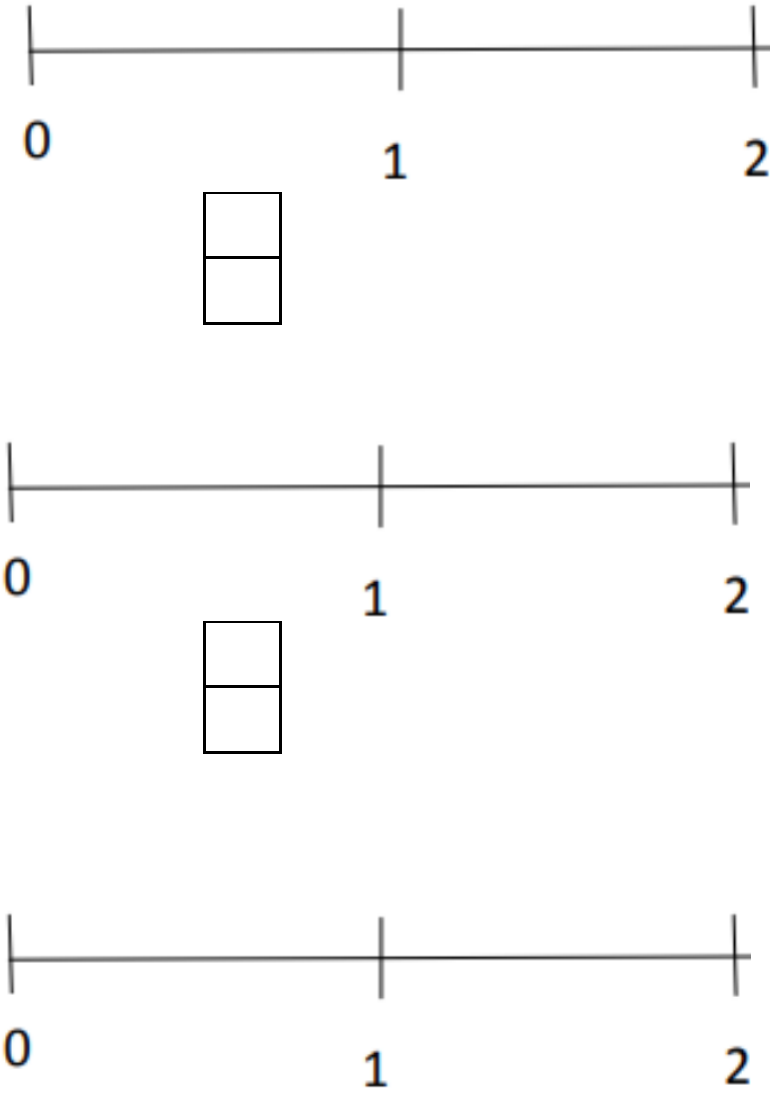


7. Ubica en la recta las fracciones representadas

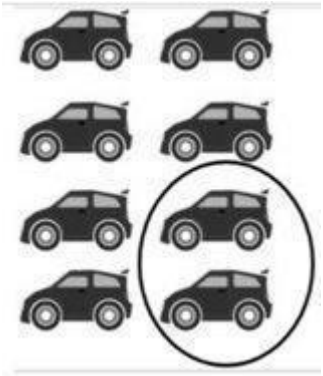


8. Completa la fracción representada y ubícala en la recta numérica.





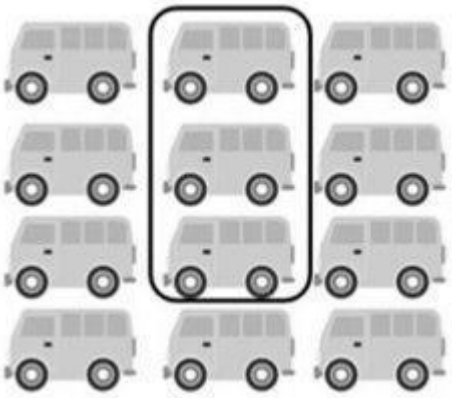
9. Observa los siguientes grupos de figuras y contesta lo que se te pide



Del total de automóviles,

¿qué fracción representa

la parte encerrada? _____



Del total de camiones,

¿qué fracción representa

la parte encerrada? _____

Del total de balones, encierra en un

círculo $\frac{1}{3}$

Del total de dulces, encierra en un

círculo $\frac{2}{3}$