UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
SECRETARÍA ACADÉMICA
DOCTORADO EN EDUCACIÓN

“APRENDIZAJE DE FUNCIONES LINEALES CON SOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y MODELIZACIÓN, PARA ALUMNOS DE PRIMER AÑO DE BACHILLERATO”

Tesis para obtener el grado de

Doctor en Educación

Presenta:

JORGE PABLO ABREGO

TUTOR:

DR. SERGIO LÓPEZ VÁZQUEZ

Ciudad de México, abril del 2025

Educación
Secretaría de Educación Pública

UPN Universidad Pedagógica Nacional

Ciudad de México, a 07 de abril de 2025

DESIGNACIÓN DE JURADO AUTORIZACIÓN DE ASIGNACIÓN DE FECHA DE EXAMEN

La Coordinación de Posgrado tiene el agrado de comunicarle que ha sido designado miembro del Jurado del Examen de Grado de **PABLO ABREGO JORGE** con matrícula **200928005**, quien presenta el Trabajo Recepcional en la modalidad de **TESIS** bajo el título: **"APRENDIZAJE DE FUNCIONES LINEALES CON SOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y MODELIZACIÓN, PARA ALUMNOS DE PRIMER AÑO DE BACHILLERATO"**. Para obtener el Titulo de la **DOCTORADO EN EDUCACIÓN**

Jurado	Nombre
Presidente	**DRA. MARIA ESTELA NAVARRO ROBLES**
Secretario	**DR. SERGIO LOPEZ VAZQUEZ**
Vocal	**DR. SALVADOR MORENO GUZMÁN**
Suplente 1	**DRA. CRISTIANNE MARIA BUTTO ZARZAR**
Suplente 2	**DRA. ROSA ISELA GONZÁLEZ POLO**

Con fundamento al acuerdo tomado por los sínodos y del egresado, se determina la fecha de examen para:

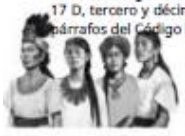
el martes 20 de mayo de 2025 a las 10:00 am
EXAMEN PRESENCIAL

Atentamente
"EDUCAR PARA TRANSFORMAR"

MIGUEL ANGEL VERTIZ GALVAN
RESPONSABLE DE LA DOCTORADO EN EDUCACIÓN

Cadena Original:
||1087|2025-04-07 09:16:36|092|200928005|PABLO ABREGO JORGE|E|DOCTORADO EN EDUCACIÓN|4|M|3|13|APRENDIZAJE DE FUNCIONES LINEALES CON SOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y MODELIZACIÓN, PARA ALUMNOS DE PRIMER AÑO DE BACHILLERATO|DRA.|MARIA ESTELA NAVARRO ROBLES|DR.|SERGIO LOPEZ VAZQUEZ|DR.|SALVADOR MORENO GUZMÁN|DRA.|CRISTIANNE MARIA BUTTO ZARZAR|DRA.|ROSA ISELA GONZÁLEZ POLO|2025-05-20|10:00|1327|2|HZNBvVxKnC||
Firma Electrónica:
LxaKhYgGFonw9sjvXXxiuL+hSDPx4kfME8wuSLpaUCgAd04tELkJY1Q5UfdEnEpMAH01/k36zlEpIB6Qtq946cC9TbxHjP2JUbUKmBkKk01MO1Ssmkm8sZw5DKI+tYgmx5WT8xohJH15hI9aecm/vXyJElCiK/wlyWVxafoNP4FN6iBxjB+WHjLia5TlWykQSkT3IIjpk8k2DPeYQxOJsS58gZaedDXrVpnMgRX6F0/nexczsSm/ci+asydCAsykj6uY1jAmqddP2g+SdIF6U1ZC3KGKc42xDchyg7oABSkVrh6zhOK8UjyaMs9hKaxsTDFHqn39SkUtXYyQc+1NzCQ3xwDdM7chtV/gb2DlMg5orkPXyMIS75W9THC46A3O4f+B9VlYnnTW4X5gvblxe54GSSeZfeQ1O+FkoUCIkt/zO7eP9q98dC8qMG28vY2sEr++ZXUba7Lxd1/MQg/yJnf0LHwYHevn2ibWQeYl/dg7qe2r8EmnQbApSA2gLflM+tDjWU3QpmTt4MrhHBemjhfHSe5pygFfUSEQqsP2J8LpCQ0fXYRn17CUV0AHLGmqTcdGyDZ1Qh8dPSa3c9b3veRCniEDSZ5uHTzPGd7lpT/IhugbKwhXGH6U4q4aopcJyuratPHZ9kVMkX39FRSfGfvIPFDDrdlMEFKs0u6n6zo=
Fecha Sello:
2025-04-07 09:25:29

"El presente acto administrativo ha sido firmado mediante el uso de la firma electrónica avanzada del funcionario competente, amparada por un certificado vigente a la fecha de la resolución, de conformidad con los artículos 38, párrafos primero, fracción V, tercero, cuarto, quinto y sexto, y 17 D, tercero y décimo párrafos del Código Fiscal de la Federación. De conformidad con lo establecido en los artículos 17-I y 38, quinto y sexto párrafos del Código Fiscal de la Federación."



2025 Año de La Mujer Indígena

Carretera al Ajusco, No. 24 Col. Héroes de Padierna, Alcaldía Tlalpan C.P. 14200, Ciudad de México.
Tel: (55) 56 30 97 00 www.upn.mx

Resumen

En el ambiente educativo en que nos encontramos, primer año de bachillerato, es un gran reto para los profesores la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con solución de problemas, modelización, con una población estudiantil de bajo rendimiento y, sin experiencia en solución de problemas. De acuerdo con los estudios en educación matemática, se sabe que para resolver problemas son necesarios, el dominio del conocimiento matemático y el manejo de estrategias cognitivas y metacognitivas.

En esta investigación se desarrolló un ambiente de aprendizaje con problemas para que los estudiantes tengan acceso al conocimiento de funciones lineales con estrategias cognitivas y metacognitivas. Para el análisis de los problemas de aprendizaje, se ha utilizado el marco teórico de Stillman (2004 *y* 2011) y Stillman *et al* (2007), dando seguimiento al aprendizaje matemático de los alumnos, al desarrollo de sus subcompetencias de modelización y a su conocimiento metacognitivo. Para comprobar el aprendizaje de los alumnos, entre el inicio y el final de la implementación del ambiente de aprendizaje, se llevó a cabo un análisis cuantitativo evaluando un problema al inicio y otro al final. El análisis cualitativo de las dificultades de aprendizaje se realizó con los procedimientos y resultados de los alumnos, con videos en trabajo colaborativo y con una entrevista semiestructurada. El grupo de siete estudiantes que participaron pertenecen al curso de Matemáticas I, del colegio de bachillerato donde se hizo el estudio. Gracias a los resultados obtenidos, se detectaron algunas causas de dificultades, carencia de estrategias, y respuestas de bandera roja, en particular se detectó una respuesta, reproducida mayormente, llamada ceguera metacognitiva causada básicamente por conocimientos incompletos. Así mismo se determinaron algunas intervenciones eficaces en el momento de trabajo, como preguntas e indicaciones para la determinación de las variables.

Abstract

In the current educational environment, first-year high school students, teaching and learning mathematics through problem-solving and modeling is a major challenge for teachers. Students with low achievement and inexperience in problem-solving experience are known to solve problems. According to studies in mathematics education, it is known that mastery of mathematical knowledge and the use of cognitive and metacognitive strategies are necessary for problem-solving.

In this research, a problem-based learning environment was developed to provide students with access to knowledge of linear functions through cognitive and metacognitive strategies. To analyze the learning problems, the theoretical framework of Stillman (2004 and 2011) and Stillman et al. (2007) was used, monitoring students' mathematical learning, the development of their modeling sub-skills, and their metacognitive knowledge. To assess student learning between the beginning and end of the learning environment implementation, a quantitative analysis was conducted, evaluating one problem at the beginning and another at the end. The qualitative analysis of learning difficulties was conducted using student procedures and results, collaborative work videos, and a semi-structured interview. The group of seven students who participated were from the Mathematics I course at the high school where the study was conducted. The results identified several causes of difficulties, lack of strategies, and red-flag responses. In particular, a frequently repeated response called metacognitive blindness, caused primarily by incomplete knowledge, was identified. Effective interventions were also identified during the study, such as questions and prompts for determining the variables.

Agradecimientos

Se extiende un agradecimiento a la Universidad Pedagógica Nacional, ya que a través de su organización forma a una gran cantidad de profesionales en la educación, en beneficio del país.

Así mismo expreso mi profundo agradecimiento a los profesores:

Dr. Sergio López Vázquez

Dra. María Estela Navarro Robles

Dra. Cristianne María Butto Zarzar

Dr. Salvador Moreno Guzmán

Dra. Rosa Isela González Polo

Por el tiempo dedicado en la dirección y revisión, de este trabajo de investigación.

ÍNDICE

RESUMEN ..... **III**

ABSTRACT ..... **IV**

AGRADECIMIENTOS ..... **V**

ÍNDICE ..... **VI**

LISTA DE FIGURAS ..... **XI**

LISTA DE TABLAS ..... **XIII**

1. INTRODUCCIÓN **1**

2. OBJETIVOS **4**

3. ANTECEDENTES. FUNCIONES LINEALES. PROBLEMÁTICA EN EL APRENDIZAJE, MODELIZACIÓN Y SOLUCIÓN DE PROBLEMAS **5**

3.1 FUNCIÓN LINEAL 5

3.2 PROBLEMÁTICA EN EL APRENDIZAJE 8

3.3 APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS 12

3.4 GENERALIDADES DE MODELIZACIÓN Y SOLUCIÓN DE PROBLEMAS 14

3.5 PERSPECTIVAS DE MODELIZACIÓN 16

3.6 CONSIDERACIÓN DE PROBLEMAS Y SU CLASIFICACIÓN 18

4. MARCO CONCEPTUAL Y PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN **22**

4.1 CICLO DE MODELIZACIÓN Y SUBCOMPETENCIAS 23

4.1.1 Subcompetencias involucradas en la Modelización *25*

4.2 METACOGNICIÓN 27

4.2.1 Respuestas a situaciones de bandera roja y meta-metacognición *28*

4.2.1.1 Respuestas a las situaciones de bandera roja 29

4.2.1.2 Actividad Reflexiva Metacognitiva Mediante la Meta-Metacognición. 31

4.3 ESTRATEGIAS COGNITIVAS Y METACOGNITIVAS 34

4.4 PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN 38

5. METODOLOGÍA 40

5.1 METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN. 40

5.2 ETAPAS DE LA INVESTIGACIÓN 42

5.3 DISEÑO DE AMBIENTE DE APRENDIZAJE 43

5.3.1 Perspectiva del que aprende, población bajo estudio 45

5.3.1.1 Conocimientos y habilidades previas del estudiante 46

5.3.1.2 Observaciones de estudio piloto 47

5.3.2 Perspectiva del conocimiento 48

5.3.2.1 Programación de problemas hipotéticos, reales y ejercicios matemáticos 50

5.3.2.2 Descripción de tareas para la adquisición del conocimiento 51

5.3.2.2.1 Bloque de tareas 1. Razón de cambio, proporciones. 52

5.3.2.2.2 Bloque de tareas 2. Función lineal 60

5.3.2.3 Clasificación de problemas según su propósito 67

5.3.2.4 Subcompetencias trabajadas por tarea 67

5.3.3 Perspectiva de Evaluación 69

5.3.3.1 Descripción de instrumentos de investigación, problema inicial y final 70

5.3.4 Perspectiva de comunidad, normas de trabajo en la investigación 72

5.3.4.1 Materiales de trabajo 72

5.3.4.2 Dinámicas de trabajo individual y en equipo 72

5.3.4.3 Formación de equipos 73

5.3.4.4 Estructura de las sesiones de trabajo 75

5.4 ENTREVISTA Y VIDEOS. 76

5.4.1 Entrevista semiestructurada 76

5.4.2 Videos 77

5.4.2.1 Forma de tomar los videos 78

5.5 FORMA DE ANALIZAR LOS DATOS DE LA INVESTIGACIÓN 78

5.6 VALIDEZ DEL ESTUDIO Y CONFIABILIDAD DE LOS INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN 80

6 PROBLEMA INICIAL. PRIMERA ETAPA DE IMPLEMENTACIÓN 82

6.1 RESULTADOS DEL PROBLEMA INICIAL 85

7 RESULTADOS DE LA SEGUNDA ETAPA DE IMPLEMENTACIÓN, TAREAS 91

7.1 EXPOSICIÓN DE RESULTADOS Y UNA SOLUCIÓN POR CADA TAREA 92

7.1.1 Tarea 1. Tarifas de telefonía 94

7.1.2 Tarea 2. Consumo de agua en la ducha 96

7.1.3 Tarea 3. Razón entre dos magnitudes en distintos contextos 98

7.1.4 Tarea 4. Densidad, una razón de propiedad de las sustancias 100

7.1.5 Tarea 5. Pendiente de una rampa 101

7.1.6 Tarea 6. Bomba de gasolina 103

7.1.7 Tarea 7. Distancias iguales en tiempos iguales 105

7.1.8 Tarea 8. La experiencia en el Bungee 107

7.1.9 Tarea 9. Problemas de Proporción directa (de repetición-ejercicios) 109

7.1.10 Tarea 10. Zapatos de gigante 112

7.1.11 Tarea 11. Resorte y su carga 113

7.1.12 Tarea 12. Servicio de taxi por aplicación 114

7.1.13 Tarea 13. Consumo de petróleo 115

7.1.14 Tarea 14. Variable dependiente e independiente 116

7.1.15 Tarea 15. Tabulación y graficación de la función lineal. 117

7.1.16 Tarea 16. Localización de puntos sobre línea recta 119

7.1.17 Tarea 17. Representaciones tabulares, gráficas y algebraicas 120

7.1.18 Tarea 18. De la gráfica a la ecuación 124

7.1.19 Tarea 19. Determinación de la ecuación y cálculo de coordenadas 127

7.1.20 Tarea 20. Tiempos de oro olímpico 131

7.1.21 Tarea 21. Escalas de temperaturas 133

8 ANÁLISIS CUALITATIVO EN TAREAS. SEGUNDA ETAPA DE IMPLEMENTACIÓN ... 136

8.1 ANÁLISIS CUALITATIVO DE LAS TAREAS 137

8.1.1 Análisis de la Tarea 8, La experiencia en el Bungee (real) 139

8.1.2 Análisis de la tarea 11, El resorte y su carga (hipotético) *144*

8.1.3 Análisis de la Tarea 21, Escalas de temperatura *148*

8.2 ANÁLISIS DE DIFICULTADES EN LAS TAREAS, POR SUBCOMPETENCIA 154

8.2.1 Comprensión de problema y matematización (determinación de variables) *155*

8.2.1.1 Obtener la información que no se especifica en la redacción del problema 157

8.2.2 Matematización, tabulación *159*

8.2.2.1 Tabla de valores 159

8.2.3 Resolución de problemas matemáticos *163*

8.2.3.1 Trazo de gráfica 163

8.2.3.2 Determinación de ordenada al origen 165

8.2.3.3 Determinación de la pendiente, razón de cambio o, factor de proporcionalidad 167

8.2.3.4 Determinación de la ecuación 181

8.2.3.5 Determinación de coordenadas de un punto (predicción) 189

8.2.4 Desarrollo del planteamiento de estrategias *193*

8.2.5 Observaciones cualitativas acerca del trabajo de los equipos *195*

8.3 CLASIFICACIÓN DE LAS DIFICULTADES PRESENTADAS POR LOS ALUMNOS 197

9 PROBLEMA FINAL, TERCERA ETAPA. Y COMPARATIVO 211

9.1 RESULTADOS DEL PROBLEMA FINAL 214

9.2 COMPARACIÓN DE RESULTADOS 214

9.3 ALGUNOS RESULTADOS INDIVIDUALES AL INICIO Y AL FINAL 218

9.3.1 Resumen de dificultades de los alumnos en el problema final. *224*

9.4 CONSIDERACIONES FINALES DE LA EVALUACIÓN CUANTITATIVA AL INICIO Y AL FINAL 226

10 ENTREVISTAS, CUARTA ETAPA 227

10.1. INDICIOS DEL DESARROLLO DE UN PROCESO METACOGNITIVO 232

10.2. FRONTERA ENTRE LO COGNITIVO Y LO METACOGNITIVO 233

11 CONCLUSIONES 236

REFERENCIAS 244

APÉNDICE 1. LAS TAREAS ..... - 1 -

BLOQUE 1. RAZÓN DE CAMBIO, PROPORCIONES..... - 2 -

BLOQUE 2. FUNCIÓN LINEAL. ..... - 16 -

APÉNDICE 2. PROBLEMA INICIAL Y FINAL..... - 30 -

PROBLEMA INICIAL. HIPOTÉTICO ..... - 31 -

PROBLEMA FINAL. HIPOTÉTICO ..... - 32 -

Lista de Figuras

Figura 3.1. Representaciones de la función lineal 7

Figura 4.1. Ciclo de Modelizado de Stillman (2011)..... 24

Figura 5.1. Representaciones de función lineal 47

Figura 6.1. Problema Hipotético..... 82

Figura 6.2. Tabla y gráfica de problema inicial..... 83

Figura 6.3. Trabajo en el problema incial del alumno 12..... 89

Figura 7.1. Gráfica de problema 1, tarifas de telefonía 94

Figura 7.2. Hombre en silla de ruedas 101

Figura 7.3. Diagrama del problema, Pendiente de una rampa..... 101

Figura 7.4. Gráfica del problema, Bomba de gasolina 103

Figura 7.5. Gráfica del problema, Distancias iguales en tiempos iguales 105

Figura 7.6. Mapa de algunos estados de México..... 109

Figura 7.7. Gráfica del problema Consumo de petróleo..... 115

Figura 7.8. Gráfica correspondiente al problema 1 de la tarea 19..... 127

Figura 7.9. Gráfica correspondiente al problema 2 de la tarea 19..... 128

Figura 7.10. Gráfica y tabulación correspondiente al problema 3 de la tarea 19 129

Figura 7.11. Gráfica correspondiente al problema, Tiempos de oro olímpico 131

Figura 7.12. Gráfica del problema Escalas de tempera 133

Figura 8.1. Tarea 8. Trabajo, medición de longitud de caída por número de ligas 142

Figura 8.2. Tarea 11. Respuesta de alumno 21..... 145

Figura 8.3. Tarea 1. Tabla de valores del alumno 12..... 160

Figura 8.4. Tarea 17, problema 5. Respuestas comparativas de dos alumnos 162

Figura 8.5. Tarea 16. Respuestas del alumno 24 165

Figura 8.6. Tarea 18. Respuesta del alumno 14 166

Figura 8.7. Ejemplos de rectas con distintas pendientes 168

Figura 8.8. Tarea 3, pregunta 2. Respuesta del alumno 24 168

Figura 8.9. Tarea 9, problema 3. Respuesta del alumno 11 174

Figura 8.10. Tarea 10. Respuesta del alumno 13 176

Figura 8.11. Tarea 17, problema 2. Respuesta del alumno 11 177

Figura 8.12. Tarea 18, problema 1. Respuesta del alumno 11 178

Figura 8.13. Tarea 19, problema 1. Parte de la respuesta del alumno 11 180

Figura 8.14. Tarea 20. Parte de la respuesta del alumno 11 180

Figura 8.15. Determinación de coordenadas de un punto 190

Figura 8.16. Tarea 17, problema 5. Parte de la respuesta del alumno 22 191

Figura 8.17. Tarea 19, problema 1. Determinación de ordenada del alumno 11 191

Figura 8.18. Tarea 19, problema 1. Determinación de abscisa del alumno 11 192

Figura 8.19. Tarea 19, problema 3. Respuesta confusa del alumno 24 192

Figura 9.1. Problema hipotético 211

Figura 9.2. Tabla y gráfica de problema final 212

Figura 9.3. Gráfica comparativa de resultados globales, inicial y final 215

Figura 9.4. Trabajo en el problema final del alumno 12 217

Figura 9.5. Respuestas al inicio y al final del alumno 14 220

Figura 9.6. Respuestas a los problemas inicial y final del alumno 22 222

Lista de Tablas

Tabla 3.1. Representaciones y relaciones de funciones lineales 8

Tabla 3-2. Clasificación adicional de problemas en esta investigación según Blanco 20

Tabla 4-1. Marco para el análisis del trabajo de los estudiantes, tomando como base a Stillman *et al* (2007) 26

Tabla 4-2. Proceso metacognitivo del modelizador 33

Tabla 4.3. Proceso meta-metacognitivo del profesor 34

Tabla 5.1. Clasificación de problemas por propósitos en esta investigación, según Blanco (1993). 67

Tabla 5-2. Subcompetencias y su trabajo a lo largo de las tareas 68

Tabla 5-3. Valores en el problema inicial 70

Tabla 5-4. Valores del problema final 71

Tabla 5-5. Actividades coordinadas del profesor y los alumnos en trabajo individual 73

Tabla 6.1. Resultados del problema incial 87

Tabla 7.1. Valores del problema de tarea 1, Tarifas de telefonía 94

Tabla 7.2. Resultados de Tarea 1. Individual 95

Tabla 7.3. Resultados de Tarea 2. Equipos 97

Tabla 7.4. Resultados de Tarea 3. Individual 99

Tabla 7.5. Densidades de algunas sustancias 100

Tabla 7.6. Resultados de Tarea 4. Equipos 100

Tabla 7-7. Valores del problema, pendiente de una rampa 101

Tabla 7.8. Resultados de Tarea 5. Individual 102

Tabla 7.9. Valores del problema, Bomba de gasolina 103

Tabla 7.10. Resultados de Tarea 6. Individual..... 104

Tabla 7.11. Valores del problema, Distancias iguales en tiempos iguales 105

Tabla 7.12. Resultados de Tarea 7. Individual..... 106

Tabla 7.13. Resultados de Tarea 8. Equipos 108

Tabla 7.14. Resultados de Tarea 9. En equipo 111

Tabla 7.15. Resultados de Tarea 10. Equipos 112

Tabla 7.16. Resultados de Tarea 11. Individual..... 113

Tabla 7.17. Valores del problema Servicio de taxi por aplicación 114

Tabla 7.18. Resultados de Tarea 12. Equipos 114

Tabla 7.19. Resultados de Tarea 14. Equipos 116

Tabla 7.20. Resultados de Tarea 17. Individual..... 123

Tabla 7.21. Resultados de Tarea 18. Individual..... 126

Tabla 7.22. Resultados de Tarea 19. Individual..... 130

Tabla 7.23. Valores del problema 20 131

Tabla 7.24. Resultados de Tarea 20. Individual..... 132

Tabla 7.25. Conversiones para el problema Escalas de temperatura 133

Tabla 7.26. Resultados de Tarea 21. Individual..... 134

Tabla 8-1. Tabulación de problema 11, orden en los resultados aritméticos..... 146

Tabla 8-2. Tabulación de problema 11, señal algebraica..... 147

Tabla 8-3. Conversiones requeridas en el problema 21 150

Tabla 8-4. Tabulación correspondiente a la redacción del problema 21 150

Tabla 8-5. Comparación cualitativa del trabajo de los equipos 195

Tabla 8-6. Categorías del proceso metacognitivo, productivo o no productivo 200

Tabla 9-1. Calificaciones del problema final 214

Tabla 9-2. Comparación de resultados globales en porciento de rendimiento 214

Tabla 9.3. Comparativo de resultados inicial y final, Alumno 13 218

Tabla 9.4. Comparativo de resultados al inicio y al final, Alumno 14 220

Tabla 9.5. Comparativo de resultados al inicio y al final, Alumno 22 222

Tabla 9-6. Comparativo de resultados al inicio y al final, Alumno 23 223

Tabla 9.7. Comparativo de resultados inicial y final, alumno 24 224

1. INTRODUCCIÓN

En nuestro entorno educativo tenemos un alto índice de estudiantes que tienen dificultades en aprender matemáticas, y más aún en resolver problemas de aplicación[1] (OECD, 2018 y 2023). En esta investigación, se comprobó que la mayoría de los alumnos, de este estudio, al ingresar al bachillerato no tienen experiencia en solución de problemas, no recuerdan el tema de funciones lineales, no saben el tema de proporcionalidad, entre otros. Sin embargo, se observó que los estudiantes, a pesar de sus dificultades, pueden aprender funciones lineales con solución de problemas y modelización, si este tema se presenta a través de una serie planificada de problemas hipotéticos, reales y ejercicios matemáticos, con estrategias cognitivas para los procedimientos y con estrategias metacognitivas para motivar su reflexión.

Históricamente se ha estudiado el aprendizaje de las matemáticas y la solución de problemas (Duval, 1992; Polya, 2011; Shoenfeld, 1985; Stillman, 2004 y 2011), donde los autores muestran las dificultades y hacen señalamientos para mejorar la enseñanza y aprendizaje. En esta investigación doctoral se han tomado de referencia las investigaciones de G. Stillman, se ha diseñado e implementado un ambiente de aprendizaje para conocer las dificultades en la población estudiantil que nos ocupa y, como consecuencia, que este estudio pueda servir como referencia para el diseño de estrategias didácticas de calidad.

Esta investigación doctoral se llevó a cabo con la finalidad de analizar las dificultades en la enseñanza y aprendizaje de funciones lineales, con solución de problemas y modelización, con

[1] En esta investigación, se considera a los problemas de aplicación como problemas reales.

estudiantes (entre 15 y 16 años), del primer año de bachillerato, más específicamente en el Colegio de Ciencias y Humanidades de la Universidad Nacional Autónoma de México, plantel Naucalpan.

Para llevar a cabo el planteamiento anterior se diseñó una serie de 21 tareas con estrategias cognitivas y metacognitivas, para que los estudiantes tuvieran acceso al conocimiento matemático y a la solución de problemas. En el proceso del diseño de las tareas se consideró que el alumno aprendiera funciones lineales identificando el objeto matemático en cada una de las formas de representación y que pudiera realizar la transición entre ellas.

La metodología de investigación se realizó de dos formas: la primera cuantitativa evaluando un problema al inicio y otro al final de la instrucción para medir el rendimiento; la segunda fue cualitativa recabando el trabajo escrito de los estudiantes, tomando video en su trabajo en equipo colaborativo y con una entrevista semiestructurada.

Luego de diseñar el ambiente de aprendizaje, que se muestra en el capítulo 5, Metodología, las etapas de la investigación son las siguientes i) aplicación de problema inicial, ii) trabajo académico con las 21 tareas elaboradas, recolección de resultados y videos, iii) aplicación de problema final, iv) entrevista semiestructurada.

La tesis está estructurada de la siguiente forma: En el capítulo 2 se enuncian los objetivos de esta investigación doctoral. En el capítulo 3 se exponen los antecedentes, el objeto matemático de estudio, funciones lineales, la revisión de la literatura en la problemática en el aprendizaje y algunas consideraciones generales de la modelización y solución de problemas. En el capítulo 4 se presenta el Marco Conceptual con las consideraciones de Stillman (2004 *y* 2011) acerca de las estrategias cognitivas/metacognitivas y, Stillman et al (2007) acerca de la subcompetencias de modelización.

En el capítulo 5 se explica la metodología de la investigación, el ambiente de aprendizaje, con estrategias cognitivas y metacognitivas, considerando las perspectivas: del que aprende, del conocimiento, de la evaluación, y de la comunidad.

En el capítulo 6 se muestran los resultados de la primera etapa de la implementación, problema inicial. En el capítulo 7 se describen, únicamente, los resultados de la segunda etapa de la implementación, esto es, el rendimiento de los estudiantes en las 21 tareas elaboradas para su aprendizaje. En el capítulo 8 se presenta el análisis cualitativo de la actuación de los estudiantes en las 21 tareas, segunda etapa. En el capítulo 9 se exponen los resultados de la tercera etapa de la implementación, problema final y la comparación de resultados. En el capítulo 10 se presentan algunas respuestas de la cuarta etapa, entrevistas. En el capítulo 11 se integran las conclusiones de la investigación.

2. OBJETIVOS

General

Diseñar, implementar y analizar, un ambiente de aprendizaje de funciones lineales con modelización matemática y solución de problemas, utilizando estrategias cognitivas/metacognitivas.

Específicos

1. Verificar cuantitativamente si el ambiente de aprendizaje propuesto ayuda al estudiante en una mejor comprensión del tema de funciones lineales.
2. Identificar y analizar las dificultades que presentan los estudiantes al aprender funciones lineales (tránsito entre las representaciones tabular, gráfica y algebraica).
3. Identificar y analizar las dificultades de los estudiantes al desarrollar las subcompetencias de modelización, solución de problemas y un proceso metacognitivo.
4. Identificar y analizar el tipo de ayuda cognitiva/metacognitiva eficaz para el tema de funciones lineales con modelización matemática y solución de problemas.

3. ANTECEDENTES. FUNCIONES LINEALES. PROBLEMÁTICA EN EL APRENDIZAJE, MODELIZACIÓN Y SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

En este capítulo se presenta el tema matemático de estudio, función lineal; y la revisión de la literatura de educación matemática en los temas: i) problemática en el aprendizaje de las matemáticas en nuestro entorno, específicamente en las funciones lineales y en la solución de problemas, ii) un modelo de aprendizaje de las matemáticas con comprensión y transición de representaciones, iii) generalidades de la modelización, iv) perspectivas de la modelización, v) consideraciones específicas de problemas y su clasificación. Esta serie de consideraciones, sientan las bases para la posterior exposición del marco conceptual y la metodología.

3.1 Función lineal

El tema de Funciones lineales se presenta en los libros de texto de matemáticas a nivel bachillerato como en: Ángel y Rinde (2011), Baldor (2003), Barnett (1987), Larson y Hostetler (2009), Lemann (2012), Leithold (2012) y Swokowski (2009).

En este nivel de estudios, los alumnos tienen un acercamiento al concepto formal de función:

> **Definición de función.** Una **función** *f* de un conjunto *D* a un conjunto *E* es una correspondencia que asigna a cada elemento *x* de *D* exactamente un elemento *y* de *E*.
>
> El elemento *x* de *D* es el **argumento** de *f*. El conjunto *D* es el **dominio** de la función. El elemento *y* de *E* es el **valor** de *f* en *x* (o la **imagen** de *x* bajo *f*) y está denotado por $f(x)$, léase "*f* de *x*." (Swokowski, 2009, p. 178).

También se tiene una introducción al concepto de la gráfica de una función:

Antecedentes

> **Definición de gráfica de una función.** La **gráfica de una función** *f* es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$ para *x* en el dominio de f (Swokowski, 2009, p. 181).

Según Swokowski (2009), una función *f* es una **función lineal** si $f(x) = mx + b$, donde *x* es cualquier número real y *m* y *b* son constantes donde, m es la pendiente o razón de cambio y, b es la ordenada al origen, el valor de $f(x)$ cuando $x = 0$.

Como se mencionará páginas adelante, Bransford *et al* (1999), señalan que es conveniente la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con una formalización progresiva, así también considerando que, para los estudiantes, el presente trabajo académico es el primer acercamiento al concepto formal de función, además que se encuentran en la "frontera aritmética-álgebra", se ha decidido manejar la representación algebraica de las funciones lineales como:

$$y = mx + b$$

Por otro lado, si bien en los problemas que se trabajan, están implícitos los conceptos de dominio e imagen de la función, se ha decidido no discutirlos en esta investigación.

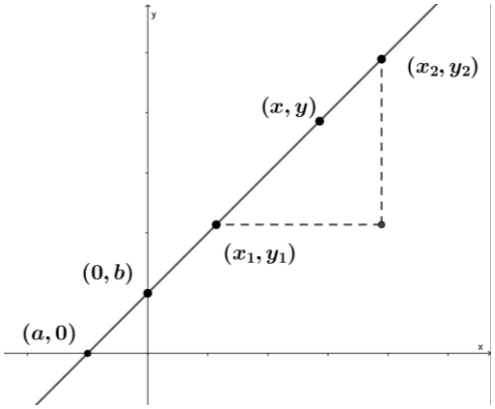
Según Duval (1992), para que se considere que un estudiante comprende el objeto matemático de estudio, deberá reconocerlo en al menos dos formas de representación y debe poder hacer la conversión entre ellas.

Algunos de los elementos que requieren aprender los estudiantes son: identificación de la variable independiente y la variable dependiente, identificación del factor de proporcionalidad (pendiente), tabulación y graficación de la función lineal, cálculos de coordenadas en puntos específicos, conversión entre las representaciones tabular, algebraica y geométrica, cálculo de la pendiente dados dos puntos, determinación de la ordenada al origen, todo ello con sus correspondientes relaciones a los contextos de los problemas que se resuelven.

Figura 3.1. Representaciones de la función lineal

<table>
<tr><th>Tabular</th><th>Algebraica</th><th>Geométrica</th></tr>
<tr>
<td>
<table>
<tr><td>x</td><td>y</td></tr>
<tr><td>0</td><td>b</td></tr>
<tr><td>x_1</td><td>y_1</td></tr>
<tr><td>x_2</td><td>y_2</td></tr>
<tr><td>x</td><td>y</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>
</td>
<td>Ecuación $y = mx + b$

Pendiente $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Ordenada al origen $(0, b)$</td>
<td> 
</td>
</tr>
</table>

Duval (1992), señala que, para el aprendizaje se deben de considerar dos situaciones: aquellas en que el tratamiento es puramente matemático, relaciones entre números y aquellas otras en que las relaciones son entre magnitudes de naturaleza diferente (tiempo, distancia, velocidad). El autor indica que la presentación de un fenómeno físico, económico o biológico puede dar un mayor interés a las gráficas; pero no facilita el aprendizaje de las mismas, sino al contrario, lo dificulta. Considerando lo anterior, en la serie de problemas que se trabajaron en esta investigación, se tienen 16 problemas en el ámbito puramente matemático (ejercicios), en los cuales, se tiene el propósito que los alumnos aprendan las ideas matemáticas de funciones lineales, para posteriormente relacionar estas ideas a diferentes contextos.

Las relaciones entre las distintas formas de representación del objeto matemático de aprendizaje, razón, proporcionalidad y funciones lineales se muestran en la Tabla 3.1. En la serie de problemas de esta investigación se pretende que, los estudiantes establezcan relaciones correctas entre las distintas forma de representación matemática, con los contextos de los problemas.

Tabla 3.1. Representaciones y relaciones de funciones lineales

Concepto	Matemáticas		Relaciones de contexto
	Algebraica	Geométrica	
Razón	Cociente entre dos magnitudes escalares o vectoriales. $\frac{a}{b}$	Pendiente de una recta que pasa por el origen. Identificación de que la inclinación de la gráfica depende de la razón.	Coeficiente de proporcionalidad, Razón de cambio. Ejemplos: Rapidez, densidad, gasto volumétrico…
Proporcionalidad	Proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ Resolución. Medios por medios y extremos por extremos. $ad = bc$	Dos puntos de una recta que pasa por el origen.	Proporcionalidad en un contexto determinado. Determinación de una predicción.
Variable independiente y variable dependiente	Independiente "x" Dependiente "y" (por convención).	Eje horizontal "x". Eje vertical "y"	El valor de "y" depende del valor de "x". Identificación de la covariabilidad.
Pendiente entre dos puntos	Puntos: (x_1, y_1), (x_2, y_2) $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	Inclinación de la recta. Relación directa con el coeficiente de proporcionalidad.	Razón de cambio: lo que varía "y" por unidad de "x". Ejemplos: Rapidez, densidad, gasto volumétrico…
Ordenada al origen	"b" valor de "y" cuando $x = 0$	Intersección de la recta con el eje "y". Punto $(0, b)$	Valor de la variable dependiente, cuando la independiente es cero.
Ecuación de la función lineal	$y = mx + b$ Regla de correspondencia, siendo $y = f(x)$	Grafica de una función lineal. Infinidad de puntos colineales.	Regla de correspondencia entre las variables.

3.2 Problemática en el aprendizaje

En la vida académica cotidiana, se tienen serias dificultades: el bajo rendimiento de los alumnos que los lleva a un alto índice de reprobación y la deserción escolar entre otros. En el sistema educativo mexicano, existe un bajo rendimiento en el aprendizaje de las matemáticas en

el nivel medio superior. Un indicativo de este hecho son los resultados del examen PISA, que presentan los alumnos de 15 años, alumnos que están a un paso de ingresar al bachillerato.

En el problema inicial de funciones lineales, de esta investigación, los alumnos obtuvieron un rendimiento de 21.4%. el cual es muy bajo, considerando que este tema lo estudiaron dos veces en la secundaria.

En el informe de la OECD (2018), el puntaje de los estudiantes mexicanos en Matemáticas fue de 409 puntos de un total de 600, comparándolo con el promedio internacional que fue de 489, observamos el bajo desempeño de nuestros estudiantes. Otro dato relevante es el porcentaje de estudiantes con bajo nivel de competencia en Matemáticas, donde el promedio internacional es de 24 % y el porcentaje de México es del 56%.

El siguiente informe OECD (2023), luego de la pandemia de Covid-19, el rendimiento promedio de 81 países en matemáticas bajó 15 puntos. Aunque los resultados, muestran una tendencia generalizada a la baja, en México los resultados son desalentadores: el puntaje fue de 395 y el promedio internacional fue de 474; alrededor del 66% de estudiantes tienen bajo nivel de competencia matemática y la media internacional es de 31%.

Desafortunadamente los jóvenes tienen bajo nivel en competencia matemática, por lo que están en desventaja. Se puede considerar una deficiencia de educación matemática generalizada en el país, que indirectamente nos lleva a un nivel económico bajo, sociedad acrítica, fácilmente manipulable, entre otros muchos males, como lo señala Delval (1991).

El alto porcentaje de reprobación, de los alumnos de bachillerato del CCH Naucalpan, en la materia de Matemáticas, indica que tienen serias dificultades en el aprendizaje de esta materia.

Antecedentes

El índice de reprobación promedio de los cuatro primeros semestres de las generaciones 2011 a 2014, es de 29% para Matemáticas I, 34%, en Matemáticas II, 37% en Matemáticas III y 36% en Matemáticas IV (UNAM-CODEIC, 2019).

Duval (1992) menciona que la mayoría de los estudiantes de preparatoria no sabe interpretar correctamente las representaciones gráficas de ecuaciones lineales, por lo que, no saben escribir una ecuación partiendo de un análisis visual de la gráfica.

Por otro lado, Kieran (1992) menciona que la mayoría de los estudiantes de primero de preparatoria sólo memorizan reglas y muchos maestros únicamente se dedican a seguir los libros de texto con explicaciones y ejercicios, sin considerar la construcción del conocimiento, la reflexión y la comunicación. También señala que los estudiantes consideran a la matemática como una serie de conocimientos separados que no tienen conexión con otras áreas.

León (2015), en su estudio de enseñanza aprendizaje de funciones lineales con ayuda de la tecnología digital, señala que en las actividades de aprendizaje, los estudiantes de bachillerato tienen problemas en identificar la ordenada al origen y la pendiente, en problemas contextualizados de funciones lineales.

Meléndez (2016), en su estudio de dificultades del uso algebraico de la variable en el nivel medio superior, señala que los alumnos de recién ingreso al bachillerato presentaron grandes dificultades en la resolución de problemas algebraicos.

Según Peralta (2003), los estudiantes egresados de bachillerato pueden determinar la pendiente entre dos puntos de una función lineal, pero no asocian este cálculo con la inclinación de la gráfica, sin embargo, la ordenada al origen la determinan eficientemente, identificando la intersección de la recta con el eje de las ordenadas.

Antecedentes

Pérez (2022), señala que los estudiantes presentan dificultades en la determinación de la variación y covariación en diferentes contextos, debido a que estos, en el aula, se presentan de forma estática, gráfica, tabla de valores, etc.

Según Polya (2011), es factible reconocer que, si los estudiantes no comprenden el objeto matemático de estudio, difícilmente podrán resolver problemas relacionados con el mismo.

Segura (2004), dice que los alumnos de bachillerato presentan dificultades al realizar las operaciones algebraicas elementales, además menciona que algunos profesores solamente trabajan algoritmos matemáticos, y descuidan las conversiones del registro algebraico, al gráfico y verbal.

Como se puede observar, según los autores citados, los alumnos de bachillerato tienen dificultades en: habilidades matemáticas, operaciones aritméticas y algebraicas básicas, en solución de problemas, en el manejo de la representación gráfica y en la determinación de la pendiente de una función lineal. Es factible reconocer que se necesitan alternativas pedagógicas para resolver los problemas mencionados anteriormente. Alternativas en las cuales los alumnos aprendan matemáticas y puedan resolver problemas de contexto.

En esta investigación, se plantearon estrategias cognitivas y metacognitivas para apoyar el aprendizaje y superar las dificultades de los estudiantes en la solución de problemas. Se considera que, con la transición de representaciones y las conexiones necesarias para la solución de problemas, los alumnos pueden adquirir un conocimiento más profundo.

De acuerdo a las observaciones anteriormente señaladas, en esta investigación, se han enfocado los esfuerzos para que los alumnos, por medio del ambiente de aprendizaje propuesto, esto es el diseño de una serie de 21 tareas, con estrategias cognitivas y metacognitivas y las normas de trabajo en el salón de clase: i) aprendan funciones lineales, realizando la transición entre

representaciones eficientemente, ii) comprendan el concepto de razón, iii) que puedan resolver problemas en distintos contextos, iv) desarrollen sus habilidades en operaciones aritméticas y algebraicas elementales, v) identifiquen las características de la gráfica de una función lineal, ordenada al origen y pendiente vi) determinen la covariabilidad de funciones lineales y, vii) determinen la ecuación de dos formas diferentes, a partir de una tabla de valores y a partir de dos puntos de una gráfica.

3.3 Aprendizaje de las matemáticas

Duval (1999), señala que un aprendiz comprende un objeto matemático cuando lo reconoce en al menos dos formas de representación matemática y puede hacer la transición entre ellas.

Por otro lado, Hiebert y Carpenter (1992) en Pablo (2014), señalan que una de las ideas más aceptadas en la comunidad de educación matemática, es que los estudiantes deben aprender matemáticas con comprensión.

Representaciones Internas y Externas

Hiebert y Carpenter (1992), afirman que para pensar y comunicar ideas matemáticas se requiere representarlas de alguna forma. Para pensar en dichas ideas matemáticas, necesitamos representarlas internamente, de manera que la mente pueda operar sobre ellas. La comunicación requiere de representaciones externas, tales como: lenguaje hablado, símbolos escritos, dibujos u objetos físicos.

Según los autores, existe relación entre las representaciones externas e internas. La forma en que un estudiante interactúa con las representaciones externas revela, de algún modo, la forma en que las tiene representadas internamente.

Antecedentes

Conexión de representaciones

Hiebert y Carpenter (1992 en Pablo 2014), asumen que las representaciones internas pueden ser conectadas entre ellas de forma útil y que, dichas conexiones pueden ser estimuladas al construir conexiones entre sus correspondientes representaciones externas. Los autores afirman que las conexiones externas pueden ser construidas por los aprendices, entre diferentes formas de representación de una misma idea matemática o, de distintas maneras en la misma forma de representación.

Redes estructuradas

Los autores señalan que cuando las representaciones internas son conectadas producen redes de conocimiento. No es factible conocer la naturaleza exacta de las redes, pero es útil pensar que se estructuran de dos maneras: verticalmente en forma de pirámide y, horizontalmente en forma de telaraña.

Definición de Comprensión

Con las consideraciones anteriores: representaciones internas, conexiones y redes estructuradas, los autores establecen la siguiente definición:

> [u]na idea, procedimiento o hecho matemático es comprendido si es parte de una red interna. Más específicamente, las matemáticas son comprendidas si éstas son parte de una red de representaciones. El grado de comprensión está determinado por el número y fuerza de las conexiones (Hiebert y Carpenter, 1992, p. 67).

Según los autores, las redes de representaciones mentales se construyen gradualmente, cuando nueva información es conectada a redes existentes o, nuevas relaciones son construidas entre información previamente desconectada.

Los autores afirman que la comprensión está limitada cuando las conexiones son muy débiles y que, la comprensión crece cuando crecen las redes y/o las relaciones se van fortaleciendo.

Hiebert y Carpenter (1992) señalan que el crecimiento de las redes se puede caracterizar como cambios en las mismas. La mejor forma de describir los cambios en las redes es como reorganizaciones, nuevas conexiones son formadas, y viejas conexiones pueden modificarse o abandonarse. Es de especial interés que las conexiones erróneas se "destruyan", a fin de que sean "sustituidas por las adecuadas".

En esta investigación, se considera que cuando un estudiante identifica las funciones lineales en cualquiera de sus formas de representación externas (lenguaje hablado, tabular, algebraica y gráfica), puede realizar la transición entre dichas representaciones, y además puede resolver problemas de contexto, entonces alcanza un cierto grado de la comprensión de funciones lineales. Un acercamiento a las relaciones que se establecen entre las formas de representación de funciones lineales, algebraica, gráfica y de contexto se muestran en la Tabla 3.1. (página 7).

En este escrito, el aprendizaje con comprensión se menciona como simplemente "aprendizaje".

3.4 Generalidades de modelización y solución de problemas

La enseñanza centrada en la solución de problemas es fundamental para conectar a las matemáticas con situaciones reales (Polya, 2011; Shoenfeld, 1985; Vargas et al, 2022).

Antecedentes

Vargas et al (2022) señalan que es importante de fomentar estrategias, como las cognitivas y metacognitivas para fomentar el aprendizaje con solución de problemas.

Según Kaiser (2018), la perspectiva educativa de la modelización matemática enfatiza metas pedagógicas, permitiendo a los estudiantes comprender los aspectos centrales del mundo de una mejor manera, desarrollando la comunicación y la argumentación. Como modelo conceptual enfatiza los objetivos relacionados con la asignatura, el uso de ejemplos de la vida real para introducir nuevos conceptos matemáticos y para motivar su comprensión.

Según Kaiser (2018), la promoción de las subcompetencias en modelización matemática, para resolver problemas del mundo real, se acepta como un objetivo central de la educación matemática en todo el mundo, especialmente si la educación matemática tiene como objetivo promover una ciudadanía responsable.

Según Kaiser (2018), promover la modelización matemática en la escuela, contribuye con:

- desarrollar en los estudiantes habilidades que los capaciten para comprender los aspectos centrales de su mundo,
- fomentar la motivación de los estudiantes hacia las matemáticas y su enseñanza…

Según Blum (2011), la modelización matemática es importante para los estudiantes porque, los modelos matemáticos y la modelización están en todos lados alrededor de nosotros, a menudo conectados con poderosos aparatos tecnológicos. Preparar a los estudiantes para ser ciudadanos responsables y para su participación en el desarrollo de la sociedad, es parte esencial en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Antecedentes

Según Stillman (2011), en el trabajo de modelización se pretende que los estudiantes desarrollen un trabajo metacognitivo, es decir, que sean conscientes de sus conocimientos, del trabajo que están realizando, y del que deben desarrollar para resolver la tarea en cuestión, así mismo, deben ser capaces de verificar sus resultados y de decidir la eficacia de su desempeño.

Por otro lado, Stillman (2004), señala para que los estudiantes puedan tener acceso a la comprensión y solución de problemas se deben considerar estrategias cognitivas y metacognitivas. Para entender un problema de aplicación completamente, los estudiantes deben poseer suficientes conocimientos en su memoria a largo plazo, para entender adecuadamente la situación descrita, y poseer también estrategias apropiadas para generar inferencias y elaboraciones mentales necesarias.

La autora señala algunas estrategias para promover la solución de problemas de aplicación: i) realización de tareas similares o paralelas, ii) el reconocimiento de señales matemáticas, iii) elaboración de preguntas que promuevan el compromiso, iv) relectura, palabras clave, dibujar diagramas, v) apoyo cognitivo cuando las matemáticas no son tan obvias, entre otras.

Según Stillman (2004), para que un estudiante pueda comprender y resolver problemas de aplicación, es necesario que: tengan un repertorio de estrategias cognitivas y metacognitivas, un rico acervo de conceptos, hechos, procedimientos y experiencias matemáticas, conocimiento enciclopédico, significado de palabras, entre otras. Por lo anterior, se prevé que la dirección del profesor deberá considerar estrategias cognitivas y metacognitivas.

3.5 Perspectivas de modelización

Antecedentes

En la educación matemática se han identificado algunas perspectivas respecto a la enseñanza con solución de problemas y modelización.

Kaiser (2018) señala algunas perspectivas que se indican a continuación.

- Modelizado realista o de aplicación. Fomenta el objetivo de que la aplicación de las matemáticas contribuya a la comprensión y a la solución de problemas del mundo real.
- Modelizado epistemológico o teórico. Una parte importante de este enfoque es que las aplicaciones de las matemáticas en el mundo real deberían promover el desarrollo de conceptos y algoritmos matemáticos. Esta perspectiva asigna poca importancia al aspecto de la realidad en los ejemplos propuestos que pertenecen a la parte práctica.
- Modelizado educacional. Se divide en dos: la didáctica y la conceptual.
    - La modelización didáctica pone en primer plano la estructuración de los procesos de aprendizaje y enfatiza los objetivos pedagógicos. Dentro del modelizado didáctico, el concepto de competencias y su promoción es muy discutido.
    - La modelización conceptual se enfoca en objetivos relacionados con el tema, es decir, el uso de ejemplos del mundo real para introducir nuevos conceptos matemáticos y fomentar su comprensión.
- Sociocrítico o Sociocultural. El objetivo de esta perspectiva es la promoción de la comprensión de modelos desarrollados para la sociedad o la naturaleza. Se enfatiza el pensamiento crítico con el papel de las matemáticas en la sociedad y la naturaleza. Esta promoción del pensamiento crítico se fomenta con discusiones reflexivas entre los estudiantes.
- Modelización Cognitiva o meta-perspectiva. Este enfoque pone en primer plano el análisis del modelizado de los estudiantes con sus dificultades, la promoción de los procesos de

> pensamiento matemático y examina los procesos de modelizado desde una perspectiva cognitiva. Esta perspectiva analiza los procesos de modelización en diferentes tipos de situaciones, que varían en grado de autenticidad o complejidad matemática.

En esta investigación, se considera que el enfoque de modelización abordado está relacionado con la perspectiva de Modelizado educacional, ya que se promueven los conceptos matemáticos y sus aplicaciones, y se considera que también tiene relación con la perspectiva de Modelización Cognitiva o meta-perspectiva, ya que se analizan los procesos de modelizado de los estudiantes y las dificultades cognitivas que presentan.

3.6 Consideración de problemas y su Clasificación

En esta investigación se considera como "problema" lo señalado por Blum y Niss (1991):

> Por problema entendemos una situación que conlleva ciertas preguntas que desafían intelectualmente a alguien que no está en situación inmediata, posesión de métodos/procedimientos/algoritmos directos, etc., suficientes para responder las preguntas. Esta noción de problema es aparentemente relativa a las personas involucradas; entonces, lo que para una persona es un problema puede ser un ejercicio para alguien más (Blum y Niss, 1991, p 37).

Así mismo, en esta investigación se considera lo que señalan Blum y Niss (1991), cuando se refieren a los problemas del mundo real, como los del resto del mundo, fuera de las matemáticas, es decir, materias o disciplinas escolares o universitarias distintas a las matemáticas; o de la vida cotidiana y el mundo que nos rodea. Sin embargo, respecto al enfoque puramente matemático, la situación problemática está incrustada en el universo matemático. Además, estos autores señalan que la solución de problemas es el proceso de abordar un problema e intentar resolverlo.

Por otro lado, Barrera-Mora y Santos Trigo (2002) señalan que existen tres tipos de problemas que se pueden usar en la enseñanza de las matemáticas:

- problemas matemáticos,
- problemas reales y,
- problemas hipotéticos.

En esta investigación, los alumnos construyen su conocimiento de funciones lineales. Por tal motivo, se trabajan algunos ejercicios matemáticos, con explicación previa del profesor, es decir, no necesariamente son problemas matemáticos, sino "ejercicios". Los problemas seleccionados para esta investigación son de los tipos matemáticos, hipotéticos y reales. Sin embargo, es conveniente mencionar algunas clasificaciones que se presentan en la literatura de educación matemática.

Blanco (1993) señala una clasificación de problemas de la siguiente manera: i) ejercicios de reconocimiento, donde se pretende resolver, reconocer o recordar un factor específico, una definición o una proposición de un teorema; ii) ejercicios de algoritmos o de repetición, con el fin de automatizar algún procedimiento; iii) problemas de traducción simple o compleja, son formulados en un contexto concreto y cuya resolución supone una traducción del enunciado, oral o escrito, a una expresión matemática; iv) problemas de procesos, se diferencian de los anteriores en que la forma de cálculo no aparece claramente delimitada, dándose la posibilidad de conjeturar varios caminos para encontrar la solución; v) problemas reales, entre otros. El autor señala la conveniencia de enfrentar a los estudiantes a los diferentes tipos de problemas para desarrollar su creatividad.

Tabla 3-2. Clasificación adicional de problemas en esta investigación según Blanco

1	Para presentación de contenido.
2	Reconocimiento de un concepto.
3	Problemas de aplicación simple.
4	De repetición-ejercicios.

Cuevas y Pluvinage (2003), señalan una serie de recomendaciones para la enseñanza con solución de problemas: i) la acción del estudiante en la solución de problemas específicos gradualmente dosificados, ii) introducir un concepto, a partir de un problema de contexto, iii) la verificación lógica del resultado en problemas de contexto, iv) dividir el problema en subproblemas y resolverlos hasta llegar a integrar la solución completa… vii) presentar los problemas gradualmente respecto a la dificultad, viii) proporcionar la mínima ayuda, para que el alumno construya por sí mismo la solución del problema, ix) si la actividad lo permite, trabajar con distintos sistemas de representación, entre otros.

Por otro lado, Blum y Niss (1991) distinguen varias maneras de incluir aplicaciones y modelización en la instrucción matemática. Los autores señalan varias alternativas:

- donde primeramente se incluye la modelización y, sirve de introducción al tema matemático,
- otra alternativa es donde primeramente se trabajan los conceptos y procedimientos matemáticos y posteriormente la modelización.

En esta investigación, se decidió trabajar con problemas al inicio, durante y al finalizar la implementación del ambiente de aprendizaje propuesto, debido a que los estudiantes, como se observó en el estudio piloto, no tienen experiencia en solución de problemas y no recuerdan el tema matemático. Por lo tanto, se requiere que aprendan el tema y al mismo tiempo aprendan a resolver problemas. Por otro lado, en esta investigación se decidió trabajar con ejercicios

matemáticos, para que los estudiantes desarrollen su comprensión y habilidades matemáticas. También se decidió trabajar con problemas hipotéticos y reales para que los alumnos tuvieran un acercamiento a las aplicaciones de las matemáticas, con los beneficios que ello conlleva.

4. MARCO CONCEPTUAL Y PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo se introducen los principales conceptos, y los argumentos basados en ellos, que permiten ubicar, entender y esclarecer el desarrollo de esta investigación.

El marco presentado permite profundizar en el análisis de la enseñanza de las matemáticas a partir del enfoque de modelización y solución de problemas a partir de la definición y explicación de conceptos tales como las subcompetencias de modelización y solución de problemas, el conocimiento metacognitivo y las estrategias cognitivas y metacognitivas. Específicamente, este marco conceptual permite profundizar en el análisis; i) por cada una de las subcompetencias, ii) proceso metacognitivo de los estudiantes, elección de una estrategia y su aplicación exitosa o no, iii) respuestas de los estudiantes en situaciones de bandera roja, iv) causas de dificultades, como, por ejemplo, conocimientos incompletos o incorrectos, v) estrategias cognitivas/metacognitivas dispuestas por el profesor, para apoyar un buen aprendizaje de los estudiantes. El marco conceptual está basado en el trabajo realizado por Stillman y colaboradores en los siguientes escritos. "*Un marco para el éxito en la implementación de la modelización matemática en la escuela secundaria*", de Stillman *et al* (2007). "*Aplicando el conocimiento metacognitivo y estrategias en tareas y aplicaciones con modelización en la escuela secundaria*", de Stillman (2011). y "*Estrategias empleadas por estudiantes de secundaria superior para superar o aprovechar las condiciones que afectan la accesibilidad a las tareas de las aplicaciones*", de Stillman (2004).

Algunos de los puntos que señala Stillman G, y que se consideran importantes para este trabajo son:

- Propuesta de un ciclo de modelización y la definición de subcompetencias, como una herramienta bien definida para analizar, parte por parte, las actividades de los estudiantes a la hora de resolver problemas.
- La definición y categorización del proceso metacognitivo de los estudiantes, como una herramienta para analizar su trabajo metacognitivo.
- Énfasis en las estrategias cognitivas y metacognitivas, como un apoyo a los estudiantes para construir su conocimiento matemático a partir de la solución de problemas.

Como se muestra más adelante, el presente marco conceptual es una herramienta fundamental para el análisis del aprendizaje de los estudiantes en cuanto a lo cognitivo y lo metacognitivo.

4.1 Ciclo de modelización y subcompetencias

Stillman (2011), utiliza un marco teórico en el estudio de la modelización, para dar no sólo una mejor comprensión de lo que hace el modelizador cuando intenta modelizar problemas, sino también para tener una mejor base en la toma de decisiones y las intervenciones de los profesores.

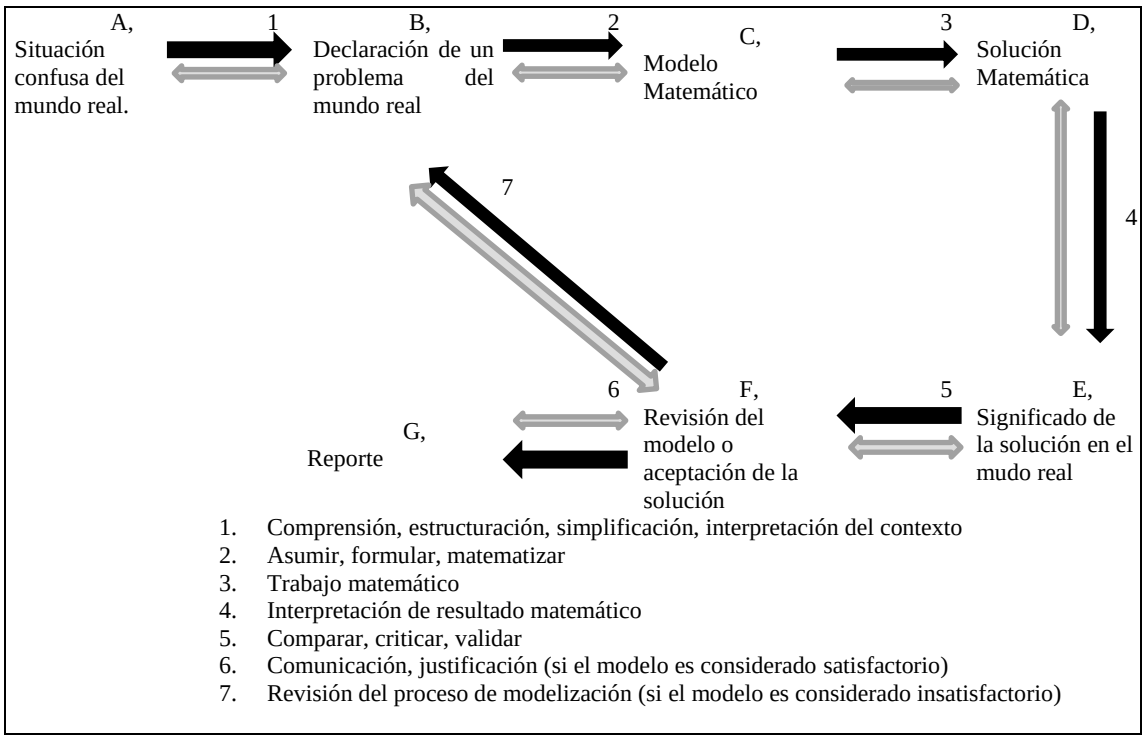
Según Stillman (2011), la Figura 4.1., contiene la gran cantidad de tareas del ciclo de modelización, en una representación diagramática y, es un auxiliar en la necesidad de captar lo que ocurre en la cabeza de los modelizadores, cuando trabajan en dichas tareas.

En la Figura 4.1., el punto *A*, representa la etapa inicial del ciclo de modelizado. Las flechas negras significan transiciones entre las etapas. El proceso de solución total se describe siguiendo dichas flechas negras en el sentido de las agujas del reloj. El punto *G* representa el reporte final

con un resultado satisfactorio. Si el resultado no es satisfactorio, se inicia otro ciclo de modelización.

Según Stillman (2011), los tipos de actividad mental, que los modelizadores realizan cuando tratan de hacer la transición de una etapa a otra, se señalan con los números del uno al siete, en el recuadro que se encuentra abajo del ciclo de modelizado.

Figura 4.1. Ciclo de Modelizado de Stillman (2011)



En la Figura del ciclo de modelizado, flechas grises de doble cabeza subrayan que el proceso de modelización está lejos de ser lineal, también indican la presencia de actividad de reflexión metacognitiva. Esta actividad reflexiva puede mirar hacia adelante o hacia atrás, con respecto a las etapas del proceso de modelización, de ahí las dobles flechas direccionales.

Según Stillman (2011), el ciclo en el diagrama es una simplificación, ya que los modelizadores pueden desviarse, y capturar esto, conduce a un diagrama mucho más complejo.

Según Stillman (2011), el interés en la reflexión se refiere a su función en la facilitación de la actividad metacognitiva, dentro del proceso. En la modelización como enfoque de contenido, el objetivo inmediato es obtener una solución a un problema del mundo real, pero simultáneamente, hay un deseo de desarrollar un metaconocimiento coherente y robusto, sobre el modelizado y la aplicación de las matemáticas. El objetivo educativo es que los estudiantes se conviertan en mejores modelizadores y no sólo en solucionadores de problemas aislados.

4.1.1 Subcompetencias involucradas en la Modelización

La actividad de modelizar incluye un amplio rango de actividades para realizar, en cada fase del ciclo de modelizado. Primeramente, los estudiantes estructuran el problema del mundo real que va a ser modelizado. Después matematizan la situación, esto es, trasladan los objetos concretos y sus relaciones, en términos matemáticos, resultando así el modelo. Luego los estudiantes trabajan con el modelo planteado, resuelven el problema y lo validan matemáticamente.

Stillman *et al* (2007), muestran un marco emergente que sirve para el análisis del trabajo de los estudiantes en situaciones de bloqueo en cada uno de los pasos del ciclo de modelización, una interpretación de dicho marco se presenta en la Tabla 4.1.

Según los autores, su enfoque es una versión de la Teoría Fundamentada (Charmaz, 2005, pp. 507-535). Las categorías conceptuales del marco surgen a través de sus interpretaciones de los datos, por lo que, es el resultado de sus representaciones interpretativas de una realidad. En el marco se presentan las cinco subcompetencias de modelización con las acciones observables.

Tabla 4-1. Marco para el análisis del trabajo de los estudiantes, tomando como base a Stillman *et al* (2007)

SITUACIÓN CONFUSA DEL MUNDO REAL → PROBLEMA DEL MUNDO REAL DECLARADO (COMPRENSIÓN Y SIMPLIFICACIÓN):
Entendimiento del problema (acciones: representación, discusión de la situación).
Simplificar.
Estrategia.
Identificar los elementos de la estrategia.
PROBLEMA DEL MUNDO REAL DECLARADO → MODELO MATEMÁTICO (MATEMATIZACIÓN):
Identificar las variables independiente y dependiente.
Representación de elementos matemáticos (x, y), escribir la fórmula.
Realizar las suposiciones requeridas.
Escoger herramientas matemáticas.
Escoger tecnología (calculadora, software…)
Escoger tecnología para ajustar (linealizar datos)
MODELO MATEMÁTICO → SOLUCIÓN MATEMÁTICA (RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS):
Escribir apropiadamente la ecuación o fórmula.
Simplificar y/o resolver.
Uso de herramientas matemáticas.
Uso de tecnología.
Verificar el modelo (comprobación).
Obtención de resultados adicionales para la interpretación del modelo.
SOLUCIÓN MATEMÁTICA → SIGNIFICADO DE LA SOLUCIÓN EN EL MUNDO REAL (INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS):
Identificar el resultado matemático con su contraparte del mundo real.
Contextualización de los resultados matemáticos (intermedio y finales) con la situación del mundo real.
Integración de argumentos para justificar la interpretación.
Reconocer la necesidad y probar el modelo con otros datos y llevarlo a cabo.
SIGNIFICADO DE LA SOLUCIÓN EN EL MUNDO REAL → REVISIÓN DEL MODELO O ACEPTAR LA SOLUCIÓN (COMPROBACIÓN Y VALIDACIÓN):
Comparación de los resultados imprevistos con la situación real (recálculo).
Consideración de los resultados (numéricos, gráficas, Tablas…), con el mundo real.
Conciliación de los aspectos matemáticos y el mundo real.
Reconocimiento de las limitaciones del modelo.
Consideración de la viabilidad del modelo.

Con este marco conceptual, se analiza el trabajo de los estudiantes, considerando cada una de las subcompetencias de la Tabla 4.1. En el siguiente capítulo se definen más específicamente las actividades con las que se considera que los estudiantes desarrollan cada una de las subcompetencias en funciones lineales.

4.2 Metacognición

Respecto al término metacognición: el prefijo griego meta significa “más allá” y cognición es del latín cognoscere que significa “conocer”. La metacognición, en general se entiende como “pensar sobre el pensamiento”.

Según Flavell (1976) en Stillman (2011), la metacognición es, el conocimiento de uno sobre sus propios procesos y productos cognitivos o cualquier cosa relacionada con ellos se refiere entre otras cosas, al seguimiento activo y a la consiguiente regulación de estos procesos, en relación con los objetos cognitivos en los que se apoyan, generalmente al servicio de algún objetivo concreto. Por otro lado, Shoenfeld (1992), señala que la metacognición abarca la autorregulación o, monitorización y control.

Según Flavell (1979), la metacognición y la vigilancia cognitiva se refieren a, la capacidad de una persona para controlar una amplia variedad de empresas cognitivas, se produce a través de las acciones e interacciones entre cuatro clases de fenómenos: i) conocimiento metacognitivo, ii) experiencias metacognitivas, iii) objetivos y, iv) acciones o estrategias.

- El conocimiento metacognitivo, incorpora tres categorías interactivas de conocimiento, el conocimiento de la persona, la tarea y la estrategia. Algunos ejemplos son el conocimiento personal de uno mismo como modelizador, el conocimiento de las variables de la tarea, y los conocimientos pertinentes sobre estrategias cognitivas o metacognitivas, como el conocimiento de su eficacia cuando se han utilizado en el pasado.
- Las experiencias metacognitivas, son experiencias cognitivas afectivas conscientes, que controlan o regulan la actividad cognitiva.

- Los objetivos metacognitivos son los objetivos de cualquier actividad metacognitiva. Un ejemplo proviene de la situación en la que un estudiante se dedica a la modelización matemática, y ha empezado a explorar la situación del mundo real y se pregunta (experiencia metacognitiva) si tiene un conocimiento de dominio adecuado de la situación. A continuación, el estudiante tiene el objetivo metacognitivo de evaluar su conocimiento actual en el ámbito del problema. Para alcanzar este objetivo, podría emplearse una estrategia metacognitiva como la auto interrogación. Esto sucede cuando un estudiante se enfrenta a un problema y, se pregunta si en el pasado ha resuelto alguno parecido.
- Las estrategias metacognitivas, son estrategias utilizadas para regular y supervisar los procesos cognitivos y así alcanzar los objetivos cognitivos.

En esta investigación se observa, respecto al proceso metacognitivo de los estudiantes, lo siguiente:

- conocimientos de la tarea,
- conocimientos metacognitivos, planteamiento de una estrategia,
- autorregulación, comprobación, detectar errores y corregirlos,
- consciencia de las dificultades,
- experiencias afectivas respecto al trabajo realizado.

Según Stillman (2011), se tiene en cuenta la actividad metacognitiva (o su ausencia), de los estudiantes, asociada con las transiciones entre las etapas del proceso de modelización, especialmente en relación con la identificación y la liberación de bloqueos al progreso.

4.2.1 Respuestas a situaciones de bandera roja y meta-metacognición

Según Stillman *et al* (2007), durante las actividades de modelización matemática en el salón de clase, el profesor debe supervisar el progreso de los individuos o grupos, para intervenir estratégicamente sólo cuando sea necesario, si el objetivo final es facilitar la modelización independiente. Por lo tanto, el profesor debe evaluar y reflexionar acerca de las actividades metacognitivas de los estudiantes tanto dentro de la situación específica como con respecto a su papel en el proceso de modelización, de este modo, el profesor participa en un proceso meta-metacognitivo.

Según Stillman *et al* (2007), no todos los actos metacognitivos son productivos. Los actos metacognitivos productivos se manifiestan en tres niveles:

- el reconocimiento de las estrategias particulares y relevantes, donde se evalúan los recursos personales, conocimientos y competencias en relación con la tarea,
- la elección de la estrategia para su implementación, que consiste en evaluar la viabilidad de las alternativas,
- la aplicación exitosa, esto implica las diversas subcompetencias en la modelización, relacionadas con la identificación y corrección de errores intermedios, y la eficiencia en el proceso de obtener una solución exitosa.

4.2.1.1 Respuestas a las situaciones de bandera roja

Goos (1998) en Stillman *et al* (2007), asocia el éxito metacognitivo con respuestas productivas a "situaciones de bandera roja". Las banderas rojas son disparadores metacognitivos, cuando los estudiantes se dan cuenta de dificultades específicas. Las situaciones de bandera roja ocurren cuando hay falta de progreso, se producen errores, se detectan, y se producen resultados anormales.

Las situaciones de bandera roja pueden provocar un bloqueo en alguna de las etapas del ciclo de modelización. En esta investigación, se considera un bloqueo cuando: en una situación de bandera roja, el proceso de solución del problema en alguna de las etapas del ciclo de modelización se detiene, no hay avance a pesar de los esfuerzos de los estudiantes.

Según Stillman (2011), las respuestas de los estudiantes a las situaciones de bandera roja podrán ser las siguientes: i) metacognición rutinaria, ii) ceguera metacognitiva, iii) vandalismo metacognitivo, iv) espejismos metacognitivos o, v) desviación metacognitiva.

Según Stillman (2011), la metacognición rutinaria es dependiente de las memorias metacognitivas de los estudiantes y de su percepción de cómo utilizarlas (es decir, saber qué, cómo, cuándo y utilizar estos conocimientos metacognitivos y estrategias), esto puede manifestarse como actividad metacognitiva rutinaria durante la resolución de problemas.

La autora señala que, la ceguera metacognitiva ocurre cuando no se reconoce una situación de bandera roja, por lo que no se adoptan medidas apropiadas. Los modelizadores no se dan cuenta de que algo está mal, persisten con una estrategia incorrecta y/o pasan por alto errores de cálculo.

Stillman (2011), señala que el vandalismo metacognitivo ocurre cuando la respuesta a una bandera roja percibida implica tomar medidas drásticas y a menudo destructivas que no sólo pueden no abordar el problema, sino también alterar la tarea misma.

Según la autora, el espejismo metacognitivo describe una situación en la que se toman medidas innecesarias que descarrilan una solución, porque los modelizadores perciben una dificultad que no existe.

Según Stillman (2011), la desviación metacognitiva describe la situación común de una respuesta potencialmente relevante pero inapropiada a una bandera roja percibida que representa inadecuación, en lugar de vandalismo.

Según la autora, desde una perspectiva pedagógica, si los maestros van a ser capaces de participar eficazmente en la metacognición, es importante que sean conscientes de la naturaleza de los actos metacognitivos rutinarios y no productivos, como los que se han descrito y observado durante la modelización, especialmente cuando tratan de alentar el desarrollo de la actividad metacognitiva reflexiva de los estudiantes.

En esta investigación, al identificar las respuestas a situaciones de bandera roja y realizar su análisis, se obtuvieron específicamente las dificultades que tuvieron los estudiantes en el proceso de aprendizaje de funciones lineales y resolución de problemas. Adelantando los resultados, las respuestas, a situación de bandera roja, que con mayor medida ocurrieron fue la ceguera metacognitiva debida a conocimientos incompletos.

4.2.1.2 Actividad Reflexiva Metacognitiva Mediante la Meta-Metacognición.

Según Stillman (2011), el proceso previsto por el profesor, que se dedica a reflexionar sobre la actividad metacognitiva de los estudiantes, en la tarea que se está realizando y, en el desarrollo de competencias metacognitivas con respecto al proceso de modelización, es fundamental. Este meta-metaconocimiento puede estar relacionado con:

- el diseño de tareas y,
- las actividades de intervención preplanificadas,
- las decisiones y acciones tomadas en el momento de trabajo.

De los conocimientos pedagógicos, del contenido matemático, de la forma de modelizar del profesor, y su capacidad para responder rápidamente a las repentinas posibilidades y oportunidades, depende el hecho de desarrollar las competencias de modelización y de metaconocimientos de los estudiantes.

Según Stillman (2011), en los folletos de las tareas, por ejemplo, al iniciar un programa de modelización, se pueden insertar preguntas reflexivas en puntos estratégicos, para que los estudiantes se detengan y reflexionen, sobre sus progresos inmediatos en relación con el propósito total de la modelización.

En esta investigación, en el diseño de la estrategia didáctica, se han considerado una serie de acciones: planificación de temática, estrategias cognitivas/metacognitivas y actividades de trabajo, como se manifiesta en el siguiente capítulo.

Según Stillman (2011), cuando los maestros están enseñando aprendizaje reflexivo, y deciden intervenir en el trabajo de los estudiantes, que están experimentando un bloqueo persistente en su progreso, tratan primero de alterar el modelo mental del estudiante a través de la reflexión y, posteriormente sus acciones. La meta-metacognición juega un papel significativo en este proceso.

Según Stillman (2011), el profesor tiene que distinguir entre los bloqueos inducidos por:

- falta de reflexión,
- los conocimientos incorrectos,
- los conocimientos incompletos,
- aquellos en los que se necesita la revisión de esquemas.

Tabla 4-2. Proceso metacognitivo del modelizador

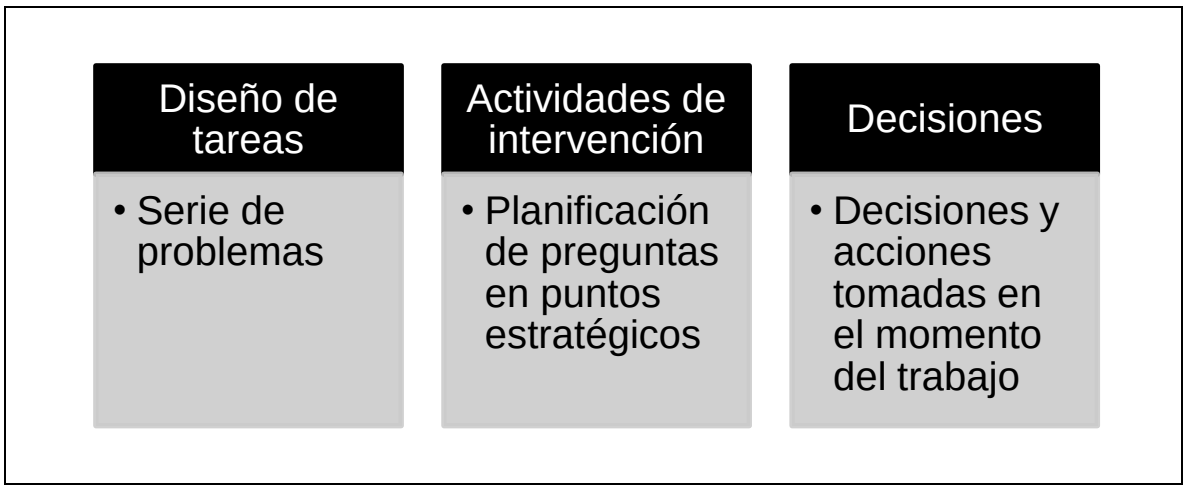
ESTRATEGIAS	Respuestas a situaciones de bandera roja	CAUSAS
• Reconocimiento de estrategia • Elección de estrategia • Aplicación exitosa.	• Metacognición rutinaria • Ceguera metacognitiva • Vandalismo metacognitivo • Espejismo metacognitivo • Desviación metacognitiva.	• Falta de reflexión • Conocimientos incompletos • Conocimientos incorrectos • Revisión de esquemas.

El profesor debe ser capaz de hacerlo, participando en el proceso de meta-metacognición, en el que se considera tanto los modelos mentales de los estudiantes como su actividad metacognitiva. La meta-metacognición le permite reconocer el tipo de intervención necesaria para superar algún bloqueo que se presente, una resistencia para acomodar nueva información contradictoria, y una falta de reflexión por parte de los estudiantes. Comprender e identificar los bloqueos de la actividad metacognitiva en la que participan sus alumnos es crucial para los profesores, ya que esto les permitirá comunicar a sus estudiantes el tipo de bloqueo que estén experimentando y puedan reflexionar sobre este bloqueo, con su consecuente desarrollo como modelizadores matemáticos independientes.

La manera práctica en que se propició la reflexión metacognitiva de los estudiantes por medio de la meta-metacognición por parte del profesor está expresada en el siguiente procedimiento: i) los alumnos trabajan en una bandera roja que puede producir un bloqueo, ii) el profesor analiza el trabajo de los estudiantes y determina las causas (falta de reflexión, conocimientos incorrectos o incompletos o, cambio de esquemas), iii) el profesor reflexiona y

analiza la mejor forma de proporcionar apoyo, iv) el profesor proporciona el apoyo, v) nuevamente, el profesor analiza el trabajo de los estudiantes, y así sucesivamente.

Tabla 4.3. Proceso meta-metacognitivo del profesor



En esta investigación, en la mayoría de las ocasiones cuando las causas de situaciones de bandera roja fueron por conocimientos incompletos, el profesor proporcionó apoyo cognitivo con indicaciones, ejemplos de procedimientos, explicaciones etc., como por ejemplo en el algoritmo de la proporcionalidad.

4.3 Estrategias cognitivas y metacognitivas

En Stillman (2004), se presenta un marco cognitivo y metacognitivo para el análisis de tareas de aplicación y las respuestas de los estudiantes. Las condiciones que facilitan o impiden el acceso a las tareas, al nivel de estudios bachillerato.

Según Flavell (1987) en Stillman (2004), una estrategia cognitiva se entiende como "*una diseñada simplemente para llevar al individuo a algún objetivo o subobjetivo cognitivo*" (p. 23), mientras que una estrategia metacognitiva se utiliza para monitorear o regular lo que se está haciendo en una estrategia cognitiva. Así mismo la autora señala que las estrategias cognitivas se

refieren principalmente a las habilidades procesales. Y las estrategias metacognitivas se refieren a la regulación de lo que se está procesando y decidiendo, el centrar la atención en estímulos particulares a la tarea y no en otros.

Stillman (2004), en su estudio, señala que para entender un problema de aplicación completamente, los estudiantes deben poseer suficientes conocimientos en su memoria a largo plazo, para entender adecuadamente la situación descrita, y poseer también estrategias apropiadas para generar inferencias y elaboraciones mentales necesarias.

Por otro lado, Stillman (2004), en su estudio, señala que las condiciones que facilitan el acceso a la información de las tareas son las siguientes.

- Condiciones relacionadas con la memoria. Recordar una tarea similar o paralela, recordar conocimientos previos, ensayar bien las matemáticas involucradas, fomentar el conocimiento metacognitivo.
- Condiciones perceptivas. Palabras desencadenantes y características visuales reconocidas, ser capaz de visualizar la situación, reconocimiento de señales matemáticas, entre otras.

En el estudio llevado a cabo por Stillman (2004), señala algunas estrategias que usó para promover el acceso a las tareas de aplicación.

- *Estrategia referente a la memoria.* Haber realizado una tarea similar o paralela, esto promueve que el alumno realice algunas reflexiones comparativas, lo cual constituye una actividad metacognitiva.
- *Estrategia que beneficia las condiciones de percepción.* Reconocimiento de señales matemáticas (signos, literales, fórmulas…)

- *Estrategia para promover el compromiso.* Elaboración de preguntas que sitúen al alumno en el contexto del problema, para que se involucren y después propongan la solución.
- *Estrategias para superar los problemas relacionados con el lenguaje.* Las condiciones relacionadas con el lenguaje estimulan el recuerdo y la aplicación de una variedad de estrategias de comprensión, como releer, dibujar un diagrama, visualizar, subrayar palabras clave, seleccionar características y puntos clave, priorizar la información y procesar "poco a poco". La relectura fue, la estrategia más utilizada de estas.
- *Estrategia para superar los problemas de representación.* Centrar selectivamente la atención en aspectos relevantes de la presentación del problema releyendo, visualizando o volviendo a dibujar una representación gráfica de la situación de la tarea.

Según Stillman (2004), en su estudio, las condiciones que redujeron la dificultad fueron de naturaleza personal (por ejemplo, poder visualizar, poseer conocimiento metacognitivo que fomente el acceso a la tarea, conocimiento previo del contexto de la tarea) o atributos de la tarea que eran susceptibles a variación individual cuando un estudiante particular interactuaba con la tarea (por ejemplo, cuán reciente se había estudiado un tema particular de matemáticas requerida en la tarea, o cuán bien se había ensayado la matemática requerida).

Stillman (2004), señala que, de manera similar, las condiciones obstaculizadoras que aumentaban la dificultad de una tarea para individuos particulares a menudo eran resultado de la interacción de los atributos personales de un estudiante con los atributos de la tarea (por ejemplo, la renuencia hacer suposiciones, palabras clave que no son relevantes, dificultades de recuerdo, interferencia de conocimiento previo, conocimiento metacognitivo de la tarea que desalentaba el acceso).

En su estudio, Stillman (2004), señala que, algunas condiciones que aumentaron la complejidad de la tarea, dependiendo de esta misma, se observaron cuando las matemáticas o el objetivo de la tarea no fueran obvios, la necesidad de integrar información contextual dada y derivada para construir una representación mental de la situación descrita en la tarea, o la necesidad de hacer suposiciones para formular un modelo matemático para la tarea.

Para que los estudiantes se beneficien de las condiciones facilitadoras en las tareas de aplicación, necesitan: un repertorio bien desarrollado de estrategias cognitivas y metacognitivas, así como un rico acervo de conceptos, hechos, procedimientos y experiencias matemáticas; conocimiento enciclopédico general indirecto del mundo y de los significados de las palabras; y conocimiento verdaderamente experiencial a partir de experiencias personales fuera de la escuela o en materias escolares más prácticas.

Stillman (2004), señala que, en particular, es necesaria una variedad de estrategias de recuperación, reconocimiento, creación de imágenes mentales, perceptuales e integración, junto con estrategias metacognitivas para monitorear, regular y coordinar el uso de estas estrategias cognitivas.

Según Stillman (2004), el hecho de que un estudiante no posea un repertorio estratégico bien desarrollado o un amplio acervo de conocimiento matemático, enciclopédico, semántico o experiencial puede llevar a una situación en la que las condiciones que facilitan el acceso de un estudiante a la tarea se conviertan en condiciones que lo impidan para otro.

En otras ocasiones, atributos particulares de una tarea de aplicación, como una redacción inusual, un enunciado del problema extenso o que el modelo o método matemático requerido no sea obvio, pueden impedir el acceso. Sin embargo, estas dificultades pueden superarse si los

estudiantes poseen y activan un acervo estratégico bien desarrollado junto con una base de conocimiento adecuada.

Stillman (2004), señala que, una amplia variedad de estrategias cognitivas que incluyen recuperación, comprensión, organización de la información, concentración de la atención, representación de la información y visualización son necesarias para superar la posible variedad de condiciones que impiden que un estudiante pueda encontrar al intentar acceder a una tarea de aplicación. El uso eficaz de estas estrategias se ve mejorado por un acervo igualmente rico y variado de estrategias metacognitivas.

En esta investigación, se ha considerado en la misma línea que sugiere Stillman (2004), proporcionar estrategias cognitivas: i) referente a la memoria con tareas similares, ii) mejorando las condiciones de percepción, con figuras y tablas, iii) promover el compromiso con preguntas para situar a los alumnos en el problema, iv) con la relectura y, v) promoviendo la representación tabular y gráfica.

4.4 Pregunta de investigación

Con el diseño de un ambiente de aprendizaje con modelización y solución de problemas, donde se considere: i) al que aprende, con sus conocimientos y habilidades, ii) el conocimiento, la transición de representaciones de las funciones lineales, iii) la evaluación, diagnóstica, formativa y sumativa, iv) la comunidad, con las formas de trabajo individual y en equipo. Y con la promoción de un proceso cognitivo y metacognitivo productivo.

¿En qué medida, los estudiantes del grupo de investigación de primer año del Colegio de Ciencias y Humanidades plantel Naucalpan aprenderán funciones lineales, resolverán

problemas, desarrollarán las subcompetencias de modelización, procesos metacognitivos y, también qué dificultades se presentarán en la resolución de dichos problemas?

Para dar seguimiento a la pregunta anteriormente planteada, es necesario realizar un análisis del trabajo académico de los estudiantes, en los siguientes aspectos:

1. Realizar un análisis en: las operaciones aritméticas y algebraicas, el reconocimiento de las funciones lineales en cada una de las formas de representación, verbal, tabular, gráfica, algebraica y la transición entre estas.

2. Analizar cómo desarrollarán las subcompetencias de comprensión del problema, matematizar, resolver problemas matemáticos, interpretar los resultados.
3. Realizar análisis cualitativo de su proceso metacognitivo: i) reconocimiento de estrategias, elección de una y su aplicación exitosa; ii) respuestas a situaciones de bandera roja, metacognición rutinaria, ceguera metacognitiva, vandalismo metacognitivo, espejismo metacognitivo, desviación metacognitiva; iii) determinación de las causas de las situaciones de bandera roja, falta de reflexión, conocimientos incompletos y conocimientos incorrectos.

5. METODOLOGÍA

En este capítulo se presenta la metodología que guía el estudio reportado en el presente documento. En primer lugar, se abordan el tipo de estudio y las características de los sujetos participantes. En segundo, se especifican las fases de estudio, las cuales incluyen el diseño de un ambiente de aprendizaje que contempla, entre otros elementos, una serie de 21 tareas, también se establecen los instrumentos usados para el desarrollo de la investigación que sirvieron para la recolección de datos y el análisis cuantitativo y cualitativo.

5.1 Metodología de la investigación.

Según Hernández-Sampieri *et al* (2014), En el campo educativo, los estudios de caso son muy socorridos, para probar métodos de enseñanza y documentar prácticas que mejoran el desempeño escolar.

Tomando como referencia Hernández-Sampieri *et al* (2014), Los estudios de caso son considerados por algunos autores como una clase de diseños, a la par de los experimentales, no experimentales y cualitativos. Poseen sus propios procedimientos y clases de diseños. Los podríamos definir como estudios que al utilizar los procesos de investigación cuantitativa, cualitativa o mixta analizan profundamente el fenómeno de estudio, para responder al planteamiento del problema.

El diseño experimental para esta investigación trata de responder a la pregunta de cuanto aprenden y que dificultades presentan los estudiantes. No se trata de comparar el ambiente de aprendizaje propuesto con ningún otro, tampoco se pretende generalizar. Sin embargo, los hallazgos pueden servir para otros estudios de generalización y propuestas innovadoras de educación matemática. Entonces, esta investigación, se considera como un estudio de caso, donde

se realizó un análisis cuantitativo y cualitativo, con dos grupos de estudiantes disponibles para el estudio. Se pretende analizar de forma profunda las dificultades del aprendizaje de los estudiantes con el ambiente de aprendizaje propuesto, para responder a la pregunta de investigación. Nos disponemos de un acercamiento cuantitativo, con un problema inicial y uno final, así mismo con una acercamiento cualitativo para conocer las dificultades del aprendizaje de los alumnos durante su trabajo cotidiano.

5.1.1 Acercamiento cuantitativo.

Se hizo un acercamiento cuantitativo para comprobar el aprendizaje de los alumnos entre el inicio y el final del ambiente de aprendizaje planteado en la investigación, para tal fin se llevó a cabo la aplicación de un problema al inicio y uno al final, para verificar el rendimiento de los estudiantes. De acuerdo con lo anterior, se aplicó un problema al inicio y uno al final de la instrucción, para conocer los conocimientos y las subcompetencias de los estudiantes al inicio y al final del ambiente de aprendizaje, tanto en el problema inicial y en el final se aplicó el mismo problema hipotético de funciones lineales, pero en diferentes contextos, se decidió así para tener suficientes elementos de comparación.

5.1.2 Acercamiento cualitativo

El acercamiento cualitativo consistió en el seguimiento y análisis de los problemas de aprendizaje, para ello se utilizó el marco teórico de Stillman (2004), (2011) y Stillman *et al* (2007), dando seguimiento al aprendizaje matemático de los alumnos, al desarrollo de sus subcompetencias de modelización y al desarrollo de sus estrategias cognitivas y metacognitivas. El análisis cualitativo de las dificultades de aprendizaje se llevó a cabo con los procedimientos y resultados de los alumnos, con videos en trabajo colaborativo y con una entrevista semiestructurada.

5.2 Etapas de la investigación

Después de diseñar el ambiente de aprendizaje, que considera: i) al que aprende (estudiante) con sus conocimientos y habilidades al presentarse al salón de clase, ii) el conocimiento, el tema de funciones lineales y solución de problemas con 21 tareas, iii) la evaluación, al inicio, durante y al final del ambiente de aprendizaje, cualitativa y cuantitativa y, iv) la comunidad con las formas y normas de trabajo. Se señalan a continuación las etapas de la implementación de esta investigación.

Estudio piloto, a una generación previa, con el fin de conocer los conocimientos de los estudiantes para diseñar el ambiente de aprendizaje.

Etapa 1. Problema inicial, para determinar los conocimientos y las subcompetencias de los estudiantes al inicio de la implementación.

Etapa 2. Implementación del ambiente de aprendizaje en el cual se consideró: i) al que aprende (estudiante) con sus conocimientos y habilidades al presentarse al salón de clase, ii) el conocimiento, el tema de funciones lineales y solución de problemas con 21 tareas, y iii) la comunidad con las formas y normas de trabajo. Las tareas para el aprendizaje fueron acompañadas con secuencias didácticas, dosificadas en 12 sesiones. Las 21 tareas de trabajo académico contienen problemas de modelización, problemas hipotéticos y ejercicios matemáticos. Una breve descripción del trabajo académico en el salón de clase se presentará en el capítulo 7.

Etapa 3. Problema final, para reconocer la adquisición del conocimiento de los estudiantes y el desarrollo de sus subcompetencias.

Etapa 4. Entrevista semiestructurada, para reconocer el conocimiento metacognitivo de los estudiantes.

Para el análisis de datos cuantitativos y cualitativos, se ha seguido el marco emergente de Stillman *et al* (2007), presentado en el capítulo anterior. Es decir, el problema inicial, final y las 21 tareas se analizan considerando las subcompetencias: comprensión y simplificación del problema, matematización, solución de problemas matemáticos, interpretación de resultados y comprobación.

Por otro lado, en el análisis del proceso metacognitivo de los estudiantes (cualitativo), se han seguido los señalamientos de Stillman (2011): elección de una estrategia y su aplicación exitosa, respuestas a situaciones de bandera roja (metacognición rutinaria, ceguera metacognitiva, vandalismo metacognitivo, espejismo metacognitivo, desviación metacognitiva), así como sus causas, falta de reflexión, conocimientos incompletos o incorrectos y revisión de esquemas. Este marco ha sido de utilidad en el análisis de los videos.

5.3 Diseño de ambiente de aprendizaje

Para estructurar el diseño del ambiente de aprendizaje se han considerado los señalamientos de Bransford *et al* (1999), quienes señalan que, para un aprendizaje de calidad, se deben crear entornos que lo favorezcan. Dichos entornos están centrados en: el que aprende (estudiante), el conocimiento, la evaluación y la comunidad. Estos cuatro entornos se consideran como un todo, pero se pueden analizar o estudiar por separado. En esta investigación se han considerado los cuatro entornos, anteriormente señalados, para el diseño del ambiente de aprendizaje.

Centrados en el que aprende (estudiante)

Para los entornos centrados en el estudiante, Bransford et al (1999), consideran que estos entornos son los que ponen atención en los conocimientos, habilidades, actitudes y creencias que

los estudiantes traen al escenario educativo. En dichos escenarios se considera que los aprendices construyen su propio significado, conocimiento y comprensión sobre los conocimientos y creencias con las que llegan al salón de clase.

Centrados en el conocimiento

Bransford *et al* (1999), señalan que la definición de qué conocimientos necesitan adquirir los estudiantes es fundamental en esta perspectiva y que los estándares en áreas como ciencia y matemáticas ayudan en dicha definición.

Los autores afirman que se debe enfocar la atención en la información y las actividades que ayuden a los estudiantes a desarrollar comprensión y que, una aproximación interesante para desarrollar el currículo es la "formalización progresiva". En ella se empieza con las ideas informales que los estudiantes traen y se les ayuda para que estas ideas sean transformadas y formalizadas.

Según los autores, los estudiantes no sólo deben aprender a calcular y computar sino también deben darles sentido a estas actividades y, pensar matemáticamente. Los mencionados autores sostienen que la importancia del automatismo ha sido demostrada en distintas áreas por lo que, es un reto dar un balance apropiado entre las actividades destinadas para promover la automatización y las actividades para promover la comprensión y solución de problemas.

Centrados en la evaluación

Bransford *et al* (1999), señalan que la evaluación debe proporcionar oportunidades de revisión y retroalimentación. Debe ser congruente con los objetivos del aprendizaje.

Centrados en la comunidad

Bransford *et al* (1999) indican que, se puede afirmar que, con el trabajo colectivo y la disposición de aprender de los otros, se promueve el aumento de la comprensión de los alumnos. Por otro lado, estos autores consideran que muchos estudiantes deben ser ayudados a aprender a trabajar colaborativamente y afirman que, las normas para el trabajo individual, en equipo y grupal son importantes para una mejora continua.

Por otro lado, los autores Abrahamson *et al* (2005) en López (2014), señalan que cuando se trabaja colaborativamente en equipo, los estudiantes con habilidades de alto nivel tienden a posicionarse en roles que refuerzan esas habilidades y asignan roles de trabajo de menor nivel cognitivo a los otros estudiantes.

En equipos de trabajo colaborativo cuando los estudiantes que los integran son de distintos niveles de habilidades, se ha observado que los alumnos mejor capacitados tienden a reforzar sus habilidades. En cambio, los estudiantes con menos habilidades, no se desarrollan al lado de sus compañeros mejor capacitados. Por tal motivo se ha decidido hacer la presente investigación con dos equipos de alumnos con rendimiento diferente. Un equipo de cuatro alumnos con alto rendimiento y, el otro con alumnos de bajo rendimiento.

A continuación, se detalla el diseño del ambiente de aprendizaje desde cada una de las perspectivas: del que aprende, del conocimiento, de la evaluación y de la comunidad.

5.3.1 Perspectiva del que aprende, población bajo estudio

El estudio se realiza con ocho estudiantes, de un grupo como cualquier otro, de primer año del Colegio de Ciencias y Humanidades de la UNAM, plantel Naucalpan, cuyas edades oscilan entre 15 y 16 años, son alumnos de primer año de bachillerato. Esta es una población disponible

para el estudio. La materia es Matemáticas I. El autor de este escrito es el profesor del grupo e imparte el curso en su totalidad.

5.3.1.1 Conocimientos y habilidades previas del estudiante

El tema de funciones lineales, así como los conceptos de razón y proporcionalidad, a lo largo del currículo académico se trabaja en el nivel de estudios previo (secundaria). Sin embargo, se ha observado, como lo mencionan algunos estudios, Bransford *et al* (1999); Duval (1992); Graham *et al* (2011); Kieran (1992); que en el nivel bachillerato, los alumnos presentan grandes dificultades con temas trabajados con anterioridad.

Algunos conocimientos y habilidades que se esperan, que tengan los estudiantes son los siguientes.

- Comprensión y operatividad de los conceptos de razón y proporcionalidad,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$ad = bc$$

- Reconocimiento, comprensión y manipulación de las ecuaciones de primer grado con una y dos incógnitas, del tipo:

$$ax = b$$

$$y = mx + b$$

Ejemplo: para la ecuación $y = -2x + 5$, determinar el valor de "x" cuando $y = 4$.

Sustitución: $4 = -2x + 5$

Despeje: $x = \frac{4-5}{-2}$

Resultado: $x = \frac{1}{2}$

Metodología

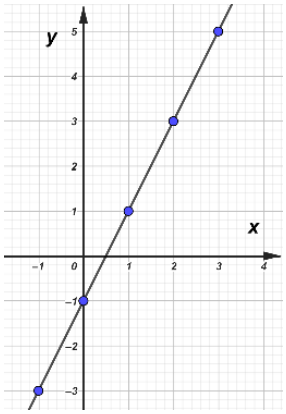
- Identificación de puntos en el plano cartesiano como parejas ordenadas (x, y).
- Tabulación y graficación de una recta.

Figura 5.1. Representaciones de función lineal

Representación algebraica	Representación Tabular	Representación gráfica

$y = 2x - 1$

x	y
-2	-5
-1	-3
0	-1
1	1
2	3
3	5



Estas temáticas se retoman y se trabajan para que los alumnos logren un aprendizaje eficiente y, puedan ser capaces de resolver problemas de modelización, problemas hipotéticos y ejercicios matemáticos, en el nivel bachillerato.

5.3.1.2 Observaciones de estudio piloto

En octubre del año 2021, se realizó un estudio piloto (previo) con el fin de realizar un acercamiento a los conocimientos de los estudiantes en este nivel de estudio: diez alumnos de un grupo de primer grado de bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades plantel Naucalpan de la UNAM. El estudio consistió en dos partes: i) trabajo académico de funciones lineales en el ámbito puramente matemático, ii) trabajo de problemas de modelización reales y problemas hipotéticos. Los problemas con los que se trabajó en este estudio piloto son los que se encuentran en las tareas: Tarea 2, Consumo de agua en la ducha; Tarea 8, La experiencia en el Bungee; Tarea 10, Zapatos de gigante; Tarea 11, Resorte y su carga; Tarea 12, Servicio de taxi por aplicación;

Tarea 20, Tiempos de oro olímpico; Tarea 21, Escalas de temperatura. Estos problemas se pueden ver en el Apéndice 1.

Algunas dificultades, en el estudio previo, observadas en los alumnos son:

- tenían muy poca experiencia (o nula) en la solución de problemas,
- no comprendían el planteamiento de la razón y de la proporción,
- no sabían determinar la ordenada al origen y la pendiente de una recta,
- tenían dificultades en realizar operaciones aritméticas y algebraicas elementales.

Con base en lo expresado anteriormente, algunas consideraciones con las que se diseñó la secuencia didáctica son:

- serie de problemas para la comprensión del concepto de razón o coeficiente de proporcionalidad,
- problemas para la comprensión de la proporcionalidad,
- problemas en el ámbito puramente matemático (ejercicios), para la compresión de: pendiente, ordenada al origen, ecuación y gráfica lineal,
- problemas reales e hipotéticos.

5.3.2 Perspectiva del conocimiento

Para diseñar una secuencia didáctica en la cual los estudiantes aprendan funciones lineales, desarrollen un proceso metacognitivo y las subcompetencias de modelización, se consideró el diseño de una serie de tareas, de tal forma que los estudiantes:

- aprendan funciones lineales, identificándolas en las representaciones verbal, tabular, gráfica y algebraica y puedan realizar la transición entre éstas,
- sean capaces de resolver ejercicios matemáticos, problemas hipotéticos y reales,
- desarrollen las subcompetencias de modelización y solución de problemas,
- desarrollen un proceso metacognitivo productivo.

Según Stillman (2011), para desarrollar un proceso metacognitivo en los estudiantes, el profesor puede: i) en el diseño y planeación de tareas y actividades, plantear algunas preguntas para provocar la reflexión, ii) estar alerta en las decisiones y acciones en el momento del trabajo de modelización.

Para la intervención del profesor, en el momento de la solución de problemas, se consideraron los siguientes señalamientos:

- Según Blum (2011), las intervenciones estratégicas suelen ser las más adecuadas, es decir, intervenciones que dan pistas a los estudiantes a un meta nivel: "¡Imagínense la situación!", "¿A qué se dirigen?", "¿Hasta dónde han llegado?", "¿Qué falta todavía?", "¿este resultado se ajusta a la situación real?", etc.

Por otro lado, se han considerado algunos señalamientos del estudio llevado a cabo por Stillman (2004), donde se encuentran algunas estrategias, mostradas en el capítulo anterior, que se usaron para promover el acceso a las tareas de aplicación, a continuación, solamente se señalan los títulos.

- *Para beneficiarse respecto a la memoria.* Tareas similares.

- *Que benefician las condiciones de percepción.* Reconocimiento de señales matemáticas (signos, fórmulas, literales…).
- *Para promover el compromiso.* Preguntas para situar al alumno en el contexto de la tarea.
- *Para superar los problemas relacionados con el lenguaje.* Relectura.
- *Para superar los problemas de representación.* Centrar la atención en lo importante de la tarea.
- *Para superar problemas organizacionales.* Aplicación de estrategias cognitivas y metacognitivas.
- *Para superar problemas específicos de la tarea.* Cuando las matemáticas no son obvias.

En los ejercicios matemáticos, la intervención del profesor se dirige más hacia lo cognitivo, es decir, instrucciones que apoyen la solución de los ejercicios matemáticos. Como se señala en la descripción de las tareas, siguiente apartado, en algunas de ellas se programa un apoyo metacognitivo y en otras un apoyo cognitivo.

Igualmente se enfatiza que, debido a que los estudiantes se encuentran en el proceso de construcción del conocimiento de funciones lineales, se tiene previsto proporcionar apoyo del tipo cognitivo: con indicaciones, ejemplos, enseñanza de procedimientos, etc.

5.3.2.1 Programación de problemas hipotéticos, reales y ejercicios matemáticos

Como se puede observar en esta investigación, se decidió trabajar con problemas hipotéticos, reales y ejercicios matemáticos. Esto es por las siguientes consideraciones.

- Los alumnos no tienen experiencia en solución de problemas, por lo que se requiere que empiecen a adquirir dicha experiencia.
- Ejercicios matemáticos, los alumnos requieren desarrollar habilidades matemáticas.
- Problemas hipotéticos, para desarrollar la matematización y solución de problemas, además de vincular las matemáticas a diferentes contextos.
- Problemas reales, para desarrollar las subcompetencias de modelización.

5.3.2.2 Descripción de tareas para la adquisición del conocimiento

A continuación, se describen las tareas para el aprendizaje de funciones lineales, problemas de modelización, hipotéticos y ejercicios matemáticos.

Las tareas se han dividido en dos bloques: i) razón de cambio, coeficiente de proporcionalidad, proporciones, ii) función lineal, pendiente, ordenada al origen, gráficas y ecuaciones.

- Se trabaja primeramente el concepto de razón y proporcionalidad y posteriormente se trabaja la función lineal como lo señala Freudenthal (2002).
- En algunos problemas se programan instrucciones de apoyo cognitivo, es decir, apoyar a los estudiantes en la comprensión de los conceptos matemáticos y en procedimientos.
- En otros problemas se programaron preguntas para motivar el proceso metacognitivo.

Los formatos de las tareas con los que trabajan los alumnos se muestran en el Apéndice 1. Dichos formatos fueron impresos y se entregaron en hojas de papel a cada uno de los alumnos, de tal forma, que los alumnos tuvieron el material de trabajo disponible para dedicarse a la solución

de problemas. Se ha decidido mostrar estos formatos para que estén a disposición de los docentes que estén interesados en hacer uso de ellos.

A continuación, se presenta una descripción de cada tarea, con sus propósitos para la construcción del conocimiento de las funciones lineales con modelización y solución de problemas.

5.3.2.2.1 Bloque de tareas 1. Razón de cambio, proporciones.

Se recomienda al lector revisar los formatos de las tareas que se encuentran en el Apéndice 1, para una mejor comprensión de los siguientes párrafos.

Tarea 1. Problema hipotético. Tarifas de telefonía

El propósito de este problema es introducir al alumno en las representaciones de las funciones lineales en un contexto determinado. Este problema es guiado por preguntas e instrucciones, de tal forma que el alumno vaya reflexionando y resolviendo los cuestionamientos.

Se trata del costo de servicio telefónico de dos compañías. En este problema, el costo es una función lineal de los minutos de llamada consumidos. Para una compañía el costo es solamente por minutos consumidos. La otra compañía cobra una tarifa mensual más un costo adicional por cada minuto consumido. El alumno tiene que llenar dos tablas de valores, trazar las dos gráficas, determinar las ecuaciones de las funciones y, decidir cuál de las dos compañías es preferible "económicamente" contratar.

Metodología

El problema está diseñado, pregunta por pregunta, para guiar al alumno a través del llenado de la tabla de valores, trazo de la gráfica, identificación de razones de cambio, ordenadas al origen, y determinación de la ecuación.

Se prevé proporcionar apoyo cognitivo en los cálculos de las tablas de valores, en el trazo de gráficas, en la determinación de escalas en los ejes, en la determinación de las ecuaciones, en la interpretación de las pendientes y las ordenadas al origen.

Tarea 2. Problema para modelizar. Consumo de agua en la ducha

El propósito de este problema es que los alumnos modelicen la situación, y trabajen las etapas de comprensión, matematización, y solución de problemas matemáticos. El alumno trabaja con el concepto, factor de proporcionalidad o razón de cambio, consumo de agua por unidad de tiempo.

Se trata de determinar la cantidad de agua que una persona gasta en bañarse, dependiendo del tiempo que tarda. Para resolver el problema los alumnos deberán, experimentalmente, determinar la cantidad de agua que se gastan en la ducha por unidad de tiempo. La estrategia para esta actividad quedará determinada por los alumnos. Finalmente, los alumnos reportan el gasto volumétrico: “cantidad de litros por unidad de tiempo”.

En este problema se programaron las siguientes preguntas para motivar la reflexión, apoyo cognitivo y metacognitivo: ¿Cómo determinar el flujo de agua que se toma como referencia? Si una persona tarda en bañarse media hora, ¿qué cantidad de agua consume? Con estas preguntas se motiva a reflexionar a los estudiantes en el cómo será su proceder para determinar la información que se necesita en el problema.

Tarea 3. Problemas hipotéticos. Razón entre dos magnitudes en distintos contextos

El propósito de esta tarea es que los alumnos comprendan que, en un contexto determinado, la razón entre dos magnitudes indica el valor de una cantidad con respecto a la otra.

Se muestran cinco situaciones para determinar una razón: i) personas que gustan del beisbol y personas que no, ii) estudiantes de ingeniería hombres respecto a mujeres, iii) la altura de la maqueta de un edificio y la altura real del edificio, iv) cuadrados sombreados respecto a cuadrados sin sombrear, v) esferas amarillas respecto a esferas azules.

El profesor explica a los estudiantes lo siguiente. La razón entre dos magnitudes "a" y "b" se puede escribir de dos formas, además es posible realizar una división y considerar su resultado.

Razón	$a: b$ o bien $\frac{a}{b}$
Operación y resultado	$a \div b = R$

Donde R es un número racional.

Así mismo, el profesor expone y explica el primer problema.

Tarea 4. Problema real. Densidad de algunas sustancias

Los propósitos de esta tarea son, que el alumno reconozca que la razón del peso de una sustancia entre su volumen es llamada "densidad" y es una propiedad que las caracteriza; que el alumno, determine la densidad de nueve diferentes sustancias, y comparare el peso de dos diferentes parejas de sustancias a un volumen determinado; que el alumno reflexione sobre el significado de la densidad.

Metodología

Se proporcionan el peso en Kg y el volumen en litros de nueve diferentes sustancias, para que el alumno determine la densidad de cada una. Posteriormente debe contestar dos preguntas de comparación.

El tipo de apoyo que se programa en este problema es de dos formas. Apoyo cognitivo en el cálculo de las razones. Apoyo reflexivo, en discusión grupal acerca de las preguntas comparativas de los pesos de las sustancias a volúmenes iguales.

Tarea 5. Problema hipotético. Pendiente de una rampa

El propósito de esta tarea es que el alumno determine y reflexione la "razón de cambio" o pendiente.

Se presenta la situación de construir una rampa para silla de ruedas. La rampa deberá tener una altura de 80 cm y se proponen tres largos diferentes. El alumno debe determinar las razones entre la altura y el largo, además determinar cuál es la razón que ofrece mejores condiciones para subir por la mencionada rampa.

Nuevamente el apoyo programado es el siguiente. Apoyo cognitivo en los cálculos de las razones, y en discusión grupal para que los alumnos determinen, qué pendiente ofrece mejores condiciones para subir.

Tarea 6. Problema hipotético. Bomba de gasolina

Los propósitos de esta tarea son que el alumno, determine el gasto volumétrico de una bomba de gasolina, complete una tabla de valores, trace una gráfica lineal y reflexione acerca de la "pendiente" como la inclinación de la gráfica.

Metodología

Se proporcionan los datos de una bomba, litros vertidos por unidad de tiempo. Se proporcionan indicaciones para que el alumno vaya contestando: determine el gasto volumétrico de una bomba de gasolina, complete una tabla de valores entre tiempo y litros vertidos, trace una gráfica, y reflexione acerca del coeficiente de proporcionalidad (gasto volumétrico) y su representación en la gráfica.

El apoyo programado es cognitivo, en la identificación del gasto volumétrico gráficamente (inclinación).

Tarea 7. Problema hipotético. Distancias iguales en tiempos iguales

Los propósitos de esta tarea son que el alumno continue reflexionando respecto al cálculo de la razón de cambio y su significado, el llenado de una tabla de valores, el trazo de una gráfica lineal.

Se plantea la situación de un tren en movimiento a velocidad constante. El alumno debe determinar la rapidez, completar una tabla de valores, trazar la gráfica y reflexionar acerca de la rapidez y su representación en la gráfica.

En esta tarea se programa un apoyo cognitivo en la identificación de la rapidez gráficamente.

Tarea 8. Problema real. La experiencia en el Bungee

El propósito de esta tarea es que el alumno resuelva un problema de modelización. Desde la comprensión, experimentación, matematización, resolución de problemas matemáticos, interpretación de resultados, hasta la comprobación y validación.

Metodología

La longitud de caída de una muñeca sujeta por una serie de ligas es proporcional al número de ligas que se coloquen. Los alumnos que trabajan en equipo deben: comprender el problema y determinar un método de experimentación, comprender que la longitud de caída depende del número de ligas colocadas, determinar un factor de proporcionalidad y, calcular el número de ligas para una caída de 4.3 metros de longitud. Se utiliza esta longitud porque es la altura del pasamanos del barandal del primer piso del edificio, donde se ubica el salón de clase, al suelo.

Como apoyo cognitivo y metacognitivo se pueden realizar las siguientes preguntas, ¿Cuánto aumenta la caída por cada liga que se añade? Si se consideran las variables, la longitud de caída y el número de ligas, ¿la longitud de caída depende del número de ligas? ¿Cómo podemos determinar un factor de proporcionalidad? Y, por otro lado, mostrar concretamente el experimento.

El profesor supervisará una discusión grupal para que los alumnos establezcan las actividades para llevar a cabo el experimento. Así mismo deberá supervisar a los estudiantes en la determinación del factor de proporcionalidad.

Tarea 9. Problemas hipotéticos. Problemas de Proporción directa

El propósito de esta tarea es que el alumno comprenda y practique las proporciones directas, dadas las condiciones de distintos contextos, debe usar la proporción:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

También debe resolver la ecuación con la regla matemática, “medios por medios y extremos por extremos”.

Por otro lado, es un propósito que el alumno tenga las herramientas necesarias para resolver el problema real de la siguiente tarea 10.

Se presentan seis problemas de proporción. El primero consiste en un mapa indicando su acotación y, se preguntan tres distancias “reales” entre diferentes ciudades, es decir el alumno debe realizar tres proporciones, las cuales consisten en determinar la distancia real a partir de la distancia del mapa.

En los otros cinco problemas se plantean proporciones en distintos contextos: la habilidad de dos vendedores, un reloj que se adelanta, un automóvil con su consumo de gasolina, una relación de género, una conversión entre horas minutos y segundos. Aunque estos cinco problemas se resuelven con el mismo procedimiento matemático, consideramos que la comprensión del contexto es diferente en cada uno, así que podemos nombrarlos problemas de repetición.

Se programa un apoyo cognitivo, en el planteamiento y solución de la proporción.

Tarea 10. Problema para modelizar. Zapatos de Gigante (Blum, 2011)

El propósito de este problema es que el alumno resuelva un problema de modelización, y que continue trabajando con las subcompetencias: comprensión del problema, matematización, resolución de problemas matemáticos y comprobación.

Se proporcionan las dimensiones de un par de zapatos, los cuales son los más grandes del mundo (5.29 m de largo). La pregunta es ¿Cuál sería la altura de un gigante para calzarlos? Si bien la solución del problema requiere de una proporción, las dificultades se pueden presentar en la comprensión del problema, en idear una forma de tomar medidas de referencia y en las unidades de longitud empleadas.

Como acciones para provocar la reflexión se programan: realizar las siguientes preguntas, ¿Cómo podemos tomar una medida de referencia? O Preguntar a un alumno, ¿Cuál es tu altura y número de calzado? Como se espera que los alumnos no tengan experiencia en solución de problemas, menos aún donde hacen falta datos. Se proponen las preguntas anteriores, para orientar a los alumnos y provocar su reflexión.

Por otro lado, se pueden evitar dificultades respecto a las unidades de medición, indicando a los alumnos que la longitud de los zapatos del gigante la expresen en centímetros, el calzado de referencia también en centímetros y la altura de referencia en metros. Sin embargo, esta situación bien la pueden analizar y resolver los mismos alumnos.

Tarea 11. Problema hipotético. Resorte y su carga

El propósito de este problema es que el alumno sea capaz de determinar el coeficiente de proporcionalidad y la "ordenada al origen", así mismo que determine una ecuación lineal, en el contexto y, determine una predicción.

Se indica la longitud inicial de un resorte, que al aplicarle un peso 8 Kg se estira hasta una longitud determinada. Con los datos que se proporcionan el alumno puede determinar el coeficiente de proporcionalidad y la longitud del resorte cuando no tiene carga. Además, el alumno deberá de determinar la longitud del resorte para dos cargas diferentes. Así mismo deberá determinar la ecuación lineal de elasticidad del resorte.

Como apoyo para reflexionar se proponen las siguientes preguntas para la comprensión del problema y su solución: ¿Cuál es la longitud del resorte cuando no se le aplica carga alguna? ¿Cuánto se alarga el resorte con el peso de 8 Kg? ¿Cuál es el factor de proporcionalidad? Estas

preguntas son para provocar la comprensión del problema y el alumno pueda hacer una estrategia para la solución. También se puede apoyar con la recomendación de elaborar una tabla de valores con los pesos y el alargamiento del resorte, esto se considera una guía para encontrar las respuestas.

Tarea 12. Problema hipotético. Servicio de taxi por aplicación

El propósito de este problema es que el alumno siga trabajando con las conexiones de funciones lineales en contextos diferentes, en este caso con un problema hipotético de servicio de taxis.

El problema consiste en definir económicamente, cuándo es mejor contratar una compañía que otra. Una de las compañías cobra un monto en pesos por kilómetro recorrido, la otra compañía cobra una tarifa inicial más otra cantidad por kilómetro recorrido. El problema está estructurado de tal forma que el cobro es una función lineal con respecto a los kilómetros recorridos. Existe una distancia donde las dos compañías cobran la misma cantidad, de tal forma que: antes de esa distancia es mejor contratar una compañía y, después la otra compañía.

Como apoyo cognitivo y metacognitivo se pueden realizar las siguientes preguntas, ¿el cobro depende de los kilómetros recorridos? ¿Qué información nos puede dar una tabla de valores? ¿A los cuantos kilómetros recorridos las dos compañías cobran la misma cantidad?

5.3.2.2.2 Bloque de tareas 2. Función lineal

Tarea 13. Problema hipotético, consumo de petróleo

El propósito de esta tarea es que el alumno observe, reflexione y comprenda una forma de solución de un problema de función lineal con un buen número de conexiones entre los elementos matemáticos y el contexto. El profesor expone y explica.

El problema consiste en el consumo de petróleo de un depósito de calefacción. Se considera que dicho consumo es una función lineal del tiempo en días. En este contexto, el profesor puede ilustrar: i) la variable independiente y dependiente, ii) tabla de valores y gráfica de la función, iii) cantidad de petróleo cuando el tanque está lleno (ordenada al origen), iv) cantidad de petróleo que se gasta diariamente (pendiente), v) ecuación de la función, vi) la frecuencia de llenado del depósito si se recarga cuando se encuentra a 700 litros de su capacidad.

Tarea 14. Problemas hipotéticos. Variable independiente y dependiente

El propósito de esta tarea es que los alumnos comprendan la covariabilidad y determinación de las variables independiente y dependiente en diferentes contextos hipotéticos.

Se describen cinco contextos diferentes: i) el alargamiento de un resorte cuando soporta una carga, ii) el costo del servicio telefónico que depende del tiempo de llamada, iii) el crecimiento de una población con respecto al tiempo, iv) el costo de agua dependiendo de su consumo, v) la presión atmosférica disminuye dependiendo de la altura. Los alumnos de forma individual y por discusión grupal determinarán, para cada caso, la variable independiente y dependiente.

Como apoyo cognitivo, se propone preguntar a los alumnos qué variable depende de la otra, para cada caso e, indicar que "y" depende de "x".

Tarea 15. Problema matemático (ejercicio). Tabulación y graficación de la función lineal

Metodología

El propósito de esta tarea es que los alumnos transiten por las representaciones algebraicas, tabulares y graficas de dos funciones lineales.

Se presentan dos funciones lineales:

$$\text{Función 1} \quad y_1 = 2x - 1$$

$$\text{Función 2} \quad y_2 = -2x + 2$$

En una tabla, se proporcionan valores para "x", el alumno deberá determinar los correspondientes valores para "y". Además, se deberá de trazar la gráfica correspondiente. Luego de que el alumno realice dichas actividades se hacen dos preguntas para motivar su reflexión, de las siguientes consideraciones: cuando el coeficiente de "x" es positivo, la inclinación de la recta es hacia arriba, cuando el coeficiente es negativo la inclinación es para abajo y, con tan sólo dos puntos se puede trazar una recta.

Como apoyo cognitivo se programa indicar que los alumnos que comparen las inclinaciones de las gráficas con las ecuaciones correspondientes.

Tarea 16. Ejercicios matemáticos. Localización de puntos sobre línea recta

El propósito de esta tarea es verificar que el alumno sea capaz de determinar las coordenadas de un punto en el plano cartesiano.

Se muestra un plano cartesiano con dos rectas, en cada recta se resaltan dos puntos, el objetivo es que el alumno determine las coordenadas de dichos puntos.

Metodología

El profesor observa el trabajo de los alumnos y, en caso de dificultades, ofrece apoyo cognitivo.

Tarea 17. Ejercicios matemáticos. Representaciones tabulares, gráficas y algebraicas

Los propósitos de esta tarea son: retomar el llenado de tablas de valores de funciones lineales, determinación de la pendiente con la fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Además de la determinación de la ordenada al origen gráficamente como el cruce de la recta con el eje "y", y la determinación de la ecuación de la recta a partir de la gráfica.

Se presentan cinco funciones en su representación tabular. El alumno deberá de completar las tablas de valores, trazar la gráfica, determinar la pendiente, la ordenada al origen gráficamente y, determinar la ecuación para cada caso.

El profesor resuelve y explica el primer ejercicio. En esta explicación, deberá señalar las siguientes conexiones:

Dada la ecuación: $y = mx + b$

"y" es la variable dependiente,

"x" es la variable independiente,

"m" es la pendiente, factor de proporcionalidad o razón de cambio,

"*b*" es la ordenada al origen, el valor de la variable dependiente cuando la variable independiente es cero.

El alumno resuelve los otros cuatro ejercicios. El ejercicio número 3, no corresponde a una función lineal, la gráfica corresponde a una función cuadrática, esto es motivo para señalar al estudiante que los elementos de funciones lineales solamente se aplican cuando la gráfica es una línea recta.

Los problemas (ejercicios), 2, 4 y 5, se consideran como de repetición para motivar la automatización de los cálculos. El apoyo cognitivo es en los procedimientos de cálculo.

Tarea 18. Ejercicios matemáticos. De la gráfica a la ecuación

El propósito de esta tarea es que el alumno sea capaz de transitar de la representación gráfica a la algebraica de una función lineal.

Se presentan cinco funciones lineales en su representación gráfica, en cada función se resaltan dos puntos, para que sean considerados en el cálculo de la pendiente. En las representaciones gráficas de las funciones se puede localizar y determinar el punto de intersección de la gráfica con el eje de las ordenadas, la ordenada al origen. Con los valores determinados, el alumno debe escribir la ecuación de cada función.

El profesor explica el problema (ejercicio), número 2, de los cinco, los alumnos atienden la exposición y posteriormente trabajan con los otros cuatro, primeramente, en forma individual y luego en equipo. En la explicación, el profesor hace énfasis en, las operaciones, la identificación de la ordenada al origen y en la escritura de la ecuación:

$$y = mx + b$$

Tarea 19. Ejercicios matemáticos. Determinación de la ecuación y cálculo de coordenadas

Los propósitos de esta tarea son que el alumno: transite de la representación tabular, a la gráfica y a la algebraica de las funciones lineales, así mismo, que sea capaz de determinar algebraicamente la ordenada de un punto de la función cuando se conoce su abscisa o viceversa (predicción).

Se presentan tres problemas (ejercicios), en el ámbito puramente matemático. Para cada problema, se presenta una tabla que contine dos parejas ordenadas de una función lineal. El alumno debe, identificar las variables, trazar una gráfica, determinar la pendiente algebraicamente, determinar la ordenada al origen gráficamente, y determinar la representación algebraica de la función. Además, se realizan dos preguntas adicionales, determinar la ordenada de un punto cuando se conoce su abscisa y, con otro punto, determinar la abscisa cuando se conoce la ordenada.

El profesor expone y explica el problema 2. Las acciones de apoyo para esta tarea son: primeramente, observar a los estudiantes e identificar sus dificultades para brindarles el apoyo mínimo necesario. Este apoyo puede ser, brindar una orientación para el cálculo de la pendiente, la determinación de la ordenada al origen y la determinación de la ecuación. Para el cálculo de las coordenadas solicitadas, el apoyo es guiarlos para que lo realicen algebraicamente.

Cabe señalar que los problemas de esta tarea están enfocados, básicamente, para que el alumno aprenda a usar las “herramientas matemáticas” de funciones lineales que se utilizarán en los dos problemas reales que siguen a continuación (Stillman, 2004). Es decir, en este caso,

primeramente, se trabajan las conexiones en el ámbito puramente matemático y posteriormente se trabajan las conexiones necesarias para dos contextos diferentes.

Tarea 20. Problema real. Tiempos de oro olímpico

El propósito de esta tarea es que el alumno sea capaz de modelizar un problema real. El alumno debe ser capaz de: i) comprender el problema, ii) matematizar, identificar las variables, trazar una gráfica, iii) solución de problemas matemáticos, determinar la ecuación, y una predicción, iv) interpretar y comprobar sus resultados.

El problema consiste en que los tiempos de las ganadoras de los 200 metros planos, para mujeres en las olimpiadas tienen una tendencia lineal, en el intervalo de tiempo mostrado. Se proporcionan dos parejas de datos, año de la olimpiada y récord de la ganadora. El alumno deberá determinar (predecir) el tiempo de la ganadora para el año de 2028.

Como apoyo cognitivo y metacognitivo, se programan las siguientes preguntas: Según los datos, ¿el tiempo de la ganadora depende del año de la olimpiada? ¿Qué datos podemos obtener de una gráfica? En el problema, ¿qué significan la ordenada al origen y la pendiente? Básicamente son preguntas para provocar la comprensión del problema y la matematización (Stillman, 2004).

Tarea 21. Problema real. Escalas de temperatura

El propósito de esta tarea es, nuevamente, que el alumno sea capaz de modelizar un problema real.

El problema consiste en modelizar la conversión de las escalas de temperaturas Fahrenheit y la escala Celsius. Determinar una ecuación de conversión, calcular algunas conversiones de grados centígrados a grados Fahrenheit y viceversa.

Algunas acciones cognitivas-metacognitivas son: indicar a los estudiantes que una escala puede ser la variable independiente "x" y la otra escala la dependiente "y". Con los datos indicados, ¿se puede hacer una gráfica? ¿Cómo interpretarías una gráfica? ¿Se puede obtener una ecuación a partir de una gráfica? (Stillman, 2004).

5.3.2.3 Clasificación de problemas según su propósito

De acuerdo con la clasificación de problemas por sus propósitos, mostrada en el capítulo anterior, en la tabla siguiente se presenta la clasificación de los problemas de esta investigación.

Tabla 5.1. Clasificación de problemas por propósitos en esta investigación, según Blanco (1993).

	Tipos de problemas	Tareas
1	Para presentación de contenido.	1, 3, 5, 13, 17, 18, 19.
2	Reconocimiento de un concepto.	2, 4, 8, 9, 10, 11, 14, 15, 16,
3	De traducción simple	4, 5, 11, 20, 21.
4	De repetición-ejercicios	3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 18, 19.

5.3.2.4 Subcompetencias trabajadas por tarea

A continuación, se muestra un resumen de cada una de las subcompetencias trabajadas de manera específica, en las tareas del ambiente de aprendizaje.

Con base en el marco emergente de Stillman *et al* (2007), en esta investigación se han definido las siguientes "acciones", para considerar que los alumnos realizan las subcompetencias requeridas en la solución de problemas.

- Comprensión del problema: planeación de una estrategia, obtener información que no se especifica en la redacción del problema, determinar la dependencia de las variables.
- Matematización: determinación de las variables independiente y dependiente y, elaboración de tabla de valores.
- Solución de problemas matemáticos: trazo de gráfica, determinación de la ordenada al origen, razón entre dos magnitudes, pendiente o factor de proporcionalidad, determinación de representación algebraica de la función, determinación de las coordenadas de un punto (predicción).
- Interpretación de resultados: una respuesta congruente a la pregunta, ¿Por qué considera que se resolvió el problema correctamente?
- Comprobación, de resultados y procedimientos.

Tabla 5-2. Subcompetencias y su trabajo a lo largo de las tareas

1 Comprensión del problema	La comprensión del problema, y la planeación de una estrategia aplica para todas las tareas. Obtener información que no se especifica en el problema: tareas 2, 8 y 10. La variabilidad y la dependencia de las variables se trabaja en las tareas: 2, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 20 y 21.
2 Matematización	Determinación de variables dependiente e independiente: en las tareas 1, 6 y 7, se definen en el formato; en las tareas 11, 14, 20 y 21, los alumnos las deben determinar. Elaboración de tabla de valores. Tareas 1, 6, 7, 12, 15, 17, 19, 20, y 21.
3 Solución de problemas matemáticos	Trazo de gráfica: tareas 1, 6, 7, 15, 17, 19, 20 y 21. Determinación de la ordenada al origen: tareas 1, 13, 17, 18, 19, 20 y 21. Determinación de razón, factor de proporcionalidad o pendiente: tareas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 17, 18, 19, 20 y 21. Determinación de la ecuación: tareas 1, 11, 17, 18, 19, 20 y 21. Determinación de coordenadas de un punto (predicción): tareas 17, 19, 20 y 21.
4 Interpretación de resultados	Se considera que la interpretación de resultados debe ser motivo de trabajo en todos los problemas.
5 Comprobación	Se considera que la comprobación de resultados intermedios y finales deben ser motivo de trabajo en todos los problemas. En la Tarea 8 los estudiantes tienen oportunidad de comprobar los resultados de manera concreta y en la Tarea 21 en tablas que se encuentran en Google.

Cabe señalar que, en esta investigación, se reconoce como comprensión del problema cuando el alumno, determina una estrategia plausible, selecciona o investiga los datos necesarios para la solución y, determina la dependencia de las variables.

Las 21 tareas para el aprendizaje de funciones lineales con solución de problemas y modelización corresponden a la segunda etapa de la implementación de esta investigación. Se trabajaron en 12 sesiones de clase, donde los alumnos trabajaron en hojas que contenían los problemas y ejercicios, así mismo se tomaron videos cuando los alumnos trabajaron en equipo, como se describirá párrafos adelante.

5.3.3 Perspectiva de Evaluación

Es de interés evaluar a los estudiantes en todo el proceso: al inicio, durante y después de la aplicación práctica.

- Evaluación diagnóstica, problema inicial:
    - Conocimientos previos.
- Evaluación formativa:
    - Aprendizaje de funciones lineales y el desarrollo de la competencia de modelización y sus subcompetencias (trabajo en tareas).
    - Desarrollo del proceso metacognitivo (videos).
    - Así mismo, se registran las intervenciones del profesor, para observar la eficiencia en los apoyos cognitivos/metacognitivos (videos).
- Evaluación sumativa:
    - Aprendizaje de funciones lineales y la competencia de modelización con sus subcompetencias, problema final.

- El desarrollo del proceso metacognitivo de los estudiantes (entrevista).

5.3.3.1 Descripción de instrumentos de investigación, problema inicial y final

Se ha considerado un problema hipotético para el inicio y el final, pero en diferentes contextos, esto es, para contar con algunos datos cuantitativos al inicio y al final de la implementación del ambiente de aprendizaje. En estos problemas se trata de observar si los alumnos pueden: i) comprender el problema e identificar la variabilidad de este, ii) determinar las variables independiente y dependiente, iii) realizar el tránsito de representaciones de la función, iv) determinar una predicción, v) responder las preguntas del problema y, vi) interpretar los resultados.

Como se puede apreciar, las subcompetencias que se pretenden observar son: comprensión, matematización, resolución de problemas matemáticos e interpretación de resultados.

A continuación, se presentan los problemas, las preguntas planteadas con las subcompetencias que entran en juego para resolverlas. Los formatos con los que trabajan los alumnos se presentan en el Apéndice 2.

Problema inicial. Hipotético.

> Una empresa telefónica cobra mensualmente una cantidad fija, más otra cantidad por cada minuto utilizado en llamadas. En los últimos dos meses los recibos señalan los siguientes datos:

Tabla 5-3. Valores en el problema inicial

Número de minutos	0	70
Importe facturado	$302.50	$365.50

Pregunta 1. Comprensión. Responde verdadero o falso, según sea el siguiente enunciado, explica tu respuesta.

“De acuerdo con los datos mostrados: los minutos utilizados dependen del importe facturado”.

Pregunta 2. Matematización. De acuerdo con los datos mostrados: ¿Cuál es la variable independiente y cuál es la variable dependiente? Explica tu respuesta.

Pregunta 3. Matematización. Elabora una tabla de valores y traza una gráfica.

Pregunta 4. Solución de problemas matemáticos. ¿Cuánto es el importe facturado cuando no se utilizan minutos de llamada? En la gráfica de una función lineal, ¿Cómo se llama a este punto?

Pregunta 5. Solución de problemas matemáticos. Con los datos proporcionados, determina el factor de proporcionalidad o pendiente.

Pregunta 6. Solución de problemas matemáticos. Escribe la representación algebraica (ecuación) de la función.

Pregunta 7. Solución de problemas matemáticos. ¿Qué importe se pagará si se consumen 500 minutos?

Pregunta 8. Interpretación de resultados. Explica por qué piensas que resolviste el problema correctamente.

Problema final. Hipotético.

En promedio, un bebé pesa 2.9 Kg al nacer y, cuatro años más tarde el peso del niño es de 15.5 Kg. Suponga que el peso en la infancia esté linealmente relacionado con la edad en años

Tabla 5-4. Valores del problema final

Edad (años)	0	4
Peso (Kg)	2.9	15.5

Pregunta 1. Comprensión. Contesta verdadero o falso según sea el siguiente enunciado. Explica tu respuesta.

“De acuerdo con el enunciado del problema, la edad depende del peso”.

Pregunta 2. Matematización. De acuerdo con los datos mostrados: ¿Cuál es la variable independiente y cuál es la variable dependiente? Explica tu respuesta.

Pregunta 3. Matematización. Elabora una tabla de valores y traza una gráfica.

Pregunta 4. Solución de problemas matemáticos. ¿Cuánto pesa en promedio un bebé al nacer? En la gráfica de una función lineal, ¿Cómo se llama a este punto?

Pregunta 5. Solución de problemas matemáticos. Con los datos proporcionados, determina el factor de proporcionalidad o pendiente.

Pregunta 6. Solución de problemas matemáticos. Escribe la representación algebraica (ecuación) de la función.

Pregunta 7. Solución de problemas matemáticos. Cuando el niño tenga 7 años, ¿qué peso tendrá?

Pregunta 8. Interpretación de resultados. Explica por qué piensas que resolviste correctamente el problema.

Con los instrumentos presentados anteriormente, como se puede observar, se pretende conocer los conocimientos de los estudiantes de funciones lineales, trabajados en un problema hipotético y con las preguntas que corresponden a la subcompetencias de modelización y solución de problemas.

5.3.4 Perspectiva de comunidad, normas de trabajo en la investigación

A continuación, se indican los materiales de trabajo, la forma de trabajo individual y en equipo colaborativo, la formación de equipos, la forma en que los estudiantes reportan las tareas y responden las entrevistas.

5.3.4.1 Materiales de trabajo

A lo largo de las sesiones se trabajó en el salón de clase y en el horario escolar correspondiente al grupo. Se repartió a cada alumno las tareas impresas, ver Apéndice 1. Los alumnos contaron con: lápiz, hojas de papel, calculadora, etc.

5.3.4.2 Dinámicas de trabajo individual y en equipo

Según Bransford *et al* (1999), las normas son importantes para el trabajo dentro de la comunidad del salón de clases. En esta investigación, las tareas se trabajan en forma individual y

por equipo. Los cuestionamientos y propósitos de una tarea individual se trabajan enseguida en equipo. Posteriormente se comunican y se analizan los resultados en discusión grupal.

Trabajo individual. En el trabajo individual, el alumno tiene un momento de reflexión y va contestando los cuestionamientos. Como su nombre lo indica, este trabajo es estrictamente individual y no puede comunicarse con sus compañeros. En la Tabla 5.5., se muestran la generalidad de actividades que realizan el profesor y los alumnos en las tareas individuales.

La tarea individual antecede a la tarea en equipo, a fin de que el estudiante se prepare para su participación, en el equipo, con argumentos, procedimientos, resultados o, inclusive con dudas.

Tabla 5-5. Actividades coordinadas del profesor y los alumnos en trabajo individual

Profesor *Cognitivo y metacognitivo*	Alumnos Cognitivo y metacognitivo
Observa el trabajo de los alumnos. *Detecta las dificultades (situaciones de bandera roja).* *Evalúa los resultados que van obteniendo.* *Analiza las preguntas de los estudiantes.*	Reflexiona y analiza. Recuerda algunas estrategias. Selecciona una estrategia. Aplica la estrategia seleccionada. Produce respuestas a situaciones de bandera roja. Muestra su trabajo al profesor. Cuando es necesario, pregunta.
Apoyo con cuestionamientos y con indicaciones para motivar la reflexión y la asimilación de conceptos. Apoyo cognitivo y metacognitivo	Reflexión, análisis, aprendizaje cognitivo y metacognitivo.

5.3.4.3 Formación de equipos.

Tomando en consideración los señalamientos de Abrahamson *et al* (2005) en López (2014), expuestos en el apartado anterior. Para el presente estudio de investigación, se forman dos equipos de cuatro estudiantes. Un equipo con estudiantes de alto rendimiento y, el otro con estudiantes de bajo rendimiento.

Metodología

Para formar los equipos es necesario conocer el rendimiento académico de los alumnos. La presente investigación se realiza a la séptima semana del primer semestre de bachillerato. Los temas que se trabajan previamente a la presente investigación son: operaciones con números racionales y ecuaciones lineales.

Con el trabajo académico y los resultados obtenidos en las primeras seis semanas, el profesor determina el rendimiento académico de los estudiantes. Dicho nivel académico está determinado por:

- asertividad en la operatividad de los alumnos,
- participación en clase con respuestas bien estructuradas,
- la disposición para el trabajo.

Los equipos de trabajo colaborativo se forman de acuerdo con lo siguiente.

Equipo 1. Cuatro alumnos de alto rendimiento.

Equipo 2. Cuatro alumnos de bajo rendimiento.

De esta forma, se espera que los equipos trabajen de forma homogénea. Que los integrantes de cada equipo trabajen al mismo ritmo. Aunque se prevé que el equipo de alumnos de mejor rendimiento trabaje más rápido y más eficiente que el otro. Cuando se hayan formado los equipos no habrá cambios en sus integrantes.

Tarea en equipo. En el trabajo de equipo se fomenta el trabajo colaborativo para que unos aprendan de otros (Johnson y Johnson, 1999; Reyes, 1995). En este tipo de trabajo los alumnos tienen la oportunidad de comparar los procedimientos y resultados con sus pares; expresar sus

comentarios, argumentar sus respuestas, descubrir los errores de los demás y los suyos propios (evaluación propia formativa). Además, tienen oportunidad de discutir sus ideas.

El profesor observa el trabajo de los equipos y estimula la participación de todos los integrantes, dándoles libertad y supervisión al mismo tiempo (Blum, 2011). Para un buen desempeño del equipo, es importante que los alumnos comuniquen sus conocimientos, esto es para beneficio de ellos mismos y de los demás, independientemente que sean correctos, imprecisos e inclusive equívocos.

Según Reyes (1995), el trabajo se debe organizar en equipos para que los alumnos se apoyen entre ellos, verbalicen sus dudas inmediatamente y las resuelvan. Al explicar un alumno a otro la solución de un problema o ejercicio se beneficiará el que explica, al mismo tiempo que ayuda al segundo.

Según Stillman (2011), el profesor debe supervisar el progreso de los individuos o grupos, para intervenir estratégicamente sólo cuando sea necesario. Por lo tanto, el profesor debe evaluar y reflexionar acerca de las actividades cognitivas/metacognitivas de los estudiantes tanto dentro de la situación específica como con respecto a su papel en el proceso de modelización.

5.3.4.4 Estructura de las sesiones de trabajo

La estructura de las sesiones es la siguiente: i) saludo, introducción y organización, cada equipo ocupa una mesa distinta, ii) asignación de las tareas (hojas de papel impresas) para la sesión, iii) trabajo individual, iv) trabajo en equipo, v) exposición de procedimientos y resultados en discusión grupal.

Las tareas se trabajan de la siguiente forma:

- Lectura de las consignas de la tarea, procurando que la mayoría de los estudiantes comprendan lo que se pide.
- Trabajo individual hasta que la mayoría de los estudiantes lo terminen.
- Trabajo de equipo, hasta que la totalidad de los equipos hayan resuelto la tarea.
- Exposición grupal de un resultado satisfactorio (retroalimentación).

5.4 Entrevista y videos.

Según Freitas *et al* (2018), en la observación como técnica metodológica cualitativa se considera a los datos recabados (videos o grabaciones), como una evidencia de lo que sucede en la mente y el cuerpo de los individuos. Una variedad de estudios cuyo objetivo era mostrar el impacto de determinadas prácticas pedagógicas o planes de estudio, se han basado en métodos de observación (video), para documentar las experiencias de los estudiantes en el aula como evidencia del éxito de las intervenciones.

Según Freitas *et al* (2018), las entrevistas se usan a menudo como seguimiento de cuestionarios, ya que ofrecen una información más rica de la que puede ser obtenida solamente en dichos cuestionarios.

En general, las entrevistas se utilizan cuando el número de participantes es adecuado y cuando se requiere un análisis más profundo. Investigadores muy a menudo se basan en entrevistas cuando están comprometidos con la comprensión, intenciones, propósitos, valores, metas o significados que los participantes traen al contexto educativo.

5.4.1 Entrevista semiestructurada

Para dar un seguimiento al desarrollo del proceso cognitivo y metacognitivo de los alumnos, se realiza una entrevista al terminar el problema final.

Dicha entrevista tiene un enfoque semiestructurado, de manera que los estudiantes expresen sus experiencias y así poder analizar su proceso metacognitivo. Se citó a una sesión individual a cada uno de los estudiantes que participaron en el estudio. En esta sesión, el profesor y el estudiante tuvieron una conversación que duró aproximadamente 30 minutos. El formato de la entrevista quedó planteado como sigue:

El profesor expresa lo siguiente.

"El objetivo de esta entrevista es poder analizar la forma en que has trabajado en las sesiones de modelización matemática y solución de problemas de funciones lineales. Es importante que expreses a detalle las acciones que realizaste en tu trabajo y tus consideraciones".

Preguntas generales para las entrevistas:

Pregunta 1. Describe la forma en que resuelves los problemas.

Pregunta 2. Describe lo que piensas de la modelización matemática y solución de problemas.

Pregunta 3. Expresa tus experiencias positivas en este trabajo académico.

Pregunta 4. Comenta acerca de algún bloqueo en la solución de un problema, y cómo lo superaste.

Pregunta 5. ¿Te gustaría profundizar en alguna de tus respuestas?

5.4.2 Videos

Cuando los estudiantes se encuentren trabajando en equipo son filmados, se pretende grabar las acciones y diálogos que puedan ser más enriquecedores para la investigación: discusión de trabajo de equipos, exposición de resultados, la forma en que los alumnos se enfrentan a las dificultades, si las resuelven o no, etc. Como se mencionó anteriormente, también es de interés registrar la eficiencia de las intervenciones del profesor, al proporcionar los apoyos cognitivos/metacognitivos.

5.4.2.1 Forma de tomar los videos

Las herramientas tecnológicas utilizadas para este fin son, un teléfono inteligente y una Tablet. Cuando los alumnos van a trabajar en equipo, se coloca una herramienta tecnológica en cada una de sus mesas de trabajo. Al empezar a trabajar, se empieza a filmar. Algunas veces la cámara se queda en la mesa, capturando a uno o dos estudiantes, otras veces las participaciones son tomadas por un alumno del equipo y, otras veces son tomadas por el profesor.

5.5 Forma de analizar los datos de la investigación

Según Simon (2019), el análisis de datos debe de ser congruente con las preguntas de investigación, los marcos conceptuales y la literatura.

El análisis de resultados debe realizarse desde las perspectivas: i) aprendizaje de las matemáticas, razón, proporción, determinación de variables, pendiente, ordenada al origen, ecuación, trazo de gráfica y solución de problemas; ii) desarrollo de la competencia de modelización con sus subcompetencias: comprensión del problema, matematización, solución de problemas matemáticos, interpretación de resultados y validación; iii) desarrollo de un proceso metacognitivo productivo, experiencia en resolución de problemas previos, planteamiento de estrategias, interpretación de resultados, actuación frente a dificultades.

Metodología

Para los instrumentos problema inicial y final

Una vez aplicado el instrumento se procede a:

- Determinar la asertividad de las respuestas y registro del rendimiento.
- Análisis de sus operaciones y resultados. Determinando las dificultades que presentan. Esto se realiza dentro del marco de subcompetencias.
- Comparación de resultados entre el inicio y el final del ambiente de aprendizaje.
- Análisis de las diferencias de los resultados y generación de conclusiones.

Para las tareas

Una vez realizadas las tareas, dentro del salón de clase, se recolectan las hojas de trabajo de los estudiantes y se procede a su estudio y análisis. Determinación la asertividad de las respuestas y registro del rendimiento. Análisis de sus operaciones y resultados. Determinación de las dificultades que presentan. Esto se realiza dentro del marco de subcompetencias.

El trabajo se analiza por subcompetencias según Stillman (2007). Donde se identifican las dificultades y sus probables causas. Además, también se utiliza el enfoque de estrategias cognitivas/metacognitivas de Stillman (2004), donde se define si la problemática es del tipo cognitivo o metacognitivo.

Videos

Los videos se toman cuando los estudiantes trabajan en equipo. Se observa la forma de comunicación y trabajo en los equipos y se analizan las dificultades.

Los videos se analizan desde el marco conceptual de Stillman (2011), trabajo metacognitivo. Donde se analiza si existe un proceso metacognitivo o no. El proceso metacognitivo se decide si el estudiante propone una solución loable o no, como respuesta a una

bandera roja. Las respuestas a situaciones de bandera roja: metacognición rutinaria, ceguera metacognitiva, etc., y sus causas: por falta de reflexión, o por conocimientos incompletos o incorrectos. Así mismo se determina si la problemática es cognitiva o metacognitiva.

Entrevistas

La entrevista para cada estudiante está enfocada en analizar su conocimiento cognitivo y/o metacognitivo, sus conocimientos del tema matemático, sus limitaciones o dificultades, su estrategia para solucionar problemas, sus reflexiones, etc.

5.6 Validez del estudio y confiabilidad de los instrumentos de evaluación

En virtud de que el presente estudio es de utilidad práctica, nos servimos del concepto de validez propuesto por Scott (1988), donde dice que, un estudio con aplicación práctica es válido internamente si los resultados obtenidos se deben únicamente a la variable independiente (ambiente de aprendizaje). Es decir, para este estudio, en la medida en que los estudiantes aprendan el objeto matemático funciones lineales con solución de problemas, y este hecho se deba sólo al ambiente de aprendizaje diseñado, es su grado de validez.

Debido a que el diseño del ambiente de aprendizaje, las tareas, los instrumentos de evaluación, y las formas de trabajo, son para promover el aprendizaje de funciones lineales con solución de problemas, y con los resultados expuestos en el capítulo 9, se puede señalar que el presente trabajo tiene validez interna.

Por otro lado, para los instrumentos de evaluación, y el conocimiento que deben aprender los estudiantes se ha considerado: el programa de estudios del colegio donde se hizo la

investigación y los libros de texto para bachillerato, señalados en la sección 3.1. Además, el contenido temático fue analizado por tres expertos en educación matemática, los cuales forman parte del jurado de evaluación de esta investigación.

Respecto a la confiabilidad de los instrumentos de evaluación (problema inicial y final). Nos servimos de lo señalado por Scott (1988), donde dice, que la confiabilidad de las formas paralelas consiste en: aplicar dos formas equivalentes de la prueba y luego comparar los resultados. Según el autor, las formas equivalentes de las pruebas deben ser desarrolladas de tal forma, que a cada ítem de la primera le corresponda un ítem de la segunda, donde se pretenda medir lo mismo.

Consideraciones acerca de la metodología de investigación

Como se ha señalado, la metodología de investigación es del tipo estudio de caso, con acercamiento cuantitativo y cualitativo, así se pretende profundizar en las dificultades de aprendizaje de los estudiantes. De tal forma que se realizó la investigación con dos grupos de estudiantes de cuatro alumnos cada uno. Este tipo de diseño nos permite obtener datos valiosos y profundos, sin embargo, difícilmente se pueden generalizar los resultados. Para poder generalizar los resultados, es necesario tomar una muestra más grande de estudiantes, para lo cual, en el capítulo de conclusiones, se propone una nueva investigación.

6 PROBLEMA INICIAL. PRIMERA ETAPA DE IMPLEMENTACIÓN

En este capítulo se muestra el instrumento de evaluación, problema inicial, con una forma de solución. Posteriormente se muestran y se analizan los resultados generales de los estudiantes, también se muestran sus dificultades al inicio de esta investigación. El formato con el que trabajaron los alumnos se puede ver en el Apéndice 2.

Breve descripción de esta etapa

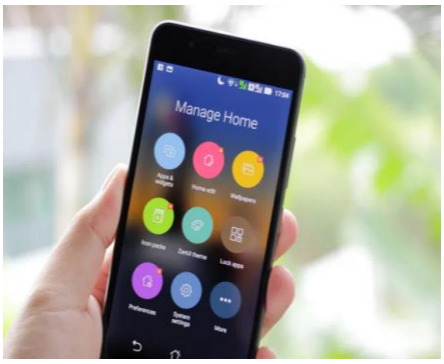
Cuando los alumnos se encontraron en el salón de clase, el profesor los saludó y les indicó que realizarían un examen de diagnóstico, el cual sirve para conocer sus conocimientos y habilidades sobre el tema de funciones lineales. El profesor entregó a cada alumno el problema inicial impreso. Los alumnos “resolvieron” el problema inicial de forma individual, sin comunicarse con sus compañeros. El tiempo que ocuparon los estudiantes en tratar de resolver el problema fue entre 20 y 40 minutos. Finalmente, el profesor recogió el problema impreso con las respuestas de los alumnos, para su análisis posterior.

Solución de problema inicial

Figura 6.1. Problema Hipotético

Una empresa telefónica cobra mensualmente una cantidad fija, más otra cantidad por cada minuto utilizado en llamadas. En los últimos dos meses los recibos señalan los siguientes datos:

Número de minutos	0	70
Importe facturado	$302.50	$365.50



Imagen, (AndroidAyuda, 2024)

Problema inicial

Pregunta 1. Comprensión. Responde verdadero o falso, según sea el siguiente enunciado, explica tu respuesta. “De acuerdo con el problema: los minutos utilizados dependen del importe facturado”.

Respuesta correcta. Falso. El importe facturado depende de los minutos utilizados.

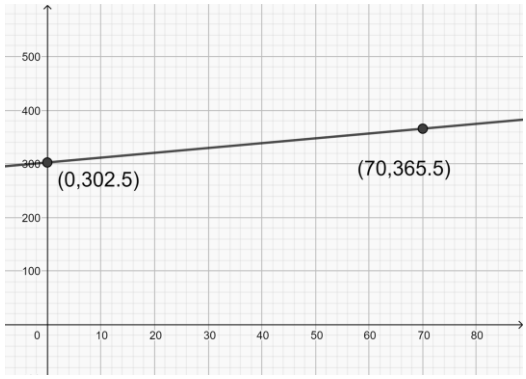
Pregunta 2. Matematización. De acuerdo con el problema: ¿Cuál es la variable independiente y cuál es la variable dependiente? Explica tu respuesta.

Respuesta correcta. Variable independiente, minutos utilizados. Variable dependiente, importe facturado. Porque el importe facturado depende de los minutos de llamada utilizados.

Pregunta 3. Matematización. Elabora una tabla de valores y traza una gráfica, utilizando las literales (x, y).

Figura 6.2. Tabla y gráfica del problema inicial

x	y
0	302.5
70	365.5



Problema inicial

Pregunta 4. Resolución de problemas matemáticos. Ordenada al origen de la ecuación de una recta. ¿Cuánto es el importe facturado cuando no se utilizan minutos de llamada? En la gráfica de una función lineal, ¿Cómo se llama a este punto?

Respuesta correcta. $302.50 ordenada al origen. De acuerdo con el problema es el importe facturado cuando no se han utilizado minutos de llamada. Es el valor de la variable dependiente cuando la variable independiente es igual a cero, $(0, 302.5)$

Pregunta 5. Resolución de problemas matemáticos. Pendiente de la recta o razón de cambio de la función lineal. Con los datos proporcionados, determina el factor de proporcionalidad o pendiente.

Respuesta correcta. $m = 0.9$ *$/min. Mediante el cálculo:*

$$m = \frac{365.5 - 302.5}{70}$$

El alumno puede determinar la pendiente tomando las coordenadas de dos puntos de la gráfica.

Pregunta 6. Resolución de problemas matemáticos. Representación algebraica de una función lineal. Escribe la representación algebraica (ecuación) de la función.

Respuesta correcta. $y = 0.9x + 302.50$ *La determinación de la ecuación es por sustitución de valores en* $y = mx + b$.

Pregunta 7. Resolución de problemas matemáticos. Predicción. ¿Qué importe se pagará si se consumen 500 minutos?

Problema inicial

Respuesta. Se sustituye $x = 500$ *en la ecuación y se realiza la operación.*

$$y = 0.9(500) + 302.5$$

$$y = 752.5$$

Pregunta 8. Interpretación de resultados. Explica por qué resolviste correctamente el problema.

Respuesta. Sustituyendo los datos en el primer mes, en el segundo o, cuando se consumen los quinientos minutos en la ecuación, los resultados corresponden a los esperados.

6.1 Resultados del problema inicial

En este apartado sólo se muestran los resultados globales, sin embargo, en el capítulo 9 se muestran los detalles significativos de los resultados del inicio y final del ambiente de aprendizaje por alumno.

Forma de evaluación

Como se puede ver en formato del problema inicial, contine ocho preguntas, a continuación, se explica la forma de evaluación.

Pregunta 1. Comprensión del problema. Se trató de una pregunta para que se respondiera verdadero o falso, de acuerdo con la dependencia "lógica de las variables" como se mostró párrafos atrás. La respuesta del alumno indicó si determinó correctamente la dependencia.

Problema inicial

Pregunta 2. Matematización. Consistió en que el alumno determinara correctamente las variables independiente y dependiente, asignando las literales correspondientes "x" e "y". La respuesta del alumno y su explicación indicó si determinó correctamente las variables.

Pregunta 3. Matematización. Consistió en que el alumno construyera una tabla de valores y trazara la gráfica. La tabulación, las escalas en los ejes, la localización de puntos y el trazo de la línea recta, fueron los elementos por evaluar.

Pregunta 4. Solución de problemas matemáticos. Consistió en que el alumno determinara la ordenada al origen de la recta o, el valor de la variable dependiente cuando la independiente tiene un valor de cero. El rendimiento del alumno se determinó dependiendo de su respuesta.

Pregunta 5. Solución de problemas matemáticos. Consistió en determinar la pendiente de la recta o la razón de cambio de la función. El rendimiento del alumno se determinó si utilizó la fórmula, sustituyó correctamente las coordenadas, realizó los cálculos y obtuvo el resultado correctamente.

Pregunta 6. Solución de problemas matemáticos. Consistió en determinar la ecuación de la función. Con las respuestas a las preguntas anteriores, solamente se tenía que escribir la ecuación. Se observó si el alumno escribió correctamente dicha ecuación.

Pregunta 7. Solución de problemas matemáticos. Consistió en el cálculo de una predicción. Se revisó que se utilizara la ecuación encontrada anteriormente, se sustituyera con el valor proporcionado y se calculara y determinara correctamente el valor solicitado.

Problema inicial

Pregunta 8. Interpretación de resultados. Con esta pregunta se pretendió conocer un poco acerca de los conocimientos cognitivos y metacognitivos de los estudiantes. Sus habilidades desarrolladas, y el uso de una estrategia.

En la siguiente tabla de resultados, se considera que "1" es respuesta correcta, y "0" es incorrecta.

Observación. Desafortunadamente el alumno 21 enfermó, no asistió a varias sesiones y no realizó ocho tareas, de la 15 a la 21. Por tal motivo se decide no considerarlo en la estadística.

Tabla 6.1. Resultados del problema inicial

Alumno	Preguntas									
	1	2	3	4	5	6	7	8	Cal.	%
11	1	0	0	1	1	0	1	0	4/8	50.0
12	1	0	0	0	0	0	0	0	1/8	12.5
13	1	0	0	1	1	0	1	0	4/8	50.0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0/8	0.00
21										
22	0	0	0	1	0	0	0	0	1/8	12.5
23	0	0	0	1	0	0	0	0	1/8	12.5
24	0	1	0	0	0	0	0	0	1/8	12.5
Total	3/7	1/7	0/7	4/7	2/7	0/7	2/7	0/7	12/56	
%	42.9	14.3	0.0	57.1	28.6	0.0	28.6	0.0		21.4

Como se puede observar en la tabla anterior, el rendimiento de los estudiantes es deficiente. Con un promedio general de 21.4%.

De forma general se observó que los alumnos.

- No tienen experiencia en la solución de problemas, esto ocasiona que no recuerden una estrategia de un problema parecido, ni sean capaces de aplicar una estrategia exitosamente,

como lo señala Stillman (2011). Es decir, no fueron capaces de establecer un proceso metacognitivo productivo.

- Igualmente, no demostraron tener, un poco, desarrolladas las subcompetencias de, según las señala Stillman *et al* (2007): comprensión del problema, matematización, solución de problemas matemáticos, interpretación de resultados y comprobación.
- Así mismo, los resultados de los alumnos demuestran que no recuerdan el tema de funciones lineales, conocimientos incompletos como lo señala Stillman (2011), a pesar de que el programa de estudios de la secundaria indica que lo debieron estudiar en dos ocasiones diferentes.

En otros estudios de educación matemática se observan resultados similares al inicio de la instrucción, como en Meléndez (2016), donde reconoce que la determinación de la expresión algebraica a partir de la gráfica de una función lineal no tuvo, al menos, una respuesta eficiente en un grupo de 65 alumnos.

Estos resultados desfavorables concuerdan con los del estudio piloto, que se realizó a una generación anterior. Además, marcan el punto de partida para observar el aprendizaje de los alumnos desde estas condiciones, hasta su desempeño al terminar la serie de tareas y en el instrumento de evaluación, problema final.

Igualmente, estos resultados son afines a los que obtuvieron los estudiantes en el examen PISA 2023, donde resultó que un 66% de estudiantes tiene bajo nivel de competencia matemática.

Con los resultados globales del problema inicial, los cuales muestran un rendimiento del 21.4%, se pueden señalar algunas consideraciones desfavorables al inicio de la implementación del ambiente de aprendizaje.

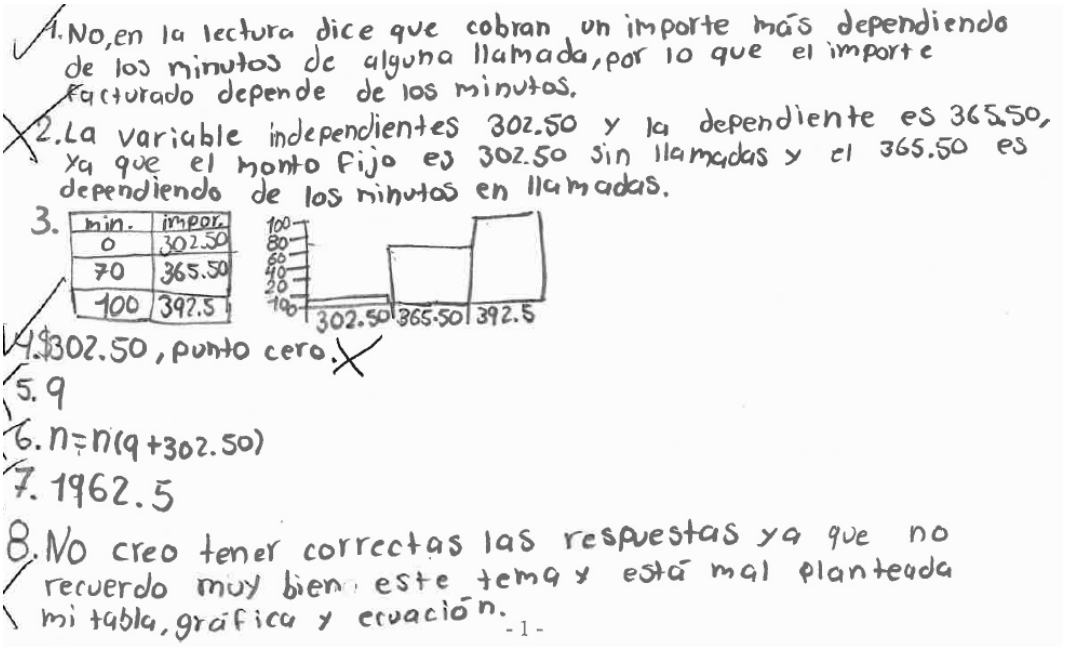
Problema inicial

En el problema inicial, la mayoría de los alumnos, no tienen los conocimientos básicos de funciones lineales. Según Stillman (2011), esta es una dificultad inducida por conocimientos incompletos.

Aunque los alumnos señalan que tuvieron que recordar temas vistos con anterioridad (secundaria y unas semanas de bachillerato), este recuerdo no fue suficiente, En el problema inicial, los alumnos estuvieron imposibilitados en: recordar un problema parecido, plantear una estrategia productiva, aplicar dicha estrategia eficientemente, es decir no tuvieron los elementos para hacer un trabajo metacognitivo productivo. Según la declaración del alumno 13,

"no estaba acostumbrado a resolver problemas".

Figura 6.3. Trabajo en el problema inicial del alumno 12



En la Figura 6.3. se muestra el trabajo académico del alumno 12. En el problema inicial, los alumnos no cuentan con una estrategia con relación a la tarea. De acuerdo con las observaciones, se limitan a hacer cálculos aritméticos sin una evidente comprensión acerca del contexto y la matemática. En consecuencia, no mostraron las subcompetencias de: comprensión,

matematización, solución de problemas matemáticos e interpretación de resultados. Acciones sin estrategia

Stillman (2011), señala que el proceso metacognitivo o, su ausencia, influye en la resolución de problemas. En esta investigación se observó que, al inicio, los estudiantes no cuentan con una estrategia de un problema parecido, y no tienen experiencia en la solución de problemas. Así, los estudiantes, una vez que consideran que comprenden el problema, recurren a tratar de resolverlo con operaciones aritméticas sin sentido, e incluso con la proporción y, con estas operaciones no logran resolver el problema.

Se considera que el trabajo descrito en el párrafo anterior no es metacognitivo ni cognitivo, son acciones de una estrategia no definida. Esta situación se puede catalogar como “acciones sin estrategia”, no corresponde a la ceguera metacognitiva de Stillman (2011), ya que no es que los alumnos no se den cuenta de sus errores, es que ellos no saben qué hacer.

Los resultados que se presentaron en este capítulo se retomarán y se aumentarán en el capítulo 9, donde se realiza una comparación entre los instrumento de evaluación, problema inicial y problema final.

7 RESULTADOS DE LA SEGUNDA ETAPA DE IMPLEMENTACIÓN, TAREAS

En este capítulo, se presentan los resultados del trabajo académico de los estudiantes en las tareas, que corresponden a la segunda etapa de la implementación. Se muestra una solución, hecha por el profesor, para cada tarea y los resultados obtenidos por los alumnos, algunos de forma individual y otros en equipo. Se trata únicamente de los resultados obtenidos.

Se considera importante este capítulo porque es un primer acercamiento a la información recabada y sirven como referencia para el análisis posterior.

Descripción general de las sesiones

En las sesiones dentro del salón de clase, existieron algunas actividades de rutina: i) saludo del profesor a los alumnos y viceversa, ii) las mesas se acomodaron para trabajar en equipo, iii) los alumnos se sentaron en sus respectivos equipos de trabajo, iv) el profesor de forma verbal les indicó las actividades que se realizarían y una breve introducción al tema matemático, v) el profesor repartió los formatos donde trabajarían los alumnos, vi) tiempo de trabajo individual, vii) tiempo de trabajo en equipo, viii) tiempo de trabajo grupal.

Las palabras de profesor respecto al tema matemático fueron, primeramente, referir los temas vistos con anterioridad, señalando un enlace con los temas que se trabajarían el día de la sesión, posteriormente hace señalamientos de la utilidad del tema matemático en cuanto a sus aplicaciones.

En trabajo individual o en equipo, primeramente, un alumno leyó, en voz alta, las instrucciones o problemas, las veces que fueron necesarias. El profesor enfatizó las consignas de

la tarea y/o las preguntas de los problemas. Tanto en trabajo individual y en equipo, los alumnos tuvieron tiempo suficiente para que la mayoría terminara las tareas.

En trabajo individual y en equipo, el profesor apoyó a los estudiantes, procurando primeramente ofrecer apoyo metacognitivo y posteriormente apoyo cognitivo.

Los alumnos fueron filmados cuando trabajaron en equipo. Las observaciones de los videos se indican a lo largo del siguiente capítulo.

En trabajo grupal, algún equipo expuso la solución de las tareas y el resto de los alumnos comparó sus resultados. Cuando hubo diferencias se discutieron. El profesor señaló los errores y los aciertos.

Al finalizar la sesión, el profesor recogió las hojas donde trabajaron los alumnos para su análisis posterior.

7.1 Exposición de resultados y una solución por cada tarea

Para el reporte de datos, se tiene una clasificación por: tarea, problema, subcompetencia y pregunta. De tal forma que nos interesa conocer las respuestas correctas y las incorrectas, para el análisis posterior (siguiente capítulo), de dificultades de los estudiantes.

- Las respuestas de los estudiantes en las tareas se toman como datos cuantificables.
- Las respuestas de los estudiantes reflejan su conocimiento, acerca de la pregunta en cuestión.
- Dichas respuestas pueden ser correctas o no.

Resultados en tareas

- En la cuantificación de los datos: respuesta correcta se le asigna “1” y, respuesta incorrecta “0”.

Estructura de este capítulo

En la solución de cada tarea, se muestra un procedimiento y/o resultados. Se decidió trabajar con números decimales y con el uso de la calculadora. Además, en algunas tareas los procedimientos se muestran en letra manuscrita con el fin que el lector se dé cuenta, que es la solución propuesta por el profesor del grupo.

Para la identificación de los estudiantes se procedió de la siguiente manera, los estudiantes del equipo 1, que previamente, demostraron tener mejores habilidades matemáticas, se nombran con los números: Alumno 11, Alumno 12, Alumno 13 y Alumno 14. Nótese que estos números tienen en él dígito de las decenas el número 1.

Y los estudiantes del equipo 2, que, previamente, demostraron tener menores habilidades matemáticas, son nombrados con un número: Alumno 21, Alumno 22, Alumno 23 y Alumno 24. Nótese que estos números tienen en él dígito de las decenas el número 2.

Como se observará, en cada tarea se hacen algunas observaciones generales y, se indica al lector, la sección del capítulo siguiente, donde se señalan observaciones más específicas y el análisis del trabajo de los estudiantes. En este capítulo, el formato se ha puesto con el fin de mostrar la información relevante en cada página, se ha procurado mostrar la solución de cada tarea en una página y, en la siguiente los resultados y algunas observaciones generales.

7.1.1 Tarea 1. Tarifas de telefonía

Carlos vio anuncios de dos compañías de telefonía móvil. La compañía A ofrece servicios con una tarifa básica de $150.00 pesos al mes, más 80 centavos el minuto. La compañía B no tiene tarifa mensual, pero, cobra $3.00 pesos el minuto. Ambas compañías cobran el tiempo "exacto", sin redondear. Comparar el costo del servicio para ambas compañías y, contestar las preguntas.

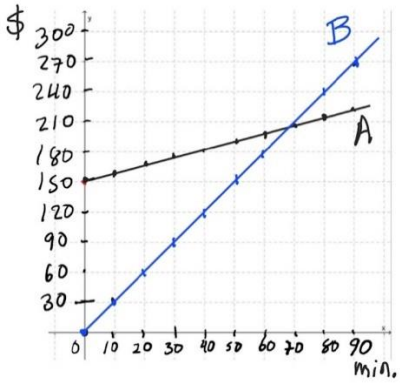
Completa la siguiente tabla, que corresponde al costo en relación con los minutos usados de servicio telefónico en un mes.

Tabla 7.1. Valores del problema de tarea 1, Tarifas de telefonía

Número de minutos	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Compañía "A"	150	158	166	174	182	190	198	206	214	222
Compañía "B"	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270

Trazo de gráfica. Los minutos de servicio en el eje "x", variable independiente (abscisas). El costo en el eje "y", variable dependiente (ordenadas); para cada una de las compañías, en el mismo plano que a continuación se encuentra.

Figura 7.1. Gráfica de problema 1, tarifas de telefonía



Pregunta 1. ¿Por qué una gráfica parte del origen y la otra no?

Porque la compañía A cobra una tarifa inicial y, la compañía B no.

Pregunta 2. ¿Por qué la inclinación de las gráficas es distinta para cada una?

La inclinación indica el costo por minuto, la compañía B cobra más por cada minuto, por lo tanto, su inclinación es "más vertical".

Pregunta 3. Escribe una ecuación donde se pueda calcular el costo "y" dependiendo del número de minutos "x" para cada compañía.

Para la compañía A, $y = 0.8x + 150$

Para la compañía B, $y = 3x$

Pregunta 4. ¿Con cuántos minutos de consumo, las dos compañías cobran lo mismo?

Resolviendo la siguiente ecuación: $3x = 0.8x + 150$

El resultado es: $x = 68.2$ *min.*

Resultados en tareas

Tabla 7.2. Resultados de Tarea 1. Individual

Alumno	Cuestionamientos						
	Tabla	Gráfica	1	2	3	4	Cal.
11	1	1	1	1	0	1	5/6
12	0	0	0	0	0	0	0/6
13	1	1	1	1	0	1	5/6
14	1	1	1	1	0	0	4/6
21	0	0	0	0	0	0	0/6
22	0	0	0	0	0	0	0/6
23	0	0	0	0	0	0	0/6
24	0	0	0	0	0	0	0/6

Para la mayoría de los alumnos, la falta de comprensión del contexto fue la dificultad principal, no se respondió correctamente en la tabla de valores, en la gráfica y, las preguntas relacionadas con la gráfica.

Así mismo, se observaron grandes dificultades en el cuestionamiento 3, determinación de una ecuación para cada compañía.

Dichas dificultades, se analizan en la siguiente sección, en los apartados: comprensión del problema, matematización, tabla de valores, resolución de problemas matemáticos, trazo de gráfica y determinación de la ecuación.

Entre otras dificultades, la mayoría de los alumnos reportaron que no tenían experiencia en la solución de problemas, esto hizo que los alumnos no hayan reflexionado lo suficiente, en la comprensión, en la solución del problema y, no llegaron a un proceso metacognitivo.

7.1.2 Tarea 2. Consumo de agua en la ducha

La cantidad de agua que una persona gasta en bañarse depende de varios factores, entre ellos el tiempo que se tarda. Determina matemáticamente la cantidad de agua que una persona gasta en bañarse, la cual depende del tiempo que ocupa en la ducha. (BlomhØj, 2009).

Experimentalmente se llenó un balde de agua de 20 litros en 4 minutos. Por lo tanto, el gasto volumétrico $V = \frac{20\ L}{4\ min}$ *El coeficiente es* $V = 5\ \frac{L}{min}$

"Si una persona tarda en bañarse 10 minutos consume $C = 5 * 10 = 50\ L$*"*

El resultado depende de la determinación que los alumnos realicen experimentalmente.

Antes de empezar a trabajar con este problema el profesor les comentó a los alumnos que, en los problemas reales muchas veces, el investigador debe conseguir los datos del contexto real.

El profesor indicó que los equipos propongan una estrategia para conseguir los datos. Hacer las mediciones en su casa y con los datos obtenidos resuelvan el problema.

Resultados en tareas

Tabla 7.3. Resultados de Tarea 2. Equipos

Equipo	Cuestionamientos		
	Estrategia	Determinación de factor de consumo	Cal.
Equipo 1	1	1	2/2
Equipo 2	1	0	1/2

El equipo 1, para medir la cantidad de agua que dispensa la regadera, decidió medir el tiempo que tarda en llenarse una cubeta de 19 litros. Un día después, reportaron $6\frac{L}{min}$. Los alumnos señalaron que: si una persona tarda en bañarse 15 minutos gasta 90 litros de agua.

El equipo 2, reportó un consumo de $0.90\frac{L}{min}$. Al parecer, hubo error en la medición experimental. En su caso, un miembro del equipo se bañó y recolectó el agua que utilizó.

El trabajo de los alumnos se describe con más detalle en el siguiente capítulo, en la sección de comprensión del problema y, obtener información que no se especifica en el problema.

7.1.3 Tarea 3. Razón entre dos magnitudes en distintos contextos

Pregunta 1. En un grupo de primer semestre se hizo una encuesta para saber a cuántos alumnos les gusta el béisbol. De los 20 estudiantes del grupo, 15 contestaron afirmativamente. Al resto de los estudiantes no les gusta el béisbol. ¿Cómo podemos describir la relación entre los estudiantes que les gusta el béisbol y los estudiantes que no les gusta? Explica tu respuesta.

$\frac{les\ gusta}{no\ les\ gusta} = \frac{15}{5} = \frac{3}{1}$ $R = 3$, *por cada 3 alumnos que les gusta el beisbol, a uno no.*

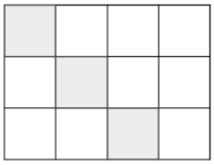
Pregunta 2. En una escuela de ingeniería están inscritos 120 estudiantes de los cuales 80 son hombres y el resto son mujeres. ¿Cómo podemos describir la relación entre los estudiantes de ingeniería hombres y estudiantes mujeres? Explica tu respuesta.

$\frac{hombres}{mujeres} = \frac{80}{40} = \frac{2}{1}$ $R = 2$, *hay 2 estudiantes hombres, por cada mujer.*

Pregunta 3. Un edifico mide 120m de altura y su maqueta mide 0.5m. ¿Cómo podemos describir la relación entre la altura del edificio y la de su maqueta? Explica tu respuesta.

$\frac{A.\ edificio}{A.maqueta} = \frac{120\ m}{0.5\ m} = \frac{240}{1} R = 240$, *por cada 240 unidades de longitud del edificio hay una unidad de longitud de la maqueta.*

Pregunta 4. Observa la siguiente figura:



¿Cómo podemos describir la relación entre los cuadros sombreados con respecto a los que no? Explica tu respuesta.

$\frac{sombreados}{sin\ sombra} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ $R = \frac{1}{3}$, *por cada cuadro sombreado, hay 3 sin sombra.*

Pregunta 5. En una urna existen 100 esferas amarillas y 25 azules. ¿Cómo podemos describir la relación entre las esferas amarillas respecto a las azules? Explica tu respuesta.

$\frac{amarillas}{azules} = \frac{100}{25} = \frac{4}{1}$ $R = 4$, *por cada cuatro esferas amarillas, hay una azul.*

Resultados en tareas

Esta tarea se realizó en trabajo individual y se revisó en sesión plenaria. El profesor explicó la primera pregunta y los alumnos respondieron las otras cuatro preguntas.

Tabla 7.4. Resultados de Tarea 3. Individual

Alumno	Cuestionamientos					
	1	2	3	4	5	Cal.
11	-	1	1	1	1	4/4
12	-	1	1	1	1	4/4
13	-	1	1	1	1	4/4
14	-	1	1	0	1	¾
21	-	1	1	1	1	4/4
22	-	0	1	0	1	¾
23	-	1	1	0	1	¾
24	-	0	1	1	1	¾

La dificultad encontrada en estos problemas fue en la comprensión del contexto y de la razón, es decir, el significado del cociente:

$$\frac{valor\ de\ una\ magnitud}{valor\ de\ otra\ magnitud} = R$$

Las observaciones para esta tarea se mencionan en el siguiente capítulo en la sección: determinación de la pendiente, razón de cambio o factor de proporcionalidad. Por el momento, se enfatiza lo siguiente. Para mejorar el aprendizaje de funciones lineales es necesario que los alumnos comprendan de una manera eficaz el concepto de razón. Se recomienda que el profesor asegure la comprensión de los alumnos, con un buen trabajo de reflexión en problemas con diferentes contextos, como lo señala Freudenthal (2002).

7.1.4 Tarea 4. Densidad, una razón de propiedad de las sustancias

En la ciencia Fisicoquímica una característica de las sustancias es la densidad: relación entre la masa de una sustancia y el volumen que ocupa; esta característica, es única para cada sustancia y se ocupa como una prueba de identificación. Se toman algunas muestras de distintas sustancias y se determina su masa y volumen. Calcula la densidad de cada una de ellas.

Tabla 7.5. Densidades de algunas sustancias

Nombre de la sustancia	Masa en Kg	Volumen en L	Densidad	
			$\frac{masa}{volumen}$	Valor $(\frac{Kg}{L})$
1. Gasolina	1.680	2.400	$\frac{1.680}{2.400}$	0.700
2. Mercurio	12.240	0.900	$\frac{12.240}{0.900}$	13.600
3. Leche	3.090	3.000	$\frac{3.090}{3.000}$	1.030
4. Agua	1.000	1.000	$\frac{1.000}{1.000}$	1.000
5. Aluminio	4.050	1.500	$\frac{4.050}{1.500}$	2.700
6. Oro	9.650	0.500	$\frac{9.650}{0.500}$	19.300
7. Plomo	33.900	3.000	$\frac{33.900}{3.000}$	11.300
8. Hidrógeno	0.090	1000	$\frac{0.090}{1000}$	0.00009
9. Nitrógeno	1.251	1000	$\frac{1.250}{1000}$	0.00125

Pregunta 1. ¿qué pesa más, un litro de gasolina o un litro de agua? *El litro de agua.*

Pregunta 2. ¿qué pesa más, un litro de plomo o un litro de oro? *El litro de oro.*

Tabla 7.6. Resultados de Tarea 4. Equipos

Equipo	Cuestionamientos			
	Cálculo de densidades	Pregunta 1	Pregunta 2	Cal.
Equipo 1	1	0	0	1/3
Equipo 2	1	0	0	1/3

Se reportan observaciones en el capítulo siguiente, en la sección: determinación de la pendiente, razón de cambio o factor de proporcionalidad. Sin embargo, por el momento se enfatiza lo siguiente.

Los alumnos, en ambos equipos, estuvieron más preocupados en resolver numéricamente la determinación de la densidad de las sustancias y, no reflexionaron en el significado en la realidad, por lo que inmediatamente contestaron de forma incorrecta a las preguntas planteadas (ceguera metacognitiva por "ausencia" de reflexión).

7.1.5 Tarea 5. Pendiente de una rampa

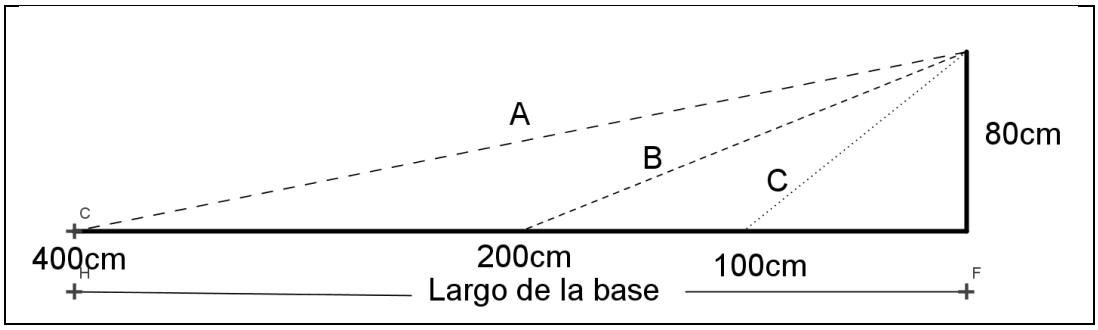
Planteamiento de situación. Se requiere construir una rampa para subir la altura de 80cm con silla de ruedas.

Figura 7.2. Hombre en silla de ruedas

Imagen, AdobeStock, (2024).

Se proponen tres diferentes largos para la base. La primera "A" de 400cm, la segunda "B" de 200cm y, la tercera "C" de 100cm.

Figura 7.3. Diagrama del problema, Pendiente de una rampa



Cuestionamiento 1. Determina la relación entre la altura de la rampa y el largo de la base de esta. Según las distancias propuestas, escribe tus respuestas en la siguiente tabla.

Tabla 7-7. Valores del problema, pendiente de una rampa

Propuesta	Altura	Largo	Razón
A	80cm	400cm	0.2
B	80cm	200cm	0.4
C	80cm	100cm	0.8

Cuestionamiento 2. ¿Cuál de las propuestas proporciona mejores condiciones para subir? ¿Cuál es el valor de la razón?

La rampa con una longitud de 400 cm. $R = 0.2$

Cuestionamiento 3. ¿Cuál de las propuestas proporciona condiciones desfavorables para subir? ¿Cuál es el valor de la razón?

La rampa con una longitud de 100 cm. $R = 0.8$

Cuestionamiento 4. ¿Existe una relación entre las mejores condiciones para subir y el valor de la razón?

Resultados en tareas

Una rampa presenta mejores condiciones para subir, cuando la razón, entre la altura y el largo, es menor.

Tabla 7.8. Resultados de Tarea 5. Individual

Alumno	Cuestionamientos				
	1	2	3	4	Cal.
11	1	1	1	1	4/4
12	1	1	1	1	4/4
13	1	1	1	1	4/4
14	1	1	1	1	4/4
21	1	1	1	1	4/4
22	1	1	1	1	4/4
23	1	1	1	1	4/4
24	1	1	1	1	4/4

Como se observa en la tabla anterior la eficiencia de los estudiantes fue del 100%.

Si bien en esta tarea, se trabajó el concepto de razón de cambio de forma muy simple y esquemática, al parecer se requiere que los alumnos se enfrenten a una mayor demanda de reflexión. En otras palabras, esta tarea resultó ser muy simple.

7.1.6 Tarea 6. Bomba de gasolina

Una bomba abastecedora de gasolina vierte 4 litros cada 5 segundos.
Cuestionamiento 1. ¿Cuál es la razón de litros vertidos respecto al tiempo?

$$\frac{4\ L}{5\ s} = 0.8\ \frac{L}{s}$$

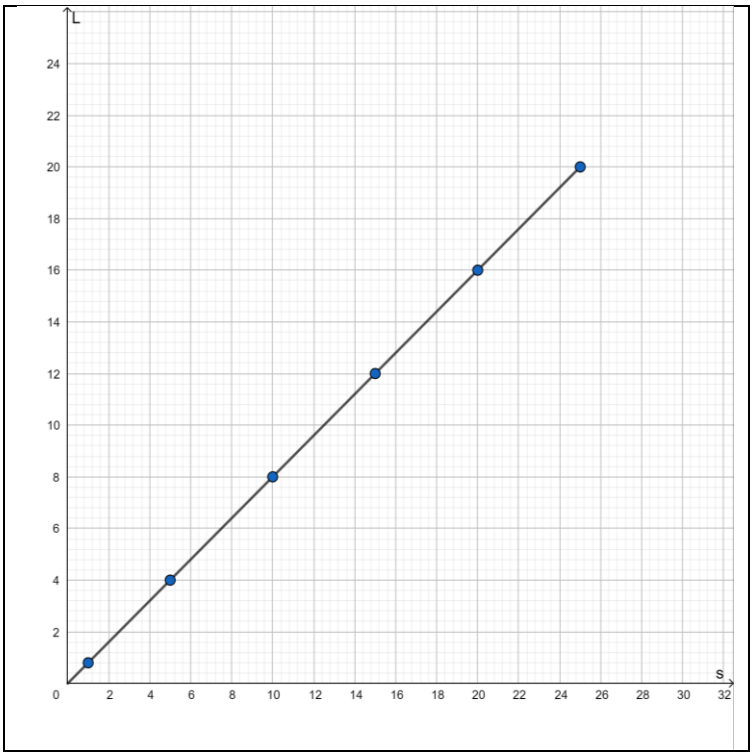
Cuestionamiento 2. Completa la siguiente tabla, tomando en cuenta la razón de abastecimiento de la bomba.

Tabla 7.9. Valores del problema, Bomba de gasolina

Tiempo "x" en segundos	0	1	5	10	15	20	25
Litros "y"	0	0.8	4.0	8.0	12	16	20

Cuestionamiento 3. Traza una gráfica con los datos de la tabla anterior. En el eje de las abscisas "x" el tiempo en segundos. En el eje de las ordenadas "y" los litros vertidos de gasolina. Marca los puntos y únelos con una línea.

Figura 7.4. Gráfica del problema, Bomba de gasolina



Cuestionamiento 4. El coeficiente de proporcionalidad, ¿cómo se observa en la gráfica?

Resultados en tareas

En la inclinación de la recta. Los litros vertidos por unidad de tiempo.

Tabla 7.10. Resultados de Tarea 6. Individual

Alumno	Cuestionamientos				
	1	2	3	4	Cal.
11	1	1	1	0	3/4
12	0	1	1	0	2/4
13	1	1	1	0	3/4
14	1	1	1	0	3/4
21	0	1	1	0	2/4
22	0	1	1	0	2/4
23	0	1	1	0	2/4
24	0	1	1	0	2/4

Como se observa, 5/8 alumnos no determinaron eficientemente el cuestionamiento 1. Originalmente la razón la calcularon al revés, lo determinan $\frac{5\,s}{4\,L}$ en lugar de $\frac{4\,L}{5\,s}$ posteriormente corrigieron, el alumno 13, detectó el error y lo comentó con sus compañeros (autorregulación).

Todos los alumnos tuvieron la dificultad de no comprender el término “coeficiente de proporcionalidad”, el profesor les indicó que es la razón de los litros vertidos entre los segundos, razón calculada en el cuestionamiento 1, y que en la gráfica se observa en la inclinación de la recta, (apoyo cognitivo). Una de las dificultades mayores encontradas en esta investigación es la comprensión de la razón de cambio, coeficiente de proporcionalidad o, pendiente, esto está en concordancia con los señalado por Freudenthal (2002), para la comprensión de este concepto se requiere de una profunda comprensión de las matemáticas.

Ver análisis en el capítulo siguiente, en la sección: determinación de la pendiente, razón de cambio o factor de proporcionalidad.

Resultados en tareas

7.1.7 Tarea 7. Distancias iguales en tiempos iguales

Un tren recorre distancias iguales en tiempos iguales. Recorre una distancia de 160 Km en 2 horas.

Cuestionamiento 1. ¿Cuál es la razón entre la distancia que recorre y el tiempo que tarda en recorrerla? En la ciencia Física, ¿cómo se llama a esta razón? *Rapidez*

$$\frac{160}{2}\frac{Km}{h} = 80\ \frac{Km}{h}$$

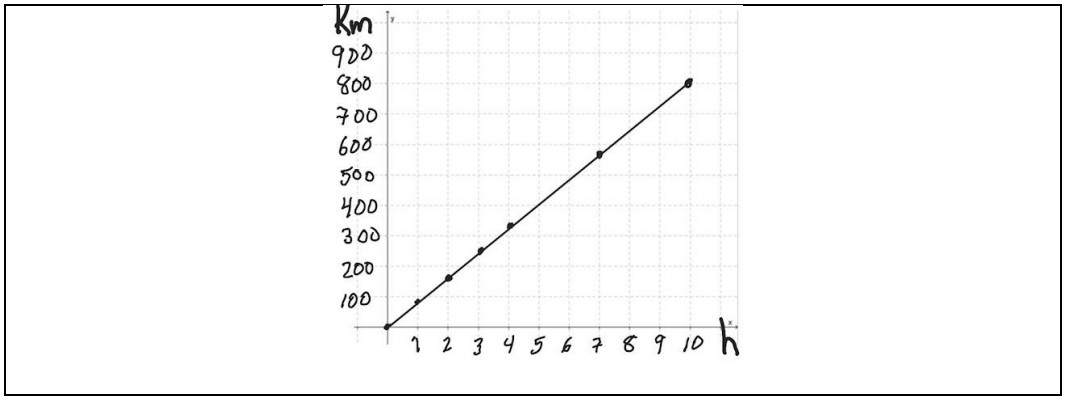
Cuestionamiento 2. Completa la siguiente tabla, tomando en cuenta la razón de la distancia y tiempo.

Tabla 7.11. Valores del problema, Distancias iguales en tiempos iguales

Tiempo "x" (h)	0	1	2	3	4	7	10
Distancia "y" (Km)	0	80	160	240	320	560	800

Cuestionamiento 3. Traza una gráfica con los datos de la tabla anterior. En el eje de las abscisas "x" el tiempo en horas. En el eje de las ordenadas "y" la distancia que recorre el tren. Marca los puntos y únelos con una línea.

Figura 7.5. Gráfica del problema, Distancias iguales en tiempos iguales



Cuestionamiento 4. El coeficiente de proporcionalidad, ¿cómo se observa en la gráfica?

En la inclinación de la gráfica. Los kilómetros que recorre el móvil entre las horas que trascurren.

Tabla 7.12. Resultados de Tarea 7. Individual

Alumno	Cuestionamientos				
	1	2	3	4	Cal.
11	1	1	1	1	4/4
12	1	1	1	1	4/4
13	1	1	1	1	4/4
14	1	1	1	1	4/4
21	1	1	1	1	4/4
22	1	1	1	1	4/4
23	1	1	1	1	4/4
24	1	1	1	0	3/4

Los alumnos respondieron correctamente los primeros tres cuestionamientos y en su mayoría el cuestionamiento 4.

El Alumno 24, no contesta la pregunta 4, acerca de cómo se ve en la gráfica el coeficiente de proporcionalidad. Nuevamente el profesor le explica que se observa en la inclinación de la recta (repetición, Vergnaud, 1990).

7.1.8 Tarea 8. La experiencia en el Bungee

Barbie ha cumplido 40 años. Su amigo Ken le ha dado una experiencia deportiva extrema, un salto en Bungee. Barbie tendrá que saltar desde una altura dada, y nadie quiere que Barbie choque contra el piso. 1) realizar las mediciones necesarias para determinar un modelo que vincule, la distancia de caída con el número de "ligas" utilizadas en el cordón de amortiguación. 2) se recomienda registrar un dato, número de ligas con longitud de caída. 3) probar el resultado para una caída de 4.3 metros. (Stillman *et al*, 2007).

Experimento. Se colocan un cierto número de ligas a la muñeca, se deja caer y se mide la longitud de la caída. Se realizan varias mediciones con el mismo número de ligas para comprobación. Observación. Es preferible que se realice este experimento con un sólo número de ligas, de otra forma, con varias mediciones, muy probablemente se tendría que hacer un proceso de linealización, que por el momento no es tema de este estudio.

Se colocan 10 ligas a la muñeca y se deja caer, la longitud de caída es de 200 cm.

El factor de proporcionalidad es $\frac{cm\ de\ caída}{no.de\ ligas} = \frac{200}{10} = 20\ \frac{cm}{liga}$

Para una caída de 4.3m (430 cm): $\frac{430\ cm*liga}{20\ cm} \approx 21\ ligas.$

Se valida el resultado a una altura de 4.3 metros. Cabe recordar que esta longitud de caída es la altura del pasamanos del barandal del primer piso, donde se ubica el salón de clase, al suelo.

Validación. Se realiza el experimento. Se comprueba que la muñeca alcanza a rozar el piso. Por lo que físicamente se recomiendan 20 ligas.

Resultados en tareas

Tabla 7.13. Resultados de Tarea 8. Equipos

Equipo	Cuestionamientos					
	Comprensión	Matematización	Sol. Problemas matemáticos	Resultados	Comprobación	Cal.
E. 1	1	1	1	1	1	5/5
E. 2	1	1	1	1	1	5/5

Esta tarea se analiza a detalle páginas adelante en la sección: Observaciones y análisis de la tarea 8.

Se presentaron dificultades en la comprensión del problema, hasta que el profesor realizó el “experimento” de forma concreta, los alumnos comprendieron este, (apoyo cognitivo).

Los equipos se pusieron de acuerdo con el procedimiento para la obtención de los datos iniciales, número de ligas y longitud de caída.

Ambos equipos realizaron la experimentación y sus cálculos fueron correctos, 26 ligas para una caída de 4.3 metros.

7.1.9 Tarea 9. Problemas de Proporción directa (de repetición-ejercicios)

Problema 1. En el mapa que se muestra a continuación, aproximadamente, 1.8 centímetros corresponden a 115 Km en la "realidad". Determina la distancia en línea recta de, a) de México a Veracruz, b) de México a Guadalajara, c) de Veracruz a Guadalajara.

Figura 7.6. Mapa de algunos estados de México

Respuestas:

a) *Medición 5.6 cm. Operación y resultado* $5.6cm * \frac{115\ Km}{1.8\ cm} = 357.7Km$
b) *Medición 8.0 cm. Operación y resultado* $8.0cm * \frac{115\ Km}{1.8\ cm} = 511.1Km$
c) *Medición 13.5 cm. Operación y resultado* $13.5cm * \frac{115\ Km}{1.8\ cm} = 862.5Km$

Observación. Estos resultados tienen una aproximación $\pm 10\%$ *con la realidad.*

Resultados en tareas

Problema 2.
Dos vendedores de teléfonos trabajan en un establecimiento. Mientras uno vende 8 teléfonos, el otro 5. Después de un tiempo el más hábil ha vendido 32. ¿Cuántos habrá vendido el otro?

$$\frac{8}{5} = \frac{32}{x}$$
$$x = \frac{5 * 32}{8}$$
$$x = 20\ teléfonos$$

Problema 3.
Un reloj se adelanta un minuto por cada siete días. ¿Cuántos minutos se habrá adelantado en 60 días?

$$\frac{1}{7} = \frac{x}{60}$$
$$x = \frac{1 * 60}{7}$$
$$x = 8.57\ min$$

Problema 4.
Un automóvil recorre 90 Km con 7 litros de gasolina. ¿Cuántos kilómetros puede recorrer, con veinte litros de dicho combustible?

$$\frac{90}{7} = \frac{x}{20}$$
$$x = \frac{90 * 20}{7}$$
$$x = 257.1\ Km$$

Problema 5.
La relación de género que tiene una escuela es de 8 mujeres por cada 5 hombres. ¿Cuántos hombres habrá en un salón, donde están inscritas 24 mujeres?

$$\frac{8}{5} = \frac{24}{x}$$
$$x = \frac{5 * 24}{8}$$
$$x = 15\ hombres$$

Problema 6.
Si una hora tiene 60 minutos y un minuto tiene 60 segundos. ¿Cuántas horas son 11000 segundos?

$$\frac{3600\ seg}{1\ hr} = \frac{11000\ seg}{x}$$
$$x = \frac{1 * 11000}{3600}$$
$$x = 3.05\ h$$

Resultados en tareas

Tabla 7.14. Resultados de Tarea 9. En equipo

Equipo	Cuestionamientos						
	1	2	3	4	5	6	Cal.
E. 1	1	1	1	1	1	1	6/6
E. 2	0	1	1	1	1	1	5/6

Se han observado dificultades en la interpretación y planteamiento de la proporción.

Las observaciones detalladas se describen páginas adelante en la sección: determinación de la pendiente, razón de cambio o factor de proporcionalidad.

En algunos casos, el profesor proporcionó apoyo cognitivo en el planteamiento y la solución de la proporción.

7.1.10 Tarea 10. Zapatos de gigante

Los zapatos fabricados más grandes del mundo, según el libro de Récords Guinness miden 2.37 m de ancho y 5.29 m de largo.
Aproximadamente, ¿qué tan alto debe medir un gigante para calzarlos? Explica tu respuesta. (Blum, 2011).

Procedimiento, i) Se toma en consideración el largo del zapato del gigante de 5.29 m, esta cantidad se expresa en centímetros, 529 cm; ii) se toman medidas de referencia de una persona del sexo masculino a saber, 1.8 m de altura y 29 cm de largo de zapato; se escribe la proporción y se determina la altura del gigante.

$$\frac{1.8\ m}{29\ cm} = \frac{x\ m}{529\ cm} \qquad x = \frac{1.8*529}{29} \qquad x = 32.8\ m$$

Esta tarea se realizó en trabajo de equipos, donde los resultados son los siguientes.

Tabla 7.15. Resultados de Tarea 10. Equipos

Equipo	Cuestionamientos				
	Comprensión	Matematización	Sol. Problemas matemáticos	Resultados	Cal.
Equipo 1	1	1	1	1	2/2
Equipo 2	1	1	1	1	2/2

Luego de que determinaron la estrategia para la solución. El profesor les sugirió a ambos equipos que la longitud de los zapatos del gigante la expresaran en centímetros (apoyo cognitivo). Así mismo se les hizo énfasis de que los zapatos gigantescos son de caballero (apoyo metacognitivo).

En esta tarea, ambos equipos trabajaron eficientemente, incluso en la formulación de un factor de proporcionalidad y en el cálculo de la altura del gigante. Páginas adelante se detalla el trabajo observado, en el siguiente capítulo en la sección: determinación de pendiente, razón de cambio, coeficiente de proporcionalidad.

7.1.11 Tarea 11. Resorte y su carga

De acuerdo con la ley de Hooke, la distancia que un resorte se estira, dentro de su tolerancia elástica, es directamente proporcional al peso que se le aplique. Un resorte originalmente mide 20 cm. Si se le aplica una carga de 8 Kg alcanza una longitud de 30 cm.

1. ¿Cuál es la longitud del resorte cuando se aplica una carga de 4 Kg y otra de 15 Kg?
2. Escribe una ecuación, que represente el comportamiento de las variables.

Procedimiento, i) se determina que la variable independiente es la carga aplicada y, la variable dependiente es la longitud del resorte; ii) se considera que la longitud del resorte sin carga es de 20cm, y con una carga de 8 Kg se estira hasta los 30 cm, el factor de proporcionalidad es:

$\frac{10cm}{8\ Kg} = 1.25\frac{cm}{Kg}$*; iii) se realizan los cálculos para la pregunta 1…*

$y = 4\ Kg * 1.25\frac{cm}{Kg} + 20\ cm \qquad y = 25\ cm$

$y = 15\ Kg * 1.25\frac{cm}{Kg} + 20\ cm \qquad y = 38.75\ cm$

Inciso iv) se determina la ecuación que modeliza las condiciones del problema.

$y = 1.25x + 20$

Tabla 7.16. Resultados de Tarea 11. Individual

Alumno	Cuestionamientos			
	Comprensión	Matematización aritmética	Matematización algebraica	Cal.
11	1	1	0	2/3
12	1	1	0	2/3
13	1	1	0	2/3
14	0	0	0	0/3
21	0	0	0	0/3
22	0	0	0	0/3
23	0	0	0	0/3
24	0	0	0	0/3

Se observaron dificultades en: la comprensión del problema, matematización aritmética, y en la determinación de la ecuación. En el capítulo siguiente se muestran las observaciones más detalladas de esta tarea: Observaciones y análisis de la tarea 11, el resorte y su carga.

Resultados en tareas

7.1.12 Tarea 12. Servicio de taxi por aplicación

La compañía ***A*** cobra por el servicio $30.00 más $5.00 por Kilómetro recorrido. La compañía ***B*** cobra por el servicio $20.00, más $7.00 por Kilómetro recorrido. ¿Cuándo es mejor usar una compañía y, cuándo es mejor usar la otra?

Procedimiento y solución, i) se elabora una tabla de costos de viaje para cada compañía que depende del número de Kilómetros recorrido, y se comparan.

Tabla 7.17. Valores del problema Servicio de taxi por aplicación

Km/compañía	A costo ($)	B costo ($)
0	30	20
1	35	27
2	40	34
3	45	41
4	50	48
5	55	55
6	60	62
7	65	69
8	70	76

ii) Según los datos de la tabla anterior, las dos compañías cobran la misma cantidad $ 55.00 cuando se han recorrido 5 Km. Se observa que antes de 5 Km económicamente, es preferible contratar la compañía B, y después la compañía A.

Tabla 7.18. Resultados de Tarea 12. Equipos

Equipo	Cuestionamientos					
	Comprensión	Matematización	Sol. Problemas matemáticos	Resultados	Elección de compañía	Cal.
Equipo 1	1	1	1	1	1	5/5
Equipo 2	1	1	1	1	1	5/5

Los alumnos responden elaborando una tabla de valores. Los equipos trabajaron sin dificultades y determinaron la solución eficientemente.

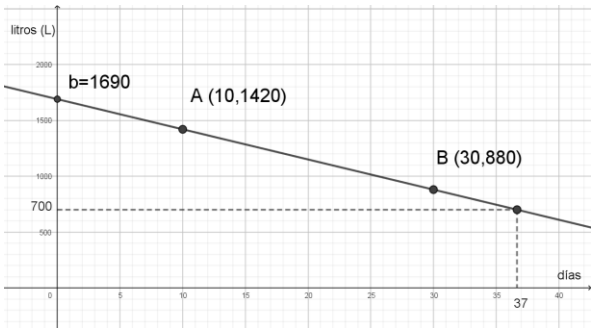
7.1.13 Tarea 13. Consumo de petróleo

El profesor expone y explica la solución.

El señor Pérez midió la cantidad de petróleo del depósito de su calefacción central 10 días después de que fue llenado y, encontró que era 1420 litros. Después de otros 20 días la midió de nuevo y, encontró que la cantidad de petróleo era de 880 litros. Suponiendo que el consumo de petróleo respecto al tiempo en días se ajusta a una función lineal, determina: a) Variable independiente "x", b) Variable dependiente "y", c) Gráfica de la función, d) ¿Qué cantidad de petróleo contiene el depósito, al ser llenado? (Ordenada al origen "b"), e) ¿Cuál es la cantidad promedio de petróleo utilizada cada día por el sistema de calefacción central? (Pendiente "m"), f) Representación algebraica de la función (ecuación) $y = mx + b$, g) Sí el señor Pérez ordena más petróleo cuando la cantidad en el depósito se redujo a 700 litros, ¿qué tan seguido ordena petróleo para este depósito?

Procedimiento y resultados, a) variable independiente "x", número de días que transcurren; b) variable dependiente "y", litros de petróleo en el depósito; c) trazo de gráfica…

Figura 7.7. Gráfica del problema Consumo de petróleo



d) La cantidad de petróleo al ser llenado es la ordenada al origen $b = 1690\ L$, determinada en la gráfica;

e) la cantidad promedio de petróleo utilizada por día es la pendiente de la recta…

$$m = \frac{880 - 1420}{30 - 10}$$

$$m = -27\ L/día$$

f) la representación algebraica de la función es…

$$y = -27x + 1690$$

g) si se ordena el petróleo cuando el depósito tiene 700 L, se sustituye en la ecuación y se determina el día, o se puede determinar gráficamente…

$$700 = -27x + 1690$$

Resolviendo para x …

$$x = \frac{700 - 1690}{-27}$$

$$x = 36.6 \approx 37\ días$$

El profesor explica la solución mostrada anteriormente y enfatiza las características de las representaciones de las funciones lineales, gráfica y algebraica. Este problema, es sólo de introducción a la temática que se abordará en las próximas tareas.

7.1.14 Tarea 14. Variable dependiente e independiente

Por convención, la variable independiente se escribe como "x", varía arbitrariamente. La variable dependiente se escribe como "y" o, "$f(x)$" (efe de equis), su valor depende de "x". Las variables se determinan de acuerdo con el contexto.

Para cada situación que a continuación se señala, escribe "x" para la variable independiente y, escribe "y" para la variable dependiente.

Situación 1. Un resorte se alarga 2 cm por cada Kilogramo-fuerza que se le pone en tención.

La fuerza es la variable independiente "x", la longitud que se alarga el resorte es la variable dependiente "y".

Situación 2. El costo del servicio telefónico es de 90 centavos por cada minuto de llamada.

El costo es la variable dependiente "y", que depende del tiempo de llamada, variable independiente "x".

Situación 3. El tamaño de la población de animales crece 45 cabezas cada mes…

El tamaño de la población es la variable dependiente "y", el tiempo en meses es la variable independiente "x".

Situación 4. El costo total del agua es directamente proporcional a la cantidad de litros consumidos.

El costo del agua es la variable dependiente "y", los litros consumidos es la variable independiente "x".

Situación 5. La presión atmosférica depende de la altura con respecto al nivel del mar.

La presión atmosférica es la variable dependiente "y", la altura respecto al nivel del mar es la variable independiente "x".

Tabla 7.19. Resultados de Tarea 14. Equipos

Equipo	Cuestionamientos					
	1	2	3	4	5	Cal.
Equipo 1	1	0	0	1	1	3/5
Equipo 2	1	1	1	1	1	5/5

En el capítulo siguiente se muestran las dificultades y el apoyo cognitivo y metacognitivo proporcionado por el profesor en: comprensión del problema (matematización, determinación de variables).

Como en este caso, en la determinación de las variables, así como en otros que se señalan páginas adelante, la falta de comprensión o los conocimientos incompletos provocan dificultades en la solución de los problemas.

7.1.15 Tarea 15. Tabulación y graficación de la función lineal.

Primera parte. A continuación, se muestran dos funciones en su representación algebraica, para cada una, se proporciona una tabla con valores para "x" y un plano cartesiano. Completa la tabla con los correspondientes valores de "y", traza cada una de las gráficas y responde las preguntas correspondientes.

1. Representación algebraica | Representación tabular | Representación gráfica

$y_1 = 2x - 1$

x	y
-2	-5
-1	-3
0	-1
1	1
2	3
3	5

Ejemplo de cálculo

$y = 2(-2) - 1 = -5$

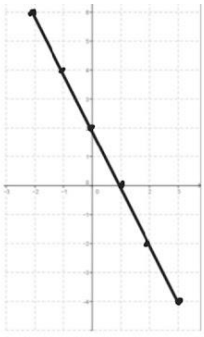
2. Representación algebraica | Representación tabular | Representación gráfica

$y_2 = -2x + 2$

x	y
-2	6
-1	4
0	2
1	0
2	-2
3	-4

Ejemplo de cálculo

$y = -2(-2) + 2 = 6$



Pregunta 1. ¿Se pueden trazar las gráficas de líneas rectas con tan sólo dos puntos?

Si, se pueden trazar las rectas con tan sólo dos puntos por donde pasa.

Pregunta 2. Las gráficas de las funciones 1 y 2 tienen distinta inclinación. De izquierda a derecha, la primera es hacia arriba y la segunda es hacia abajo. ¿Cómo se relaciona esta inclinación con la ecuación "escrita" de cada una de ellas?

La inclinación de la recta de la función 1, es hacia arriba y depende del signo positivo "+" del coeficiente de "x".

La inclinación de la recta de la función 2, es hacia abajo y depende del signo negativo "−" del coeficiente de "x"

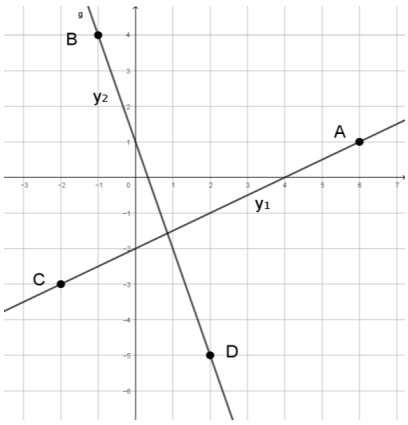
Resultados en tareas

Observación. En esta sesión, se nota la ausencia del Alumno 21. Se reporta enfermo. Debido a esto, no realiza las tareas 15, 16, 17, 18, 19, 20 y 21.

Por otro lado, los alumnos obtuvieron resultados correctos y lograron identificar que el sentido de inclinación de la gráfica depende del signo del coeficiente de "x", además, que dos puntos definen una recta.

7.1.16 Tarea 16. Localización de puntos sobre línea recta

A continuación, se muestran dos funciones en su representación algebraica y gráfica, en la representación gráfica se señalan algunos puntos. Identifica y escribe, en el espacio correspondiente, las coordenadas de cada uno de los puntos señalados.

Representación algebraica	Representación gráfica	Coordenadas de puntos: $P\ (x, y)$
		A *(6,1)*
$y_1 = \frac{1}{2}x - 2$		*B (-1,4)*
		C (-2,-3)
$y_2 = -3x + 1$		*D (2,-5)*

Al escribir las coordenadas, algunos alumnos (2/8) lo hicieron sin ponerlas dentro de un paréntesis, otros alumnos (4/8), las escribieron de forma incorrecta.

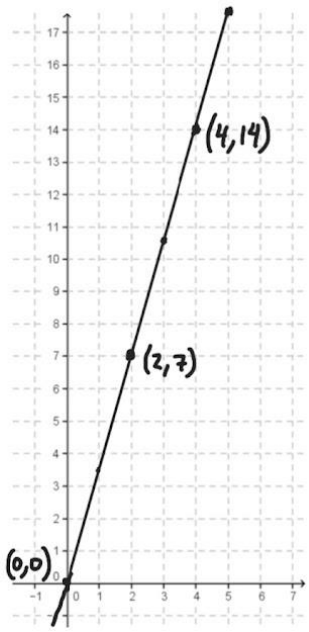
Se muestran las observaciones páginas adelante en la sección: Trazo de gráfica.

7.1.17 Tarea 17. Representaciones tabulares, gráficas y algebraicas

A continuación, se presentan cinco funciones en su representación tabular. En cada una de ellas: a) traza la gráfica y verifica que sean rectas, b) identifica la ordenada al origen, c) determina la pendiente, d) escribe la ecuación, e) en su caso, completa los valores de las tablas donde faltan.

1.

x	y
2	7
3	10.5
4	14
5	17.5



Considerando los puntos (2,7) y (4,14)…

$$m = \frac{14 - 7}{4 - 2}$$

$$m = 3.5$$

La recta cruza al eje "y" en el punto (0,0)…

$$b = 0$$

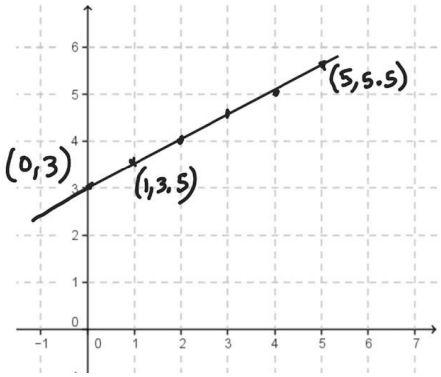
La ecuación de la recta es…

$$y = 3.5x$$

Los valores de la tabla se determinan identificando los patrones.

2.

x	y
1	3.5
2	4.0
3	4.5
4	5.0
5	5.5



Considerando los puntos (1, 3.5) y (5,5.5)…

$$m = \frac{5.5 - 3.5}{5 - 1}$$

$$m = \frac{1}{2}$$

La recta cruza al eje "y" en el punto (0,3)…

$$b = 3$$

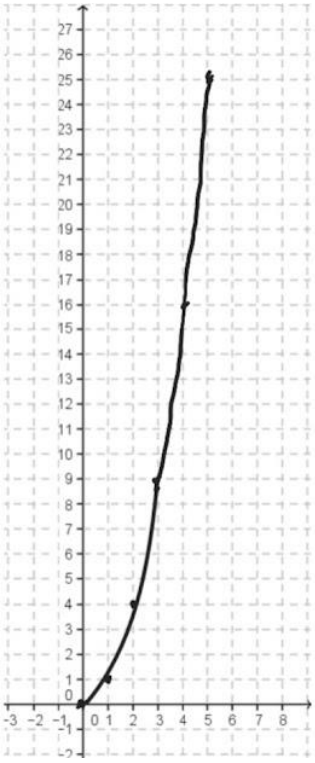
La ecuación de la recta es…

$$y = \frac{1}{2}x + 3$$

Los valores de la tabla se determinan identificando los patrones.

3.

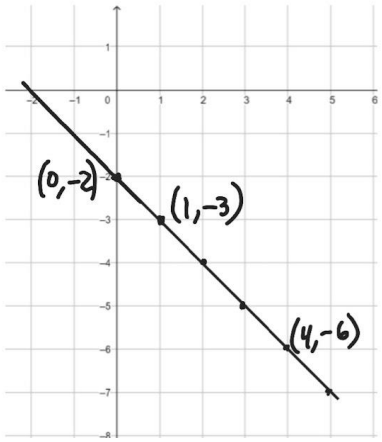
x	y
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25



Esta gráfica no corresponde a una recta.

4.

x	y
1	-3
2	-4
3	-5
4	-6
5	-7



Considerando los puntos (1,-3) y (4,-6)…

$$m = \frac{-6-(-3)}{4-1}$$
$$m = -1$$

La recta cruza al eje "y" en el punto (0,-2)…

$$b = -2$$

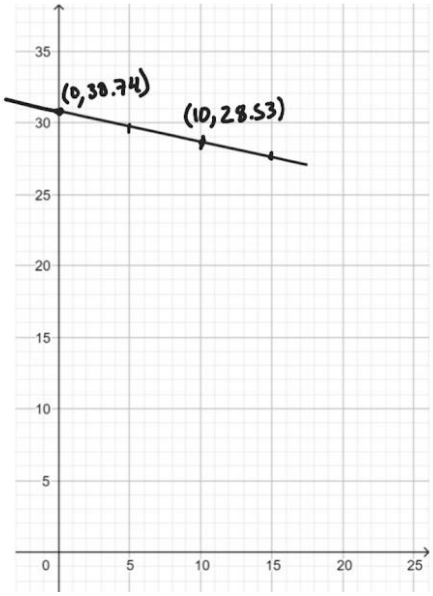
La ecuación de la recta es…

$$y = -x - 2$$

Los valores de la tabla se determinan identificando los patrones.

5.

x	y
0	30.74
5	29.63
10	28.53
15	27.42



Considerando los puntos (0,30.74) y (10,28.53)…

$$m = \frac{28.53-30.74}{10-0}$$
$$m = -0.221$$

La recta cruza al eje "y" en el punto (0,30.74)…

$$b = 30.74$$

La ecuación de la recta es…

$$y = -0.221x + 30.74$$

Cálculo de valores en la tabla.

$$y = -0.221(5) + 30.74$$
$$y = 29.63$$
$$(5,29.63)$$
$$y = -0.221(15) + 30.74$$
$$y = 27.42$$
$$(15,27.42)$$

Resultados en tareas

El profesor expuso el ejercicio 1 enfatizando el cálculo de la pendiente y, la determinación de la ordenada al origen por medio de la gráfica.

Tabla 7.20. Resultados de Tarea 17. Individual

Alumno	Cuestionamientos				
	2	3	4	5	Cal.
11	1	1	1	0	3/4
12	1	1	1	1	4/4
13	1	1	1	1	4/4
14	1	0	1	1	4/4
21					
22	1	1	1	0	3/4
23	1	1	1	1	4/4
24	1	1	1	1	4/4

Se tuvieron dificultades en la determinación de la pendiente, en las respuestas de la tabla de valores del problema 5, en la sustitución de la ecuación para encontrar los valores en la tabla. Sin embargo, la mayoría de los alumnos determinan correctamente la ecuación.

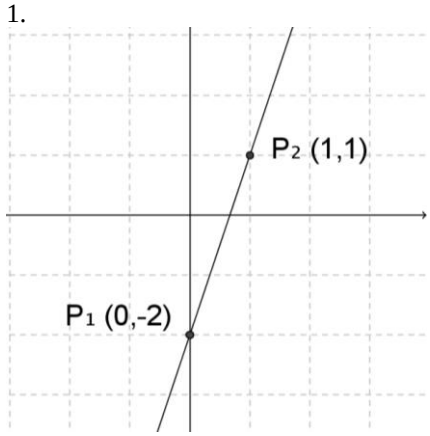
Páginas adelante se muestran las dificultades en las secciones: determinación de la pendiente, razón de cambio o, factor de proporcionalidad; tabla de valores.

La determinación de la pendiente a partir de dos puntos es un procedimiento que está en proceso de asimilación, de ahí las dificultades presentadas. Sin embargo, unas tareas adelante, los alumnos lograron dominar este procedimiento.

7.1.18 Tarea 18. De la gráfica a la ecuación

A continuación, se muestran cinco gráficas de funciones lineales. De acuerdo con los datos que se muestran en las gráficas, escribe la ecuación que corresponda a cada una de ellas.

1.



Determinación de pendiente…

$$m = \frac{1-(-2)}{1-0}$$

$$m = 3$$

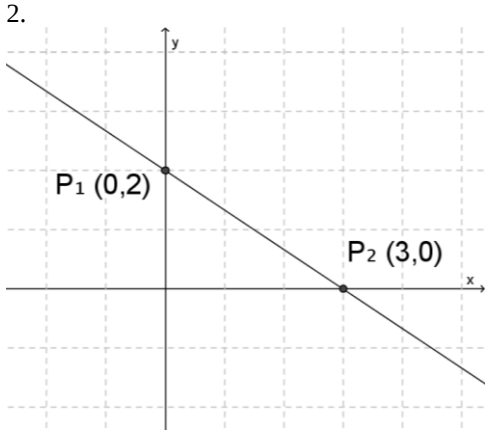
La ordenada al origen se determina gráficamente…

$$b = -2$$

Ecuación…

$$y = 3x - 2$$

2.



Determinación de pendiente…

$$m = \frac{0-2}{3-0}$$

$$m = -\frac{2}{3}$$

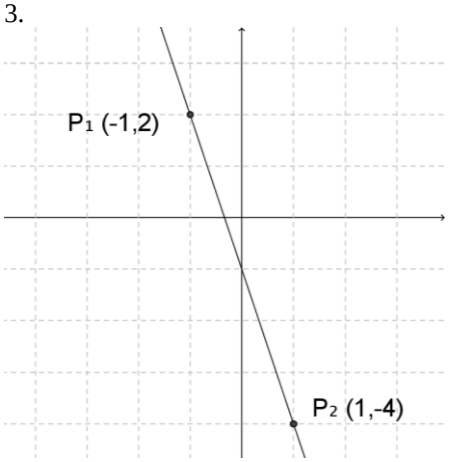
La ordenada al origen se determina gráficamente…

$$b = 2$$

Ecuación…

$$y = -\frac{2}{3}x + 2$$

3.



Determinación de pendiente…

$$m = \frac{-4-2}{1-(-1)}$$

$$m = -\frac{6}{2} = -3$$

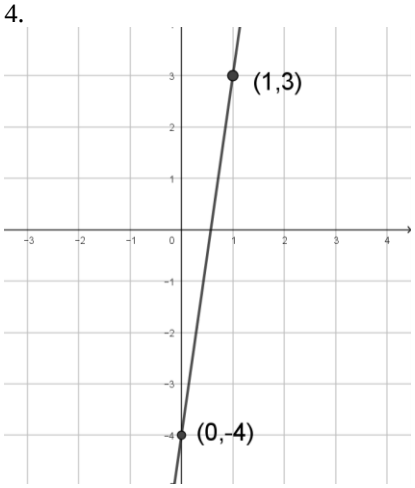
La ordenada al origen se determina gráficamente…

$$b = -1$$

Ecuación…

$$y = -3x - 1$$

4.



Determinación de pendiente…

$$m = \frac{3-(-4)}{1-0}$$

$$m = 7$$

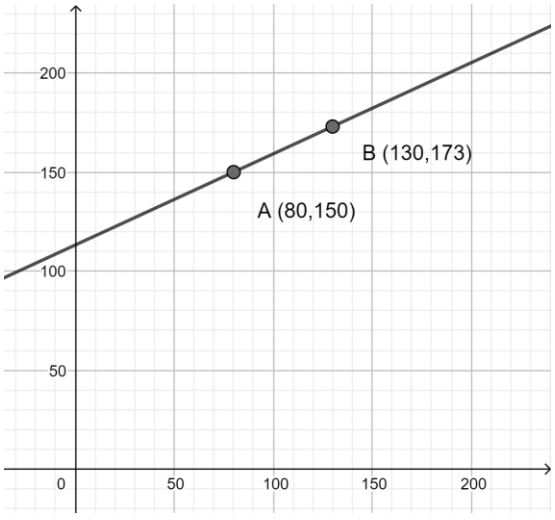
La ordenada al origen se determina gráficamente…

$$b = -4$$

Ecuación…

$$y = 7x - 4$$

5.



Determinación de pendiente…

$$m = \frac{173-150}{130-80}$$

$$m = 0.46$$

La ordenada al origen se determina gráficamente…

$$b \approx 113$$

Ecuación…

$$y \approx 0.46x + 113$$

Resultados en tareas

Tabla 7.21. Resultados de Tarea 18. Individual

Alumno	Cuestionamientos				
	1	3	4	5	Cal.
11	0	1	1	1	¾
12	1	1	1	1	4/4
13	1	1	1	1	4/4
14	1	1	1	0	¾
21					
22	1	1	1	1	4/4
23	1	1	1	1	4/4
24	1	1	1	1	4/4

El profesor expuso la solución del ejercicio 2 como se muestra renglones atrás, luego los alumnos trabajaron en forma individual y en equipo posteriormente.

Se observaron algunas dificultades en la determinación de la pendiente y la ordenada al origen.

Al ver las dificultades que presentaron los alumnos en trabajo individual, el profesor explicó nuevamente la forma de determinar la pendiente del ejercicio 2.

Páginas adelante, se muestran las dificultades en los apartados: determinación de ordenada al origen; determinación de la pendiente, razón de cambio o, factor de proporcionalidad.

7.1.19 Tarea 19. Determinación de la ecuación y cálculo de coordenadas

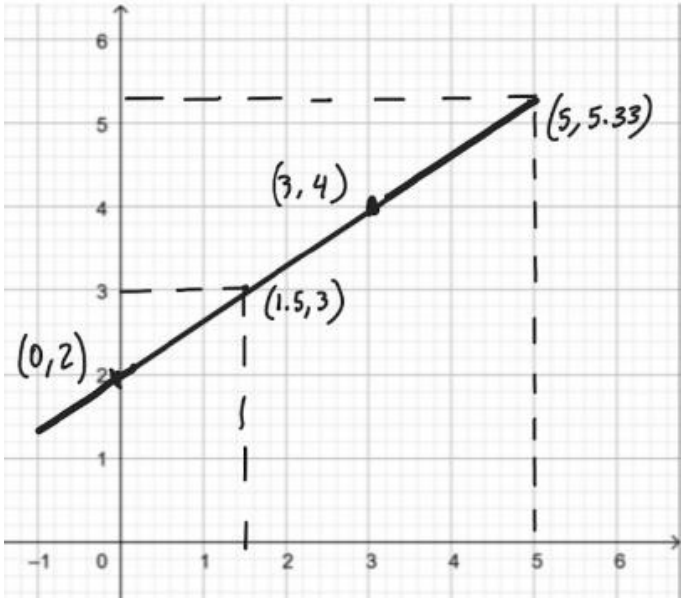
En cada uno de los siguientes problemas contesta lo que se pide.

Problema 1. Una parte de la representación tabular de una función lineal se muestra a continuación:

"x"	"y"
0	2
3	4

a) Traza su gráfica, determina la pendiente, la ordenada al origen y su ecuación.
b) Cuando la variable independiente es $x = 5$, ¿Cuál es el valor de la variable dependiente "y"?
c) Cuando la variable dependiente es $y = 3$, ¿Cuál es el valor de la variable independiente "x"?

Figura 7.8. Gráfica correspondiente al problema 1 de la tarea 19



Determinar la ecuación,

$$m = \frac{4-2}{3-0}$$

$$m = \frac{2}{3}$$

$$b = 2$$

$$y = \frac{2}{3}x + 2$$

b) sustitución de $x = 5$ y cálculo de y.

$$y = \frac{2}{3}(5) + 2$$

$$y = \frac{16}{3} \approx 5.33$$

(5,5.33)

c)sustitución de $y = 3$ y cálculo de x.

$$3 = \frac{2}{3}x + 2$$

$$x = \frac{(3-2) * 3}{2}$$

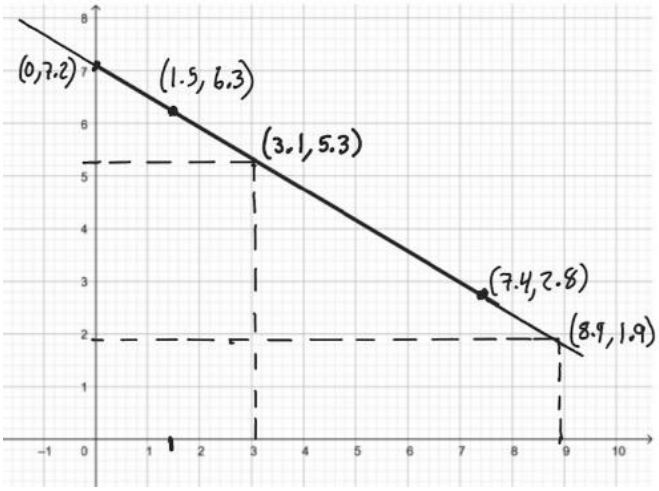
$$x = \frac{3}{2} = 1.5$$

(1.5,3)

Problema 2. Dos parejas ordenadas de una función lineal son: (1.5,6.3) y (7.4,2.8).

a) Traza la gráfica, determina la pendiente, la ordenada al origen y su ecuación.
b) Si la variable independiente es $x = 3.1$, ¿qué valor tiene la variable dependiente "y"?
c) Si la variable dependiente sea $y = 1.9$, ¿qué valor tiene la variable Independiente "x"?

Figura 7.9. Gráfica correspondiente al problema 2 de la tarea 19



a)

$$m = \frac{2.8 - 6.3}{7.4 - 1.5}$$

$$m = -\frac{35}{59} \approx -0.59$$

$$b \approx 7.2$$

$$y \approx -0.59x + 7.2$$

b) sustitución de $x = 3.1$ y cálculo de y.

$$y \approx -0.59(3.1) + 7.2$$

$$y \approx 5.37$$

(3.1,5.3)

c)sustitución de $y = 1.9$ y cálculo de x.

$$1.9 \approx -0.59x + 7.2$$

$$x \approx \frac{(1.9 - 7.2)}{-0.59}$$

$$x \approx 8.9$$

(8.9,1.9)

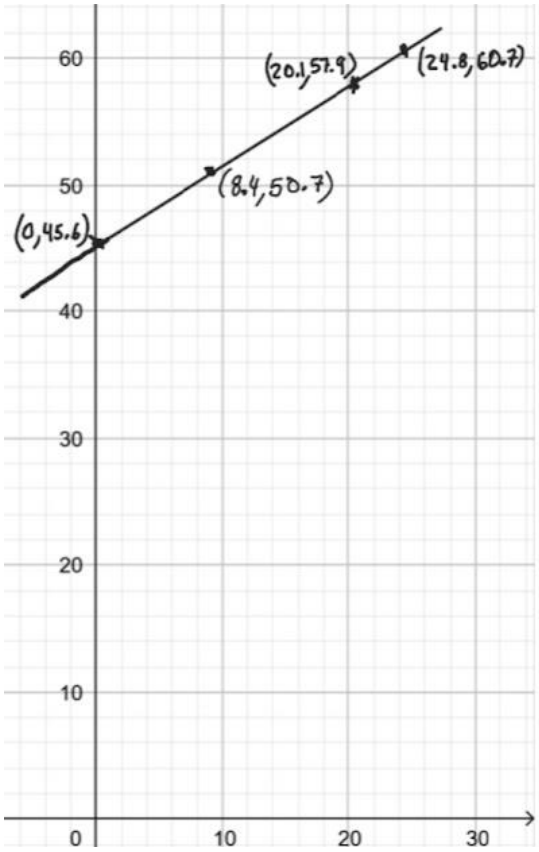
Resultados en tareas

Problema 3. A continuación, se muestra algunos valores de la representación tabular de una función lineal.

Figura 7.10. Gráfica y tabulación correspondiente al problema 3 de la tarea 19

"x"	"y"
0	45.6
8.4	50.7
20.1	57.9
24.8	60.7

Traza la gráfica.
Determina la ecuación.
Determina los valores faltantes en la tabla.



b) determinar la ecuación,

$$m = \frac{57.9-45.6}{20.1-0} \qquad m \approx 0.61$$

$$b \approx 45.6$$

$$y \approx 0.61x + 45.6$$

Inciso c) determinación de valores en la tabla,

El valor $x = 8.4$*, se sustituye en la ecuación,*

$$y \approx 0.61(8.4) + 45.6$$

$$y \approx 50.7$$

$$(8.4,50.7)$$

El valor de $y = 60.7$*, se sustituye en la ecuación,*

$$60.7 \approx 0.61x + 45.6$$

$$x \approx \frac{60.7 - 45.6}{0.61}$$

$$x \approx 24.75$$

$$(24.8,60.7)$$

Resultados en tareas

Tabla 7.22. Resultados de Tarea 19. Individual

Alumno	Problemas		
	1	3	Cal.
11	0	1	1/2
12	1	1	2/2
13	1	1	2/2
14	1	0	½
21			
22	1	1	2/2
23	1	0	½
24	1	0	½

El profesor expuso el problema 2. Se observaron algunas dificultades con los alumnos 11, 22 y 24 en la determinación de coordenadas, sustitución de abscisa y determinación de ordenada y viceversa.

Los detalles de las dificultades se pueden ver páginas adelante, en la sección cuyo subtítulo es: determinación de coordenadas de un punto.

Las dificultades observadas en esta tarea son por la falta de automatización en procedimientos algebraicos (Barton, 2018; Bransford *et al* ,1999; Stillman, 2004). Es recomendable que los alumnos adquieran dicha automatización antes o durante la solución de este tipo de problemas.

Cabe señalar que el autor Barton (2018), señala que: la automatización en los procedimientos y algoritmos son fundamentales. Si un alumno tiene automatizados los procedimientos matemáticos, al resolver un problema, tendrá más tiempo para el análisis y la comprensión.

7.1.20 Tarea 20. Tiempos de oro olímpico

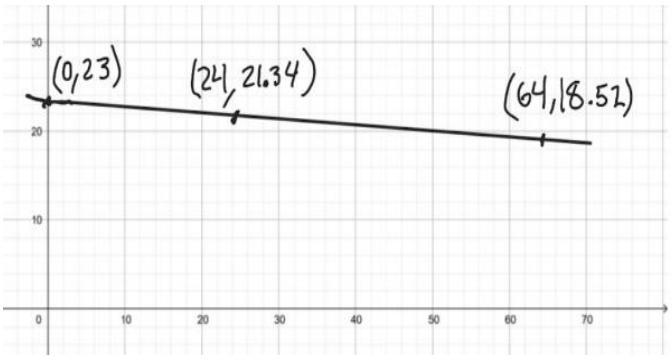
A continuación, se muestran los registros, en segundos, de las ganadoras de la prueba de 200 m planos para mujeres en distintas olimpiadas. Con los datos que se muestran, determina un modelo matemático que registre el tiempo en segundos, con que se ganó la prueba, respecto al tiempo transcurrido en años. Así mismo, determina el tiempo que registrará la ganadora en las olimpiadas de los Ángeles 2028.

Tabla 7.23. Valores del problema 20

Año	1964	1988	…	2028
Ajuste numérico de los años 1964=0	0	24	…	64
Tiempo (segundos)	23.00	21.34	…	¿?

La variable independiente son los años transcurridos, considerando el año de inicio 1964. La variable dependiente es el tiempo de la ganadora. Se determina la pendiente, la ordenada al origen y la ecuación. Posteriormente se determina el tiempo de la ganadora en 2028.

Figura 7.11. Gráfica correspondiente al problema, Tiempos de oro olímpico



Procedimiento. Determinación de la ecuación y cálculo de tiempo.

$m = \frac{21.34-23.00}{24-0}$ $\quad m \approx -0.07$,

$b = 23.00$

$$y \approx -0.07x + 23$$

Cuando $x = 64$, se sustituye en la ecuación y se determina el tiempo de la ganadora para el año del 2028.

$$y \approx -0.07(64) + 23$$

$y \approx 18.52$ s.

Tabla 7.24. Resultados de Tarea 20. Individual

Alumno	Cuestionamientos				
	Comprensión	Matematización	Sol. De Problemas matemáticos	Resultado	Cal.
11	1	1	1	1	4/4
12	1	1	1	1	4/4
13	1	1	1	1	4/4
14	1	1	1	1	4/4
21					
22	1	1	1	1	4/4
23	1	1	1	1	4/4
24	0	0	0	0	0/4

En la actividad cotidiana, en el salón de clase se presentan situaciones que, muchas veces, no están al alcance de ser controladas: el alumno 24 reporta: "*se me dificultó todo, pero creo que fue por no desayunar".* Sin embargo, académicamente, el alumno fue apoyado por sus compañeros para la comprensión y solución del problema.

Los dos equipos, con apoyo del profesor, logran determinar las variables, como se indica páginas adelante, en la sección, comprensión del problema y matematización (determinación de variables).

7.1.21 Tarea 21. Escalas de temperaturas

En el nivel del mar se tiene una atmosfera de presión. A esa presión, el punto de congelación del agua es de 0°C que corresponde a 32 °F, y el punto de ebullición del agua es de 100°C que corresponden a 212°F. Halla una ecuación que represente la relación entre las temperaturas Celsius (°C) y Fahrenheit (°F). Finalmente, completa la siguiente tabla.

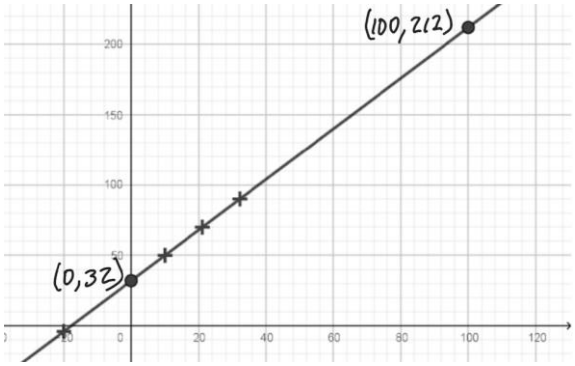
Tabla 7.25. Conversiones para el problema Escalas de temperatura

°C	-20	10°	21.1	32.2
°F	-4	50	70°	90°

Se considera la variable independiente a la escala de grados centígrados (x), la variable dependiente la escala Fahrenheit (y). Se consideran las parejas ordenadas señaladas en el problema

(0, 32) y (100, 212), se traza una gráfica. Posteriormente se determina la ecuación lineal. Finalmente se realizan los cálculos necesarios para completar la tabla.

Figura 7.12. Gráfica del problema Escalas de temperatura



Determinación de la ecuación.

$m = \frac{212-32}{100-0}$ $m = 1.8$ $b = 32$

$y = 1.8x + 32$

Conversiones de grados centígrados a Fahrenheit,

$y = 1.8(-20) + 32 = -4$ (-20,-4)

$y = 1.8(10) + 32 = 50$ (10,50)

Conversiones de grados Fahrenheit a centígrados,

Resolviendo la ecuación para x,

$$x = \frac{y - 32}{1.8}$$

Sustituyendo los valores requeridos,

$x = \frac{70-32}{1.8} = 21.1$

(21.1,70)

$x = \frac{90-32}{1.8} = 32.2$ (32.2, 90)

Tabla 7.26. Resultados de Tarea 21. Individual

Alumno	Cuestionamientos				
	Comprensión	Matematización	Sol. De problemas matemáticos	Conversiones	Cal.
11	1	0	1	1	¾
12	1	0	1	1	¾
13	1	1	1	1	4/4
14	1	1	1	1	4/4
21					
22	1	1	1	1	4/4
23	1	1	0	0	2/4
24	1	1	1	1	4/4

Las observaciones y el análisis para este problema se presentan páginas adelante en la sección: Observaciones y análisis de la tarea 21 (modelización).

Los alumnos 11 y 12 tuvieron dificultades en la matematización del problema (Stillman, 2004), estas dificultades se presentaron en el momento de determinar los datos útiles del problema.

Consideraciones de la presentación de este capítulo.

Como se señaló al inicio de este capítulo, solamente se han mencionado un método de solución para cada tarea, los resultados, algunas dificultades, apoyos cognitivos y metacognitivos en lo general.

Algunos de los procedimientos y resultados se retoman en el siguiente capítulo para su análisis, sobre todo en las dificultades presentadas por los alumnos en cada una de las subcompetencias de modelización, solución de problemas y en el proceso metacognitivo.

8 ANÁLISIS CUALITATIVO EN TAREAS. SEGUNDA ETAPA DE IMPLEMENTACIÓN

En este capítulo se presenta el análisis cualitativo de la actuación de los estudiantes en el proceso de aprendizaje, trabajo con tareas. Para realizar el análisis se han considerado las etapas del ciclo de modelización de Stillman (2011), con las subcompetencias. Este análisis se ha hecho para investigar las dificultades en el aprendizaje de los estudiantes, sus causas, y las acciones del profesor para superar dichas dificultades.

Como se ha indicado previamente, uno de los propósitos de la presente investigación es analizar el aprendizaje a través de la modelización y resolución de problemas. Las observaciones y el análisis se enfocan en: el aprendizaje de funciones lineales, el proceso metacognitivo de los alumnos y, el desarrollo de las subcompetencias de modelización y solución de problemas.

Para el aprendizaje del tema matemático, se ha considerado que el alumno pueda reconocer la función lineal en las formas de representación: verbal, tabular, gráfica, algebraica y, pueda hacer la transición entre ellas (Duval, 1999).

Según Stillman (2011), en la modelización de un problema de la realidad, el proceso metacognitivo de los estudiantes (o su ausencia), influye en la transición de las etapas del ciclo de modelización: comprensión del problema, matematización, resolución de problemas matemáticos, comprobación y validación.

Sin embargo, Stillman (2004), señala los siguiente. Para que los alumnos puedan tener comprensión de problemas, necesitan: un repertorio bien desarrollado de estrategias cognitivas y metacognitivas, así como un rico acervo de conceptos, hechos, procedimientos y experiencias

matemáticas; conocimiento enciclopédico general indirecto del mundo y de los significados de las palabras; y conocimiento verdaderamente experiencial a partir de experiencias personales fuera de la escuela o en materias escolares más prácticas.

Para mostrar algunas características y dificultades del aprendizaje y del desarrollo del proceso cognitivo y metacognitivo de los estudiantes, se muestran las observaciones y el análisis de las tareas 8 y 21, la experiencia en el Bungee y, Escalas de Temperatura (problemas reales). También se muestran las observaciones y análisis de la Tarea 11, el resorte y su carga (problema hipotético).

Posteriormente se muestran algunas observaciones y análisis del trabajo de los alumnos cuando se enfrentaron a las tareas.

8.1 Análisis cualitativo de las tareas

Procedimiento

La primera observación del trabajo de los estudiantes la realizó el profesor en distintos momentos de la sesión presencial. Donde realizó sus observaciones y, en caso de dificultades, decidió el tipo de apoyo que proporcionó a los estudiantes (metacognitivo o cognitivo), además en el trabajo colaborativo las actividades se grabaron en video, como se señaló en la metodología, luego se recopilaron los datos, al finalizar cada sesión.

Una vez recabados los resultados, con los formatos de trabajo de los estudiantes y los vídeos, se observaron y analizaron las respuestas, los procedimientos, su trabajo colaborativo (cognitivo y metacognitivo), así como la interacción con el profesor. A continuación, se indica la forma en que se efectuó el análisis.

Análisis cualitativo

Primeramente, se calificaron las respuestas de los estudiantes en sus hojas de trabajo y se realizó un pequeño análisis cuantitativo, los resultados se han mostrado en el capítulo anterior.

Posteriormente, se identificaron las respuestas erróneas y si analizaron, para determinar las causas. Así mismo, se observaron los vídeos tomados en el trabajo colaborativo de los estudiantes en el momento en que trabajaron las dificultades identificadas (situaciones de bandera roja).

Marco conceptual para el análisis

El orden de las observaciones y análisis se ha hecho de acuerdo con el ciclo de modelización (Stillman *et al*, 2007): comprensión del problema, matematización, solución de problemas matemáticos, interpretación de resultados y comprobación. Las acciones o las respuestas que deben realizar los estudiantes, por cada subcompetencia, se ha indicado en la metodología, en la sección cuyo título es "subcompetencias trabajadas por tarea".

Una vez identificadas las dificultades o, respuestas a situaciones de bandera roja, se procedió a su clasificación de acuerdo con Stillman (2011): metacognición rutinaria, ceguera metacognitiva, vandalismo metacognitivo, espejismo y desviación metacognitivos. Con sus diferentes causas: falta de reflexión, conocimientos incorrectos o incompletos y, aquellas en que se requiere revisión de esquemas, estas últimas no se presentaron.

Una vez identificadas las causas (falta de reflexión, conocimientos incompletos o incorrectos), se procedió a determinar detalladamente, los motivos por los cuales se presentaron. Así mismo se determinó cuáles fueron los apoyos proporcionados por el profesor que fueron eficientes o no.

Análisis cualitativo

Finalmente se realiza un resumen de la información recabada: dificultades, causas, trabajo cognitivo y metacognitivo eficiente, superación de dificultades, etc.

8.1.1 Análisis de la Tarea 8, La experiencia en el Bungee (real)

La Tarea 8 consiste en determinar un modelo que vincule el número de ligas, con la longitud de caída de una muñeca, y determinar el número de ligas necesarias para una caída de 4.3 m, esta longitud no es arbitraria, ya que se comprobaron los cálculos experimentalmente y, es la altura desde el pasamanos del barandal del primer piso de un edificio del colegio, al suelo. Esta corresponde a una pregunta planeada para la comprobación de resultados.

Antes de comenzar con la lectura del problema, el profesor indica que en muchos problemas reales los matemáticos o investigadores, necesitan conseguir los datos para la solución, ya sea por experimentación o por investigación bibliográfica (apoyo cognitivo).

A continuación, se señalan las actividades realizadas para la comprensión del problema, su planteamiento, la obtención de datos y su solución.

En cada equipo, un integrante lee el problema en voz alta. Al término de esta primera lectura, el profesor les señala que se cuenta con la muñeca, cinta métrica y una cantidad suficiente de ligas.

Se observa que ningún miembro de los equipos propone alguna acción para su solución. Para motivar la reflexión, el profesor decide qué se realicen 2 lecturas más (relectura, Stillman, 2004).

Luego de 3 lecturas del problema, ningún estudiante propone alguna forma de solución.

Análisis cualitativo

Se observa la falta de comprensión del problema y, en consecuencia, de las actividades qué se requieren para su solución, en este momento se decide apoyar aún más a los estudiantes con un ejemplo concreto. El profesor decide enseñarles, la muñeca sujetada a las ligas y mostrarles la caída (apoyo cognitivo, Stillman, 2004).

Luego de esta última actividad, se observa que los alumnos han comprendido los requerimientos del problema.

A continuación, se señalan algunos "momentos" del trabajo de los estudiantes para la experimentación y la obtención de los datos requeridos.

- Primeramente, se observa en ambos equipos, que ahora tienen claro que deben medir la longitud de caída respecto al número de ligas, para obtener un factor $\frac{longitud,\ cm}{número\ de\ ligas}$ y hacer una proporción (*matematización*).
- En la discusión del equipo 2, se observa que quieren medir una liga estirada y de ahí hacer los cálculos, estrategia de experimentación errónea. Conocimientos limitados acerca del contexto, falta de experiencia en resolución de problemas reales.

  Ceguera metacognitiva por falta de reflexión, Stillman (2011), es decir una situación errónea que no se percibe. En este punto, y analizando la situación: i) el hecho de estirar la liga y medir, refleja la falta de experiencia de los alumnos, ii) ellos si están reflexionando, pero sus acciones no son eficientes, iii) les falta experiencia en problemas de modelización donde se requiera realizar una experimentación como la del problema.

  Se interpreta entonces que esta falta de reflexión es por la falta de experiencia en solución de problemas y/o falta de conocimientos.
- El profesor les señala:

"Imagínense la situación"

¿Qué quieren medir?

Luego de unos momentos de reflexión, deciden poner primeramente 3 ligas y medir la longitud de caída. Finalmente deciden determinar, cuántas ligas son necesarias para que la longitud de caída sea de un metro.

- En video se observa: alumno 12 del equipo 1, *"vamos a poner una liga y medimos la caída, luego dos y así sucesivamente, vamos haciendo una tabla".* Sin embargo, su proposición no convence a sus compañeros.

En otro momento, los alumnos del equipo 1, pretenden hacer la medición del número de ligas, sin tomar en cuenta el estiramiento que se genera al dejar caer la muñeca, es decir solamente medir la "cadena" de ligas, esto les ocasiona un error en la representación del fenómeno, situación de ceguera metacognitiva, error sin ser percibido, por falta de reflexión (falta de conocimientos), Stillman (2011). Al observar, el profesor les recomienda que también realicen las mediciones dejando caer la muñeca. Después de las mediciones, el profesor les pregunta:

¿Cuál de las dos formas de medir, representa en forma real el fenómeno que se quiere representar?

Luego de unos momentos de reflexión, deciden tomar las medidas cuando la muñeca cae.

- Al observar las dificultades para realizar la experimentación, el profesor le sugiere, al equipo 2, tomar la parte superior del pizarrón como punto de partida, dibujar una escala de

diez en diez centímetros y, que esa escala les sirva para medir la caída, como se observa en la Figura 8.1.

- En otro momento, el equipo 1 decide medir la longitud de caída con 6 ligas.
- Ambos equipos determinan experimentalmente el factor $\frac{1m}{6\ ligas}$ y, para una caída de 4.3 m realizan una regla de tres.

$$\frac{1m}{6\ ligas} = \frac{4.3m}{x}$$

Donde: $x = 25.8\ ligas$. *(resolución de problemas matemáticos).*

- Los equipos aproximan a 26 ligas. Después de unos momentos de reflexión, en ambos equipos, los alumnos deciden que sus cálculos son correctos *(interpretación de resultados*).
- Realizan la comprobación, dejan caer la muñeca, sujeta de las ligas por el barandal del primer piso del edificio donde está el salón de clase, y el resultado es correcto *(validación*).

Figura 8.1. Tarea 8. Trabajo, medición de longitud de caída por número de ligas

Análisis cualitativo

Cabe señalar que antes de realizar la comprobación, se presentó una discusión en el equipo 1. La discusión fue debido a que la muñeca no debía tocar el piso.

El alumno 14: *"si tuviéramos una balanza para conocer el peso podríamos determinar exactamente el número de ligas".* Según Stillman (2011), esta situación corresponde a un "espejismo metacognitivo", donde el modelizador toma medidas innecesarias, porque se percibe una dificultad donde no existe, esto puede "descarrilar" la solución.

El alumno 13 contesta: *"ya no es necesario, porque ya se determinó la longitud de la caída con el peso de la muñeca".*

Se debe considerar que los alumnos están en una etapa donde les llega mucha información de distintas materias, en este caso de Física, y esa información está en proceso de ser asimilada, en proceso de construcción.

Este problema ha requerido de todos los pasos del ciclo de modelización y sus subcompetencias: comprensión del problema, obtención de datos, matematización, resolución de problemas matemáticos, comprobación y validación.

Consideraciones importantes de la solución de este problema de modelización y el apoyo cognitivo y metacognitivo.

- El tiempo dedicado a la actividad de lectura (3 veces), fue positivo: motiva a realizar un esfuerzo de imaginación y reflexión.
- El apoyo de mostrar el ejemplo concreto, caída de la muñeca, se observa positivo, ya que fue el detonador de la comprensión del problema.

Análisis cualitativo

- Se reconoce que, una vez comprendido el problema, rápidamente los estudiantes proponen la estrategia de realizar la medición, aplicar una regla de tres y, esta operación la hacen eficientemente.
- Las dificultades mostradas en la comprensión del problema nos muestran la falta de experiencia (falta de conocimientos), de los alumnos en la solución de problemas reales, donde se requiera experimentación.
- El apoyo del profesor fue de orientación y de reflexión, y no de mostrarles una solución.
- La acción previa de determinar la altura de caída 4.3m resultó eficiente, primero para el cálculo matemático y luego para la comprobación "experimental" del resultado.

8.1.2 Análisis de la tarea 11, El resorte y su carga (hipotético)

Las dos dificultades que se presentaron para realizar los cálculos aritméticos fueron, la comprensión del problema y, la determinación del factor de proporcionalidad.

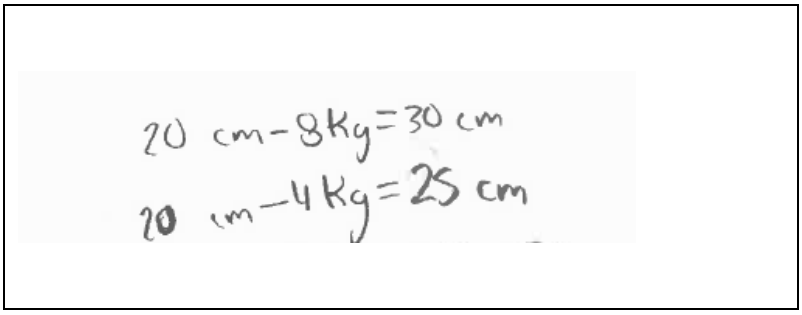
Las condiciones del problema son: i) longitud del resorte sin carga, 20 cm, ii) la longitud del resorte con 8 Kg de carga es de 30 cm, iii) preguntas, determinar la longitud cuando se aplican 4 Kg, cuando se aplican 15 Kg, y de determinar la ecuación de elasticidad del resorte.

En video se observa que el alumno 21, después de reflexionar unos cinco minutos expresa:

- Alumno 21: *"es lógico, la longitud para 4 Kg es de 25 cm. Porque si con nada es de 20 cm y con 8 Kg se estira hasta 30 cm, entonces con 4Kg su longitud es de 25 cm, pero no sé cómo hacer las cuentas".* Se muestra su razonamiento escrito.

Análisis cualitativo

Figura 8.2. Tarea 11. Respuesta de alumno 21



La respuesta del alumno de forma verbal es correcta y llega al resultado solamente analizando los datos. Sin embargo, es incapaz de expresarlo aritméticamente. Posteriormente empieza a escribir operaciones las cuales no son correctas.

Esto es una dificultad en la transición de la representación verbal a la aritmética, falta de comprensión (Duval, 1999), se puede catalogar metacognición rutinaria con conocimientos incompletos.

El alumno 11 y los alumnos del equipo 2 plantean de manera errónea ecuaciones de proporcionalidad para determinar las longitudes del resorte con 4 y 15 Kg.

Ecuaciones erróneas	Ecuaciones correctas
$\frac{8}{4}=\frac{20}{x}$	$\frac{10\ cm}{8Kg}=\frac{x\ cm}{4Kg}$ a la longitud resultante se le suman 20 cm.
$\frac{8}{15}=\frac{20}{x}$	$\frac{10cm}{8Kg}=\frac{x\ cm}{15\ Kg}$ a la longitud resultante se le suman 20 cm.

No consideraron que el resorte tiene una longitud original de 20 cm, y cuando se le coloca un peso de 8 Kg se estira hasta 30 cm. Por lo que el factor de proporcionalidad es $(\frac{10}{8})$ y, no es $(\frac{20}{8})$. Ceguera metacognitiva por conocimientos incompletos.

El alumno 22 menciona:

Análisis cualitativo

"se me complicó porque no había considerado que la longitud inicial del resorte es de 20 cm, y con 8 Kg solamente se estira 10 cm"

Posteriormente se observó que, de los dos equipos, 3/8 alumnos logran matematizar aritméticamente pero no algebraicamente. Nuevamente vemos que se manifiesta ceguera metacognitiva por "conocimientos incompletos", Stillman (2011).

Se debe considerar que los alumnos se encuentran en la frontera que va de la aritmética y el álgebra. Cuando los estudiantes matematizan aritméticamente se les muestra la siguiente tabla, la cual implica un "orden" en las cantidades trabajadas.

Tabla 8-1. Tabulación de problema 11, orden en los resultados aritméticos

Carga, Kg	Largo, cm
0	20
4	25
8	30
15	38.75

Se observó que 8/8 alumnos, en un principio, no pudieron determinar la ecuación,

$$y = 1.25x + 20$$

Para el alargamiento del resorte, en parte porque no sabían determinar las variables. Para motivar la matematización algebraica, a la tabla anterior, se le añadió un renglón (el segundo) con las variables x, y.

Análisis cualitativo

Tabla 8-2. Tabulación de problema 11, señal algebraica

Carga, Kg	Largo, cm
$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$
0	20
4	25
8	30
15	38.75

Es decir, con la tabla, se está asignando la variable dependiente "y" a los centímetros de estiramiento y, la variable independiente "x" a los Kilogramos de carga, reconocimiento de señales matemáticas (Stillman, 2004).

El hecho de agregar las variables en el segundo renglón de la tabla ayudó para mejorar la comprensión de los estudiantes, finalmente, con este apoyo visual cognitivo 4/8 estudiantes logran determinar la ecuación correctamente.

Se observó que algunos alumnos trabajan en desorden, unos cálculos por aquí, otros por allá. Las tablas de valores sirven para ordenar los datos del problema y, los valores que van determinando. Por lo que es altamente recomendado motivar la elaboración de tabla de valores, organización de información (Stillman, 2004).

A los estudiantes que no pudieron determinar la ecuación, se les apoya de la siguiente manera. Apoyo cognitivo.

- Profesor: "*considerando la carga con la literal 'x', y la longitud con la literal 'y'. Anotar en forma de ecuación, los cálculos realizados para la primera pregunta*".
- Profesor: "'y' es *igual…"*
- *Alumnos: "*$1.25x$*…"*
- *Profesor: "más…"*
- *Alumnos: 20.*

Análisis cualitativo

así llegan a la expresión:

$$y = 1.25x + 20$$

En el equipo 2, el Alumno 24 menciona: "*al principio se nos complicó demasiado, tratamos de resolverlo con regla de tres, lo cual es incorrecto, después, con la ayuda de la tabla pudimos comprender que el alargamiento con 8 Kg solamente es de 10 cm. Luego se nos facilitó lo demás*".

Se observa la gran dificultad de pasar de la aritmética al algebra. Por medio de este procedimiento:

Operaciones aritméticas $\rightarrow$ expresión algebraica

Sin embargo, tareas adelante, para obtener la ecuación se realizará una transición de representaciones (tabular, gráfica y algebraica), donde los resultados son más eficientes.

8.1.3 Análisis de la Tarea 21, Escalas de temperatura

El problema consiste en modelizar la conversión de las escalas de temperaturas Fahrenheit y Celsius. Determinar una ecuación de conversión, calcular algunas conversiones de grados Celsius a grados Fahrenheit y viceversa.

Esta es la última tarea de la secuencia, se debe considerar que se ha trabajado previamente con: determinación de dependencia de variables y su asignación, elaboración de tabla de valores, trazo de gráfica, determinación de ordenada al origen, pendiente y ecuación, determinación de ordenada para una abscisa determinada y viceversa. Todo esto en ejercicios matemáticos, y un problema real, temática previamente estudiada, (Stillman, 2004).

Análisis cualitativo

A continuación, se presenta el análisis del trabajo de los estudiantes, desde la lectura del problema hasta la solución y comprobación.

Primeramente, un miembro de cada equipo lee el problema dos veces en vos alta. Posteriormente los alumnos empiezan a reflexionar y analizar el problema.

En trabajo colaborativo se observa:

- El alumno 14 del equipo 1 hace un cálculo de proporcionalidad y comenta: *"se deben hacer algunas proporciones".* Este se puede considerar un error por conocimientos incompletos, donde no se percata del error, Stillman (2011). Sin embargo, un compañero contesta lo siguiente.

  El alumno13 contesta: "*primero se debe determinar cuál es 'x' e 'y'"*. Además, señala: *"se puede tomar 'x' la escala Celsius e 'y' la escala Fahrenheit"* (Matematización).

  Los integrantes del equipo 1 discuten la estrategia de solución:

  Alumno 13: *"vamos a trazar una gráfica, con los valores que dice el problema, luego obtenemos la ecuación y calculamos los valores de la tabla"*. Los integrantes del equipo 1 estuvieron de acuerdo.

- El profesor les indica a los alumnos del equipo 2, tomar la escala centígrada como variable independiente y la Fahrenheit como dependiente.

  Ambos equipos planean la estrategia: tabular, graficar, obtener la ecuación y usar la ecuación para las conversiones solicitadas.

Análisis cualitativo

Uno de los logros que se está obteniendo en este ambiente de aprendizaje es que los alumnos cuenten con, al menos, una estrategia para la solución de problemas de funciones lineales.

- Elaboración de tabla de valores y gráfica (matematización).

Los alumnos 11 y 12 presentan problemas con la toma de valores para tabular y graficar. Tratan de obtener parejas ordenadas de los datos de la tabla correspondiente a las conversiones, la que se muestra a continuación.

Tabla 8-3. Conversiones requeridas en el problema 21

°C	-20°	10°		
°F			70°	90°

Con esta tabla no se puede obtener ninguna información. Ceguera metacognitiva por falta de reflexión, falta de conocimientos, (Stillman, 2011).

Esta ceguera metacognitiva puede ser provocada por la falta de experiencia, falta de conocimientos, de los alumnos al enfrentarse a problemas reales. El profesor, al observar, les indica que los valores para tabular y graficar los pueden obtener del enunciado del problema.

Con los datos que indica la redacción del problema elaboran la siguiente tabla.

Tabla 8-4. Tabulación correspondiente a la redacción del problema 21

$°C \rightarrow x$	$°F \rightarrow y$
0	32
100	212

- Trazo de gráfica (solución de problemas matemáticos).

Análisis cualitativo

En esta ocasión, los alumnos del equipo 1 recibieron un formato con plano cartesiano y las escalas en los ejes como se muestra en el Apéndice 2. Los alumnos del equipo 2 recibieron el formato sin el plano mencionado, debido a una falla en la impresión.

Los alumnos del equipo 1, sin problemas trazan la gráfica. Sin embargo, los alumnos del equipo 2 presentan dificultades.

Equipo 2. Si bien en el eje de las abscisas ponen, un intervalo de cero a cien grados Celsius, se les dificulta poner la escala de valores en el eje de las ordenadas, para grados Fahrenheit con un intervalo de 32 a 212 grados. El alumno 23, primeramente, traza la escala de las ordenadas con divisiones que representan una diferencia de cinco grados, con esas divisiones no le alcanza la hoja de papel para trazar la gráfica, piensa mucho en como corregir, algo parecido pasa con los otros integrantes del equipo. El profesor, comienza el siguiente diálogo:

Profesor: "*¿Cuál es el intervalo de valores para la escala de grados Fahrenheit?"*

Alumno 22: "el intervalo que podemos poner es de 0 a 220".

Profesor: "cada división (cuadrito), ¿qué diferencia debe representar?"

Alumno 22: "puede ir de 20 en 20" (es correcto).

Posteriormente los alumnos corrigen su escala y trazan la gráfica. Se observa que esta dificultad les toma algunos minutos de tiempo para corregirla.

Análisis cualitativo

Los alumnos del equipo 2 tuvieron las dificultades en el trazo de la escala en el eje de las ordenadas. Esto lo podemos considerar como metacognición rutinaria por "conocimientos incompletos" (Stillman, 2011).

La forma en que el profesor proporcionó apoyo al alumno 22 (renglones atrás). Se considera apoyo cognitivo. Las preguntas son tan específicas que "casi son indicaciones, pero en forma de pregunta".

- Determinación de ordenada al origen, pendiente y ecuación.

En el equipo 1, el alumno 14 nuevamente pretende determinar una "proporción". A pesar de haber discutido la estrategia, el alumno 14 insiste en resolverlo con una proporción, ceguera metacognitiva, Stillman (2011). Sin embargo, el alumno 13 le menciona: *"la regla de tres no se aplica, primeramente, debemos obtener la fórmula"*.

Se observa un ejemplo de la resistencia del alumno 14 a usar herramientas algebraicas "nuevas". Él piensa que con la proporcionalidad lo puede resolver, y no considera seguir la estrategia que ha planeado su equipo.

Posteriormente, los ocho alumnos determinan eficientemente la ordenada al origen, gráficamente.

Los alumnos del equipo 1 y los alumnos 22 y 24 determinan eficientemente la pendiente y la ecuación ($y = 1.8x + 32$).

- Determinación de conversiones

Análisis cualitativo

Los alumnos del equipo 1 y los alumnos 22 y 24 realizan los cálculos eficientemente: usan la ecuación, sustitución y cálculo.

El alumno 23 es auxiliado por sus compañeros. A pesar de que la mayoría de los alumnos han adquirido cierta habilidad para la determinación de la ecuación, proceso que se ha trabajado específicamente desde la Tarea 17. El alumno 23, todavía presenta dificultades en la comprensión del proceso: graficación, determinación de ordenada al origen, pendiente y ecuación.

- Interpretación de resultados y comprobación.

El profesor formula la siguiente pregunta, ¿Cómo podemos comprobar la veracidad de los resultados obtenidos?

Alumno 11: *"con la ecuación obtenida, sustituyendo y calculando*"

Alumno 24: *"colocando los puntos (conversiones) en la gráfica"*

Los alumnos del equipo 1, comprueban que sus cálculos son correctos, utilizando la ecuación. Los alumnos del equipo 2, trazan los puntos de las conversiones (10, 50), (21.1,70), (32.2,90), en sus gráficas y observan que dichos puntos forman parte de la recta trazada.

- Comprobación y validación.

El profesor formula la siguiente pregunta, ¿Cómo podemos validar los resultados obtenidos? Luego de unos momentos de reflexión.

Alumno 12: *"con un termómetro de dos escalas"*

Análisis cualitativo

Alumno 13: “*por internet*, *Google*”.

Los alumnos de los dos equipos revisan una tabla de conversiones por internet y comprueban que sus resultados son correctos.

Proceso metacognitivo. Como se pudo observar, al inicio de la implementación del ambiente de aprendizaje, los alumnos carecen de una estrategia para enfrentar problemas de funciones lineales, ya que no han resuelto problemas parecidos o no los recuerdan. Sin embargo, a través del trabajo académico van adquiriendo los conocimientos de funciones lineales y una estrategia que consiste en la transición de representaciones. Así mismo se observa que han empezado a demostrar las subcompetencias: comprensión, matematización, resolución de problemas matemáticos, comprobación y validación.

Por otro lado, a través de todas las tareas, se apoyó a los estudiantes con acciones del tipo cognitivas-metacognitivas. Esto es, por medio de preguntas e instrucciones se va dirigiendo a los estudiantes para la superación de sus dificultades.

8.2 Análisis de dificultades en las tareas, por subcompetencia

A continuación, se describen las dificultades y las acciones tomadas, mientras se trabajó con los conceptos matemáticos, las subcompetencias y un proceso metacognitivo. El orden en que se presenta es de acuerdo con las subcompetencias que se señalan en el ciclo de modelización de Stillman (2011): comprensión del problema, matematización, y solución de problemas matemáticos.

Análisis cualitativo

8.2.1 Comprensión de problema y matematización (determinación de variables)

En esta investigación se considera como comprensión del problema, cuando el alumno reconoce y determina el mismo con cada uno de sus elementos relacionados, correctamente, e interdependientes.

De acuerdo con lo establecido en el capítulo 5, en la sección subcompetencias trabajadas por tarea, se considera que los alumnos trabajan eficientemente la subcompetencia de comprensión del problema cuando: realizan la planeación de una estrategia correcta, obtienen información que no se especifica en la redacción del problema, y determinan la dependencia de las variables. Así mismo una de las acciones para matematizar es la determinación de las variables independiente y dependiente.

En este apartado se señalan algunas observaciones acerca de la determinación de la variabilidad (comprensión del problema) y, las variables dependiente e independiente (matematización).

En las tareas 1, 6, 7, las variables son definidas en el formato de las tareas, esto fue con el fin de familiarizar a los estudiantes con el trabajo de funciones lineales.

En las tareas 11, 14, 20, se requiere que los alumnos determinen las variables.

En la Tarea 14, la cual está diseñada específicamente para la determinación de las variables en distintos contextos, 2/8 alumnos tuvieron dificultades en la comprensión, sin embargo, se observó que las siguientes tres expresiones hacen reflexionar a los estudiantes de manera positiva.

Análisis cualitativo

"imagínate la situación" (reflexión)

"¿qué variable depende de la otra?" (reflexión)

"el valor de'y' depende del valor de 'x'" (apoyo cognitivo)

En video se observa que el alumno 11, en el cuestionamiento 1 (trata del alargamiento de un resorte cuando se le coloca una carga), inicialmente indica correctamente la dependencia de las variables: "*la longitud de alargamiento depende de la carga*", sin embargo, asigna erróneamente las literales,

"$x \rightarrow longitud\ de\ estiramiento,$

$y \rightarrow carga$"

La dificultad del alumno es que no puede hacer la transición de la idea matemática entre la representación verbal a la algebraica, falta de comprensión (Duval, 1999 y Hiebert y Carpenter, 1992). Ceguera metacognitiva por conocimientos incompletos. El profesor le repite la expresión: *"el valor de 'y' depende del valor de 'x'"*. Luego de unos momentos de reflexión y de trabajo colaborativo en el equipo, el alumno logra determinar correctamente las literales asociadas a las variables.

En la Tarea 20, que trata del récord de una prueba de atletismo olímpico, donde el tiempo de la ganadora está en función lineal respecto a los años transcurridos, al menos en el intervalo que se muestra, se trabajó de la siguiente manera para la determinación de las variables:

- los alumnos leen detenidamente el problema,

Análisis cualitativo

- se preguntó por la variable independiente ‘x’ y, por la dependiente ‘y’, al mismo tiempo se les recordaron las siguientes indicaciones, *“¿qué variable depende de la otra?” y “el valor de’y’ depende del valor de ‘x’”,*
- en trabajo colaborativo los equipos lograron determinar las variables.

Posteriormente, los alumnos trabajan para resolver el problema en forma individual y después, en equipo.

En este punto se enfatiza que, para la determinación de variables, la indicación “*imaginen la situación*”, la pregunta ¿qué variable depende de la otra? Y la indicación, “‘*y’ depende de ‘x’*”, sirvieron de apoyo cognitivo y metacognitivo. Estas indicaciones fueron adaptaciones de las recomendaciones de Blum (2011), para generar un proceso de enseñanza de calidad.

8.2.1.1 Obtener la información que no se especifica en la redacción del problema

Para trabajar los problemas de modelización en las tareas 2, 8 y 10, en sesión grupal se les indicó a los estudiantes que: en los problemas reales muchas veces los matemáticos deben conseguir los datos (valores numéricos) de los problemas, ya sea por investigación bibliográfica, hemerográfica, haciendo experimentaciones, realizando encuestas, etc.

En la Tarea 2, determinación del consumo de agua en la ducha, los alumnos del equipo 1 en trabajo colaborativo planean su estrategia, experimental, para determinar la cantidad de agua, que se gasta una persona en la ducha, eficientemente.

Trabajo colaborativo del equipo 1

- Primeramente, fijan el tiempo que una persona tarda en bañarse (15 minutos).

Análisis cualitativo

- Para medir la cantidad de agua que dispensa la regadera, el equipo decide medir el tiempo que tarda en llenarse una cubeta de 19 litros, un día después el equipo 1 reporta que, la cubeta tardó en llenarse un poco más de 3 minutos, determinan el factor de proporcionalidad $\frac{19\,L}{3\,min}$ es decir que una persona gasta en la ducha aproximadamente $6\frac{L}{min}$.
- Como los alumnos consideran que el tiempo de una ducha es de 15 minutos, determinan que el gasto de agua es de 90 litros.

Nótese que los alumnos reportan un dato puntual 90 litros, que consideran porque una persona tarda en bañarse 15 minutos, y no consideran contestar simplemente 6 litros por minuto. Sin embargo, el profesor les hace esta observación.

Al parecer, los estudiantes están más enfocados en reportar un dato puntual 90 litros (incógnita resuelta), que reportar un dato "variable" 6 L/min.

Los alumnos del equipo 2, también planean su estrategia experimental, pero, su resultado no es eficiente, ellos planean que el alumno 24 se bañará, tomará el tiempo y recolectará el agua en un bote. Esta forma, no es eficiente por no considerar el agua que "salpica" a los lados. Ceguera metacognitiva, por falta de reflexión (falta de conocimientos).

- El alumno 24 se bañó y recolectó el agua que usó, determinó el tiempo que tardó (22 min) y, posteriormente determinó la cantidad de litros que recolectó en el bote (20 L). Sin embargo, al parecer hubo errores en las mediciones, ya que es muy poca agua, $0.90\frac{L}{min}$

  Es de suponer, que hubo mucha agua que no consideró o que el tiempo empleado es muy grande.

Análisis cualitativo

Comentario. En los videos se observa una diferencia en el trabajo: mientras los alumnos del equipo 1 trabajan comprometidos y con seriedad, explicando sus ideas, y argumentando, los del equipo 2 no se notan comprometidos.

En la Tarea 10, altura de gigante, los alumnos de ambos equipos, de inmediato, logran proponer las medidas de uno de sus compañeros, para realizar una proporción y determinar la altura de un gigante.

Luego de dos problemas de modelización, para el problema de la tarea 10, los alumnos determinan de forma rápida y eficientemente los datos para este problema.

Como lo mencionó el alumno 24 en la entrevista, "*se me complicaban mucho los problemas de modelización porque no tienen datos, sin embargo, ahora sé que se deben determinar*", conocimiento metacognitivo.

Al parecer la indicación que fue proporcionada anteriormente: "los investigadores, algunas veces, deben conseguir los datos del problema", propició que los alumnos plantearan una estrategia inmediatamente.

8.2.2 Matematización, tabulación

De acuerdo con lo establecido en el capítulo 5, en la sección subcompetencias trabajadas por tarea, se considera que los alumnos trabajan eficientemente la subcompetencia de matematización cuando: determinan las variables independiente y dependiente (señalado párrafos atrás), y/o elaboran una tabla de valores.

8.2.2.1 Tabla de valores

Análisis cualitativo

Las tareas 1, 6, 7, 12, 15, 17, 19, 20, 21, requieren elaborar tabla de valores y/o hacer cálculos para completarla.

Para llenar una tabla de valores de un contexto, se requiere: comprensión del problema, habilidad en operaciones aritméticas, e identificación de patrones, es decir realizar las conexiones necesarias para relacionar el contexto con las matemáticas.

En la Tarea 1, 5/8 alumnos no determinan correctamente el costo mensual de llamadas telefónicas, cuando la compañía A cobra una mensualidad de $150.00, más $0.8 el minuto de llamada utilizado. Como ejemplo se muestra la tabla del alumno 12. Donde se ven los resultados correctos con "bolígrafo" y los incorrectos con lápiz. Nótese que el alumno, inicialmente, no consideró la mensualidad. Ceguera metacognitiva por conocimientos incompletos.

Figura 8.3. Tarea 1. Tabla de valores del alumno 12

Número de minutos	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Compañía "A"	8 150	8 158	16 166	24 174	32 182	40 190	48 198	56 206	64 214	72 222
Compañía "B"	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270

Posteriormente el alumno 12 señala, "*no consideré la mensualidad, por eso estuve mal*". Al observar los errores, el profesor orienta a los estudiantes con las siguientes preguntas de ensayo y error, que sirven de apoyo:

La compañía A, ¿cuánto cobra por cero minutos consumidos?

¿Cuánto cobra por los primeros diez minutos consumidos?, etc.

Análisis cualitativo

Al efectuar las primeras preguntas y cuando los alumnos respondían erróneamente, el profesor de inmediato les indicaba "*incorrecto, no estas considerando la mensualidad",* luego de unos momentos de reflexión, el estudiante respondía correctamente. En este caso fue un apoyo cognitivo, individual de parte del profesor.

Cuando los alumnos comprenden que para la compañía A la operación es: el número de minutos multiplicado por 0.8, y a este resultado se le suman 150, entonces empiezan a llenar la tabla correctamente.

En la Tarea 6. Para calcular los valores de una tabla que expresa la cantidad de litros vertidos por segundo de una bomba de gasolina, es necesario determinar el factor de proporcionalidad, $\frac{litros}{segundo}$.

Se observa que 5/8 alumnos, al principio, esta razón la calcularon al revés, lo determinan $\frac{5\,s}{4\,L}$ en lugar de $\frac{4\,L}{5\,s}$. Sin embargo, corrigen y finalmente elaboran la tabla de valores correctamente. Metacognición rutinaria, conocimientos incompletos. Las observaciones se muestran párrafos adelante donde se analiza el factor de proporcionalidad.

Unos días después de haber trabajado la Tarea 6, en la resolución de la Tarea 12, los alumnos realizan una tabla de valores correctamente, comparan los cobros de dos compañías de taxis por aplicación, donde cobran una tarifa inicial más un cobro por kilómetro recorrido. Aquí se presenta la misma situación que en la Tarea 1, operación que considera, cantidad inicial, más un costo por kilómetro recorrido. En esta ocasión los alumnos resuelven correctamente sin ayuda de ningún tipo. Las mismas operaciones matemáticas para la solución de un problema, al principio no logran comprenderlas, sin embargo, días después en otro contexto sí lo logran.

Análisis cualitativo

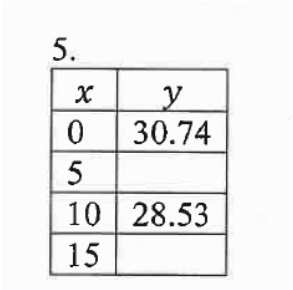
Se observa que la repetición en contexto diferente refuerza lo aprendido. Como señala Vergnaud (1990), la operatividad de un concepto debe ser experimentada en situaciones variadas, como el concepto de razón que no se comprende sino a través de una diversidad de problemas prácticos.

En la Tarea 17, ejercicios matemáticos, donde se dan algunos datos en tablas de valores, el alumno debe completar dichas tablas, graficar, determinar pendiente, ordenada al origen y la ecuación. Se observa que, en el cálculo de los valores faltantes en las tablas, en los problemas 1, 2 y 4, la determinación es simple, observando el patrón de cambio.

Sin embargo, la tabla del problema 5, no es tan "sencilla", por ejemplo, se muestra cómo el alumno 11 que no contestó, y el alumno 22 contesta correctamente, después de la ayuda del profesor.

Figura 8.4. Tarea 17, problema 5. Respuestas comparativas de dos alumnos

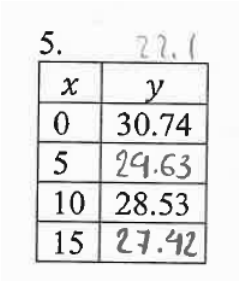
Alumno 11



5.

x	y
0	30.74
5	
10	28.53
15	

Alumno 22



5.

x	y
0	30.74
5	29.63
10	28.53
15	27.42

Dicha ayuda, fue: la recomendación, de determinar primeramente la ecuación y posteriormente, con el uso de la ecuación, determinar los valores requeridos en la tabla, apoyo cognitivo.

A pesar de que, en este ejemplo, el alumno 11 no contestó y el alumno 22 sí, ambos determinaron correctamente la ecuación de la función.

Análisis cualitativo

Es posible que, para alumnos con dificultades aritméticas, algebraicas o con poca experiencia o nula en solución de problemas, como se observó en el problema inicial, donde el rendimiento estuvo alrededor del 21.4%, sean muchos elementos para relacionar y comprender: tabla de valores, gráfica, pendiente, ordenada al origen, ecuación, contexto y, todavía determinar coordenadas con el uso de la ecuación. Sin embargo, todos estos elementos, son necesarios para cumplir con los objetivos de la comprensión, solución de problemas y modelización.

8.2.3 Resolución de problemas matemáticos

De acuerdo con lo establecido en el capítulo 5, en la sección subcompetencias trabajadas por tarea, se considera que los alumnos trabajan eficientemente la subcompetencia de resolución de problemas matemáticos, cuando: trazan la gráfica, determinan la ordenada al origen, la razón entre dos cantidades, pendiente o factor de proporcionalidad, determinan la representación algebraica de la función y, determinan las coordenadas de un punto (predicción).

8.2.3.1 Trazo de gráfica

Para trazar la gráfica se requiere que el alumno: i) identifique las variables y sus valores, ii) determine la escala en los ejes, iii) localice al menos dos puntos de acuerdo con las coordenadas y, iv) trace la gráfica.

En las tareas 1, 7, 15, los alumnos deben trazar la gráfica luego de elaborar una tabla de valores, en estas tareas se requiere que determinen la escala en los ejes, además de las acciones mencionadas en el párrafo anterior.

En la Tarea 1, 5/8 alumnos no pudieron determinar la escala en los ejes.

A través de preguntas, se apoyó a los estudiantes para hacer las escalas de los ejes.

Análisis cualitativo

- En el eje “x”, ¿qué intervalo numérico se representa? Cada división en este eje, ¿qué cantidad representa?
- En el eje “y” ¿Qué intervalo numérico se representa? Cada división en este eje, ¿qué cantidad representa?

Estas preguntas sirven para orientar a los estudiantes en la determinación de las escalas en la gráfica, apoyo cognitivo.

En trabajo de equipo, los alumnos establecen que, en el eje de las abscisas cada división representa diez minutos y en el eje de las ordenadas, cada división representa 30 pesos.

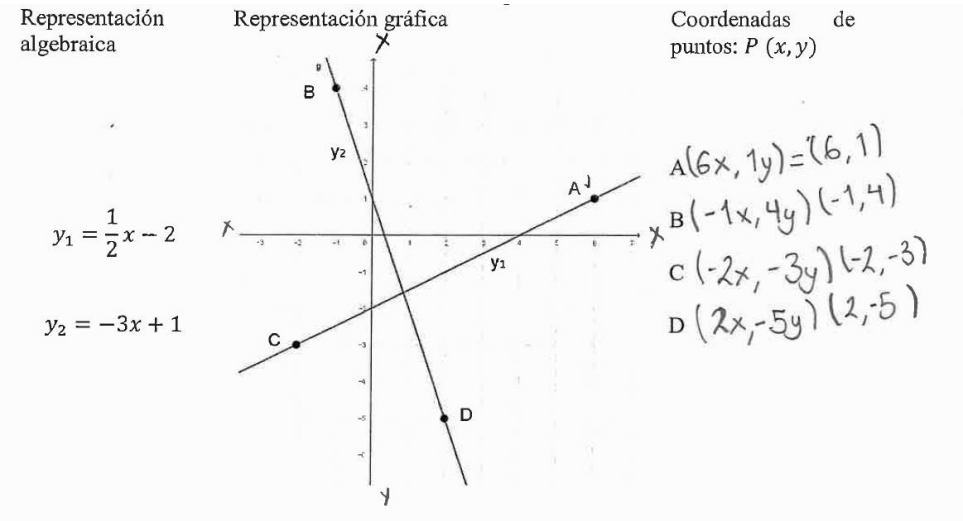
En las tareas 7 y 15, los alumnos logran determinar correctamente la escala en los ejes.

En las tareas 6, 17, 19, 20, 21, se decidió que en el formato de tareas los alumnos tuvieran marcada la escala en los ejes. Esto fue para que se dedicaran a la resolución de los problemas y que no se distrajeran por este motivo. Cabe mencionar que para la Tarea 21, el equipo 1 trabajó con el plano impreso y las escalas marcadas, en el equipo 2 tuvieron que trazar el plano y marcar las escalas, situación problemática que se mencionó anteriormente.

En la Tarea 16, se pide a los alumnos que escriban las coordenadas de algunos puntos, se observó la dificultad, que no sabían escribir las coordenadas.

Análisis cualitativo

Figura 8.5. Tarea 16. Respuestas del alumno 24



Al escribir las coordenadas, algunos alumnos (2/8) lo hacen sin ponerlas dentro de un paréntesis.

Otros alumnos (4/8), las escriben de forma incorrecta. Por ejemplo, se muestra en la Figura 8.5., donde el alumno 24, el punto A lo escribe $(6x, 1y)$ en lugar de $(6,1)$.

Finalmente, el profesor les da indicaciones para que escriban correctamente dichas coordenadas, apoyo cognitivo.

8.2.3.2 Determinación de ordenada al origen

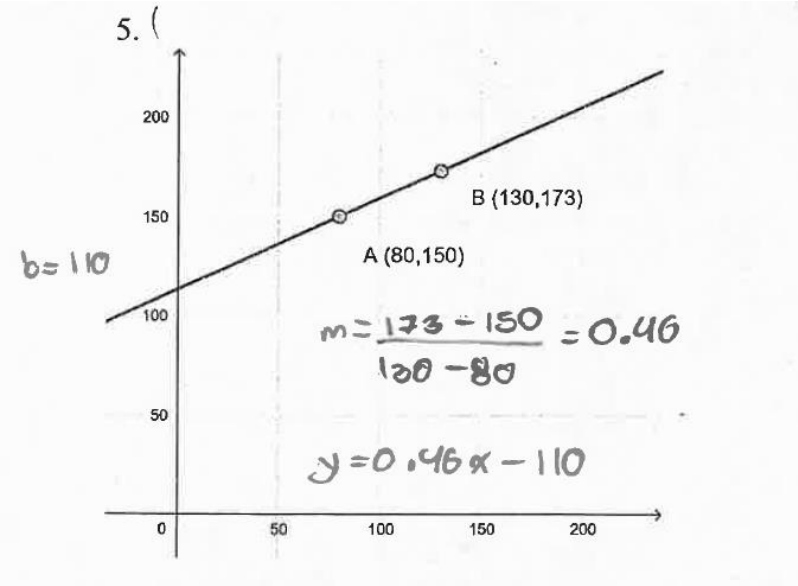
Para la determinación de la ordenada al origen, el alumno debe relacionar que: i) es el valor de la variable dependiente, cuando la independiente tiene un valor de cero, ii) que es la intersección de la gráfica de una recta con el eje de las ordenadas.

En la Tarea 1. La pregunta 1, trata sobre la interpretación de la ordenada al origen. La compañía A cobra \$150.00 mensuales más \$0.80 el minuto de llamada y, la compañía B cobra

$3.00 el minuto, sin mensualidad. Los alumnos del equipo 2 no logran interpretar por qué una gráfica parte del origen y la otra no. Ceguera metacognitiva, conocimientos incompletos. El profesor les indica que la diferencia en el inicio de la gráfica se debe a que la compañía B cobra solamente los minutos consumidos, mientras que la compañía A cobra $150 aunque se consuman cero minutos. Se observa una falta de comprensión entre la representación gráfica y el lenguaje natural.

Se puede observar en la Tarea 18, donde el profesor expuso la forma de determinar la ordenada al origen, a partir de la gráfica (intersección con el eje de las ordenadas), la mayoría de los alumnos respondieron correctamente a los ejercicios que resolvieron.

Figura 8.6. Tarea 18. Respuesta del alumno 14



El alumno 14 escribe la ecuación con la ordenada de forma equívoca, cambia de signo a la ordenada al origen, como se muestra en la Figura 8.6., ceguera metacognitiva por conocimientos incompletos. El profesor le hizo la observación y corrigió.

Análisis cualitativo

En las tareas 18, 19, 20 y 21, 7/7 alumnos, determinan correctamente las ordenadas al origen de los problemas.

Se observa que los alumnos aprenden eficientemente, el significado y la determinación de la ordenada al origen por medio de la representación gráfica.

8.2.3.3 Determinación de la pendiente, razón de cambio o, factor de proporcionalidad

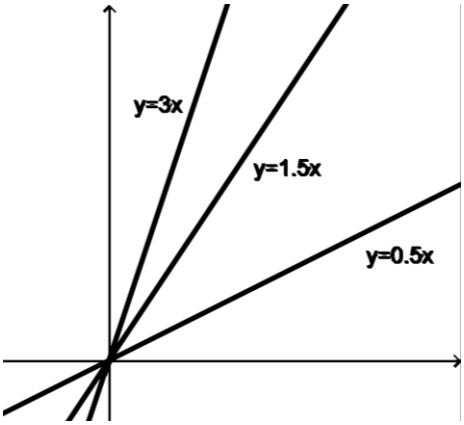
En las tareas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, se trabajan como razón, coeficiente de proporcionalidad, y gráficamente como inclinación de la recta. Además, en las tareas 17, 18, 19, 20 y 21, se trabaja como pendiente, y se usa la fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

En la Tarea 1, pregunta 2, interpretación de la inclinación de las gráficas. Los alumnos del equipo 2 no logran interpretar la razón de cambio como la inclinación de la gráfica. Falta de comprensión en la identificación de un objeto matemático en una forma de representación, (Duval, 1999 y Hiebert y Carpenter 1992). El profesor les indica que la inclinación se debe al costo por minuto para cada compañía. La compañía B cobra $3.00 por minuto, su inclinación es “más vertical” que la compañía A, que cobra $0.80 por minuto.

Para enfatizar la idea anterior el profesor, en el pizarrón, traza tres rectas con diferente inclinación, para que los alumnos encuentren las diferencias, como se muestra en la Figura 8.7., apoyo cognitivo.

Figura 8.7. Ejemplos de rectas con distintas pendientes

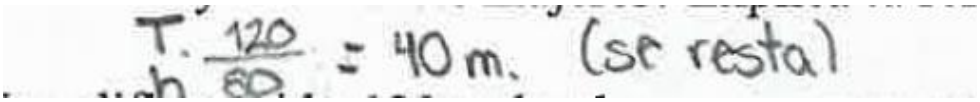


A pesar de que los alumnos, reportan comprensión en esta idea, poco tiempo después (tareas adelante), se observa que el concepto gráfico de pendiente, no se asimiló eficientemente.

En la Tarea 3, determinación de la razón entre dos cantidades en distintos contextos, se expone un ejemplo de dificultad.

El alumno 24 en la pregunta 2 la cual dice: están inscritos 120 estudiantes de los cuales 80 son hombres y el resto mujeres, ¿cómo podemos describir la relación entre los estudiantes, hombres y mujeres? El alumno contesta, lo que se muestra en la siguiente Figura 8.8.

Figura 8.8. Tarea 3, pregunta 2. Respuesta del alumno 24



Sin embargo, para contestar correctamente, primeramente, se realiza una resta

$$120 - 80 = 40$$

para conocer el número de estudiantes mujeres. Posteriormente se determina la razón:

$$\frac{80\ hombres}{40\ mujeres} = \frac{2}{1}$$

dos hombres por cada mujer.

Se observó que el alumno 24, no comprendió que la respuesta es solamente la razón y para determinarla correctamente se realiza una resta (previamente), nuevamente falta de comprensión en la transición entre dos representaciones, verbal y aritmética en este caso. Se nota una gran confusión, ya que su respuesta "$\frac{120}{80} = 40$ (se resta)". Es decir, no comprende el contexto y confunde la operación de división con la resta. Al parecer el Alumno 24, está más preocupado en realizar el cálculo matemático que en comprender el concepto.

El alumno no muestra comprensión en la idea de razón. Posiblemente no tuvo experiencia previa en este concepto o, no lo recuerda eficientemente y, la explicación del profesor no fue suficiente.

Tarea 4, determinación de densidad de algunas sustancias. Los alumnos determinan las densidades de algunas sustancias correctamente, sin embargo, no responden correctamente al cuestionamiento de comparación, se muestra la dificultad.

- Pregunta 1. ¿qué pesa más, un litro de gasolina o un litro de agua?

  Respuesta correcta. El litro de agua. Densidad de la gasolina $0.700\frac{Kg}{L}$*, densidad del agua* $1.000\frac{Kg}{L}$

- Pregunta 2. ¿qué pesa más, un litro de plomo o un litro de oro?

  Respuesta correcta. El litro de oro. Densidad del oro $19.300\frac{Kg}{L}$*, densidad del plomo* $11.300\frac{Kg}{L}$

Análisis cualitativo

En el equipo 2, se observa que dedican mucho tiempo en los cálculos, sin reflexionar en el contexto, el significado de la densidad. Para las dos preguntas, inmediatamente responden:

- "*lo mismo"* (incorrecto). Se observa que no discuten ni argumentan, finalmente responden de manera incorrecta. No hay reflexión.
- En el equipo 1. Al responder las preguntas, tres integrantes, inmediatamente responden "*lo mismo*" (incorrecto). Sin embargo, el Alumno 13, les indica que no es lo mismo un litro que un kilogramo y les explica las respuestas correctas.

En este punto se observa, más que una falta de reflexión de los estudiantes, una ausencia de reflexión.

En las tareas 3 y 4, se observa que los alumnos con dificultades se dedican más a hacer los cálculos que en la comprensión del contexto, en ambos casos se nota una falta de comprensión de operaciones aritméticas y su relación con el contexto. Al observar las dificultades el profesor les explica sus errores y las respuestas correctas. Sin embargo, la explicación del profesor, necesaria en el momento, no es suficiente, se requiere que el alumno siga enfrentándose a cuestionamientos y logre relacionar las matemáticas con los contextos.

Según Freudenthal (2002), el concepto de razón y proporcionalidad requiere que el estudiante comprenda la matemática profundamente y, este concepto debe comprenderse antes que las funciones lineales.

En la Tarea 6. Para calcular los valores de una tabla que expresa la cantidad de litros vertidos por segundo de una bomba de gasolina, es necesario determinar el factor de proporcionalidad, $\frac{litros}{segundo}$.

Análisis cualitativo

Se observa que 5/8 alumnos, originalmente la calcularon al revés, lo determinan $\frac{5\,s}{4\,L}$ en lugar de $\frac{4\,L}{5\,s}$. Sin embargo, corrigen y finalmente elaboran la tabla de valores correctamente.

Después de trabajar de forma individual, ya en el trabajo de equipo, en video se observa que los alumnos del equipo 1, señalan que:

- "*para llenar la tabla es mejor utilizar el factor* $\frac{4\,L}{5\,s}$*",* lo cual es correcto, ya que, este factor solamente se multiplica por la cantidad de segundos que indica la mencionada tabla.

También señalan que si utilizan el factor $\frac{5\,s}{4\,L}$, deben dividir los segundos entre este factor. Lo cual, también es correcto.

En el cuestionamiento 4. Todos los alumnos tuvieron la dificultad de no comprender la expresión "coeficiente de proporcionalidad", ceguera metacognitiva por falta de conocimientos. El profesor les indicó que es la razón de los litros vertidos entre los segundos, razón calculada en el cuestionamiento 1, y que en la gráfica se observa en la inclinación de la recta.

Al analizar el video, que tomó el profesor en el momento de trabajo colaborativo, de la discusión del equipo 1 para contestar el cuestionamiento 4, ¿Cómo se observa en la gráfica el valor del coeficiente de proporcionalidad? Se observa lo siguiente.

Luego de reflexionar un momento…

- El alumno 11 señala que el coeficiente de proporcionalidad se puede ver en la gráfica como las diferencias entre una ordenada y otra, al tiempo que señala un punto y otro.

Análisis cualitativo

- El alumno 13 señala que el coeficiente de proporcionalidad se puede ver en la gráfica por medio de las diferencias entre las ordenadas de un punto a otro y, la diferencia entre las abscisas de dichos puntos,

Ambos alumnos, hicieron un buen esfuerzo al tratar de comprender la idea matemática, proceso de reflexión, metacognitivo. Finalmente, el profesor les explica que el coeficiente de proporcionalidad se puede observar con la inclinación de la gráfica, "las diferencias de las ordenadas de dos puntos, sobre las diferencias de sus abscisas". El profesor trazó en el pizarrón una recta con pendiente "chica", menor a uno y menciona que esa recta representa un coeficiente pequeño, poco flujo de gasolina. Y trazando otra recta con pendiente "grande", mayor a uno, explicó las diferencias (apoyo cognitivo).

En las tareas 1 y 6 se ha enfatizado que el coeficiente de proporcionalidad o pendiente (razón de cambio), se observa en la inclinación de la gráfica. En dos distintos contextos se ha señalado esta idea. En la siguiente Tarea 7, para la misma pregunta, en otro contexto, los alumnos contestan correctamente.

La repetición en el trabajo del mismo concepto en tres tareas diferentes resultó eficiente, ya que finalmente se contestó correctamente. Sin embargo, se considera que los alumnos sigan siendo enfrentados a problemas del mismo tipo para que logren definitivamente su comprensión y automatización, (Barton, 2018; Bransford *et al*, 1999; Stillman, 2004; Vergnaud, 1990).

La Tarea 9 contiene 6 problemas, que consisten en determinar el coeficiente de proporcionalidad o la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, para resolver la pregunta solicitada. En los vídeos y en las respuestas escritas por los alumnos se encontraron algunas dificultades que se indican a continuación.

Análisis cualitativo

En el problema 1, donde se presenta un mapa con una escala de 1.8 cm a 115 Km. El alumno debe determinar tres distancias reales entre tres ciudades, a partir del mapa. Para resolver, el alumno debe medir con regla la distancia, entre dos ciudades, en centímetros y multiplicar por el factor de proporcionalidad o efectuar una proporción. Luego de trabajar unos minutos en forma individual, en video, se observa trabajar al alumno 23:

- Se observa al alumno midiendo una distancia de 1.8 en 1.8 cm (medición tras medición), el alumno indica, *"luego multiplico por 115 el número de veces que resulten"*. Esta forma de trabajo no es eficiente ya que se pueden cometer errores de medición, otro problema que el alumno no prevé que las distancias a medir no son múltiplos de 1.8 cm.

Si bien, el alumno interpreta correctamente que cada 1.8 cm representan 115 Km, no alcanza a comprender que: i) el factor $\frac{115}{1.8} = 63.8\,\mathrm{km/cm}$ sirve para multiplicarlo directamente por la medición exacta, ii) que el planteamiento de una proporción permite el cálculo directo,

$$\frac{115}{1.8} = \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{medición}}$$

conocimientos incompletos (Stillman, 2011), o, falta de comprensión del concepto.

- Por otro lado, el alumno 21, mide y multiplica los centímetros por 115, sin considerar la proporcionalidad. Conocimientos incompletos (Stillman, 2011).

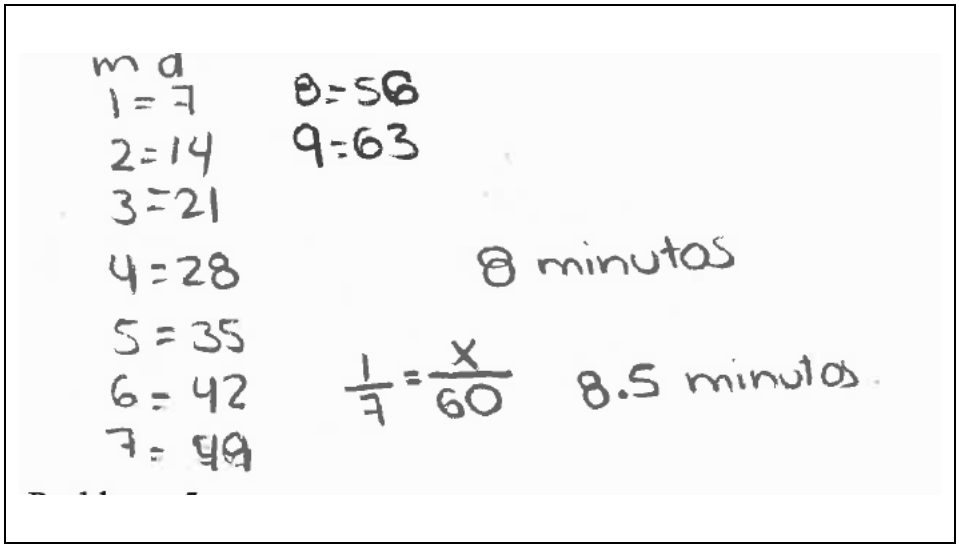
El profesor interviene y les indica que determinen el factor de proporcionalidad.

Análisis cualitativo

- Luego de una larga discusión, los alumnos del equipo 2 no logran determinar el factor de proporcionalidad, hasta que el profesor les indica que es el cociente $\frac{115}{1.8} = 63.8\frac{Km}{cm}$ (apoyo cognitivo).
- Alumno 24: *"son 63.9 kilómetros por centímetro"*.
- Después los alumnos resuelven correctamente.

En la forma de trabajo del alumno 23 que se expuso en párrafos anteriores se puede observar que: el alumno no tiene conocimientos suficientes para resolver el problema, pero lo comprende y lo trata de resolver con sus limitados recursos. Ceguera metacognitiva por conocimientos incompletos.

Figura 8.9. Tarea 9, problema 3. Respuesta del alumno 11



En la misma Tarea 9, en los problemas del 2 al 6, los cuales requieren el planteamiento de una proporción. Los alumnos 11, 13 y 14 declaran que los resultados los tuvieron "correctos", a pesar de no haber planteado una proporción. Estos alumnos en el problema 3, elaboraron una lista, tabla de valores, en la Figura 8.9., se muestra la respuesta del alumno 11.

Análisis cualitativo

Como se observa el alumno 11 a través de una tabla obtiene un resultado aproximado, una vez que se le explicó el planteamiento de la proporción (apoyo cognitivo), la escribe y determina nuevamente el resultado, un poco más preciso. Como se observa, los alumnos saben lo que tienen que hacer, pero sus conocimientos matemáticos son limitados, Ceguera metacognitiva, por conocimientos incompletos.

Los alumnos 12 y 22 manifiestan, que, a pesar de haber obtenido las respuestas correctas, se les dificulta el planteamiento de la regla de tres.

Para la falta de conocimientos de los alumnos en la determinación de la razón y la proporción sobre un contexto determinado. Freudenthal (2002), señala que este concepto requiere un conocimiento profundo de las matemáticas. Esta es una dificultad importante en el aprendizaje de las matemáticas de los alumnos de bachillerato, conocimientos previos no comprendidos o incompletos. Para futuras generaciones, se recomienda un trabajo intenso en el aprendizaje de la razón y la proporción.

En la Tarea 10, modelización, zapatos de gigante, como apoyo metacognitivo para el planteamiento del problema, el profesor les menciona las siguientes observaciones:

- *"Los zapatos gigantescos son de caballero".*
- *"Se sugiere, utilizar el largo del calzado del gigante en centímetros".*

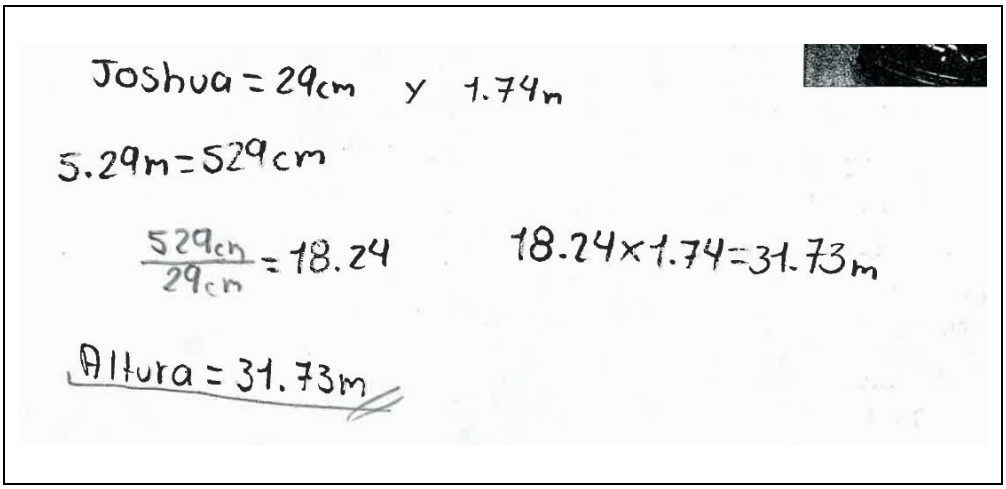
Los alumnos proponen tomar las medidas de un compañero, altura y longitud de zapato, para tener los datos de referencia, que no especifica el problema, y determinar un factor de proporcionalidad

Análisis cualitativo

$$\frac{longitud\ zapato\ de\ gigante}{longitud\ zapato\ de\ compañero}$$

Los alumnos de ambos equipos resuelven el problema, determinan el factor de proporcionalidad y lo utilizan para determinar la altura del gigante, como se puede ver en la respuesta del alumno 13, en la Figura 8.10.

Figura 8.10. Tarea 10. Respuesta del alumno 13



Luego de los problemas trabajados previamente, los alumnos realizan un buen trabajo en la proporcionalidad en el contexto de esta tarea.

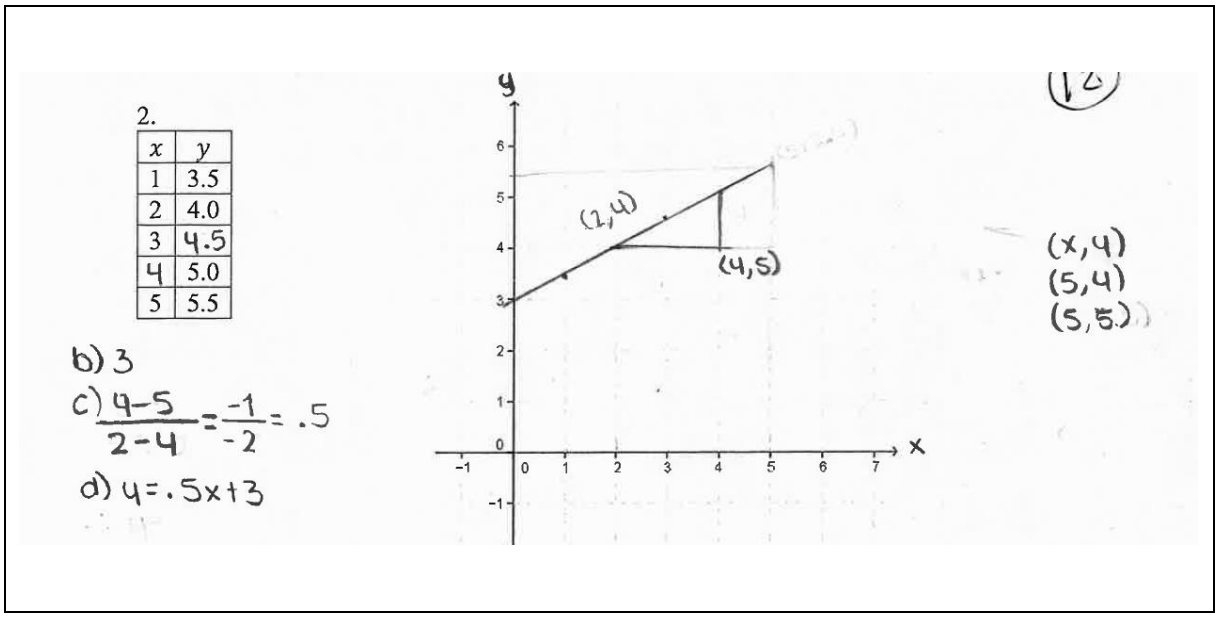
En la Tarea 15, tabulación y graficación, respecto a la pendiente, en sesión grupal se enfatiza que: La inclinación "creciente o decreciente", de la gráfica depende del signo del coeficiente de la variable independiente "x" (pendiente).

En la Tarea 17, se proporciona una tabla de valores para que el alumno determine la pendiente, entre otros cálculos. El profesor expuso el ejercicio 1 y los alumnos resolvieron los otros cuatro ejercicios. Se explica el uso de la fórmula de la pendiente entre dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2),

Análisis cualitativo

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Figura 8.11. Tarea 17, problema 2. Respuesta del alumno 11



Los siete alumnos reportan dificultades en la determinación de la pendiente. En la figura 8.11. se muestra el trabajo del alumno 11.

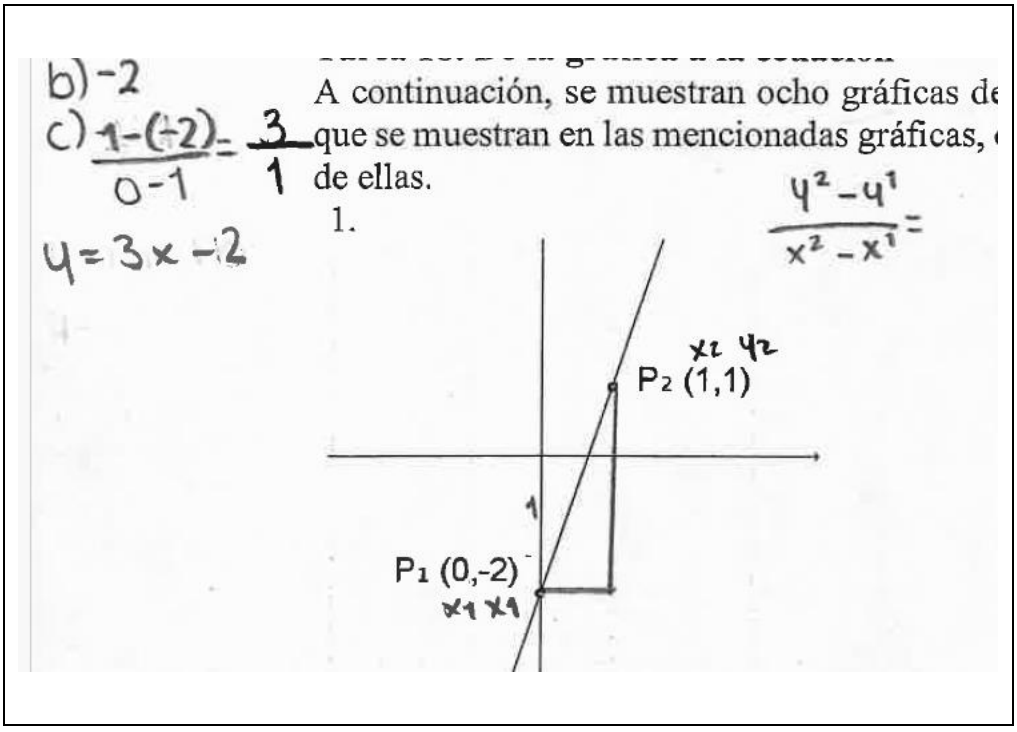
- En el inciso c) determinación de pendiente, no escribe "$m =$"
- Observando la tabla de valores y la operación realizada, el alumno toma los puntos $(2,4)$ como (x_2, y_2) y (4,5) como (x_1, y_1).
- En la gráfica coloca las coordenadas del punto $(4,5)$ fuera de lugar.
- Del lado derecho de la gráfica, escribe las coordenadas de dos puntos que no están reportados en el problema ni intervienen en la solución de este, $(5,4)$ y $(5,5)$.
- Se enfatiza que el alumno reporta: *"se me dificultó poder determinar la pendiente, porque confundía las posiciones de $'x'$ y de $'y'$"*.

Análisis cualitativo

Esta dificultad que presentan los alumnos es causa de sus “conocimientos incompletos” (Stillman, 2011), aún no han alcanzado la habilidad de distinguir dos puntos y determinar las diferencias entre las ordenadas y abscisas. Es decir, el concepto de pendiente y su determinación, a partir de la gráfica, está en construcción.

Para la superación de esta dificultad se pueden señalar dos formas de trabajo: i) un trabajo previo en el contexto puramente matemático hasta que el alumno automatice este cálculo; ii) seguir trabajando, aun con la falta de habilidad de los estudiantes, con un mayor número de problemas hasta que los estudiantes alcancen la comprensión y la automatización. En esta investigación, se observó que, con las tareas restantes, los alumnos alcanzan la comprensión y agilidad en el cálculo de la pendiente.

Figura 8.12. Tarea 18, problema 1. Respuesta del alumno 11



Análisis cualitativo

Tarea 18. Se observan algunas dificultades en la determinación de la pendiente. Al ver las dificultades que presentaron los alumnos en trabajo individual, el profesor explica nuevamente la forma de determinar la pendiente del ejercicio 2.

En la Figura 8.12., se muestra la respuesta del alumno 11 en el problema 1.

Observaciones:

- El alumno escribe la fórmula de la pendiente del lado derecho, sin completar la igualdad y sin sustituir, además, escribe exponentes en lugar de subíndices.
- En la gráfica identifica los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2).
- Como inciso c) escribe la sustitución de la fórmula de la pendiente, lo cual se reescribe a continuación:

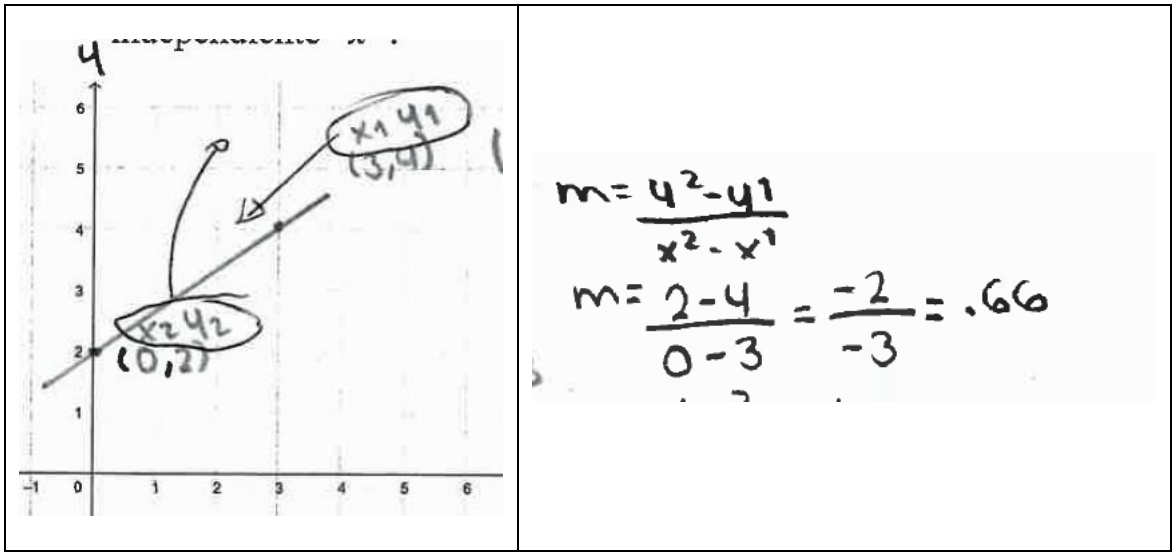
$$\frac{1-(-2)}{0-1}=\frac{3}{1}$$

- El alumno realiza el cálculo sin escribir que este es el cálculo de la pendiente, es decir falta indicar $m=$
- Si bien, el numerador lo escribe y calcula correctamente $(y_2 - y_1)$, en denominador no.
- En el denominador hace la resta $(x_1 - x_2)$, es decir $(0-1)$ lo cual es incorrecto.
- Un nuevo error hace que el resultado sea correcto, como

$0-1=-1$, el alumno escribe $(0-1=1)$, este segundo error hace que se "neutralice" el anterior y el resultado que reporta es correcto.

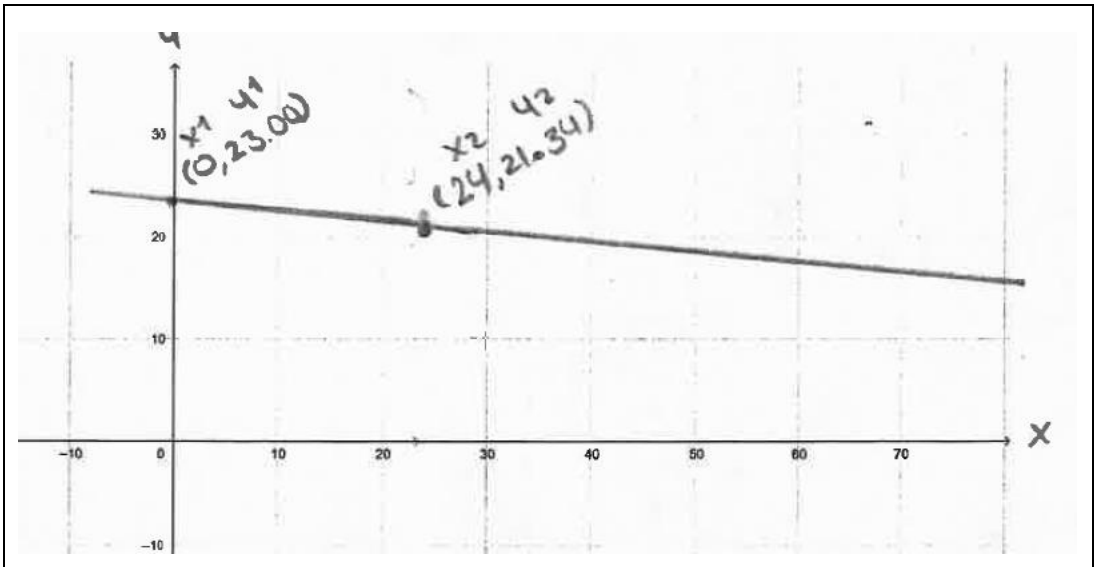
Se presenta dificultades en las operaciones aritméticas elementales, como lo señala Segura (2004). Se puede catalogar como "conocimientos incompletos" (Stillman, 2011).

Figura 8.13. Tarea 19, problema 1. Parte de la respuesta del alumno 11



Tarea 19. Para el cálculo de la pendiente del problema 1, se presenta la respuesta del alumno 11, donde se aprecia una indecisión para tomar las coordenadas en el cálculo de la pendiente. Además, los subíndices de las coordenadas, en la fórmula, los escribe como exponentes. Sin embargo, la determina correctamente, se muestra su respuesta en la Figura 8.13.

Figura 8.14. Tarea 20. Parte de la respuesta del alumno 11



Fórmula	Operación errónea	Operación correcta
$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	$m = \frac{21.34 - 23}{24 - 21.34}$	$m = \frac{21.34 - 23.00}{24 - 0}$

Análisis cualitativo

Tarea 20. Nuevamente el alumno 11, presenta problemas en el cálculo de la pendiente. Determina en forma errónea la pendiente, como se muestra en la Figura 8.14.

Como se puede ver, el alumno confunde la coordenada x_1 con y_2.

Sin embargo, el alumno se percató de su error, *"porque no cuadraba"* y corrige, acción de autorregulación (metacognición). Esto se considera un buen avance en la comprensión del alumno 11, ya que él mismo se percata de su error, trabajo metacognitivo productivo (Stillman, 2011). En este punto se muestra las subcompetencias de verificación de resultados y comprobación, por las cuales el alumno corrige su error.

8.2.3.4 Determinación de la ecuación

La representación algebraica de la función (ecuación con múltiples soluciones) se trabaja en las tareas 1 y 11 en problemas hipotéticos; en las 17, 18 y 19 en ejercicios matemáticos, y en las tareas 20 y 21 en problemas de modelización.

En esta investigación se promovieron dos formas para la determinación de la representación algebraica de la función (ecuación), estas se describen en los siguientes tres párrafos.

Para determinar la representación algebraica de una función (ecuación con infinidad de soluciones) en algún problema matemático, hipotético o real, se necesitan: determinar la variabilidad entre dos cantidades, las variables independiente, dependiente y, el establecimiento de la regla de correspondencia.

Determinación de la ecuación a partir de la tabla de valores. Partiendo de operaciones aritméticas, del llenado de una tabla de valores, a la expresión algebraica: i) identificación de

variables, ii) determinación del coeficiente de proporcionalidad, iii) determinación de cantidad "a sumar" (ordenada al origen), iv) operatividad aritmética: determinación de algunas parejas ordenadas, variable independiente multiplicada por el factor de proporcionalidad, más la cantidad "a sumar", v) asignar las literales, para obtener

$$y = mx + b$$

Determinación de la ecuación por medio de un tránsito entre representaciones. Partiendo de las representaciones verbal, tabular y gráfica a la expresión algebraica: i) determinación de las variables, ii) elaboración de la tabla de valores con al menos dos puntos, iii) trazo de gráfica de la función lineal, iv) determinación de la ordenada al origen (b), v) determinación de la pendiente (m) entre dos puntos, vi) sustitución de los valores a la ecuación

$$y = mx + b$$

Tarea 1. Pregunta 3. Determinación de la ecuación para cada compañía.

En la Tarea 1, se analiza el cobro de dos compañías telefónicas, la compañía A cobra \$150.00 por mes, más \$0.80 el minuto de llamada; la compañía B cobra "solamente" \$3.00 el minuto de llamada. El alumno debe: i) completar una tabla de valores para cada compañía, donde se determina el costo por los minutos consumidos, ii) trazar una gráfica, costo que depende de los minutos de llamada, para cada compañía, iii) contestar preguntas acerca de la interpretación de ordenada al origen y la pendiente, iv) contestar a los cuantos minutos las dos compañías cobran lo mismo y, v) determinar una expresión algebraica que describa el costo por minuto consumido, para cada compañía ($y = 0.8x + 150$, para compañía A, e $y = 3x$ para compañía B).

Análisis cualitativo

En video se observa el trabajo colaborativo del equipo 1 en la determinación de la "ecuación" para la compañía A, el cual se describe a continuación.

- El alumno 12 señala que les falta la ecuación y lee en voz alta el cuestionamiento. "*Escribe una ecuación donde se pueda calcular el costo 'y' dependiendo del número de minutos 'x' para cada compañía"*.
- Los alumnos le sugieren al alumno 13 que responda y este señala *"yo no sé, no le entiendo"*.

(antes de empezar a contestar, el alumno 13 empieza un periodo de reflexión).

- Alumno 12, *"creo que ya sé, $x + y = 240$" (incorrecto), "yo recuerdo que cuando ponía las ecuaciones en la secundaria ponía, 'x' más 'y' igual al resultado".*

(recuerdo de una estrategia, actividad metacognitiva, que no es suficiente para responder correctamente).

- Alumno 14 contesta: *"pero eso es para la gráfica, necesitamos saber la incógnita".*

(doble error, sí se relaciona con la gráfica y lo que se interpretan son dos variables).

- *Alumno 13: "es que dice que el costo es 'y', debería ser el resultado y 'x' es el número de minutos, eso es lo que se va a sumar"*

(empieza interpretando bien las dos variables, pero no necesariamente se suman).

Análisis cualitativo

- Alumno 14: "'*x' lo podemos tomar como 68 es donde se cruzan las 2 rectas".*

  (el alumno trata de encontrar una ecuación en el punto de intersección de las dos funciones)

- Alumno 12: *"en el libro venía uno similar"*, el alumno se pone a buscar en sus apuntes, algún planteamiento similar.

  (acto metacognitivo, recordar un problema anterior, sin embargo, en sus apuntes no encuentra ningún problema parecido).

- Alumno 14: *"yo creo que la ecuación salga sumando las dos compañías".*

  (Ceguera metacognitiva por conocimientos incompletos, insiste en un procedimiento que no resultará correcto).

- Alumno 12, dirigido al profesor: *"es como el método de igualación",* el profesor responde *"si, muy parecido".*

  (trabajo metacognitivo del alumno, ayuda mínima del profesor).

- El alumno 12, sigue buscando, en sus apuntes algún problema similar.
- Alumno 12: *"tenemos que usar 'x' e 'y', 0.8 por 'x' más 30 igual a 204'y', siento que está mal planteada".*

  (El alumno logra plantear "0.8x", sin embargo, el resto de la expresión no es correcta, a pesar de sus intentos incorrectos, el alumno no se da por vencido y sigue intentando, además él intuye sus errores, autorregulación).

Análisis cualitativo

- Profesor: *"la ecuación debe contener, una 'y', una 'x', números y un igual".*

  (ayuda mínima necesaria por parte del profesor, apoyo cognitivo).

- Alumno 14: *"x es igual a 68, ya que es el tiempo".* Insiste en considerar el punto de intersección de las dos compañías.
- Alumno 13: *"no tiene lógica*"

  (trabajo de reflexión, acto metacognitivo, el alumno sabe a dónde tiene que llegar y descarta una opción que no tiene lógica).

- Alumno 11: *"a mí se me ocurre que puede ser, 0.8x más 150y, porque es la tarifa"*

  (El alumno 11, aunque no había hablado, estuvo reflexionando bastante tiempo, su respuesta es la más cercana a la ecuación. Los alumnos tratan de comprobar con 10 minutos, pero observan que no es correcta. No alcanzan a comprender que 'y' se coloca después de un signo igual).

- Alumno 14: *"yo creo que la ecuación es 68x + 180y igual a 204"*

  (insiste en juntar datos de las dos compañías).

- Alumno 13, dirigido a alumno 14: *"a ver compruébala"*. Alumno 14 se calla y no contesta.

  (Mientras el alumno 14 sigue insistiendo con sus propuestas incorrectas con su ceguera metacognitiva, el alumno 13 sigue descartando las propuestas, tratando de encontrar una lógica, acto de reflexión).

Análisis cualitativo

- Los alumnos 12 y 14 tratan de escribir una ecuación del tipo $x + y = c$. Pero observan que no es de utilidad.
- Alumno 13, sigue descartando las propuestas de sus compañeros.
- El profesor, al observar el trabajo les indica: "*'y' es el costo, 'x' son los minutos, la forma en que calcularon los costos en la tabla, es la misma para escribir la ecuación, y=…"*

(trabajo cognitivo, una guía para que los alumnos reflexionen y propongan una ecuación correcta).

- Los alumnos exclaman una expresión ¡asombro! Cuando logran comprender, inmediatamente después el alumno 13 dice…

"'y' costo es igual a 0.8 'x' minutos más 150, ($y = 0.8x + 150$).

Los otros alumnos señalan que están de acuerdo.

Se observa que los cuatro alumnos del equipo no pueden plantear la ecuación por sí mismos y en su conjunto, esto ha sucedido porque los alumnos no pueden transitar entre la representación tabular y la algebraica, no hay un trabajo colaborativo productivo. Y es importante el apoyo cognitivo del profesor para que salgan de ese bloqueo. Este tipo de apoyo ofrece la ayuda, sin decir la respuesta, con instrucciones muy específicas dejando la reflexión y respuesta para los estudiantes.

Se observa una falta de conexiones entre la representación tabular, realizada con operaciones aritméticas de multiplicación y suma, y la representación algebraica (ecuación). Donde las literales *x* e *y* representan las variables independiente y dependiente.

Análisis cualitativo

El alumno 12 trata de relacionar la forma en que se han hecho las ecuaciones con anterioridad, pero no es suficiente, no había determinado una ecuación parecida, falta de conocimientos, Stillman (2011), sin embargo, inicia un proceso metacognitivo, pues revisa su trabajo anterior.

El alumno 14 trata de comprender la situación, pero relaciona ideas que no le ayudan como: sumar las dos compañías, establecer la ecuación en el punto de intersección de la gráfica. Aquí también se observa el desconocimiento de la variable, es decir, el alumno trata de expresar incógnitas y no variables. Con este conflicto cognitivo surge la oportunidad, para el profesor, de aclararlo y desarrollarlo con ejemplos de situaciones donde la literal sea incógnita y ejemplos donde la literal sea variable. En este caso, el profesor les indicó que las literales son variables, donde, por convención "x" varia arbitrariamente e "y" varía dependiendo del valor de"x".

El alumno 11, a pesar de participar muy poco y dedicar mayor tiempo a la reflexión, logra proponer una expresión muy apegada a la correcta, pero igualmente demuestra su falta de comprensión, incapacidad de hacer la transición entre representaciones.

El alumno 13, prefiere escuchar a sus compañeros, se dedica a cuestionar las propuestas, porque alcanza a intuir que no son correctas, él sabe a lo que quiere llegar y se dedica a reflexionar y descartar las propuestas incorrectas de sus compañeros. Igualmente demuestra la gran dificultad de determinar la expresión algebraica. Sin embargo, con el apoyo cognitivo-metacognitivo del profesor, al darles las indicaciones, finalmente propone la expresión algebraica correcta.

Si bien se tienen dificultades para determinar las expresiones algebraicas cuando se consideran las literales como incógnitas, igualmente se tienen dificultades para que los alumnos determinen la expresión algebraica considerando las literales como variables, (Soscas *et al*, 1989).

Por otro lado, Meléndez (2016), reporta un diálogo muy similar al mostrado en párrafos anteriores, para la obtención de la ecuación a partir de la representación tabular. Donde los alumnos muestran dificultades en determinar la ecuación correspondiente.

Después del trabajo con el equipo 1, el profesor se dirige al equipo 2 y los apoya de manera similar.

- En el equipo 2, el profesor a través de preguntas los guía para que los alumnos determinen la ecuación:

  Profesor: *¿qué cálculos hicieron para determinar los costos para la compañía B?*

  Alumno 23*: "3 por el número de minutos*"

  Profesor: *si el costo se representa por "y", los minutos se representan con "x", ¿Cómo se expresa la operación de cálculo?... ¿y=…?*

  Finalmente, los alumnos llegan a una expresión correcta $y = 3x$.

- El mismo procedimiento se aplica para la compañía A, donde la ecuación queda

  $y = 0.8x + 150$.

Aunque los alumnos reportan que comprendieron esta forma de determinación de la ecuación, se observa que esta actividad no fue suficiente para adquirir el aprendizaje. En la Tarea 11, el resorte y su carga, como se mencionó párrafos anteriores, la determinación de la ecuación se realizó con apoyo metacognitivo al agregar las literales x e y, en la columna correspondiente, y en el segundo renglón de la tabla de valores.

Tarea 17. En esta tarea se muestra a los estudiantes la forma de determinar la ordenada al origen gráficamente, y la pendiente entre dos puntos. Una vez obtenidos estos valores se sustituyen en la ecuación $y = mx + b$.

Análisis cualitativo

Se observó que no hubo problemas en la determinación de la ecuación, sin embargo, en el cálculo de la pendiente si, estos problemas se señalaron anteriormente.

Tarea 18. Nuevamente, se tienen dificultades en la determinación de la pendiente como se señaló anteriormente. Sin embargo, no se presentan dificultades en la determinación de la ecuación.

Finalmente, en las tareas 19, 20 y 21. No hubo dificultades para determinar la ecuación.

Se observa que fue eficiente la forma "enseñanza-aprendizaje" de la determinación de la ecuación de una función lineal, a partir de la representación gráfica. Primeramente, determinando la ordenada al origen y la pendiente, y posteriormente la sustitución en:

$$y = mx + b$$

Se pueden mencionar algunas ventajas para determinar la expresión algebraica de la función (ecuación con múltiples soluciones) a través de la transición de representaciones: i) al realizar una tabla de valores, se motiva la comprensión de que las literales *x* e *y*, son variables, ii) al trazar la gráfica se observa la ordenada al origen y la inclinación de la recta, iii) al determinar la ordenada al origen gráficamente se enfatiza el valor de "y" cuando $x = 0$, iv) al determinar la pendiente con la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ se motiva la comprensión de cómo cambia "y" cuando cambia '*x*', v) al sustituir en la ecuación $y = mx + b$ se logra concluir este proceso, más aún cuando la expresión puede ser usada para determinar algunas parejas ordenadas.

8.2.3.5 Determinación de coordenadas de un punto (predicción)

Análisis cualitativo

Las tareas en las que se trabaja el cálculo de parejas ordenadas (predicción), son las 17 y 19, en ejercicios matemáticos, 20 y 21, en problemas reales.

En muchos problemas de funciones lineales, una vez determinada la regla de correspondencia, es necesario determinar algunos puntos de interés o algún punto de predicción. Es decir, dada una abscisa, la determinación de la ordenada correspondiente y viceversa. Esto se puede realizar tabular, gráfica o algebraicamente. En esta investigación se ha enfatizado la forma algebraica, en la Figura 8.15., se muestra la manipulación algebraica necesaria para este cálculo.

Figura 8.15. Determinación de coordenadas de un punto

Forma algebraica de la función lineal	Dada una abscisa, determinar la ordenada	Dada una ordenada determinar la abscisa
$y = mx + b$	Si $x = h$, (abscisa) se sustituye $y = mh + b = k$ Así, la pareja ordenada es: (h, k) $h, k \in \mathbb{R}$	Si $y = k$, (ordenada) se sustituye $k = mx + b$ se resuelve para x $x = \frac{k-b}{m} = h$ con $m \neq 0$ Así la pareja ordenada es (h, k) $h, k \in \mathbb{R}$

Tarea 17, problema 5. A continuación se muestran el cálculo de las coordenadas de un punto de forma correcta, y posteriormente se señalan algunas dificultades observadas.

La ecuación de la función lineal es,

$$y = -0.221x + 30.74$$

Cálculo de valores en la tabla,
Cuando $x = 5$

$$y = -0.221(5) + 30.74$$
$$y = 29.64$$
$$(5,29.64)$$

Cuando $x = 15$

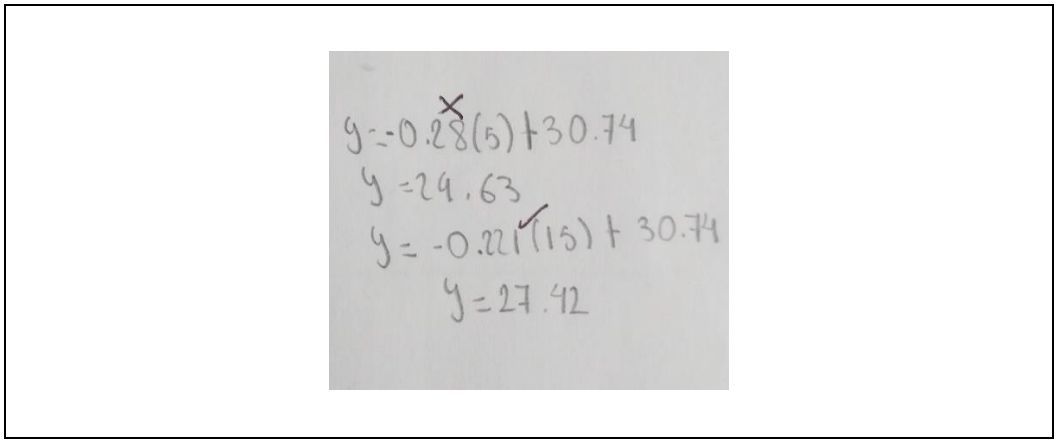
$$y = -0.221(15) + 30.74$$
$$y = 27.43$$
$$(15,27.43)$$

- El alumno 11 no alcanza a realizar los cálculos para completar la tabla, es decir se le dificulta determinar la ordenada, cuando se conoce la abscisa.

Análisis cualitativo

- Por otro lado, el Alumno 22 logra obtener sus resultados con dificultades como se muestra en la figura 8.16.

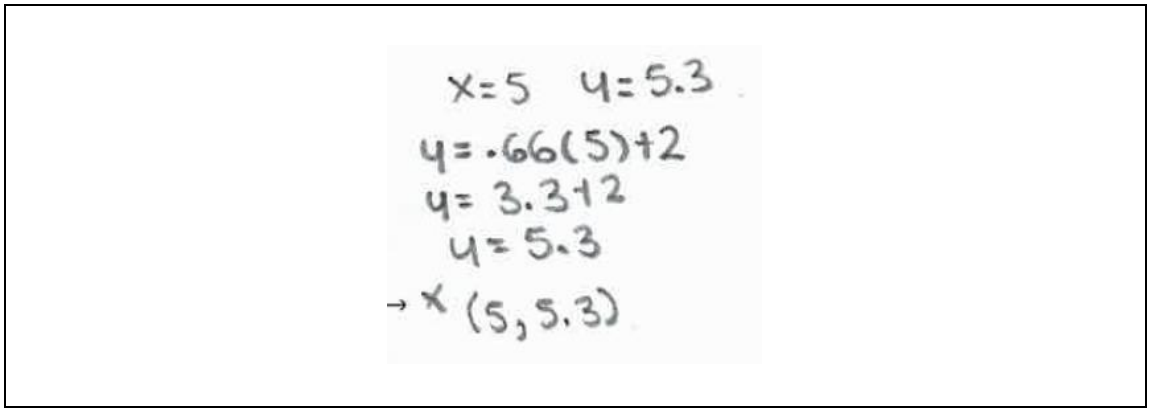
Figura 8.16. Tarea 17, problema 5. Parte de la respuesta del alumno 22



En el primer cálculo cambia el valor de la pendiente, sin embargo, el resultado es correcto. Se notan dificultades en operaciones algebraicas elementales, Segura (2004).

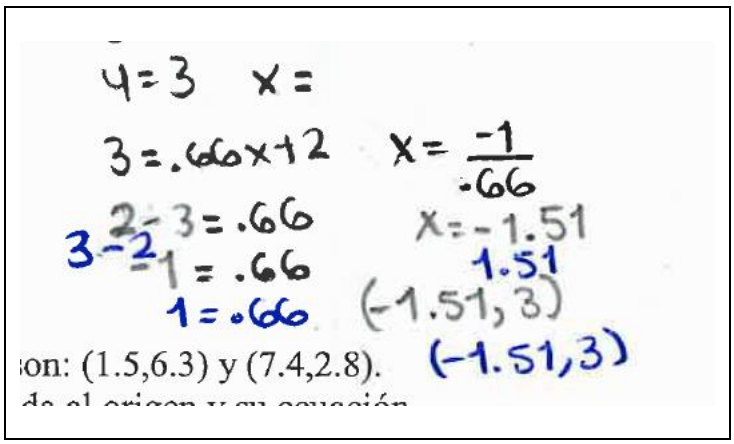
En la Tarea 19, problema 1, el alumno 11, determina correctamente la ecuación. Con la abscisa $x = 5$, sustituye y determina correctamente la ordenada.

Figura 8.17. Tarea 19, problema 1. Determinación de ordenada del alumno 11



Sin embargo, presenta las siguientes dificultades para la determinación de la abscisa, cuando la ordenada es $y = 3$. Como se muestra en la Figura 8.18.

Figura 8.18. Tarea 19, problema 1. Determinación de abscisa del alumno 11

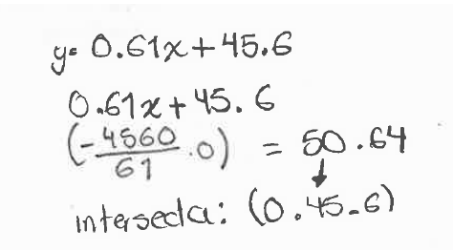


Como se puede observar en la figura anterior:

- Se trata del cálculo de "x" cuando $y = 3$, dada la ecuación $y = 0.66x + 2$
- Sustituye correctamente la ecuación la cual queda: $3 = 0.66x + 2$
- El número 2 lo transpone de forma incorrecta $2 - 3 = .66$
- En el procedimiento, omite escribir "x"
- Posteriormente corrige con pluma, aunque finalmente el signo erróneo de la abscisa determinada, lo mantiene.

Se notan las dificultades en operaciones algebraicas elementales, Segura (2004).

Figura 8.19. Tarea 19, problema 3. Respuesta confusa del alumno 24

Procedimiento correcto	Respuesta del alumno 24
El valor $x = 8.4$, *se sustituye en la ecuación,* $y = 0.61(8.4) + 45.6$ $y = 50.7$ (8.4,50.7)	

El Alumno 24, en el problema 3 inciso c). Que trata de determinar la ordenada cuando

$$x = 8.4$$

una vez determinada la ecuación, el procedimiento correcto y la respuesta del alumno se muestran en la Figura 8.19.

Análisis cualitativo

En los dos casos anteriores se observa la falta de habilidad en el manejo del lenguaje algebraico. En un paso determinado se olvidan de las literales y escriben operaciones aritméticas.

Tarea 20. El alumno 12, determina correctamente la ecuación $y = -0.06x + 23$ pero, al determinar la ordenada "y" cuando $x = 64$ cambia las variables, como se muestra a continuación.

Sustitución correcta	Sustitución incorrecta
$y = -0.06(64) + 23$	$64 = -0.06x + 23$

Se observa una falta de habilidad en el "manejo" de expresiones algebraicas elementales. Esto dificulta el trabajo, en la subcompetencia de resolución de problemas matemáticos. Se necesita, desarrollar en los estudiantes la habilidad en el manejo de expresiones algebraicas lineales con dos incógnitas.

Estas últimas dificultades se pueden catalogar como ceguera metacognitiva por conocimientos incompletos.

En los casos presentados en los últimos párrafos, determinación de coordenadas de un punto, los alumnos primeramente se percataron de sus errores en trabajo de equipo y posteriormente en sesión grupal, cuando los problemas fueron expuestos en el pizarrón.

8.2.4 Desarrollo del planteamiento de estrategias

Luego de revisar los resultados del problema inicial, las primeras tareas y las entrevistas, se observó que los alumnos tenían muy poca o nula experiencia en solución de problemas, lo que provoca una ausencia de estrategias. Sin embargo, a medida que se avanzó en el trabajo académico, los alumnos mejoraron un poco en este rublo. Por tal motivo, es interesante señalar en qué

momento se observa que los alumnos empiezan a hacer un planteamiento eficiente de estrategias. A continuación, se señalan algunas observaciones.

En el bloque de tareas 1, razón de cambio, coeficiente de proporcionalidad, proporciones.

Tarea 2. Consumo de agua en la ducha. Los alumnos difícilmente plantean una estrategia para la determinación del consumo de agua por unidad de tiempo, sin embargo, con el apoyo del profesor logran hacerlo.

Tarea 8. La experiencia en el Bungee. Los alumnos proponen la estrategia de medición de longitud de caída respecto el número de ligas, después de una muestra concreta del problema, por parte del profesor, es decir con apoyo del profesor.

Tarea 10. Zapatos de gigante. En esta tarea los alumnos determinan rápido y eficientemente la estrategia para la solución del problema. Tomar las medidas reales de un compañero.

Tarea 12. Servicio de taxi por aplicación. Se observa que los alumnos planean una estrategia eficiente para la solución del problema. Elaboran una tabla de valores.

Se puede observar que después de dos problemas de modelización, en el tercero, los alumnos empiezan a plantear estrategias productivas.

En el bloque de tareas 2, función lineal, pendiente, ordenada al origen, gráficas y ecuaciones.

Tarea 20. Tiempos de oro olímpico. Y Tarea 21, Escalas de temperatura. En estos problemas para modelizar, los alumnos, luego de la comprensión de los problemas, plantean inmediatamente una estrategia que consiste en la transición de representaciones: elaboración de

tabla de valores, trazo de gráfica, determinación de la ecuación y cálculo de las coordenadas de algunos puntos. Cabe señalar, como se puede observar, esta estrategia se fue desarrollando en las tareas anteriores, es decir desde la Tarea 13 hasta la 19, se estuvo trabajando la comprensión de las funciones lineales, transición entre representaciones y por consecuencia la estrategia de los problemas de las tareas 20 y 21, (Stillman, 2004).

8.2.5 Observaciones cualitativas acerca del trabajo de los equipos

Aunque se han mencionado algunas observaciones acerca del trabajo de los alumnos, es interesante señalar algunas similitudes y diferencias en el trabajo colaborativo por equipos. Donde el equipo 1, está formado por cuatro alumnos, que inicialmente tienen buenas habilidades matemáticas y, el equipo 2, está formado por cuatro alumnos que inicialmente tienen bajas habilidades matemáticas. Se presenta la Tabla 8.5., donde se muestran la diferencias en el trabajo de los equipos.

Tabla 8-5. Comparación cualitativa del trabajo de los equipos

Tarea/problema	Equipo 1	Equipo 2
Tarea 1	3/4 alumnos logran determinar: cálculos correctos para la tabla, graficar, interpretar la ordenada al origen, interpretar gráficamente la pendiente. Y 2/4 alumnos determinan los minutos a los cuales las dos compañías cobran la misma cantidad.	Ningún alumno logra tener al menos un acierto, por sí sólo, en todo el problema
Observaciones	Se observa la diferencia en cuanto a las habilidades y conocimientos matemáticos, mientras los alumnos del equipo 1 logran resultados loables, los alumnos del equipo 2 tienen mayores dificultades.	
Tarea 2	Planean una estrategia adecuada para la determinación del gasto de agua por unidad de tiempo y, la determinan eficientemente.	Planean una estrategia deficiente y determinan el gasto de agua por unidad de tiempo erróneamente.
Observaciones	En videos se observa que la forma de trabajo de los equipos es diferente; mientras los alumnos del equipo 1 trabajan de forma “comprometida”, los alumnos del equipo 2 trabajan sin compromiso. Y los resultados saltan a la vista, esto puede estar determinado porque tienen el prejuicio que nunca han entendido matemáticas.	
Tarea 4	Ambos equipos determinan correctamente la densidad de diferentes sustancias. Pero al comprobar la comprensión de esta propiedad, ambos equipos responden de manera incorrecta. Solamente el alumno 13 responde correctamente.	

Tabla 8-5. Comparación cualitativa del trabajo de los equipos

Tarea 6	La mayoría de los alumnos determinan correctamente el factor de proporcionalidad. Incluso determinan el factor inverso y cómo usarlo para el cálculo. Dificultades para la interpretación gráfica del factor de proporcionalidad, sin embargo, hacen un esfuerzo para determinarlo.	Ningún integrante del equipo determina correctamente el factor de proporcionalidad. No tratan de interpretar gráficamente el factor de proporcionalidad.
Observaciones	Se observa la diferencia entre sus habilidades y conocimientos matemáticos.	
Tarea 8	Presentan una ceguera metacognitiva al querer medir una liga estirada. Un alumno propone una actividad que se cataloga como espejismo metacognitivo, al querer introducir la mecánica clásica, aunque si es factible, no es necesario aplicarla.	Presentan una ceguera metacognitiva al querer medir una cadena de ligas, sin caída.
Observaciones	Para ambos equipos se tuvo que mostrar de forma concreta el problema.	
Tarea 9	Con dificultades en el planteamiento de la proporción.	Con dificultades en el planteamiento de la proporción.
Observaciones	A pesar de las dificultades, ambos equipos logran resolver los problemas con el apoyo cognitivo mínimo del profesor.	
Tarea 10	Ambos equipos trabajan correctamente al tomar las medidas de referencia de un compañero, para luego proporcionar con los zapatos del gigante.	
Tarea 11	Comprenden el problema. Logran matematizar aritméticamente. No logran matematizar algebraicamente.	No comprenden el problema No logran matematizar aritméticamente. No logran matematizar algebraicamente.
Observaciones	Los alumnos del equipo 1, al menos logran matematizar aritméticamente y comprenden el problema. Los alumnos del equipo 2, necesitaron mayor apoyo del profesor.	
Tarea 12	Problemas en la determinación de las variables por parte de dos alumnos.	Determinan correctamente las variables.
Observaciones	En esta ocasión el equipo 1 tuvo mayores dificultades que el equipo 2. Esto se debió a que el alumno 11 tuvo dificultades en determinar correctamente las variables.	
Tarea 17	Resalta el hecho que en los dos equipos tuvieron dificultades para determinar la pendiente.	
Tarea 18	Un alumno tiene dificultades en la determinación de la pendiente	Resuelven los problemas eficientemente.
Tarea 19	Un alumno presenta dificultades algebraicas: determinación de una predicción.	Un alumno presenta dificultades algebraicas: determinación de una predicción.
Tarea 20	Los alumnos trabajan eficientemente.	Un alumno no logra resolver el problema.
Tarea 21	Dos alumnos presentan problemas en la matematización, elaboración de la tabla de valores.	Tuvieron dificultades en las determinación de las escalas en los ejes. Un alumno tiene dificultades en: determinación de la ordenada al origen, pendiente y ecuación.

Análisis cualitativo

Como se puede observar, en las tareas 1, 2, 6, 11, los alumnos del equipo 1, demuestran mejores conocimientos y habilidades matemáticas, así como "compromiso" en el trabajo académico: los alumnos del equipo 1 resuelven los problemas en menor tiempo y con mejores resultados que los alumnos del equipo 2. Los alumnos del equipo dos requieren mayor supervisión y apoyo de parte del profesor.

Por otro lado, hay momentos en que los dos equipos trabajan de manera similar, en la Tarea 4 tienen la misma dificultad de interpretación de resultados; en la Tarea 8 presentan dificultades similares en la comprensión del problema y en estrategia experimental; en la Tarea 9, en el planteamiento de la proporción; en la Tarea 17 ambos tuvieron dificultades en la determinación de la pendiente; y en las tareas 19, 20 y 21 al menos un alumno de ambos equipos presenta dificultades algebraicas. Sin embargo, hay momentos en que ambos equipos trabajan eficientemente, como en las tareas 10 y 11.

Se enfatiza que los alumnos del equipo 2 necesitan mayor supervisión y apoyo cognitivo del profesor, así como acciones para generar su compromiso. En este punto cabe recordar que según Stillman (2004), los conocimientos cognitivos y metacognitivos de los alumnos influyen en su desempeño en la solución de problemas.

8.3 Clasificación de las dificultades presentadas por los alumnos

Como se señaló anteriormente, según Stillman (2011), los actos metacognitivos productivos se manifiestan durante tres momentos: i) reconocimiento de estrategias que son relevantes, ii) elección de estrategias para implementarlas y, iii) implementación exitosa de estas estrategias.

Análisis cualitativo

Stillman *et al* (2007), señala que las situaciones donde existe una dificultad, identificada o no, por parte de los estudiantes (situación de bandera roja), pueden dar lugar a bloqueos en el ciclo de modelización. Las respuestas de los estudiantes a estas situaciones de bandera roja se clasifican en: metacognición rutinaria, ceguera metacognitiva, vandalismo metacognitivo, espejismo y desviación metacognitivos.

Por otro lado, Stillman (2011), señala que las situaciones de bandera roja son ocasionadas por: falta de reflexión o, por conocimientos incorrectos o incompletos. En la presente investigación se considera que muchos de los conocimientos incompletos, precisamente se van adquiriendo a través del trabajo académico que se propone en las 21 tareas. Y esos conocimientos incompletos están en proceso de asimilación por parte de los estudiantes, se considera que se encuentran en proceso de asimilación por la gran diferencia entre los rendimientos de los problemas inicial y final, es decir, en el inicio no pudieron resolver un problema hipotético y al final sí. Precisamente por los conocimientos incompletos o incorrectos se tuvo la necesidad de proporcionar apoyo cognitivo y no solamente metacognitivo.

Como se pudo observar en páginas anteriores, en varias ocasiones, los alumnos no llegan a establecer un proceso metacognitivo por conocimientos incompletos, por falta de experiencia y, donde se observó una ausencia de reflexión. Como en: escribir la ecuación a partir de una tabla de valores, la interpretación gráfica de la pendiente, en la comprensión del problema de la caída de la muñeca, entre otras. En estas ocasiones se tuvo que proporcionar apoyo cognitivo.

De tal forma que para la falta de reflexión podemos señalar dos subcategorías: i) falta de **reflexión por falta de conocimientos**, ii) **ausencia de reflexión**. Así mismo, se observó que en el problema inicial, algunos alumnos realizaron operaciones aritméticas sin sentido y con una

ausencia de estrategia, a esta respuesta de bandera roja observada la hemos señalado como **“acciones sin estrategia”.**

En este estudio se considera, de acuerdo con Stillman (2011), que la metacognición rutinaria genera, a pesar de las dificultades, respuestas productivas. Aunque la palabra rutinaria se podría considerar como negativa, el autor se refiere al trabajo metacognitivo que, a pesar de las dificultades, el aprendiz genera respuestas productivas.

A partir de lo anterior, se presenta la Tabla 8.6., con ejemplos de situaciones que sucedieron en la investigación, estos ejemplos se analizaron en las páginas anteriores.

De acuerdo con la Tabla 8.6., las respuestas de los estudiantes en situaciones de bandera roja son: i) cuatro con metacognición rutinaria, ii) veintidós por ceguera metacognitiva, iii) cero por vandalismo metacognitivo, iv) una por espejismo metacognitivo y, v) una por desviación metacognitiva.

Así mismo, las causas de las situaciones de bandera roja son los siguientes: i) seis por falta de reflexión donde, cinco fueron por falta de conocimientos y una por ausencia de reflexión ii) 18 por conocimientos incompletos, iii) cero por conocimientos incorrectos. El análisis para cada motivo fue expuesto en párrafos anteriores.

El mayor número de causas en situaciones de bandera roja están concentradas en la falta de reflexión (falta de conocimientos), y en los conocimientos incompletos. Esto se puede deber a las características de la población estudiantil, inexperiencia en solución de problemas, bajo nivel en competencia matemática y alto índice de reprobación, señalados al inicio del presente escrito. Muchas veces se tuvo que proporcionar apoyo cognitivo en lugar de apoyo metacognitivo. Debido

a que la solución de problemas, además de las subcompetencias señaladas, requieren conocimientos previos, como lo señalan Shoenfeld (1985) y Stillman (2004).

Tabla 8-6. Categorías del proceso metacognitivo, productivo o no productivo

Respuestas a situaciones de bandera roja	Ejemplos de la experiencia en clase
Metacognición rutinaria, saber: qué, cómo, cuándo, y reconocimiento de estrategias.	Tarea 1, determinación de la ecuación, el alumno 12 intuye sus errores (autorregulación), resolvió con apoyo cognitivo. Tarea 10, conseguir los datos de referencia, estrategia correcta. Tarea 21, el alumno 13 propone la estrategia de solución: transición de representaciones, es decir el alumno sabe el qué, cómo, cuándo. Tarea 21, si bien, los alumnos del equipo 2 proponen una estrategia correcta, tienen dificultades en las escalas de la gráfica (conocimientos incompletos).
Ceguera metacognitiva: no reconocer los errores.	Tarea 1 y 11, determinación de la ecuación a partir de operaciones aritméticas en llenado de tabla de valores, (conocimientos incompletos). Tarea 1, errores en los cálculos para el llenado de tabla de valores (conocimientos incompletos). Tarea 1, interpretación de la pendiente (conocimientos incompletos). Tarea 2, equipo 2. La realización experimental presentó falla en la medición de agua (falta de reflexión, falta de conocimientos). Tarea 3, determinación de la razón (conocimientos incompletos). Tarea 4, interpretación de densidad (ausencia de reflexión). Tarea 6, determinación del factor de proporcionalidad (conocimientos incompletos). Tarea 6, interpretación gráfica del coeficiente de proporcionalidad (conocimientos incompletos). Tarea 8, dificultades para la comprensión de problema. Se tuvo que mostrar el problema de manera concreta (falta de reflexión, falta de conocimientos). Tarea 8, equipo 2. Medir las ligas estiradas (falta de reflexión, falta de conocimientos). Tarea 8. equipo 1. Medir una cadena de ligas (falta de reflexión, falta de conocimientos). Tarea 9, proporcionalidad, realizan “sumatorias” en lugar de la proporción (conocimientos incompletos). Tarea 11, uso de la proporción de forma incorrecta (conocimientos incompletos). Tarea 14, determinación de variables. Confusión del alumno 11 (conocimientos incompletos). Tarea 17, problema 5, alumno 11. No contesta los valores en la tabla (conocimientos incompletos). Tarea 17 y 18, determinación de pendiente (conocimientos incompletos). Tarea 17 y 20, determinación algebraica de una predicción, sustitución y cálculo (conocimientos incompletos). Tarea 21. El alumno 14 propone la solución con una proporción (conocimientos incompletos). Tarea 21. Alumnos 11 y 12. Tratan de aplicar la estrategia con una tabla que no tiene parejas ordenadas (falta de reflexión, falta de conocimientos).
Vandalismo metacognitivo: se toman medidas drásticas destructivas.	No hubo.

Análisis cualitativo

Tabla 8-6. Categorías del proceso metacognitivo, productivo o no productivo

Espejismo metacognitivo: se toman medidas innecesarias.	Tarea 8. Proponer una solución con la mecánica clásica, pero no es necesaria, caída de los cuerpos (falta de reflexión, falta de conocimientos).
Desviación metacognitiva: respuestas inapropiadas.	Tarea 2. El equipo 1 reporta la cantidad de agua gastada de forma puntual 90 litros si se tarda 15 minutos, aunque podría ser una respuesta correcta, sería mejor responder de forma variable 6 L/min (conocimientos incompletos).

Sin embargo, estas dificultades, o respuestas no productivas a situaciones de bandera roja se fueron superando, en la medida de lo posible, a través del trabajo académico con las tareas, en gran medida con el apoyo cognitivo, en menor medida con el apoyo metacognitivo que proporcionó el profesor.

Dos consideraciones acerca de las causas de situaciones de bandera roja

Por falta de reflexión

Una de las causas puede ser por la falta de experiencia en solución de problemas, como también se ha nombrado por falta de conocimientos. Al inicio, se presenta una ausencia de proceso metacognitivo, no recuerdan un problema parecido para tenerlo de referencia, no proponen una estrategia coherente con el problema porque no la tienen, se limitan a la aritmética elemental, haciendo operaciones sin sentido, resultado similar reporta Meléndez (2016). Esta forma de trabajo se puede señalar como una nueva categoría de respuesta a bandera roja de Stillman (2011), "**acciones sin estrategia**". También se observó una ausencia de reflexión.

Conocimientos incompletos

Grandes dificultades para determinar la ecuación a partir de la tabla de valores. Desconocimiento de la proporción. Dificultades en la transición entre la representación gráfica y algebraica. Dificultades en la interpretación de las gráficas. Dificultades en operaciones aritméticas y algebraicas elementales, igualmente en la determinación de variables y en el aprendizaje del

concepto de razón entre dos magnitudes. Sin embargo, se debe considerar que los conocimientos de funciones lineales están en construcción.

Desarrollo del aprendizaje y el proceso metacognitivo

Según las observaciones, los estudiantes van aprendiendo funciones lineales y empiezan a desarrollar un proceso metacognitivo (inicial o básico), a través del trabajo académico llevado a cabo. De manera general se pueden mencionar las siguientes acciones.

- La serie de 21 tareas, donde se trabajaron paulatinamente los elementos de funciones lineales con problemas hipotéticos, problemas de modelización y problemas-ejercicios matemáticos.
- Si bien se tuvieron programados apoyos metacognitivos, en la práctica se proporcionaron apoyos cognitivos, debido a la falta de experiencia en solución de problemas de los estudiantes y a sus limitados conocimientos matemáticos.
- Con el trabajo cotidiano, descrito en páginas anteriores, los alumnos fueron construyendo su conocimiento de funciones lineales, almacenando en su memoria las estrategias de solución de los problemas trabajados (Stillman, 2004), empezaron a resolver problemas parecidos resueltos anteriormente. En las últimas dos tareas y en el problema final, demostraron aplicar una estrategia, que es una señal de empezar a construir su conocimiento metacognitivo.
- Se observó que iniciaron el desarrollo de las subcompetencias: comprensión del problema, matematización, resolución de problemas matemáticos, interpretación y comprobación.

Como lo señala Stillman (2004), una amplia variedad de estrategias cognitivas que incluyen recuperación, comprensión, organización de la información, concentración de la

atención, representación de la información y visualización son necesarias para superar la posible variedad de condiciones que impiden que un estudiante pueda encontrar al intentar acceder a una tarea de aplicación.

Dificultades y tipo de apoyo eficaz

Algunas dificultades presentadas en esta investigación, clasificadas por subcompetencia, y el tipo de ayuda cognitiva (y poca metacognitiva), que resultó eficaz, se presentan a continuación.

Comprensión del problema

- En la lectura y comprensión de los requerimientos del problema.
    - Tiempo suficiente para lectura y comprensión del problema (relectura, Stillman, 2004).
    - Realización de un ejemplo concreto del problema.
    - Discusión en trabajo colaborativo.
    - Trazo de diagramas, (sucedió en el estudio piloto, Stillman, 2004).
    - Indicaciones y preguntas, "*imagínense la situación*", "*¿Qué quieren medir*?" (Blum, 2011).
    - Orientación acerca de los datos y condiciones del problema: *"los zapatos gigantes son de caballero", "la liga estirada no representa la misma fuerza que la muñeca al caer"*, (compromiso, Stillman, 2004).
- Desconocimiento de que, en modelización a veces es necesario hacer un trabajo de indagación o experimentación para obtener los datos.
    - Indicación previa, que en muchos problemas de modelización se deben "conseguir" los datos, ya sea por experimentación o por búsqueda bibliográfica.

Análisis cualitativo

Matematización

- En la determinación de las variables.
    - El trabajo colaborativo resultó eficiente.
    - Para la definición de variables fueron de gran ayuda las siguientes expresiones: *"imagínate la situación", "¿qué variable depende de la otra?", "el valor de'y' depende del valor de 'x'".*
- En la identificación de datos útiles del problema para la elaboración de la tabla de valores.
    - A pesar de que, con preguntas de reflexión y trabajo colaborativo, los alumnos pueden determinar los datos útiles del problema, también se considera que, con la práctica en solución de problemas, los alumnos podrán mejorar esta habilidad, adquisición de conocimientos y experiencia (Stillman, 2004).
- En la elaboración de tabla de valores.
    - Preguntas de reflexión respecto a cómo varía una variable con respecto a otra.
    - Preguntas guiadas en la determinación cuantitativa de la variable dependiente. Como, por ejemplo, "*La compañía A, ¿Cuánto cobra por 10 minutos?, ¿Cuánto cobra por 20 minutos?,* etc.

Solución de problemas matemáticos

- En la representación gráfica. En la determinación de las escalas en los ejes. En la habilidad para localizar y leer coordenadas. En la interpretación gráfica de la pendiente.
    - El apoyo en la definición de las escalas en los ejes a través de preguntas de los intervalos de las variables.
    - Apoyo al preguntar por la cantidad que representa cada división de la escala de los ejes.

Análisis cualitativo

- Apoyo en indicaciones de la representación de un punto en el plano cartesiano y su correspondiente representación algebraica, como la forma en que se escribe una pareja ordenada.
- Apoyo en que la inclinación de la recta representa la pendiente (razón de cambio) de una función.
- Repetición del trabajo académico con las mismas preguntas en diferentes contextos.

Comentario. En la representación gráfica. Para mejora en el aprendizaje de los alumnos, sería conveniente, que previo a la presente secuencia didáctica, se trabaje con: interpretación, construcción cualitativa y cuantitativa además de la predicción, Leinhardt *et al* (1990).

- En la determinación del factor de proporcionalidad.
  - Apoyo para motivar la reflexión de su significado, en diferentes contextos, (Freudenthal 2002).
  - La repetición del cálculo en diferentes contextos logra que los estudiantes respondan correctamente (Vergnaud, 1990).
- En la determinación y solución de la proporción.
  - Apoyo cognitivo del procedimiento, luego de una serie de problemas matemáticos, logran resolver eficientemente un problema real.
- En la determinación de la pendiente a partir de la gráfica.
  - Promoviendo la automatización del cálculo a través de la repetición de ejercicios.
- En la determinación de la ecuación a partir de la tabla de valores.
  - Enfatizando la identificación de las variables, y señalar que el valor de ‘“*y” depende de “x”’.*

Análisis cualitativo

- Introducir en los encabezados de las columnas, una *"x"* y otra *"y"*, donde correspondan.
- Motivar la transición de representaciones: tabular, gráfica, algebraica, cuando el patrón de cambio no es percibido adecuadamente, es preferible determinar primero la ecuación y posteriormente completar la tabla de valores.

- Determinación de las coordenadas de un punto a partir de su ecuación, predicción.
  - Promoviendo la automatización del cálculo. Sustitución de la variable conocida y cálculo de la otra.

Interpretación y comprobación de resultados

- En la falta de reflexión en la relación del resultado matemático al contexto del problema.
  - La indicación que resultó muy eficaz es: "*menciona por qué piensas que tus procedimientos y resultados son correctos*". Aunque, sería mejor hacer las siguientes dos preguntas: ¿crees que resolviste correctamente el problema? Y ¿cómo lo sabes?
- En su mayoría los alumnos comprueban las operaciones matemáticas y, no todo el proceso.
  - En problemas reales, en la medida de lo posible, hacer que los alumnos puedan comprobar "físicamente" sus resultados.

Conclusiones del capítulo

Luego de la revisión y análisis cualitativo de las tareas para el aprendizaje, se considera conveniente concluir este capítulo con los siguientes puntos.

Como se ha podido observar, el marco teórico metacognitivo de Stillman (2011), ha servido básicamente para: i) identificar las dificultades en el proceso de aprendizaje, situaciones de

bandera roja y los bloqueos relacionados con estas situaciones, ii) identificación de cegueras metacognitivas, iii) identificación de conocimientos incompletos y algunas de sus causas. Aunque propiamente dicho, los alumnos demostraron en la primera etapa, problema inicial, y en la segunda etapa, proceso de aprendizaje, muy poco o nulo conocimiento metacognitivo.

La investigación ha tenido como sustento teórico los trabajos realizados por G. Stillman. Donde han sido de utilidad: i) las estrategias cognitivas/metacognitivas para aplicarlas en la planeación de tareas y en el momento de trabajo, ii) haber realizado el análisis de dificultades teniendo presente el ciclo de modelización y las subcompetencias, iii) motivar la reflexión de los estudiantes y, iv) promover y detectar el trabajo metacognitivo de los estudiantes.

Cabe señalar que una acción positiva en la planeación de las tareas es la "repetición" (Vergnaud, 1990; Stillman, 2004). Como se observó en el concepto de coeficiente de proporcionalidad y de pendiente. Para el concepto de que el coeficiente de proporcionalidad, en una gráfica se puede observar por la inclinación de la recta, se logra su dominio hasta la tercera vez que se pregunta, en las tareas 1, 6 y 7. Lo mismo sucede con la determinación de la pendiente de una recta que pasa por dos puntos, esto se presentó en las tareas 17, 18 y 19.

Para la determinación de la ecuación, resultó más eficiente, realizarla a partir de la representación gráfica. Determinando los valores de la ordenada al origen, la pendiente y posteriormente sustituir en la ecuación $y = mx + b$.

Como se pudo observar, para la falta de experiencia en resolución de problemas, para la falta de proceso metacognitivo, y para los conocimientos incompletos, se trabajó a través de 21 tareas con 16 ejercicios matemáticos, 17 hipotéticos y 7 reales. En el trabajo académico se

promovieron los apoyos cognitivos (y pocos metacognitivos). Para que los alumnos aprendieran funciones lineales con modelización y solución de problemas.

Como ya se mencionó, en el problema inicial se observa que los alumnos: no tienen experiencia en la solución de problemas, esto ocasiona que no recuerden una estrategia de un problema parecido para aplicarla exitosamente. Sin embargo, después de esta intervención, ellos ya tienen experiencia en problemas de funciones lineales. Se considera que en el futuro los tengan de referencia. Es decir, en toda la serie de tareas se fueron construyendo las bases cognitivas para el desarrollo de un proceso metacognitivo.

A medida que se avanza en las tareas, los alumnos van resolviendo problemas parecidos que se almacenan en su memoria (Stillman, 2004), como lo mencionó un alumno en la entrevista

"*sólo es aplicar lo que se venía trabajando cotidianamente*".

Además, en las dos últimas tareas se observa que la mayoría de los alumnos: comprenden el problema, determinan variables, matematizan y resuelven el problema matemáticamente.

Según Stillman (2011), los tres niveles en que se manifiesta el proceso metacognitivo productivo son: i) recordar algunas estrategias ii) seleccionar alguna y, iii) aplicarla exitosamente. En estas etapas el alumno tiene una gran responsabilidad en su aprendizaje, esta forma es muy diferente, a que solamente vea la solución del problema que expone el profesor.

Durante la solución de problemas, el alumno se enfrenta a dificultades que va superando, sin embargo, puede ser que no supere alguna dificultad. En este momento se crea una "necesidad de aprendizaje". El profesor, orienta al estudiante con indicaciones o preguntas, de apoyo cognitivo

o metacognitivo, que motiven la reflexión, de esta manera el estudiante es partícipe de la adquisición de su conocimiento.

En ocasiones no es suficiente el apoyo metacognitivo del profesor. Debido a que los alumnos están construyendo sus conocimientos, es decir tienen conocimientos incompletos. Por lo que resulta necesario ofrecer apoyo cognitivo como en: procedimientos de manejo de ecuaciones, determinación de factor de proporcionalidad, determinación de pendiente, escritura de coordenadas, etc. (Stillman, 2004)

Una nueva subcategoría para la respuestas de los estudiantes en situación de bandera roja

De acuerdo con las observaciones de esta investigación se detectó una respuesta reiterativa a situación de bandera roja (Stillman, 2011), cuando los estudiantes no tienen experiencia en solución de problemas y no recuerdan alguno parecido, recurren a realizar operaciones aritméticas para proponer una solución sin más recursos matemáticos, y cuando estas operaciones no los llevan a alguna forma de solución. Esta respuesta se podría clasificar como: "**acciones sin estrategia**" por falta de conocimientos.

Falta de reflexión (falta de conocimientos) y ausencia

Se observó que la falta de reflexión (falta de conocimientos), es debida a la falta de familiarización del estudiante a la solución de problemas. Así podemos decir que esa falta de reflexión se debe a su "falta de conocimientos". Así mismo, se observó, al menos una vez, una "ausencia de reflexión", respuesta sin reflexionar.

Influencia del trabajo cognitivo y metacognitivo

Análisis cualitativo

Como se indicó anteriormente el trabajo cognitivo y metacognitivo del profesor se manifiesta en: la elaboración de tareas, en las preguntas, o acciones, que provocan la reflexión y el aprendizaje cognitivo, y en el momento del trabajo académico.

En esta investigación se pudo observar la influencia del trabajo cognitivo y metacognitivo en el aprendizaje de conceptos matemáticos. Esta influencia es positiva: i) al enfrentar a los alumnos a situaciones problemáticas se provoca en ellos una necesidad de aprendizaje donde reflexionan, investigan y preguntan, ii) se aplican los conceptos aprendidos de forma inmediata, iii) potencializa la comprensión al relacionar su aprendizaje con situaciones de diferentes contextos.

A pesar de los “buenos resultados” en el aprendizaje de funciones lineales, se considera que el desarrollo de subcompetencias y del proceso metacognitivo están iniciando en los estudiantes y, se espera que a futuro se sigan desarrollando con propuestas didácticas como la presente.

9 PROBLEMA FINAL, TERCERA ETAPA. Y COMPARATIVO

En este capítulo se presentan los resultados y análisis del problema final (tercera etapa), así como el análisis comparativo entre el inicio y el final de la instrucción.

Solución de problema final

Figura 9.1. Problema hipotético

En promedio, un bebé pesa 2.9 Kg al nacer y, cuatro años más tarde el peso del niño es de 15.5 Kg. Suponga que el peso en la infancia esté linealmente relacionado con la edad en años

Edad (años)	0	4
Peso (Kg)	2.9	15.5

Imagen, (Shutterstock, 2024)

Pregunta 1. Comprensión. Contesta verdadero o falso según sea el siguiente enunciado. Explica tu respuesta. “De acuerdo con el enunciado del problema, la edad depende del peso”.

Respuesta correcta. Falso, según el enunciado del problema, el peso varía linealmente con la edad.

Pregunta 2. Matematización. De acuerdo con el problema: ¿Cuál es la variable independiente y cuál es la variable dependiente? Explica tu respuesta.

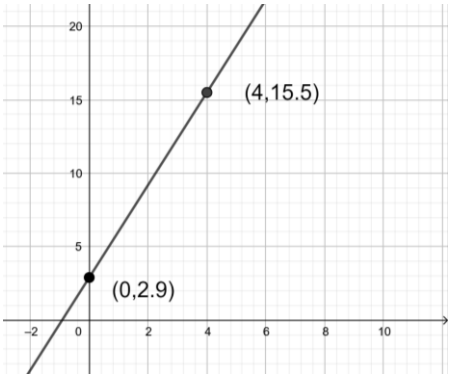
Respuesta correcta. La variable independiente es la edad y la variable dependiente es el peso del niño. De acuerdo con el enunciado del problema el peso es una función lineal de la edad.

Pregunta 3. Matematización. Elabora una tabla de valores y traza una gráfica.

Problema final y comparativo

Figura 9.2. Tabla y gráfica de problema final

x	y
0	2.9
4	15.5



Pregunta 4. Resolución de problemas matemáticos. Ordenada al origen de la ecuación de una recta. ¿Cuánto pesa en promedio un bebé al nacer? En la gráfica de una función lineal, ¿Cómo se llama a este punto?

Respuesta correcta. 2.9 Kg, ordenada al origen. De acuerdo con el problema es el peso del bebé cuando es recién nacido. Es el valor de la variable dependiente cuando la variable independiente es igual a cero, $(0, 2.9)$

Pregunta 5. Resolución de problemas matemáticos. Pendiente de la recta o razón de cambio de la función lineal. Con los datos proporcionados, determina el factor de proporcionalidad o pendiente.

Respuesta correcta. $m = 3.15$ *Kg/año. Mediante el cálculo:*

$$m = \frac{15.5 - 2.9}{4 - 0}$$

El alumno puede determinar la pendiente tomando las coordenadas de dos puntos de la gráfica.

Problema final y comparativo

Pregunta 6. Resolución de problemas matemáticos. Representación algebraica de una función lineal. Escribe la representación algebraica (ecuación) de la función.

Respuesta correcta. $y = 3.15x + 2.9$ *La determinación de la ecuación es por sustitución de valores en* $y = mx + b$.

Pregunta 7. Resolución de problemas matemáticos. Cálculo de predicción. Cuando el niño tenga 7 años, ¿qué peso tendrá?

Respuesta. Se sustituye $x = 7$ *en la ecuación y se realiza la operación,*

$$y = 3.15 * 7 + 2.9$$

$$y = 24.95\ Kg$$

Pregunta 8. Interpretación de resultados. Explica porque piensas que resolviste correctamente el problema.

Respuesta. Porque los resultados fueron comprobados y la ecuación obtenida es válida en cualquier tiempo del problema: al momento de nacer, a los 4 años y a los 7 años.

Problema final y comparativo

9.1 Resultados del problema final

Luego de las 21 tareas, se aplicó el problema final y los resultados son las que se presentan en la siguiente tabla.

Tabla 9-1. Resultados del problema final

Alumno	Preguntas									
	1	2	3	4	5	6	7	8	Cal.	%
11	1	1	1	1	1	1	1	1	8/8	100
12	1	1	1	1	1	1	1	1	8/8	100
13	1	1	1	1	1	1	1	1	8/8	100
14	1	0	1	1	1	1	1	1	7/8	87.5
21										
22	0	1	1	1	1	1	1	0	6/8	75.0
23	0	1	1	1	1	1	0	1	6/8	75.0
24	0	0	1	1	1	1	0	1	5/8	62.5
Total	4/7	5/7	7/7	7/7	7/7	7/7	5/7	6/7	48/56	
%	57.1	71.4	100	100	100	100	71.4	85.7		85.7

Como se puede observar en la tabla anterior, el rendimiento de los estudiantes es en su mayoría satisfactorio, con un promedio general de 85.7%.

9.2 Comparación de resultados

Comparando los resultados, se tuvo una mejora considerable con el rendimiento, entre el problema inicial y final, expresados en porcentaje, son: **problema inicial 21.4% y problema final 85.7%. con una mejora de 64.3%**

Tabla 9-2. Comparación de resultados globales en porciento de rendimiento

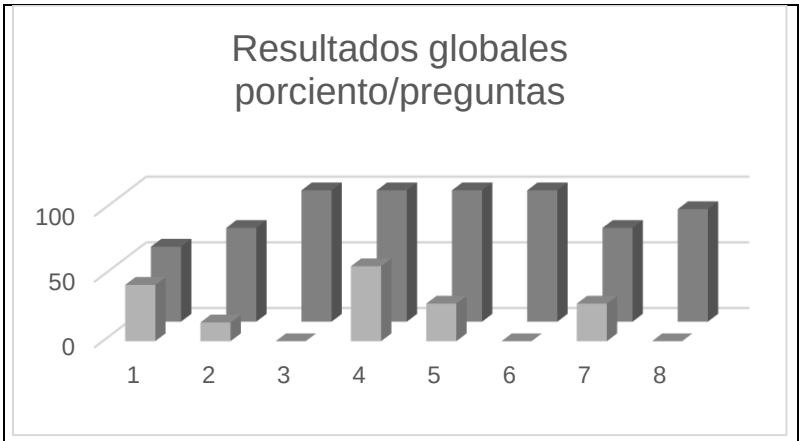
Preguntas	Acciones/Determinación de:	P. Ini.	P. Final
Comprensión	Dependencia de las variables.	42.9	57.1
Matematización	Variable independiente y dependiente.	14.3	71.4
Matematización	Elaboración de una tabla de valores y trazo de gráfica.	0.0	100
Sol. De problemas matemáticos	Ordenada al origen, determinación y significado.	57.1	100
Sol. De problemas matemáticos	Pendiente a partir de la gráfica.	28.6	100

Problema final y comparativo

Tabla 9-2. Comparación de resultados globales en porciento de rendimiento

Sol. de problemas matemáticos	Representación algebraica de la función, ecuación.	0.0	100
Sol. De problemas matemáticos	Determinación de la ordenada a una abscisa determinada.	28.6	71.4
Interpretación de resultados	Explicación del porqué su procedimiento y resultados son correctos.	0.0	85.7

Figura 9.3. Gráfica comparativa de resultados globales, inicial y final



Barras claras, problema inicial
Barras obscuras, problema final

El análisis estadístico formal, realizado con el paquete estadístico MINITAB presenta el siguiente resultado:

Prueba de hipótesis de muestras pareadas, usando T de student (Tep): problema inicial y final

	N	media	DevEst	DevEst (media)
Inicial	7	0.2143	0.2004	0.0758
Final	7	0.8571	0.1519	0.0574
Diferencia	7	-0.6429	0.1681	0.0636

95% límite superior para la diferencia de las medias: -0.5194

T-Test de la diferencia de las medias = 0 (vs < 0): Tep = -10.12 P-Valor = 0.000

Se observa que hay una diferencia evidente entre la media antes y después del trabajo con el ambiente de aprendizaje, 0,214 – 0.857 = -0.649. De acuerdo con la formalidad estadística, está

diferencia resulta significativa, ya que se tiene un valor $p = 0.000$ Pues un valor p menor que 0.01 habla de una diferencia estadística muy significativa, es decir, del 99% de confianza, y en este caso particular $p = 0.000$ es menor que 0.01.

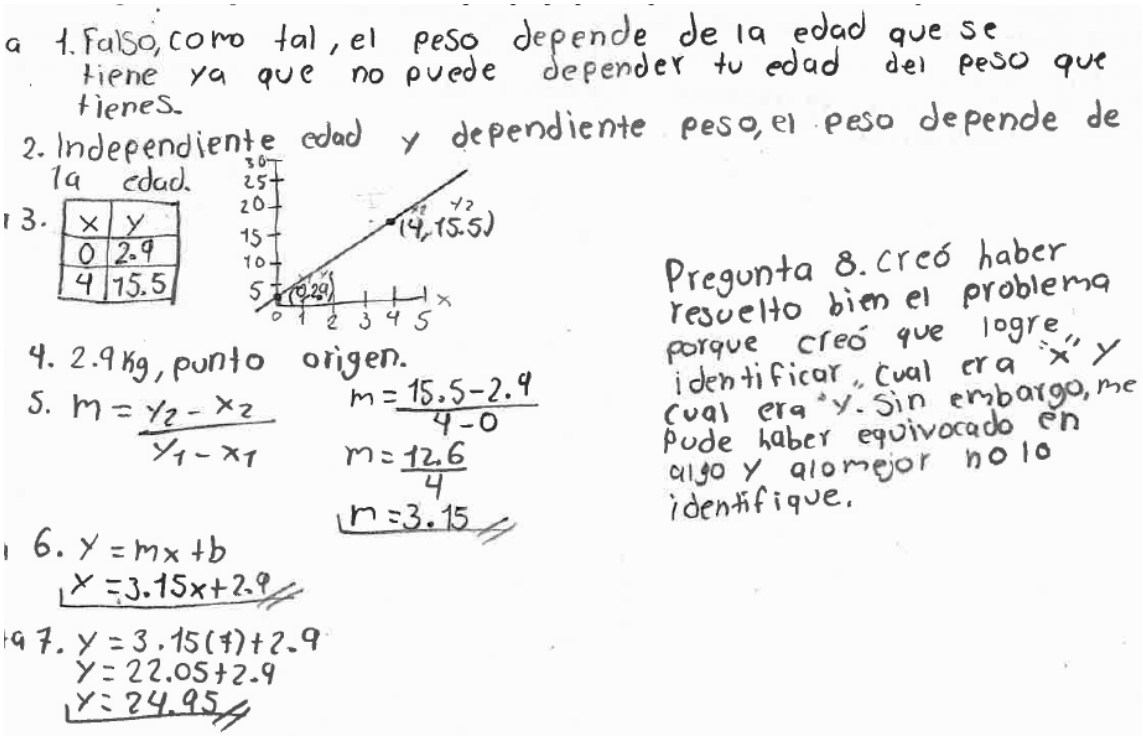
A la luz de los resultados del problema final, los alumnos, en su mayoría, logran un rendimiento satisfactorio:

- Después de trabajar las 21 tareas, ellos tienen una cierta experiencia en la solución de problemas de funciones lineales. Ahora, recordaron problemas parecidos y pudieron resolver el problema (Stillman, 2004). Párrafos adelante se realiza un análisis del proceso metacognitivo.
- Igualmente, demostraron, en su mayoría, aplicar las subcompetencias de modelización, al menos en este instrumento de evaluación, según las señala Stillman *et al* (2007): comprensión del problema, matematización, solución de problemas matemáticos, interpretación de resultados y comprobación.
- Los estudiantes, en su mayoría, pudieron transitar por las representaciones verbal, tabular, gráfica y algebraica de una función lineal, aprendizaje de funciones lineales.

Con los resultados globales del problema final, los cuales muestran un rendimiento del 85.7 %, se pueden señalar algunas consideraciones favorables. En el problema final se observó que la mayoría de los alumnos superaron las dificultades que tuvieron al inicio de la implementación, al menos, en el instrumento con el cual fueron puestos a prueba. Conocimiento de funciones lineales, transición entre representaciones, trabajado en un contexto (Duval, 1999).

Problema final y comparativo

Figura 9.4. Trabajo en el problema final del alumno 12



En el problema final se observó, de parte de los alumnos, la aplicación de una estrategia de forma exitosa, Stillman (2011). Se considera como estrategia: i) el reconocimiento de que algún problema parecido lo han resuelto en el pasado y con las herramientas matemáticas con las que se resuelve el problema, se realizan las siguientes actividades, ii) comprensión del problema, la variabilidad, iii) matematización, determinación de datos útiles del problema y elaboración de una tabla de valores, iv) transición entre representaciones tabular, gráfica y algebraica, v) determinación de una predicción. Si bien, las preguntas del problema y su orden son una guía de la estrategia que pueden seguir los alumnos, en el inicio no fueron capaces de llevarla a cabo, pero al final sí. En la Figura 9.4. Se muestra el eficiente trabajo del alumno 12 en problema final.

Problema final y comparativo

Sin embargo, se observó que algunos alumnos, aun en el problema final tuvieron dificultades en: la dependencia de las variables, la asignación de estas y, en el cálculo de una predicción.

Se observó que en su mayoría los alumnos:

Al inicio:	Al final:
Sin experiencia en solución de problemas.	Con experiencia en solución de problemas de funciones lineales.
Sin conocimientos de funciones lineales.	Con conocimientos de funciones lineales.
Sin estrategias para seleccionar alguna.	Con al menos, una estrategia.
Acciones sin estrategia, solamente usando recursos aritméticos.	Principios de conocimiento metacognitivo.
Sin comprensión del problema.	Con comprensión del problema.
No matematizan.	Si matematizan.
No resuelven el problema matemático.	Resuelven el problema matemático.
No interpretan resultados.	Interpretan resultados.
No conocen sus dificultades.	Conocen sus dificultades.

Como se puede observar, algunos alumnos tuvieron dificultades en el problema final, estas dificultades se comentan en los siguientes párrafos.

9.3 Algunos resultados individuales al inicio y al final

Se muestran a continuación, los resultados significativos de los problemas inicial y final de algunos estudiantes, para ver las diferencias en su rendimiento.

Alumno 13

Tabla 9.3. Comparativo de resultados inicial y final, Alumno 13

Test/preguntas	1	2	3	4	5	6	7	8	Cal.
Inicial	1	0	0	1	1	0	1	0	4/8
Final	1	1	1	1	1	1	1	1	8/8

Problema final y comparativo

El alumno en al inicio pudo distinguir la dependencia de las variables, la ordenada al origen, la pendiente y el cálculo de la ordenada para una abscisa determinada. Pero no pudo establecer la variable independiente y dependiente, no pudo establecer una tabla de datos coherente, determinar la ecuación, tampoco pudo dar un argumento que justifique sus respuestas, ni mencionar la razón del porque su procedimiento y resultados son correctos. Sin embargo, al final logra demostrar que aprendió y pudo: distinguir la dependencia de las variables, determinar las variables, hacer una tabla de datos y trazar la gráfica, determinar la pendiente y ordenada al origen, determinar la ecuación y determinar la variable dependiente cuando se conoce la variable independiente.

En la pregunta 8 del problema final señala: "*fue practicar o poner a prueba los problemas que había realizado anteriormente, actividad tras actividad, los pasos ya se sabían".* Conocimiento de sus conocimientos, metacognición (Stillman, 2004).

En el problema final, se puede decir que el alumno, aprendió las funciones lineales en el ámbito matemático y en el contexto del problema. Demuestra que transitó por las representaciones: verbal, tabular, gráfica y algebraica (Duval, 1999).

Así mismo, demuestra que tuvo: comprensión del problema, matematización, solución de problemas matemáticos, e interpretación de resultados, subcompetencias de modelización

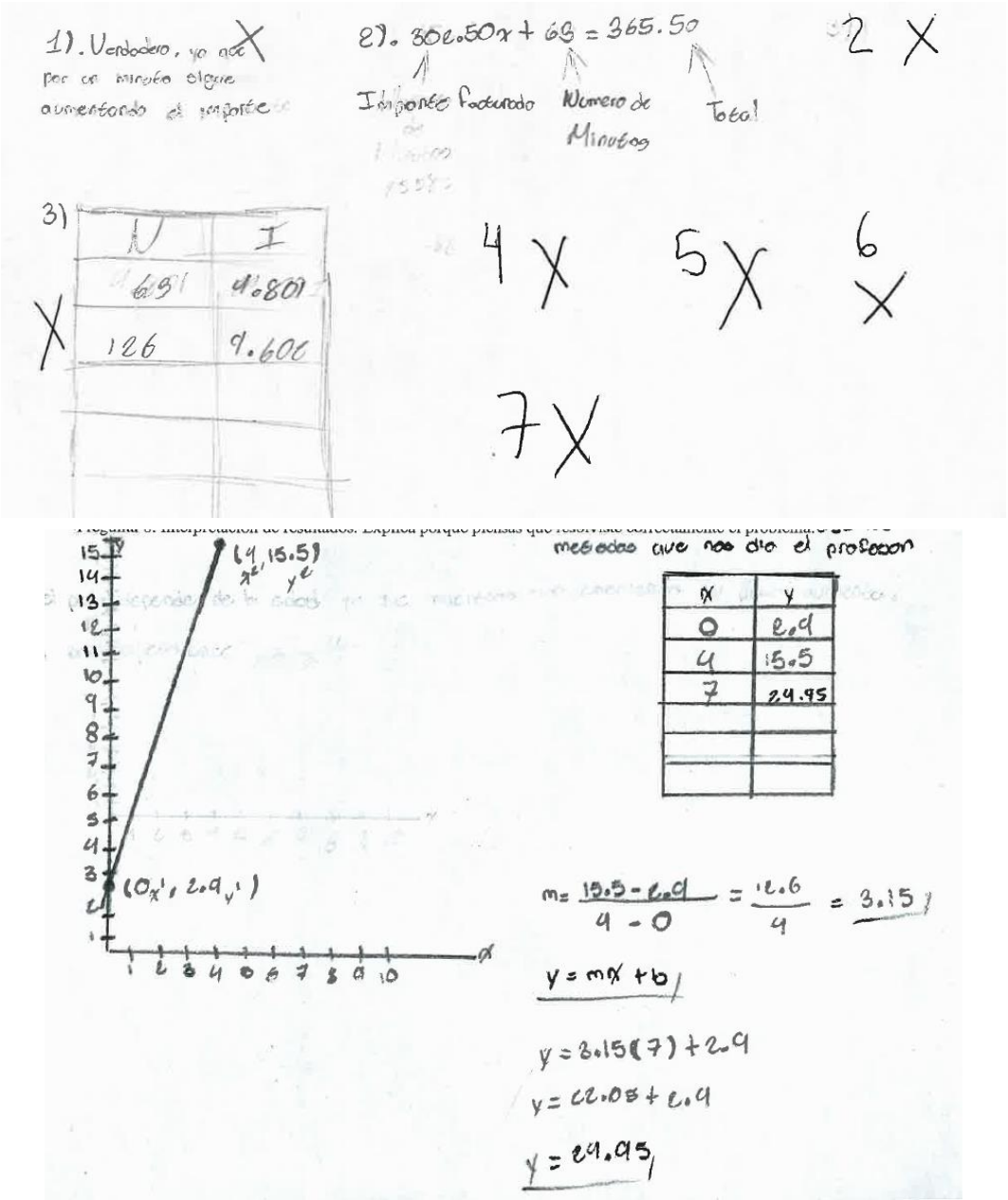
Problema final y comparativo

Alumno 14

Tabla 9.4. Comparativo de resultados al inicio y al final, Alumno 14

Test/preguntas	1	2	3	4	5	6	7	8	Cal.
Inicial	0	0	0	0	0	0	0	0	0/8
Final	1	0	1	1	1	1	1	1	7/8

Figura 9.5. Respuestas al inicio y al final del alumno 14



Problema final y comparativo

En el problema inicial demuestra su desconocimiento de funciones lineales y de solución de problemas. Como ya se mencionó en repetidas ocasiones, en el problema inicial, el alumno no logra aplicar una estrategia exitosamente.

Sin embargo, en el problema final logra demostrar que aprendió y pudo: distinguir la dependencia de las variables, hacer una tabla de datos y trazar la gráfica, determinar la pendiente y ordenada al origen, determinar la ecuación y determinar la variable dependiente cuando se conoce la variable independiente.

En el problema final, se observa que no logra determinar las variables como se muestra:

- *Respuesta del alumno: Variable independiente x, variable dependiente y.*
- Siendo la respuesta correcta: Variable independiente la edad en años "x", variable dependiente el peso en Kilogramos "y".

Aunque esta pregunta no la responde correctamente, logra establecer la codependencia de las variables al hacer la tabla, la gráfica y la ecuación.

Observación. El área para mejorar es en la determinación de las variables.

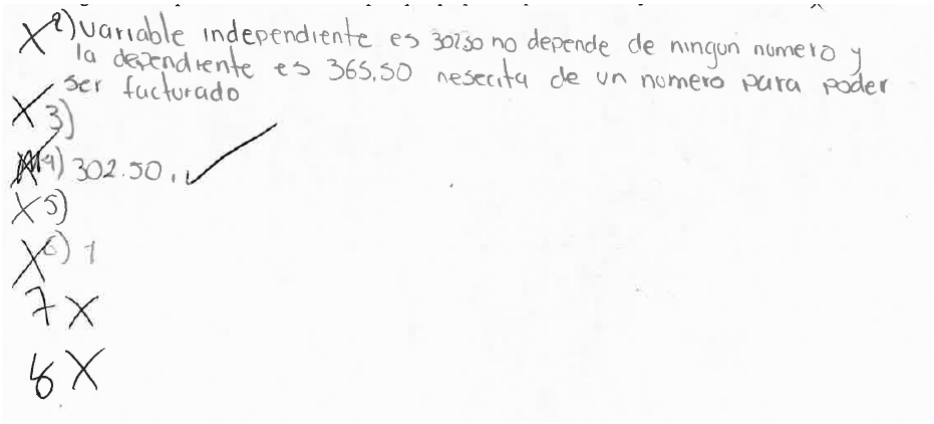
Problema final y comparativo

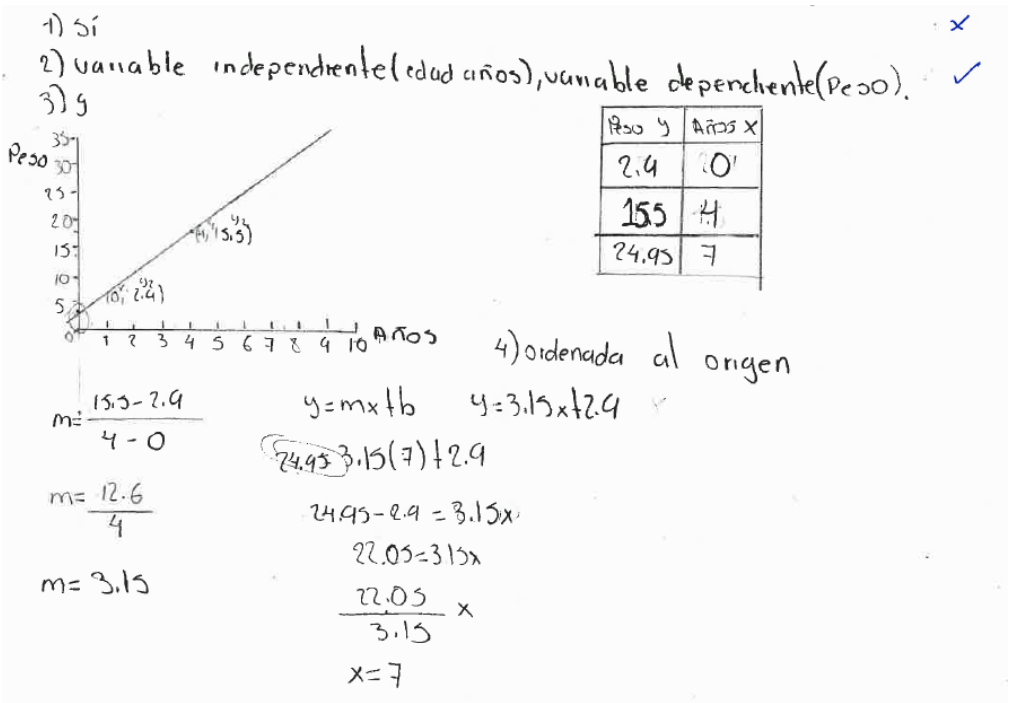
Alumno 22

Tabla 9.5. Comparativo de resultados al inicio y al final, Alumno 22

Test/preguntas	1	2	3	4	5	6	7	8	Cal.
Inicial	0	0	0	1	0	0	0	0	1/8
Final	0	1	1	1	1	1	1	0	6/8

Figura 9.6. Respuestas a los problemas inicial y final del alumno 22





Problema final y comparativo

Mientras que, en el problema inicial, sólo contestó el valor de la ordenada al origen, en el problema final respondió las preguntas correspondientes a matematización y solución de problemas matemáticos: determinación de las variables, tabla de valores, trazo de gráfica, ordenada al origen, pendiente, ecuación de la función y, determinación de la variable dependiente cuando se conoce la variable independiente.

Sin embargo, en las dos pruebas el alumno se equivocó en la dependencia de las variables. Es decir, en el inicio responde que es verdadero que "los minutos de llamada dependen del importe facturado". Y en el problema final que: "la edad de un niño depende de su peso". Aunque en el problema final, después, determinó correctamente las variables. Además, no contesta a la pregunta de por qué considera que respondió correctamente.

Observación. Las áreas para mejorar son la determinación de las variables y la interpretación de resultados.

Alumno 23

Tabla 9-6. Comparativo de resultados al inicio y al final, Alumno 23

Test/preguntas	1	2	3	4	5	6	7	8	Cal.
Inicial	0	0	0	1	0	0	0	0	1/8
Final	0	1	1	1	1	1	0	1	6/8

En el problema inicial, solamente contesta el valor de la ordenada al origen y demuestra su desconocimiento del tema. En el problema final, el alumno tuvo dificultades en la dependencia de las variables y en determinar la predicción solicitada. Sin embargo, en problema final logra demostrar que adquirió conocimientos, lo que se demuestra en: determinar la variable independiente y dependiente, hacer una tabla de datos y trazar la gráfica, determinar la pendiente y ordenada al origen, determinar la ecuación. En cuanto a las subcompetencias, se observa que en

Problema final y comparativo

el problema final tuvo: matematización, solución de problemas matemáticos (hasta determinar la ecuación) e, interpretación de resultados.

Observación. Las áreas para mejora son: la dependencia de las variables y la determinación de la predicción.

Alumno 24

Tabla 9.7. Comparativo de resultados inicial y final, alumno 24

Test/preguntas	1	2	3	4	5	6	7	8	Cal.
Inicial	0	1	0	0	0	0	0	0	1/8
Final	0	0	1	1	1	1	0	1	5/8

En el problema inicial, el alumno sólo contestó correctamente la asignación de las variables, y muestra su desconocimiento del tema.

En el problema final tuvo dificultades en la dependencia de las variables y en su determinación; además, una vez que obtuvo la ecuación, no determinó la predicción.

Sin embargo, en el problema final logró demostrar que adquirió algunos conocimientos lo que se demuestra en: hacer una tabla de datos y trazar la gráfica, determinar la pendiente y ordenada al origen, determinar la ecuación.

Observación. Las áreas de mejora son: la dependencia y determinación de las variables, determinación de la predicción y, la interpretación de resultados.

9.3.1 Resumen de dificultades de los alumnos en el problema final.

- Dependencia y determinación de las variables, 3 /7 alumnos no lo logran.

Problema final y comparativo

A pesar de que los alumnos no responden correctamente a estas preguntas, en las subsecuentes, manipulan las variables correctamente.

- Determinación de una predicción, 2/7 alumnos no lo logran.

En este punto será conveniente trabajar en la automatización del procedimiento algebraico “sustitución y cálculo”. Además de la comprensión y la automatización del procedimiento gráfico.

- Interpretación de resultados, 1/7 alumnos no lo logra.

En este punto es conveniente insistir en que los alumnos respondan por qué contestaron correctamente, esto es para motivar su reflexión y su proceso metacognitivo. Aunque sería conveniente primeramente preguntarle, si cree que resolvió bien el problema y después, cómo lo sabe.

Como se puede ver, la aplicación práctica de esta investigación comenzó con múltiples dificultades para los alumnos: el escaso conocimiento de funciones lineales, la falta de una estrategia para abordar el problema, es decir, la falta de un proceso metacognitivo, y no pudieron demostrar que tuvieran las subcompetencias de modelización y solución de problemas. Sin embargo, en el problema final: demuestran que tienen conocimientos de funciones lineales, y que pueden trabajar con las subcompetencias de modelización y solución de problemas.

A pesar de lo anterior, aún hay elementos donde seguir trabajando y aprendiendo, estos son: la dependencia y la determinación de las variables, determinación de una predicción y la interpretación de resultados.

Problema final y comparativo

9.4 Consideraciones finales de la evaluación cuantitativa al inicio y al final

En los instrumentos de evaluación preparados para este protocolo, se pudo observar el rendimiento de los estudiantes clasificado por subcompetencia al inicio y al final de la implementación. Con los resultados mostrados, párrafos atrás, se pudo comprobar que, con la secuencia de problemas promovida, se logra el aprendizaje cognitivo de los estudiantes. Sin embargo, en algunos temas, igualmente identificados, es necesario un trabajo más eficiente.

A pesar de la falta de conocimientos, la falta de experiencia en solución de problemas y, la falta de una estrategia en el problema inicial, y con los resultados obtenidos en el problema final podemos afirmar que, los alumnos aprendieron funciones lineales, aplicaron las acciones requeridas para demostrar un desarrollo “inicial” en las subcompetencias de modelización y solución de problemas y, que al menos trazaron una estrategia para la solución del problema hipotético final.

Sin embargo, luego de la revisión de resultados del problema final, existen algunos temas para ser mejor trabajados, como la determinación de las variables, el manejo algebraico y, el cálculo de una predicción, así como motivar la reflexión acerca de la asertividad de las respuestas de los alumnos.

Como se pudo observar, al inicio los alumnos presentaron acciones sin estrategia, sin embargo, en el problema final, pudieron llevar a cabo una estrategia que consistió en la transición de representaciones de funciones lineales, la cual fue promovida en las últimas tareas de esta investigación.

10 ENTREVISTAS, CUARTA ETAPA

Como se mencionó en el capítulo 5, según Freitas *et al* (2018), las entrevistas se usan a menudo como seguimiento de cuestionarios (en nuestro caso, el problema final), ya que ofrecen una información más rica de la que puede ser obtenida solamente en dichos cuestionarios.

Después de terminar el problema final, se realizaron las entrevistas a los alumnos, con las preguntas que se mostraron en el capítulo 5. A continuación, se muestran algunas respuestas significativas.

Alumno 11, inicio 4/8, final 8/8

Preguntas	Respuestas
Pregunta 1. Describe la forma en que resuelves los problemas.	*"Primero los leo dos o tres veces para comprenderlos y extraer los datos, luego trato de resolver por lógica. Sino puedo con lógica, trato de aplicar las fórmulas que tengo memorizadas, y lo que se me dificulta lo pregunto".*
Pregunta 3. Expresa tus experiencias positivas en este trabajo académico.	*"me sirvió mucho este curso porque no tenía experiencia en problemas reales, ni tampoco en encontrar los datos del problema".*
Pregunta 4. Comenta acerca de algún bloqueo y cómo lo superaste.	*"no podía encontrar la pendiente porque confundía las coordenadas. También se me dificultó entender los problemas reales, sobre todo para encontrar los datos".*

El alumno 11 comenta parte de su proceso metacognitivo: i) comprender el problema, ii) extraer los datos, iii) resolver por lógica, sino puede, iv) resuelve por fórmulas que tiene memorizadas, v) preguntar. Estas consideraciones, constituyen los principios de un conocimiento metacognitivo.

Así mismo, comenta que no tenía experiencia en la solución de problemas reales y, que al principio sólo realizaba operaciones aritméticas y trataba de observar algún resultado que le resultara lógico (acciones sin estrategia).

Entrevista

También comentó que se le dificultó determinar la pendiente porque confundía las coordenadas (como se observó páginas atrás). Conocimiento de sus dificultades (acto metacognitivo).

Se puede señalar que el alumno ahora está consciente de aplicar un proceso en la solución de problemas y sabe cuáles son sus dificultades, conocimiento de sus limitaciones (algunas relacionadas con este tema).

Alumno 12, inicio 1/8, final 8/8

Preguntas	Respuestas
Pregunta 1. Describe la forma en que resuelves los problemas.	*"después de entender el problema reviso el método que se puede utilizar y lo aplico".*
Pregunta 3. Expresa tus experiencias positivas en este trabajo académico.	*"aprendí a hacer la tabla y la gráfica, así como calcular la pendiente y la ordenada al origen"* (conciencia de sus conocimientos, acto metacognitivo, Stillman, 2004).
Pregunta 4. Comenta acerca de algún bloqueo y cómo lo superaste.	*"me estreso mucho y trato de tranquilizarme".*

El alumno 12, señala que primero entiende el problema, luego revisa un método que se pueda utilizar y lo aplica; esto es, elige una estrategia (acto metacognitivo).

Cuando el estudiante señala que aprendió a hacer la tabla, la gráfica, la ordenada al origen y la pendiente, está señalando que aprendió a transitar por la representación verbal, tabular y gráfica. El alumno está consciente de sus nuevos conocimientos.

Por otro lado, el alumno señala que se estresa mucho, se considera como una experiencia metacognitiva afectiva. Esto es un área de oportunidad en la que se debe reflexionar: evitar estresar

a los estudiantes. Sin embargo, al parecer en estos tiempos, algunos estudiantes son muy propensos a estresarse.

Alumno 13, inicio 4/8, final 8/8

Preguntas	Respuestas
Pregunta 1. Describe la forma en que resuelves los problemas.	*"no tenía experiencia en solución de problemas, ahora que hicimos es muy interesante, pero ahora puedo decir que, primeramente, es entender el problema, luego recordar una estrategia para la solución y llevarla a cabo".*

El alumno 13 resume de manera simple su proceso metacognitivo: entender el problema, recordar una estrategia y llevarla a cabo. Cabe señalar que este alumno superó, por sí solo, todas las dificultades que se le presentaron en el transcurso de la implementación. También comenta que no tenía experiencia en solución de problemas, pero ahora, el piensa que son muy interesantes: experiencia metacognitiva emocional.

Alumno 14, inicio 0/8, final 7/8.

Preguntas	Respuestas
Pregunta 1. Describe la forma en que resuelves los problemas.	*"analizar la situación, conseguir los datos y aplicar mis conocimientos"*
Pregunta 2. Describe lo que piensas de la modelización matemática y solución de problemas.	*"el trabajo que realizamos fue muy interesante, para aplicar lo que vamos aprendiendo y eso nos pone a prueba"*
Pregunta 4. Comenta acerca de algún bloqueo y cómo lo superaste.	*"me bloqueo cuando no sé cómo empezar, cuando no hay datos, pero con mis compañeros sí pudimos resolver los problemas"*

El alumno 14 señala que se bloquea cuando no comprende el problema. Por otro lado, señala que se va aplicando lo que va aprendiendo: es precisamente uno de los objetivos de las tareas, enseñar matemáticas con modelización de problemas reales y con la aplicación de las matemáticas trabajadas recientemente (Stillman, 2004). También se puede observar que el alumno

hace énfasis en el trabajo colaborativo con sus compañeros. Flavell (1979), señala que la metacognición también se favorece en el trabajo en comunidad.

Alumno 21, sus resultados no se consideraron por faltas.

Preguntas	Respuestas
Pregunta 3. Expresa tus experiencias positivas en este trabajo académico.	*"no es muy complicado, si me esfuerzo más lo podría resolver bien, la verdad no estudié"*
Pregunta 4. Comenta acerca de algún bloqueo y cómo lo superaste.	*"lo que más se me dificultó fueron las ecuaciones, en la regla de tres, no hice el método que nos enseñó, quise hacer uno que me sabía, pero no me salió muy bien, al final vi como lo resolvían mis compañeros"*
Pregunta 5. ¿Te gustaría profundizar en alguna de tus respuestas?	*"no asistí varios días y desde ahí me atrasé, estuve enfermo, luego no me pude recuperar"* *"en el despeje de ecuaciones, los buenos tienen mayores herramientas los malos no. Esto se puede deber a que los buenos han tenido mayor compromiso en el estudio y los otros no"*

El alumno 21 señala, que con esfuerzo podría aprender, pero que en esta ocasión no estudió. También señala que se le complicó el álgebra y la proporción. Finalmente añade que estuvo enfermo y no se pudo recuperar académicamente.

Se observa una falta de compromiso por su aprendizaje, ya que no hizo un intento de recuperación, no preguntó a sus compañeros ni al profesor las tareas trabajadas.

Sin embargo, la actitud negativa del alumno merece atención, ya que, así como él, deben existir muchos casos donde la falta de compromiso sugiere, que es de tiempo atrás. Moral negativa.

Alumno 22, inicio 1/8, final 6/8

Preguntas	Respuestas
Pregunta 4. Comenta acerca de algún bloqueo y cómo lo superaste.	*"Despejar 'x' con la práctica, sí voy a poder hacerlo"*

Entrevista

Alumno 22, inicio 1/8, final 6/8	
Pregunta 5. ¿Te gustaría profundizar en alguna de tus respuestas?	*"aprendí a hacer tablas y gráficas"*

El alumno 22 señala, que se le dificultó el álgebra elemental, sin embargo, aprendió la transición entre la representación tabular y la gráfica. El alumno está consciente de sus nuevos conocimientos.

Alumno 23 inicio 1/8, final 6/8	
Preguntas	Respuestas
Pregunta 2. Describe lo que piensas de la modelización matemática y solución de problemas.	*"se me hace práctico, porque así aprendo lo que no pude aprender en la secundaria"*
Pregunta 4. Comenta acerca de algún bloqueo y cómo lo superaste.	*"lo que más se me dificultó fue resolver las ecuaciones"*

El alumno 23 señala que puede aprender lo que no pudo en su nivel educativo anterior, secundaria. Esta es una dificultad muy común del trabajo académico del bachillerato. Así mismo señala que se le dificultó el álgebra elemental.

Se observa la satisfacción por el trabajo realizado, y la conciencia de las dificultades que tiene.

Alumno 24 inicio 1/8, final 5/8	
Preguntas	Respuestas
Pregunta 4. Comenta acerca de algún bloqueo y cómo lo superaste.	*"me cuesta trabajo encontrar la variable independiente y la dependiente, si tengo un bloqueo, trato de razonar o, pregunto. Se me complicó mucho la determinación de la ecuación"*
Pregunta 5. ¿Te gustaría profundizar en alguna de tus respuestas?	*"no tenía experiencia en la solución de problemas"*

El alumno 24 señala particularmente que se le complica la determinación de las variables, cabe recordar que este tema está en proceso de asimilación, entonces con la práctica en la solución

de problemas, el alumno puede superar esta dificultad. Nuevamente se observa un alumno que está consciente de sus dificultades. Y que no tenía experiencia en la solución de problemas.

10.1. Indicios del desarrollo de un proceso metacognitivo

Cuando el alumno 11 comenta que no tenía experiencia en la solución de problemas reales y, que al principio sólo realizaba operaciones aritméticas y trataba de observar algún resultado que le resultara lógico. Indica que reflexionó en buscar aritméticamente una solución, aunque su falta de experiencia y sus limitados conocimientos no le permitieron encontrarla. En estas condiciones se ha propuesto una respuesta a situación de bandera roja que es "acciones sin estrategia".

Cuando el alumno 11 señala cómo resuelve los problemas: *"Primero los leo dos o tres veces para comprenderlos y extraer los datos, luego trato de resolver por lógica. Sino puedo con lógica, trato de aplicar las fórmulas que tengo memorizadas…"* se puede ver que aún le falta trazar una estrategia para iniciar un proceso metacognitivo.

Cuando el alumno 12 señala que aprendió a hacer la tabla, la gráfica, la ordenada al origen y la pendiente, está señalando que aprendió a transitar por la representación verbal, tabular y gráfica. El alumno está consciente de sus nuevos conocimientos.

Cuando el alumno 13 señala: "*fue practicar o poner a prueba los problemas que había realizado anteriormente, actividad tras actividad, los pasos ya se sabían".* Él está consciente de sus conocimientos recientemente adquiridos y los pone en práctica, actividad metacognitiva (Stillman, 2004).

También comenta que no tenía experiencia en solución de problemas, pero ahora, él piensa que son muy interesantes, experiencia metacognitiva. Cabe señalar que este cambio puede ser

gracias a que ha adquirido nuevos conocimientos. Igualmente se puede asumir que antes no le interesaba resolver problemas por su falta de conocimiento, pero ahora se le hacen interesantes.

Cuando el alumno 14 señala: "*me bloqueo cuando no sé cómo empezar, cuando no hay datos, pero con mis compañeros sí pudimos resolver los problemas".* Por su falta de conocimientos se bloquea y, necesita ayuda de sus compañeros para resolver los problemas. Además, se puede interpretar como inseguridad.

En este punto, cabe señalar que un elemento sustancial para la solución de problemas es el dominio del conocimiento (Shoenfeld, 1985 y Stillman, 2004), sino se tiene, es muy difícil resolver problemas.

10.2. Frontera entre lo cognitivo y lo metacognitivo

A la luz de los resultados, se puede proponer una frontera entre el conocimiento cognitivo y metacognitivo de los estudiantes. Dónde los estudiantes empiezan a resolver problemas similares, son conscientes de sus conocimientos y sus limitaciones, y empiezan a interesarse en la solución de problemas.

En esta investigación se han observado tres etapas en el desarrollo del proceso metacognitivo.

Primera etapa. Cuando no se trabaja un proceso metacognitivo se tienen las siguientes características.

Los alumnos.

- No tienen conocimientos del tema.

Entrevista

- No han resuelto problemas similares.
- Realizan operaciones aritméticas sin sentido, buscando un resultado.
- No tienen interés en la solución de problemas.

Segunda etapa. Cuando los estudiantes empiezan aprender el tema matemático y a resolver problemas (fase cognitiva) se puede observar que:

Los alumnos.

- Reproducen, con dificultades o eficientemente, los problemas similares a los trabajados anteriormente.
- Aprenden el tema matemático. Para nuestro caso, transición de representaciones de funciones lineales.
- Empiezan a ser conscientes de sus nuevos conocimientos y de sus dificultades.

Tercera etapa. A la luz de las respuestas de los estudiantes en las tareas, el problema final y las entrevistas podemos señalar algunas características de cuando los alumnos comienzan a desarrollar un proceso metacognitivo.

Los alumnos.

- Están conscientes de sus conocimientos del tema, han realizado problemas parecidos y ponen en práctica esos conocimientos.
- Están conscientes de sus limitaciones.
- Trazan una estrategia: comprender el problema, matematizar, resolución de problemas matemáticos y comprobación.
- Intuitivamente, revisan sus resultados por: lógicos y no lógicos.

Entrevista

- Desarrollan una concepción diferente respecto a la solución de problemas, para ellos, ahora son muy interesantes.

Se considera que, con las tareas trabajadas, los alumnos, completaron el aspecto cognitivo del aprendizaje, es decir aprendieron funciones lineales. Pero su conocimiento metacognitivo está en el principio de su desarrollo.

Creencia

Cuando el alumno 21 señala: "*los buenos tienen mayores herramientas los malos no"*. En alumno se asume como "mal estudiante", esto es un gran obstáculo para el aprendizaje de las matemáticas. Esta es una creencia del estudiante que limita su desarrollo (Shoenfeld, 1985). Esta es una dificultad a la que nos enfrentamos los profesores de nuestra comunidad. Sin embargo, es necesario un trabajo académico más eficiente desde la educación primaria hasta el nivel donde nos ocupamos.

11 Conclusiones

En esta investigación es posible constatar la importancia de la promoción de estrategias cognitivas y metacognitivas en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas con solución de problemas y modelización. Donde se obtienen muchos beneficios: el aprendizaje del tema matemático, el desarrollo de subcompetencias y del conocimiento metacognitivo. Además, se tiene la ventaja de vincular las matemáticas con la realidad, con los beneficios que esto conlleva. Sin embargo, se considera importante, que este tipo de trabajo debiera ser igualmente promovido en el futuro inmediato del proceso educativo de los estudiantes.

En relación con el objetivo planteado en el inicio, se puede concluir que sí se cumplió ya que se logró diseñar, implementar y analizar el ambiente de aprendizaje en el tema de funciones lineales con solución de problemas y modelización, utilizando estrategias cognitivas y metacognitivas.

En relación a los objetivos específicos, en esta investigación, también fue posible comprobar el aprendizaje, identificar y analizar las dificultades que presentaron los estudiantes: i) al aprender funciones lineales (tránsito entre representaciones tabular, gráfica y algebraica), ii) desarrollar las subcompetencias de modelización y solución de problemas (comprensión del problema, matematización, solución de problemas matemáticos, interpretación de resultados y comprobación) y el desarrollo de un conocimiento metacognitivo, iii) además de la identificación del tipo de ayuda cognitiva y metacognitiva eficaz para la superación de las dificultades.

Así mismo, al inicio se planteó la pregunta de investigación:

Conclusiones

> ¿En qué medida, los estudiantes del grupo de investigación de primer año del Colegio de Ciencias y Humanidades plantel Naucalpan aprenderán funciones lineales, resolverán problemas, desarrollarán las subcompetencias de modelización, procesos metacognitivos y, también qué dificultades se presentarán en la resolución de dichos problemas?

Respecto al rendimiento observado, los estudiantes obtuvieron: **al inicio 21.4% y al final 85.7%.** En su mayoría, al inicio no tenían conocimientos de funciones lineales y al final de la implementación pudieron resolver un problema hipotético realizando una transición de representaciones, tabular, gráfica y algebraica.

La pregunta de investigación indica también, qué dificultades se presentaron. De forma general se observó que al inicio los estudiantes no tenían conocimientos de funciones lineales, no desarrolladas las subcompetencias de modelización, ni un conocimiento metacognitivo. Sin embargo, a medida que se trabajó con el ambiente de aprendizaje, se fueron superando estas dificultades.

En relación con las subcompetencias de modelización, al final de la implementación, al menos en el instrumento empleado, problema final. En su mayoría, los alumnos demostraron: la comprensión del problema, la determinación de la variabilidad y asignación de variables; la matematización, la realización de una tabla de valores, el trazo de una gráfica, la determinación de la ecuación y la determinación de una predicción.

Con respecto al conocimiento metacognitivo de los estudiantes, se observó. Al principio, los estudiantes no tenían conocimiento cognitivo ni metacognitivo. A medida que fueron adquiriendo conocimiento cognitivo empezaron a ser conscientes de sus conocimientos y sus

limitaciones, a reproducir problemas vistos con anterioridad y a plantear una estrategia. Es decir, luego de adquirir conocimiento cognitivo, se empezó a desarrollar su conocimiento metacognitivo.

Así mismo, se pudieron observar las respuestas de los estudiantes en situaciones de bandera roja, las cuales fueron: i) cuatro con metacognición rutinaria, ii) veintidós por ceguera metacognitiva, iii) cero por vandalismo metacognitivo, iv) una por espejismo metacognitivo y, v) una por desviación metacognitiva.

Las causas de las situaciones de bandera roja son las siguientes: i) seis por falta de reflexión donde, cinco fueron por "falta de conocimientos" y una por ausencia de reflexión ii) 18 por conocimientos incompletos.

Dificultades que se presentaron

Por otro lado, como en la pregunta de investigación también se requiere contestar las dificultades que se presentaron en el proceso de aprendizaje se puede señalar lo siguiente.

Al inicio, los alumnos: i) no tienen experiencia en solución de problemas, ii) no recuerdan el tema de funciones lineales, iii) no demuestran tener desarrolladas las subcompetencias de modelización y solución de problemas, iv) demuestran un proceso metacognitivo nulo, de acciones sin estrategia.

A lo largo del proceso, los alumnos: i) presentan falta de reflexión (por falta de conocimientos), también presentan una ausencia de reflexión, para comprender los problemas, ii) tienen conocimientos incompletos, esto es comprensible debido a que están construyendo su conocimiento de funciones lineales, tienen dificultades en, determinación de la ecuación a partir de una tabla de valores, determinación y solución de la proporción,

cálculos de predicción, manipulación de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, (sustitución y despeje), manejo de la representación gráfica: escalas en los ejes, interpretación gráfica de la pendiente y la determinación de coordenadas, determinación de variables, interpretación de la razón entre dos magnitudes o, factor de proporcionalidad.

Por su importancia, a continuación, se enfatizan algunos de los apoyos cognitivos y metacognitivos del profesor para el aprendizaje de los alumnos.

- Comprensión del problema: i) tiempo suficiente para la lectura (relectura) y comprensión, ii) representación concreta del fenómeno de estudio…
- Matematización: i) orientaciones y preguntas: "¿qué variable depende de la otra?", "el valor de y depende del valor de x"…
- Solución de problemas matemáticos: i) preguntas para determinación de escalas en los ejes y comprensión de la pendiente, ii) la repetición de problemas en diferentes contextos, iii) apoyo cognitivo en el procedimiento de solución de la proporción…
- Interpretación y comprobación de resultados: i) verificar de forma concreta el resultado, ii) que el alumno indique si resolvió bien el problema y después que diga cómo lo sabe.

La mayoría de estas acciones, también son indicadas en Stillman (2004). En esta investigación, la mayor parte son acciones cognitivas y muy pocas metacognitivas. De hecho, la autora señala que una vez que se tienen conocimientos de matemáticas, entonces se empieza a desarrollar el conocimiento metacognitivo. Algunas acciones metacognitivas son: i) las preguntas de imaginar la situación y qué quieren medir, ii) las preguntas para que el alumno explique si resolvió bien el problema y que indique cómo lo sabe, es decir, preguntas que motiven la reflexión.

Conocimiento cognitivo y metacognitivo

Conclusiones

Si bien al inicio de la investigación, se propuso enfocar la enseñanza con apoyos metacognitivos, se tuvieron que proporcionar apoyos cognitivos, algunas de las causas son: i) los conocimientos incompletos de los estudiantes, ii) la falta de experiencia en solución de problemas, falta de reflexión (falta de conocimientos), y también ausencia de reflexión. Esta situación está en concordancia con Stillman (2011), cuando señala que unas de las causas en una respuesta de bandera roja, ceguera metacognitiva, es por conocimientos incompletos y falta de reflexión. Igualmente, Shoenfeld (1985) y Stillman (2004), señalan que un aspecto que influye en la resolución de problemas es el dominio del conocimiento.

Como se señaló anteriormente, se pudo identificar algo como una frontera entre los conocimientos cognitivos y metacognitivos de los estudiantes. En esta investigación y al finalizar la implementación del ambiente de aprendizaje se observó que los alumnos están iniciando su conocimiento metacognitivo porque: i) reprodujeron, con dificultades o eficientemente, los problemas similares a los trabajados anteriormente, ii) aprendieron el tema matemático, para nuestro caso, transición de representaciones de funciones lineales, iii) empezaron a ser conscientes de sus nuevos conocimientos y de sus dificultades, iv) están conscientes de sus limitaciones, v) trazan una estrategia que corresponde al ciclo de modelización, comprender el problema, matematizar, resolución de problemas matemáticos y comprobación, vi) intuitivamente, revisan sus resultados por: lógicos y no lógicos, vii) desarrollan interés por la solución de problemas.

Acciones sin estrategia

Por otro lado, se identificó una subcategoría más a situaciones de bandera roja. En esta investigación la hemos nombrado “acciones sin estrategia”: cuando no se tienen conocimientos

del tema matemático ni experiencia en solución de problemas. Los aprendices hacen operaciones aritméticas sin sentido, buscando un resultado lógico.

Falta de reflexión

Así mismo, se identificaron dos causas para la falta de reflexión: la primera, por falta de conocimientos en solución de problemas y, la segunda por contestar sin reflexionar, ausencia de reflexión.

Consideraciones generales acerca de la utilidad de la investigación

De acuerdo con los resultados de esta investigación, para la planeación e implementación de secuencias didácticas con solución de problemas, y con la población similar a la participante, se podría considerar que los estudiantes tienen una limitada experiencia en solución de problemas, y conocimientos incompletos (verificar con examen diagnóstico), esto implica que no han desarrollado sus conocimientos cognitivos y metacognitivos. Por lo que una alternativa es el trabajo con estrategias cognitivas y metacognitivas.

Por otro lado, se ha presentado una serie de características para determinar cuando los estudiantes empiezan a desarrollar su conocimiento metacognitivo, y es precisamente cuando están completando su conocimiento cognitivo. Es decir, se confirma lo señalado por Polya (2011), Shoenfeld (1985) y Stillman (2004), cuando afirman que, si los estudiantes no dominan las herramientas matemáticas para resolver un problema, difícilmente lo podrán resolver.

Como se pudo observar, resulta eficiente trabajar con problemas hipotéticos y reales, al inicio, durante y al final de la instrucción.

Así mismo, en párrafos anteriores, se han señalado algunas dificultades para el tema de funciones lineales como: en el concepto de razón y pendiente, en la determinación de la ecuación, en las escalas en los ejes de una gráfica, en las operaciones algebraicas elementales, entre otras. Lo cual puede ser de gran ayuda en el momento de diseñar e implementar secuencias didácticas sobre este tema en el nivel bachillerato o niveles anteriores o posteriores.

Reflexión en el ámbito del sistema educativo general

Como se observó en el problema inicial, los alumnos empezaron con muy pocos conocimientos, así mismo se mostraron las dificultades con el trabajo académico de aprendizaje. Donde se pudo apreciar que los alumnos aprenden a pesar de dichas dificultades. Lo anterior nos permite señalar, entre otras, lo siguiente. A pesar del bajo nivel inicial en competencia matemática de los estudiantes, es posible desarrollar su aprendizaje a un nivel aceptable en el bachillerato, con estrategias cognitivas y metacognitivas.

Consideraciones para futuros estudios en educación matemática

Si bien, en esta investigación se han obtenido resultados satisfactorios en cuanto al análisis del aprendizaje de los estudiantes y sus dificultades. Sería conveniente realizar un estudio similar con una población estudiantil más grande, en cantidad. Esto es con la finalidad de poder generalizar los resultados.

Por otro lado, con los buenos resultados obtenidos en el aprendizaje de los alumnos, se pueden hacer planteamientos de secuencias didácticas con solución de problemas en niveles de estudio anteriores al bachillerato, como en la primaria y secundaria, así mismo en niveles posteriores, licenciatura (con problemas adecuados al nivel educativo). Con la finalidad de

promover el aprendizaje de las matemáticas con solución de problemas con estrategias cognitivas y metacognitivas.

Finalmente, con la presente investigación se pudo analizar el aprendizaje de los estudiantes con modelización y solución de problemas. Donde se detectaron las dificultades y se aplicaron estrategias cognitivas y metacognitivas, con el fin de apoyar el aprendizaje de los estudiantes como se ha indicado párrafos atrás. Sin embargo, existen algunas áreas de oportunidad para mejorar las estrategias cognitivas y por ende metacognitivas. Se puede proyectar las siguientes dos investigaciones.

- Promover la determinación de variables con el uso de simuladores. Ya que, presentando los fenómenos de forma dinámica, se puede observar mejor la variabilidad.
- Promover el cálculo de la predicción de forma gráfica. Ya que la representación gráfica puede ser un gran instrumento para la comprensión de las matemáticas y los contextos, sin las dificultades algebraicas observadas en esta investigación.

Referencias

Abrahamson, Dor y Wilensky Uri. (2005). *The Stratified Learning Zone: Examination of the Pros and Woes of Collaboratve_Learning Desing in Demographically_Diverse Mathematics Classrooms.* The Center for Connected Learning and Computer_Based Modeling. Northwestern University. Publicado en D. Y. White (Chair) & E. H. Gutstein (Discussant), Equity and diversity studies in mathematics learning and instruction. American Educational Research Association.

AndroidAyuda. (2024). Teléfono Inteligente. [Imagen]. https://androidayuda.com/apps-gestionar-archivos-android/#google_vignette

Angel, A. y Rinde, D. (2011). *Elementary and Intermediate Algebra for College Students.* Prentice Hall. 4ª ed.

Argibay, P. (2024). Duchazo de juegos. [Imagen]. https://mobbyt.com/videojuego/educativo/?Id=65830#google_vignette

Arveesblog. (2024). Los zapatos más grandes del mundo. [Imagen]. https://ar.pinterest.com/pin/799037158869739599/visual-search/?x=16&y=16&w=532&h=391&cropSource=6&surfaceType=flashlight

Baldor, A. (2003). *Álgebra*. Publicaciones Cultural.

Barnett, R. (1987). *Álgebra elemental estructura y aplicaciones*. McGraw-Hill. Traducción Rosas, M. y García, M.

Barrera-Mora, F., Santos Trigo, L.M., (2002). *Cualidades y Procesos Matemáticos Importantes en la Resolución de Problemas: Un caso Hipotético de Suministro de Medicamento*. Cinvestav, IPN.

Barton, Craig. (2018). *How I Wish I'd Taught Maths*. John Catt Educational Ltd.

Referencias

Biggs, J. y Collis, K. (1982). The Psychological Structure of Creative Writing. Australian Journal Education. 26(1) 59-70.

Blanco, L. (1993). Una clasificación de problemas matemáticos. *Épsilon,* 25, 49-60.

BlomhØj, M. (2009). Towars Integration of Modeling in Secondary Mathematics Teaching. *Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education*. Gloria Ann Stillman, Jill P. Brown (Eds.), 37-52.

Blum, W. (2011). Can modeling be taught and learnt? Some answers from empirical research. en G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modeling*, Springer 15–30.

Blum, W., y Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modeling, applications, and links to other subjects—State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics, 22,* 37–68.

Borromeo Ferri, R. (2004). *Mathematicsche Denkstile, Ergebnisse einer empirischem Studie.* Hildesheim: Franzbecker.

Bransford, J., Brown, A. y Cocking, R. (1999). The Design of Learning Environments. En Bransford, J., Brown, A. y Cocking, R. *How People Learn: Brain, Mind, Experience, and School*, National Academicy Press, 119-142.

BrettEberly, (2024). Algebra. [Imagen]. https://www.pinterest.com/bretteberly/

Brito, M., Alemán, I. y Fraga, E. (2011). Papel de la Modelización matemática en la formación de ingenieros. *Ingeniería Mecánica.* 14(2), 129-139.

Conejo, L., y Ortega, T. (2013). Clasificación de los problemas propuestos en aulas de Educación Secundaria Obligatoria. *Educación Matemática*, 25(3), 129-158.

Referencias

Cuevas, C. y Pluvinage, F. (2003). *Les projects d´action practique elements d´une ingeniere d´ensigment des mathematiques.* Annales de didactique et sciences cognitive, Vol. 8. IREM.

Delval, J. (1991). *Los Fines de la Educación*. Siglo XXI Editores.

Duval, R. (1992). Gráficas y ecuaciones: La articulación de dos registros. En Cambray, R. Sánchez, E. y Zubieta, G. *Antología en educación Matemática.* CINVESTAV, 125-139.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Universidad del Valle y Peter Lang S. A. Trad. Myriam Vega Restrepo.

Flavell, J. (1976). Metacognitive aspects of problem solving. In L. B. Resnick (Ed.), *The nature of intelligence,* Hillsdale Erlbaum, 231–235.

Flavell, J. (1979). Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive developmental inquiry. *The American Psychologist, 34*, 906–911.

Flavell, J. (1987). Speculation about the nature and development of metacognition. *Metacognition, motivation and understanding*, Lawrence Erlbaum, 21-30.

Freitas, E., Lerman, S. y Parks, A. (2018). Qualitative methods. en Jinfa Cai Editor. *Compendium for research in mathematics education,* Jinfa Cai, 159-182.

Freudenthal, H. (2002). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Kluwer Academic, Plenum Publishers.

Galbraith, P. y Stillman, G. (2006). A framework for identify-ing blockages during transitions in modelling process. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, 38(2), 143-162.

Goos, M. (1998). 'I don't know if I'm doing it right or I'm doing it wrong!' Unresolved uncertainty in the collaborative learning of mathematics. C. Kanes, M. Goos, & E. Warren (Eds.),

Teaching mathematics in new times. (Proceedings of the twenty-first annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia.), MERGA, 1, 225–232.

Graham, K., Cuoco, A. y Zimmermann, G. (2011). *Focus in High School Mathematics. Reasoning and Sense Making: Algebra.* NCTM.

Haines, C., Crouch, R., y Davies, J. (2001). Understanding students' modelling skills. J. F. Matos, W. Blum, K. Houston, & S. P. Carreira (Eds.), *Modelling and mathematics education, ICTMA 9: Applications in science and technology*. Ellis Horwood, 366–380.

Hernández-Sampieri, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2014). *Metodología de la investigación, sexta edición.* Mc Graw Hill.

Hiebert, J. y Carpenter, T. (1992). Learning and Teaching with Understanding. En *Handbook of research on mathematics teaching and Learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics,* Macmillan Publishing Co, Inc, 65-97.

Historiadeldeporte. (2024). Ganadoras. [Imagen]. https://historiadeldeporte.net/pruebas-de-velocidad-en-el-atletismo-historia-del-deporte/#google_vignette

Johnson, D. y Johnson, R. (1999). *Aprender Juntos y Sólos.* A Editorial Aique.

Kaiser, G. (2007). Modeling and modeling competencies in school. En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical modeling* (*ICTMA 12*): *Education, engineering and economics,* 110–119.

Kaiser, G. (2018). The teaching and Learning of mathematical modeling. en Jinfa Cai Editor. *Compendium for research in mathematics education,* Jinfa Cai, 267-291.

Kaiser, G. y Meßmer, G. (1986). *Anwendungen im Mathematikunterricht. Vol. 1—Theoretische Konzeptionen.* Franzbecker.

Referencias

Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra. *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics,* Macmillan Publishing Co, Inc. 390-419.

Larson, R. y Hostetler, R. (2009). *Álgebra*. México: Grupo Editorial Patria. Primera Edición en Español.

Lehmann, C. (2012). *Algebra*. México: Limusa. Traducción De Hoyos, T.

Leinhardt, G., Stein, M. y Zaslavsky, O. (1990). Functions, Graphs, and Graphing, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research*, 60(1), 1-64

Leithold, L. (2012). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica.* México: Oxford University press.

León, M. (2015). *Una propuesta didáctica para la enseñanza-aprendizaje de funciones lineales*. [Tesis de maestría, Cinvestav].

Lesh, R. A., Cramer, K., Doerr, H. M., Post, T., & Zawojewski, J. (2003). Model development sequences. In R. A. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching,* Lawrence Erlbaum Associates, 35–58.

Lingefjärd, T. (2000). *Mathematical Modelling by Prospective Teachers Using Technology*. [Tesis PHD, The University of Georgia].

Lingefjärd, T. y Holmquist, M. (2005). To assess students attitudes, skills and competencies in mathematical modeling. *Theaching Mathematics and Applications*, Oxford University Press, 24(3), 123-133.

López, S. (2014). *Estructuras jerarquizadas en grupos de trabajo colaborativo; un análisis utilizando Modelación Basada en Agentes* [Tesis de Maestría, Universidad Autónoma de la Ciudad de México].

Referencias

Maaß, K. (2006). What are modeling competencies? ZDM— The International Journal on Mathematics Education, 38(2), 113–142.

Meléndez, A. (2016). *Dificultades del uso algebraico de la variable en el nivel medio superior* [Tesis de maestría, CINVESTAV].

NCTM. (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. National Council of Teachers of Mathematics. Traducción S. A. Thales.

Niss, M. y Hjgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics,* 102: 9-28.

https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9

OECD (2018). *Programa para la evaluación internacional de alumnos (PISA) PISA 2018-Resultados*. Editorial OECD.

www.oecd.org>pisa>PISA2018_CN_MEX_Spanish

OECD (2023), *PISA 2022 Results (Volume I): The State of Learning and Equity in Education,* PISA, OECD Publishing.

https://doi.org/10.1787/53f23881-en

Pablo, J. (2014). *Sistemas de ecuaciones lineales en el bachillerato. Diseño de un ambiente de aprendizaje con comprensión.* [Tesis de maestría, Universidad Nacional Autónoma de México].

Peralta, J. (2003). *Dificultades para articular los registros gráfico, algebraico y tabular y la exploración de algunas actividades diseñadas para superar estas dificultades: el caso de la función lineal.* [Tesis de maestría, Universidad de Sonora]

Pérez, H. (2022). *Una propuesta didáctica para promover el razonamiento variacional-covariacional en estudiantes de secundaria con apoyo de la tecnología digital*. [Tesis de maestría, Cinvestav].

Referencias

Polya, G. (1981). *Mathematical Discovery: On Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving*. Wiley.

Polya, G. (2011). *Cómo plantear y resolver problemas.* Trillas.

Reyes, A. (1995). Propuesta Metodológica para Diseñar Material Didáctico para un Curso de Álgebra Lineal Aplicada. En Balderas, P., Carlón, A., Cruz, S., Estrada. J., Martínez, A., Meda, M. y Recio, J. Editores. *Memorias del V Simposio Internacional en Educación Matemática Elfriede Wenzelburger,* Grupo Editorial Iberoamérica 163-169.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.

Schoenfeld, A. (1987). *What's all the fuss about metacognition?* A. H. Schoenfeld (Ed.), Cognitive science and mathematics education, 1-31.

Schoenfeld, A. (1992), "Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics", en D. Grows (ed.) *Handbooks for Research on Mathematics Teaching and Learning*, MacMillan, 334-370.

Scott, P. (1988). *Introducción a la investigación y evaluación educativa*. Guatemala: Universidad de San Carlos.

Segura, S. (2004). Sistemas de Ecuaciones Lineales: Una Secuencia Didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 7 (1), 49-78

SEP, (2020). *Planes y Programas de Estudio: Matemáticas secundaria*. SEP. https://www.planyprogramasdestudio.sep.gob.mx/sec-ae-pensamiento-mate1.html

Shutterstock. (2024). Niños de silueta. https://www.shutterstock.com/es/image-vector/silhouette-girls-boys-playing-29522737

Simon, M. (2019). Analyzing Qualitative Data in Mathematics Education. En *Designing, Conducting, and Publishing Quality Research in Mathematics Education,* Leatham Editor 111-122.

Smith, S., Charles, R., Dossey, J., Keedy, M. y Bittinger, M. (1992). *Álgebra*. Addison-Wesley Iberoamericana. Traducción Hernández, C.

Soscas, M., Camacho, M., Palarea, M., Hernández, J. (1989). *Iniciación al Algebra*. Editorial Síntesis.

Stillman G. (2004). *Strategies Employed by Upper Secondary Students for Overcoming or Exploiting Conditions Affecting Accessibility of Applications Tasks*. Mathematics Education Research Journal, 16(1), 41-70.

Stillman, G., Galbraith, P., Brown, J., & Edwards, I. (2007). A framework for success in implementing mathematical modelling in the secondary classroom. J. Watson & K. Beswick (Eds.), *Mathematics: Essential research, essential practice. (Proceedings of the 30th Annual Conference of the Mathematics Research Group of Australasia*, MERGA, 2, 688–707.

Stillman, G. (2011). Applying metacognitive knowledge and strategies in applications and modeling tasks at secondary school. G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modeling: ICTMA14,* 165–180.

Stillman G. (2015). *Applications and Modelling Research in Secondary Classrooms: What Have We Learnt?* Springer International Publishing.

Swokowski, E. (2009). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. Décimo segunda edición México: CENGAGE Learning.

Referencias

Treilibs, V. (1979). *Formulation processes in mathematical modelling* [Unpublished master's thesis, University of Nottingham].

UNAM-CODEIC, (2019). *Desempeño durante el bachillerato y el primer año de licenciatura de los alumnos del CCH Naucalpan.* UNAM.

UNAM-CCH. (2016). *Programa de Estudios de Matemáticas, Semestres I al IV*. México: UNAM.

UNAM-CCH (2018). *Plan de Estudios*. México: UNAM. https://www.cch.unam.mx/plandeestudios

van de Pol, J., Volman, M., & Beishuizen, J. (2010). Scaffolding in teacher-student interaction: A decade of research. *Educational Psychology Review, 22,* 271–293.

Vargas, V., Valenzuela, C. y Aguilar, M. (2022). Actividad provocadora de modelos: propuesta para aprender matemáticas. *En Tendencias en la educación matemática 2022.* Lidia Aurora Hernández Rebollar, Estela Juárez Ruiz, Editoras.

Vergnaud, G. (1990). La Teoría de capos conceptuales. *En Didáctique des Mathématiques*, 2(3), 133-170.

Apéndice 1. Las Tareas

Formatos de las 21 tareas para el aprendizaje con comprensión, con solución de problemas y modelización de funciones lineales.

Bloque 1. Razón de cambio, proporciones
Tarea 1. Tarifas de telefonía
Tarea 2. Consumo de agua en la ducha
Tarea 3. Razón entre dos magnitudes en distintos contextos
Tarea 4. Densidad, una razón de propiedad de las sustancias
Tarea 5. Pendiente de una rampa
Tarea 6. Bomba de gasolina
Tarea 7. Distancias iguales en tiempos iguales
Tarea 8. La experiencia en el Bungee
Tarea 9. Problemas de proporción directa
Tarea 10. Zapatos de gigante
Tarea 11. Resorte y su carga
Tarea 12. Servicio de taxi por aplicación
Bloque de tareas 2
Tarea 13. Consumo de petróleo
Tarea 14. Variable dependiente e independiente
Tarea 15. Tabulación y graficación de la función lineal
Tarea 16. Localización de puntos sobre línea recta
Tarea 17. Representaciones tabulares, gráficas y algebraicas
Tarea 18. De la gráfica a la ecuación
Tarea 19. Determinación de la ecuación y cálculo de coordenadas
Tarea 20. Tiempos de oro olímpico
Tarea 21. Escalas de temperatura

Apéndice

Bloque 1. Razón de cambio, proporciones.

Apéndice

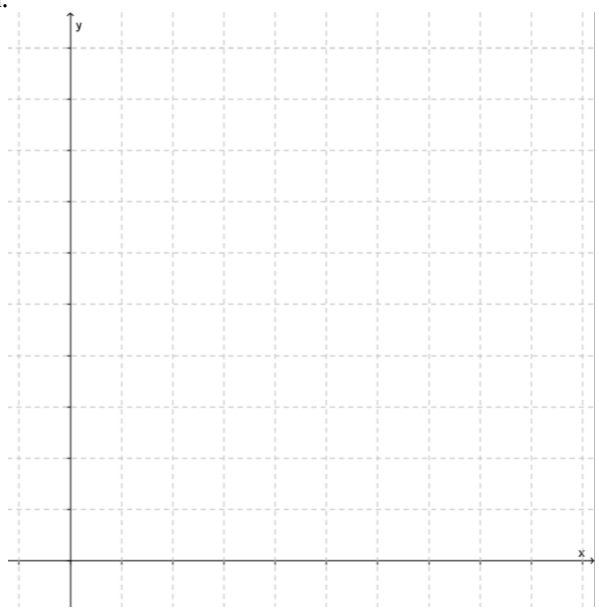
Tarea 1. Tarifas de telefonía

Carlos vio anuncios de dos compañías de telefonía móvil. La compañía A ofrece servicios con una tarifa básica de $150.00 pesos al mes, más 80 centavos el minuto. La compañía B no tiene tarifa mensual, pero, cobra $3.00 pesos el minuto. Ambas compañías cobran el tiempo "exacto", sin redondear. Comparar el costo del servicio para ambas compañías y, contestar las preguntas.

Completa la siguiente tabla, que corresponde al costo en relación con los minutos usados de servicio telefónico en un mes.

Número de minutos	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Compañía "A"										
Compañía "B"										

Traza la gráfica. Los minutos de servicio en el eje "x", variable independiente (abscisas). El costo en el eje "y", variable dependiente (ordenadas); para cada una de las compañías, en el mismo plano que a continuación se encuentra.



Pregunta 1. ¿Por qué una gráfica parte del origen y la otra no?

Pregunta 2. ¿Por qué la inclinación de las gráficas es distinta para cada una?

Pregunta 3. Escribe una ecuación donde se pueda calcular el costo "y" dependiendo del número de minutos "x" para cada compañía.

Pregunta 4. ¿Con cuántos minutos de consumo, las dos compañías cobran lo mismo?

Apéndice

Tarea 2. Consumo de agua en la ducha

La cantidad de agua que una persona gasta en bañarse depende de varios factores, entre ellos el tiempo que se tarda. Determina matemáticamente la cantidad de agua que una persona gasta en bañarse, la cual depende del tiempo que ocupa en la ducha. (BlomhØj, 2009).

Apéndice

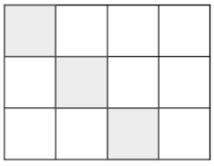
Tarea 3. Razón entre dos magnitudes en distintos contextos

Pregunta 1. En un grupo de primer semestre se hizo una encuesta para saber a cuántos alumnos les gusta el béisbol. De los 20 estudiantes del grupo, 15 contestaron afirmativamente. Al resto de los estudiantes no les gusta el béisbol. ¿Cómo podemos describir la relación entre los estudiantes que les gusta el béisbol y los estudiantes que no les gusta? Explica tu respuesta.

Pregunta 2. En una escuela de ingeniería están inscritos 120 estudiantes de los cuales 80 son hombres y el resto son mujeres. ¿Cómo podemos describir la relación entre los estudiantes de ingeniería hombres y estudiantes mujeres? Explica tu respuesta.

Pregunta 3. Un edifico mide 120m de altura y su maqueta mide 0.5m. ¿Cómo podemos describir la relación entre la altura del edificio y la de su maqueta? Explica tu respuesta.

Pregunta 4. Observa la siguiente figura:



¿Cómo podemos describir la relación entre los cuadros sombreados con respecto a los que no? Explica tu respuesta.

Pregunta 5. En una urna existen 100 esferas amarillas y 25 azules. ¿Cómo podemos describir la relación entre las esferas amarillas respecto a las azules? Explica tu respuesta.

La razón entre dos cantidades "a" y "b" se puede escribir de dos formas, con una operación y un resultado

Razón	$a : b$ **o bien** $\frac{a}{b}$
Operación y resultado	$a \div b = R$

Apéndice

Tarea 4. Densidad, una razón de propiedad de las sustancias

En la ciencia Fisicoquímica una característica de las sustancias es la densidad: relación entre la masa de una sustancia y el volumen que ocupa; esta característica, es única para cada sustancia y se ocupa como una prueba de identificación. Se toman algunas muestras de distintas sustancias y se determina su masa y volumen. Calcula la densidad de cada una de ellas.

Nombre de la sustancia	Masa en Kg	Volumen en L	Densidad	
			$\frac{masa}{volumen}$	Valor $(\frac{Kg}{L})$
1. Gasolina	1.680	2.400		
2. Mercurio	12.240	0.900		
3. Leche	3.090	3.000		
4. Agua	1.000	1.000		
5. Aluminio	4.050	1.500		
6. Oro	9.650	0.500		
7. Plomo	33.900	3.000		
8. Hidrógeno	0.090	1000		
9. Nitrógeno	1.251	1000		

Pregunta 1. ¿qué pesa más, un litro de gasolina o un litro de agua?

Pregunta 2. ¿qué pesa más, un litro de plomo o un litro de oro?

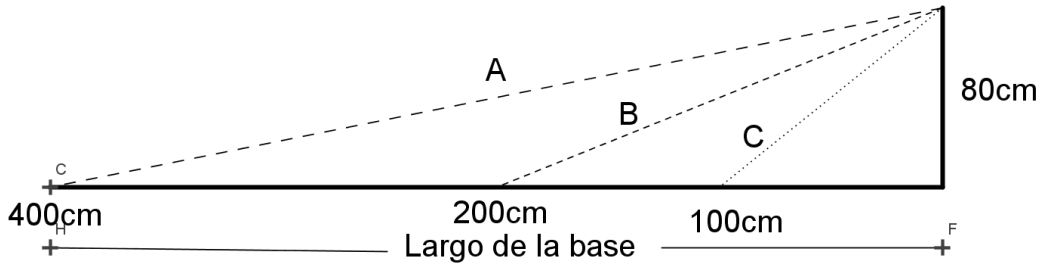
Apéndice

Tarea 5. Pendiente de una rampa

Planteamiento de situación. Se requiere construir una rampa para subir la altura de 80cm con silla de ruedas.

AdobeStock, (2024).

Se proponen tres diferentes largos para la base. La primera “A” de 400cm, la segunda “B” de 200cm y, la tercera “C” de 100cm.



Cuestionamiento 1. Determina la relación entre la altura de la rampa y el largo de la base de esta. Según las distancias propuestas, escribe tus respuestas en la siguiente tabla.

Propuesta	Altura	Largo	Razón
A	80cm	400cm	
B	80cm	200cm	
C	80cm	100cm	

Cuestionamiento 2. ¿Cuál de las propuestas proporciona mejores condiciones para subir? ¿Cuál es el valor de la razón?

Cuestionamiento 3. ¿Cuál de las propuestas proporciona condiciones desfavorables para subir? ¿Cuál es el valor de la razón?

Cuestionamiento 4. ¿Existe una relación entre las mejores condiciones para subir y el valor de la razón?

Apéndice

Tarea 6. Bomba de gasolina

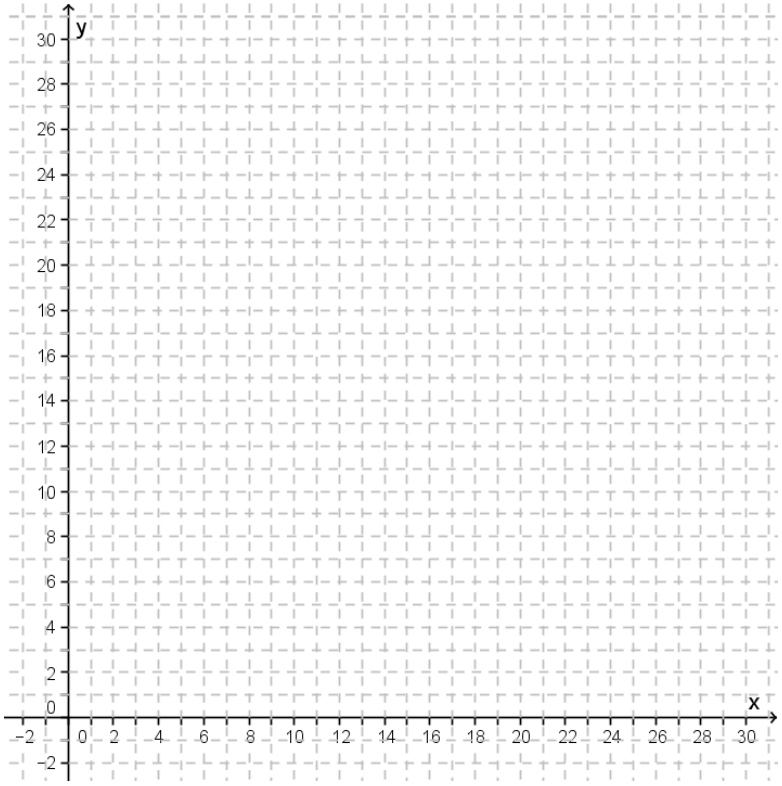
Una bomba abastecedora de gasolina vierte 4 litros cada 5 segundos.

Cuestionamiento 1. ¿Cuál es la razón de litros vertidos respecto al tiempo?

Cuestionamiento 2. Completa la siguiente tabla, tomando en cuenta la razón de abastecimiento de la bomba.

Tiempo "x" en segundos	0	1	5	10		20	
Litros "y"					12		20

Cuestionamiento 3. Traza una gráfica con los datos de la tabla anterior. En el eje de las abscisas "x" el tiempo en segundos. En el eje de las ordenadas "y" los litros vertidos de gasolina. Marca los puntos y únelos con una línea.



Cuestionamiento 4. El coeficiente de proporcionalidad, ¿cómo se observa en la gráfica?

Apéndice

Tarea 7. Distancias iguales en tiempos iguales

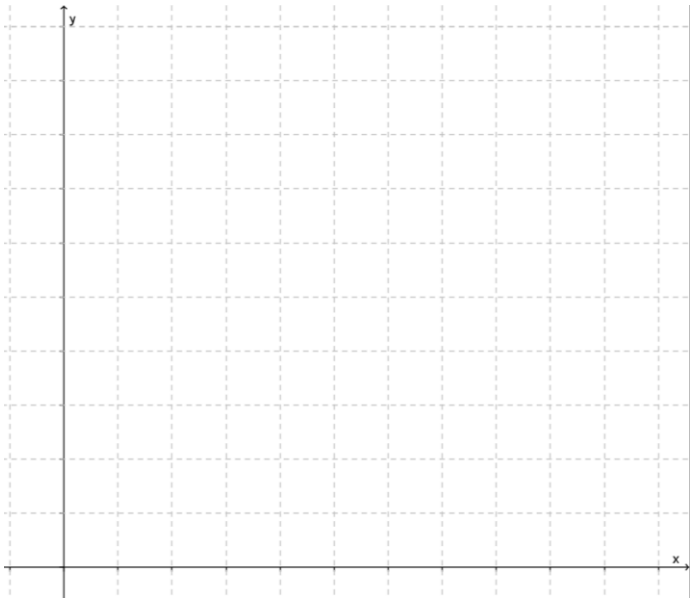
Un tren recorre distancias iguales en tiempos iguales. Recorre una distancia de 160 Km en 2 horas.

Cuestionamiento 1. ¿Cuál es la razón entre la distancia que recorre y el tiempo que tarda en recorrerla? En la ciencia Física, ¿cómo se llama a esta razón?

Cuestionamiento 2. Completa la siguiente tabla, tomando en cuenta la razón de la distancia y tiempo.

Tiempo "x" (h)	0	1	2	3		7	
Distancia "y" (Km)					320		800

Cuestionamiento 3. Traza una gráfica con los datos de la tabla anterior. En el eje de las abscisas "x" el tiempo en horas. En el eje de las ordenadas "y" la distancia que recorre el tren. Marca los puntos y únelos con una línea.



Cuestionamiento 4. El coeficiente de proporcionalidad, ¿cómo se observa en la gráfica?

Tarea 8. La experiencia en el Bungee

Barbie ha cumplido 40 años. Su amigo Ken le ha dado una experiencia deportiva extrema, un salto en Bungee. Barbie tendrá que saltar desde una altura dada, y nadie quiere que Barbie choque contra el piso. 1) realizar las mediciones necesarias para determinar un modelo que vincule, la distancia de caída con el número de "ligas" utilizadas en el cordón de amortiguación. 2) se recomienda registrar un dato, número de ligas con longitud de caída. 3) probar el resultado para una caída de 4.3 metros. (Stillman *et al*, 2007).

BrettEberly, (2024).

Apéndice

Tarea 9. Problemas de Proporción directa

Problema 1. En el mapa que se muestra a continuación, aproximadamente, 1.8 centímetros corresponden a 115 Km en la "realidad". Determina la distancia en línea recta de, a) de México a Veracruz, b) de México a Guadalajara, c) de Veracruz a Guadalajara.

Problema 2.
Dos vendedores de teléfonos trabajan en un establecimiento. Mientras uno vende 8 teléfonos, el otro 5. Después de un tiempo el más hábil ha vendido 32. ¿Cuántos habrá vendido el otro?

Problema 3.
Un reloj se adelanta un minuto por cada siete días. ¿Cuántos minutos se habrá adelantado en 60 días?

Problema 4.
Un automóvil recorre 90 Km con 7 litros de gasolina. ¿Cuántos kilómetros puede recorrer, con veinte litros de dicho combustible?

Problema 5.
La relación de género que tiene una escuela es de 8 mujeres por cada 5 hombres. ¿Cuántos hombres habrá en un salón, donde están inscritas 24 mujeres?

Problema 6.
Si una hora tiene 60 minutos, un minuto tiene 60 segundos. ¿Cuántas horas son 11000 segundos?

Tarea 10. Zapatos de gigante

Los zapatos fabricados más grandes del mundo, según el libro de Récords Guinness miden 2.37 m de ancho y 5.29 m de largo.
Aproximadamente, ¿qué tan alto debe medir un gigante para calzarlos? Explica tu respuesta. (Blum, 2011).

Arveesblog. (2024).

Tarea 11. Resorte y su carga

De acuerdo con la ley de Hooke, la distancia que un resorte se estira (dentro de su tolerancia elástica) es directamente proporcional al peso que se le aplique. Un resorte originalmente mide 20 cm. Si se le aplica una carga de 8 Kg alcanza una longitud de 30 cm.

1. ¿Cuál es la longitud del resorte cuando se aplica una carga de 4 Kg y otra de 15 Kg?
2. Escribe una ecuación, que represente el comportamiento de las variables.

Tarea 12. Servicio de taxi por aplicación

La compañía ***A*** cobra por el servicio $30.00 más $5.00 por Kilómetro recorrido. La compañía ***B*** cobra por el servicio $20.00, más $7.00 por Kilómetro recorrido. ¿Cuándo es mejor usar una compañía y, cuándo es mejor usar la otra?

Bloque 2. Función lineal.

Tarea 13. Consumo de petróleo

El profesor expone y explica la solución.

El señor Pérez midió la cantidad de petróleo del depósito de su calefacción central 10 días después de que fue llenado y encontró que era 1420 litros. Después de otros 20 días la midió de nuevo y encontró que la cantidad de petróleo era de 880 litros. Suponiendo que el consumo de petróleo respecto al tiempo en días se ajusta a una función lineal, determina:

a) Variable independiente "x",
b) Variable dependiente "y",
c) Gráfica de la función,
d) ¿Qué cantidad de petróleo contiene el depósito, al ser llenado? (Ordenada al origen "b"),
e) ¿Cuál es la cantidad promedio de petróleo utilizada cada día por el sistema de calefacción central? (Pendiente "m"),
f) Representación algebraica de la función (ecuación) $y = mx + b$,
g) Sí el señor Pérez ordena más petróleo cuando la cantidad en el depósito se redujo a 700 litros, ¿qué tan seguido ordena petróleo para este depósito?

Apéndice

Tarea 14. Variable dependiente e independiente

La variable independiente se escribe como "x", varía arbitrariamente. La variable dependiente se escribe como "y" o, "$f(x)$" (efe de equis), su valor depende de "x". Las variables se determinan de acuerdo con el contexto.

Para cada situación que a continuación se señala, escribe en el cuadro, "x" para la variable independiente y, escribe "y" para la variable dependiente.

1.	Un resorte se alarga 2 cm por cada Kilogramo-fuerza que se le pone en tención.	La fuerza es la variable…	La longitud que se alarga el resorte es la variable…
2.	El costo del servicio telefónico es de 90 centavos por cada minuto de llamada.	El costo del servicio es la variable…	El tiempo es la variable…
3.	El tamaño de la población de animales crece 45 cabezas cada mes…	El tiempo es la variable…	El tamaño de la población es la variable…
4.	El costo total del agua es directamente proporcional a la cantidad de litros consumidos.	El costo total del agua es la variable…	Los litros consumidos de agua es la variable…
5.	La presión atmosférica depende de la altura con respecto al nivel del mar.	La altura con respecto al nivel del mar es la variable…	La presión atmosférica es la variable…

Tarea 15. Tabulación y graficación de la función lineal

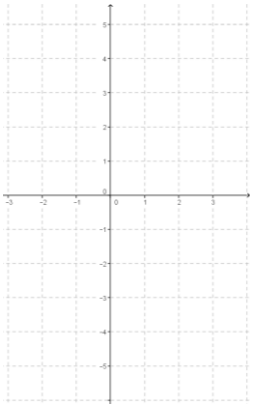
Primera parte. A continuación, se muestran dos funciones en su representación algebraica, para cada una, se proporciona una tabla con valores para "x" y un plano cartesiano. Completa la tabla con los correspondientes valores de "y", traza cada una de las gráficas y responde las preguntas correspondientes.

1. Representación algebraica: $y_1 = 2x - 1$

Representación tabular:

x	y
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

Representación gráfica:

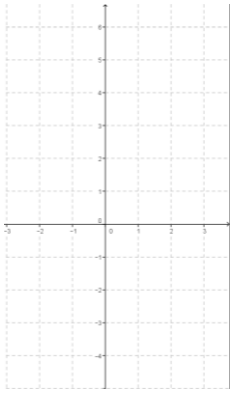


2. Representación algebraica: $y_2 = -2x + 2$

Representación tabular:

x	y
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

Representación gráfica:

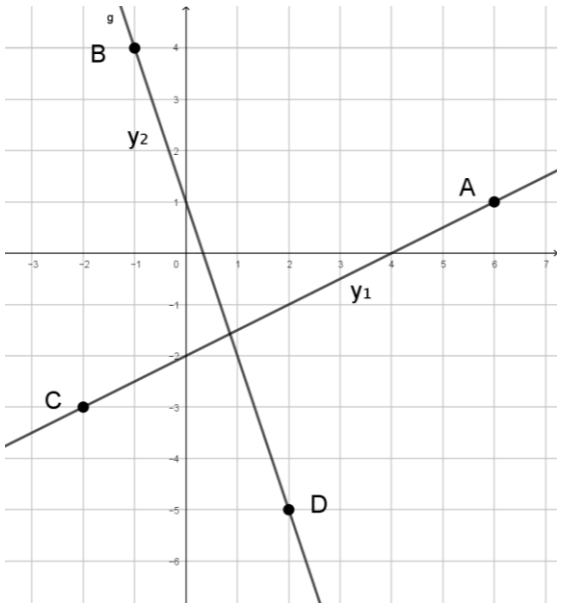


Pregunta 1. ¿Se pueden trazar las gráficas de líneas rectas con tan sólo dos puntos?

Pregunta 2. Las gráficas de las funciones 1 y 2 tienen distinta inclinación. De izquierda a derecha, la primera es hacia arriba y la segunda es hacia abajo. ¿Cómo se relaciona esta inclinación con la ecuación "escrita" de cada una de ellas?

Tarea 16. Localización de puntos sobre línea recta

A continuación, se muestran dos funciones en su representación algebraica y gráfica, en la representación gráfica se señalan algunos puntos. Identifica y escribe, en el espacio correspondiente, las coordenadas de cada uno de los puntos señalados.

Representación algebraica	Representación gráfica	Coordenadas de puntos: $P\ (x, y)$
		A
$y_1 = \frac{1}{2}x - 2$		B
		C
$y_2 = -3x + 1$		D

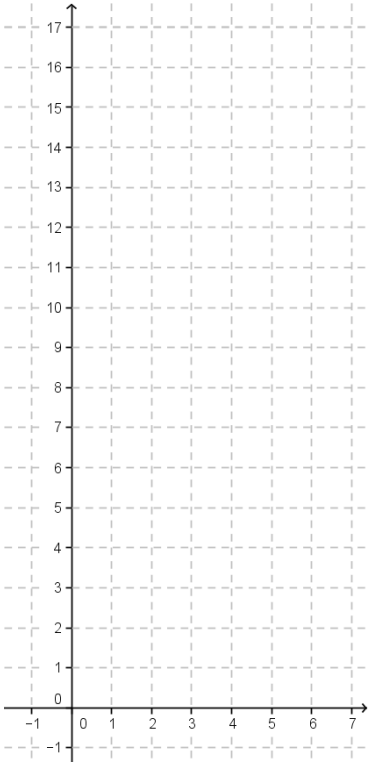
Apéndice

Tarea 17. Representaciones tabulares, gráficas y algebraicas

A continuación, se presentan cinco funciones en su representación tabular. En cada una de ellas: a) traza la gráfica y verifica que sean rectas, b) identifica la ordenada al origen, c) determina la pendiente, d) escribe la ecuación, e) en su caso, completa los valores de las tablas donde faltan.

1.

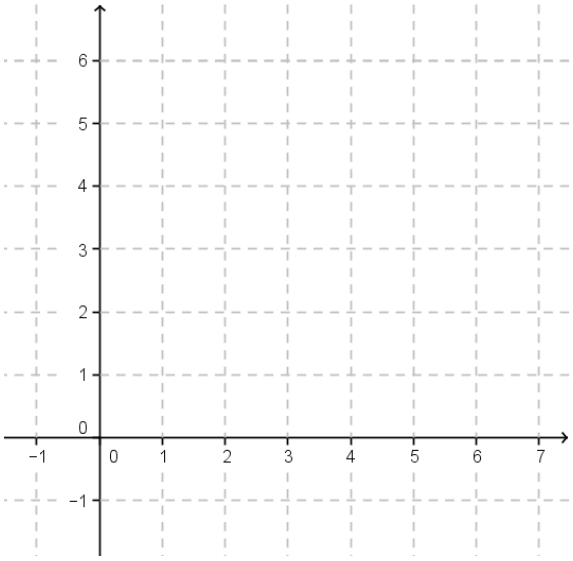
x	y
2	7
	10.5
4	
5	17.5



Apéndice

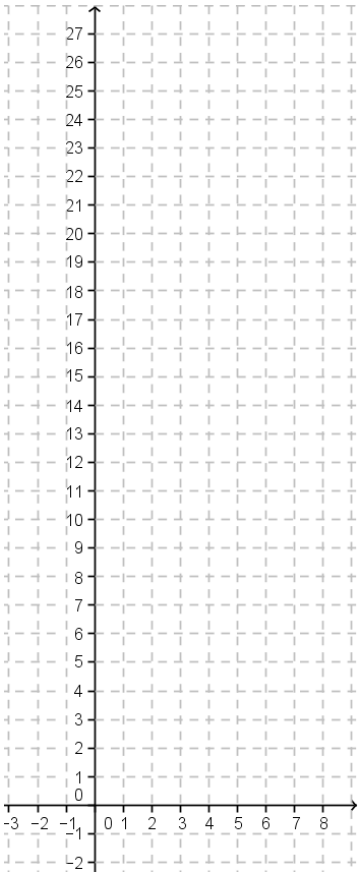
2.

x	y
1	3.5
2	4.0
3	
	5.0
5	5.5



3.

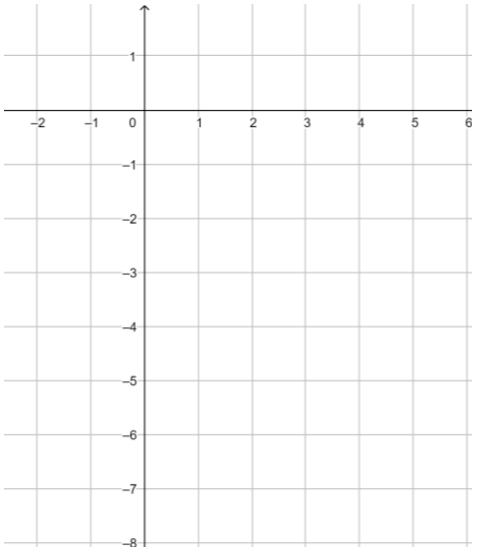
x	y
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25



Apéndice

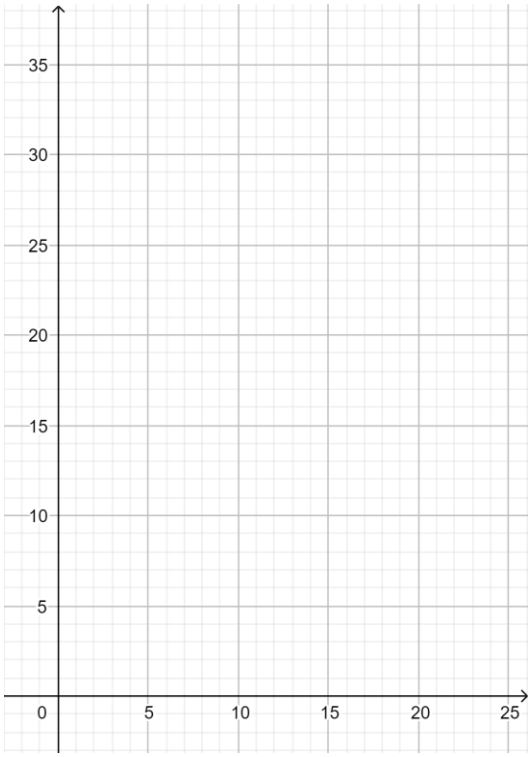
4.

x	y
1	-3
2	-4
3	-5
4	
	-7



5.

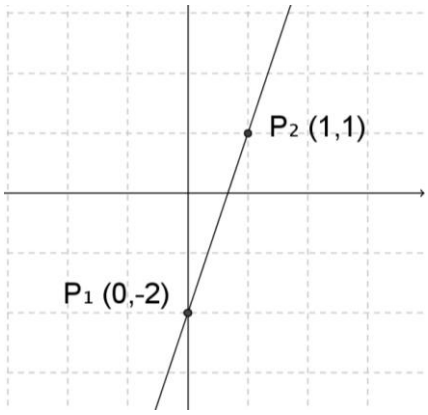
x	y
0	30.74
5	
10	28.53
15	



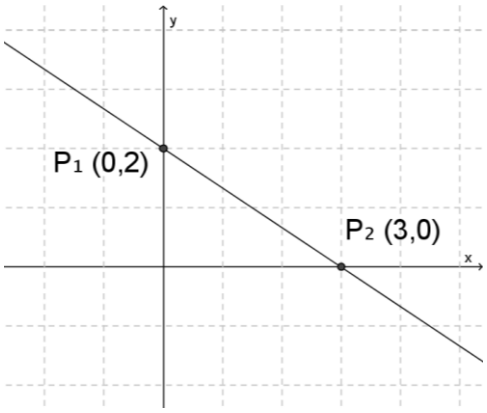
Tarea 18. De la gráfica a la ecuación

A continuación, se muestran cinco gráficas de funciones lineales. De acuerdo con los datos que se muestran en las mencionadas gráficas, escribe la ecuación que corresponda a cada una de ellas.

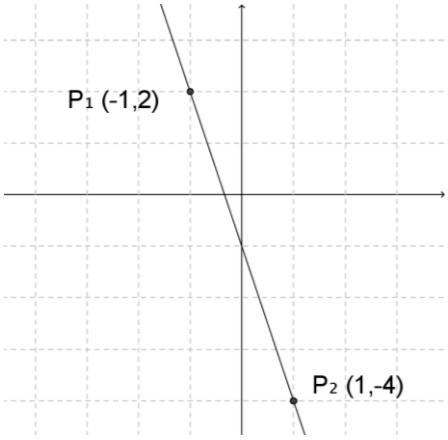
1.



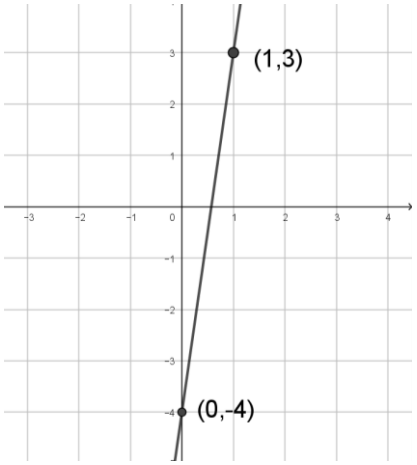
2.



3.

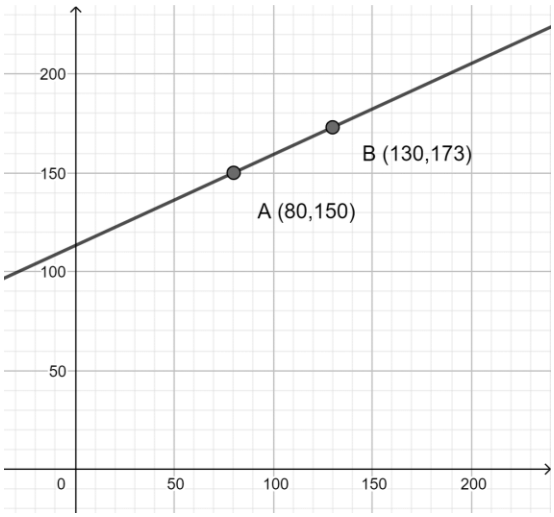


4.



5.

Apéndice



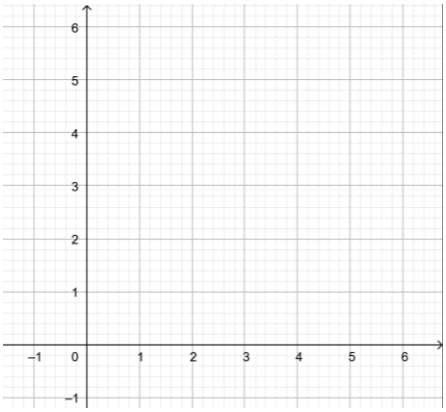
Tarea 19. Determinación de la ecuación y cálculo de coordenadas

En cada uno de los siguientes problemas contesta lo que se pide.

Problema 1. Una parte de la representación tabular de una función lineal se muestra a continuación:

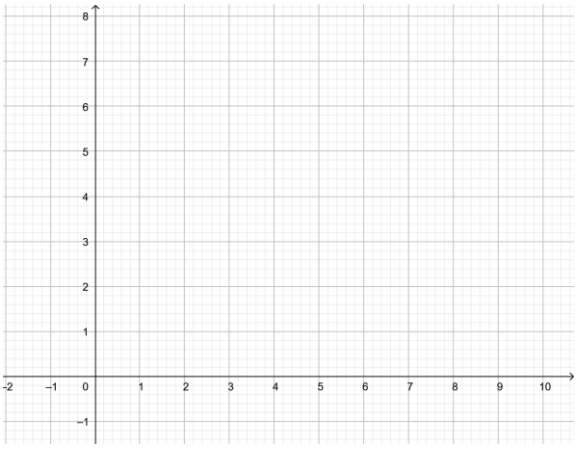
"x"	"y"
0	2
3	4

d) Traza su gráfica, determina la pendiente, la ordenada al origen y su ecuación.
e) Cuando la variable independiente es $x = 5$, ¿Cuál es el valor de la variable dependiente "y"?
f) Cuando la variable dependiente es $y = 3$, ¿Cuál es el valor de la variable independiente "x"?



Problema2. Dos parejas ordenadas de una función lineal son: (1.5,6.3) y (7.4,2.8).

d) Traza la gráfica, determina la pendiente, la ordenada al origen y su ecuación.
e) Si la variable independiente es $x = 3.1$, ¿qué valor tiene la variable dependiente "y"?
f) Si la variable dependiente sea $y = 1.9$, ¿qué valor tiene la variable independiente "x"?



Apéndice

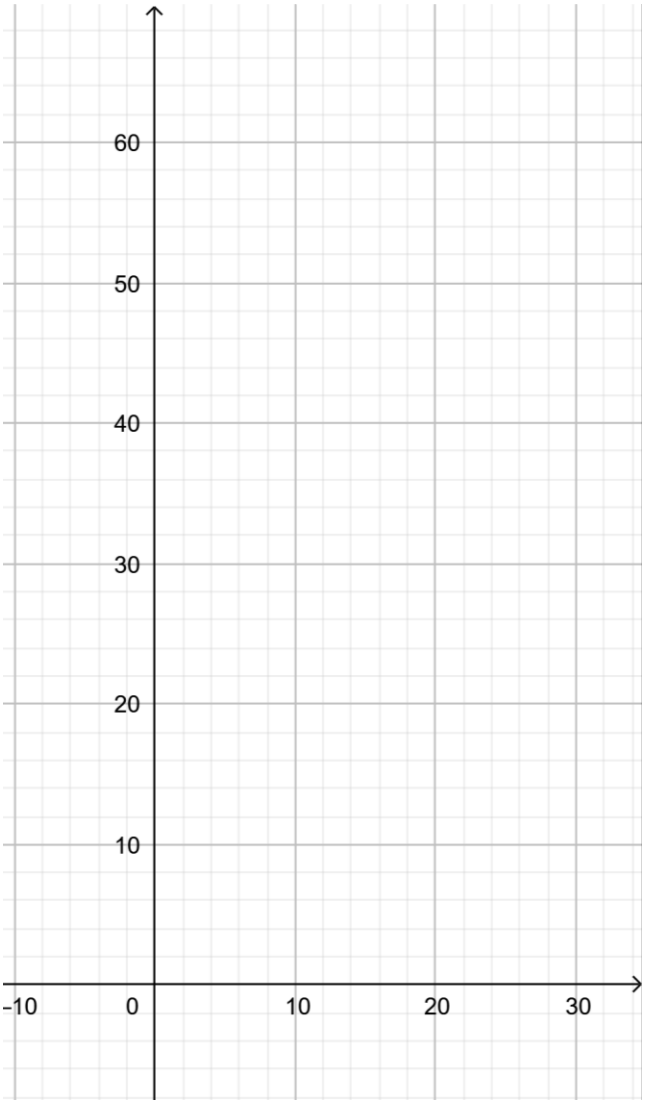
Problema 3. A continuación, se muestra algunos valores de la representación tabular de una función lineal.

"x"	"y"
0	45.6
8.4	
20.1	57.9
	60.7

a) Traza la gráfica.

b) Determina la ecuación.

c) Determina los valores faltantes en la tabla.

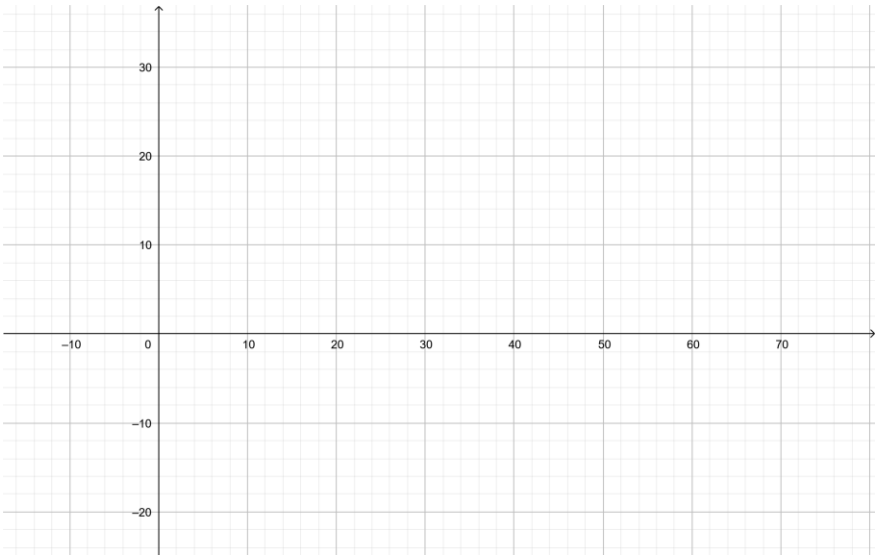


Tarea 20. Tiempos de oro olímpico

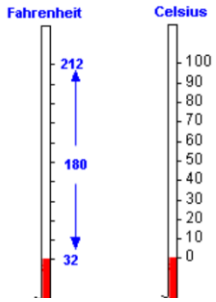
(Historiadeldeporte, 2024).

A continuación, se muestran los registros, en segundos, de las ganadoras de la prueba de 200 m planos para mujeres en distintas olimpiadas. Con los datos que se muestran, determina un modelo matemático que registre el tiempo en segundos, con que se ganó la prueba, respecto al tiempo transcurrido en años. Así mismo, determina el tiempo que registrará la ganadora en las olimpiadas de los Ángeles 2028.

Año	1964	1988	…	2028
Ajuste de tiempo 1964=0	0	24	…	64
Tiempo (segundos)	23.00	21.34	…	¿?

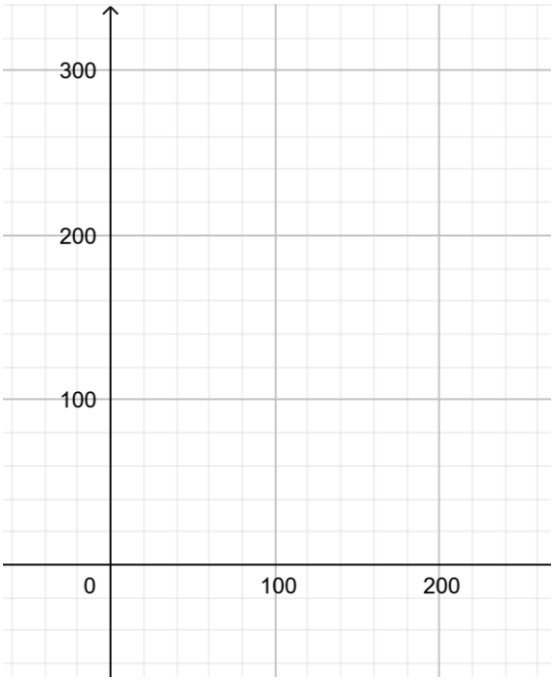


Tarea 21. Escalas de temperaturas



En el nivel del mar se tiene una atmosfera de presión. A esa presión, el punto de congelación del agua es de 0°C que corresponde a 32 °F, y el punto de ebullición del agua es de 100°C que corresponden a 212°F. Halla una ecuación que represente la relación entre las temperaturas Celsius (°C) y Fahrenheit (°F). Finalmente, completa la siguiente tabla.

°C	-20	10°		
°F			70°	90°



Apéndice 2. Problema inicial y final

Formatos de problemas hipotéticos. Instrumentos de evaluación.

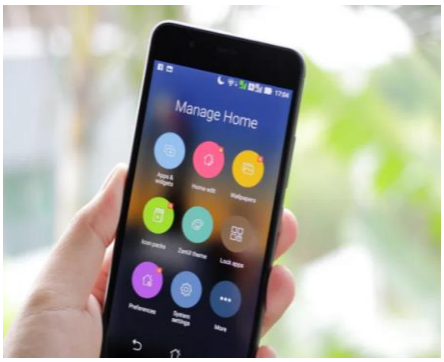
Problema inicial, hipotético. Referente a tarifas de telefonía.

Problema final, hipotético. Referente a crecimiento de infantes.

Problema inicial. Hipotético

Una empresa telefónica cobra mensualmente una cantidad fija, más otra cantidad por cada minuto utilizado en llamadas. En los últimos dos meses los recibos señalan los siguientes datos:

Número de minutos	0	70
Importe facturado	$302.50	$365.50



(AndroidAyuda, 2024)

Pregunta 1. Responde verdadero o falso, según sea el siguiente enunciado, explica tu respuesta.
"De acuerdo con los datos mostrados: los minutos utilizados dependen del importe facturado".
Pregunta 2. De acuerdo con los datos mostrados: ¿Cuál es la variable independiente y cuál es la variable dependiente? Explica tu respuesta.
Pregunta 3. Elabora una tabla de valores y traza una gráfica.
Pregunta 4. ¿Cuánto es el importe facturado cuando no se utilizan minutos de llamada? En la gráfica de una función lineal, ¿Cómo se llama a este punto?
Pregunta 5. Con los datos proporcionados, determina el factor de proporcionalidad o pendiente.
Pregunta 6. Escribe la representación algebraica (ecuación) de la función.
Pregunta 7. ¿Qué importe se pagará si se consumen 500 minutos?
Pregunta 8. Explica por qué piensas que resolviste el problema correctamente.

Problema final. Hipotético

Figura 5.2.

En promedio, un bebé pesa 2.9 Kg al nacer y, cuatro años más tarde el peso del niño es de 15.5 Kg. Suponga que el peso en la infancia esté linealmente relacionado con la edad en años

Edad (años)	0	4
Peso (Kg)	2.9	15.5

(Shutterstock, 2024)

Pregunta 1. Contesta verdadero o falso según sea el siguiente enunciado. Explica tu respuesta.

"De acuerdo con el enunciado del problema, la edad depende del peso".

Pregunta 2. De acuerdo con los datos mostrados: ¿Cuál es la variable independiente y cuál es la variable dependiente? Explica tu respuesta.

Pregunta 3. Elabora una tabla de valores y traza una gráfica.

Pregunta 4. ¿Cuánto pesa en promedio un bebe al nacer? En la gráfica de una función lineal, ¿Cómo se llama a este punto?

Pregunta 5. Con los datos proporcionados, determina el factor de proporcionalidad o pendiente.

Pregunta 6. Escribe la representación algebraica (ecuación) de la función.

Pregunta 7. Cuando el niño tenga 7 años, ¿qué peso tendrá?

Pregunta 8. Explica porque piensas que resolviste correctamente el problema.