EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
UNIDAD AJUSCO
LICENCIATURA EN PEDAGOGÍA

PROPORCIONALIDAD DIRECTA E INTRODUCCIÓN A LAS FUNCIONES LINEALES EN PRIMER GRADO DE SECUNDARIA BAJO EL ENFOQUE JAPONÉS: LESSON STUDY (MATERIAL DE APOYO PARA LOS DOCENTES EN LA ESCUELA MEXICANA)

PROPUESTA PEDAGÓGICA

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADA EN PEDAGOGÍA

P R E S E N T A:

PERLA MARLEN PIÑA OLVERA

ASESOR:
LIC. ENRIQUE VEGA RAMÍREZ

CIUDAD DE MÉXICO, JUNIO DE 2025

Secretaría Académica
Área Académica 5
Teoría Pedagógica y
Formación Docente
Programa Educativo:
Licenciatura en Pedagogía

Ciudad de México, marzo 31 de 2025
TURNO MATUTINO
F(05) S(11)

DESIGNACIÓN DE JURADO DE EXAMEN PROFESIONAL

La Coordinación del Área Académica Teoría Pedagógica y Formación Docente, tiene el agrado de comunicarle que a propuesta de la Comisión de Titulación ha sido designado **SINODAL** del Jurado del Examen Profesional de: **PERLA MARLEN PIÑA OLVERA,** pasante de esta Licenciatura, quien presenta la **PROPUESTA PEDAGÓGICA:** titulada: **"PROPORCIONES Y FUNCIONES LINEALES EN PRIMER GRADO DE SECUNDARIA BAJO EL ENFOQUE JAPONÉS: LESSON STUDY (MATERIAL DE APOYO PARA LOS DOCENTES EN LA ESCUELA MEXICANA)"**, para obtener el título de Licenciada en Pedagogía.
Reciba un ejemplar de la misma para su revisión y dictaminación. Se le recuerda que con base en el Artículo 37, numeral V del Reglamento general para la obtención del título de licenciatura de la Universidad Pedagógica Nacional deberá entregar su dictamen por escrito en un plazo de 20 días hábiles, contados a partir de la recepción del trabajo de titulación y enviarlo a la Comisión de titulación.

JURADO	NOMBRE
Presidenta (a)	ARTURO BAZÁN ZURITA
Secretaria (o)	ENRIQUE VEGA RAMIREZ
Vocal	ROSA CRISTINA SOTO HASSEY
GRDlente	VICENTE CARRIÓN VELÁZQUEZ

Atentamente

"EDUCAR PARA TRANSFORMAR"

GEORGINA RAMÍREZ DORANTES
Presidenta de la Comisión de Titulación
Programa Educativo: Licenciatura en Pedagogía

2°. Actualización del oficio de designación de sinodal en jurado de examen profesional, con base en el reglamento de titulación vigente publicado en la Gaceta UPN, No. 139, abril-mayo, 2019, aprobado por el Consejo de la Licenciatura en Pedagogía y por la Comisión de titulación el 21/03/25.

Alumna.
GRD/

A las personas más importantes de mi vida, con infinito amor y gratitud, a mis primeros maestros, mejores amigos y personas favoritas en el mundo, mis hermanos:

IRIS MARTÍNEZ OLVERA

y

AQUILES PIÑA OLVERA

Por ser mi inspiración, quienes dieron todo el sentido a este trabajo. Lo mejor que la vida me ha dado, son ustedes.

Mis pequeñes hermanes

♥ ♥ ♥

Siempre juntos

AGRADECIMIENTOS

Para Yahui por todo su amor y apoyo incondicional.

A mis padres Nora Olvera Arenas y Gustavo Piña Jiménez, con cariño por darme la vida y su mejor esfuerzo para educarme, los quiero.

A Juan Villa Verde Carrión y Teresa Olvera Arenas, mis amorosos tíos y padres, ustedes viven en mi mente y corazón, gracias por su educación y los grandes valores que me inculcaron, ustedes son parte de esto.

A mi asesor Enrique Vega por sus consejos, amistad, sus asesorías de más de 3 horas, discutiendo y reflexionando, gracias por su gran paciencia con sabia orientación; usted es mi maestro de matemáticas favorito. Lo quiero mucho profe. Gracias.

A todos mis profesores: Joel Salinas, Arturo Bazán, Marcela Santillán, Juan de Dios, Vicente, Mauro Pérez Sosa y muchos otros más. Gracias a cada uno de ustedes por su apoyo y paciencia durante mi estancia en la universidad.

De manera especial al profesor Rubén Clark amigo y maestro de la UAM-I y UACM, quien me apoyó con sus opiniones y correcciones en formato y contenido, durante las primeras versiones de este trabajo, gracias por tu apoyo y paciencia durante estos años.

A Ivonne y Miguel Isaí, por ser mis compañeros, no solo en la universidad, también en la vida; por sus palabras de aliento y apoyo incondicional durante todos estos años, los amo infinitamente, gracias por siempre estar ahí. Los amigos son la familia que uno elige.

A la familia Michalek, mis grandes amigos polacos, y en especial a Adeline, quien me reveló durante mi estancia en su país que la “buena pedagogía” se vive con el amor y ejemplo que siguen nuestras niñas y niños del mundo; que los traspiés son oportunidades para construir y que siempre se puede empezar de nuevo. Gracias por hacerme mejor persona.

Con cariño, amor y dedicación a cada uno de mis alumnitos y alumnitas de México y el mundo quienes me enseñaron a ser docente y a recordar cómo es ser niña y adolescente, todo esto durante mi práctica profesional. Los quiero y siempre llevaré a cada uno de ustedes en mi corazón. Por ustedes soy, por los que vendrán seré.

A TODOS GRACIAS

INDICE

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo contiene una propuesta pedagógica para el tema de funciones lineales bajo la metodología japonesa Lesson Study, la cual pretende ser un apoyo para el docente en la escuela mexicana. Como se expondrá en los siguientes capítulos bajo la reflexión de problemáticas generales a temas particulares, hasta llegar al diseño y propuesta, el docente podrá explorar y reflexionar bajo su experiencia la utilidad de esta propuesta y su puesta en práctica.

Como se señalará en algún momento, este trabajo no pretende ser un copy-page de una metodología o didáctica, sino que busca brindar ideas al profesorado para su implementación en otros temas, con sus correspondientes adaptaciones a nuestras diversas poblaciones y contexto educativo mexicano.

El primer capítulo pretende comprender nuestro contexto al analizar de manera breve algunas dimensiones del escenario educativo, pretendiendo hacer reflexionar al docente, con el objetivo de comenzar a tejer puntos de contacto dentro de las problemáticas, así como ver y concebir claramente a la educación como un fenómeno de naturaleza compleja. Desarrollando ideas dentro de esta naturaleza el docente podrá ampliar las opciones y aportaciones a su labor, así como ampliar su perspectiva y pensamiento crítico al buscar entretejer algunas ideas.

El segundo capítulo busca que el docente recupere conceptos importantes tras una breve documentación sobre paradigmas y algunas teorías cognitivas del aprendizaje. Esto con el objetivo de incorporar la idea de “pensamiento complejo y complejidad social”, así como reconocer puntos de contacto de algunas teorías y a su vez respaldar, relacionar, asimilar y acomodar la metodología que se propone.

El tercer capítulo sugiere algunas razones para enfocarnos en la población adolescente, así como reflexiones curriculares sobre matemáticas en el nivel secundaria. Cabe señalar que este trabajo va dirigido a docentes en servicio, sin embargo, es importante mencionar la relevancia de conocer el grado, los conocimientos y considerar la edad de nuestra población, así como su impacto en la sociedad tanto cualitativa como cuantitativamente.

En el cuarto capítulo se presenta la planeación y las actividades propuestas para cada lección. Cada una de estas contiene una hoja descriptiva al inicio, posteriormente se presenta la guía de trabajo para los alumnos y alumnas, al final se encuentra la secuencia didáctica, donde se exponen los diferentes tipos de pensamientos que se relacionan con las actividades propuestas.

Al llegar al quinto capítulo se comentan algunas reflexiones, consideraciones y recomendaciones hechas durante la elaboración de este proyecto, esperando que cada apartado sea de utilidad y aporte conceptos, ideas o información nueva, así como una alternativa metodológica o didáctica para el docente, y con suerte se propicie una reconsideración paradigmática.

CAPÍTULO 1: COMPRENSIÓN Y DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA EDUCATIVO

El único deber que tenemos con la historia es reescribirla.
Oscar Wilde (1854-1900)

La historia no es mecánica porque los hombres son libres para transformarla.
Ernesto Sábato (1911-2011)

Decía Nelson Mándela: "La educación es el arma más poderosa qué puedes usar para cambiar al mundo", muchos docentes y/o creyentes de la educación dan por cierta esta frase, de tal forma los modelos educativos pretenden tener un impacto significativo en sus ciudadanos con la intención de buscar un avance, mejoramiento, desarrollo o transformación en su población.

Cabe preguntarse ¿qué tipo de avance o desarrollo buscan los gobiernos al usar la educación como esa arma transformadora? ¿Qué tipo de cambio hemos tenido como sociedad? ¿en qué momento estamos? O volver a preguntarnos ¿para qué educamos? ¿Hacia dónde vamos? ¿Qué quieren los gobiernos para nosotros los ciudadanos?

Para poder responder algunas de estas preguntas sería apropiado reconocer el contexto ya que, a través del tiempo, las necesidades han cambiado en alguna medida, de manera particular en México se mencionan las siguientes problemáticas:

a) Problemáticas ambientales debido a una falta de conciencia (reflexión y acción) por la ausencia de una educación ambiental. Estos problemas se reflejan por ejemplo en: falta de agua, cambio climático (con altas temperaturas y pocas lluvias), contaminación del aire y el mar, así como deforestación, solo por mencionar algunos en nuestro país.
b) Problemas sociales como violencia (considerando género, clase social, racismo y discriminación) inseguridad, desigualdad, injusticia y corrupción, cada uno relacionado entre sí.

c) Problemas de salud que afectan a la población en general:

- "Enfermedades psíquicas… Considerando qué un 30% de la población las padece" (La Jornada, 2007 como se citó en Moreno, 2021).
- Enfermedades gástricas debido a la mala alimentación y el estrés, este último como un factor importante: "… un estudio revela que los problemas de salud ocasionados por el estrés son: dolor de cabeza (56%), cansancio (44%), falta de energía (38 %) y colitis (34 %)". (La Jornada, 2020).

Es bien sabido que los problemas anteriores son complejos y requieren de múltiples elementos y sus relaciones a través del tiempo para ser tratados e intentar resolverlos o atenderlos de la mejor manera; por lo cual, aspirar a un cambio radical en breve, puede ser un pensamiento ingenuo. Se necesita la colaboración de todos para ir trabajando esas situaciones; entonces la educación sigue siendo el medio más alentador para ver una transformación gradual en las problemáticas de nuestra sociedad.

Si reconocemos las problemáticas podemos tomar partido, con esto en mente y bajo una "visión compleja y holista del mundo que percibimos como miembros de un sistema altamente dinámico e interrelacionado" (Tabares, 2002) podríamos mirar desde el ámbito educativo los alcances, así como las limitaciones de los productos o contribuciones insertadas en la realidad, para así saber qué valdría la pena mantener o cambiar.

Ahora bien, este trabajo toma como marco teórico la Complejidad social (pensamiento complejo) que permitirá realizar propuestas para sumar a la resolución de estas problemáticas en busca de una transformación. Con lo anterior podremos observar, analizar, inferir y valorar acciones para conseguir ese propósito transformador hacia un mundo más sano en general; bajo una constante necesidad de evolucionar nuestro grado de consciencia por lo único permanente en el universo: el cambio.

Ya lo dijo Lao Tzu: “los grandes actos están hechos de pequeñas acciones”, de tal forma desarrollar el pensamiento con educación tendrán a largo plazo un gran impacto en la sociedad. Dicho lo anterior cabe mencionar que de manera particular en este trabajo buscamos contribuir a la formación de seres humanos que vivan “aprendiendo por sí mismos y para sí mismos” (Isoda S. K., 2016) capaces de transformar su realidad con valores, conciencia e inteligencia.

De manera particular esta propuesta pedagógica pretende ayudar al docente a desarrollar en sus alumnos el pensamiento matemático bajo la metodología Lesson Estudy de Japón, como se mencionará en capítulos posteriores esta metodología no solo pretende enseñar conceptos matemáticos mediante determinados procedimientos, sino que, también, busca desarrollar en los alumnos la suficiente motivación para reflexionar y con suerte despertar un genuino interés en los temas de matemáticas de manera particular en las funciones lineales.

Como es bien sabido hasta el día de hoy en 2025 los temas de funciones lineales se comienzan a abordar en el nivel secundaria, esto se comentará en el tercer capítulo donde abordaremos a detalle los sujetos destinatarios y su contexto educativo. Sin embargo, cabe mencionar, grosso modo, que, en la mayoría de los casos, lo último que piensan y desean descubrir los adolescentes es lo abstracto en este tema. Como docente de apenas 7 años de experiencia y respaldada por mi asesor con más de 40 años en la enseñanza de las matemáticas, nos atreveríamos a decir que, el deseo de esta propuesta no solo radica en la comprensión del tema, sino en buscar una suerte de interés por parte de los jóvenes, para que, como primer paso, aumenten su participación activa en el grupo, tanto con sus compañeros, así como con su interés por temas de esta materia.

Además, pretendemos aportar al docente una herramienta didáctica, que pueda utilizar para la preparación de sus clases y también, con un poco de suerte, permitirle al docente reflexionar sobre su papel en el aula como andamio del conocimiento y el desarrollo de pensamientos matemáticos en sus alumnos, que, sin duda, cambiarían de alguna manera la visión de enseñanza, permitiendo al docente reconsiderar su paradigma y ser un agente más de cambio a nuestra sociedad.

Ahora bien, comencemos reconociendo aspectos importantes para contextualizar este trabajo; cabe mencionar que en el siguiente capítulo se presentará el marco teórico detallando este y otros aspectos, mientras tanto, se presenta un elemento importante de la complejidad social que es: “La historicidad y dependencia de una realidad y de su trayectoria evolutiva: contemplando la naturaleza del proceso histórico que dio origen.” (Lara-Rosano F. d., 2017), esto permitirá comprender y describir el problema educativo al que va dirigida esta propuesta pedagógica.

1.1. La educación del ayer, la sociedad de hoy.

A continuación, se muestra una tabla comparativa sobre tres gobiernos en el país que han transitado del 2000 al 2018 con sus proyectos educativos en general.

Esta tabla pretende mostrar la raíz del problema, al poner en el centro un modelo educativo corporativista, por competencias y enfocado únicamente en resultados, dejando a un lado el desarrollo humano y en particular el desarrollo del pensamiento matemático, que bien como se mencionará en algún momento ayuda al desarrollo del carácter humano.

Tabla 1

DIMENSIÓN	FOX	CALDERÓN	PEÑA
	Alianza por el Cambio: Programa Nacional de Educación PNE (2000 - 2006)	Alianza por la Calidad de la Educación ACE (2007 - 2012)	Reforma Educativa en México REM (2013-2018)
FUNDAMENTO	Políticas neoliberales. Procesos económicos capitalistas: Globalización y Transformaciones científicas tecnológicas. (Pérez, 2011)	Políticas neoliberales	Políticas neoliberales
POLÍTICA	La sexta y última reforma del artículo 3º de la CPEUM se llevó a cabo en el sexenio de V. Fox el 12 de noviembre de 2002, en la cual se establece que "todo individuo tiene derecho a recibir educación" y se indica como educación básica obligatoria la preescolar, la primaria y la secundaria. Esta redacción sigue vigente. Adicionalmente, la fracción I del artículo 31 de la CPEUM señala la obligación de los mexicanos de "hacer que sus hijos o pupilos concurran a las escuelas públicas o privadas, para obtener la educación preescolar, primaria secundaria"; en este tenor, es evidente que la educación en México es un derecho y una obligación, de acuerdo con el texto constitucional. (Islas, 2008)	Se establecieron 5 ejes con 10 puntos: **A**. la modernización de los Centros Escolares: **1**. Infraestructura, **2**. Tecnologías de la información, **3**. Gestión y participación social. **B**. La profesionalización de los maestros y de las autoridades educativas: **4**. Ingreso y promoción por las vías de consenso nacional público de oposición convocado y dictaminado de manera independiente, **5**. Profesionalización, creación de un sistema nacional de formación continua y superación profesional de maestros en servicio. Estudiantes mostrando rendimiento en pruebas estandarizadas como ENLACE. **6**. Calidad: fortalecimiento del concepto como elemento central de la agenda educativa, así como "programa de estímulos de calidad docente" para estimular el mérito individual en función del logro de sus alumnos. **C**. Bienestar y desarrollo integral de los alumnos considerando los siguientes procesos. **7**. Salud, alimentación y nutrición, **8**. Condiciones sociales para mejorar el acceso, la permanencia y el egreso oportuno (300 mil becas). **D.** Formación integral de los alumnos para la vida y el trabajo: **9**. Educación de valores y calidad; impulso a la productividad y a la promoción de la competitividad para que las personas puedan desarrollar su potencial. **E**. Evaluar para mejorar: **10**. Evaluaciones donde se responde a los parámetros y las recomendaciones que establece la OCDE. (Bautista, 2012)	En el Artículo 3º Constitucional, con esta reforma se incluye: la calidad en la educación, <u>la evaluación obligatoria</u>, los concursos de oposición para ingresos, promociones, reconocimientos y permanencia, el Sistema Nacional de Evaluación Educativa y autonomía del INEE, así como la conformación de la Junta de Gobierno de este. En el Artículo 73 Fracción XXV se Agrega el Servicio Profesional Docente. En los Transitorios se incluye el proceso de elección de las ternas para integrar la Junta de Gobierno del INEE, el Sistema de Información y Gestión Educativa, el censo de escuelas, maestros y alumnos; <u>la evaluación del desempeño docente</u>, así como la formación, actualización, capacitación y Superación profesional. También se introduce <u>la autonomía de gestión de las escuelas</u>, continuar con las escuelas de tiempo completo de 6 y 8 horas y los alimentos saludables. (López Aguilar, 2013)

CURRÍCULO	Adaptaciones curriculares acordes a la globalización… Perfiles educativos con fundamentos en estándares (Moreno Moreno, 2004). Dar respuesta a los retos de la sociedad del conocimiento… con formación para el trabajo (Reforma de educación secundaria) objetivos con base en valores, habilidades y competencias para la mejora de productividad y competitividad (Pérez, 2011). Esta reforma de educación secundaria no se pudo implementar. Habla de competencias para el aprendizaje permanente, el manejo de la información, el manejo de situaciones y para la convivencia.	Impulsar la reforma Curricular: Que los individuos sean capaces de desarrollarse en todos los contextos, se pretende que existe una continuidad curricular en los tres niveles de educación básica. Promoción de la interculturalidad (idiomas); Preparar al individuo para un mejor desarrollo en una sociedad globalizada, PEP 2004, RES 2005-2008, REP 2009-2011, Existen libros de apoyo para inglés incorporados a enciclopedia, Perfil de egreso para la educación básica, Libros de texto impresos para alumnos y maestros. Una evaluación exhaustiva y periódica de todos los actores de la educación; Habrá un sistema de evaluación que no había con anterioridad, aunque ya hay muchas de estas evaluaciones. (Bautista, 2012)	El Desarrollo Profesional Docente: Consolidad el Servicio Profesional Docente, a través de una estructura jurídica y una organización… que aseguren la profesionalización del personal educativo. Formación continua de los profesores y el desarrollo de un plan integral para fortalecer la educación normal. Procesos clave: ingreso, promoción, permanencia y reconocimiento. Formación continua para docentes y Formación inicial. Planes y programas de estudio. Libros y materiales educativos: Nuevo planteamiento curricular para la educación básica y media superior, así como la actualización de los libros y materiales educativos que se emplean en las aulas. Procesos de consulta para la revisión del Modelo Educativo, Plan y programas de estudio para la educación básica, Planes de estudio de referencia del componente básico del marco curricular común de la educación superior, Educación inicial, Autonomía curricular, Educación socioemocional. Programa Nacional de Inglés Elaboración de materiales educativos. (Centro de Estudios Sociales y de Opinión Pública , 2019) *Componentes curriculares*: Contribuyen a formar ciudadanos libres, responsables e informados para vivir en plenitud en el siglo XXI. Se presentan tres componentes curriculares: **A.** Campos de formación académica, **B.** Áreas de desarrollo personal y social y **C.** Autonomía curricular… los tres componentes curriculares se deben visualizar de manera articulada en el currículo. Los tres son igualmente importantes y ningún componente debe tener primacía sobre los otros dos. (Secretaria de Educación Pública , 2017).
SOCIEDAD (OPINIÓN PÚBLICA)	Enciclopedia fue uno de los programas…del gobierno de V. Fox. su fracaso fue estrepitoso, directamente proporcional a las expectativas que despertó. Los críticos del programa han	(…) lo que los cambios aprobados verdaderamente persiguen es regular las relaciones laborales entre el patrón-gobierno y los trabajadores de la educación, para minar conquistas laborales históricas como la estabilidad en el empleo… lo que se intenta con estas reformas es elevar a rango constitucional lo pactado en el sexenio anterior entre Felipe	Prevalecen concepciones fragmentadas y reduccionistas de conceptos fundamentales como calidad, equidad, evaluación e innovación. En el discurso se expresan prioridades que no tienen respaldo en acciones y metas concretas; una ausencia fuerte es el financiamiento, tanto en magnitudes como en esquemas y

	señalado distintas causas del fracaso. D. Rodríguez, programador y desarrollador en el proyecto, sostiene que hay un error de origen: el analfabetismo tecnológico de las autoridades responsables. La ASF emitió un dictamen negativo que señalaba los dudosos resultados del programa, las deficiencias de su funcionamiento, la opacidad en el manejo de los recursos asignados, el robo y deterioro de equipos, la ausencia de indicadores de evaluación y el incumplimiento de distintas leyes y reglamentos. (Hernández A. G., 2011)	Calderón y Elba Esther Gordillo: … Nadie puede oponerse a la evaluación. La evaluación es parte del proceso educativo. Eso de que los maestros nos oponemos a "evaluarnos" es falso. Los docentes que día a día estamos frente a los alumnos realizamos evaluaciones constantemente. En todo momento la evaluación sirve para guiar nuestro trabajo. A lo que nos oponemos es a que un examen sea el instrumento para juzgar la permanencia o no en el servicio. Rechazamos que el gobierno federal, la SEP, siga a pie juntillas las "recomendaciones" de la OCDE (…) No hay que hacerse bolas con que "hay una disputa entre el gobierno y la cacique". Lo de la "resistencia civil" de Gordillo es una más de sus mascaradas. Esta reforma es avalada por los enemigos de la educación pública, por la derecha más recalcitrante como "Mexicanos Primero" comenta: Vázquez, 2012. (Vázquez, 2012)	modelos. (Universidad Iberoamericana Ciudad de México , 2015) Señalaron lo anterior especialistas en el tema educativo, durante el panel La formación de los maestros en México, organizado por Casa LAMM, la UNAM y La Jornada. Asimismo, plantearon severas críticas a la reforma impulsada por el gobierno de Enrique Peña Nieto, donde se percibe no sólo desconocimiento y descrédito al trabajo docente, sino un ataque permanente a las normales. Señalaron que, con sus actuaciones y discursos, el Instituto Nacional para la Evaluación Educativa (INEE) pretende legitimizar, dejando de lado su presunta autonomía, la política gubernamental, principalmente en los temas de las normales y la evaluación a los docentes. Lilia Abarca Laredo, del Centro de Actualización del Magisterio del Distrito Federal, señaló que el problema de la educación en México tiene su esencia en la terrible desigualdad social; la pobreza extrema de miles de niños y jóvenes, y en falta de presupuesto para enseñanza, infraestructura de las escuelas y para garantizar las mejores condiciones para que los niños aprendan y los maestros enseñen. Este problema, subrayó, no lo resolverá la imposición de exámenes estandarizados y evaluaciones punitivas ya anunciadas en contra de los maestros. "Esto no va a mejorar la educación". En tanto, Juan Manuel Rendón, ex director de la Benemérita Escuela Normal de Maestros (BENM), coincidió con el INEE en sus afirmaciones de que las normales están alejadas de lo que se espera de ellas como instituciones de educación superior. "Pero lo que el instituto no dice, es que la situación crítica que viven estas escuelas es resultado de una política de Estado, deliberada y sistemáticamente instrumentada, para mantener al pueblo en la sumisión a un sistema económico-político antidemocrático". (Román, 2015)

IMPLICACIONES EN LA REALIDAD DEL PAÍS	Robo de recursos, poca o nula capacitación para el uso y promoción de los medios, analfabetismo digital en docentes, pizarras que se utilizaron pocas veces, algunos terminaron como pizarrones blancos por maestros o grafiteados por alumnos, aulas de cómputo que se ocuparon pocas veces.	Su aplicación sirvió para ocultar el fracaso de una reforma curricular que no generó ninguna mejora en el aprendizaje de los alumnos… 85% de estudiantes de escuelas públicas se ubicó entre insuficiente y elemental… Investigadores y maestros han señalado reiteradamente que debe cancelarse porque es un instrumento defectuoso de medición, los reactivos son ambiguos, erróneos, descontextualizados, atemporales, con datos irrelevantes. Su contenido es inapropiado; la información es sesgada; las lecturas son amplias y complejas; su aplicación es apresurada; contiene gran cantidad de preguntas con diferente grado de dificultad, cuyas respuestas podrían ser una o más; la calibración es insuficiente y no responde a condiciones técnicas. Por el abuso en la aplicación de exámenes estandarizados, los alumnos y maestros padecen estrés y desinterés… Por su carácter estandarizado, no toma en cuenta las diferencias de contexto social, regional, geográfico. Es un instrumento hegemónico, subordinante, excluyente, homogeneizante, discriminatorio, inequitativo e injusto, que funciona como instrumento de selección y clasificación… La perversidad del sistema de estímulos sustentado en obtener un alto puntaje hará del trabajo educativo, una labor mercantilista, basada en la competencia, aniquilando su esencia humanista, así como la solidaridad y compañerismo entre los docentes. (Aguilar, 2012) Así, denunciaron que a mentores que contaban con su fuente segura de empleo les impusieron los códigos 95, 20 y 97, que son interinatos… el cierre de 921 plazas iniciales y la afectación de más de mil 500 maestros de secundarias. Con estos proyectos, … se clausurarán 54 escuelas del turno vespertino, lo que significa cerrar 15 por ciento de las escuelas de la tarde en la capital del país. (Avilés, 2012).	El Modelo Educativo descrito en el Curriculum formal como “nuevo” presenta como siempre, para conveniencia político-Administrativo: “concepciones fragmentadas y reduccionistas de conceptos fundamentales como calidad, equidad, evaluación e innovación.” (Universidad Iberoamericana Ciudad de México , 2015). Pero también es importante señalar que permite integra como igual de importante “El desarrollo personal y social, así como el diálogo.” **Una propuesta curricular interesante** considerando a teóricos como Piaget, Bruner, Freire, Habermas, etc., con el objetivo de sustentar parte de los componentes del currículo, una reforma educativa que valdría la pena conocer a profundidad. Pero a pesar de que esto pueda considerarse atrayente para su análisis y comprensión, no se dejan de lado las trampas y maquillados movimientos Políticos con el afán de abusar despojando con corrupción más que nunca; aún faltan ver los frutos de ese Currículo: Los alumnos que en ese tiempo 2013-2019 cursaron los niveles básicos y media superior, esa educación se reflejara pasado un tiempo. Así también el despilfarro de recursos económicos, cuentas que no son claras, .2% en el aumento del gasto en la educación para el 2015. Claramente se mantiene la inversión dentro de la educación como insuficiente o poca: 4% en comparación al 12.34% de un país como Finlandia en 2016 (expansion.com/ atosmacro.com, 2021) esto por consecuencia de un manejo corrupto de los recursos; como siempre se entienden las prioridades dentro del gasto de un país inmerso en una sociedad capitalista con políticas educativas neoliberales, la vieja historia: Abuso, injusticia, corrupción, ensanchando su procacidad.

La tabla anterior muestra algunas de las características que presentaron los proyectos educativos de tres sexenios desde el comienzo de los 2000, cabe destacar el sexenio de Fox, no por sus logros sino por la fundamentación trazada de manera implícita en su proyecto y que muestra el sendero marcado para las políticas educativas posteriores de la misma clase: “Procesos económicos capitalistas, Globalización y Transformaciones científicas tecnológicas” (Pérez, 2011) políticas neoliberales contextualizadas.

Se puede identificar claramente “un modelo formativo nutrido por la globalización económica, como proceso/estructura… que ha orientado la educación en México… usando un lenguaje técnico (en el mayor de los casos) de dudosa procedencia pedagógica: indicadores del desempeño, rendición de cuentas, estándares, competencias, aseguramiento de la calidad, integración vertical, reglas ISO09002 de calidad… etc.” (Moreno, 2021).

Dado lo anterior reconocer el paradigma imperante dentro de la educación es claro ya que se habla de: “las políticas educativas impulsadas por los organismos financieros cuya visión es el <<globalismo>> tiene esas reducciones en la percepción del todo, de la totalidad… imponiendo una política educativa, científica y tecnológica” (Moreno, 2021) entonces hablamos del modelo Reduccionista en la educación. Estos modelos han sido de mucha utilidad en el pasado, sin embargo, las problemáticas que atañen a la modernidad buscan seres humanos capases de resolver problemas, con sensibilidad, valores y desarrollándose integralmente.

Ahora bien, reconozcamos la etapa en donde nos encontramos: la globalización entrelazada con la evolución de las tecnologías y esta última desarrollada a través del tiempo por el capitalismo, al llegar a una cuarta revolución industrial, actualizando hasta el 2022 por el manejo de grandes cantidades de información donde “las reformas educativas inundaron las escuelas de un lenguaje pedagógico de dudoso origen educativo” (Moreno, 2021) llegamos a los tiempos de la Hipermodernidad (Lipovetsky, 2014):

“La edad moderna estaba obsesionada con la producción y la revolución, la edad postmoderna lo está por la información y la expresión.… la hipermodernidad se caracteriza por su culto a lo extremo, por su desmesura, por su <<siempre más>>. Se produce una transición del capitalismo al hipercapitalismo, del consumo al hiperconsumo, se habla incluso de <<turbo-consumidor>>. Nace una sociedad hiper que supera a lo post, y que se define fundamentalmente por recuperar la modernidad y las contradicciones de ésta… Lo hipermoderno es, en suma, una visión liberal del mundo teñida, eso sí, con algunas notas de cinismo y pesimismo-… y que no va más allá de un bosquejo sociológico de algunas percepciones de sentido común de lo que parece estar pasando si consultamos los medios de comunicación.” (Lipovetsky, 2007, citado en Alonso & Fernández, 2010, como se citó en Moreno, 2021)

No es fantasía afirmar que “la política educativa de la globalización es el escenario para guiar las prácticas pedagógicas, curriculares y evaluativas del periodo denominado como <<Hipermodernidad>> (Lipovetsky y Juvin, 2011) y su imaginario social formativo llamado <<Sociedad del Conocimiento, Información y el Aprendizaje>> (Dryden y Vos, 2012).” (Moreno, 2021)

Es cierto que “organizaciones como la OCDE, UE, OMC, UNESCO y Banco Mundial, se han convertido en escenarios fundamentales para la organización del conocimiento de la educación y han creado un discurso persuasivo sobre imperativos de la economía global para la educación” (Rizvi y Lingard, 2013., citado en Moreno, 2021) bajo esta semblanza, afirmaré como menciona Moreno (2021) “Los organismos internacionales de la globalización han lanzado como política educativa mundial el modelo curricular de Educación basada en competencias (MEBC) una evaluación estandarizada y una pedagogía de la productividad y el aprendizaje a lo largo de toda la vida”.

Con todo lo anterior en mente hablamos sobre un “modelo pedagógico productivista… que se inclinó por el crecimiento económico material del ser… donde el centro de la política educativa básica gira alrededor de la evaluación estandarizada, en vez del desarrollo humano, el cual se le confunde con desarrollo cognitivo… donde el *aprender a ser* y *vivir* no están especificados” (Moreno, 2021) dentro de la práctica educativa.

Esto nos da por consecuencia una oferta educativa poco atractiva, que no brinda o aporta a sus ciudadanos el desarrollo integral de capacidades o habilidades, para poder atender las problemáticas mencionadas al principio, tampoco ayuda a construir formas de pensar y cuestionarse (pensamiento crítico, reflexivo y valores) más allá del logro de aprendizajes y muestra de resultados.

A pesar de los intentos por incluir las emociones y valores, aun seguimos trabajando con un currículo por competencias o enfatizado en el alcance de habilidades, lo cual no sería tan malo sí no se tuviera un ranking o categorías de desarrollo que producen una lógica perjudicial para la sociedad donde: “existen infancias inferiores que fracasan y otras que son superiores y destacan” (Direccion General de Desarrollo Curricular, 2022) planteada esta diferencia se podría comprender la división en la población.

Si entendemos que ahora “la escuela se define como un universal donde se construye lo común desde la diversidad. En ella confluyen y se manifiestan, en su tensión y **complejidad**, el efectivo ejercicio de los derechos de las niñas, niños y adolescentes, y la búsqueda de solución a las desigualdades que articulan exclusiones con base en la clase, el género, la sexualidad, la nacionalidad, la etnia, la capacidad y la edad.” (Bilge, 2019., citado en Dirección General de Desarrollo Curricular, 2022) ya no es necesario buscar únicamente un desarrollo de capacidades para la competencia, aunque claramente su legado dejará una huella social. Ahora con la Nueva Escuela Mexicana (NEM) se busca un desarrollo integral.

Después de este análisis y valoración sobre tres sexenios (2000-2018) es necesario construir o elaborar propuestas que centren el problema educativo en la importancia del desarrollo integral, en comparación con lo antes mencionado sobre las competencias, aptitudes y capacidades de los gobiernos de aquel entonces.

He ahí la primera parte de esta comprensión y descripción del problema educativo: ¿educar para competir o para pensar? Entonces ¿conviene hablar de aplicación mecánica de fórmulas o pensamiento matemático? ¿enseñanza, adiestramiento o descubrimiento y desarrollo? Al menos está claro que estos movimientos dentro del tablero de la educación no se proyectan a un desarrollo sino a una adquisición, entonces todo lo que trajeron ¿Qué fue? ¿memorización, análisis de procesos, comprensión de conceptos o repetición de sus definiciones?

1.2. La educación compleja por naturaleza.

Ahora bien, comencemos pensando que "la educación no es una simple cuestión de ingeniería social. Por más que busquemos la piedra filosofal de la calidad o el mecanismo que hay que manipular, son muchos los factores y muchas más las combinaciones entre ellos que podrán explicarla" (De Ibarrola, 2012:65 citado en Moreno, 2021) considerando esto cierto, podríamos preguntarnos ¿qué aportes tiene la educación matemática al desarrollo integral de las personas? "La visión instrumental de la evaluación estandarizada que confunde el desarrollo cognitivo con el desarrollo humano" (Moreno, 2021) comenta:

- "65.9% de los estudiantes mexicanos de 15 años carece del razonamiento matemático suficiente para desempeñarse en la sociedad del conocimiento según las pruebas nivel 2 de pisa". (De Ibarrola, 2012., citado en Moreno, 2021)

Desde una visión crítica y reflexiva de la estandarización contenida en el concepto de evaluación se reduce al ser humano a un cúmulo de capacidades, habilidades y competencias, a sabiendas de ser más que eso, ya que debemos reconocerlo también como un entramado de deseos, voluntades, emociones y sentimientos que en su dimensión cognitiva pueden alcanzar procesos superiores como la reflexión e incluso la creación de profundas preguntas como: "¿Quiénes somos?, ¿Por qué estamos aquí? ¿Hacia dónde vamos?... etc." (Moreno, 2021) estas encarnan una consciencia más desarrollada que únicamente el logro en la adquisición de capacidades.

Es importante mencionar que han llegado propuestas para reformar el currículo (en nivel básico, medio y medio superior) las cuales pretenden, como hemos visto, tratar de establecer cambios en los procesos cognitivos, lo cual es totalmente válido, útil y conveniente para adquirir un buen desarrollo, pero dentro de la práctica educativa la proyección de este currículo no abandona esa visión instrumentalista de la enseñanza de las matemáticas produciendo ciertos vicios que desencadenan algunos problemas:

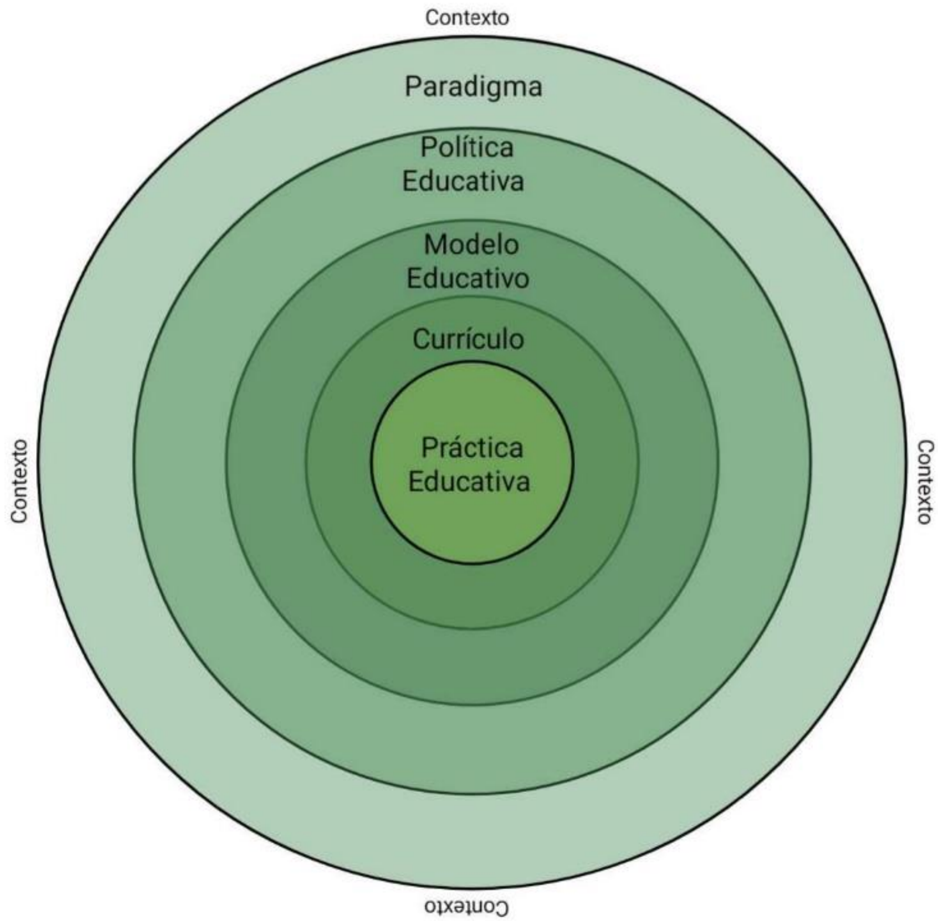
> "Incluso en los tiempos de Thorndike, algunos educadores como Brownell estaban advirtiendo de los peligros de utilizar los ejercicios y la práctica como técnica primordial de enseñanza, porque creían que los niños llegarían a entender las matemáticas como un conjunto de datos y procedimientos que no se relacionaban entre sí, y no como un conjunto de estructuras de conocimiento complejas y relacionadas… la significatividad de la enseñanza no solo dependerá de la relevancia de las habilidades de cálculo en las tareas de la vida real, sino también en la medida en que se encuadrara en la integridad del contenido de las matemáticas" (Resnick, 2010)

Al respecto conviene decir que en grandes conferencias como la de 1959 en Woods Hole (Massachusetts) y otra en Cambridge (Massachusetts) en 1963 se reunieron pedagogos, físicos, matemáticos y psicólogos que manifestaba una creencia en común: "… las matemáticas suponen un logro intelectual emocionante, y que esta emoción se podía y se debía trasladar a los niños, incluso a los escolares muy jóvenes." (Resnick, 2010) por esto el reconocimiento de la emoción en la construcción del ser (estudiante, alumno, niño, niña joven) entrelazado con un proceso cognitivo comienza a tomar sentido.

En la búsqueda de un desarrollo integral dentro del ámbito de la enseñanza matemática, el alumno debería comenzar a despertar “una formación del carácter humano donde sus valores, actitudes, mentalidad apreciación le permiten aprender por sí mismo y para sí mismo” (Katagiri, 2016) para aclarar este punto cabe mencionar que los alumnos no hacen esto, incluso vale la pena recordar que como se comentó en la cita de Resnick las matemáticas no son solo un conjunto de datos y procedimientos, que dentro de las prácticas docentes influenciadas por este modelo pedagógico productivista guiado por “la presión de las escuelas para producir rápidamente estudiantes cuyos conocimientos matemáticos estuviesen a la altura de la nueva tecnología de la era espacial” (Resnick, 2010) reducen y limitan el tan buscado desarrollo integral.

Para poder entender el currículo y por consiguiente la práctica educativa después de este breve análisis, que incluye un poco de política educativa y sus modelos generales, acudimos al siguiente diagrama que podría sintetizar y representar esa relación compleja, mostrando como el contexto sitúa paradigmas y viceversa, donde a su vez este ayuda a establecer políticas educativas con fines a seguir un proyecto de gobierno y donde se fijan los modelos educativos que dan pautas a la elaboración de currículos con los que se permean las prácticas educativas.

Figura 1



Aunado a lo anterior, dentro del contexto se reconoce una naturaleza compleja, donde la relación entre diferentes elementos o partes "… da origen a relaciones no lineales… En el devenir de esta forma de relación aparecen propiedades emergentes… Los problemas y procesos naturales y socioculturales que constituyen la realidad evidencian, además de esas relaciones no lineales, fenómenos de autoorganización que derivan en momentos de estabilidad efímera, no permanente." (Lara-Rosano F. d., 2017) por lo cual el cambio no solo debe escribirse en los currículos, apuntando a las verdaderas necesidades de la sociedad, sino que, es necesario llevarse a la práctica educativa de una manera real y concreta.

Por esto se debe de pensar diferente (complejamente) en la práctica educativa, donde el desarrollo integral de los estudiantes reconoce distintas maneras de aprender y disímiles niveles de desarrollo en un tiempo diferente, considerando no solo las habilidades cognitivas sino relacionándolas estrechamente con los valores, las emociones, las aptitudes, la mentalidad y el carácter.

Caer en una práctica educativa reduccionista conduce a asumir patrones o a mantener creencias infértiles que contribuyen a las diferentes problemáticas que impiden salir avante en esta búsqueda del desarrollo humano. A continuación, presento un ejemplo de estas creencias con la exposición de la maestra Leticia Iturbe Meza[1] quien escribió acerca de su experiencia entorno a la Reforma educativa de 1993 y la enseñanza de las matemáticas en cuanto al proceso de actualización:

> "… ¿Cómo se cambiarían las prácticas de enseñanza de los profesores en servicio?, ¿Cómo formarlos en este nuevo enfoque?, ¿era suficiente *actualizarlos* en las nuevas ideas o sería necesario romper con nociones y conceptos presentes acerca de las matemáticas? En ese entonces seguramente se pensó que el esquema de <<capacitación en cascada>> era la mejor solución … Me correspondió reproducir el taller (de especialistas) con maestros de Oaxaca y el Estado de México. En cada uno de estos grupos reflexionamos acerca de la forma en que tradicionalmente habíamos enseñado las matemáticas y la nueva manera que ahora se nos proponía, basada en los resultados de investigaciones acerca de los procesos de pensamiento del niño y de la didáctica de las Matemáticas. El entusiasmo estaba presente en muchos de estos profesores, pero también había inquietud, desconfianza, dudas, miedo. Finalmente regresé a mi sector escolar en Iztapalapa… ahí… en la última etapa del proceso de capacitación, ahora en mi papel de maestra de grupo, pude

[1] Profesora de educación primaria (BENM). Licenciada en Educación (UPN)

comprobar que aquello que tanto inquietaba a los participantes de los talleres había sucedido: una buena parte de la información y reflexiones acerca del nuevo enfoque de Enseñanza de las Matemáticas se había deformado, perdido o transformado en el camino y lo que ahora se nos proponía a mis compañeros maestros y a mi distaba mucho de lo que los expertos habían planteado… Lentamente las prácticas empezaban a cambiar. Sin embargo, algunos pensaban que era exactamente lo mismo pero dicho con otras palabras y continuaban su trabajo sin cambiar nada, ignorando las nuevas propuestas y materiales". (Meza, 2009)

Ahora bien, de esas propuestas en cuanto a modelos educativos y currículos distingamos el núcleo del fenómeno educativo reconociendo en la práctica el verdadero movimiento que contribuye a esa transformación, por lo cual observemos a los dos principales actores: los alumnos y maestros[2], con el fin de entender ese fenómeno educativo (enseñanza-aprendizaje) y de manera particular en la educación matemática.

Veamos entonces, como comenta Isoda; sí un alumno puede llegar a percibir la belleza de los números y operaciones con su trascendencia en lo real, experimentar la sensación de razón con el peso de la verdad, así como despertar su creatividad y una formación del carácter humano en un sentido profundo, seguro se contribuirá a un desarrollo humano integral, que invitará al alumno a desear aprender conocimiento por sí mismo "siendo posible experimentar una verdadera emoción y disfrute de las matemáticas" (Katagiri, 2016).

Reconociendo la importancia en la capacidad de resolver problemas, la educación matemática no solo busca una estandarización de los conocimientos, sino también, un desarrollo creativo para contribuir a nuestro pensamiento y acción social.

[2] No se descartará, para evitar reducciones, la reflexión del papel de la comunidad y las familias, quienes forman parte importante de esto, aunque por ahora nos enfocaremos en los actores principales.

Entonces, hablemos de algunos conceptos como: generalización, pensamiento inductivo, deductivo, reversibilidad de pensamiento, identificación de patrones, abstracción, creación de nuevos algoritmos, descomposición, etc., estas son solo algunas capacidades cognitivas que desarrolla el pensamiento matemático, así como la creatividad, la emotividad, la belleza y lo sublime, la autoestima, el disfrute o satisfacción, etc. (Isoda S. K., 2016) así de amplio es la contribución de este ámbito a la vida de un estudiante, si el docente aplica de manera adecuada el estudio de las clases y no solo se centra en que se adquieran los conceptos y métodos para dar resultados sin un entendimiento más profundo de los procesos de desarrollo.

Dentro de esta visión holista y/o compleja la propuesta de "aprender matemáticas para formar niños que piensen y aprendan matemáticas por sí mismo y para ellos mismos" (Katagiri, 2016) permite la libertad dentro del proceso educativo, da cabida a un desarrollo no solo por competencias o funcionalista, sino que busca alimentar la emoción del cuerpo al relacionarse con estas ideas abstractas y esquemas complejos.

En México la oferta en educación matemática no ha permitido que los alumnos puedan desarrollar un interés genuino, ya que, al ser llevada a un terreno tan objetivo y frio con la evaluación para el logro de competencias o aprendizajes esperados, se vuelve poco atractiva, así también doblega la voluntad a un cúmulo de estándares que, al no ser cumplidos o alcanzados, desmoralizan y desmotivan a los estudiantes para continuar llegando (incluso) al punto de la deserción.

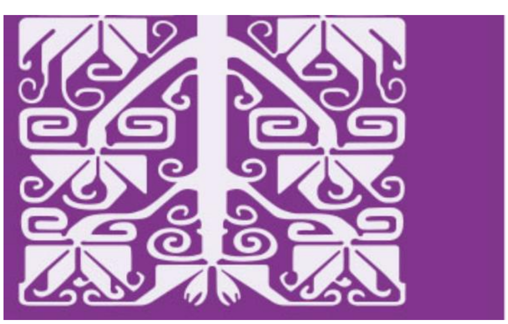
Dado los párrafos anteriores y la argumentación previa al identificar las políticas educativas, entendemos que los alumnos muchas veces son víctimas de las circunstancias de un currículo reduccionista, entonces en este punto cabe preguntarse ¿Qué hay que reconocer para comenzar a ayudar a nuestros estudiantes? Dado los diferentes niveles educativos este trabajo en particular busca apoyar a los alumnos y maestros de secundaria tanto en escuelas Técnicas como Generales.

1.2.1. Proporciones y Funciones.

Este trabajo considera que la oferta matemática en México no ha podido cubrir las demandas tanto sociales como individuales; además busca presentar una didáctica diferente, donde el compromiso no está solo con el aprendizaje de todo un tema, sino más bien con la comprensión básica dentro del tópico de proporciones y funciones lineales positivas, brindando una idea al docente para su próxima planeación o acercamiento al tema, de esta manera comencemos definiendo los conceptos matemáticos.

Según el Algebra de Baldor (1983) las razones son comparaciones entre dos cantidades que pueden ser de la misma o diferente naturaleza, usualmente expresadas como una división, sin embargo, las propiedades de una razón son diferentes a la de una fracción. Cabe señalar que una fracción puede ser proporcional, igual que una razón, sin embargo, la fracción y la razón tienen características diferentes, aunque parezcan lo mismo. Claro que podríamos utilizar la representación de una fracción para una razón, siempre que recordemos que las razones comparan magnitudes y las fracciones números enteros.

Ahora, para el tema de proporciones en matemáticas, Baldor (1983) habla de igualdades entre dos razones, es decir que las razones llevan a las proporciones y no se ven como dos temas aislados totalmente. Dado que esta propuesta busca ayudar a los docentes en servicio bajo el modelo de la Nueva Escuela Mexicana, recuperaré algunos puntos del libro de secundaria de primer año de la colección Ximhai, *Saberes y pensamiento científico* (Secretaría de Educación Pública, 2024) que hablan sobre proporciones:



Las razones se utilizan para describir la relación entre conjuntos de datos, dichos valores se obtienen a partir de un cociente, el cual determina si son o no proporcionales. Estos valores se pueden representar en una tabla y en el plano cartesiano.

Imagen tomada de SEP, 2024, (p.159)

El libro de la SEP de la colección Ximhai, continúa en la lección de proporcional y no proporcional con esta aclaración sobre lo que es una proporción y al igual que Baldor (1983) no se conciben como dos temas aislados:

> Una razón es la comparación de dos cantidades, mientras que la proporción lo es entre dos razones, ambas relacionadas con un número constante llamado *valor unitario*. En el caso de las relaciones, éstas pueden ser o no proporcionales: esto en relación con la forma en la que se incrementa cada uno de los valores. Cuando se calculan varias proporciones conviene registrar los resultados en una tabla.

Imagen tomada de SEP, 2024, (p.160)

Dado el párrafo anterior se entiende que, si bien el tema de razones se presenta como un concepto matemático, la idea de proporciones no esta aislada de estos conceptos previos; de esta manera continúa con las expresiones matemáticas más comunes dentro del libro:

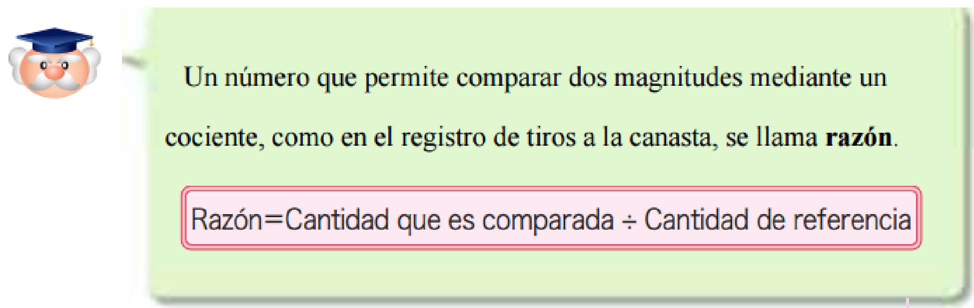
$$\frac{a}{b}, \qquad a{:}\,b, \qquad a/b$$

La forma en que se pueden describir es "a es a b". Donde a es antecedente y b es consecuente, dando como resultado c que es el cociente. Algo que me parece esclarecedor dentro de este libro es la distinción que hace entre fracción y razón, ya que una fracción relaciona dos números, pero una razón compara magnitudes, es decir, relaciona los elementos formados por un valor numérico y una unidad, por lo cual aclara que una razón no siempre es sinónimo de fracción. (p.160)

Fracciones	Razones
Un medio $\frac{1}{2}$	100 (valor numérico) centímetros (unidad) son a 1 metro (100:1) $\frac{100 \text{ centímetros}}{1 \text{ metro}}$

(Imagen tomada de SEP, 2024, p. 160)

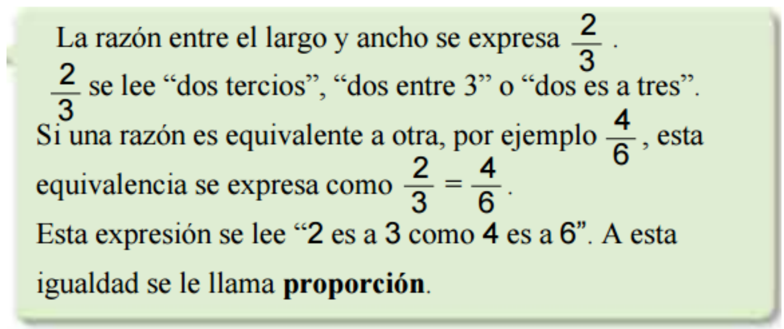
Ahora bien, a continuación, se mostrarán algunas imágenes para ilustrar y comparar qué es una razón y proporción bajo el enfoque japones, esto con el fin de que el docente identifique las descripciones de este concepto entre el libro de Ximhai y la Lesson Study:



Un número que permite comparar dos magnitudes mediante un cociente, como en el registro de tiros a la canasta, se llama **razón**.

Razón=Cantidad que es comparada ÷ Cantidad de referencia

Imagen tomada de Masami y Ávalos, 2012. Tomo 5 (p.59)



La razón entre el largo y ancho se expresa $\frac{2}{3}$.

$\frac{2}{3}$ se lee “dos tercios”, “dos entre 3” o “dos es a tres”.

Si una razón es equivalente a otra, por ejemplo $\frac{4}{6}$, esta equivalencia se expresa como $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$.

Esta expresión se lee “2 es a 3 como 4 es a 6”. A esta igualdad se le llama **proporción**.

(Imagen tomada de Masami y Ávalos, 2012. Tomo 6 (p.33)

Los japoneses en su metodología Lesson Study definen a las proporciones como cantidades que varían juntas y pueden representarse de manera gráfica, consideremos que ellos trabajan paulatinamente desde la primaria los conceptos de razón y añaden las proporciones, entonces no difiere en gran medida su visualización sobre razones y proporciones de la manera en que lo vemos en México, sin embargo, la adaptación al currículo mexicano se presenta con la distinción en el nivel secundaria, así como con problemas apegados a nuestro contexto mexicano urbano.

Hay que considerar que a pesar de que esta metodología se ha llevado a cabo en otro país de Latinoamérica (Chile), las diferencias entre países de este continente son amplias, desde el currículo hasta los hábitos de enseñanza, mientras que en Japón niños de quinto de primaria comienzan con razones y en sexto proporciones, en nuestro país las abordamos claramente hasta primero de secundaria.

Bajo diversas investigaciones sobre el tema de razones y proporciones (véase Piaget e Inhelder (1975, 2021) , Rafael Moreno León (2023), Mochón Cohen Simón,(2012)) así como la amplia e importante experiencia de docentes en educación matemática de la UPN 092, como el profesor Arturo Bazán, Enrique Vega y otros profesores de esta área, se comenta que usualmente muchos estudiantes al llegar a la universidad aun no piensan de manera proporcional, por lo cual es fundamental analizar los métodos de enseñanza desde niveles básicos como la primaria y secundaria.

Por otra parte, en cuanto a las funciones lineales, este trabajo abordará de manera específica las funciones lineales positivas. Por ahora comencemos con un poco de historia en funciones. Bien sabemos que el término de función tardó siglos en ser concretizado y representado mediante la clásica expresión $f(x)$, por lo tanto, sería difícil poner una fecha específica, así que es prudente comenzar por los primeros reconocimientos. Como comenta Raúl Rojas González (2023) en Grecia y Babilonia se operaba con funciones de manera implícita mediante tablas; sin embargo, fue hasta la invención de la geometría analítica, en el siglo XVII donde se encontraron representaciones más claras de funciones especificadas por un valor de entrada (x) y uno de salida (y). (p.141)

Nicolás Oresme (1320-1382) fue un pionero en utilizar este tipo de representaciones, ya que utilizó para sus estudios sobre dinámica dos dimensiones: la longitud y la latitud en lo que bien podría considerarse una gráfica de funciones, con el fin de representar el movimiento de un objeto, esto servía para orientar cómo los navíos pueden determinar su posición sobre la tierra, así mismo se podría aplicar sobre un plano, cabe mencionar que Oresme no llegó a escribir sus ideas de manera algebraica, como lo haría Descartes (p.142).

Continuando con algunos comentarios que realizó Raúl Rojas González (2023) en su libro de: "El lenguaje de las matemáticas: historia de sus símbolos", se comenta que con Descartes y posteriormente en el refinamiento de la geometría analítica, ya no se hablaría de longitudes y latitudes, sino ahora se llamarían ordenadas y abscisas. Cabe destacar que al valor de x se le llama ordenada porque se identifica con algún valor de la línea *ordinata*, esto es: un eje con valores sucesivos de x, al valor $f(x)$ se le llama la abscisa, porque su valor se representa en la línea *abscissa*, que quiere decir en latín línea separada. (p.142)

Sin embargo, la representación de $f(x)$ ocurrió hasta que Leibniz y Johann Bernoulli, entre las cartas que se enviaban, donde dialogaban todo tipo de temas matemáticos, comenzaron a utilizar este nuevo concepto. Es así como Leibniz propuso usar el término función, pero fue Bernoulli quien comenzó a abreviar función de x con una φ seguida de x, y para el año de 1673 aparece el término función. Es Leibniz quien en su manuscrito "el método de tangentes inversas, o acerca de funciones" utiliza la expresión "relación" refiriéndose a la conexión entre la ordenada y la abscisa de una función en su grafica. (p.143)

Después de la fecha antes mencionada esperaremos hasta 1718 donde Bernoulli dará un informe referenciando por primera vez el concepto de función diciendo:

> Definición. Llamamos función de una magnitud variable a una cantidad obtenida de cualquier manera que sea a partir de esta magnitud y de constantes. (Gonzalez, 2023)

Pero Euler discípulo de Bernoulli, dio una notación más general diciendo: "Una función de una cantidad variable, es una expresión analítica compuesta de cualquier manera utilizando aquella variable y números o constantes." Sin embargo, Euler aceptó que una función de x puede tener 2 o más valores para cada x. En ese caso, el valor de la función sería un conjunto de valores. (p.144)

Debemos de recordar que para ese entonces todavía no existía la teoría de conjuntos que llegaría con Georg Cantor casi a finales del siglo XIX, por lo cual Euler se encontraba limitado para poder expresar esta idea, incluso la notación tardó en difundirse, ya que como es bien sabido la comunidad científica es reservada en los usos de teorías y paradigmas, algunos incluso dogmáticos o cabezas duras.

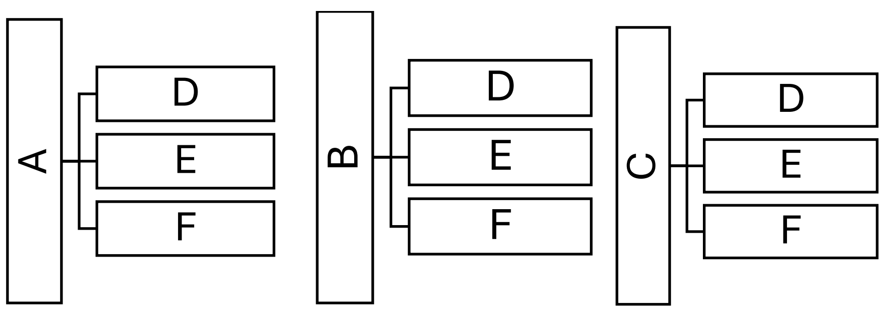
Después de este pequeño recordatorio histórico vayamos a una definición más pragmática:

“Se entiende al concepto de función como: Sean A y B dos conjuntos. Una función de A en B es un conjunto f de parejas ordenadas de $A \times B$ con la propiedad de que cada elemento de A es primer componente de una pareja ordenada, y para todo $a \in A$, si (a, c) pertenecen a f , entonces $b = c$. El conjunto A de los elementos que son primeros componentes en las parejas ordenadas de una función se llama *dominio* de la función, el conjunto B se llama *codominio* y al conjunto de elementos de B , que son segundo componente en las parejas ordenadas de la función, se le llama *imagen del dominio de la función*.” (Rangel, 2008)

La definición anterior se proporciona en secundaria o incluso en preparatoria. Pero esta definición no nos dice mucho a primera instancia, puesto que, si no conocemos el tema y no tenemos conocimientos previos para abordar ciertas palabras, no vamos a entender. Es algo muy común que, cuando los adolescentes comienzan a ver situaciones más abstractas, se desmotiven y aburran, aunado a la consideración del tiempo que tienen los profesores para enseñar estos temas. Sabemos que después de las definiciones vienen los ejemplos, pasamos a las prácticas con algunas otras actividades y al final viene la evaluación. Es difícil que los alumnos puedan entender este tipo de conceptos tan abstractos sin una práctica sobre su pensamiento matemático o incluso su capacidad interpretativa.

Podríamos repetir la definición anterior un número determinado de veces hasta memorizarla, pero eso no asegura que estemos entendiendo o interpretando de manera adecuada lo que esa definición significa. En México, bajo el análisis que hemos visto de las propuestas educativas con Fox, Felipe Calderón y Peña Nieto, podemos observar que lo más importante era la capacidad de competencia para utilizar las herramientas del conocimiento a nuestro favor en una era globalizada. Habría que suponer que las reformas antes mencionadas presentaron la aparición de propiedades y fenómenos emergentes[3] en el contexto educativo, donde las interacciones concatenadas entre políticas educativas dan como resultado propiedades y fenómenos emergentes que ninguna de sus propuestas aisladas tendría la fuerza de presentar.

Básicamente si algún profesor en secundaria hubiera dicho la definición anterior, parcamente a los alumnos hasta memorizarla, si hubiera puesto los suficientes ejercicios e implementado la evaluación, con eso tendría suficiente para decir que los alumnos saben funciones. Pero las cosas no son tan sencillas como parecen, para la comprensión de problemas que requieren un análisis de dos variables o de “dos cosas que se relacionan”, es difícil que los alumnos y alumnas puedan entender cuál es la relación que comparten. Hay muchos ejercicios que hablan sobre: Un Nombre A, B, C le corresponde otro apellido D, E, F donde cada uno compartirá una relación, es decir:



De igual forma para cada apellido corresponderán los mismos esquemas, pero ahora con cada nombre, al principio esto puede resultar engorroso. Asimismo, podría continuar la definición, con sus respectivos ejemplos para depués hablar del producto cartesiano, teoría de conjuntos, graficas de funciones, etc.; pero vale la pena detenerse a reflexionar si esta es la manera más eficaz para aprender y desarrollarse.

Lo cual es todo un reto para docentes que tienen a su cargo a diferentes estudiantes con distintas maneras de interpretar y aprender, así como desiguales tiempos de desarrollo.

[3] Véase el subcapítulo 2.2

Añadiendo a esta titánica labor el hecho de que los alumnos y alumnas no solo deben de aprender conceptos, también tienen que desarrollar sus capacidades cognitivas. El interés por realizar esta propuesta pedagógica radica en la preocupación por abstraer las ideas de razón, proporción y función que, bajo la experiencia de mi asesor, así como diversos profesores del campo de educación matemática, muchos jóvenes adultos aun no terminan de comprender.

Es bien sabido que, en matemáticas, México no resulta ser un país destacado ya que nos encontramos debajo de los primeros 20 lugares, cabe preguntarse entonces, tras los 6 años de la última reforma educativa: ¿funcionaron estas políticas neoliberales con tendencias al desarrollo de competencias? ¿para qué educamos, para aprender o desarrollar? y en particular ¿para que aprender funciones? ¿se aprende para mostrar en un examen que se conoce sobre el tema? O ¿se va a la escuela a desarrollar capacidades que nos permitan seguir aprendiendo y entendiendo a lo largo de nuestra vida? ¿esto nos permite aprender y desarrollarnos para nosotros y por nosotros mismos o para atender las demandas capitalistas más allá de las sociales?

Durante la redacción de este trabajo, se presentaron observaciones muy valiosas por parte de expertos en educación matemática, comentando y cuestionando sí tras esta propuesta los y las estudiantes podrán resolver “todo tipo de problema que involucre el tema de funciones lineales y proporciones”. Pretendiendo no extender este punto partamos de la base de otras definiciones elementales que ayudarán a encaminar esta propuesta pedagógica para enseñar proporciones e introducir a las funciones lineales desarrollando (hasta cierto punto) ideas y pensamientos matemáticos.

Este trabajo adopta un paradigma desde la complejidad social, de manera particular en el ámbito educativo, se inclina hacia una integración de teorías cognitivas del aprendizaje (psicogenética, sociocultural y cognitiva) donde cada una de ellas comparte relaciones complejas complementarias entre sí, respetando los límites conciliatorios que en cada una pueda existir.

Comentando lo anterior Schunk (1997) citando a Schuell (1986) dice lo siguiente:

> “Aprender es un cambio perdurable en la conducta o en la capacidad de conducirse de manera dada como resultado de la práctica o de otras formas de experiencia”. Continúa Schunk (1997) “un criterio para definir aprendizaje es el cambio conductual o cambio en la capacidad de comportarse. Empleamos el término <<aprendizaje>> cuando alguien se vuelve capaz de hacer algo distinto de lo que hacía antes. Aprender requiere el desarrollo de nuevas acciones o la modificación de las presentes… el aprendizaje es inferencial, es decir, no lo observamos directamente, sino sus productos…surge sin revelarnos en forma abierta cuándo ocurre el aprendizaje.” (p.2)

Ahora bien, el desarrollo lo definiremos como un proceso gradual de cambios en las estructuras físicas y mentales, producto de la interacción del sujeto con su medio y su estructura genética o biológica. Esta definición es una conclusión general que describe lo que autores como Piaget, Vygotsky y Ausubel comentan en varias de sus obras más populares y que hasta la fecha siguen siendo útiles y fomentan las bases para el estudio de diciplinas como la pedagogía y algunos tópicos de la psicología.

Una vez dicho esto, es claro que para lograr un desarrollo integral como lo propone la Nueva Escuela Mexicana (NEM) y dejar atrás los objetivos por competencias, necesitamos considerar al aprendizaje y al desarrollo como dos nodos conectados entre sí, cuyo proceso debe ser estimulado paulatinamente. Como veremos más adelante la Lesson Study o el Estudio de las Clases, es un método lento pero seguro en el proceso de aprendizaje y desarrollo, por lo cual este trabajo busca brindar una pequeña contribución a las prácticas docentes.

Sería osado decir que al final de esta planeación los alumnos y alumnas dominarán todas las funciones, sin embargo, aportará un acercamiento a la construcción de proporciones y funciones, así como desvanecer de manera paulatina, si es posible, no solo la “educación inyectiva[4]” sino una serie de prácticas que traen consigo los profesores, donde la memorización y los ejercicios son la muestra clara de conocimiento, sin considerar el proceso que los niños, niñas y jóvenes realizan para aprender y desarrollarse.

Claramente al final de este trabajo, se buscará fomentar una serie de conceptos matemáticos que ellos descubrirán, acompañados estrechamente por el docente, en preguntas que se elaborarán para guiar al estudiante hacia donde nosotros deseemos llevarlo. Preguntas cómo ¿Qué deseas hacer ahora? O diálogos y discusiones entre sus compañeros y el docente serán de apoyo para estimular un desarrollo más amplio.

Sabemos que, de manera particular hoy en día, bajo los años de experiencia de varios docentes, los estudiantes participan menos, se distraen más fácil, así como muestran un claro desinterés por temas educativos, esto debido a las consecuencias que trae consigo la hipermodernidad en un mundo conectado por redes sociales e internet. Para respaldar esta opinión simplemente pregunte a cualquier docente de nivel secundaria, medio y superior, esta aseveración.

Llegados hasta este punto, mi interés por estudiar esta metodología y este tema en particular sobre proporciones e introducción a funciones se debe a experiencias propias y con alumnos y alumnas que he tenido la oportunidad de conocer a lo largo de 7 años de docencia en México y otros lugares, empezando por los primeros niños que tuve a mi cuidado; mis hermanos. En ellos pude observar diferentes formas de expresarse, interpretar y actuar, los errores que podía ver en sus tareas no distaban de los míos a su edad. Y llegada la adolescencia, así como la adultez pude observar en mis padres, así como

[4] Los japoneses utilizan este término para referirse a la educación tradicional o bancaria. Haciendo alusión a una inyección o aplicación de conocimientos de manera pasiva en los estudiantes.

compañeros y otras personas, vacíos lógicos que no sabría ni siquiera hoy en día como explicar de manera clara, pero que, a pesar de esta limitación estoy segura de que se relaciona con estructuras mentales, donde entender que la relación de variables tiene un efecto directamente proporcional, mostrando así que esta forma de pensar es un conocimiento importante.

1.2.2. Docentes.

En este punto llegamos al análisis y valoración sobre: el docente, donde también se puede entender el fenómeno educativo en diversos ángulos. Para comenzar, cabe señalar que; la elección de esta profesión se ha tomado a la ligera. En una videoconferencia expuesta en el 2018 llamada: “Política de formación docentes en América Latina y el Caribe”, la Dra. Denise Vaillant presenta evidencia sobre el análisis de la formación docente con relación a los avances de siete países: Australia, Corea del Sur, Cuba, Finlandia, Inglaterra, Provincia de Ontario- Canadá y Singapur. En el estudio de esos siete casos se obtuvieron buenos resultados globales en el sistema educativo, vinculándose con una exitosa preparación para la práctica docente.

A manera de **reseña** y de forma sintetizada se presenta la siguiente información sobre la videoconferencia:

Realizando un análisis del modelo pedagógico y el modelo de gestión de la formación inicial, el común denominador de los casos señala: gran valoración social de la educación, atención a prácticas, preocupación simultanea por aspectos disciplinarios, teóricos y prácticos así como la vinculación con el sistema escolar; cabe mencionar que en este punto, estos aspectos mostraron una importancia sustancial para la obtención de buenos resultados, todos ellos son de alguna manera los problemas que existen en países latinoamericanos y que no se han logrado afrontar, tales como: la organización burocrática de la formación, el escaso vínculo con la escuela, el divorcio entre teoría y práctica así como la fragmentación del conocimiento, como se mencionan en la conferencia, todos ellos dan lugar a la contraposición de resultados.

En América latina la formación docente presenta un problema complejo dadas sus políticas costosas, la diversidad de actores y el impacto a largo plazo, ya que en el proceso de convertirse en docente intervienen estos factores, además de las expectativas del candidato, su formación inicial, el primer año de ejercicio profesional y su desarrollo profesional continuo; "*lo que hace un docente en el aula no es muchas veces lo que le dicen los libros de pedagogía*", así lo expresa la Dra. Denise, mencionando que en la mayoría de las ocasiones replican el modelo que vivieron siendo alumnos.

También se menciona en esta complejidad las dimensiones de las políticas docentes donde los componentes se encuentran en: la atracción de buenos candidatos hacia la docencia, una formación inicial de calidad, favorecer un desarrollo profesional continuo, contar con una carrera docente y condiciones de trabajo adecuadas, conseguir buenos docentes en las escuelas desventajadas, así como monitorear sistemáticamente la calidad de la docencia.

Ahora bien, cuando se piensa en la formación inicial, dentro de la conferencia se abordan cuatro aspectos: el formato institucional, el diseño curricular, los formadores de futuros y las prácticas. Lo que concierne al formato institucional no está determinado ya que no hay un único formato y mencionan que, más bien, hay ingredientes que están presentes en un buen modelo de formación docente, además de que, en esta tarea de enseñar, los criterios de admisión para docentes se basan más en el promedio, así como estudios definidos entre 4 y 5 años (se menciona la ampliación de este criterio para algunos países como Finlandia o Portugal).

Con respecto al Diseño Curricular (DC) para la formación en nivel preescolar y primaria el modelo es concurrente, para nivel secundaria los modelos son concurrente, consecutivos o ambos, se menciona que la tendencia actual apunta a la reflexión sobre la práctica, la experimentación y la investigación, así también, en algunos países se encuentra una tesis basada en un proyecto de investigación. Las tendencias dentro del DC miran a las capacidades que un futuro docente debe tener, así como proyectos interdisciplinarios[5] para superar la fragmentación y los contenidos débilmente estructurados y desintegrados.

Los formadores de futuros docentes presentan un conjunto amplio y variado de profesores que enseñan a sus estudiantes a la vez que enseñan sobre la enseñanza; la tendencia internacional señala la importancia de una selección rigurosa de los formadores de futuros maestros y profesores, no hablamos solamente del modelamiento para transmitir prácticas de enseñanza, sino, *hacer explícitos los propósitos de la formación*, además de promover una línea de investigación cualitativa basada en la narrativa (autoestudio).

A lo largo de los programas dentro de la formación inicial docente se hablan de las prácticas en centros educativos, en este aspecto la tendencia marca una superación del desencuentro entre la formación y dichas prácticas, en los siete países hay orientaciones para los docentes referidos en observación de trabajo en laboratorio, análisis de materiales y revisión de situaciones prácticas (diversidad de prácticas).

Se menciona de manera breve un desafío que actualmente tienen los profesores: <u>los ambientes de aprendizaje</u>, se muestra una tabla con los conceptos espacio y tiempo, donde el mismo espacio en tiempo asincrónico habla de formación en laboratorios y en diferente espacio en ese tiempo a través de plataformas virtuales o de dispositivos móviles,

[5] Aunque bajo la perspectiva de este trabajo "un punto de vista metateórico no positivista, ni reduccionista sino holista" (Lara-Rosano F. d., 2017) implica hablar de la Transdisciplina.

mientras que en tiempo sincrónico con el mismo espacio es en universidad o la escuela y diferente espacio en ese tiempo por videoconferencia, chat o mundos virtuales.

Actualmente los problemas a los que se siguen enfrentando los sistemas educativos en Latinoamérica es la baja formación de quienes ingresan a estudios pedagógicos, tratando de dar a esta situación una respuesta emergente con selecciones más exigentes, la baja calidad de procesos formativos, desajustes al currículum, poca orientación a la práctica, debilidades de formadores, metodologías tradicionales y escolarizadas han tratado de combatirse con cambios curriculares, en la formación de maestros primarios sin especialización se ha tratado de introducir especializaciones y en cuanto a la dispersión de la oferta y crecimiento desregulado de la oferta privada se han llevado a cabo mecanismos de acreditación y formulación de estándares de Formación Inicial Docente (FID).

En ese aspecto se vuelve a señalar la complejidad de la formación docente en constante movimiento, donde la investigación sobre la formación es muy amplia a niveles internacionales y señalando evidencia acerca de orientaciones, principios y prácticas asociadas a buenos resultados, se indica que no existe receta, pero sí ingredientes de una buena receta.

Con respecto al anterior punto, haciendo un paréntesis, desde mi perspectiva como alumna y docente, acorde al desarrollo de mi trabajo de investigación apoyo la idea de cambio al ingrediente principal; ¿cuál sería este? Y ¿qué pasaría? En mi opinión una reconsideración dentro del paradigma metodológico o de la didáctica en la enseñanza-aprendizaje, sería el ingrediente principal; desde donde múltiples cambios podrían ser considerados como una serie en cadena. Claro que esta propuesta ya ha sido tratada desde años atrás (en los noventa) y considerando la situación actual del mundo.

Una modificación en este aspecto no es solo una necesidad sino una urgencia, el planteamiento o la concretización de esta reconsideración es algo que se debe de trabajar por un principio como una propuesta y en consecutiva como un trabajo colaborativo, se cierra el paréntesis.

En resumen y respondiendo a ciertas preguntas que se hacen a la Dra. Denise (por parte de algunos colegas) al final de su conferencia, la formación docente tiene una agenda pendiente, donde la regulación para los individuos que ejercen la profesión se traduzca en políticas de estado con reformas educativas que respondan a los retos emergentes y a dicha agenda; aunque es importante señalar como lo hace la doctora que cualquier cambio en este aspecto requiere un tiempo de por lo menos 5 años.

También se marca que los contenidos de formación son homogéneos y no contemplan la diversidad de situaciones (rurales) en este sentido habría que buscar heterogeneidad para superar cierta rigidez en los contenidos. Con respecto a los nuevos escenarios y las tecnologías hace falta claramente un modelo de preparación docente para su uso, ya que ha quedado respaldado con la experiencia de que muchos, a pesar de ser nativos digitales, no cuentan con las capacidades para dejar de ser usuarios y empezar a incorporar pedagógicamente la tecnología en diferentes ambientes de aprendizaje.

Para concluir la Dr. Denise comenta que se necesita una adecuada selección de formadores que conozcan las escuelas no solo por su experiencia como alumnos sino por docentes, que hagan una reflexión sobre su práctica, además de buscar una alianza entre países mediante un trabajo colaborativo que potencialice esta temática de formación de formadores.

Se menciona que la docencia en las últimas décadas ha perdido capacidad de atracción, no son los jóvenes con mejores resultados educativos los que se interesan por los estudios docentes, ya que la importancia de la educación y del docente a pesar de ser un discurso generalizado, al momento de caer en la práctica, no se traduce en condiciones laborales adecuadas para los docentes y una falta de atracción a la profesión, ya que muchas veces lo eligen por descarte y pocas veces por verdadera vocación de ser docente.

Ella remarca que solo haciendo más atractiva la profesión se podría subir el valor que se tiene de esta, ya que como se mencionó al principio y a manera de caer en cierre, la alta valoración social en los siete países analizados (reconocimiento simbólico) así como la atención a prácticas, su vinculación con el sistema escolar y esa preocupación por aspectos teóricos y prácticos (concordancia) podría mejorar los resultados que se obtienen en Latinoamérica, no se trata de imitar o copiar únicamente, sino de usar estos modelos como ejemplos para poder impulsar un desarrollo óptimo, adecuando a cada contexto las diferentes herramientas y los diferentes apoyos que se necesitan.

Para más detalles sobre esta videoconferencia véase en YouTube: "Políticas de formación inicial" (IIPE UNESCO America Latina y el Caribe, 2018).

Con esto cabe subrayar el *reconocimiento de la docencia* como uno de los pilares más importantes para la sociedad; podría ser el comienzo que aliente a un mejor desarrollo de esta labor, si logramos concientizar a profundidad la función y sus implicaciones en los otros. Reconociendo e identificando la manera[6] de brindar acompañamiento o apoyo por parte del docente (en alguna materia) así como entendiendo las concepciones que este tiene con relación al desarrollo de un pensamiento, se descubrirán las pautas para un cambio significativo y real o concreto en la práctica de la educación matemática.

Agregando de manera personal, en esta conferencia se habla de los problemas que muchas veces se plantean en juntas de consejo técnico, no solo porque trate de la

[6] Metodología o Didáctica.

formación de formadores, sino porque dentro de la práctica se cae en los problemas o errores mencionados (crear ambientes de aprendizaje, incorporar las TIC de forma productiva, imitación de modelos didácticos que se nos aplicaron sin observar las formas de aprendizaje y actualizaciones sobre teorías del aprendizaje y desarrollo).

Además, es rica para la reflexión en la labor de la educación y aporta al reconocimiento o identificación de situaciones que aún no se han resuelto, cabe preguntarse: ¿cuál es la motivación que a muchos de nosotros (alumnos de pedagogía) nos impulsa a seguir en este camino? ¿es por descarte o por elección? ¿entendemos la responsabilidad y las implicaciones del docente? ¿buscamos realmente un beneficio social o individual?

1.3. Cierre del primer capítulo.

De esta manera solo bastaría recordar que aunque no toda la responsabilidad del proceso educativo reposa en los maestros, el desarrollo de la labor docente sí representa una proporción considerable que influye en el alumnado en cualquier nivel, como ejemplo consideremos la educación básica y media superior de una persona, en mi caso: tres años de preescolar, seis de primaria, tres de secundaria y tres de bachillerato durante 18 años indican que pase casi la mitad de ese tiempo en la escuela; fue ahí donde el momento de integración del conocimiento y el desarrollo social tomó sentido, pero ¿la otra mitad del tiempo?

Como decía Edward Gibbon “todo hombre recibe dos educaciones: la que le dan y la que él se da; esta última es la más importante”, considero que esto es verdad, la escuela me ayudó a elegir la educación que me quería dar, presentó en mi la oportunidad de elegir al saber, de igual forma, los diferentes maestros que conocí a lo largo de mi vida escolar junto con sus puntos de vista sobre el conocimiento, me ayudaron a entender que la educación que recibía en casa o las maneras de ser que pude haber aprehendido y entendido, no eran las únicas: son las relaciones familiares y el entorno social lo que al igual que la escuela, moldea u orienta el desarrollo del individuo, si de esto consideramos una integración adecuada de la comunidad, la familia y la escuela, junto a buenas prácticas docentes se podrían presentar resultados considerables.

De lo anterior, cabe mencionar que la dimensión ética y social de una buena práctica docente fundamenta su saber didáctico (así como la tarea de planeación y evaluación o valoración del profesor) en el nivel de consciencia que este tiene sobre su labor, es por eso por lo que para ser docente se debe cubrir cierto perfil que permita o facilite la formación y desarrollo de esta actividad de la mejor manera, así como condiciones que la permitan.

Todo lo dicho hasta ahora, invita a considerar como un conjunto de factores la información presentada y asiste para dar sentido a la comprensión del acto educativo y su naturaleza. Varios elementos como: maestros, Sistema Educativo, Familias, Sociedad y Tecnología, dentro del concepto *educación* co-determinan su futuro y las posibles variaciones y resultados emergentes. Incluso desde el análisis etimológico de la palabra se encuentran dos concepciones: "*educāre-educere* que quieren decir criar, nutrir-extraer de dentro hacia fuera, e implica guiar al dicente hacia su realización" (Viniegra-Velázquez, 2021).

Dado que la educación en si misma es compleja, contextualizando a la Educación Matemática y los objetivos que valdría la pena perseguir (el desarrollo del pensamiento matemático y valores) se podrían observar las dificultades (del saber ser y saber vivir) que pueden presentarse hoy en un país como México después de tres sexenios de políticas educativas fallidas y en situación de post pandemia en donde la EM tomo un modo diferente de ser llevada a las y los alumnos.

Enfatizar en la importancia de una práctica educativa que invite al alumno a pensar por sí mismo, es fundamental; como docentes nos recuerda el sentido de este trabajo, en donde las acciones se encaminan a la contribución de un desarrollo integral en los alumnos cuyo principal objetivo y/o intención es ayudarlos a realizarse para poder entender e intervenir en un mundo donde todos podamos vivir bien.

Un primer paso al cambio podría ser, en principio, el reconocimiento y la búsqueda de una estabilidad dentro de los objetivos que pretende alcanzar nuestra educación mexicana. El tema educativo en nuestro país no debería estar sujeto a las propuestas e ideologías particulares de los representantes que llegan en turno al poder, sino más bien buscar una agenda compartida que guie de lo general a lo particular la resolución y atención de problemáticas y situaciones emergentes.

Otras propuestas que ya se están intentando llevar a cabo en la NEM y que valdría la pena mencionar en este trabajo son: la integración y la participación de otros actores dentro del fenómeno educativo como la comunidad y las familias, así como también la revalorización y capacitación del magisterio.

Ahora, veamos hasta aquí, pensar de manera compleja permite intentar concatenar una serie de objetos, sujetos y acciones para conseguir nuevos caminos u opciones, así como ampliar y expandir la comprensión de las cosas y su naturaleza. Al final, el tiempo será el encargado de juzgar los resultados e invitar a reordenar, reformar o ajustar lo pensado hasta hoy. Para finalizar, considero que esta propuesta pedagógica buscaría atender el primer paso para este cambio, solo si consideramos como uno de los objetivos principales buscar que las y los estudiantes piensen por sí mismos y para sí mismos, acompañados por profesores y familias que trabajan de manera cooperativa aprendiendo juntos.

CAPÍTULO 2: PERSPECTIVA TEÓRICA Y METODOLOGÍA

Quien no comprende una mirada
tampoco comprenderá una larga explicación
Proverbio árabe

- ¿Me podrías indicar, por favor, hacia donde tengo que ir desde aquí? –, Preguntó Alicia.
- Eso depende a dónde quieras llegar –, contestó el Gato.
- A mí no me importa demasiado a dónde … -, empezó a explicar Alicia.
- En ese caso da igual hacia dónde vayas –, interrumpió el Gato.
- … siempre que llegue a alguna parte -, terminó Alicia a modo de explicación.
- ¡Oh! Siempre llegarás a alguna parte -, dijo el Gato, - si caminas lo bastante-.
Lewis Carroll. Alicia en el país de las maravillas

2.1. Rondando una perspectiva teórica.

Durante mucho tiempo la ciencia ha contribuido al desarrollo, crecimiento y expansión del ser humano; nos ha permitido identificar, nombrar, reconocer, explicar, aplicar, analizar, evaluar y crear en la "realidad". En consecuencia, la sociedad ha cambiado con el paso del tiempo y cada vez emergen de ella diferentes productos en cuanto a las formas de organización y acción.

Ahora bien, dado el párrafo anterior cabe preguntarse ¿Cómo fue que actuó el ser humano a través de su conocimiento? ¿con qué formas o conceptos? Si bien estas preguntas son abiertas y de manera arbitraria cualquiera podría responder según sus conocimientos, acotaremos algunas respuestas dentro de este trabajo para dar sentido.

Todo comenzó con las primeras y muy primitivas reflexiones de hombres y mujeres que se preguntaron por ellos/ ellas, después pasaron a preguntarse por el otro o las otras cosas. Preguntas, observaciones, meditaciones, reflexiones, pasamos de pinturas rupestres en las cavernas a creación de *modelos* que guían los cientos de estudios, hallazgos y explicaciones actuales, el hombre evolucionó en cuerpo y mente transformando nuestra realidad.

Ahora bien, como menciona Volpi: "(…) Verdad de Perogrullo confirmada por las ciencias cognitivas: todo el tiempo, a todas horas, no sólo percibimos nuestro entorno, sino que lo recreamos, lo manipulamos y lo reordenamos en el oscuro interior de nuestros cerebros —no sólo somos testigos, sino artífices de la realidad—" (Volpi, 2010).

Es así como podemos hablar de etapas en el pensamiento del ser humano, de acciones y organizaciones dadas a través de los siglos, ¿Cómo fue que actuó el ser humano a través de su conocimiento? Bien lo dijo Kuhn, por medio de la constelación de creencias, valores, técnicas y demás, compartidos por los miembros de una comunidad dada (Kuhn, 2013).

Es así como llegamos a la palabra más usada por científicos investigadores, profesores universitarios y algunos alumnos aguajeros: los paradigmas. En respuesta a la pregunta sobre ¿con qué formas o conceptos actuó el ser humano? También se puede responder con esta palabra, ya que actualmente toda sociedad en su forma de organización y acción se adscribe a uno de estos en diversos ámbitos (económico, político, educativo, judicial, científico, etc.).

Estos paradigmas han modelado la forma en como procede el ser humano ya que según Kuhn: "un paradigma es un modelo o patrón aceptado…el paradigma obliga a los científicos a investigar algunas partes de la naturaleza con un detalle y una profundidad que de otro modo sería inimaginable. Además, la ciencia normal incorpora un mecanismo que asegura el relajamiento de las restricciones que atan a la investigación cuando el paradigma del que derivan deja de funcionar de manera efectiva." (Kuhn, 2013)

Entonces llegamos al reconocimiento de los paradigmas, de los modelos que guían los grupos que ahora llamamos sociedades, llegados a este punto se presenta una pequeña tabla de resumen que muestra las etapas de la ciencia y sus paradigmas con la pretensión de acomodar el marco teórico bajo el cual se adscribe este trabajo:

Tabla 2

ETAPAS DE LA CIENCIA	DESCRIPCIÓN / CARACTERÍSTICAS	PARADIGMAS
PRIMERA ETAPA: LOS PROBLEMAS SIMPLES. (LARA-ROSANO A. F., 2017)	Pensamiento Platónico con una visión que adopta los tres valores fundamentales: la verdad, el bien y la belleza. (Lara-Rosano A. F., 2017) Así también añadimos la visión Aristotélica donde: (…) se plantea que la observación del universo debe realizarse considerando un conjunto de sustancias, mediante un camino inductivo, donde preocupa la causa final (telos) de las cosas y el para qué. Le preocupa la sustancia de las cosas, sus propiedades, facultades, potencias asimismo como la explicación cualitativa de las cosas, donde el centro de todo es el mundo. Esta tradición busca básicamente Comprender los Hechos, y entender que la naturaleza enseña por lo que no es necesario experimentar con ella. (Flores, 2020)	Platónico & Aristotélico
	Edad Media: La iglesia se convierte en el árbitro supremo de estos tres valores que conjugan en Dios: Verdad – en la biblia, bien – en la salvación, belleza – Arte sacro. (Lara-Rosano A. F., 2017)	Religioso
	Renacimiento: surge la física como ciencia (Copérnico, Kepler, Galileo, Bacon, Descartes y Newton) los humanistas vuelven sus ojos a la filosofía griega, movimiento que culmina en la *Ilustración*, cuestionamiento al dogma religioso. Kant define una unidad funcional en la cual las partes del mecanismo, aunque tienen una existencia propia, se acoplan una con la otra para	Positivismo (Método científico) Reduccionismo

	ejecutar una función. A partir del renacimiento, el funcionamiento del mundo y la naturaleza se explica entonces agregando y super poniendo el comportamiento de las partes. Lo que se omite en un enfoque reduccionista es la mutua relación entre las partes de un objeto y cómo unas partes dependen de otras que, a su vez, dependen de las primeras, dando origen a relaciones no lineales de interdependencia y retroalimentación. Los científicos clásicos: estudian las partes que son las constituyentes universales, elementos, moléculas, átomos, partículas subatómicas, pero estas en sí no explican las propiedades emergentes del todo. (Lara-Rosano A. F., 2017) Básicamente se va de observar, experimentar, formular, analizar y comprobar hipótesis. Auguste Comte… desarrollo sus teorías bajo el enfoque del positivismo creando la palabra sociología, que aparece por primera vez impresa en su *Curso de filosofía positiva* de 1838. Así, las nacientes ciencias sociales se alinean al enfoque positivista derivado de las ciencias naturales. (Lara-Rosano A. F., 2017) *El principal error:* al enfocarse en un problema se piensa que el problema está en las partes cuando generalmente está en las relaciones entre ellas. (Lara-Rosano A. F., 2017)	
SEGUNDA ETAPA: LOS PROBLEMAS DE LA COMPLEJIDAD DESORGANIZADA. (LARA-ROSANO A. F., 2017)	Con la influencia de los físicos y los matemáticos…Cuando la matemática desarrolló un nuevo enfoque para estudiar fenómenos colectivos integrados por una multitud de partes o agentes, comportándose e interactuando en forma libre y desorganizada…	Aun se trabaja con el paradigma reduccionista, pero este ya no es suficiente, Weaver (1948) comenta: Algunos científicos buscarán y desarrollarán por sí mismos nuevos

	Este nuevo enfoque se basó en el manejo de variables probabilísticas que podían tomar cierto valor con cierta probabilidad, según un patrón de probabilidades. (Lara-Rosano A. F., 2017) así surge la estadística como el análisis de los promedios para abordar los problemas de complejidad desorganizada en física, química, biología, sociología, economía, demografía, psicología y otras ciencias sociales cuando necesitan abarcar millones de agentes. (Lara-Rosano A. F., 2017) Aunque estas técnicas no permiten conocer el comportamiento de todas esas variables en forma individual, pero el sistema en su conjunto presenta ciertas propiedades analizables que permiten resolver problemas prácticos. (Lara-Rosano A. F., 2017)	tipos de acuerdos de colaboración y estos grupos tendrán miembros procedentes de todos los campos de la ciencia. Estas nuevas formas de hacer ciencia, efectivamente instrumentadas por grandes equipos de cómputo, contribuirán grandemente al avance que el próximo medio siglo seguramente logrará al abordar los problemas complejos y esencialmente orgánicos de las ciencias biológicas y sociales. (Weaver, 1948, p.542. Traducción de Lara-Rosano, 2017) Con la llegada de los computadores se evidencia este nuevo y necesario cambio dentro del procesamiento de la información y la forma en cómo se procede para obtener un nuevo conocimiento.
TERCERA ETAPA: LOS PROBLEMAS DE COMPLEJIDAD ORGANIZADA (LARA-ROSANO A. F., 2017)	En la segunda etapa de la ciencia se enfocan los problemas que afectan a la mayoría de una población de sus agentes a través de considerar los promedios y la parte media de las curvas de densidad de probabilidad, pero se ignora y desprecia el comportamiento de las colas de distribución considerándolas como: pobladas de casos atípicos o excepcionales. Sin embargo, son precisamente estos fenómenos atípicos los que están detrás de nuestros problemas más complejos, como los problemas de desigualdad social, de marginación, de analfabetismo o de Individuos con capacidades diferentes. (Lara-Rosano A. F., 2017)	Complejidad

	…Existen problemas que muestran fundamentalmente la presencia de una organización entre los elementos del problema caracterizándose como problemas de complejidad organizada… Son problemas que implican considerar un número importante de factores interrelacionados de un todo orgánico, resultando problemas de una complejidad organizada. (Lara-Rosano A. F., 2017)	

La tabla anterior trata de mostrar una secuencia cronológica de los paradigmas hasta la actualidad, con ello este trabajo busca seguir el modelo paradigmático de la complejidad. Si bien en las próximas páginas se explicarán algunas características de este paradigma, cabe aclarar que en este trabajo no se abordarán todas, sin embargo, sí habrá cabida a la identificación de algunos puntos importantes, que ayudan a que esta propuesta fundamente su visión en ella. Veamos ahora lo que dice Lara Rosano:

> "Desde mediados del siglo XX, al finalizar la Segunda Guerra Mundial, nuestra realidad ha cambiado. El desarrollo de la computación y las telecomunicaciones han creado un mundo fuertemente acoplado, donde los procesos sociales y ambientales se han globalizado. En efecto, tenemos ahora un intercambio global de gente, dinero, bienes, información e ideas que ha determinado la globalización financiera y económica que orilla a cada país a desenvolverse en un entorno de competitividad global." (Lara-Rosano A. F., 2017)

Los problemas con los que ahora se tratan la realidad son de naturaleza compleja (Lara-Rosano A. F., 2017) y junto con esto la visión en cuanto al método o las formas de resolverlos cambia, así también la influencia (como antes se mencionó) en diferentes ámbitos:

> “La realidad no es algo que exista solo en un nivel, sino en muchos al mismo tiempo”. (Nicolescu, 1996:12, citado en Lara-Rosano, 2017)

Lo anterior es una forma directa de afirmar el carácter interdependiente de todo aquello que percibimos e identificamos como “realidad”. La realidad perceptible para la conciencia humana es compleja. Como menciona Rosano (2017) “Complejidad es un término que describe a la realidad y engloba una gran variedad de aspectos… Es imposible avanzar en su comprensión y explicación si no se apela a formas novedosas de racionalidad y de investigación.” (p.103)

Con esto en mente solo cabe señalar específicamente a que paradigma y marco teórico se adscribe el presente trabajo: la complejidad (en específico la social). Pero para entender la complejidad social es necesario definirla y en función de eso ir delimitando las perspectivas teóricas dentro del ámbito educativo que ayudarán a comprender en el cuarto capítulo el desarrollo curricular de la planeación dentro de esta propuesta.

2.2. Complexus

A continuación, leamos la siguiente cita en bloque, que ilustra la complejidad en la escuela:

> “La escuela como institución social, ha estado muy influida por los cambios producidos por los avances científicos y muy especialmente por la filosofía o principios que rigen la investigación científica en un momento determinado… Durante casi todo el siglo XX la escuela fue vista como un espacio aislado de la realidad social en la que la visión reduccionista, atomista y antropocéntrica del mundo -de tradición positivista- se refleja en la organización del Curriculum… la escuela debe atender a las necesidades de la comunidad, de sus alumnos y de la sociedad…desde la propuesta de la teoría de la complejidad…En las ciencias, la complejidad es el término utilizado para connotar una nueva forma de pensar sobre

el comportamiento colectivo de muchas unidades básicas que interactúan entre sí, sean átomos, moléculas, neuronas, bits de una computadora o grupos humanos". (Cardenas R. Maria Luisa, 2004)

Ahora bien, partiendo de la aceptación de una realidad compleja se pueden identificar problemáticas y proponer soluciones que se adapten, pero para comenzar a dimensionar con esta nueva visión identifiquemos algunos elementos, conceptos o puntos importantes. Dentro de la educación, la complejidad se menciona popularmente con Edgar Morin en su libro "Los siete saberes necesarios para la educación del futuro" y comenta lo siguiente:

"El conocimiento pertinente debe enfrentar la complejidad. Complexus significa lo que está tejido junto; en efecto, hay complejidad cuando son inseparables los elementos diferentes que constituyen un todo (como el económico, el político, el sociológico, el psicológico, el afectivo, el mitológico) y que existe un tejido interdependiente, interactivo e inter-retroactivo entre el objeto de conocimiento y su contexto, las partes y el todo, el todo y las partes, las partes entre ellas. Por esto, la complejidad es la unión entre la unidad y la multiplicidad. Los desarrollos propios a nuestra era planetaria nos enfrentan cada vez más y de manera cada vez más ineluctable a los desafíos de la complejidad. En consecuencia, la educación debe promover una «inteligencia general» apta para referirse, de manera multidimensional, a lo complejo, al contexto en una concepción global". (Morin, 1999, p. 13).

Así también el Dr. Darin McNabb Filosofo de Boston College, ex catedrático de la Universidad veracruzana y actualmente Youtuber de temas filosóficos, menciona en uno de sus videos sobre el paradigma de la complejidad:

Lo primero sería esclarecer un poco lo que se quiere decir por la palabra complejo; refiere este concepto como un adjetivo, que describe algo, este algo que se describe es un sistema. Ahora bien, un sistema es un conjunto de partes o elementos conectados entre sí formando así una totalidad, lo cual produce algún efecto o realizar alguna función… el sistema no es más que la suma de sus partes. Los sistemas complejos son diferentes… la manera en que estos componentes interactúan entre sí, y la interacción también del sistema en su totalidad con el entorno, *rebasa el conocimiento que podría derivarse de un mero análisis de las partes*… en un sistema complejo, como el cerebro humano, los componentes (o sea las neuronas) pueden **cambiar** las conexiones entre sí, debido por ejemplo al aprendizaje".

La manera en que estos componentes interactúan entre sí, y la interacción también del sistema en su totalidad con el entorno, rebasa el conocimiento que podría derivarse de un mero análisis de las partes. Si un sistema es más que la suma de sus partes, entonces eso representa un desafío al modo de comprensión que procede mediante el *análisis* de las cosas. La palabra "análisis" proviene de un verbo que significa "aflojar". Su sentido filosófico-científico es el de aislar los elementos de algo para entender cómo funciona. Sin embargo, si se trata de un sistema complejo donde la íntima relación de las partes da cuenta de la totalidad, entonces al cortar esas relaciones analíticamente, uno destruye la misma cosa que quiere entender. Entonces, sino tiene sentido estudiar elementos aislados, fijémonos en la naturaleza de las relaciones que guardan. (Mcnabb, 2017)

Con respecto a lo anterior cuando hablamos de complejo como adjetivo, algunas veces se suele interpretar el término como "algo que no puede dar una explicación clara, precisa, concisa" o simplemente se considera como de "difícil acceso", y se suele creer que no se está diciendo nada específico, pero la reconsideración que debe hacerse sobre el uso de este término es que: permite entender o comprender las cosas o fenómenos que no son reducibles identificando las particularidades (interacciones) que lo componen.

Como se refirió en líneas pasadas: "Si un sistema es más que la suma de sus partes, entonces eso representa un *desafío* al *modo* de *comprensión* que procede mediante el *análisis* de las cosas…si se trata de un sistema complejo donde la íntima relación de las partes da cuenta de la totalidad, entonces al cortar esas relaciones analíticamente, uno destruye la misma cosa que quiere entender… sino tiene sentido estudiar elementos aislados, fijémonos en la naturaleza de las relaciones que guardan." (Mcnabb, 2017) de esto, más a delante se podrán comprender algunos puntos de contacto entre constructivismos y su relación con la metodología Lesson Study, sugiriendo una suerte de integración entre paradigmas de teorías cognitivas del aprendizaje.

Continuando con el uso de la palabra *complejidad* o lo *complejo* como una condición necesaria para comprender la naturaleza de algunos fenómenos, significa renunciar a la idea ordinaria de que complejidad representa dificultad o inaccesibilidad para la comprensión de las cosas y reconocer que representa un desafío al modo de entender algo. En este caso serán los puntos de contacto que comparten algunas teorías cognitivas del aprendizaje, el docente podrá ver en la práctica de la planeación estos puntos de contacto de manera objetiva al realizar y tratar de aplicar algunas preguntas.

Ahora bien, esto nos lleva a enunciar algunas características de la realidad compleja, que conviene tener en cuenta al tratar de resolver algún problema social complejo:

a) ***La realidad es dialéctica y está constituida por la superposición de elementos y procesos contradictorios.*** → Así coinciden procesos deterministas con procesos estocásticos… Procesos que perduran gracias a su equilibrio con procesos que perduran gracias a su no-equilibrio (formación de cristales vs procesos fisiológicos)

b) ***Historicidad y dependencia de una realidad de su trayectoria evolutiva.*** → El estado de la realidad… no surge en forma descontextualizada… su estado depende de su historia por lo que su contexto histórico es esencial para su análisis y explicación, donde el término histórico es relativo a la escala de tiempo del problema específico del que se trate.

c) ***Contexto del problema.*** → Un problema no puede aislarse descontextualizándolo del entorno natural y social en el que surgió, sino que los diferentes aspectos de dicho entorno forman parte inseparable de dicho problema.

d) ***Diversidad, interacción y autoorganización de agentes como elementos activos constitutivos de la realidad.*** → En la realidad actúan un gran número y diversidad de agentes biológicos, humanos y sociales a diferentes niveles y escalas, que interactúan unos con otros del mismo nivel según reglas locales, conformando redes de mundo pequeño en las que la posibilidad de interacción entre cualquier pareja de agentes del mismo nivel se puede dar a través de un número reducido de interacciones intermedias. Asimismo, también son posibles las interacciones con otros agentes de distinto nivel.

e) ***Aparición de propiedades y fenómenos emergentes.*** → Las interacciones entre agentes dan como resultado propiedades y fenómenos emergentes que ninguno de sus integrantes aislados tiene.

f) ***Procesos y funciones emergentes por autoorganización y coevolución.*** → Las interacciones entre agentes dan como resultado, por autoorganización y coevolución, el desempeño de funciones emergentes complejas.

g) ***Presencia de factores teleológicos e intensionales en los agentes.*** → En la realidad actúan agentes animales, humanos y sociales que tienen motivos intensionales u objetivos que son complejos, dinámicos e incluso pueden ser contradictorios… es imprescindible considerar el componente teleológico o intencional, que funciona en un contexto de incertidumbre.

h) ***Los procesos de la realidad son solo lineales.*** → No hay proporcionalidad entre estímulos y respuestas. Pequeñas acciones pueden tener grandes efectos (efecto mariposa).

i) ***Prioridad de las interrelaciones sobre las partes.*** → Las propiedades emergentes de una entidad compleja no surgen de sus elementos sino de las interrelaciones entre sus elementos.

j) ***Dinamismo de las partes y de sus interrelaciones.*** → Tanto las relaciones entre las partes de una entidad compleja como las relaciones entre éstas y el todo son dinámicas y cambian con el tiempo…provienen de la historia evolutiva tanto en las partes como en el todo… la realidad compleja puede entenderse en forma diacrónica estudiando las transiciones entre sus fases, desde una perspectiva evolutiva.

k) ***Necesidad de un enfoque transdisciplinario.*** → La realidad se manifiesta en toda su complejidad en la génesis del problema… un problema no puede aislarse del entorno natural y social en el que surgió, los diferentes aspectos de dicho entorno forman parte inseparable de dicho problema… “Esta característica convierte al proceso de solución de problemas en un proceso complejo, en el que generalmente deben de intervenir varias áreas del conocimiento en forma transdisciplinaria" (Nicolescu, 1996)… tomar en cuenta todos los aspectos que lo afectan relevantemente…implica que el enfoque del problema deba ser totalizador y transdisciplinario, es decir, considerar el problema como una totalidad conformada por diferentes aspectos… ello implica crear puentes entre las disciplinas que normalmente no se comunican. Esto no implica desdeñar o confrontar las investigaciones y logros de la ciencia unidisciplinaria, sino de aprovechar y potenciarlos de una novedosa manera: fusionar hallazgos y procedimientos de investigación bajo un principio de *complementariedad* con el propósito de comprender el mundo presente "en el cual uno de los imperativos es la unidad de conocimiento" (Nicolescu, 1996, p. 35) … La partícula trans señala aquello que está al mismo tiempo entre, a través y más allá de las disciplinas o áreas de la ciencia conocida… la transdisciplinariedad implica los enfoques pluridisciplinarios y la interdisciplinariedad, pero va más allá pues aspira a vencer la fragmentación del conocimiento y la hiperespecialización al posibilitar la generación de nuevas disciplinas.

l. ***Características dinámicas de la realidad: plasticidad, aprendizaje, adaptación y evolución.*** → En los agentes y sus colectivos, así como en sus interacciones, puede haber plasticidad, aprendizaje, adaptación y evolución. De acuerdo con Darwin, el proceso evolutivo tiene tres etapas: la etapa de a) variación, b) selección y c) retención. La primera se presentan multiplicidad de individuos con diferentes características, en la segunda las especies generan variaciones a nivel de organismos individuales por mutaciones, algunas de las cuales fueron favorables aumentando las probabilidades de supervivencia, y en la última los

> cambios adaptados al ambiente local fueron retenidos en la población al reproducirse los individuos y en algún momento, las adaptaciones acumulativas resultaron en especies completamente nuevas.
> (Lara-Rosano F. d., 2017)

Estas características nos ayudan a considerar aspectos importantes a la hora de abordar algún problema social complejo. Como se leyó en el primer capítulo, este trabajo se centra en una propuesta pedagógica con el fin de atender un problema en específico dentro de la Educación Matemática (EM); la manera en que se aprende matemáticas en la secundaria y específicamente en los temas relacionados a proporciones directas y funciones lineales**.** Todo lo anterior descrito nos ayuda a perfilar la deconstrucción de una planeación que no solo está orientada a que la alumna y el alumno adquiera cierto conocimiento de algún tema, sino que permitirá ir más allá de los contenidos para conseguir un desarrollo del pensamiento matemático.

Ahora bien, concuerdo con Chaves, cuando dice que: la educación puede ser el medio efectivo para que los alumnos desarrollen la capacidad de comprender otros sistemas complejos (Chaves, 2010), al igual que Hopenhayn M., piensa que: nos encontramos en un momento paradójico, nunca como hoy se le ha pedido tanto a la escuela (Sistema Educativo) y se le ha dado *un rol* de tanto protagonismo *como palanca de desarrollo*, no obstante, la escuela esta crecientemente alejada del mundo real y escasamente sintonizada con la sensibilidad de los más jóvenes (Aparici, 2010).

Cabe mencionar que la reforma educativa del sexenio (2018 – 2024) llamada Nueva Escuela Mexicana (NEM) se adscribe a un paradigma llamado “Nuevo Humanismo” que postula a la persona como eje centrar del modelo educativo (SEP, 2019) proponiendo una formación holística y humanista en los jóvenes del siglo XXI (Acevedo, 2023) llegado a este punto, habría que realizar un análisis exhaustivo sobre esta reforma tanto en los contenidos curriculares como en los principios pedagógicos y la práctica en el aula, poniendo como principal juez al tiempo y sus resultados para identificar, valorar y considerar si el Nuevo humanismo realmente cumple con su cometido al lograr una educación holista y humanista.

Por ahora, en este capítulo me centrare en abordar el marco teórico que guiará la propuesta pedagógica y que pretende buscar la integración de algunas corrientes teóricas del aprendizaje con ayuda del paradigma de la complejidad (social).

Una vez que he dado este brevísimo resumen sobre el marco teórico al que se adscribe este trabajo, continuemos con el plexus, ahora, dentro de las teorías cognitivas del aprendizaje para después (en el tercer capítulo y junto a la propuesta pedagógica) concretizar esto de manera muy específica en alumnos de secundaria con el tema de funciones lineales.

2.3. Hacia una integración: repaso de teorías cognitivas del aprendizaje & Lesson Study.

En la vida de las disciplinas científicas ocurren coincidencias que pasan desapercibidas ante nuestros ojos, porque nos acostumbramos a ellas y aprendemos a verlas como parte del escenario de las ideas en el que tenemos que manejarnos, nos guste o no. Sin embargo, muchas de estas coincidencias no son producto de sortilegios del destino ni de cualquier otra cosa que se le parezca, sino que esconden una añeja raíz sobre la cual a veces no se repara demasiado. (Hernández G. , 2019)

Es por lo anterior que al observar con atención los temas vistos en primer y segundo semestre de la carrera en pedagogía en la Universidad Pedagógica Nacional (UPN-Ajusco) junto con mis profesores, identifiqué y reconocí algunas coincidencias con ciertas teorías del aprendizaje. Al llegar a séptimo y octavo en los seminarios de investigación, esas teorías comenzaron a tener un sentido más claro en la práctica de la enseñanza matemática.

Durante algún tiempo de docencia (aproximadamente 6 años) los ejercicios y cursos de capacitación que presenté me confirmaron que la educación debía ser vista como un todo complejo que al contextualizarse podría tener grandes alcances de manera individual y/o grupal. Piaget, Vygotsky, Ausubel, Bruner, etc., parecían tener mucho en común, aunque en pláticas dentro de la carrera, para algunos catedráticos bajo ciertas opiniones y críticas nada tenían que ver e incluso podrían presentarse como irreconciliables.

Al momento de poner en práctica alguna teoría, parecía que siempre se colaba otra de alguna manera, es por ello por lo que durante este apartado se tratará de sintetizar algunas teorías del aprendizaje llamadas: Constructivismos. Junto a esto se pretende mostrar como coincidencia[7] (o no) el modelo Japones Lesson Study (LS) en cuanto a su didáctica, filosofía e investigación con relación a los constructivismos (en el tópico de Teorías Cognitivas del Aprendizaje TCA).

Comencemos especificando ¿Qué es el constructivismo dentro del ámbito educativo? En general la palabra sugiere “construcción”, si buscamos en la Real Academia Española la palabra, solo encontraremos una definición derivada del ruso, sin embargo, si buscamos en Cambridge Dictionary veremos un apartado de *Education* que dice lo siguiente: *A theory that learning is an active process and that people gain knowledge and understanding through the combination of experiences and ideas* (Cambridge Dictionary, 2024).

[7] Recordar la primera cita de Gerardo Hernández (2019) donde comenta sobre las coincidencias que pasan desapercibidas, porque nos acostumbramos a ellas y a prendemos a verlas como parte de un escenario de ideas que se tienen; es común que muchos profesores den por hecho algunas coincidencias o complementariedades entre las teorías cognitivas del aprendizaje ¿pero en qué grado se está consciente al momento de planear algún tema de clase o investigar sobre nuestra práctica educativa?

Departimos de una teoría del aprendizaje donde hablando de "proceso activo" refiere: la capacidad de adquirir conocimiento y comprensión por medio de experiencias e ideas. De manera general la idea puede parecer clara, pero para lograr un mejor juicio habría que examinar con mayor prolijo su descripción.

En esto podemos atender para un mejor entendimiento un punto de la complejidad y continuar entretejiendo nuestro conocimiento: la *Historicidad y dependencia de una realidad de su trayectoria evolutiva*. Donde se comenta que el estado de la realidad… no surge en forma descontextualizada… su estado depende de su historia por lo que su contexto histórico es esencial para su análisis y explicación, donde el término histórico es relativo a la escala de tiempo del problema específico del que se trate (Lara-Rosano A. F., 2017).

2.3.1 Conductismo: el comienzo de una historia, un gigante que nunca morirá.

Como cuento infantil podríamos comenzar con: érase una vez hace muchos años una teoría que surgió como luz que iluminaba parte de un nuevo camino que muchos científicos recorrían, esta era llamada Conductismo. "Este paradigma en su versión <<operante>> nació en la década de 1930… se desarrolló durante las dos décadas siguientes y en los años sesenta inició su <<huida del laboratorio>> hacia los escenarios de aplicación" (Hernández G. , 2020).

Pozo (2013) comenta que la primera revolución se produce en la segunda década del siglo XX y da lugar a la aparición del Conductismo, como respuesta al subjetivismo y al abuso del método introspectivo por parte del estructuralismo y también del funcionalismo. El conductismo se consolida a partir de 1930 entrando en un periodo de ciencia normal (utilizando este concepto amparado en las ideas de Kuhn, 1962), caracterizado por la aplicación de su paradigma objetivista, basado en los estudios del aprendizaje mediante condicionamiento, que considera innecesario el estudio de los procesos mentales superiores para la comprensión de la conducta humana, todo ello con orígenes en el positivismo.

La escuela se vio fuertemente influenciada de manera especial en la línea llamada Skinneriana. Este primer paradigma dentro de la educación impactó en modelos curriculares, objetivos educativos y permeo prácticas docentes. Actualmente los profesores se encomiendan a otro tipo de prácticas que consideran “menos nocivas”, incluso a través del tiempo la palabra ha adquirido un carácter negativo y crueles críticas, que como veremos más adelante al realizar una reconsideración paradigmática de lo que es el aprendizaje y desarrollo, no tiene ningún sentido radicalizar y fulminar teorías que bien se incorporan y aportan a la naturaleza compleja que se presenta en el fenómeno educativo.

En la opinión de Pozo (2013) el núcleo central del conductismo está constituido por su concepción *asociacionista* del conocimiento y aprendizaje. Situado en la tradición del asociacionismo que nace en Aristóteles[8]…dado que inicialmente somos una *tabula rasa* y todo lo adquirimos del medio por mecanismos asociativos, es lógico que el conductismo tomara como área fundamental de estudio el aprendizaje: la estructura de la conducta sería una copia isomórfica de las contingencias o covariaciones ambientales… uno de los rasgos que con más frecuencia suelen considerarse como constitutivos del programa es el *reduccionismo antimentalista,* es decir, la negación de los estados y procesos mentales.

Dado el párrafo anterior, Pozo (2013), también se considera el principio de correspondencia (entre el aprendizaje y realidad externa) además de concebir al sujeto como pasivo y con una equipotencialidad (de estímulos, de especies, de individuos) dentro del paradigma. Como era de esperarse dentro de la comunidad científica que seguía este

[8] Aristóteles puede ser considerado el padre del asociacionismo, ya que rechaza la doctrina de las ideas innatas, sustituyéndola por la de la *tabula rasa* sobre la cual se van imprimiendo las sensaciones.

paradigma se presentaron diferentes aristas de un mismo vértice, estaban por un lado los radicales y por otro los laxos, los primeros como Skinner llegaron a considerar que el aparato mental no es sino un “sustituto interno de las contingencias” y que por lo tanto no aporta nada nuevo al estudio directo de estas (Pozo, 2013).

A este paradigma que involucra Estímulos-Respuestas (E-R) en ambientes con variables controladas, cuya asociación era el centro para las razones que tenían y que contribuían a determinar juicios, pero a pesar de sus esfuerzos a este modelo se le presento una crisis como menciona Pozo (2013) “la incapacidad de elaborar una teoría unitaria del aprendizaje”, así aunque algunos profesores aplicaban de una manera “maravillosa” diferentes técnicas educativas inspiradas en este modelo y que involucraban: la pasividad de los sujetos en ambientes bien definidos con objetivos y ejercicios claros, premiar a las alumnas y alumnos, castigando el mal comportamiento, reforzando los intereses académicos y las respuestas correctas, estableciendo horarios así como tonos de timbres para diferenciar cambios de clases o inicio y fin de recesos.

Sus resultados fueron claros, sin embargo, no suficientes para poder lidiar con la heterogeneidad de personalidades y estilos de aprendizaje ya que como menciona Hernández (2020) el nivel de actividad del sujeto se ve fuertemente restringido por los arreglos de contingencias del profesor-programador. Un sujeto pasivo, en el que se deposita el conocimiento hoy en día parece absurdo y limitante. Lo anterior aunado a los cambios tecnológicos fue devastador para un solo modelo que ambicionaba la perfección, o al menos los seguidores más radicales.

Sin ánimos de extenderse en este apartado buscando las anomalías que existían desde los primeros tiempos del conductismo, es válido reconocer ese carácter atomista y elementista derivado del núcleo asociacionista que dice que toda conducta, por compleja que sea, se puede reducir a una serie de asociaciones entre elementos simples (estímulos→respuestas). Esto ayuda a entender una parte de lo que muchos científicos y psicólogos entendían y atendían en aquel momento.

A esto llegaron análisis de los propios expertos dentro del paradigma quienes con las anomalías que ellos encontraban en sus experimentos con animales, consideraron que las personas serían más complejas que solo dar por hecho sus estímulos y respuestas en ambientes controlados. Pozo (2013) señala que algunos indicios de lo que llama el neoasociacionismo cognitivo apuntaron a un pacto intermedio: ni los sujetos son insensibles a las contingencias ni se atienden rígidamente a ellas.

Es normal que dentro de la ciencia lleguen y surjan cambios en las visiones y las maneras de concebir conocimiento, es ello lo que nos permite enriquecer y seguir avanzando como sociedad, actualmente muchos dicen que el conductismo esta fuera de las escuelas, de los programas, de las planeaciones. Pero entonces, considerando a este trabajo desde una perspectiva compleja, es mejor considerar (hasta cierto punto) la falsedad de esto, ya que probablemente a ojos de muchos expertos y bajo una lupa de análisis sobre las actividades que se presentarán más adelante en la planeación de la propuesta pedagógica habrá algo del conductismo colado entre líneas y actividades.

Para ejemplificar el párrafo anterior, dentro de los objetivos educativos que perseguía el conductismo se mencionan:

"(…) tres criterios para elaborar objetivos conductuales:

a) Mencionar la conducta observable que debe lograr el alumno.
b) Señalar las condiciones en que debe realizarse la conducta de interés.
c) Mencionar los criterios de ejecución de estas." (Hernández, 2020, p.93).

Así también sus implicaciones educativas seguían estrategias y técnicas de enseñanza las cuales como cita Hernández (2020) con Cruz (1986, p.21):

La enseñanza programada es una técnica instruccional que tiene las siguientes características:

a) Definición explícita de los objetivos del programa.
b) Presentación secuenciada de la información, según la lógica de dificultad creciente asociada al principio de complejidad acumulativa.
c) Participación del estudiante.
d) Reforzamiento inmediato de la información.
e) Individualización (avance de cada estudiante a su propio ritmo).
f) Registro de resultados y evaluación continua. (Hernández G. , 2020)

Esto puede sonar familiar y de hecho observando con atención algunas planeaciones actuales (a pesar de los cambios presentados en los modelos para planear) algunos docentes siguen estos puntos, con ligeras modificaciones en los conceptos principales; esto me recuerda la opinión que tenía un compañero universitario sobre las planeaciones de algunos docentes durante una plática en un Live de Facebook cuando charlábamos acerca de “Los constructivismos y sus implicaciones educativas”, él mencionaba que podía identificar como algunos de sus compañeros docentes en la escuela donde él laboraba, únicamente cambiaban los conceptos dentro de sus planes de clase.

Ante tal afirmación, confirmé esto por mi propia experiencia docente, al ver a mis compañeras realizar lo mismo pasando de un modelo viejo de sexenios pasados al que en aquel entonces era uno nuevo, llamado: “Aprendizajes clave”. Observaba una estructura de la enseñanza programada con el copy-paste de nuevos conceptos. Esto no quiere presentar una crítica al modelo que dejó el paradigma conductista en la educación, ya que considero es útil, aplicable y vigente en ciertos escenarios educativos; más bien mi crítica es para los docentes que menosprecian erróneamente y utilizan este concepto (conductismo) a la ligera para denostar algunas acciones educativas, muchas veces sin realmente conocer la historia completa ni sus más bondadosos aportes en el ámbito educativo.

Es por ello por lo que vale la pena comentar a ustedes profesores, maestros, docentes, catedráticos, investigadores, alumnos y alumnas, no habrá muerte al conductismo, porque renunciar a una parte de la historia es renunciar a una parte de la compleja realidad y eso nos dejaría sin tema de plática, sin revolución paradigmática y sin coherencia.

2.3.2 Procesamiento de la información: una mirada cognitiva en la educación.

Con los avances tecnológicos llegaron cambios en las formas de pensar la información y el conocimiento, es por ello por lo que Pozo (2013) reconoce que aunque no es exacto rastrear orígenes de una fecha fundacional para el nacimiento de la psicología cognitiva, por las contribuciones de investigaciones y trabajos el 11 de septiembre de 1956 en el segundo simposio sobre Teoría de la información celebrado en el Massachusetts Institute of Technology (M.I.T) donde diferentes figuras importantes se reunieron, tales como: Chomsky, Newell, Simon y G.A. Miller, se propone esa fecha como origen del nuevo movimiento (Pozo, 2013).

Así también Bruner afirma: “Hoy me parece claro que la <<Revolución cognitiva>> constituyó una respuesta a las demandas tecnológicas de la Revolución postindustrial”. El nuevo movimiento cognitivo adoptó un enfoque acordé con esas demandas y el ser humano pasó a concebirse como un procesador de información. “Hay quien, además del impulso recibido de las ciencias de la computación, consideran que la nueva psicología cognitiva recoge también la influencia de una serie de autores como Binet, Piaget, Bartlett, Duncker, Vygotsky, etc., que venían trabajando desde supuestos cognitivos. Así también es importante señalar, como lo menciona Carretero (1986) que la psicología cognitiva no se inicia en 1956 sino mucho antes.” (Pozo, 2013)

Los antecedentes son claros, comenzaba a gestarse desde hace tiempo una nueva visión, pero, así como el conductismo tiene un núcleo central ¿Cuál sería este núcleo en el procesamiento de la información? Para llegar a la identificación de este, la importancia del concepto Psicología cognitiva toma relevancia citando a Riviere (1987) en Pozo (2013):

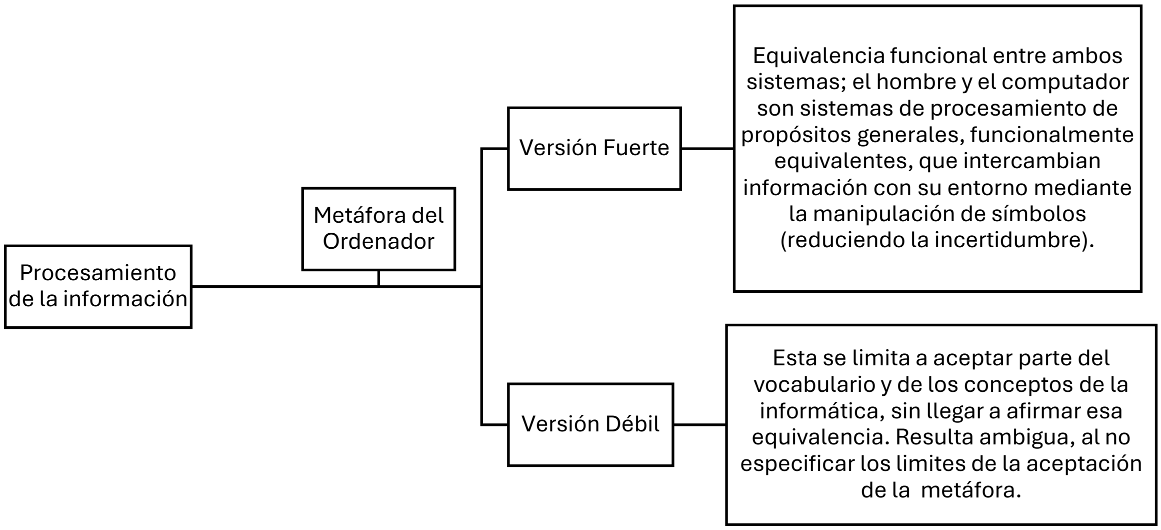
"Lo más general y común que podemos decir de la psicología cognitiva es que refiere a la explicación de la conducta a entidades mentales, a estados, procesos y disposiciones de naturaleza mental para los que reclama un nivel de discurso propio" (Pozo, 2013).

Por lo anterior vale la pena mencionar a Bruner (1991) en Hernández (2020) cuando dice que: el movimiento que algunos llaman *la revolución cognitiva* tenía como objetivo principal "recuperar la mente" después de la época de "glaciación conductista" … entonces es cuando los teóricos cognitivos sustituyen conceptos clave como el de "Significado" por el de "Información" y de este modo la idea conceptual de la construcción de significados… fue abandonada para sustituirla por otra que se centraba en el procesamiento y tratamiento de la información. (Hernández G. , 2020)

Así bien Muchos autores coinciden en que la acción del sujeto está determinada por sus representaciones, propone que esas representaciones están constituidas por algún tipo de cómputo. Según Lachman y Butterfield (1979 Páginas 114-117) El procesamiento de la información considera que "Unas pocas operaciones simbólicas relativamente básicas, tales como codificar, comparar, localizar, almacenar, etc. Pueden en último extremo dar cuenta de la inteligencia humana y la capacidad para crear conocimientos, innovaciones y tal vez expectativas con respecto al futuro" (Pozo, 2013).

Ahora se habla de concebir al ser humano como un *procesador de información*, con ello se puede recordar el "Test de Turing" y mencionarlo como su base; dice Pozo (2013) y otros autores que este concepto acepta la analogía o metáfora del computador y además se distinguen dos versiones de esta metáfora:

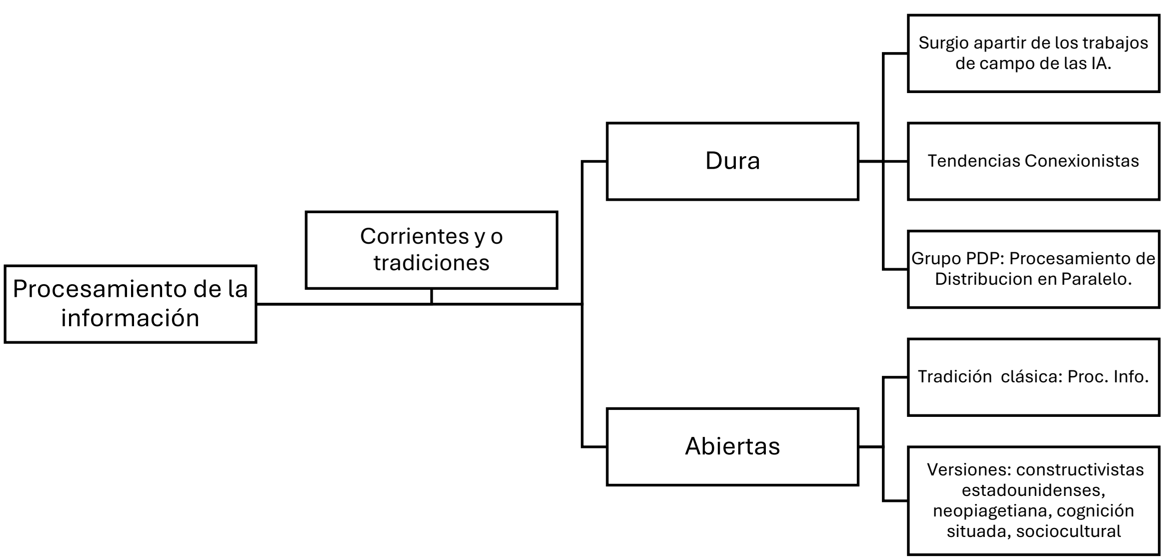
Figura 2



Información de Pozo (2013)

El esquema anterior sintetiza las dos versiones sobre la interpretación de la metáfora del ordenador. Ahora bien, también existen corrientes o tradiciones de investigación dentro de esta teoría cognitiva del aprendizaje:

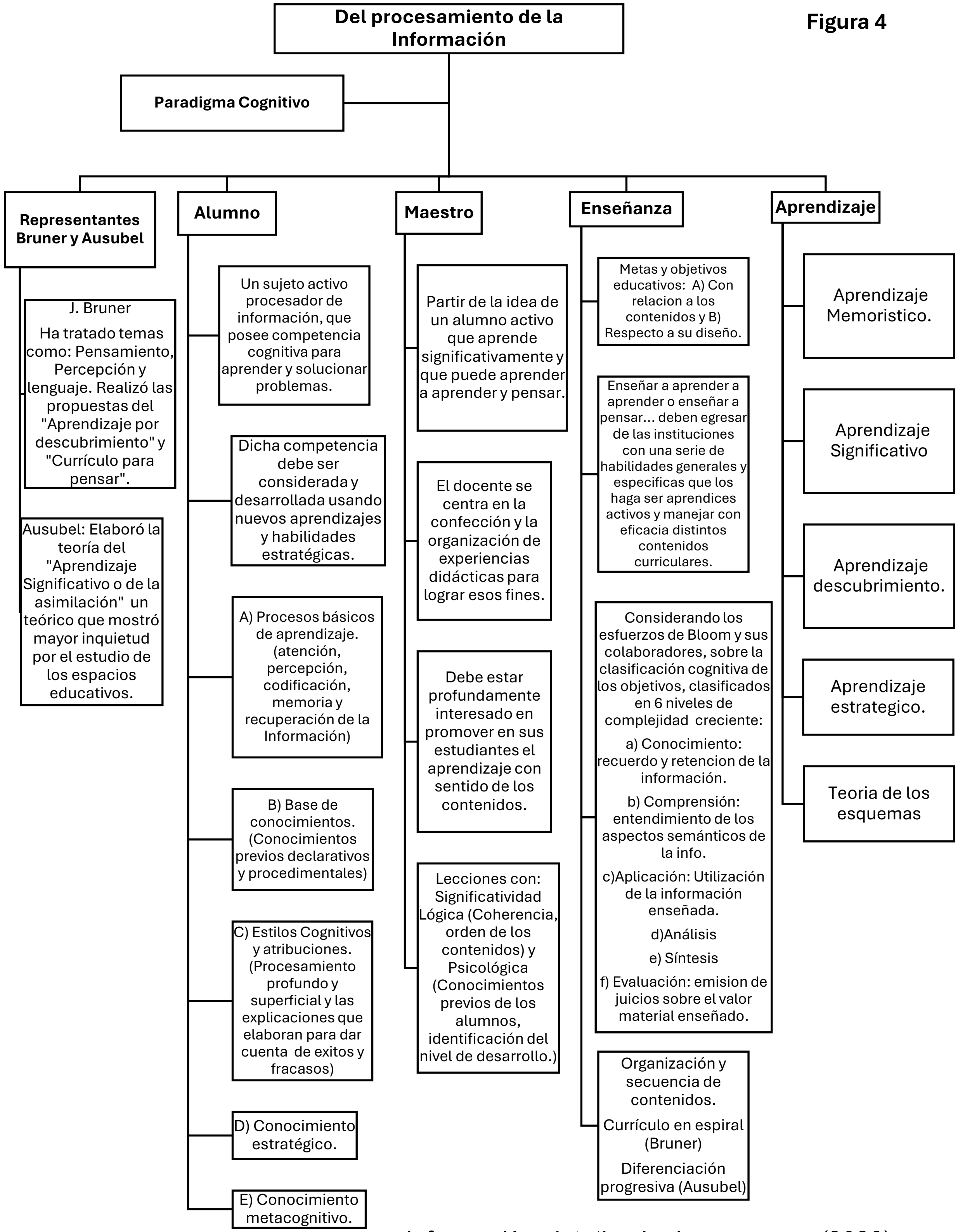
Figura 3



Información de Hernández (2020*)*

Como podemos reconocer, dentro de la educación nos adscribimos a la corriente y tradición abierta donde las versiones constructivistas tanto de Piaget como Vygotsky y Ausubel pretenden atender la comprensión de procesos de desarrollo cognitivos y esquemas de aprendizaje. Por otro lado, las implicaciones y aplicaciones que tuvo este paradigma en la educación pueden resumirse en la siguiente figura:

Figura 4



Información sintetizada de Hernández (2020)

Es importante mencionar a Hernández (2020) cuando comenta que:

> Una tesis central que sostienen los cognitivos señala que, en cualquier contexto escolar, por más restrictivo que éste sea, siempre existe en el alumno cierto nivel de actividad cognitiva; este nunca es pasivo a merced de las contingencias ambientales o instruccionales… la actividad cognitiva inherente debe ser utilizada y desarrollada para que el aprendiz logre un procesamiento más efectivo de la información. (p.135)

Ahora bien, si los alumnos y alumnas son considerados en sus dimensiones psicológicas (conocimientos previos que permitirán el anclaje) y la actividad o participación que este tiene dentro de la dinámica de aprendizaje y desarrollo; es claro que las actividades del docente deben estar orientadas como lo alude Gerardo Hernández (2020) a la exploración, experimentación, solucionar problemas y reflexionar sobre temas definidos o actividades que surjan de las inquietudes de los alumnos. Así también estar proporcionando apoyo y retroalimentación es algo que no puede dejar de hacer durante las sesiones de clase.

Ausubel (1978) también habla en parte de los factores motivacionales del aprendizaje y como es que son importantes en los alumnos con relación a las actividades en clase y bajo el acompañamiento del docente, pero no indispensables. En una nota al pie comenta lo siguiente:

> Teóricamente, puede postularse que la motivación se vuelve factor cada vez menos importante del aprendizaje, a medida que avanza la edad de los niños. Conforme el aprendizaje se vuelve más fácil y exige menos esfuerzos, debido al desarrollo de la capacidad cognoscitiva, la duración de la atención y la capacidad de concentrarse, el proceso de aprendizaje requiere de menos energía… como el niño es motivado más por pulsiones cognoscitiva, afiliativa

> y de mejoramiento del yo, la recompensa material y el castigo se vuelven los factores más importantes.
>
> Esto quiere decir en parte que no existe una relación causal entre la motivación y el aprendizaje por lo tanto este no es condición indispensable de él… Con frecuencia la mejor manera de enseñarle a un estudiante no motivado consiste en desentenderse, de momento, de su estado motivacional y concentrarse en enseñarlo tan eficazmente como sea posible… y confiar en que la motivación resultante del rendimiento educativo favorable impulsará al aprendizaje ulterior. (pp.418-420)

Por lo anterior valdría la pena tener en cuenta la responsabilidad de nuestra labor en un trabajo de servicio como el que brindamos, entre más conocimiento tengamos de nuestra área, tendremos mayores esquemas, así como estrategias y seremos más sensibles a captar información útil para ver por cual camino llevar a los alumnos y alumnas, vale la pena mencionar también la importancia de un contrato didáctico y su aplicación.

Continuando con la línea argumentativa del Paradigma cognitivo, si bien la actitud de los alumnos es un factor importante, no determina nuestra labor, así bien la teoría que deja este paradigma con relación a la enseñanza es vasta; en el esquema anterior podemos observar algunos puntos importantes, es necesario destacar otros que complementarían y se presentan en la siguiente tabla de resumen:

Tabla 3

Tipos de contenido	*Contenidos:* Actitudes, normas, valores	*Nivel:* MAYOR	*Relación entre contenidos y resultados de aprendizaje:* Análisis del aprendizaje. Actitudes
	Procedimientos	Nivel de generalidad	Estrategias de aprendizaje y solución de problemas. Destrezas y Técnicas.

	Hechos, conceptos, principios	MENOR	Conceptos Información verbal
** No debe de especificarse de manera extrema los objetivos. **			
Secuencia de los contenidos	a) Principio de síntesis inicial		Es necesaria la estructura conceptual **de anclaje** de la nueva información, la presentación al inicio, de un epítome u organizador previo.
	b) Principio de elaboración gradual		Las partes para las actividades deben de ser elaboradas de lo simple a lo complejo y de lo general a lo detallado.
	c) Principio del familiarizador introductorio		Utilizar una analogía básica en cada nivel de elaboración del epítome o el tema para establecer relaciones entre los conocimientos previos y lo nuevo que se va a aprender.
	d) Principio de priorización		Proceder primero a la elaboración de las partes más relevantes.
	e) Principio del tamaño óptimo		Los niveles de elaboración conceptual no deberían de ser demasiado largo para evitar que se sature con detalles innecesarios o que se rebase la capacidad de procesamiento.
	f) Principio de síntesis periódica		Presentar un resumen o recapitulación mostrando al alumno conceptos trabajados en el nivel de elaboración particular y su relación con el epítome inicial.
I) Estrategias de enseñanza.	Activación de conocimientos previos: Conocer lo que saben los alumnos o generarlos cuando no existen.		• Preinterrogantes. • Actividad generadora de información. • Objetivos.
	Establecimiento de expectativas adecuadas: Plantear claramente las intenciones educativas a los alumnos		

II) Estrategias para orientar la atención de los alumnos.	Preguntas insertadas	Interrogantes que se intercalan en la presentación del contenido que se va a aprender. Pueden presentarse antes o después.
	Uso de pistas o Claves	Señalamientos explícitos para destacar información relevante.
III) Estrategias para organizar la información nueva.	Mapas conceptuales y redes semánticas	Representaciones graficas de porciones de información o conocimiento.
	Resúmenes	Información del contenido que se espera aprender
IV) Estrategias de enlace entre conocimientos previos y la nueva información	Organizadores previos: A) Comparativo y/o B) Expositivo	Puentes cognitivos. A) Establecer una comparación explícita. B) Se incluye información como parte del organizador.
	Analogías	

Información sintetizada de Hernández (*2020)*

Está clara la contribución en el terreno educativo de esta corriente del procesamiento de información, debido al titánico trabajo para categorizar y sistematizar, sin mencionar la vigencia en este siglo XXI siendo utilizada por docentes de diferentes niveles. Para terminar este apartado se muestra una tabla realizada por Gerardo Hernández (2020) que tomó de Ausubel et al., (1978) que muestra las dimensiones y tipos de aprendizaje que ocurren en el aula:

Figura 5

Esta figura será importante para tener en cuenta durante nuestra práctica docente y en particular dentro de esta metodología ya que las preguntas dan una relativa libertad a los alumnos y alumnas ya que es posible que surjan otras preguntas o conjeturas a las que inmediatamente no lleguen los estudiantes, sin embargo como veremos más adelante, el estudio de las clases pretende acompañar estrechamente a los estudiantes, acompañándolos en ese proceso de reflexión y en preguntas nuevas o explicaciones que pretendan darse entre pares.

Podría comentar de manera general que esta metodología flota entre el aprendizaje por descubrimiento guiado y por descubrimiento autónomo en un punto intermedio y más cerca del aprendizaje significativo que del memorístico. Sin embargo cabe mencionar y recordar que este trabajo busca la comprensión básica de temas como proporcionalidad directa e introducción a las funciones lineales, enfatizando en el desarrollo del pensamiento matemático, es posible que las preguntas logren tocar a ciertos alumnos y alumnas mientras que otros seguramente permanecerán con dudas, es por eso que para que pueda ser realmente significativo será importante relacionar el conocimiento con el contexto y la población según una valoración previa de lo que saben y lo que alcanzan nuestras alumnas y alumnos, no se debe dejar en ningún momento solos, los procesos cognitivos así como el conocimiento puede darse más fácil en comunidad.

2.3.3 Piaget: Comprendiendo y contextualizando.

Las aplicaciones del paradigma psicogenético al campo educativo forman parte del Plexus de este trabajo por dos razones fundamentales, la primera es que Piaget junto con Vygotsky son los padres de una corriente innovadora para su época, el constructivismo, dando el inicio de la definición a una nueva categoría. Posiblemente vendrán y existirán más autores que presenten nuevos y mejorados conceptos, pero es casi seguro que al analizarlos caeremos en los principios básicos de las teorías de estos autores.

La segunda es la obvia vigencia que tienen sus ideas en la actualidad. Recordamos a Piaget por sus estadios, así como algunos de los conceptos más usados dentro del salón de clase como lo son la equilibración, des- equilibración, asimilación y acomodación, sin embargo, para no extenderme en este apartado y acotar el presente trabajo, redundo mi interés por la adolescencia dando una descripción más detallada de esta bajo la mirada Psicogenética y presento un conjunto de cuadros y esquemas elaborados por Hernández (2019):

Tabla 4

Paradigma psicogenético	
Problemática	Problemática epistemológica: ¿Cómo conocemos? ¿Cómo pasamos de un estado de conocimiento a otro superior y de mayor validez?

	¿Cómo construimos las categorías básicas que nos permiten pensar racionalmente?
Fundamentos epistemológicos	✓ Constructivismo endógeno-psicológico (con tendencias biologicistas en la explicación) ✓ Interaccionismo
Aspectos teóricos centrales	✓ Teoría de los estadios del desarrollo ✓ Teoría de la equilibración ✓ Desarrollo → Aprendizaje ✓ Estudio de la psicogénesis de categorías del conocimiento lógico-matemático, físico y social
Estrategias metodológicas empleadas principalmente	Método de exploración crítica o método clínico-crítico.

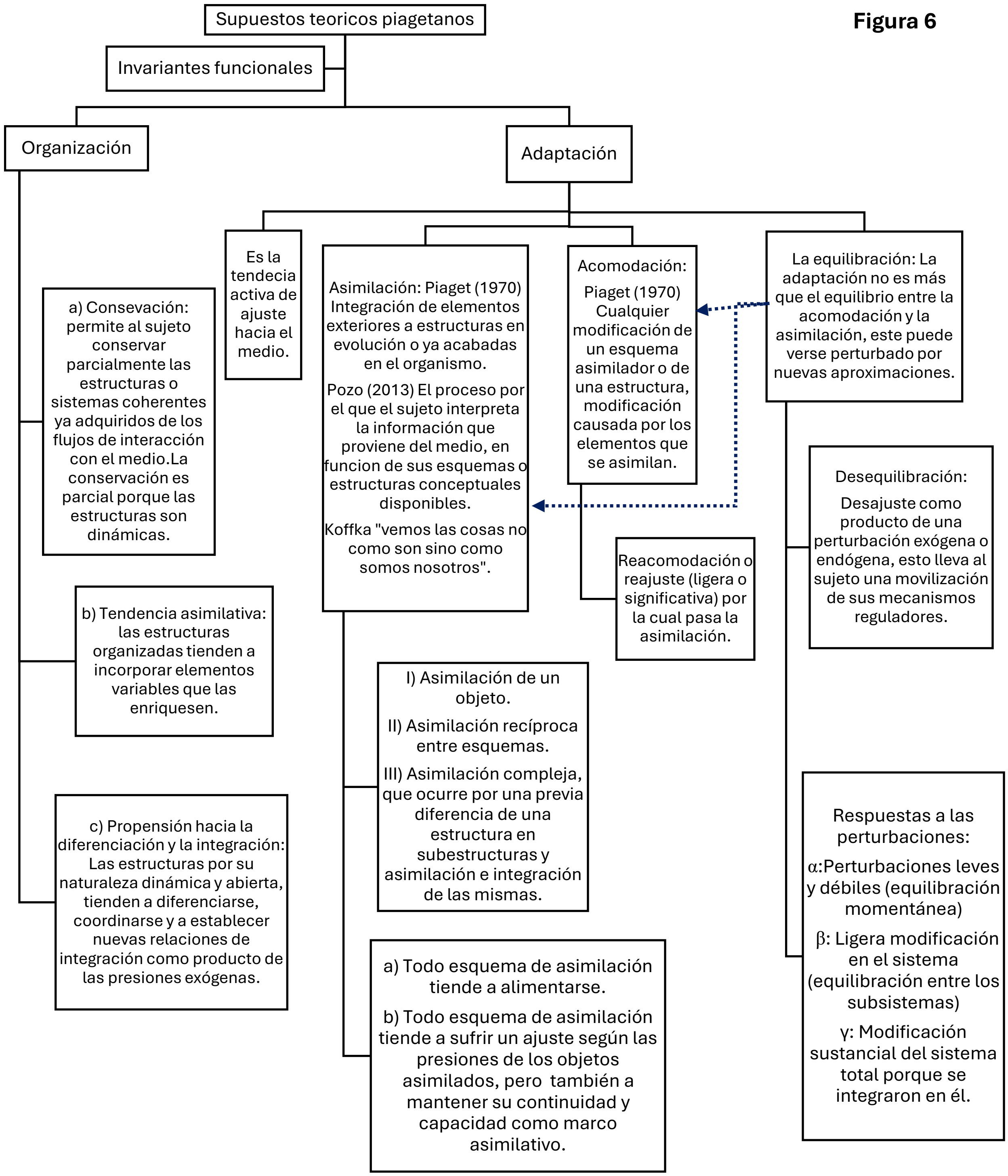
(a partir de Hernández, 2019, p.41)

En el cuadro anterior se puede resumir o sintetizar los puntos de este paradigma, empero, es importante para complementar, aludir algunos comentarios que realiza Hernández (2019) sobre el paradigma psicogenético:

> En la propuesta piagetiana, para explicar el desarrollo cognitivo se deben reconocer las invariantes funcionales de las estructuras variables. Así bien las invariantes funcionales se refieren a los mecanismos básicos-indispensables que permanecen a lo largo del desarrollo cognitivo y que permiten la construcción de las estructuras cognitivas que, a su vez, permiten identificar a los estadios del desarrollo. (Hernández G. , 2019)

De una manera simple Hernández (2020) explica a las invariantes funcionales como estructuras cognitivas que están desde que nacemos y por obviedad no varían, estás son: la organización y adaptación. La primera (organización) permite el desarrollo de funciones que se desarrollarán en los estadios como la conservación, la tendencia asimilativa y la propensión hacia la diferenciación y la integración. Por otro lado, la segunda (adaptación) permite ajustarse al medio y con ello se habla de dos procesos que son la asimilación y la acomodación. A continuación, se presenta otro esquema que ilustrará los conceptos por jerarquía para una fácil comprensión de las ideas:

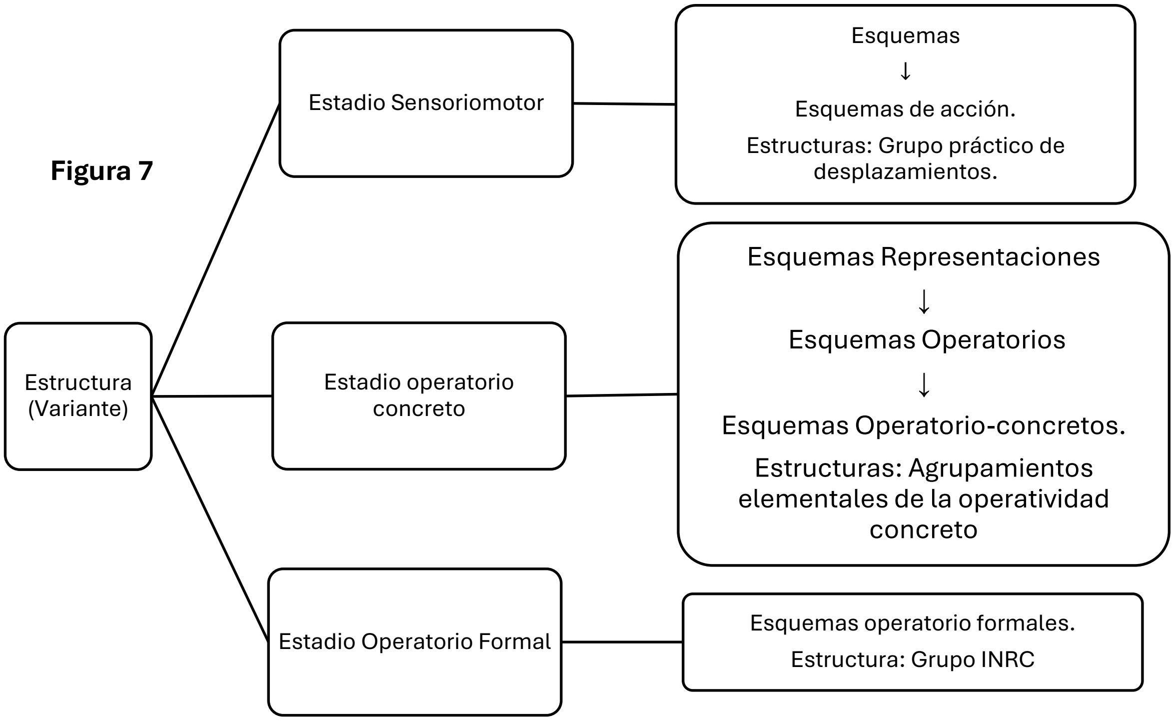
Figura 6



Información tomada de Hernández (2020 & 2019) y Pozo (2013)

El mapa anterior pretende recordar al profesor la descripción de estas invariantes funcionales y con ello, si el docente lo considera posible, reconocerlas en nuestra práctica. Ahora bien, bajo esta línea se presenta el siguiente esquema de Hernández (2019):

Figura 7



(Hernández G. , 2019)

Del mapa anterior, recuperaremos a quienes está dirigida esta propuesta pedagógica: a los adolescentes. De esta manera Piaget nos brinda una herramienta útil para poder dimensionar las capacidades cognitivas de nuestros alumnos y alumnas. Piaget menciona la etapa de las operaciones formales que va de los 11 a 12 hasta los 15 a16 años aproximadamente, Hernández (2020) menciona una síntesis de esta etapa y señala que:

> El adolescente construye sus esquemas operatorios formales; de hecho, en esta etapa tiene lugar la génesis y la consolidación de la estructura que la caracteriza: *el grupo INRC* o grupo de doble reversibilidad y la lógica proposicional combinatoria. El pensamiento del niño se vuelve más abstracto, al grado de que razona sobre

proposiciones verbales que no tienen referente en situaciones concretas (lo real es un subconjunto de lo posible). Su pensamiento se vuelve hipotético-deductivo… pensador formal, está equipado para desarrollar planteamientos de experimentación complejos, plantear hipótesis y controlar inteligentemente las variables involucradas para poder comprobarlas o refutarlas. (p.183)

Complementando la cita anterior, el siguiente cuadro resumen pretende mostrar una síntesis sobre esta etapa con sus características:

Tabla 5

Estadio y conocimiento	Edad y Actividad	Características
Operaciones formales	De los 11/12 – 15/16 años	1.- comienzo de las operaciones formales (11-13 años). 2.-Operaciones formales avanzadas (13-15 años).
Conocimientos	Conocimiento físico.	Se refiere al conocimiento incorporado por abstracción empírica. Kamii (1982 en Hernández, 2020) declara que la fuente de este conocimiento “está en los objetos”.
	Lógico matemático.	La fuente primigenia del conocimiento está en el sujeto y éste la construye por abstracción reflexiva.
	Social.	• Convencional: Producto del consenso de un grupo social, y la fuente de este conocimiento está en los otros. • No convencional: se refiere a nociones o representaciones sociales, y el sujeto quien lo construye y se apropia de él.
Los tres tipos de conocimiento interactúan, y según los piagetianos, el conocimiento lógico-matemático desempeñan un rol preponderante en tanto que, sin él, los conocimientos físico y social no podrían incorporarse, asimilarse ni organizarse cognitivamente.		

(Hernández G. , 2020)

Si bien hablamos en las tablas de resumen anteriores en términos generales sobre el trabajo de Piaget, ahora especificaremos sus contribuciones dentro del terreno de las matemáticas. Dado que no hay un libro en específico que hable sobre éstas contribuciones, a lo largo de varias de sus obras toca contenidos que se relacionan con la comprensión de las matemáticas dentro del terreno cognitivo, por ejemplo, en su publicación de 1967 titulada “Biología y conocimiento”*,* aborda un capítulo llamado: “Las estructuras lógico-matemáticas y su significación biológica” (Piaget J. , 2008), en este apunta que los problemas lógico-matemáticos no forman parte ni de los conocimientos hereditarios ni de los conocimientos aprendidos, es decir adquiridos y no hereditarios (p.280) con ello Piaget comienza a embarcarse en una larga y complicada explicación.

Aunque valdría la pena dedicar un tiempo a comprender lo que se dice en este libro, por falta de tiempo solo se comentarán algunos puntos que son relevantes para este trabajo, como, por ejemplo, este autor suizo a pesar de insinuar que los conocimientos lógicos-matemáticos no son heredados ni aprendidos, sí afirma que poseen un carácter endógeno, es decir que residen de alguna manera en el sujeto.

Así bien, Piaget comenta que hay una relación entre las matemáticas y la lógica; nosotros podríamos distinguir a la lógica como un proceso cognitivo y las matemáticas como conocimiento. Para Piaget parece ser que estas últimas no existen de manera natural o biológica en el cerebro, no obstante, son asimiladas y acomodadas por los sujetos, quienes pueden abstraerlas por mecanismos internos, reconociendo este concepto (abstracción) como la toma de consciencia de un conjunto de acciones u operaciones (p.292).

Entonces dicho lo anterior para Piaget (2008) el ser humano puede asimilar y acomodar las matemáticas, abstrayendo[9], además de que estas estructuras lógico-matemáticas prolongan mucho más lo que parece el funcionamiento organizador general común a toda estructura viviente, por el hecho de que este funcionamiento cognitivo opera

[9] Reserve la interpretación de “abstracción” dentro del marco teórico piagetiano. Para posteriores debates sobre este punto, véase el libro de “Biología y conocimiento” (Piaget J. , 2008) en el capítulo de “Las estructuras lógico-matemáticas y su significación biológica” en los subapartados V y VI (pp.293-305)

en la acción y en el sistema nervioso (p.304) añadiendo que la “abstracción reflexionante”, como él la llama, no tiene un comienzo absoluto y se encumbra en reconstrucciones que se unen y superan así mismas en los procesos cognitivos.

Sin duda Piaget comienza a plantear uno de los tantos problemas interesantes dentro de nuestro cerebro y mente: ¿las matemáticas vienen de fabrica con nosotros o son aprendidas? Y si no es ninguna de estas, pero es las dos a la vez ¿de dónde proviene esa asimilación y acomodación que tenemos de ellas para poder entenderlas, sino tenemos estructuras internas donde residan por herencia? Bueno, ciertamente Piaget comenzó con pruebas a niños sobre la conservación del número, sin embargo, más adelante se sabría sobre las limitaciones de su trabajo, ya que como menciona Stanislas Dehaene (Dehaene, 2016) en su libro “El cerebro matemático”, dentro del apartado “Los errores de Piaget”:

> …el error de Piaget ocurre simplemente cuando consideramos que hay que evaluarlos utilizando métodos de investigación adaptados a su corta edad (p.20).

Dicho lo anterior Dehaene (2016) comenta que Piaget utilizó el método de entrevista clínica, donde básicamente los niños pudieron haber cometido errores de interpretación con los entrevistadores. Para justificar esta explicación, comenta una serie de análisis sobre otros trabajos hechos con niños (por Mehler y Bever en1967), proporcionando explicaciones sobre cómo posiblemente los niños de 3 a 4 años, así como algunos de 2 años, tienen más capacidades de las que este investigador suizo pudo suponer, pese a esto, de ninguna forma Dehaene pretende refutar todo el constructivismo, simplemente invita a reflexionar sus métodos y sus resultados. Esto solo mencionando la parte de la conservación del número.

Ahora pensemos, si bien Piaget no pudo definir el origen de las estructuras lógico-matemáticas, sí pudo plantear que tenemos la capacidad suficiente para desarrollarlas y comprenderlas; tanto es así que llegamos a la cúspide del desarrollo humano, controlando, midiendo y prediciendo nuestro entorno y permitiéndonos tener ventaja sobre otras especies, no obstante, no se ha dado de manera espontánea. Es importante señalar que, siguiendo las etapas piagetianas se puede suponer que los adolescentes, ahora han desarrollado un pensamiento científico, donde la experimentación con hipótesis, así como la existencia de suposiciones y demás comprensiones complejas está dada.

Es decir que cuando los alumnos llegan a la secundaria ya tienen consigo algunas estructuras de clasificación, seriación, número, etc., que se encuentran en equilibrio, así lo comenta este autor en su libro: "De la lógica del niño a la lógica del adolescente" (Piaget B. I., 1996) planteando las evoluciones del pensamiento en la resolución de problemas lógico-matemáticos y algunos problemas de tipo experimental. De manera específica en este trabajo se mencionará el periodo de las operaciones formales y en particular del nivel IIIB que va de los 13 a los 15 años conocido como operaciones formales avanzadas.

Piaget menciona en la obra citada anteriormente, el nacimiento del pensamiento multiplicativo desde el subperiodo de las operaciones concretas nivel IIA, sin embargo, comenta que es hasta el nivel IIIB donde el adolescente comprende que existen relaciones entre variables, aunque su pensamiento aun es limitado en vislumbrar completamente donde están esas relaciones; hablamos de intentar comprender las relaciones de las relaciones. De manera particular para comprender las relaciones de proporcionalidad (en su obra "La representación del mundo en el niño" (Piaget J. , 2021), se apoyó en experimentos donde exploraban la formación de sombras que dependían del tamaño del objeto, la luz del foco o de la pantalla donde se proyectaban.

De lo anterior, no hay que perder de vista que Piaget comienza sus explicaciones sobre proporcionalidad desde las operaciones concretas con niños de entre 9 a 11 años (preadolescentes), sin embargo, como bien mencionan Ty W. Boyer, Susan C. Levine, y Janellen Huttenlocher en su artículo "Development of Proportional Reasoning: Where Young Children Go Wrong" (Ty W. Boyer, 2009):

> A pesar de la importancia y la omnipresencia del razonamiento proporcional, existe desacuerdo sobre su evolución. Una perspectiva teórica, presentada originalmente por Piaget e Inhelder (1951-1975), propone que los niños son incapaces de razonar proporcionalmente hasta aproximadamente los 11 años de edad. Según la teoría piagetiana, el razonamiento proporcional implica comprender la "relación entre relaciones" y es un sello distintivo de las operaciones formales. (p.4)

Dicho lo anterior cabe señalar la importancia del desarrollo de este pensamiento lógico-matemático en los adolescentes, por lo que el docente encontrará en el capítulo cuatro una propuesta que pretende aportar ideas para el desarrollo de clases, que contribuyan no solo la comprensión de los conceptos, sino que propicien el desarrollo de solidos cimientos para la comprensión de temas complejos o abstractos dentro del ámbito matemático.

2.3.4 Vygotsky: El paradigma sociocultural

Si bien Piaget se ocupó de manera específica en el individuo aislado y sus procesos individuales (endógenos) al observar a diferentes niños en sus entrevistas clínicas, también reconoció en varios trabajos la importancia de las “coordinaciones cooperativas” para el desarrollo de las operaciones intelectuales, de manera más precisa Hernández (2020) describe sobre textos de Piaget que:

> En particular señaló que las coordinaciones intraoperatorias corresponden a coordinaciones interoperatorias, estas últimas hacen posible las actividades verdaderamente cooperativas. (Hernández G. , 2020)

Así también Hernández (2020) en una nota al pie describió la explicación de Doise (1988) al comentar: “la insociabilidad entre las coordinaciones intraindividuales (operaciones) y las interindividuales (cooperación) establece un planteamiento paralelista que, en el plano general, es posible aceptar, pero también apunta que debe tenerse en cuenta las coordinaciones interindividuales preexistentes a las otras." (p.194)

Acompañando este reconocimiento y las corrientes que surgieron como la "Psicología social genética", propiamente Piaget no se enfocó en esta línea social y sería injusto hacer una crítica sin el reconocimiento de su ardua labor que sin duda alguna coopera con el universo educativo, sin embargo, por suerte existen otros trabajos complementarios y reconocidos encaminados específicamente al contexto educativo y estos son los realizados por el legendario Lev Vygotsky (1896-1934).

De manera personal al principio de mi formación como estudiante de pedagogía me encontraba embelesada por los trabajos de Piaget, recuerdo haber leído "Biología y Conocimiento" con un interés genuino por descubrir y entender nuevos conceptos.
Sin embargo, durante mi práctica docente y mis seminarios finales de Educación Matemática este autor bielorruso me impactó en varios sentidos y formas, desde su teoría que considero más accesible a comparación de Piaget, hasta la aplicación de sus conceptos en el plano educativo; siempre seré seguidora de las ideas Piagetianas, pero de igual manera con las Vigotskianas.

De origen judío, Vygotsky fue reconocido como un niño precoz, estudioso de la historia, filosofía, derecho, psicología, entre otras áreas, así también dedicó una parte de su vida al trabajo docente, este autor tiene una historia de vida muy interesante, sus aportes son indudables. A continuación, se presenta un cuadro hecho por Hernández (2020):

Tabla 7

Paradigma histórico-cultural	
Problemática	El estudio de la conciencia y de las funciones psicológicas superiores bajo una perspectiva que integra la dimensiones psicológica y cultural
Fundamentación epistemológica	Constructivismo social. Perspectiva materialista-histórica.

Aspectos teóricos centrales	✓ La mediación cultural. ✓ Estudio de las funciones psicológicas superiores. ✓ El concepto de zona de desarrollo próximo. ✓ Aprendizaje → Desarrollo. ✓ La importancia de la mediación semiótica (el lenguaje) en la cognición individual y social.
Estrategias metodológicas principalmente empleadas	Estudios de microgénesis de los procesos. Estudios de análisis genético-comparativo (en el desarrollo psicológico y con sujetos con capacidades diferentes). Estudios transculturales. Estudios etnográficos y análisis del discurso.

(p.160)

Ahora bien, reconociendo lo dicho por Hernández (2020) "es difícil presentar un resumen de los aspectos fundamentales de una obra tan amplia y compleja como lo es el paradigma sociocultural", sin embargo, en un intento por mostrar sus principales aportaciones en la práctica educativa se muestra los siguientes esquemas y cuadros:

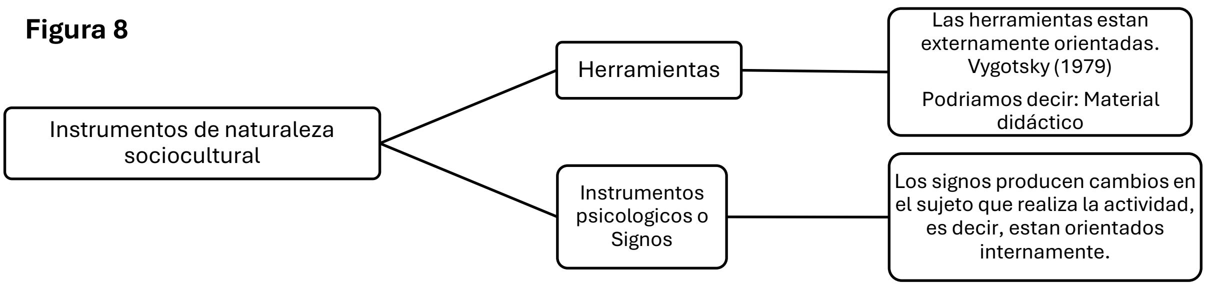
Tabla 8

Núcleo teórico	a) Las funciones psicológicas superiores sólo pueden entenderse a través del estudio de la actividad instrumental mediada.
	b) Las funciones psicológicas superiores tienen su origen y se desarrollan en el contexto de las relaciones socioculturalmente organizadas.
	c) Las funciones psicológicas superiores no pueden ser estudiadas como entidades fosilizadas, sino a través de la aplicación de un análisis genético.
Planteamiento interaccionista dialectico S ↔ O	Relación de indisociación, de interacción y de transformación recíproca iniciada por la actividad mediada del sujeto.
Formas de mediación social	a) La intervención del contexto sociocultural en un sentido amplio (los otros, las prácticas socioculturalmente organizadas, etc.)
	b) Los artefactos socioculturales que usa el sujeto cuando conoce el objeto.
Actividad del sujeto como una práctica mediada por artefactos y por condiciones histórico-culturales.	

Sintetizado de Hernández (2020)

Esta tabla en si misma contiene información general que ayudará al docente a integrar las ideas principales de este modelo, cabe reconocer que un objetivo importante para este autor es "el estudio del origen sociocultural de las funciones psicológicas superiores” por ejemplo: el desarrollo del pensamiento matemático constituye un caso de actividad mental compleja o una expresión de funciones psicológicas superiores, dado que tiene un origen cultural y está basado en el uso de signos como el lenguaje y ciertas ideas que se van desarrollando.

Figura 8



Resumido de Hernández (2020)

En la figura anterior se puede observar como la actividad mental está basada en el uso de estos instrumentos o signos. Cabe mencionar que la matemática se apoya de estas herramientas y signos. Ahora bien, distingamos algunos conceptos sumamente importantes dentro de este constructivismo social, como lo son las funciones cognitivas naturales y superiores:

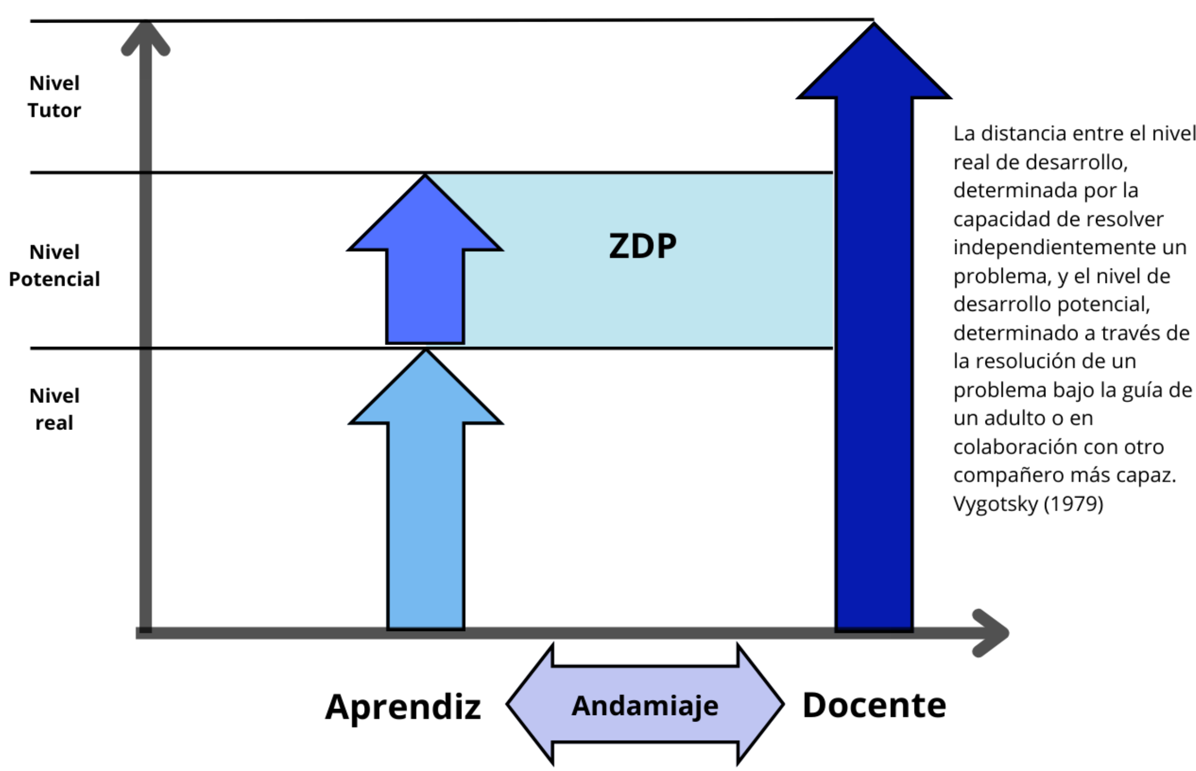
Tabla 9

	Funciones psicológicas naturales	**Funciones psicológicas superiores**
Producto de	Línea de desarrollo natural (origen biológico)	Línea de desarrollo social (origen sociocultural)
Característica esencial	Actividad directa o no mediada	Actividad mediada por instrumentos psicológicos
Control	Del entorno	Del individuo
Modo de realización	No consciente.	Consciente.
Ejemplo	• Memoria involuntaria • Atención • Inteligencia práctica o sensorio-motriz	• Memoria voluntaria • Atención controlada • Inteligencia representativa o semiótica

(Hernández, 2020, p.162)

Como pudimos observar, dentro de este trabajo podríamos dar un ejemplo de las funciones cognitivas superiores, al abordar el tema de la sofisticación y razonabilidad que tienen los alumnos al asimilar y acomodar conceptos e ideas matemáticas. Estos dos conceptos (sofisticación y razonabilidad) surgen de la integración progresiva de formas de pensar, que, a lo largo de las lecciones y tareas, va desarrollando el alumno. Ahora recordemos la zona de desarrollo próximo (ZDP), que dentro de la lesson study será fundamental al momento de orientar algunas preguntas con los estudiantes:

Zona de desarrollo próximo (ZDP) **Figura 9**

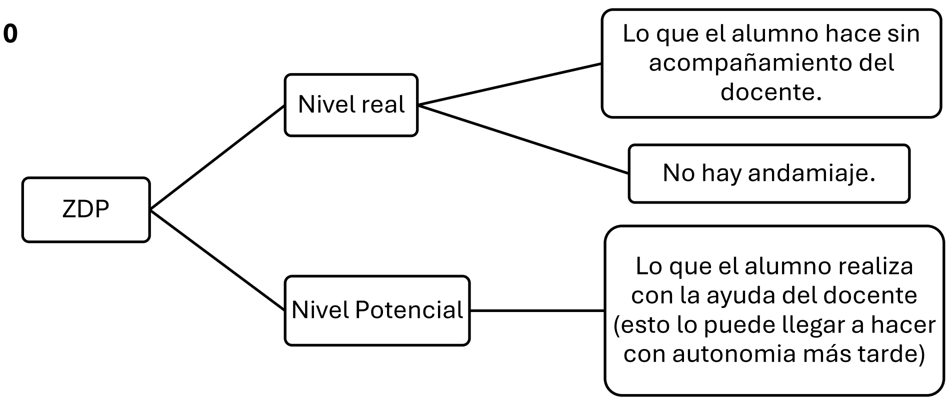


(Díaz, 2010)

Sin duda alguna el concepto más ocupado por los profesores en el aula es la ZDP que permite generar un panorama de lo que los alumnos pueden hacer solos y lo que pueden alcanzar a realizar con el andamiaje. Ahora valdría la pena mencionar lo que Hernández (2020) dice sobre la correcta interpretación de la ZDP:

"… debe tomar partido explícitamente por los siguientes aspectos: a) un enfoque **holístico** antes que un enfoque fragmentado de enseñanza-aprendizaje de habilidades o saberes aislados y separables; b) la mediación social de los instrumentos culturales en el aprendizaje y c) que permita el análisis de los procesos de transición y de cambio" (véanse Moll 1993, Newman *et al*. 1991). (p.227)

Figura 10



Ahora identificaremos las conceptualizaciones del alumno, docente, aprendizaje, enseñanza, metas y objetivos educativos dentro de esta línea constructivista.

Tabla 10

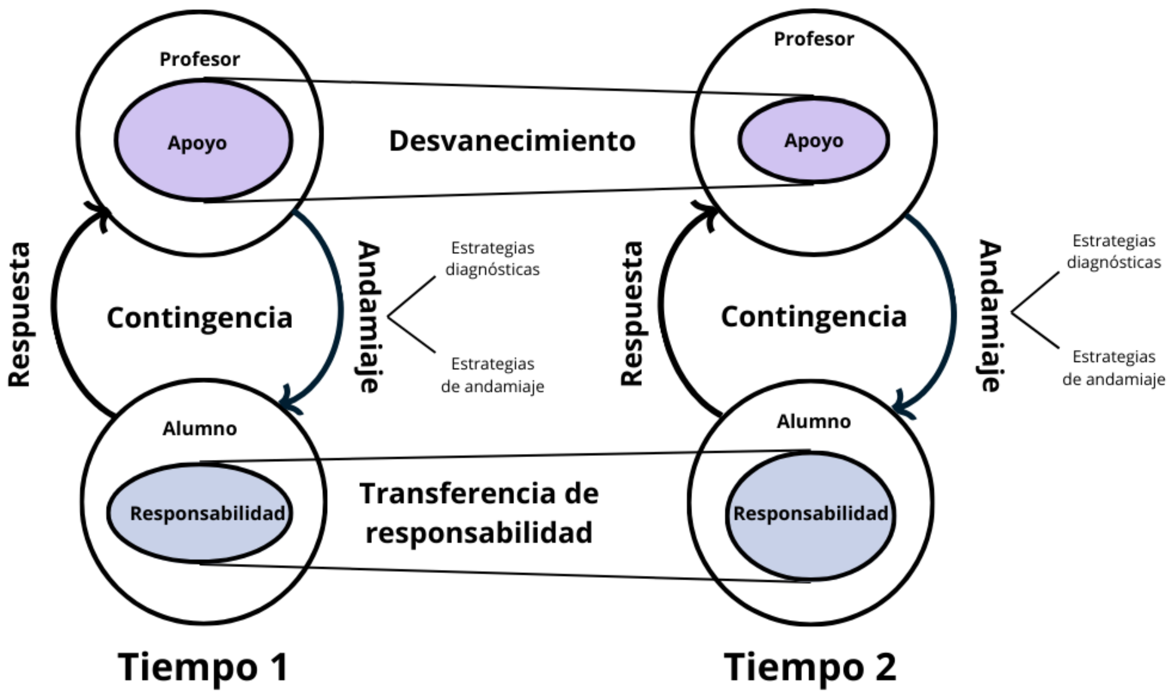
Alumno	Ser social, producto y protagonista de las múltiples interacciones sociales en que se involucra a lo largo de su vida escolar y extraescolar. a) Reconstruye los saberes, pero no lo hace solo, porque ocurren procesos complejos. b) Se entremezclan los procesos complejos y de construcción personal y procesos auténticos de construcción en colaboración con los otros que intervinieron, de una o de otra forma en este proceso (Wertsh 1993). c) Los pares más capacitados también pueden promover la ZDP d) El lenguaje es un instrumento mediador y posibilitador de las interacciones, los miembros prestan, solicitan y reciben ayuda, mejoran y reconstruyen la representación cada vez más diferenciada de la tarea o situación acometida conjuntamente.
Docente	El docente brinda al alumno andamiaje, este es el apoyo ajustado y temporal que el experto da como producto de sus interacciones, este debe ser:

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">a) Ajustado a las necesidades de aprendizaje del alumno.
b) Debe ser transitorio o temporal.
c) Debe ser explicitado y tematizable. Que el alumno tome consciencia de que en la realización y mejora de su aprendizaje a ocurrido un proceso de ayuda prestada y que por tanto es producto de una situación colaborativa.</td></tr>
<tr><td>Aprendizaje</td><td colspan="2">El aprendizaje tiene un concepto de carácter esencialmente social e interactivo y la relación entre este concepto y la ZDP.
Aprendizaje y desarrollo establecen una relación indisociable de influencia reciproca desde el momento mismo del nacimiento del niño o niña.
Aprendizaje y desarrollo forman así una unidad interdependiente en un patrón de espiral complejo.
No hay aprendizaje sin un nivel de desarrollo y tampoco hay desarrollo sin aprendizaje (véase, Pozo 1989).</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Enseñanza</td><td colspan="2">El ser humano se desarrolla en medida en que se apropia de una serie de instrumentos (físicos y psicológicos) de índole sociocultural, y cuando participa en dichas actividades prácticas y relaciones sociales con otros que saben más que él acerca de esos instrumentos y de esas prácticas… parece valida la afirmación de Bruner (1988) de entender los procesos educativos en general como “foros culturales”.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Como producto de la participación del niño en los contextos escolares ocurre la transición de los conceptos espontáneos hacia los conceptos científicos.</td></tr>
<tr><td>Los conceptos espontáneos son de naturaleza denotativa, están elaborados principalmente sobre aspectos perceptivos, funcionales o contextuales, y se desarrollan, como su nombre lo dice, espontáneamente como secuencia de las experiencias cotidianas que tienen los niños.</td><td>Los conceptos científicos se construyen sobre la base de los conceptos espontáneos, los cuales se emplean como signos mediadores para dicho aprendizaje, se organizan en formas de sistemas complejos, estableciendo entre sí relaciones lógicas coherentes. Se aprenden sobre una base lingüística y racional, en apoyo del docente, en un contexto cultural especialmente diseñado para trabajar con los conceptos por los conceptos mismos.</td></tr>
<tr><td>Metas y objetivos</td><td colspan="2">La educación debe de estar dirigida en su diseño y en su concepción, a promover el desarrollo de las funciones cognitivas superiores y, con ello, el uso funcional, reflexivo y descontextualizado de instrumentos (físicos, pero específicamente psicológicos) y tecnologías de mediación sociocultural.
Las metas educativas en función de lo que la cultura en particular determina como valioso y relevante para que lo aprendan los miembros más jóvenes.</td></tr>
</table>

(Hernández G. , 2020)

Llegados a este punto cuando se menciona el andamiaje como el acto que realiza el docente para apoyar al alumno es importante mostrar una representación gráfica que ayudaría a la acomodación de esta idea.

Figura 11



(Hernández G. , Psicología de la educación: una mirada conceptual, 2018)

La idea de andamiaje es muy importante para el docente, más adelante se notará su importancia en la planeación que se realiza en este trabajo; al realizar intervenciones precisas se tratará de buscar el asombro y fomentar tipos de pensamiento (en particular matemático) que serán valiosos para el alumno. Pienso que el docente tiene que buscar de alguna manera lo que llaman en la Teoría de la Gestalt el insight (Pozo, 2013) considero apropiado mencionarlo y relacionarlo con el andamiaje ya que, así como esta teoría lo cree, existe una reestructuración que tiene lugar por esta idea o comprensión súbita del problema (p.173).

Identifico este fenómeno de manera particular en el momento de la transferencia de la responsabilidad, sin embargo, cada profesor en algunas ocasiones podría decir, que este fenómeno se da en diferentes momentos ya sea en un plano expositivo o en la realización específica de tareas, incluso entre las pláticas con sus pares, todos estos escenarios dan cabida a esta valiosa idea dentro de este proceso. Ahora bien, como se mencionó párrafos arriba, este es un esfuerzo por subrayar los puntos principales y más utilizados de esta teoría en la práctica docente, o al menos mencionarlos y tomarlos en cuenta para la realización de cualquier planeación, más adelante se podrá observar cómo estas ideas están implícitas en la propuesta pedagógica que aquí se presenta y que se adscribe a la línea japonesa Lesson Study.

2.3.5 Masami Isoda & Shigeo Katagiri: Pensamiento matemático y cómo desarrollarlo en el salón de clases (síntesis)

A Shigeo Katagiri se le reconoce la teoría acerca del "Pensamiento Matemático que comenzó en los años 60 y fue completada mayormente en la década de los 80; sus grupos de estudio de clase han estado usando sus ideas desde los años sesenta hasta el día de hoy" (Isoda S. K., 2016). Es destacable su contribución con la forma de acomodar las matemáticas, "Katagiri las compone sobre la base de la actitud matemática, formas de pensar e ideas" (Isoda S. K., 2016). Este autor nos presenta un modelo interesante, sin embargo, existen otros colaboradores de su trabajo como veremos a continuación.

Ahora bien, el Dr. Masami Isoda es catedrático e investigador del Instituto de Ciencias Humanas en la universidad de Tsukuba en Japón, recibió la distinción de Profesor Honoris Causa del Instituto de Matemáticas en la Pontificia Universidad Católica de

Valparaíso (PUCV) en Chile por sus distinguidos aportes para el mejoramiento de los aprendizajes escolares en matemáticas basado en el estudio de clases (PUCV, 2023)[10].

Pero ¿Qué es el Estudio de Clases[11] en Japón?:

> El estudio de clases (Jugyō kenkyū) es un sistema de planificar y entregar la enseñanza y el aprendizaje que tiene como objetivo desafiar a los profesores a innovar sus enfoques de enseñanza y a reconocer las posibilidades de crecimiento intelectual y responsabilidad de los alumnos fomentando la confianza. Funciona cuando los profesores desarrollan una secuencia de clases juntos: Planificar (preparando la clase anticipadamente, incluyendo una predicción del posible aprendizaje), hacer (presentando la clase a los niños mientras otros profesores observan) y reflexionar acerca del aprendizaje con los observadores (a través de la discusión) la manera de mejorar la clase para una futura presentación en una escala mayor. Tiene como objetivo desarrollar un buen conocimiento del contenido pedagógico que va a ser útil para la buena práctica cotidiana de los profesores y el consiguiente aprendizaje a largo plazo de los estudiantes. (Isoda S. K., 2016)

El estudio de las clases se basa en planificar la clase que se impartirá (en este caso con contenidos de Matemáticas para posteriormente llevarla a cabo) pero, aquí entra la observación de otros docentes dentro de la clase que se llevará a cabo. Los maestros observan y toman notas con el objetivo, a posteriori, de brindar una valoración y opiniones

---

[10] Más información acerca de sus trabajos en (University of Tsukuba , 2023)

[11] 授業研究 *Jugyō kenkyū* como lo llaman en Japón.

sobre cómo mejorarla; hablamos de críticas constructivas que servirán al docente para mejorar sus futuras clases.

En un video proyectado en las clases de optativas del Campo de Educación Matemática observamos los comentarios de algunos docentes y directores de una escuela en Japón, de manera particular me referiré a un subdirector de alguna escuela primaria en ese país de nombre Kozo Tsubota cuando comenta lo siguiente:

> El estudio de las clases es una oportunidad para que las clases de los maestros sean observadas por otros maestros. Su principal propósito es combatir cualquier sensación de complacencia en el maestro que está enseñando la clase, motivándolos a escuchar la crítica constructiva de otros maestros, de tal forma que puedan mejorar sus habilidades de enseñanza. Es también una buena oportunidad para que los maestros vean cómo los estudiantes piensan y comparten sus ideas con el resto de la clase. En conclusión, es una buena oportunidad para nutrir el ojo, para evaluar el material didáctico que conduce el punto de las lecciones en casa, y el ojo para observar a los estudiantes, escuchando lo que dicen y viendo cómo piensan. (TSUKUBA, 1995)

Reunión de Estudio Educativo de docentes en Japón (TSUKUBA, 1995)

Como podemos observar estos estudios de clase se especifican en la Educación Matemática (EM), dado que esta área de conocimiento es de vital importancia en el desarrollo de los y las alumnas (como se mencionó de manera particular en el primer capítulo) dentro del contexto escolar mexicano, así como en Japón. Así también el enfoque de la Lesson Study (LS) "propone que los profesores, educadores e investigadores desarrollen sus propios enfoques de enseñanza y formulen teorías acerca de su propio conocimiento de la enseñanza que será compartido de manera más amplia" (Isoda S. K., 2016).

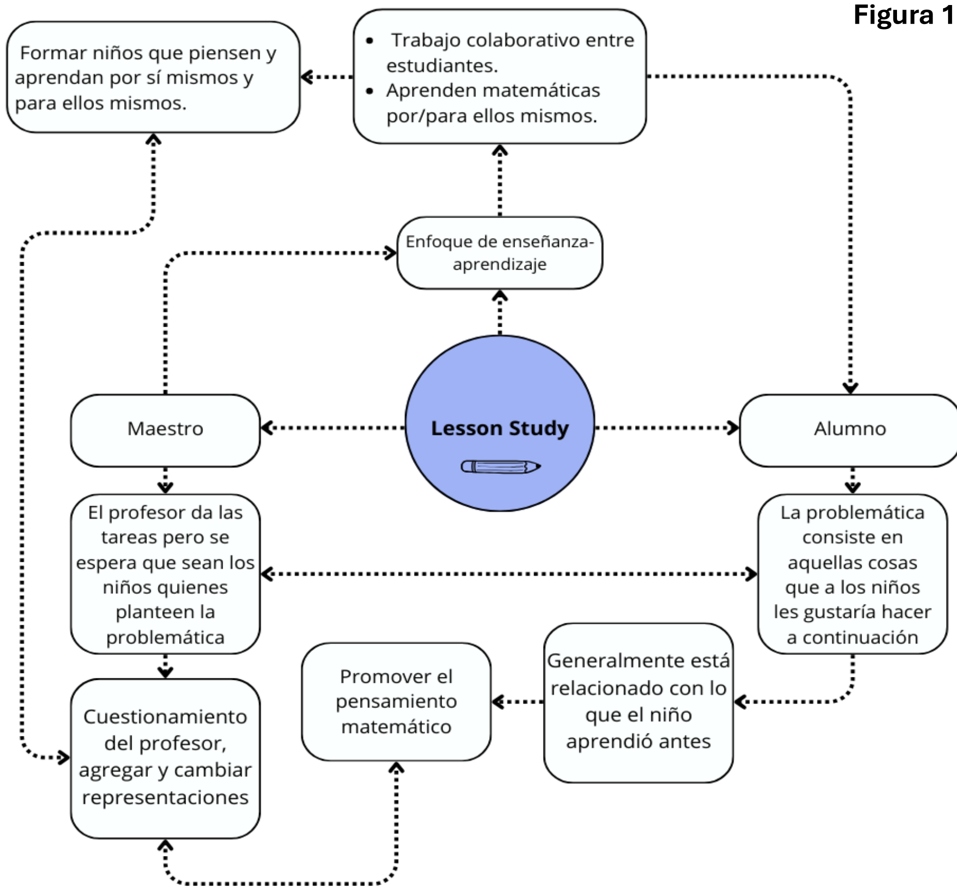
El enfoque de enseñanza como resultado del estudio de las clases según Stigler y Hiebert en Isoda (2016) dice lo siguiente:

> Los profesores comienzan presentándoles a los estudiantes problemas matemáticos que utilizan principios que ellos todavía no han aprendido. Luego, ellos trabajan solos o en pequeños grupos para idear una solución. Después de unos pocos minutos, los estudiantes son llamados a presentar sus respuestas; la clase entera trabaja con los problemas y soluciones, descubriendo los conceptos y razonamientos matemáticos relacionados. (Isoda S. K., 2016)

Así también un documento llamado "Antes que sea demasiado tarde: un informe a la nación de la Comisión Nacional de Enseñanza de Matemática y Ciencias para el siglo XXI" comentó lo siguiente: "…En Japón, la norma es el trabajo colaborativo entre sus estudiantes, <u>que es estrechamente supervisado</u>" (Isoda S. K., 2016).

El Estudio de las Clases está reconocido como "una mejora al sistema de enseñanza realizado por profesores" (Isoda S. K., 2016). A continuación, se presenta una figura que muestra una síntesis del enfoque de enseñanza-aprendizaje en esta línea, así como la acción del maestro y alumna(o).

Figura 12



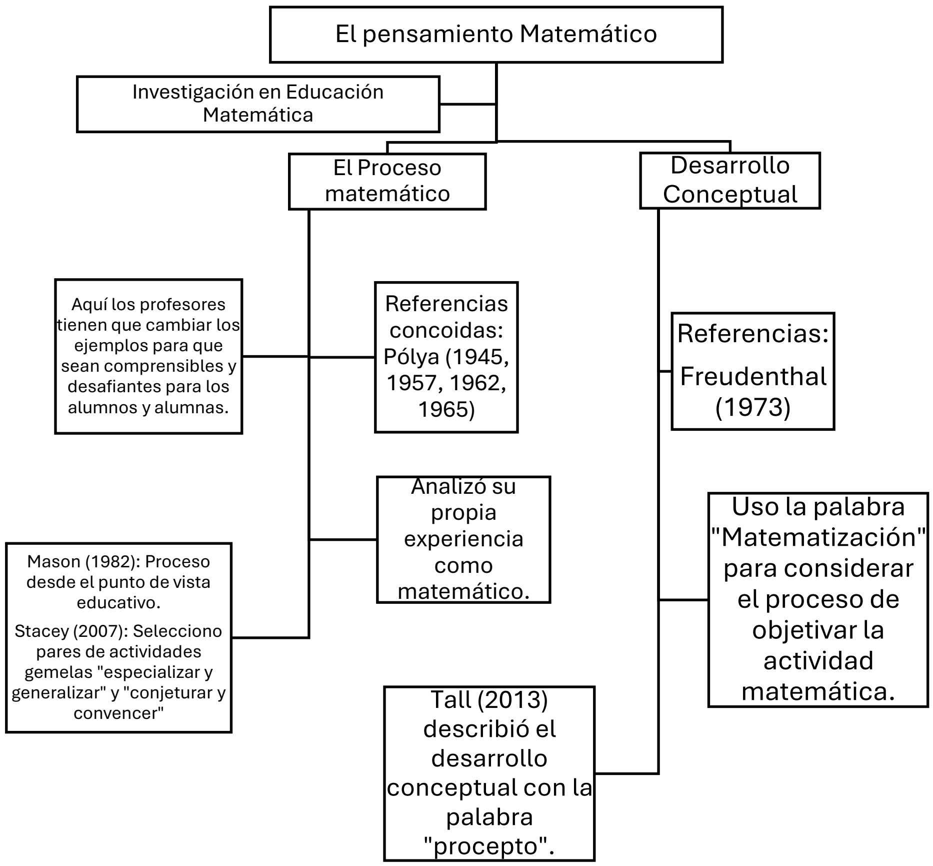
Sintetizado de Isoda (2016)

El objetivo dentro de esta metodología con la cual trabajaremos es el de desarrollar el pensamiento matemático, pero ¿Qué es el Pensamiento Matemático?:

> El pensamiento matemático se mira como una habilidad para pensar y tomar decisiones…ya que hace entender la necesidad de usar el conocimiento y las habilidades para formar a niños que piensen y aprendan matemáticas por sí mismos y para sí mismos (Isoda S. K., 2016).

En la siguiente figura se muestran algunas referencias que podrían coincidir y dar sentido a las bases de esta idea sobre el pensamiento matemático:

Figura 13



Resumido de Isoda (2016)

Sin embargo, lo anterior solo son referentes sobre el enfoque de la LS, Isoda (2016) comenta que, si los académicos ven la obra como una reformulación de “como planear y resolver problemas”, de George Pólya, sus visiones podrían explicarse como un obstáculo epistemológico. (p.11) por lo cual debe considerarse que la obra de Isoda y Katagiri es producto del estudio de las clases japonesas que se basa en documentos de 1953 observando las clases, incluso mucho antes, como se mencionó en Masami et al. (2020).

Veamos ahora esta línea de investigación y práctica sobre el desarrollo del pensamiento matemático desde los puntos respectivos al docente, el alumno(a), el aprendizaje-enseñanza, y los objetivos o metas educativas.

Tabla 11

Desarrollo del Pensamiento Matemático Lesson Study (DPM-LS)		
Pensamiento matemático como objetivo de la educación	• Desarrollar habilidades y competencias en cada uno de los niños en edad escolar, incluyendo la habilidad de encontrar asuntos interesantes por sí mismos, aprender por sí mismos, tomar decisiones de manera independiente y actuar. Así, cada niño o estudiante puede resolver problemas con mayor habilidad, sin importar cuánto pudiera cambiar la sociedad en el futuro. • Habilidad de ser capaces de determinar por sí mismos qué deberían hacer, o que deberían encargarse de hacer. • Formación del carácter Humano: ▪ Adquisiciones: contenidos. ▪ Reflexión: pensamiento y procesos matemáticos (Ideas matemáticas, actividades y pensamiento matemático). ▪ Apreciación: valores, actitudes y hábitos matemáticos	
Enseñanza – Aprendizaje	Enfoque de resolución basado en problemas: • El profesor propone tareas. • Se espera que los niños planteen el problema y la necesidad de resolverlo. • Que cosas les gustaría hacer a los niños a continuación (sobre la base de lo ya aprendido).	
Fases	Influencia del profesor	Situación de los niños y niñas
Plantear el problema	Plantear la tarea con un objetivo oculto.	Les han dado la tarea en un contexto, pero no necesariamente conoce el objetivo de clase.
Planificar y predecir la situación	Guiar a los niños a reconocer el objetivo	Tener expectativas, reconocer lo conocido y lo desconocido, los problemas reales (incluyendo el objetivo de la clase) y sus enfoques.
Ejecutar las soluciones / solución independiente.	Apoyar el trabajo individual	Tratar de resolver para generar ideas. Para preparar explicaciones, aclarar dudas y obtener lo conocido y las incógnitas en cada enfoque, y

		tratar de representar mejores formas. Si cada niño tiene ideas, es suficiente. (No espere que todos los niños den respuestas correctas, pues responder no es el objetivo principal de la clase. Mientras espera, los niños pierden ideas y la sensación de urgencia por encontrar la situación, que debe ser discutidas).
Explicar y discutir / validar y comparar.	Guiar la discusión relación al objetivo	Explicar cada acercamiento a la solución y compararlos sobre la base del objetivo a través del puente que conecta lo conocido con lo desconocido. (El trabajo principal de la clase es la comprensión de nuevas ideas, de nuevas maneras de trabajar, y aprender a valorarlas)
Resumir / aplicaciones y desarrollo posterior.	Guiar la reflexión	Saber y reconocer lo que aprendieron durante la clase y precisar sus logros, formas de pensar, ideas y valores. La valoración de lo nuevo a través de la aplicación de ideas.

(Isoda S. K., 2016)

Como se puede observar el docente brinda andamiaje, apoyo, guía o acompañamiento en este proceso, así también a diferencia de muchos otros planes de clase este no se centra en los resultados sino en el proceso, no se espera que los niños den respuestas correctas, responder no es el objetivo. Por otro lado, Isoda (2016) comenta, con relación a la secuencia didáctica, que no necesariamente deben de ser seguidas estas fases con exactitud, pues el profesor maneja la clase dependiendo de su objetivo, el contenido, y el conocimiento en los niños y niñas. Tampoco es necesario aplicar todas estas fases en un solo bloque, pensar en periodos puede ser buena idea, subraya que, aunque puede haber variaciones, las fases son fijas cuando se busca el pensamiento matemático, además expresa que aquellos que no puedan resolver la actividad pueden aprender de sus pares en la fase de explicación y discusión.

Esta metodología requiere especificar un poco más desde la mirada de los docentes:

> Desde el punto de vista de los profesores, el objetivo de la enseñanza es la relación de problemas de los niños y niñas. Después de resolver la tarea, el profesor llama a los niños a presentar sus ideas al frente y los niños comienzan a explicar sus respuestas. El profesor solo elogia a los niños si ellos encontraron las soluciones y luego comienza a hablar sobre el objetivo de la clase. Estas clases usualmente ocurren en la etapa desafiante de una aproximación de final abierto. (Isoda S. K., 2016)

Algo más en lo que conviene especificar ya que es fundamental para la promoción del DPM-LS es la parte referente a la formación del carácter humano, ya que Isoda (2016) señala a este como el intento del profesor por enseñar conocimientos, competencias y habilidades, así como valores que resultan importantes; podremos ver la formación de este carácter en el reconocimiento de la belleza de los patrones o incluso los posibles insight que algún alumno o alumna pueda experimentar.

La adquisición de contenidos habla del conocimiento o los temas vistos dentro del pensamiento matemático (números, operaciones, relaciones y funciones, etc.) la reflexión se refiere a los procesos y pensamientos (dentro del terreno cognitivo) donde se generan habilidades para resolver situaciones con relación a los contenidos, aquí hablamos de las estructuras de pensamiento que desarrolla el alumno, y la apreciación de valores, actitudes o hábitos, que son experimentadas por los alumnos ante su actividad en el DPM, por ejemplo, los profesores pretenden hacer que el alumno o alumna descubra por sí mismo(a) con curiosidad, esta se ve como un valor ya que motiva al alumno(a) a explorar y muy importante al momento de la participación en clase.

Isoda (2016) también menciona algunas claves para despertar valores y describe:

A) La belleza se presenta cuando algún estudiante descubre un patrón y experimenta curiosidad por ver cómo funciona aquello que está entendiendo. Eso lo lleva a una fácil representación o incluso poder generalizar, entonces resulta bello descubrir la respuesta a la interrogante de ¿Qué desea hacer ahora? Tras reflexionar, pensar o estructurar alguna respuesta y descubrir lo antes dicho.

B) La claridad es muy importante para que el alumno pueda comprender y logre describir sus propios procesos o métodos, esto conlleva un orden y organización de las ideas y esquemas mentales.

Por los componentes antes descritos de manera sucinta se afirma que el DPM está hecho para la formación del carácter humano. Con todo esto, vale la pena continuar mostrando algunos aspectos de este método con el fin de apoyar al docente en la comprensión de cómo desarrollar el Pensamiento Matemático. Desde mi experiencia en la aplicación de este modelo una "buena planeación" es de las actividades más importantes, por ello el docente debe tener dominado el tema[12], posiblemente en algunas partes fingirá ingenuidad, pero tendrá la claridad de saber dónde habrá dificultades, por lo tanto, dentro de su planeación debe especular todas las posibles respuestas que surgirán de aquella tarea.

[12] Cabe mencionar un reto que presenta el profesor dentro de esta metodología ya que, en ella pueden emerger algunas preguntas o problemáticas que el docente no contemple o desconozca o incluso abordar algún problema que no tenga solución única o que ni siquiera la tenga, pero esto sin duda enriquecerán su práctica a medida que las considere y las añada a su próxima planeación, ante tal situación de desconocimiento el docente puede sincerarse y comentar como mencionó el Dr. Tenoch Cedillo en un video sobre reflexiones de la práctica docente "el profesor debe vencer el miedo de decir en un momento dado: permíteme pensarlo esto todavía no lo entiendo o todavía no lo sé". (UPN y ILCE, Serie Enseñanza de las matemáticas: Aritmética (Módulo 2: Máximo Común Divisor), 2000)

(TSUKUBA, 1995)

A continuación, mostraremos un modelo de planeación que sugiere en su libro Isoda (2016) con el fin de ilustrar la Planificación de Clases que se presenta en la imagen anterior. Cabe reconocer que este punto es la prioridad en el desarrollo de este trabajo, buscando mostrar una perspectiva diferente, describiendo, comparando, analizando, comprendiendo y aplicando esta metodología para llegar a la evaluación y la creación de otras planeaciones (en cuanto a contenidos) para los docentes interesados en promover el DPM.

Tabla 12

Ilustración de una clase desde la LS para el DPM			
i. **Tipo de pensamiento matemático que se va a cultivar** Se refiere a los métodos matemáticos, ideas y actitudes que se desarrollan en este proceso de DPM.	Indica el principal tipo de pensamiento matemático que se intenta cultivar. Hay que recordar que se utiliza el enfoque en resolución de problemas.		
	Métodos matemáticos	**Ideas matemáticas**	**Actitudes matemáticas**
	M1) Inductivo M2) Analógico M3) Deductivo M4) Integrador M5) De desarrollo M6) Abstracto (abstracción) M7) Que simplifica (simplificación) M8) Que generaliza (generalización)	I.1) De Conjuntos I.2) De Unidades I.3) De Representaciones I.4) De Operación I.5) De Algoritmos I.6) De Aproximaciones I.7) De Propiedades fundamentales I.8) Pensamiento funcional	A.1) Concretizar A.2) ¿Cuán razonable es? A.3) Claridad A.4) Sofisticación

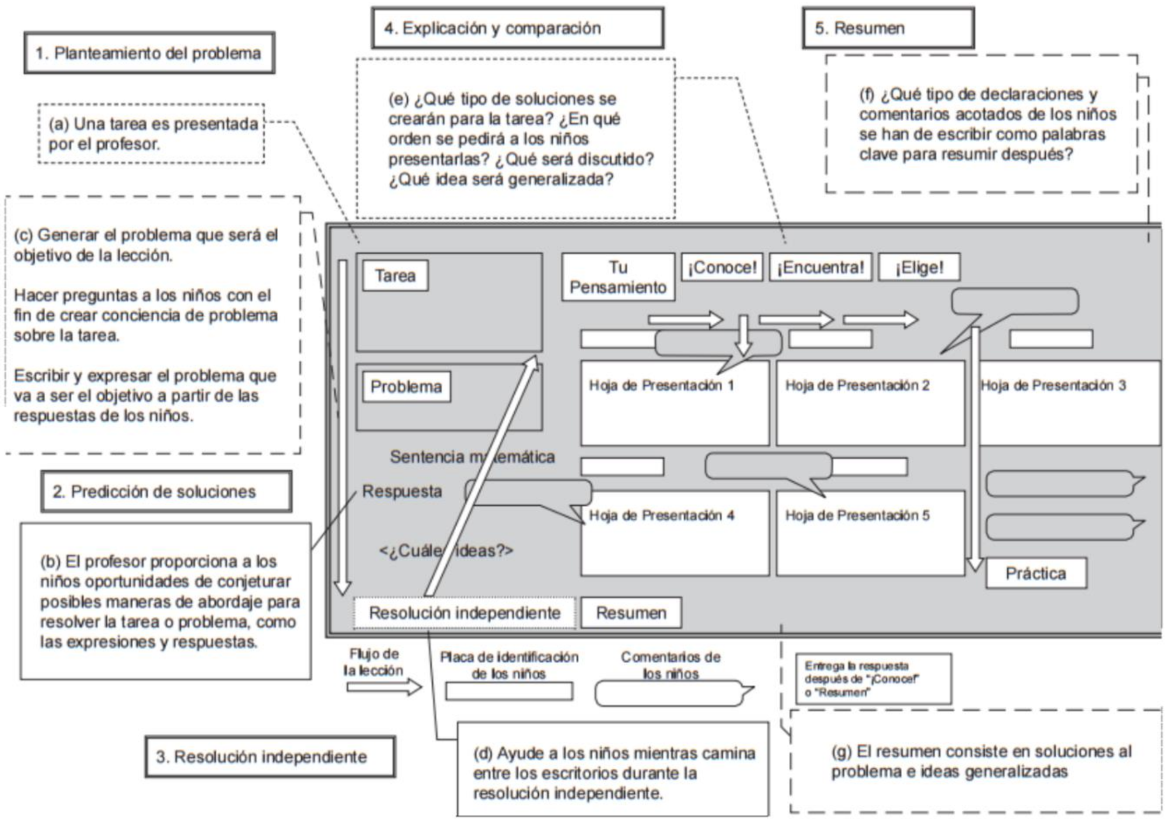
	M9) Que especializa (especialización) M10) Que simboliza (simbolización) M11) Que usa representación con números, cantidades, y figuras (cuantificación y esquematización)	I.9) Idea de expresiones	
ii. Grado enseñado	Generalmente indicará un cierto grado (dependiendo del currículo)		
iii. La preparación	Enumera lo que el profesor y los estudiantes necesitaran durante la clase. Esta refiere el material didáctico que se utilizara.		
iv. Visión general del proceso de la clase.	Una descripción de lo que se espera ocurra durante la clase, por ejemplo: “descubriremos, se desarrollara, en la actividad 1 encontramos deductivamente, consideramos, reconocemos” las visiones generales también se pueden dividir en visión1, 2, 3…		
v. Guía de trabajo	Es un documento que se reparte a los alumnos cuya función es guiar, esta se adaptara las necesidades particulares de cada grupo. En esta guía de trabajo se usa el término “problema” y se presenta alguna pregunta o situación interrogante. Pero en el Proceso de la Clase lo llamamos “tarea” porque el profesor la da.		
vi. Proceso de la Clase	Es descrito en detalle, incluyendo tanto las actividades del profesor como las expectativas de las actividades de los niños y niñas. Se usa este proceso de la clase como una base y se puede modificar para las clases. Los siguientes puntos son importantes en cada etapa: i) ¿Qué tipos de pensamiento matemático se están enseñando? Esto se abrevia como “PM” y se enseña principalmente a través de las actividades del profesor. ii) ¿Qué tipos de pensamiento matemático han visto los alumnos y cómo lo han usado? (abreviando) E → Valoración o evaluación del pensamiento matemático que parecen estar usando. Entonces el profesor puede reconocer en los niños cómo participa en el PM indicado por E y aplaudirlos para permitirles reconocer el valor y animarlos a pensar así más tarde. Si E no se reconoce el profesor debe tratar de alentar a los alumnos a realizar el PM con más sugerencias de cuestionamiento, o reconsiderar la tarea en sí. AT → Atención. Este indica otros puntos notables a los cuales vale la pena prestar atención durante la enseñanza, presentando oportunidades para enseñar y evaluar el pensamiento matemático en una clase de una hora.		
vii. Resumen en la pizarra	Muestra qué se ha resumido luego de una clase de una hora. Esto se utiliza para examinar y aclarar los puntos principales que se deben cubrir durante esta clase. Esto incluye “qué fue encontrado” y		

	“Formas importantes de pensamiento” durante la clase. Lo último es particularmente importante, porque está relacionado con aprender a aprender y con cómo desarrollar matemáticas. Un ejemplo de la pizarra se presentará al final de este cuadro.
viii. Evaluación o Valoración[13]	Cubre un amplio rango de situaciones donde el pensamiento matemático se puede evaluar en el transcurso de una hora, como se describe en la sección “Proceso de Clase”. Esto es todo “valoración (evaluación) para la toma de decisiones del profesor con el fin de enseñar en el proceso de enseñanza”, y es importante porque se utilizará como base para planificar la próxima clase. Se describen dos tipos de evaluación que se deberían llevar a cabo después de la clase. • “Notas” de los alumnos con respecto a su pensamiento, las cuales se entregan para ser evaluadas. • “Pruebas” para evaluar. Ambas son mostradas al final de los ejemplos o actividades.
ix. Mayor desarrollo	El docente usa algunos ejemplos para promover un poco más de desarrollo y consideraciones teóricas.

información sintetizada de (Isoda S. K., 2016)

Para comentar con relación a esta tabla Isoda (2016) menciona que en Japón el resultado de la enseñanza usualmente se describe en un estilo de diálogo como un desafío posterior para los profesores, refiere a este estilo originado en 1880 y hace referencia a la tradición académica de diálogos de Confucio y de Sócrates. Por otro lado, se mostrará un ejemplo del formato de pizarrón, indicando que es importante no borrar esta pizarra para permitir a los alumnos reflexionar y pensar sobre las acciones realizadas en el momento de recapitular al final de la clase.

[13] En japones “evaluación y valoración” son una sola palabra: 評価 Hyōka esta no significa “calificar” sino que apunta a **conocer** lo que el niño aprendió.



(*Imagen tomada de: Isoda S. K., 2016)*

Cabe señalar algunas notas al pie de la obra original de Isoda (2016) por ejemplo: "durante las clases, los profesores preparan varias estrategias de enseñanza, como preguntas, tarjetas de sugerencia y tareas alternativas, dependiendo de los resultados de la evaluación." (p.182)

También es importante mostrar los tipos de PM, estos reconocen que bajo el enfoque japonés de resolución de problemas la educación matemática está hecha para la formación del carácter humano. El aprendizaje del contenido se ilustra de la siguiente manera:

Tabla 13

<table>
<tr><th colspan="4">Valores, actitudes y hábitos matemáticos para el Carácter Humano</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Apreciaciones</td><td>Valores matemáticos</td><td>Actitud Matemática intentada</td><td>Hábitos de la mente para que el ciudadano viva</td></tr>
<tr><td>• Generalidad y capacidad de expansión.
• Razonabilidad y Armonía.
• Utilidad y Eficiencia.
• Simplicidad y Facilidad.
• Belleza.</td><td>• Ver y pensar matemáticamente.
• Plantear preguntas y desarrollar explicaciones tales como por qué y cuándo.
• Generalizar y ampliar.
• Apreciar la idea de los demás y cambiar la representación para conceptualizar.</td><td>• Apreciar las ideas de los demás de manera razonable y critica con respeto.
• Pensar de forma autónoma, creativa e innovadora en armonía.
• Utilizar juiciosamente herramientas como las TIC.
• Empoderase para imaginar el futuro a través del aprendizaje a lo largo de toda la vida.</td></tr>
<tr><th colspan="4">Procesos y Pensamiento Matemático</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Reflexión</td><td>Ideas matemáticas para</td><td>Pensamiento Matemático</td><td>Actividades Matemáticas para</td></tr>
<tr><td>• Conjunto
• Unidad
• Comparación
• Operación
• Algoritmo
• Principio
• fundamental y representación variada como tabla, diagrama, expresiones, gráfico y traducciones.</td><td>• Generalización y especialización.
• Extensión e Integración,
• Razonamiento inductivo, deductivo y analógico.
• Abstracción, concretización y Encarnación (apropiación).
• Objetivar representando y simbolizando.
• Pensamiento relacional y funcional.
• Pensando hacia adelante y hacia atrás.</td><td>• Resolución de problemas.
• Exploración e indagación.
• Modelo matemático
• Conjeturar, justificar y demostrar.
• Conceptualización y procedimentalización.
• Representación y compartir.</td></tr>
<tr><th colspan="4">Contenido</th></tr>
</table>

Adquisición	• Números y operaciones. • Cantidad y medida • Formas, figuras y sólidos. • Patrón y representación de datos.	• Ampliación de número y operaciones. • Medición y Relaciones. • Figuras Planas y Sólidos Espaciales. • Manejo de datos y gráficos.	• Números y algebra. • Espacio y geometría. • Relaciones y funciones. • Estadísticas y probabilidad.

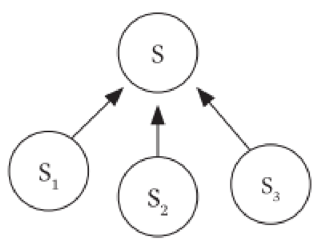
Traducido de "Curriculum Standards: SEABES-CCRLS" (University Tsukuba, 2021)

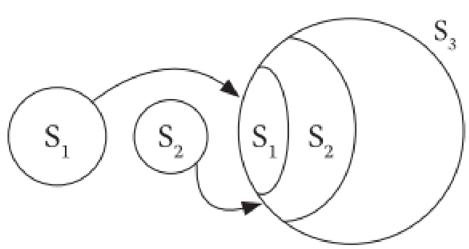
Sí bien, parecería que todo lo anterior es complejo, pero no difícil. Cabe decir que con la práctica esto podría llegar a sistematizarse y brindar una excelente herramienta para los docentes en la promoción del desarrollo del pensamiento matemático. Hasta este punto se ha hablado de valores, actitudes y hábitos matemáticos para la formación del carácter humano, llegados aquí, se explicará en una suerte por esclarecer, describir y analizar cuáles son los tipos de pensamiento dentro del enfoque de la Lesson Study que ayudan a llegar a esta formación del carácter humano.

Tabla 14

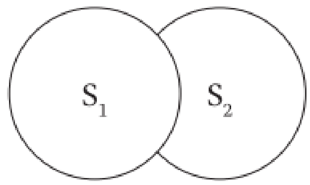
Métodos matemáticos	Descripción O Significado	Aspectos importantes respecto a la enseñanza del pensamiento
Pensamiento inductivo	(1) Reunir una cierta cantidad de datos. → (recopilación e identificación) (2) Descubrir reglas o propiedades comunes a dichos datos. → (Reconocimiento de patrones) (3) Inferir que el conjunto que incluye esos datos (el dominio completo de variables) satisface las reglas y propiedades descubiertas. → (abstraer) (4) Confirmar la validez de la generalidad inferida con nuevos datos. → (generalizar)	• Mostrar lo beneficios del pensamiento inductivo. • Experimentar con problemas en que el pensamiento deductivo no funciona. • Comprender la necesidad de verificar las reglas con nuevos datos. La inducción incluye los siguientes casos: • Donde uno recoge una cierta cantidad de datos y vuelve a examinar los datos para descubrir reglas. • Donde uno descubre reglas mientras junta datos en un intento de

		encontrar generalidades. • Donde uno recoge datos mientras predice reglas, y las verifica al mismo tiempo.
Pensamiento analógico	Para establecer perspectivas y descubrir soluciones. Dada una proposición A, uno quiere conocer sus propiedades, reglas, o métodos de solución. Sin embargo, cuando uno no sabe estas cosas, puede tomar una proposición A' ya conocida, que se parece a A (asumiendo que con respecto a A' uno ya conoce las propiedades, reglas, métodos de soluciones, que en adelante denotaremos por P'). Entonces, uno trabaja en considerar que lo que puede ser dicho acerca de P' a partir de A', se puede decir también a partir de A.	El pensamiento analógico, sin embargo, se basa en las similitudes, y considera si acaso se puede decir lo mismo o no. No siempre proporciona resultados correctos.
Pensamiento deductivo	Usa como base lo que ya es conocido y trata de explicar la validez de una proposición con el fin de afirmar que siempre hay algo que se puede establecer.	Para intentar pensar de forma deductiva uno debe ser capaz de usar sus propias habilidades para descubrir soluciones a través de analogías o inducción. Los niños reconocerán el deseo de afirmar lo que han descubierto, y especialmente de pensar deductivamente, y apreciarán los beneficios de pensamiento deductivo. Es importante la actitud de intentar comprender las propiedades fundamentales que uno posee, y declarar cuáles son las condiciones. Se debe alentar a considerar "que tipo de cosas ellos entienden" y "qué tipo de cosas pueden usar". Cuando uno piensa deductivamente, uno utiliza el pensamiento sintético con el cual se tienen en cuenta

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>conclusiones basadas en presunciones relativas a “qué puede ser dicho” a partir del desconocido y también el pensamiento analítico, donde uno considera presunciones que se basan en conclusiones sobre “que necesita ser valido para que eso sea dicho”.</td>
</tr>
<tr>
<td>Pensamiento integrador</td>
<td>En lugar de dejar un gran número de proposiciones desconectadas y separadas, este método de pensamiento abstrae su esencia común desde un punto de vista más amplio, resumiendo así las proposiciones como una misma cosa.
Integración de tipo I (integración de alto nivel): ve las proposiciones desde una perspectiva más amplia y alta y descubre su esencia compartida para resumir a una proposición más general.


Integración de tipo II (integración comprensiva): al volver a examinar un número de proposiciones (s_1, s_2, s_3) este tipo de pensamiento se integra.


Integración tipo III (pensamiento extensional): con el fin de extender una cierta proposición conocida a una escala más grande que incluya la proposición original, este tipo de</td>
<td>Si múltiples instancias de la misma cosa se analizan por separado, entonces hay una necesidad engorrosa de saber acerca de cada diferente instancia. ¿Hay alguna forma de economizar pensamiento y esfuerzo?</td>
</tr>
</table>

	pensamiento cambia un poco las condiciones, para hacer proposiciones más comprensivas. Este pensamiento incorpora y une una cosa nueva después de otra.  	
Pensamiento de desarrollo	Cuando uno alcanza algo y luego busca un método aún mejor, o intenta descubrir algo más general a partir de la primera cosa. **Pensamiento de desarrollo de tipo I**: cambiando las condiciones del problema en un amplio sentido. a) Cambiar algunas condiciones a otra cosa, o tratar de debilitar estas condiciones. b) Cambiar la situación del problema. **Pensamiento de desarrollo de tipo II**: Cambiar la perspectiva de pensamiento.	Inspirar a los niños a buscar nuevos y mejores métodos, y descubrir o crear nuevos problemas. Los pensamientos de desarrollo tipo I y II involucran “aclarar condiciones”, “cambiar condiciones” y “reforzar o relajar parte de las condiciones” o “cambiar la situación y/o el dominio” Pensar en el caso en que algo no sea verdad ¿Qué tal si no? Buscar una forma eficaz de hacer que los alumnos cambien su perspectiva es cambiar la perspectiva del problema. El método básico es dar a los niños ciertas proposiciones, y hacer considerar lo opuesto a la proposición, o contraproposición, o la proposición al revés.
Pensamiento abstracto (abstracción)	**El Pensamiento abstracto** intenta explicar las propiedades comunes de un número de cosas diferentes. **El Pensamiento que concreta** también se usa con el fin de abstraer proposiciones. **El Pensamiento que idealiza** considera el estado ideal donde una variedad de condiciones es constante, o casos ideales donde condiciones o propiedades satisfacen definiciones matemáticas, principios,	¿Qué estamos examinando? ¿Qué es lo mismo y qué es compartido? Para abstraer lo común. ¿Qué aspectos son diferentes? Este tipo de pensamiento aclara que puede ser ignorado. Cuando un problema es resuelto, la primera cosa que hay que hacer es

	o reglas, se puede usualmente aclarar la situación. **El Pensamiento que aclara las condiciones** es un intento de aclarar condiciones, lo cual es necesario para la abstracción.	comprender el significado del problema. La actitud de comprender un problema con claridad es importante.
Pensamiento que simplifica	**Pensamiento que simplifica 1**: ignorando temporalmente algunas de las condiciones y reconsiderando el problema desde un nivel más simple, más básico, esto cuando hay varias condiciones. **Pensamiento que simplifica 2**: los pensamientos que reemplazan algunas de las condiciones por condiciones más simples también son un tipo de pensamiento que simplifica. No hay problema en simplificar en medida que las condiciones esenciales del problema original no se pierdan.	Si las relaciones numéricas son oscurecidas por el tamaño de los números o el gran número de condiciones, haga que los estudiantes piensen acerca de “por qué es tan difícil el problema” y “que se puede hacer para hacerlo más entendible” así ellos se dan cuenta de donde está la dificultad. Entonces, hágalos probar con “reemplazar los números o conceptos” o “piensen las condiciones una a la vez”.
Pensamiento que generaliza (generalización)	Intenta extender la denotación de un concepto. También busca descubrir propiedades generales durante la resolución de un problema y también la generalidad de la solución de un problema para un conjunto de problemas que tienen en este un caso particular.	La generalización incluye casos donde un ejemplo es generalizado, y también casos donde la generalización es considerada primero, y luego aplicada a un caso especial. Enseñe eso repetidamente hasta que los alumnos y alumnas “piensen qué cosa puede ser afirmada siempre” y “piensen en reglas que siempre se aplican”.
Pensamiento que especializa (especialización)	Está relacionado con el método que generaliza y es inverso a la generalización. Este método considera un subconjunto más pequeño incluido en tal conjunto, o solo un fenómeno en el conjunto (caso especial). Se utiliza en los siguientes casos: A. al cambiar de variable o algún otro factor de un problema a una cantidad especial sin perder la generalidad del problema. B. Al considerar un caso extremo, uno puede a veces	Pensar acerca de: “casos (simples) especiales conocidos” es importante para desarrollar una perspectiva con respecto a “cómo se ve” o “que se puede hacer”

	obtener una pista de la solución del problema. El resultado de esta pista o método se puede usar entonces para ayudar a encontrarla solución general. C. Se pueden usar casos extremos o valores especiales para verificar si una solución es o no correcta.	
Pensamiento que simboliza (simbolización)	Intenta expresar problemas con símbolos y referirse a objetos simbólicos. Este tipo de pensamiento también incluye el uso y lectura de términos matemáticos para expresar problemas en forma breve y clara. Avanza el pensamiento basado en la expresión formal de los problemas.	Ayuda a determinar adecuadamente los significados de aquellos términos y símbolos, usarlos para hacer juicios correctos y actuar metódicamente.
Pensamiento que usa representación con números cantidades y figuras (cuantificación y esquematización)	Es importante comenzar en la etapa anterior a la cuantificación, y hacerlos pensar acerca de cómo cuantificar la información. El pensamiento que selecciona la cantidad apropiada a partir de la situación u objetivo es un pensamiento que usa representación con cantidades. El pensamiento que usa números para expresar cantidades es el pensamiento que usa representaciones por números. La conversión a números hace posible expresar cantidades simple y claramente, haciéndolas así fácil de manejar. El pensamiento que usa esquemas y figuras para reemplazar relaciones, situaciones y proposiciones es el de representación con figuras.	Ayudar al estudiante: “expresen este tipo de cosa como este tipo de figura” dando opciones de diagramas.

Información de Isoda (2016)

En la tabla anterior se presentaron descripciones sobre los métodos matemáticos que desarrollan pensamientos y una breve descripción de estos, ahora veremos Ideas Matemáticas y sus significados, así como sus aspectos importantes.

Tabla 15

Ideas matemáticas	Descripción O Significado	Aspectos importantes respecto a la enseñanza de ideas matemáticas
Idea de conjuntos	Aclarar conjuntos de objetos para su consideración y objetos excluidos de conjuntos, y aclara las condiciones para la inclusión. (A) Comprende claramente el objeto que se va a considerar. También cuando comprendemos un concepto, es importante determinar e indicar claramente el alcance de los objetos que se están considerando. (B) A partir de sus nombres o condiciones, considere si los objetos bajo consideración pertenecen o no a cierto conjunto, teniendo conciencia del hecho de que se están utilizando los nombres o símbolos para expresar al conjunto. Aclarar cuáles objetos no pertenecen al conjunto con el fin de mejorar la claridad del conjunto original. (C) Cuando se comprende un conjunto de objetos, se debe estar consciente de que hay métodos para indicar miembros, y métodos para indicar condiciones de pertenencia al conjunto. (D) Mantenga una perspectiva lo más integral posible, reuniendo la mayor cantidad de objetos que se pueda y tratándolos como la misma cosa, de manera que todos ellos puedan ser considerados colectivamente. (E) Pensamiento que ordena o clasifica objetos. E.1) Aclare el alcance de los objetivos que se van a ordenar. E.2) Decida una perspectiva con respecto a las	Es importante prestar atención al tipo de conjuntos a los cuales pertenecen las cosas, si acaso son “objetos” como números o diagramas, “problemas” como la suma o “métodos” que se usan para realizar estos cálculos. Esto proporciona una comprensión global, y hace posible profundizar nuestra comprensión. Comprender conjuntos hace que las condiciones de los elementos de estos conjuntos sean claras, lo que permite a su vez una consideración lógica. Es importante apegarse a la clasificación en cada una de las diversas etapas mencionadas anteriormente.

	clasificaciones que coincidan con el objetivo. E.3) Es importante que la perspectiva sea una que ubique cada objeto en una categoría específica, sin que ningún objeto pertenezca a dos categorías diferentes, y que los objetos se puedan ordenar sin contarlos dos veces ni superponerlos. E.4) Encuentre la mayor cantidad de condiciones posibles para representar clasificaciones, y considere el valor de estas clasificaciones. E.5) A veces se puede combinar un número de categorías en clasificaciones más grandes.	
Idea de Unidades	Enfocándose en los elementos constituyentes (unidades), sus tamaños y relaciones. Los números comprenden unidades tales como 1, 10, 100, 0.1 y 0.01, así como también fracciones como ½ y 1/3, y son expresados en términos de cuantas unidades se encuentran allí. Por lo tanto, enfocarse en estas unidades es una forma valida de considerar el tamaño de los números, cálculos, etc. Cuando uno considera medir la cantidad de algo, es importante presentar atención a la unidad (cm, m, L, g y m^2). También, las figuras comprenden puntos (vértices), líneas (líneas rectas, lados, círculos, etc.) y superficies (bases, caras, etc.). Por esta razón, es importante el pensamiento que se enfoca en estos elementos, tamaños unitarios, números y sus interrelaciones.	Es importante cerciorarnos de que los estudiantes miren las unidades (elementos constituyentes) y las relaciones en las que se deben enfocar. A los niños se les debe hacer notar la necesidad de “buscar estas unidades” y, además, “tratar de cambiar unidades” a algo fácil de comparar, considerando qué se debería cambiar a la misma unidad.
Idea de representación	Intentar pensar a partir de los principios fundamentales de la representación. Aquí las	Los principios de representación basados en el sistema de notación de valor posicional

	representaciones matemáticas están enfocadas en cuál será la sofisticación en la sala de clases. Los números enteros y los números decimales son expresados sobre la base de la posición del lugar decimal de acuerdo con el sistema de notación. Para entender las propiedades de los números, o cómo usarlos para calcular, uno debe antes comprender completamente el significado de las expresiones en este sistema de notación. La habilidad de pensar basándose en este significado indispensable. Cuando se tratan de fracciones uno debe ser capaz de ver 3/2 como una fracción que significa una colección de 3 mitades de objetos como la razón de 3 es a m (3:2). Con el fin de alcanzar una idea concreta del conjunto de números, es necesario expresar los números en una variedad de modelos concretos, y aprovechar el conocimiento acerca de la definición de estas representaciones.	decimal se usan a menudo. La selección de métodos de Representación apropiados para la resolución de problemas, tales como líneas numéricas, diagramas de líneas segmentadas, y figuras de áreas, es importante, tanto como lo es la lectura apropiada de estas expresiones. Es importante que los estudiantes piensen acerca de estas líneas: *¿Qué tipo de representaciones hay?* *Probémoslas* *¿Qué dicen las representaciones?*
Idea de Operación	Aclarar y extender los significados de cosas y operaciones, e intentar pensar basándose en ellas. Con "operaciones" nos referimos a las operaciones formales que se utilizan para contar, las cuatro operaciones aritméticas, congruencia, expansión y reducción (similaridad), el dibujo de figuras, etc. Estas operaciones son usadas para calcular con números, para pensar acerca de la relación entre figuras y cómo representarlas en nuestra mente. Cerciórese de que los significados de las cosas y operaciones sean claros. Es importante pensar acerca de las propiedades y métodos a partir de estos significados. Estos pensamientos se deben seguir	El punto más crucial aquí es enfatizar el pensamiento que usa el juicio y la explicación basados en fundamentos sólidos. Su enseñanza debería inspirar a los estudiantes a considerar lo siguiente: *¿Por qué esto es correcto?* *¿Cómo podemos explicar esto?* *¿Cómo podemos usar esto?* *¿En qué se basa esto?* El significado de cada número y figura actúa como fundamento, así como también el significado de las operaciones como la suma, y las propiedades de objetos tales como los cálculos y figuras. El pensamiento intenta comprender estas cosas bien y su uso es siempre importante.

	cuando uno está pensando axiomática o deductivamente. Al mismo tiempo, es útil reconocer la operación (o patrones) de la forma que debe mantener a través de la extensión.	
Idea de algoritmos	Intentar formalizar métodos de operaciones. Los cálculos formales requieren que uno tenga una sólida comprensión de los métodos y la habilidad de realizar cálculos de manera automatizada basándose en este entendimiento sin tener que pensar en el significado de cada etapa, una después de otra. Esto le permite a uno conservar el esfuerzo cognitivo, y ejecutar operaciones fácilmente. Esto también aplica a las mediciones y al dibujo de figuras. La ejecución automatizada de un conjunto de procedimientos predeterminados es referida como usar un “algoritmo”. El pensamiento intenta crear algoritmos basándose en que la comprensión de procedimientos es importante.	Este pensamiento, que apunta a crear y ejecutar algoritmos, es importante. Note, sin embargo, que enseñar esto no involucra primero enseñar el algoritmo y luego simplemente dejar que los niños practiquen usándolo. Primero, los niños deberían tener la oportunidad de pensar acerca de cómo calcular libremente. Es necesario que los niños piensen claramente acerca de las razones, y que las entiendan bien. El proceso de ejecutar algoritmos a partir de esta comprensión apunta a utilizar menos esfuerzo, y más aún a mejorar la eficiencia. Esto muestra el beneficio de usar algoritmos. La enseñanza está centrada en el objetivo de hacer que los niños entiendan estos beneficios. Los niños ganan la habilidad de aplicar algoritmos de forma efectiva cuando entienden sus beneficios, y este entendimiento les permite abordar cualquier error que pueda surgir con los algoritmos mediante el uso de sus propias habilidades.
Idea de aproximaciones	Intentar comprender el panorama general de objetos y operaciones, y usar el resultado de este entendimiento. Una comprensión general de los resultados es eficaz para establecer perspectivas sobre métodos de resolución o resultados, y para verificar resultados. Al alcanzar una	Es importante hacer que los niños piensen acerca de lo siguiente: *Establecer una perspectiva sobre cantidades.* *Establecer una perspectiva sobre los métodos que se van a utilizar.* *¿Hay un error grande en la respuesta?*

	comprensión de los números aproximados, cantidades, formas, o hacer cálculos o mediciones aproximadas, uno puede establecer una perspectiva de los resultados o métodos, y verificar los resultados. Esta es la idea de las aproximaciones. Después de que uno llega a una solución, debe verificar si hay una diferencia mayor o no entre la solución y el tamaño o forma aproximada. También es importante hacer que los niños consideren si pueden descubrir un nuevo método basándose en la comprensión general de los resultados.	De esta forma, los niños aprenderán a pensar basándose en la idea de aproximaciones, e intentarán usar números aproximados o cálculos aproximados. Enseñe a los niños a desarrollar el hábito de establecer perspectivas antes de comenzar a trabajar. Aun cuando uno alcance una comprensiónaproximada, a menos que esta sea usada, el esfuerzo es desperdiciado. En tales casos, los niños gradualmente detendrán este tipo de pensamiento.
Idea de propiedades fundamentales	Enfocarse en reglas y propiedades básicas.	Enseñe a los estudiantes a siempre pensar acerca de las siguientes líneas: “¿Qué tipo de cosas se pueden usar?”, “¿Qué tipo de propiedades hay?” y “¿Cuáles de ellas son apropiadas en este caso?”.

Pensamiento funcional	Intentar enfocarse en qué es determinado por nuestras decisiones, encontrar reglas de relaciones entre variables, y usar el pensamiento funcional. Cuando uno quiere saber algo acerca de un elemento y en un conjunto Y, o las características o propiedades en común de todos los elementos de Y, a pesar de las dificultades de aclarar esto directamente, uno primero piensa en el objeto x, que está relacionado a los elementos en Y. Al aclarar la relación entre x e y, el pensamiento funcional intenta aclarar estas características y propiedades. El pensamiento funcional sigue estas líneas: *Quiero pensar acerca de una proposición en particular, pero es difícil considerarla directamente. Por lo tanto, en vez de considerar la proposición directamente, pensaré en una proposición relacionada y fácil de leer (o conocida). Este pensamiento intenta aclarar la proposición del problema*. Por lo tanto, se puede considerar al pensamiento funcional como un "pensamiento sustitutivo". La práctica de este pensamiento funcional está definida por los siguientes tipos de pensamientos: 1) Enfocarse en las dependencias Si una proposición llamada A cambia cuando cambiamos otra proposición llamada proposición B, y fijando B en un cierto valor (estado) también fija el valor (estado) de A, valor de estado correspondiente, entonces uno dice que "A depende de B", o "B y A son dependientes (hay una relación de dependencia)". La próxima tarea es aclarar las reglas que determinan el valor de A una	Cuando se descubre una relación funcional como se describió antes, considere cómo expresar esta relación de dos variables para que sea más fácil descubrir. Es importante dar con un método apropiado. Cuando busca la regla de una función, también considere cómo representar esta regla para que la relación sea fácil de entender y usar. La idea de expresiones también es importante. Enseñe a los estudiantes los beneficios de este tipo de pensamiento, de modo que ellos puedan aplicarlo activamente, con el fin de cultivar el pensamiento funcional. Aunque también hay casos en que se utiliza solo uno o dos tipos de pensamiento descrito antes para resolver un cierto problema, en varios casos todos estos tipos de pensamientos se usan juntos. **Valor educacional de enseñar pensamiento funcional** (1) Cultivar la habilidad y actitud de descubrir: Como se muestra arriba, el pensamiento funcional es pensamiento sustitutivo, y se usa para aclarar cosas. Por lo tanto, también se puede referir como un tipo de pensamiento **heurístico**. Centrándose en las dependencias, uno puede descubrir y aclarar problemas. Al descubrir reglas con el fin de aclarar dependencias, uno puede usar esto para resolver problemas. Este es un poderoso tipo de pensamiento para descubrir métodos de resolución de problemas. Al juzgar que un problema depende de las condiciones, uno puede

	vez determinado el valor de B, o cómo cambia A cuando cambia B. Primero, cuando es difícil considerar directamente una proposición A, piense en otra proposición B que está en una relación dependiente con la proposición A, y es más fácil de considerar. Usar esta segunda proposición de esta forma es “enfocarse en las dependencias”. 2) Intentar aclarar relaciones funcionales Esto también se puede referir como “intentar aclarar reglas de correspondencia”. Una vez que las dependencias están claras, es necesario pensar cómo aclarar la regla (f) de la correspondencia entre proposiciones mutuamente dependientes A y B. Esta regla f nos dice cómo A cambia cuando B cambia, o qué será A una vez que B esté determinado. Una vez que se encuentra la regla f, se la puede utilizar para determinar A a partir del valor de B, o qué valor debe tomar B para obtener un cierto valor de A.	cambiar alguna de las condiciones del problema y descubrir nuevos problemas con un tipo de pensamiento relacionado (la técnica de “¿qué pasa si no?”). Así, el pensamiento funcional es un valioso tipo de pensamiento para cultivar la habilidad de descubrir, y también la actitud de descubrir. (2) Cultivar la habilidad y actitud de comprender matemáticamente un fenómeno: Por ejemplo, con el fin de resolver el problema de la multitud como una proposición aritmética/matemática de cada día, considere cómo ubicar el problema en una etapa aritmética/matemática. Para hacer esto, considere qué determina la multitud. Al enfocarse en las dependencias, uno puede ver la multitud como función (razón) del área y el número de personas. Darse cuenta de esto permite procesar de manera precisa el problema. El cultivo del poder de ubicar una variedad de proposiciones y problemas diferentes en una etapa aritmética/matemática de esta forma, como también las habilidades y actitudes para comprender matemáticamente una situación mientras nos enfocamos en las dependencias y en usar el pensamiento funcional para aclarar las relaciones funcionales, sirve un propósito vital. La habilidad de comprender situaciones matemáticamente es una forma en que se presenta el método científico. (3) Cultivar el pensamiento inductivo: Cuando resuelva un problema, reúna varios datos y úselos para

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>descubrir reglas generales. El pensamiento inductivo usa estas reglas para resolver los problemas. Enfocarse en relaciones funcionales y aclararlas obviamente juega una parte importante en las actividades inductivas.
(4) Profundizar la comprensión de diversas materias aprendidas:
El pensamiento funcional se utiliza para entender de mejor manera números, cálculos, figuras y materias en otras áreas, y para desarrollarlas aún más. Trabaja para profundizar el entendimiento de estas materias también.</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">Idea de expresiones</td>
<td>Intentar representar proposiciones y relaciones como expresiones, y leer su significado.</td>
<td rowspan="2">1) Idea de representar mediante expresiones.
2) Leer el significado de las expresiones.</td>
</tr>
<tr>
<td>Idea de representar mediante expresiones
Es importante el pensamiento basado en la apreciación de la representación de problemas con los siguientes tipos de expresiones, que busca activamente usar estas.
(a) Las expresiones pueden expresar proposiciones y relaciones clara y simplemente.
(b) Las expresiones pueden expresar proposiciones o relaciones generalmente.
(c) Las expresiones pueden representar procesos de pensamiento en forma clara y simple.
(d) Las expresiones pueden ser fácilmente procesadas de una manera formal.</td>
</tr>
</table>

	Leer el significado de las expresiones Trabajar para leer y activamente utilizar expresiones de la siguiente manera: (a) Leer las situaciones específicas o modelos a los cuales las expresiones aplican. (b) Leer las relaciones o proposiciones generales. (c) Leer las dependencias y relaciones funcionales. (d) Leer los formatos de expresiones.	

Información de Isoda (2016)

Y para finalizar se presentará una tabla sobre las Actitudes Matemáticas, Isoda (2016) las refiere como fuerzas impulsoras de los tipos de pensamiento matemático, vale la pena citar un pie de página de Isoda (2016):

> Los niños por lo general expresan su sentimiento de valor emocional como belleza, sencillez, utilidad, eficiencia, generalidad, capacidad de extender, razonabilidad, la armonía, la precisión, la exactitud, el sistema, la estructura, y valores sociales en relación con las matemáticas como la simpatía y la competitividad. (Isoda S. K., 2016)

Tabla 16

Actitudes matemáticas	Descripción
Concretizar	Intenta comprender nuestros propios problemas, objetivos y contenidos, claramente, por uno mismo. 1) Intentar plantear preguntas: ¿Por qué se produce eso? ¿es eso realmente correcto? 2) Intentar tener en cuenta la problemática: los niños deben tener una sólida conciencia del hecho de que este es su propio problema, e intentar resolver sus propios problemas de la manera apropiada. 3) Intentar comprender los problemas matemáticos por la situación: uno debe descubrir problemas por uno mismo basándose en varias expectativas

	en la solución, e intentar proponer nuevos problemas para explicar el fenómeno.
¿Cuán razonable es? (Razonabilidad)	Intentar tomar acciones con fundamentos lógicos y razonables. Uno no debe pensar en las cosas individuales de forma aislada, sino que considerar sus relaciones con otras cosas. Uno debe tratar de pensar en conexiones, o tratar de hacer conexiones. 1) Intentar tomar acciones que coinciden con los objetivos. 2) Intentar establecer una perspectiva general. 3) Intentar pensar basándose en los datos que se pueden utilizar, objetivos previamente aprendidos, y supuestos.
Claridad	Intentar representar temas con claridad y sencillez. 1) Intentar describir y comunicar problemas y resultados con claridad y sencillez. 2) Intentar ordenar y organizar los objetivos cuando son representados.
Sofisticación	Intentar buscar mejores formas o ideas. Buscar cosas más refinadas y hermosas es economía de pensamiento. Buscar economía de pensamiento y lo que es hermoso también puede referirse a la misma cosa de diferentes maneras. Al buscar lo que parece ser mejor y más bonito, uno puede traer consigo muchas cosas y considerarlas y procesarlas de forma colectiva, reduciendo de esta forma esfuerzo y pensamiento.

Información de Isoda (2016).

La consideración y promoción de estos métodos, ideas y actitudes ayudará al desarrollo del pensamiento matemático que a su vez es formador de valores, actitudes y hábitos para el carácter humano y con ello obtener un desarrollo integral de los alumnos y alumnas para conseguir formar niños, niñas y adolescentes o jóvenes que piensen y aprendan matemáticas por sí mismos y para ellos mismos.

Cabe aclarar que el objetivo del estudio, análisis, desarrollo y valoración de este pensamiento no es con el fin de subir puntos en una evaluación internacional, sino conseguir un efecto directo en la calidad de vida de las personas, con la aspiración de que a través del tiempo todos podamos vivir bien, siendo críticos, reflexivos, sensibles y autónomos.

La información presentada en este apartado es “el resultado de Estudios de Clase realizados por 50 años en Japón. Describen tres miradas del PM: actitud, métodos e ideas en cuanto a contenido matemático” (Isoda S. K., 2016) con ello se pretende dar una sólida justificación de los aspectos plasmados en la propuesta pedagógica que se presentará, todo ello con el fin de resultar útil para las maestras y maestros en diferentes grados de la educación básica (e incluso, en la medida de lo aplicable en media superior).

Después de todo lo anterior, aún faltan hablar de los puntos dos y tres del estudio de las clases los cuales son: la observación por parte de los docentes y las evaluaciones y observaciones sobre las clases dadas con un grupo de maestros, sin embargo, en este trabajo, no nos enfocaremos por falta de tiempo en estos puntos dentro de este método, ya que como lo mencioné anteriormente, la elaboración de este trabajo se enfoca en desarrollar el primer punto en el currículo de matemáticas, es decir, la planeación de las clases.

2.4. Trenzando constructivismos & The Lesson Study

Durante mis cursos de séptimo y octavo en el campo de Educación Matemática tuve la oportunidad de conocer diferentes teorías con relación a la enseñanza de las matemáticas, pero sin duda alguna la que cautivó mi atención fue la escuela japonesa Lesson Study, descrita y explicada en un maravilloso libro de Masami Isoda y Shigueo Katagiri; antes de comenzar de lleno sugiero mostrar algunas razones para considerar a esta escuela una importante influencia en cualquier programa de enseñanza matemática:

> “…after the COVID-19 disruptions. The report finds that in spite of the challenging circumstances, 31 countries and economies managed to at least maintain their performance in mathematics since PISA 2018. Among these, Australia*, **Japan**, Korea, Singapore, and Switzerland maintained or further raised

already high levels of student performance, with scores ranging from 487 to 575 points” (OECD average 472). (PISA , 2023)

Resulta estimable considerar que a pesar de las difíciles circunstancias que trajo consigo la pandemia, Japón junto con otros países, no bajo su matriculación y consiguieron puntos que oscilan entre los 487 y 575 puntos, reconociendo que el promedio de la OCDE es de 472 (PISA , 2023). Ahora bien, a continuación, se muestra una tabla que describe de manera cualitativa el rendimiento en matemáticas a nivel nacional y subnacional:

Tabla 17

Mathematics performance at national and subnational levels

	Mean score	95% confidence interval	All countries/economies		OECD countries	
			Lower rank	Upper rank	Lower rank	Upper rank
Singapore	575	572 - 577	1	1		
Macao (China)	552	550 - 554	2	4		
Chinese Taipei	547	540 - 554	2	6		
*Hong Kong (China)**	540	534 - 546	2	6		
Japan	536	530 - 541	3	6	1	2
Korea	527	520 - 535	3	7	1	2
*Quebec (Canada)**	514	506 - 521				
Estonia	510	506 - 514	6	9	3	4
Switzerland	508	504 - 512	7	10	3	5
*Alberta (Canada)**	504	492 - 515				
Flemish community (Belgium)	501	495 - 507				
Castile and Leon (Spain)	499	492 - 507				
Canada*	497	494 - 500	8	18	5	13

(Imagen tomada de PISA, 2023)

Como se puede apreciar Japón ocupa el 5° lugar en esta tabla con 64 puntos arriba del promedio de la OCDE. Dentro de estos datos México cuenta con 395 puntos de puntuación media, notablemente nuestro país se encuentra abajo con una diferencia de 77 puntos. Es importante comentar, a manera de aclaración, que las condiciones económicas son diferentes, así como la cultura, por ello para no reducir nuestro pensamiento a datos cuantitativos y comparar de una manera ingenua los resultados, se debe comentar que dentro de este trabajo se consideran (aunque no de una manera específica y detallada) los hábitos ciudadanos, el contexto económico, político y sociocultural como una influencia poderosa sobre los resultados.

Sin embargo, cabe mencionar su influencia en otros países latinoamericanos como Chile, quienes ya han comentado en artículos y revistas su experiencia bajo este modelo obteniendo resultados y experiencias interesantes en el desarrollo de la LS en su proceso educativo, véase: *Más de una década de estudio de clases en Chile: hallazgos y avances* (Raimundo Olfos, 2020).Si bien no pretendo sugerir un copiar y pegar modelos, como en sexenios pasados se pretendía hacer con la idea de que “imitando modelos educativos” alcanzaríamos un buen nivel, tampoco desestimo las dificultades sociales que a su vez presenta ese país (Japón) y que son alarmantes: “violencia, suicidios, aislamiento como disfunción social, son problemas que enfrentan los jóvenes japoneses” (Romero, 2024, p. 10).

Contextualizando y reconociendo que cada país enfrenta sus propias complicaciones sociales, políticas, económicas y culturales, vale la pena rescatar su modelo educativo, contextualizando sus métodos a nuestros diferentes escenarios, podría brindar apoyo para mejorar de alguna manera nuestro nivel educativo en matemáticas y con ello desarrollar de una mejor forma a nuestros estudiantes y profesores mexicanos.

Después de estos breves comentarios, otra de las razones por las cuales considero importante el estudio de esta metodología de enseñanza es por intentar su aplicación durante 6 meses en mi servicio social interno, con un grupo de adolescentes en el CyberTlalpan “Cultura Maya” en Ajusco Medio, donde pude identificar las complicaciones y choques de su aplicación a algunos de nuestros estudiantes en secundarias públicas Mexicanas, así como también las afinidades que comparten con algunas teorías de aprendizaje como los constructivismos (Cognitivo, Piagetiano, Vygotskyano). La escuela japonesa Lesson Study pretende hacer que sus alumnas y alumnos alcancen un desarrollo integral considerando lo emocional y cognitivo, lo racional y lo humano, al individuo y a los otros.

Cabe mencionar que “en Japón…la norma es el trabajo colaborativo entre sus estudiantes, que es estrechamente supervisado” (Isoda S. K., 2016, p. 24). Aquí podríamos mencionar el concepto de mediación social, que incluye el aprendizaje entre pares (cuando el docente pregunta o pide explicaciones, entonces los alumnos y alumnas realizan sus comentarios y permiten en la interacción con los otros, resolver y alcanzar conocimientos que solos no podrían alcanzar). Así también fomentan el aprendizaje dentro de la ZDP cuando al supervisar el trabajo de los alumnos se les proporciona un andamiaje ajustado con preguntas (¿Qué les gustaría hacer ahora? ¿podríamos aplicar este procedimiento a otros casos? ¿en qué otras situaciones podemos ver este procedimiento?) y sugiriendo observaciones dentro de las actividades.

Es importante destacar que, como parte de esta estrategia, hacen uso del aprendizaje basado en problemas (ABP) que contribuye al logro de asimilación de conceptos por descubrimiento, significativo y estratégico; al mismo tiempo permite considerar a la alumna o alumno como un sujeto activo constructor de su propio conocimiento.

Después hay que mencionar que “el principio básico del enfoque en resolución de problemas es nutrir el aprendizaje matemático de los niños y niñas por/para ellos mismos… formar niños que aprendan matemáticas por sí mismos y para ellos mismos” (Isoda S. K., 2016) de acuerdo con ello, la educación matemática desde una mirada Holista (que sugieren los japoneses y que se presenta acorde al paradigma de la complejidad) está hecha para “la formación del carácter humano”. (Isoda S. K., 2016).

Al enfocarnos en ciertos niveles educativos y observar los conocimientos previos con los cuales cuentan los alumnos, se deberá considerar la significatividad psicológica; recordando que debemos identificar la etapa del desarrollo en la que las y los alumnos se encuentran, para ejemplificar lo anterior podríamos decir que: no se presentará contenido sobre razones trigonométricas a niños que están comenzando a crear la noción sumativa o multiplicativa. Así también en la LS el Desarrollo y Aprendizaje se observan como dos aspectos entretejidos que se cultivan mutuamente; las actividades o tareas permiten crear una necesidad dentro del alumno para resolver un problema que, a su vez, genera un desarrollo sobre las ideas, pensamientos y valores matemáticos.

Cuando los alumnos trabajan entre pares, comentando las explicaciones que dan fundamento a sus respuestas, se presenta la oportunidad para asimilar y acomodar por ellos mismos y para ellos mismos el conocimiento entorno al desarrollo de su pensamiento matemático. Esto pone de manifiesto la participación activa de los alumnos en la construcción de su propio conocimiento.

Por otra parte, considero que la clave dentro de este modelo se encuentra en la planeación de tareas y preguntas que se presentan ante el grupo, así como el diálogo socrático que puede surgir propiciado por el docente a través de reflexiones dentro de la clase. Empero, este diálogo no es abierto y libre en su totalidad, las preguntas se acotan en virtud de la planeación y las posibles respuestas a las actividades. Asimismo, el andamiaje es ajustado cuando el profesor no realiza afirmaciones o correcciones sino más bien, hace preguntas y comparaciones entre los datos y las respuestas, para así apoyar al alumno hacia la reflexión en torno a las ideas, conceptos o pensamientos que el docente pretende que los estudiantes desarrollen.

Ahora bien, lo anterior sugiere la existencia de algunos puntos de contacto entre la LS y algunas visiones constructivistas del aprendizaje, para tejer más en relación con ello es posible identificar los siguientes:

♣ Del paradigma cognitivo.

- Partir de la idea de un alumno activo, poseedor de conocimientos estratégicos y constructor de su conocimiento.
- En algún punto de la LS es posible hacer consciente al alumno de sus procedimientos y procesos, lo anterior sugiere una actividad metacognitiva.
- Dentro de las tareas se observarán los aprendizajes por *descubrimiento* (en la realización de actividades y discusiones entre pares que permiten un insight -un darse cuenta- por medio del diálogo o la puesta en práctica de los procesos), *significativo* (el alumno integra información nueva con los esquemas que ya poseía dándole significado), y por último el *estratégico* (el estudiante tiene un propósito y echa mano de sus esquemas o estructura cognitiva para resolver las actividades, en este camino el docente apoya el proceso preguntando de qué maneras puede representar y economizar sus procesos, etc.). Durante todas las tareas o actividades el alumno es estrechamente acompañado por el docente quien, con sus preguntas y/o cuestionamientos aporta el andamiaje para conseguir estos aprendizajes.

♣ Del paradigma Piagetiano: el individuo.

- Según Piaget poseemos la capacidad de desarrollar un pensamiento lógico-matemático, independientemente del origen de su naturaleza, somos capaces de avanzar paulatinamente en su desarrollo y refinamiento. Por esto, la LS busca, no solo la adquisición de conocimientos, sino también una suerte de desarrollo de pensamiento matemático, así como ideas y valores en torno al desarrollo del carácter humano de, por y para los alumnos y alumnas.
- Dentro de la LS se considera el desarrollo cognitivo del alumno y alumna, por ende, existen textos específicos a cada edad. Véase Ávalos Tenoch & Masami Isoda (2012)

- Durante las actividades que realiza el estudiante y las preguntas que hace el docente para guiar a los alumnos, se presentarán en diferentes momentos dudas que podrían despertar la curiosidad, apuntando a un desequilibrio de sus esquemas, orillándolos a cuestionarse y reflexionar sobre otras posibles respuestas, movilizando sus mecanismos reguladores. Este desequilibrio brinda una oportunidad de construcción de las ideas, conceptos o procesos dentro de las matemáticas.
- Comparten términos conceptuales, por ejemplo, en la planeación, la teoría piagetiana observa la enseñanza como "las actividades del maestro":

  > "La tarea del docente estaría, hasta cierto punto, subordinada al diseño de contextos constituidos por situaciones y experiencias relevantes para provocar el despliegue de actividades auto-estructurantes…Enseñar es plantear problemas a partir de los cuales sea posible reelaborar los contenidos escolares y es también proveer toda la información necesaria para que los niños puedan avanzar en la reconstrucción de esos contenidos. Promover la discusión…brindar la oportunidad de coordinar diferentes puntos de vista, es orientar hacia la resolución cooperativa de las situaciones problemáticas. Alentar la formulación de conceptualizaciones necesarias para el progreso en el dominio del objeto de conocimiento, es propiciar redefiniciones sucesivas hasta alcanzar un conocimiento próximo al saber socialmente establecido." Lerner (1996) en Hernández (2020).

- Cuando los alumnos realizan observaciones sobre puntos clave dentro de las tareas, sus esquemas se reorganizan, *asimilando* estas nuevas ideas (recordemos que este concepto está definido como: "la integración de elementos exteriores a estructuras en evolución o ya acabadas en el organismo" (Pozo, 2013) (Piaget J. , 2011)) o procesos a sus antiguos esquemas, permitiendo operar bajo esos modelos de conocimiento nuevos.

- La acomodación surge también al intentar desarrollar diferentes pensamientos como por ejemplo "el pensamiento analógico", recordando que este pensamiento se explica en la teoría de LS como:

> "Dada una proposición A, uno quiere conocer sus propiedades, reglas, o métodos de solución. Sin embargo, cuando uno no sabe estas cosas, puede tomar una proposición A' ya conocida, que se parece a A (asumiendo que con respecto a A' uno ya conoce las propiedades, reglas, métodos de soluciones, que en adelante denotaremos por P'). Entonces, uno trabaja en considerar que lo que puede ser dicho acerca de P' a partir de A', se puede decir también a partir de A." (Isoda S. K., 2016)

Dicho lo anterior recordemos que la acomodación para Piaget es: "cualquier modificación de un esquema asimilador, de una estructura o modificación causada por los elementos que se asimilan" (Pozo, 2013) (Piaget J. , 2011). Y no solo con el desarrollo de este tipo de pensamiento sino con otros más que guardan un carácter semejante, sin embargo, habría que especificar con finura cada uno, pero por falta de tiempo en este proyecto, se aplazará para futuros trabajos de investigación.

- Piaget en alguna entrevista comentó que las metas y objetivos de la educación eran "crear a mujeres y hombres que sean creativos, inventivos y descubridores…así como formar mentes que puedan criticar y verificar, no aceptar todo lo que se ofrezca" (Hernández G. , 2020) dentro de este párrafo vale la pena señalar como Piaget apunta al "pleno desarrollo de la personalidad humana" similar a lo que esta escuela japonesa llama la formación del carácter humano. La LS busca que los alumnos aprendan para sí mismos y por sí mismos, lo cual supone, de manera implícita, la cita antes mencionada.

Antes de continuar en esta línea que pretende esbozar una integración entre modelos o teorías, aclaro que esta no es completa o total ya que, aunque existen muchos evidentes puntos de contacto entre ellas, alguna tendrá especificidades que la harán distinta en algún punto. Es conveniente recordar aquí algunos puntos de la realidad compleja que terminarán de dar sentido a este segundo capítulo, por ejemplo: es muy probable que más de algún docente pueda notar procesos heurísticos en el modelo de la LS, sin embargo algunos otros podrán observar que al ser actividades o tareas guiadas u orientadas con preguntas que realiza el docente, se dibuja metafóricamente hablando, una línea que circunscribe o acota el pensamiento del alumno dentro de los aspectos críticos o de mayor interés.

Con lo anterior recordemos, como se mencionó en las primeras páginas de este capítulo, que la realidad es dialéctica y está organizada por elementos y procesos contradictorios (Lara-Rosano F. d., 2017) por una parte, puede existir la libertad para explorar soluciones a diferentes preguntas, actividades o tareas, sin embargo, esta libertad puede verse dirigida hacia el descubrimiento de ciertos objetivos que planea el docente por medio de preguntas.

Dentro de esta escuela los japoneses no suelen decir frases como: "no, es incorrecto, estas confundido o equivocada, etc.", las preguntas se dirigen a que los alumnos observen las limitaciones y contradicciones dentro de sus inferencias, pidiendo que muestren sus razonamientos aplicados a otros problemas (de antemano los profesores sabemos no pueden ser utilizados) para que el alumno observe si este puede ser aplicado a todos los casos. Así mismo reforzar las respuestas correctas con sus propias explicaciones y comprobaciones refuerzan su aprendizaje, brindan seguridad en su pensar y razonabilidad a su entendimiento, incluso habrá algunos que comienzan a pensar de maneras más sofisticadas matemáticamente hablando.

Recordando la complejidad social, la historicidad y trayectoria que cada modelo o paradigma presenta, no surge de forma aislada o descontextualizada, el contexto es importante, incluso en este trabajo la búsqueda de una integración entre modelos o métodos surge tras una evidente necesidad de ir más allá de separar modelos educativos y bajo el cobijo de una reforma educativa que busca la transformación del país en un intento por integrar los conocimientos, como lo podemos observar en la libertad creativa e integrativa que propone la Nueva Escuela Mexicana (NEM) a los docentes.

Otros puntos que cabe mencionar son las características del dinamismo de la realidad, el movimiento entre teorías, metodologías o la transdisciplinariedad; esto viene a colación debido a que la NEM habla o menciona el concepto de Holismo y el Paradigma Humanista Mexicano, ambos conceptos llevan consigo la idea de integración, la educación podría comenzar a adscribirse a teorías científicas emergentes como la complejidad, esta seguramente podría brindar otras opciones de investigación utilizando estos métodos transdisciplinarios en el ámbito educativo.

Esto también nos hace pensar que existe otra oportunidad para integrar de una manera inteligente y consciente nuestros conocimientos como docentes y ocuparse colectivamente para apoyar la compleja tarea educativa entre maestros, generar un nuevo estilo de enseñanza integrador donde entre pares de profesores exista ese respeto para mejorar y sugerir, invitando a salir de una zona de confort donde la crítica y autocritica a la práctica educativa tome lugar ayudando al compañero, a las actividades y lo más importante a los estudiantes.

Después de estos párrafos continuamos con este Plexus de teorías educativas:

- ♣ El modelo Sociocultural. El grupo.
  - Los aspectos centrales dentro de este modelo son la mediación cultural. El aprendizaje entre pares surge cuando los alumnos dialogan, reflexionan y comparan sus respuestas, el docente puede programar sesiones para trabajar en equipos o de manera individual, en todo momento es sumamente importante la participación de los alumnos.
  - El estudio de las funciones psicológicas superiores: dentro de la LS el profesor aspira a desarrollar cada uno de los pensamientos, ideas y valores matemáticos observando los procesos dentro de las explicaciones que dan los alumnos).
  - El concepto de zona de desarrollo próximo (presente en las preguntas justas, adecuadas u oportunas que realiza el maestro para guiar al tema o conflictuar al alumno para que considere sus procesos o métodos de resolución, el docente nunca da las respuestas o presenta explicaciones largas)
  - El lenguaje como un instrumento: las preguntas que se realizan en clase son una de las partes clave que ayuda a movilizar al alumno y sus recursos cognitivos. Continuar con una pregunta que invite al alumno a pensar en su siguiente paso, algunos ejemplos pueden ser: ¿Qué deseas hacer ahora? ¿Cómo podemos comprobar eso?, etc. Así también el hablar con sus compañeros y escuchar sus explicaciones ayudará al propósito de la clase.

Es seguro que estos puntos no serán los únicos que puedan observarse como uniones entre estos modelos o teorías, será muy útil para proyectos futuros especificar o ahondar en más hilos que permitan tejer una red que apoye a los docentes (en cualquier nivel educativo) dentro de esta línea de educación matemática e incluso extenderla a otras materias. Es indiscutible la necesidad de continuar con esta línea de investigación entre los constructivismos más usados en la práctica docente y esta metodología japonesa.

Para finalizar este segundo capítulo es importante recordar que este trabajo puede ser una guía para orientar a los futuros profesores de matemáticas en nivel secundaria, así bien como se ha mencionado en citas anteriores existen otros materiales para trabajar el desarrollo del pensamiento matemático a nivel primaria y preescolar, todos ellos bajo la autoría de Masami Isoda, Shigeo Katagiri, Tenoch Cedillo y Olmos, entre otros. De manera personal me resultaron muy útiles los tomos V, VI y VI del profesor Tenoch.

Para poder visualizar con más claridad lo teórico de este capítulo la planeación de esta propuesta pedagógica ilustrará las descripciones de esta conclusión, así bien el siguiente capítulo abordará los temas o contenidos matemáticos, así como especificar la población, describirla y permitir una breve entrada a la planeación de la propuesta pedagógica. Como docente considero valioso dar una oportunidad de estudiar y capacitarse en esta metodología (LS) ya que, además de poder brindarnos herramientas para mejorar nuestro trabajo y apoyar a los estudiantes, el aprendizaje es mutuo, tanto en las ideas, pensamientos, conceptos y valores matemáticos, el maestro realmente deja de ser el protagonista del acto educativo, permitiendo al alumno tomar el control (un control guiado) para descubrir las matemáticas por ellos y para ellos mismos.

La larga explicación (a modo de introducción) ha terminado, sin embargo, es importante mencionar la necesaria tarea de continuar trabajando este tema sobre la complejidad educativa en busca de un Plexus con la escuela japonesa en los modelos curriculares de Latinoamérica, con el propósito de apoyar al profesorado y orientar a los alumnos y alumnas a aprender por ellos y para ellos mismos; el camino al que llegamos nos permite saber que el pensamiento complejo se crea en el acto mismo de entender la relación entre los elementos. La educación ocupa visiones más amplias y profesionistas preparados, transdiciplinarios y creativos.

CAPÍTULO 3: DOCENCIA Y ADOLECENCIA.

La juventud es apasionada por naturaleza,
Tanto como un borracho por el vino.
Aristóteles.

El aprendizaje más importante es aprender a aprender.
El conocimiento más importante es el conocimiento de uno mismo…
Comprender las estrategias de aprendizaje
y avanzar en el conocimiento de uno mismo,
siendo cada vez más conscientes de los procesos
que uno utiliza para aprender
ayudar a controlar esos procesos y da la oportunidad
de asumir la responsabilidad del propio aprendizaje.
J. Nisbet y J. Schucksmith

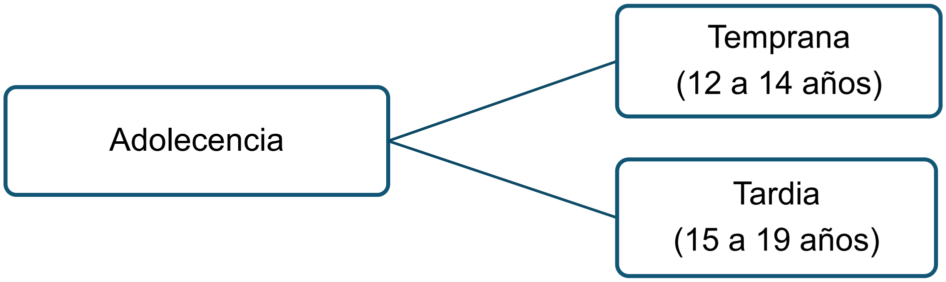
3.1. A los adolescentes

Como se mencionó en el primer capítulo la población educativa en la que se enfoca este trabajo es la adolescente, por ello es importante presentar una pequeña descripción de esta etapa y su importancia para la realización de esta propuesta. Como sabemos el paso de los niños a la adolescencia tiene muchas implicaciones, una de ellas es el desarrollo del pensamiento científico, donde los jóvenes comienzan a dar cabida a nuevas proposiciones y pensamientos más elaborados, que consideran varios factores:

> …Los adolescentes tienen un gusto mucho mayor por lo abstracto, están menos apegados a los datos inmediatos, realizan generalizaciones más aventuradas, tratan de teorizar sobre casi todo, unas veces con fundamento y otras sin él. En definitiva, tienen un pensamiento muy distinto al de los niños y muy semejante al de los adultos. (Delval, 2000)

Ahora bien, recordemos ¿qué es la adolescencia? Según la página oficial del Gobierno de México, citando a la Organización Mundial de la Salud (OMS): "…la etapa que transcurre entre los 10 y 19 años. Normalmente la dividen en dos fases;

Figura 14



En cada una de estas etapas se presentan cambios fisiológicos (estimulación y funcionamiento de los órganos por hormonas, femeninas y masculinas), estructurales (anatómicos), psicológicos (integración de la personalidad e identidad) y la adaptación a los cambios culturales y/o sociales." (Gobierno de México , 2015).

Cabe mencionar que existen algunas sociedades en donde no existe esta etapa llamada adolescencia y donde se habla de ritos puberales donde se pasa de la infancia a la adultes de manera expedita y socialmente clara para todos, por ejemplo en las tribus de los Ogiek en África, los Okrika en Nigeria, los indios Chippewa y los Satere-Mawe en el Amazonas; sin embargo en México (como otros países occidentalizados) se ha optado, a través del tiempo, por el estudio y la denominación de esta etapa, donde poco a poco se madura para llegar a la adultes. Descrito lo anterior se han configurado las dos etapas de la adolescencia y no cabe duda de que estas representan (actualmente) cambios significativos en el desarrollo cultural, biológico, psicológico y social de un individuo.

Con relación a este fenómeno (adolescencia) reportes estadísticos en 2020 mencionan que el 30% total de habitantes en México tienen entre 12 a 29 años, dentro de esa proporción se marcan diferentes rangos de edad:

Tabla 18

Del 100% de juventudes en México según las "Estadísticas a propósito del día internacional de la juventud" el 10 de agosto del 2022	
Edad	**Porcentaje**
12 a 14 años	17.3%
15 a 19 años	28.6%
20 a 24 años	27.6%
25 a 29 años	26.5%

Información tomada de (INEGI, 2022)

Dada la anterior tabla podemos observar que el 45.9% del 100% de las juventudes pertenecieron al rango de edades de los 12 a 19 años categorizadas como adolescencia temprana y tardía. Dicho de otra forma, de ese 30% del total de habitantes en México el 13.77% pertenecieron a esa etapa adolescente, esto sin contar las adolescencias del futuro que son las niñas y niños que recién nacieron o se encuentran en los niveles de primaria encamino a esta etapa.

Bajo estas cifras, valdría la pena mencionar también algunos datos del Consejo Nacional de Población sobre el porcentaje de niños que hay de 6 a 11 años hasta el 2021 que se menciona en la página del Gobierno Mexicano por el Día Mundial de la niñez, donde 13.2 millones de niños y niñas pertenecen a este rango de edad, con ello se pretende recordar que en 6 años estos millones de niños mexicanos entrarán a esta fase llamada adolescencia. Añadido a esto se muestra una tabla con el fin de generar conciencia sobre la población infante que tarde o temprano pasará por esta etapa tan significativa:

Tabla 19

Rango de edad	Cantidad	Porcentaje con relación al 100% de los niños y niñas de entre 0 a 17 años
0 a 5 años	12,9 millones	32.7%
6 a 11 años*	**13,2 millones**	**33.5%**
12 a 17 años	13,3 millones	33.8%

(Gobierno de México , 2021)

Recordar la responsabilidad que tenemos con nuestras infancias y adolescencias es sumamente necesario, ya que, al terminar su etapa, habrán adquirido hábitos, capacidades y aptitudes que, si bien no determinan toda su vida, en gran medida representarán parte de su desarrollo como adultos. Es por lo anterior que necesitamos comprender esta etapa, conocer cuáles son las virtudes que se encaminan, sus áreas de oportunidad, las debilidades y amenazas.

De manera particular observar el desarrollo del pensamiento científico en esta edad es sumamente interesante y puede sorprender incluso a los mismos adolescentes: considerando mi experiencia profesional frente a grupo con alumnos de 12 años (en sexto de primaria) y durante mi servicio social con alumnos de 14 y 15 años (tercero de secundaria) habían alumnos que “creían saber cómo funcionaba la escuela” y lo único que mostraban era la repetición de reglas o definiciones de conceptos, su energía, ingenio y creatividad estaba dirigido principalmente a la convivencia con sus compañeros entre bromas y juegos mentales que ellos mismos creaban. En esta edad la palabra cobra un nuevo significado, el adolescente piensa: “lo que digo <<puede>> o no tener sentido e impactar en la aprobación, aceptación o consideración de un grupo, soy observado, juzgado e identificado en las dinámicas”, ahora las palabras tienen un nuevo sentido.

Cabe abrir un paréntesis, ya que los alumnos con los que trabajé en sexto grado de primaria fueron grupos asignados antes de pandemia (2013-2018) y los jóvenes adolescentes con los que conviví en mi servicio social fueron alumnos postpandemia (agosto 2022 – febrero 2023) así que se podría suponer que las edades así como las experiencias académicas de cada grupo de alumnos serán muy diferentes; mientras los alumnos de 11 a 13 años se observaban más dinámicos y participativos, los alumnos de 14 a 15 años solían estar mayormente callados, poco participativos y apáticos. Sin embargo, no se determina que estas razones sean únicamente la experiencia postpandemia, aunque es importante señalarlas, así también recordar que las motivaciones de estas actitudes pueden ser muchas y muy variadas que van desde la personalidad o los rasgos de la adolescencia hasta el rango de edad, lugar, clase socioeconómica etc.

Pero entonces, retomemos la comprensión de esta etapa: “La palabra adolescencia viene del latín Adolescens <<Joven>> y adolecer <<Crecer>>” (Hernández M. L., 2011) muchas veces escuché, por parte de algunos compañeros maestros que impartían materias en niveles de secundaria, llamar a los adolescentes “aborrescentes”, en referencia sus comportamientos o actitudes poco medidas en riesgos y modos que fastidiaban a más de un adulto. Y tiene sentido ya que:

> …se trata de una edad con características muy específicas (impulsividad, negación del riesgo) … la adolescencia es un periodo crucial durante el cual se toma una nueva dirección en el desarrollo, se elabora la identidad y se plantea el sentido de la vida, la pertenencia y la responsabilidad social. Es al mismo tiempo, cuando se pone en integración, con mayor intensidad, lo recursos psicológicos y sociales del individuo y las metas disponibles del entorno; lo que es expresado externamente en las múltiples, y no pocas veces, desconcertantes conductas observables en los adolescentes, pero también con menos desconcierto y desasosiego en ellos mismos. (Hernández M. L., 2011)

De lo anterior recuperemos algunos aspectos que se consideran valiosos, como, por ejemplo: el cuestionamiento que se hacen sobre su identidad y el camino que emprenden a un nuevo desarrollo y de manera particular, los recursos psicológicos y sociales que se ponen en juego; los adolescentes van en grupo, esto, aunque en la mayoría de las situaciones educativas pone en desventaja a algunos profesores puede resultar de mucha utilidad si se plantean los escenarios correctos.

Así también cabe señalar como menciona Hernández M. L. (2011):

> …los adolescentes lo que demandan es el conocimiento de los profesionales y el reconocimiento de los adultos significativos, de que la adolescencia es una etapa de desarrollo particular, íntima y exclusiva que se presenta con múltiples facetas y variaciones y cuyo resultado final de ese proceso de crecimiento no tiene que ver con la lucha por el poder de conducción de los adultos; sino que van en la búsqueda de las identificaciones, códigos y metas de su generación." (Hernández M. L., 2011)

De esta manera añadiría a las citas anteriores que los adolescentes tienden de manera natural a buscar retos; es por ello que aprovechar esta energía para la construcción de estructuras cognitivas con imaginación y reflexión utilizando el diálogo y la relación con sus pares aunado a un hábil profesor que guie adecuadamente las cuestiones, se podrá conseguir que tanto los alumnos y alumnas como el profesor logren sus objetivos principales (los primeros más por despertar diversión e interés y el segundo con fines encaminados al aprendizaje y desarrollo) en este caso podríamos generalizar lo anterior con: la adquisición de nociones, conceptos e ideas que permitan desarrollar el pensamiento, las estructuras y extender sus conocimientos.

Escrito lo anterior se recuerda que los infantes y jóvenes son el futuro de la sociedad, por lo anterior cabe destacar una frase citada en la página del gobierno mexicano que nos recuerda la esperanza que debemos cuidar:

"La única patria que tiene el hombre es su infancia"
Rainer María Rilke (1875 - 1926)

3.2. Adolescencia y matemáticas

La etapa de primaria que va en México de los 6 a los 12 años aborda diversos temas que van desde el comienzo de la lectura, escritura, los conocimientos científicos elementales para la comprensión y entendimiento de nuestro mundo y la vida en general, así también sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, fracciones, etc.; las actividades y tareas se encuentran relacionados con la cotidianidad en ejemplos relativamente simples para los niños dependiendo su grado o curso.

Así bien, al llegar a la adolescencia los contenidos se van complejizando y adquiriendo niveles de abstracción cada vez más profundos, por ejemplo:

$$12 + 2x^2 = 18 \qquad x = \sqrt{\frac{18-12}{2}} = 1.73205080\ldots$$

Cuando en secundaria nos muestran una operación como esta, devienen otros conceptos como: el uso de literales, la noción de despeje, sustitución, potencias, raíces, etc., estos conceptos los irán identificando y desarrollando a lo largo de las actividades o proyectos (según el plan o programa vigente en cada país, estado, escuela, población). Cabe señalar que ahora, al resolver estos problemas ya no solo es conteo u operaciones básicas, sino otra serie de procedimientos para descubrir lo que llamaremos incógnita.

Entonces de alguna manera pasamos progresivamente del sistema de ecuaciones, a la geometría analítica para conocer, transcurrido un tiempo y algunos otros contenidos, casi al final de la educación obligatoria (media superior) al cálculo diferencial e integral. Así como se puede observar, cada nivel educativo sube grados de abstracción, por lo anterior dejar bases sólidas, buenos hábitos y actitudes ante las matemáticas es fundamental para que estos procesos de transición no sean tan violentos para los educandos.

Recordemos que el adolescente se encuentra en una etapa de “operaciones formales y desarrollo del pensamiento científico” como lo comenta Piaget (Hernández G. , 2020) (Delval, 2000) en México esta etapa comienza desde 5° de primaria (en algunos casos, antes) y se mantiene hasta la mayoría de edad, con esto hablamos de una etapa de búsqueda, experimentación y procesos de metacognición que valdría la pena trabajar para ayudar a desarrollar el pensamiento. Por lo tanto, el docente debe recordar ser consciente de su labor y generar el ambiente adecuado para el aprendizaje.

Es oportuno ahora considerar y resaltar la importancia de enfocar el estudio en esta población[14] ya que:

- Según los resultados de la Evaluación Nacional del Logro Académico (ENLACE) 63.7 por ciento de los estudiantes de bachillerato tienen conocimientos insuficientes en matemáticas, por lo tanto, podemos deducir que tienen gran probabilidad de reprobación en las asignaturas referentes a las Matemáticas siendo este posible motivo de la deserción escolar (Jasso, 2017). Considerando esto, un factor que influye en la obtención de esos resultados son los rezagos académicos en cuanto a temas o contenidos que arrastran varios alumnos.
- 44% → alcanzó el nivel 2 o superior en matemáticas. Estos estudiantes pueden interpretar y reconocer, sin instrucciones directas, cómo se puede representar matemáticamente una situación (simple). (PISA, 2019)
- 98% de variación de México con relación al nivel 2 o superior con Beijing, Shanghai, Jiangsu y Zhejiang (China). 2% de variación con relación a Zambia. (PISA, 2019)
- En promedio en los países OCDE, el 76% de los alumnos obtuvo al menos un nivel de competencia 2 en matemáticas. (PISA, 2019)

[14] Es importante señalar que, aunque se utilizarán los resultados de algunos estudios (ENLACE, PISA-2018) estos solo son con fines informativos sobre las capacidades cognitivas valoradas en los alumnos mexicanos, pero no establecen ninguna posición reduccionista que esté de acuerdo con la estandarización de conocimientos en esta área (educación matemática) en vez del desarrollo integral de los alumnos por sí mismos y para sí mismos.

- 1% → obtuvo un nivel de competencia 5 o superior en matemáticas. Estos estudiantes pueden modelar situaciones complejas matemáticamente y pueden seleccionar, comparar y evaluar estrategias apropiadas de resolución de problemas para tratar con ellos. (PISA, 2019)
- El índice de deserción escolar de secundaria a preparatoria incrementa debido al grado de dificultad que representa pasar de un nivel a otro, considerando como un factor sumamente importante la condición socioeconómica para continuar con los estudios:
    - Quienes provienen de familias de altos recursos socioeconómicos (percentil 90), tienen una probabilidad estimada de egreso de secundaria de 0.87 (hombres) y 0.92 (mujeres). Esta probabilidad se reduce a 0.69 y 0.79, respectivamente, para los jóvenes pertenecientes a familias de bajos recursos (percentil 10), lo que implica un riesgo relativo de no terminar la secundaria aproximadamente 2.5 veces mayor para los jóvenes con desventajas socioeconómicas (Solís, 2018). Por este mismo motivo la posibilidad de tomar un curso o asesoría particular en alguna materia se reduce para las poblaciones que no cuentan con recursos suficientes.
- El salto de secundaria a preparatoria marca una etapa de "filtro" debido a los contenidos que se ven en los currículos. En tercero de secundaria se hacen presentes ciertos temas que son de mayor dificultad para algunos alumnos por su grado de abstracción.
- "Los adolescentes tienen un gusto mucho mayor por lo abstracto, están menos apegados a los datos inmediatos, realizan generalizaciones más aventuradas, tratan de teorizar sobre casi todo, unas veces con fundamento y otras sin él", comenta Delval (2000). Es útil apelar a este rasgo del pensamiento como

fundamento para promover "un aprendizaje de las matemáticas para formar niños que piensen y aprendan por sí mismo y para ellos mismos" (Katagiri, 2016). Si bien es cierto que es conveniente fomentar este estilo de aprendizaje desde las etapas más tempranas de la escolaridad, es en la adolescencia donde la ampliación de las capacidades de pensamiento permitiría la adquisición y consolidación de esta forma de aprendizaje.

Durante el periodo en que se desarrolla el pensamiento científico el grado de abstracción en matemáticas toma diferentes dimensiones, dificultando la asimilación y acomodación de ideas matemáticas, así como de estructuras, por lo que habría que analizar el papel de la didáctica del profesor y sus conceptos sobre como aprenden sus alumnos.

Cabe enfatizar que saber el nivel de desarrollo en cuanto a sus habilidades y capacidades dentro de estos exámenes (PISA-2018, ENLACE y otros) no solo busca una homogeneización sino también un reconocimiento de lo que podría aportarse a la búsqueda de un desarrollo integral. Algo que seguramente será útil para el docente que desee realizar una planeación bajo este modelo, es la siguiente tabla que muestra una comparación entre los contenidos dentro del tema de funciones lineales y proporcionalidad de los libros de la SEP del 2024 y Japón (GAN Teck Hock, 2021).

Tabla 20

<table>
<tr><th colspan="4">Comparación entre actividades del currículo de México y Japón en el tema de Funciones Lineales (FL) y Proporcionalidad.</th></tr>
<tr><td>MX</td><td>Texto que aborda el tema: Libro de Saberes y pensamiento científico. Colección- Ximhai 1°.</td><td>Texto que aborda el tema: Mathematics Challenges for Classroom Practices at the LOWER SECONDARY LEVEL</td><td>JP</td></tr>
<tr><td colspan="2">Presenta definiciones y explicaciones con ejemplos (se puede correr el riesgo de que el profesor realice una educación inyectiva si este no crea actividades o ejercicios y solo utiliza el libro).
Relaciones lineales.</td><td colspan="2">Después de presentar los objetivos comienza con las actividades o ejercicios.

Funciones
• Relaciones</td></tr>
</table>

• Situaciones con pendiente positiva • Variaciones proporcionales (VP) • Razón proporcional. • Constante • Función: como una regla de correspondencia entre 2 variables. • Variables: dato que cambia de valor (Variables D- dependiente e I - independiente). • VP → Funciones Lineales. • Literales: *y* → VD, *x* →VI Proporcionalidad y no proporcionalidad • Constante de proporcionalidad • Razón registro y tabulación de datos de relaciones proporcionales y no proporcionales. • Diferencias de fracciones y razones.	• Razones • Tabulación y grafica • Proporciones directas. • Proporciones inversas. • Aplicación de proporciones. • Funciones lineales. • Tasa de cambio de una función. • Función no lineal. • Graficas de funciones lineales. • Usando graficas de funciones lineales para resolver ecuaciones simultaneas. • Aplicación de funciones lineales.
** Nota: Recordar que la Nueva escuela mexicana NEM, se basa en Aprendizaje Basado en Proyectos. Los libros podría ser un glosario para describir conceptos.	** Nota: la Escuela japonesa Utiliza en cada tema ejercicios o actividades que el alumno tiene que responder, acompañado muy de cerca por el docente.

Información sintetizada (GAN Teck Hock, 2021) (SEP, 2024)

En la escuela japonesa existe un concepto llamado “educación inyectiva”, que hace referencia a la metáfora de “inyección” donde un medicamento es aplicado a un paciente (receptor), cabe compararlo con la clásica descripción de educación tradicional (occidentalizada) que muestra al estudiante como un receptor pasivo de la información que transmite el docente. Ahora bien, de manera particular mencionaremos algunos puntos que valdría la pena identificar para poder esbozar una planeación similar a esta propuesta. Estos puntos son consideraciones útiles que tomamos en cuenta al comenzar este trabajo:

1) Reconocer los conocimientos previos para el tema (Relaciones y Funciones) Esto ayudará a la significatividad lógica y psicológica (Hernández G. , 2020) así como a la planeación de actividades previas si es que el docente identifica y reconoce como necesaria la implementación de actividades introductorias al tema.

a) Manejo consciente de operaciones básicas $(+, -, \frac{a}{b}, *)$

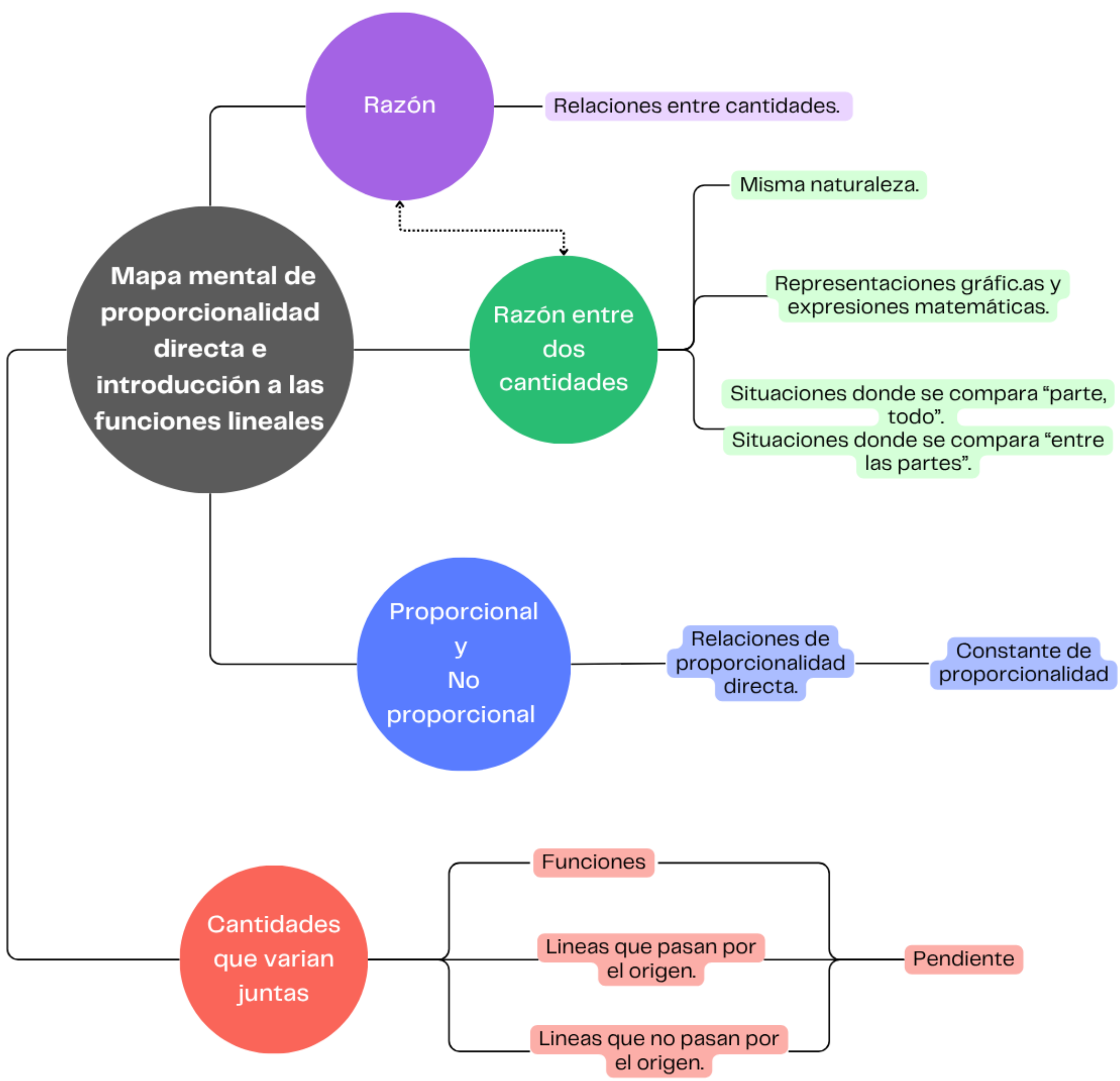
b) Expresiones algebraicas, ecuaciones.

c) Comprensión de la igualdad.

d) Razones y Proporcionalidad.

e) Plano cartesiano.

2) Elaboración de un mapa conceptual o una lista de contenidos en orden (desde lo más concreto a lo más abstracto):



3) En caso de que el alumno no cuente con algunos conocimientos previos necesarios para los temas, vale la pena la consideración de actividades previas o introductorias al tema o contenidos principales, por ejemplo:

Conocimientos en fracciones, división, multiplicación, ecuaciones ←→ razones y proporciones → relaciones y funciones $f(x)$ → Funciones lineales.

4) Identificar el contenido y con ello los tipos de pensamiento dentro de estos:

Tabla 21

Contenido	Pensamiento matemático	Ideas matemáticas	Actitudes matemáticas
Actividad previa con razones y relaciones de cantidades o magnitudes, inicios de las proporciones Extendiendo el concepto de proporciones a números negativos y positivos, usando situaciones con tablas y ecuaciones. Graficar las proporciones definiendo pares ordenados (x, y) en el plano cartesiano. Introduciendo proporciones inversas usando tablas, ecuaciones y graficas. Introduciendo funciones como la correspondencia de dos variables en situaciones. Explorando las propiedades de funciones proporcionales con comparaciones de	• Pensamiento inductivo. • Pensamiento analógico. • Pensamiento deductivo • Pensamiento integrador. • Pensamiento abstracto. • Pensamiento que generaliza. • Pensamiento que simboliza.	• Idea de unidades. • Idea de representación. • Idea de algoritmos. • Pensamiento funcional. • Idea de expresiones.	• Concretizar. • Razonabilidad. • Claridad. • Sofisticación.

funciones proporcionales.			
Apreciación de proporciones y proporciones inversas en la vida.			

La actitud del docente al momento de llevar a cabo la planeación debe ser tan positiva como este lo pueda llevar y no como los estudiantes se lo permitan. Buscar que los alumnos y alumnas participen es la clave para que esta metodología pueda alcanzar un valor real en la práctica educativa, el docente en todo momento observa y escucha las respuestas que son dadas por parte de los estudiantes y se encarga de orientar o guiar a los alumnos con preguntas, no con negaciones o correcciones. Recordar algunos comentarios que menciona Ausubel en cuanto a los factores motivacionales del aprendizaje son importantes:

> … ¿es necesaria la motivación para aprender? ... la relación causal entre motivación y aprendizaje, antes que unilateral es característicamente reciproca… sin embargo, la motivación no es condición indispensable del aprendizaje… Con frecuencia, la mejor manera de enseñarle a un estudiante no motivado consiste en desentenderse, de momento, de su estado motivacional, y concentrarse en enseñarlo tan eficazmente como sea posible… la manera más apropiada de despertar la motivación para aprender consiste en concentrarse en los aspectos cognoscitivos antes que en los motivacionales del aprendizaje, y en confiar en que la motivación resultante del rendimiento educativo favorable impulsará al aprendizaje ulterior… La incapacidad de sentir que cierto tema sea necesario es la razón que los estudiantes mencionan a menudo para explicar su pérdida de interés en los estudios de preparatoria (F.M. Young, 1932). (Ausubel, 1978)

Entonces, dicho lo anterior es importante que el docente tenga claridad en el tema y las preguntas que guiarán al alumno, considerar todas las posibles respuestas y cuales preguntas se podrían realizar ante esas respuestas para guiar al educando, también es importante identificar claramente en qué momento se llevan a cabo los tipos de pensamientos, ideas o actitudes matemáticas.

Ahora bien, tras un análisis de las lecciones del libro “Mathematics Challenges for Classroom practices at the Lower Secondary Level” para el tema de Funciones lineales y aunada la tabla anterior, el ejercicio docente toma un rigor muy claro en cuanto a el logro de los objetivos, al final no solo se trata de dar actividades para que los alumnos lo resuelvan, sino que el docente tiene que permanecer pendiente de sus respuestas ya que son estas las que guiarán al alumno y alumna a plantear, nuevas preguntas o descubrir las respuestas.

Cada clase esta articulada para que los estudiantes puedan descubrir conceptos; es importante mencionar que, en la adolescencia, por muy difícil que pueda ser imaginar alumnos y alumnas motivadas por descubrir no es solo un sueño, planteando los problemas adecuados se hallará metafóricamente “el arranque por patada” que es lo que necesitamos para entrar en esta relación de aprendizaje con los estudiantes.

Ahora bien, bajo mi experiencia durante el servicio social en la Escuela Autónoma Red Paulo Freire (EARPF) tuve la oportunidad de poner en práctica estas lecciones bajo esta metodología japonesa en el tema de patrones numéricos y generalización “Torres de Hanoi”. Por lo anterior presentaré algunos puntos sobre mi experiencia aplicando esta didáctica aun grupo de adolescentes mexicanos del Ajusco medio durante 6 meses:

- El profesor en todo momento debe estar supervisando las actividades y diálogos de los alumnos, estará atento a sus respuestas y sus procesos, nunca debe dejar de escuchar las respuestas y planteamientos del grupo y cada alumno o alumna.
- Los y las estudiantes al no estar familiarizados con una participación constante suelen tener una actitud poco cooperativa esperando las indicaciones precisas de lo que deben hacer. En consecuencia, con lo anterior el profesor debe tener paciencia al incorporar esta metodología a su práctica.
- Para varios alumnos y alumnas fue fácil notar patrones lo cual eventualmente permitió su participación.
- Es difícil como docente tratar de no caer en la educación inyectiva, refiriéndonos a esta como la clásica educación pasiva, donde es más fácil dar respuestas parciales, o indicaciones, sin embargo, es importante que el profesor planee detalladamente su clase para no desesperar y sabotear esta didáctica.
- Cuando los alumnos notan o descubren alguna situación gracias al diálogo con sus compañeros se puede notar una interacción más dinámica y participativa en el grupo, sin embargo, dado que estamos tratando con adolescentes es muy importante no perder el sendero de la clase ya que suelen distraerse fácilmente entre pláticas y bromas.
- Siempre habrá alumnos y alumnas que no estén interesados en absolutamente nada sobre la clase, no obstante, el profesor debe intentar (sin llegar a atosigar) buscar la participación lanzando preguntas relacionadas al tema y confrontando sus respuestas.
- El profesor realmente debe tener una plena claridad sobre el tema y considerar cada duda, pregunta o comentario posible.
- El apoyo entre profesores es importante, es por ello por lo que durante estas prácticas conté con el apoyo y la retroalimentación de varios compañeros que hicieron sugerencias al observar y escuchar la clase, e incluso aplicando algunas encuestas de

satisfacción a los estudiantes. Definitivamente salir de la zona de confort escuchando críticas constructivas fue lo que más ayudó a corregir y mejorar la clase.

Debo admitir que poner en marcha esta metodología fue difícil ya que, al no estar familiarizada con este tipo de educación, el planteamiento de preguntas es difícil y sin duda es de las cosas más importantes, una pregunta mal estructurada puede generar confusiones.

Es muy importante que el profesor recuerde la etapa en la que se encuentran sus alumnos y alumnas, con preguntas que inviten al estudiante a jugar el juego de pensar, su curiosidad puede ser visible en algunas actividades, mientras que su indiferencia y deseos por socializar estarán en algunos otros momentos, sin duda un maestro bien preparado aportará más incluso aunque no este redactado a priori esa pregunta o acción en su planeación, muchas veces sabemos que se deben hacer ajustes u observaciones sobre cada clase, lo cual nos permite mejorar.

Es seguro que el tema de la adolescencia y las matemáticas tiene un potencial de investigación y documentación amplísimo, sin embargo, en este apartado buscamos recuperar la importancia de educar para sí mismos y por sí mismos en esta etapa, dado que los jóvenes pasan por cambios significativos en diferentes ámbitos de sus vidas. Es por ello por lo que “la forma en como reciban el sol al despertar” será importante y marcará hitos significativos en su paso por la escuela y de manera específica en sus clases de matemáticas.

Si bien los resultados de nuestros jóvenes adolescentes en las pruebas de PISA, como se mencionó en capítulos pasados, arrojan datos poco favorables, es importante considerar cambios en la práctica para la mejora de sus habilidades y pensamiento matemático intentándolo como lo ha hecho Chile con esta metodología.

Como se citó en las conclusiones del capítulo 2 en el apartado 2.4., Chile presentó hace relativamente poco tiempo (en junio del 2020) un artículo titulado “Más de una década de estudio de clases en Chile: hallazgos y avances”, en él se presentaron conclusiones muy interesantes, donde tras años de capacitación con el profesor Isoda y la puesta en práctica de su metodología japonesa, buscaron una mejora en su sistema educativo dentro de la materia de matemáticas, obteniendo como conclusiones una ferviente necesidad de:

Mayor comprensión a nivel político de una concepción ampliada del Estudio de las Clases, como vehículo efectivo en la transformación del aula de clases, la escuela y el sistema escolar. Y que esta no dependa de los gobiernos de turno, sino de la visión a futuro de la educación y de las competencias del siglo XXI, así como el apoyo a los docentes para la sostenibilidad del Estudio de las Clases en el tiempo. (Raimundo Olfos, 2020)

Afortunadamente contamos con la experiencia de una década de nuestros hermanos chilenos quienes reportan en su experiencia (en el marco de la alfabetización estadística) que los resultados obtenidos, apoyan de manera relevante una transformación dentro del aula, remarcando la importancia de un enfoque abierto en la resolución de problemas y el potente desarrollo profesional de sus docentes al abordar el trabajo colaborativo como se maneja en esta metodología.

Así bien, concluyendo este breve tercer capítulo, cito algunos diálogos que escuché en la miniserie-documental de la plataforma Netflix llamada “en pocas palabras” dentro del capítulo titulado “el cerebro adolescente”:

> El cerebro adolescente tiene muchos caminos potenciales, y los caminos no tomados pueden borrarse. Sohini Alim, premio nobel Prize comento: “El cerebro tiene un principio de úsalo o piérdelo. Muchas personas piensan si está perdiendo neuronas te vuelves menos listo y eso no es así”. El cerebro adolescente se hace

especializado: la obsesión con los compañeros, tomar riesgos, buscar novedades, todo lleva a los adolescentes a tener más experiencias, porque, ya sean grandes o pequeñas, esas experiencias salvan y fortalecen más conexiones en el cerebro. El trabajo de los adultos es ser la corteza prefrontal de los adolescentes mientras la suya se desarrolla, durante esta ventana que solo tienen una vez, descubren qué conexiones neuronales quieren conservar y cuáles no importa perder, al final moldeando a la persona que serán. Continúa Sohini: “Ha esa altura de tu vida, la forma de cómo usas las neuronas tendrá una infecto duradero en cómo funcionarán el resto de tu vida.” (Dekornfeld, 2019)

Entonces, la importancia de formar adolescentes que piensen por sí y para sí mismos ayuda a echar luz en el oscuro camino que la humanidad y su sistema capitalista han creado con todas sus consecuencias.

CAPÍTULO 4: PROPUESTA PEDAGÓGICA

¿Cómo leer esta planeación?[15]

Se presenta a manera de introducción en esta propuesta pedagógica una serie de puntos que el profesor deberá considerar al trabajar bajo esta metodología:

I) **Tipo de pensamiento matemático que se va a cultivar** (TPMC): El profesor debe considerar en este apartado dos objetivos, el primero es el desarrollo de los pensamientos matemáticos que va a cultivar y el segundo, la adquisición de conocimientos específicos de cada grado. Este concepto (TPMC) se menciona al principio de cada **actividad** de manera general, así también dentro del "Proceso de la clase" se anotan y observan los TPMC, usualmente las actividades del profesor encaminan estos tipos de pensamiento en los alumnos y se evalúan dentro del tiempo y con las respuestas de los alumnos, las acciones realizadas en la clase, sus participaciones y al escuchar y preguntar sobre sus inferencias. El profesor debe ser un observador activo, que confronte las respuestas de los alumnos y alumnas con otras preguntas que orienten sus esfuerzos para conseguir la respuesta que sugiere el desarrollo de un pensamiento. Todo esto por medio de un enfoque basado en la resolución de problemas y la organización de la secuencia de tareas.

II) **Grado**: nivel educativo.

III) **La preparación**: lo que los alumnos(as) y el profesor necesitan en la clase. (Material didáctico, tiempos y espacios).

[15] En esta sección, las actividades y planeación se retoman elementos de los planes del Estudio de las Clases de Japón. Las actividades se construyeron con base en los lineamientos de esta metodología, en particular esta sección introductoria es una adaptación del apartado "cómo leer los ejemplos" del libro de Isoda (2016, p.181).

IV) **Visión general del proceso de la clase**: descripción general de la clase que incluye; lo que harán los alumnos para desarrollar su pensamiento matemático, el pensamiento matemático que se desarrolla y de manera breve las conclusiones que irán en "el resumen de pizarra". Se espera que esta propuesta sea de ayuda para los docentes de la Nueva Escuela Mexicana en las lecciones relacionadas con los contenidos.

V) **Guía de trabajo:** son las lecciones o actividades y dentro de ellas, se procura utilizar el concepto de "problema". Lo anterior ayudará a que el profesor reconozca su labor al acompañar a los alumnos y alumnas con los problemas escritos e incluyendo los problemas o confusiones que surjan de las actividades. Su estrecha supervisión y constante confrontación con respuestas e inferencias de sus estudiantes en la guía de trabajo son pieza fundamental para la evaluación durante la clase y la sugerencia de un instrumento de evaluación final, para ese grupo en particular (contextualizando y situando la evaluación al grupo).

VI) **Proceso de la clase**: es la planeación específica de la clase que contiene las actividades del docente, las actividades del alumno y los tipos de pensamiento que se desarrollaron junto con la evaluación (esta última se declara con la observación del profesor, su valoración para reconocer las respuestas que sugieren el DPM y la síntesis de evaluación que es un escrito que entregan los alumnos al final de cada lección o actividad diciendo lo que aprendieron o concluyen de esa lección o actividad).

La siguiente tabla contiene describe la organización de los apartados previamente comentados;

Tabla 22

Actividad del docente	**Actividad del alumno**	**Tipo de pensamiento que desarrolla.** **(AT)** Atención. **(Eva.)** Evaluación.
Dentro del papel del docente este deberá organizar preguntas o actividades y contrastar tanto las respuestas como las distintas representaciones, para que cada una de las propuestas a las actividades sea analizada por los alumnos y alumnas y ayude reformular sus ideas y aprender por sí mismos. La guía de trabajo tiene las preguntas y actividades, sin embargo, el profesor deberá observar y confrontar las respuestas y actividades de los y las estudiantes con respeto[16] y **entablando un diálogo hermeneútico y dialectico** por parte del docente y el alumno o alumna. Así también, el profesor deberá estar atento al momento de la respuesta del alumno en su actividad ya que esto le permite observar el DPM	La actividad de la alumna (o) son las acciones que realiza el estudiante, así como sus propuestas, reflexiones, análisis y reorganizaciones de las ideas que notan o escuchan de otros estudiantes o que ellos mismos proponen. Aquí comentarán actividades relacionadas con los problemas o las secuencias de tareas. Es aquí donde el profesor deberá estar 100% atendiendo a la actividad o lección para observar a todos los estudiantes.	Pensamiento matemático que se desarrolla, aquí se indica en específico en qué momento dentro de la acción del docente y la actividad del alumno se da este pensamiento. Se colocará en tiempo real el momento donde se observe o muestre el insight con un “At” de “**Atención**”. Estas son oportunidades para enseñar o evaluar el PM. Podrá representar una **valoración/evaluación** con una “**E**”. En esta reconoce el TPMC que ha desarrollado y como lo han manifestado.

[16] El profesor deberá trabajar con un tono de conversación que invite a la participación, el diálogo y el cuestionamiento, si se maneja un discurso autoritario o correctivo se inhibe al estudiante, al ser adolescentes el discurso puede ser a cuestionar y explicar más. Escuchar a los alumnos es fundamental y la pieza clave de la evaluación.

VII) Resumen de la pizarra: se anotará en la pizarra una sección que contiene "¿qué fue lo encontrado?" y "formas importantes del pensamiento" que incluyen los conceptos que se desarrollaron.

Ejemplo Tabla 23

"¿Qué encontramos?	Resumen
Lo que se encontró dentro de la actividad o lección.	Formas importantes en que se pensó. Algunas palabras que podremos encontrar en esta sección podrían ser: consideramos, examinamos, descubrimos, se nos ocurrió, queríamos y realizamos, etc., Sobre los contenidos, considerados en cada una de las actividades y los problemas incluidos en cada una de las secuencias.

VIII) Evaluación: se considera bajo el tiempo de una lección (60 minutos tal vez un poco más dependiendo de la dosificación de tareas y el grupo). Después de que el profesor observó las respuestas de los estudiantes y anotó situaciones importantes para el DPM que ocurrieron en la clase, se debe considerar el desarrollo de cada alumno y alumna según sus interacciones, preguntas y respuestas de las actividades, aquí el profesor deberá preguntarse para la valoración ¿Qué ha aprendido este estudiante?[17]. Con el fin de plasmar la evaluación, el profesor podría considerar las siguientes evaluaciones:

a. Evaluación Docente

i. Valoración de la secuencia de tareas del docente y su efectividad al conseguir el DPM e identificar aquellos aspectos que deben mejorarse para lograr los objetivos.

[17] Hyouka 評価

Sería deseable que el profesor al organizar la secuencia de tareas, implementarla en el salón de clase y evaluar su efectividad, tuviera la oportunidad de realizar estas actividades de manera colectiva con sus colegas para aprender juntos.

b. Evaluación del estudiante:

i. Elaboración de síntesis sobre lo que ellos aprendieron en la clase.

ii. Anotaciones respecto a los estudiantes y la observación de sus DPM, se puede recomendar listas de cotejo con alguna simbología que represente los TPMC añadiendo cuadros de texto para comentarios y/u observaciones sobre los estudiantes, por ejemplo:

<table>
<tr><td rowspan="2">Estudiantes</td><td colspan="6">Simbología</td><td rowspan="2">Observaciones/notas</td></tr>
<tr><td>Δ</td><td>Ω</td><td>∅</td><td>◊</td><td>□</td><td>۞</td></tr>
</table>

iii. Uso de pruebas que el profesor elabore a partir de las actividades vistas en clase.

Lo anterior descrito en el inciso VIII-a son algunas recomendaciones, el docente podrá considerar otras opciones de evaluación que se ajusten a su contexto para continuar con la toma de decisiones para el desarrollo de sus estudiantes.

IX) **Mayor desarrollo:** Permite brindar algunos ejemplos, así como proveer más desarrollo y consideraciones teóricas. El docente podrá anotar respuestas y preguntas que él considerará para futuras clases. Por ejemplo: consideraciones para el desarrollo del pensamiento inductivo en alguna actividad, ejemplos que permiten llegar a la generalización, etc.

4.1. Razones y Razón entre dos cantidades

Tipo de pensamiento matemático que se va a cultivar (TPMC): Pensamiento inductivo, deductivo, pensamiento abstracto (tipo I y IV) pensamiento analógico y actitud matemática que busca claridad, idea de representación.

Grado: 1° Secundaria.

La preparación: El profesor debe encargarse de imprimir **la guía de trabajo** para cada estudiante, considerará trabajar en duplas o de manera individual. También comente la importancia de realizar anotaciones de la clase en el cuaderno ya que más tarde regresarán a ellas y servirán como parte de la evaluación.

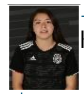
Visión general del proceso de la clase:

Los alumnos y alumnas descubrirán inductiva y deductivamente el concepto de razón entre dos cantidades aplicándolo a situaciones donde estas cantidades se encuentren una dentro de la otra, así como en cantidades separadas pero relacionadas donde alguna de ellas puede ser mayor o menor que 1. También pensaran analógicamente aplicando sus inducciones en problemas diferentes. Identificarán representaciones gráficas y expresiones matemáticas para las razones como: la fracción y el punto decimal. De igual modo se pretende que los estudiantes comiencen a mostrar actitudes matemáticas como la claridad.

Guía de trabajo: Razones y razón entre dos cantidades

Las alumnas del grupo 1°E presentaron en el periódico escolar los resultados de algunas futbolistas mexicanas de la liga MX.

Nombre	***Katty***	***Alicia***	***Desiré***
Goles	**15**	**12**	**10**
Tiros	**20**	**15**	**12**


Katty Martínez
Club América


Alicia Cervantes
Club Chivas


Desiré Monsiváis
Club Monterrey

4.1.1. ¿Cómo relacionas las dos cantidades (goles y tiros) para determinar quién es la mejor goleadora? Y ¿Por qué?

4.1.2. Según los datos de la tabla ¿cuál debe ser el criterio para determinar quién es la mejor goleadora?

4.1.3. ¿Cómo representamos esto con una expresión matemática[18]?

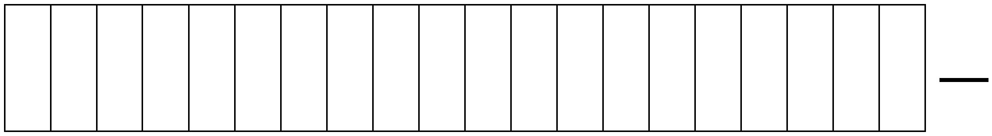
4.1.4. ¿Cómo se representaría con una fracción y con números decimales?

4.1.5. Según las respuestas de las preguntas anteriores ¿Quién es la mejor goleadora y por qué?

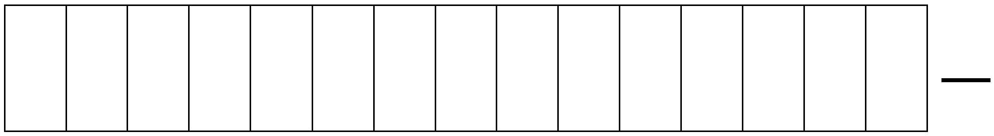
[18] Recuerda que una expresión matemática es una "frase" pero en vez de usar solo palabras incorporamos letras, símbolos y números.

4.1.6. Utilizando graficas de la misma longitud, colorea en los cuadritos los goles anotados con relación al total de tiros y escribe en el recuadro de la derecha la fracción que corresponde a cada una de las partes de cada grafica.

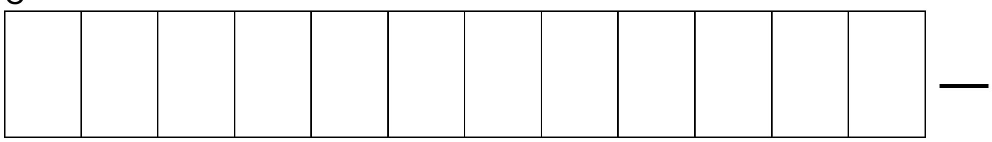
A



B



C



4.1.7. Relaciona cuál de las gráficas pertenecen a cada jugadora:

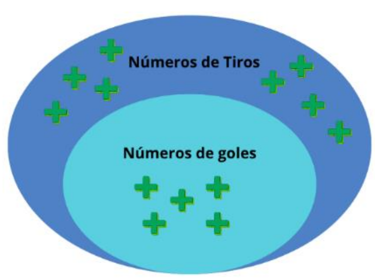
A pertenece a ___________________________

B pertenece a ___________________________

C pertenece a ___________________________

4.1.8. ¿Qué puedes concluir sobre el criterio que se descubrió en la pregunta 4.1.2 y las gráficas para saber quién es la mejor goleadora?

Recuerda observar que: si tomamos el número goles en relación con el total de tiros, entonces el número de goles entre el número de tiros será igual a el cociente que llamaremos razón.



$$\text{razón} = \frac{\text{cantidad que es comparada (número de goles)}}{\text{cantidad de referencia (número de tiros)}}$$

4.1.9. Expresa la razón de los goles respecto a los tiros que hizo Stephanie Mariana Ribeiro en el equipo de pumas.

		Razón
Goles	⚽⚽⚽⚽⚽⚽⚽⚽⚽⚽	
Tiros	⚽⚽⚽⚽⚽⚽⚽⚽⚽⚽⚽⚽⚽⚽⚽⚽⚽⚽⚽⚽⚽⚽	

En la ciudad de México se suele utilizar el Metrobús como medio de transporte diario. Algunos autobuses son articulados con dos vagones y una capacidad de 160 pasajeros (entre parados y sentados) otros son autobuses biarticulados con tres vagones y tienen una capacidad para 240 personas (también entre parados y sentados).

Autobús Articulado

Autobús Biarticulado

Ahora bien, pasando las horas pico donde la multitud de gente baja se obtuvieron los siguientes datos.

Autobuses	Articulado	Biarticulado
Número de pasajeros	92	132
Capacidad	160	240

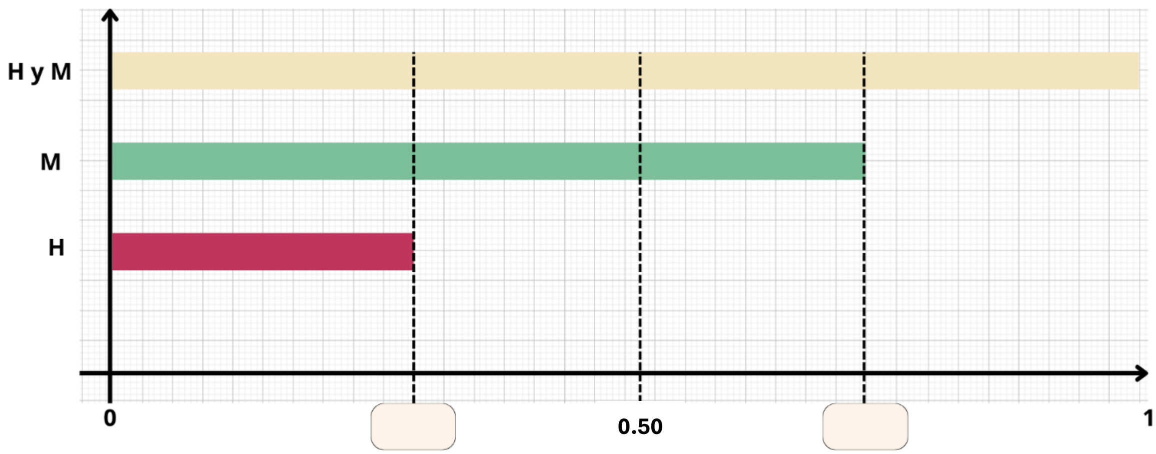
4.1.10. ¿Qué autobús tiene mayor aglomeración? (aglomeración esta entendido como “que tan lleno va el Metrobús”).

4.1.11. ¿Cómo representarías con expresiones matemáticas estas relaciones?

4.1.12. Observa los ejercicios anteriores ($4.1.2$ y $4.1.10$) nuevamente ¿Qué tienen en común las actividades y los ejercicios anteriores?

Veremos ahora cómo podemos calcular la razón que hay entre dos cantidades, incluso **si una de ellas no es parte de la otra.**

En el salón de 1°B hay 35 alumnos y alumnas en total de los cuales 25 son mujeres y 10 son hombres.



$\frac{\square}{\square} =$ ______ $\qquad \frac{\square}{\square} =$ ______

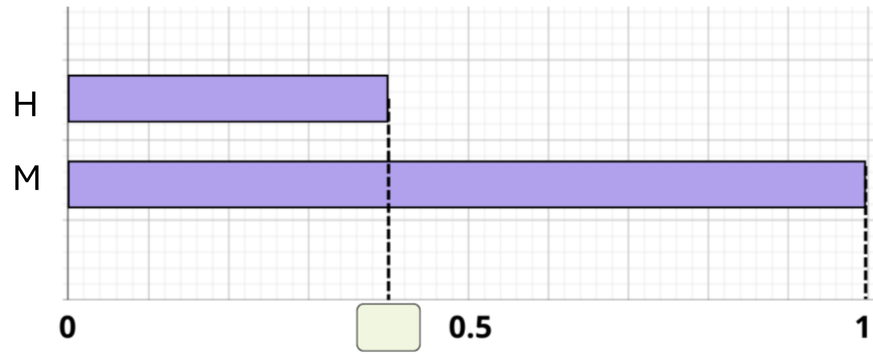
4.1.13. ¿Cuál es la razón que hay entre el número de mujeres con respecto al total de estudiantes?

4.1.14. ¿Qué cantidad es la comparada en la pregunta anterior?

4.1.15. ¿Cuál es la razón que hay entre el número de hombres con respecto al total de estudiantes?

4.1.16. ¿Qué cantidad es la comparada en la pregunta anterior?

4.1.17. Ahora, encuentra la razón que permite comparar el número de hombres con respecto al número de mujeres en el salón de 1°B usando la siguiente representación gráfica: (A).

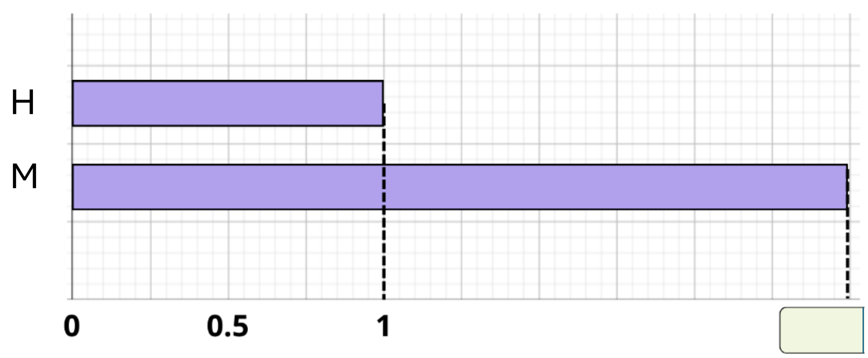


— = ______

$Cantidad\ que\ es\ Comparada\ \div Cantidad\ de\ Referencia = razón$

4.1.18. ¿Cómo puedes interpretar esta comparación entre el número de hombres con respecto al número de mujeres?

Encuentra la razón que permite comparar el número de mujeres con respecto al número de hombres en el salón de 1°B usando la siguiente representación gráfica: (B).



— = ______

$Cantidad\ que\ es\ Comparada\ \div Cantidad\ de\ Referencia = razón$

4.1.19. ¿Cómo puedes interpretar esta comparación entre el número de mujeres con respecto al número de hombres?

4.1.20. ¿Cuál de las dos razones es mayor que 1?

4.1.21. ¿Cuál de las dos razones es menor que 1?

4.1.22. En la razón mayor que 1 ¿Qué cantidad es mayor entre el numerador y el denominador?

4.1.23. En la razón menor que 1 ¿Qué cantidad es mayor entre el numerador y el denominador?

Resumen de pizarra:

“¿Qué encontramos?	Resumen

Proceso de la clase de Razones y razón entre dos cantidades.

<table>
<tr><th>Actividad del docente.</th><th>Actividad del alumno.</th><th>Tipo de pensamiento que desarrolla.
(At) Atención
(Eva) Evaluación</th></tr>
<tr><td>El maestro propone las actividades 4.1.1 a 4.1.5. para que las alumnas y alumnos descubran un criterio que determine quién es la mejor goleadora.
En este problema comenzará el desequilibrio, ya que no son el mismo número de tiros. El profesor espera que haya una variedad de respuestas, lo cual le permite confrontar distintas soluciones.</td><td>Los estudiantes discuten sobre cuáles son las cantidades que deben manipular para determinar quién es la mejor goleadora.
Descubren que la cantidad de goles no determinará quién es la mejor goleadora, ya que no todas tiraron la misma cantidad.
Entonces podrán observar que la relación (una operación) entre los tiros y los goles anotados podría ayudar a determinar a la goleadora, lo cual les permite buscar un criterio para definir quién es la mejor goleadora.
Comentaran: El resultado de una división podría ayudar a determinar el criterio.<table><tr><td>Goles</td><td>15</td><td>12</td><td>10</td></tr><tr><td>Tiros</td><td>20</td><td>15</td><td>12</td></tr><tr><td>Cociente</td><td>.75</td><td>.80</td><td>.83</td></tr></table>Descubrirán que el cociente es casi un gol por partido, donde 1.0 es un gol.</td><td>(Eva) Pensamiento inductivo al descubrir la propiedad común entre el número de goles y el número de partidos en todos los casos después de obtener el cociente.

(At) Se presenta la actitud matemática de Claridad. Esto al intentar comprender las cuestiones y expresarlas cosas con sencillez dada la relación de datos que tienen.</td></tr>
<tr><td>Observe las expresiones que utilizaron los alumnos y alumnas.</td><td>Los estudiantes podrían utilizar expresiones matemáticas como la fracción y el punto decimal para representar la relación entre goles y partidos: $\frac{15}{20} = .75, \frac{12}{15} = .80, \frac{10}{12} = .83$
Los estudiantes descubren que la mejor goleadora es Alicia del Club Chivas ya que, la relación de goles con los tiros arroja el número mayor entre las tres. O pueden comentar que el cociente fue .83, mayor al de las otras goleadoras. Así también las representaciones del punto decimal permiten a los estudiantes a visualizar la diferencia en las fracciones.</td><td>(At) Actitud matemática de Claridad.

(At) Idea de Representación.

(Eva) Pensamiento deductivo al comparar la relación de las fracciones con la representación con decimales.</td></tr>
<tr><td>El docente propone que utilicen las tablas</td><td>El estudiante identifica en la representación gráfica cuál de ellas</td><td>(At) Idea de Representación.</td></tr>
</table>

de la misma longitud para representar la relación entre las cantidades para cada una de las jugadoras. El docente pregunta a los estudiantes ¿qué concluyen? Acompaña a los alumnos en cada actividad.	corresponde a cada expresión matemática. Los alumnos relacionaran las gráficas que pertenecen a cada jugadora, por ejemplo: A pertenece a Katty, B pertenece a Alicia y C pertenece a Desiré. Los estudiantes comprenden que los goles entre los tiros dan una relación, lo que se conoce como razón. Quien tenga la razón más grande será la mejor goleadora.	**(At)** Actitud matemática de Claridad. **(Eva)** Pensamiento deductivo al comparar las razones y obtenerla respuesta correcta.
El docente sugiere que de manera individual respondan la actividad 4.1.9.	Anotan la expresión matemática que corresponde a esa razón: $^{10}/_{22}$	**(At)** Pensamiento analógico.
Ahora, el docente propone resolver la actividad de los autobuses.	identificaran una relación similar a los goles y partidos, pero ahora será el número de pasajeros y la capacidad del autobús, escribirán la representación entre ambas cantidades. $92/160 = .575 \quad y$ $^{132}/_{240} = .550.$ La razón entre la cantidad comparada y la cantidad de referencia presentará como resultado un cociente que será llamado aglomeración. Encontraran la relación entre el pasaje y la capacidad de cada autobús, comentando que 92 pasajeros de 160 y 132 de 240. Se pueden representarlo con una fracción o con decimales.	**(Eva.)** Pensamiento analógico. **(Eva)** Pensamiento deductivo.
El profesor pregunta ¿Qué tienen en común las actividades 4.1.2 y 4.1.10?	Los estudiantes recuerdan las respuestas obtenidas en la pregunta 4.1.2. y reconocen la relación entre la cantidad de referencia y la cantidad comparada ahora para la actividad 4.1.10. Después los estudiantes reconocen dos cantidades que están relacionadas por medio de su cociente y este indicara que tanta aglomeración tiene cada autobús y por lo tanto cual va más lleno.	**(Eva.)** Pensamiento analógico y pensamiento que abstrae al intentar explicar las propiedades en común de ambas actividades. **(AT)** Actitud matemática de claridad.

	Infieren que el autobús con una capacidad de 160 con 92 pasajeros va más lleno que el biarticulado.	
El docente comenta que compararán dos cantidades que son parte de un grupo y sugiere continuar respondiendo las actividades Ahora los alumnos comparan datos que no están dentro de la cantidad, sino que son diferentes. En esta actividad el docente plantea las actividades con la intención que los alumnos obtengan una razón mayor que 1.	Los estudiantes observan las gráficas. La cantidad de referencia es el total de estudiantes y dentro de estos se encuentran 25 mujeres (M) y 10 hombres (H). Identifican las razones $^{25}/_{35} = .71$ y $^{10}/_{35} = .28$. Observan que en la primera la cantidad comparada es 25 y en la segunda es 10. Los estudiantes obtienen la razón que permite comparar el número de hombres en relación con el número de mujeres, la cantidad de referencia serán las mujeres y la que se va a comparar serán los hombres: $^{10}/_{25}$. De igual manera descubren la razón que permite comparar el número de mujeres con respecto al número de hombres: $^{25}/_{10}$. Comentan sobre dos cantidades diferentes (H y M) que forman parte de una tercera (grupo) y estas pueden ser comparadas entre sí.	**(At)** Pensamiento analógico. **(Eva)** Pensamiento abstracto que intenta aclarar las condiciones tras dialogar sobre estas cantidades y su relación y comparación.
Pregunte a los alumnos qué obtuvieron al aplicar la comparación entre las dos cantidades (H y M). Tome en cuenta las distintas respuestas de los alumnos y alumnas y confróntelas con el grupo. El docente preguntara ¿qué cantidad es mayor entre el numerador y denominador? En ambas cantidades	Los alumnos observan que la división $^{10}/_{25} = .4$ y comparan que la otra división da como resultado $^{25}/_{10} = 2.5$. con esto pueden comentar que un resultado menor que 1 y otro será mayor que 1, comprenderán que esto se debe a que son más las mujeres en comparación con los hombres dentro del grupo. Los estudiantes comentaran que en el caso del .4 la cantidad de referencia (mujeres) es mayor, por lo cual el resultado al compáralo con los hombres es menor que 1. Por el contrario, para el resultado	**(Eva)** Desarrollo del Pensamiento analógico. Pensamiento abstracto que intenta aclarar las condiciones tras dialogar sobre estas cantidades y su relación y comparación. Pensamiento inductivo tras identificar cantidades mayores y menores a 1.

comparadas (H/M y M/H).	de 2.5 que es mayor que 1 la cantidad comparada es mayor que la cantidad de referencia que está en el denominador, por lo cual se obtiene ese resultado.	

Resumen de pizarra:

"¿Qué encontramos?	**Resumen**
Encontramos que cuando tenemos dos cantidades: una es la referencia y otra es la comparada. Si deseamos compararlas **entre sí** obtendremos como resultado un cociente llamado razón y este dato nos ayudara a estimar o valorar razones entre cantidades. $$\text{razón} = \frac{\text{cantidad que es comparada}}{\text{cantidad de referencia}}$$ Esta razón se dio en cantidades que están una dentro de la otra (tiros y goles) o en cantidades que no se encuentran una dentro de la otra (grupo, hombres y mujeres). Así también la razón puede ser mayor o menor que 1.	Comprendimos cómo se pueden relacionar dos cantidades y dentro de estas reconocimos cuando hay cantidades cuya razón es menor que 1 y mayor que 1. Comprendimos que la razón es un criterio de comparación y que se puede representar por una división. Identificamos la representación de las razones con graficas de la misma longitud, así como sus expresiones matemáticas con fracciones y punto decimal.

Evaluación:

Junte y vuelva a evaluar lo que escribieron los estudiantes dentro de esta lección, así también evalué lo que redactaron los alumnos en "**resumen**" añada a su valoración las notas dentro de su lista de cotejo.

4.2. Proporcional y No proporcional

Tipo de pensamiento matemático que se va a cultivar (TPMC): Desarrollo del pensamiento inductivo, deductivo, analógico, actitud matemática de claridad y pensamiento que generaliza, razonabilidad.

Grado: 1° Secundaria

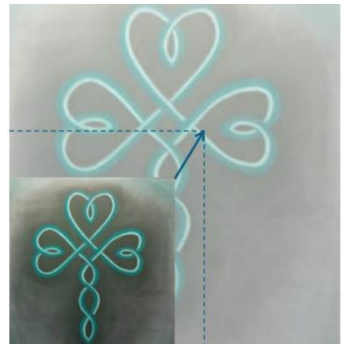
La preparación: El profesor debe encargarse de imprimir **la guía de trabajo** para cada estudiante, los estudiantes utilizarán una regla, considerar trabajar en duplas o de manera individual. También comente la importancia de realizar anotaciones de la clase en el cuaderno ya que más tarde regresarán a ellas y servirán como parte de la evaluación.

Visión general del proceso de la clase:

Descubrirán el concepto de proporción, no proporcional y constante de proporcionalidad, para ello utilizarán las razones en figuras geométricas y variando el tamaño de estas, descubrirán como hay decremento o crecimientos proporcionales y no proporcionales. Así también mediante tablas descubrirán la proporcionalidad y no proporcionalidad, así como las representaciones gráficas y expresiones matemáticas que ayudarán a generalizar. Al final de las actividades descubrirán que los cocientes en las razones de cada dato dentro de algunas tablas permanecen constantes mientras que en las actividades no proporcionales este varia y no se mantiene como una constante de esa proporción.

Guía de trabajo: Proporcional y no proporcional

Observemos la imagen de la izquierda:



Esta imagen es un cuadrado que deseamos ampliar; sin duda esta acción sería muy fácil con algún programa o utilizando inteligencia artificial, solo bastaría precisar en qué tamaño queremos la imagen para que el programa lo reproduzca a escala. Sin embargo, supongamos que no tenemos un programa o la ayuda de alguna herramienta digital, a continuación, presentamos otra tarjeta cuadrada.

4.2.1. Reproduce esta imagen dibujándola y ampliándola 1 centímetro más en cada lado.

4.2.2. ¿Cuál es la razón entre los lados del primer cuadrado? Y ¿Cuál es la razón entre los lados del segundo cuadrado?

4.2.3. ¿Cuál es el resultado del cociente del primer y segundo cuadrado?

4.2.4. A continuación, dibuja un rectángulo de $4\ unidades\ de\ ancho \times 2\ unidades\ de\ alto$, después reprodúcelo ampliándolo 1 unidad en cada lado:

4.2.5. ¿Cuál es la razón entre el ancho y el alto en cada uno de los rectángulos?

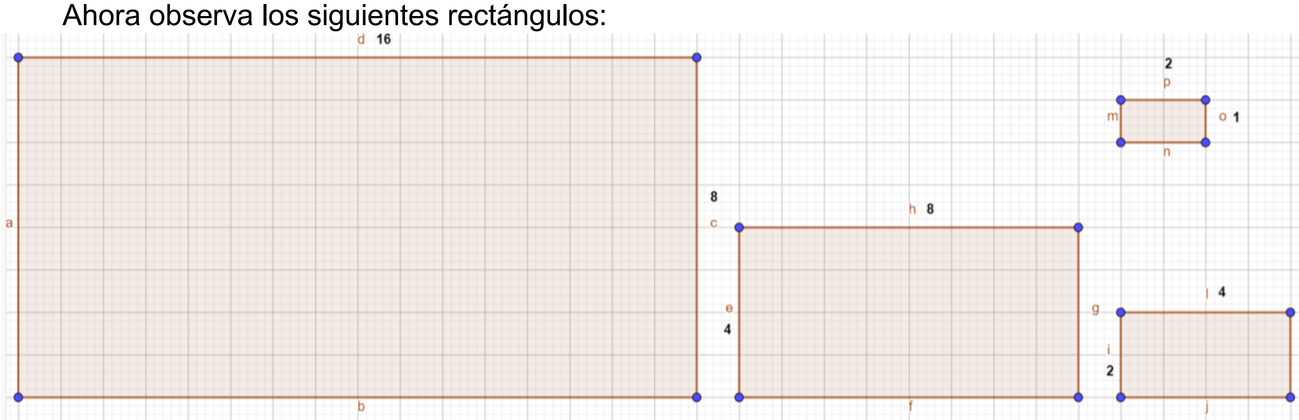
4.2.6. ¿La razón del primer rectángulo es igual a la del segundo?

4.2.7. ¿Por cuantas unidades deberíamos ampliar la figura para que la razón fuera la misma?

4.2.8. Explica tu procedimiento:

Ahora bien; la razón entre los lados se puede leer como "a es a b" o "$\mathbf{a}$ entre $\mathbf{b}$". Si una razón es equivalente a otra por ejemplo $\frac{2}{2} = \frac{4}{4}$ en ambos casos vemos que el cociente es el mismo (1). Esta expresión se puede leer como "2 es a 2 como 4 es a 4" a esta igualdad se le llama proporción. Como observamos, una proporción es una igualdad, por lo tanto, estamos hablando de razones que son equivalentes y se expresan como proporciones.

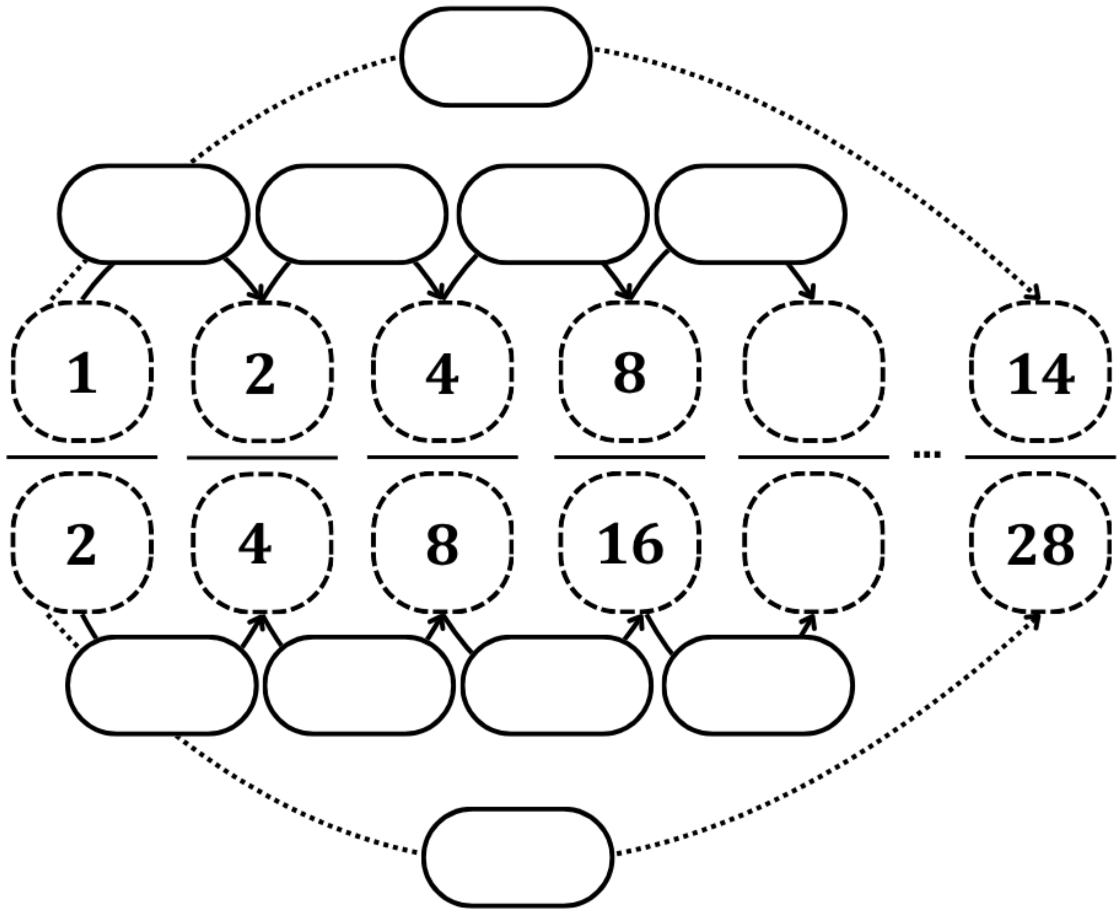
Ahora observa los siguientes rectángulos:



4.2.9. Observa los rectángulos ¿Cuál es la razón entre el alto y el ancho de cada rectángulo?

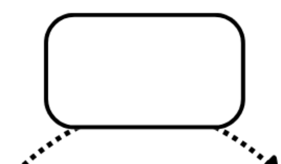
$$\frac{\quad}{2}, \frac{\quad}{4}, \frac{4}{\quad}, \frac{\quad}{\quad}$$

4.2.10. Modifica las razones anteriores y encuentra el número en cada recuadro:



4.2.11. ¿Qué relación hay entre las operaciones que realizaste en el numerador y denominador?

4.2.12. Considerando los datos anteriores, las siguientes medidas corresponden a los rectángulos trabajados previamente. Completa los números en la siguiente tabla:



Alto	1	2	4	8	16	32	64
Ancho	2	4	8	16			

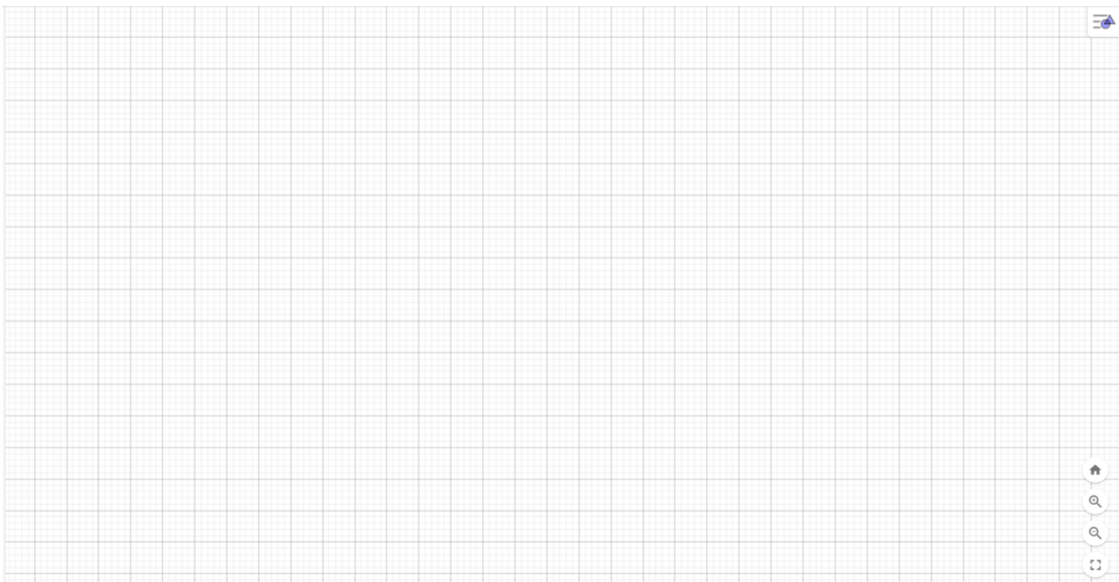
4.2.13. ¿Por qué número debes multiplicar el ancho para los números que corresponden al alto de 8 a 32?

4.2.14. ¿Por qué número debes multiplicar el alto si varia del 4 a 64?

4.2.15. ¿Por qué número debes multiplicar el ancho para los números que corresponden del 4 al 64?

4.2.16. ¿Cuál es la razón entre el alto y el ancho de los primeros 3 números? ¿el cociente es el mismo?

4.2.17. Ahora representa en forma gráfica uniendo los puntos, el alto con los primeros 5 valores (alto: eje horizontal "x", ancho: eje vertical "y").



Como podemos observar si tomamos un valor para el alto, el valor que obtenemos del ancho depende del valor que tomemos en ese alto.

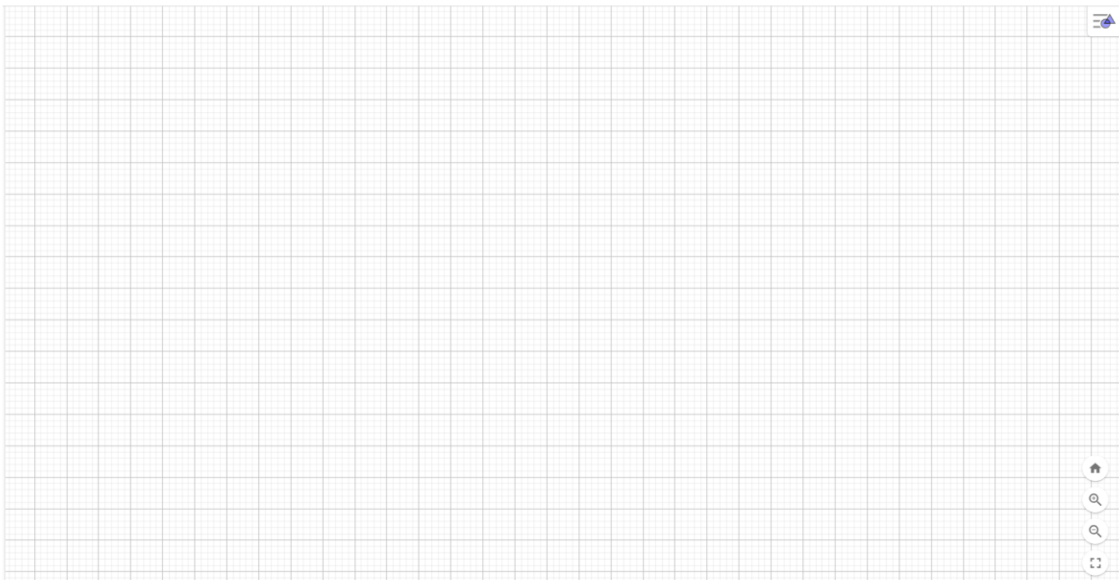
4.2.18. Si extendemos los valores del alto de la siguiente manera completa la siguiente tabla:

Alto	1	2	3	4	5	6	7	8	…	16	…	n
Ancho	2	4		8				16	…		…	

4.2.19. Cuando el alto es n (cualquier número de cuadros) ¿cuánto es el ancho? Encuentra una expresión matemática que relacione esos números. Compruébala sustituyendo la letra por algún numero de la tabla.

4.2.20. ¿Cuál es la razón entre el alto y el ancho de los primeros 4 números? ¿el cociente es el mismo?

4.2.21. Ahora representa en forma gráfica, uniendo los puntos, el alto con los primeros 8 valores (alto: eje horizontal "x", ancho: eje vertical "y").



4.2.22. Si tomamos cualquier valor en el eje "x" como por ejemplo 3.5, 4.7, 5.5, ¿qué ancho les corresponderá? grafícalos en el plano anterior.

Ahora considera las siguientes actividades:

4.2.23. Considerando que estos datos son las medidas de los rectángulos trabajados previamente. Completa los números en la siguiente tabla:

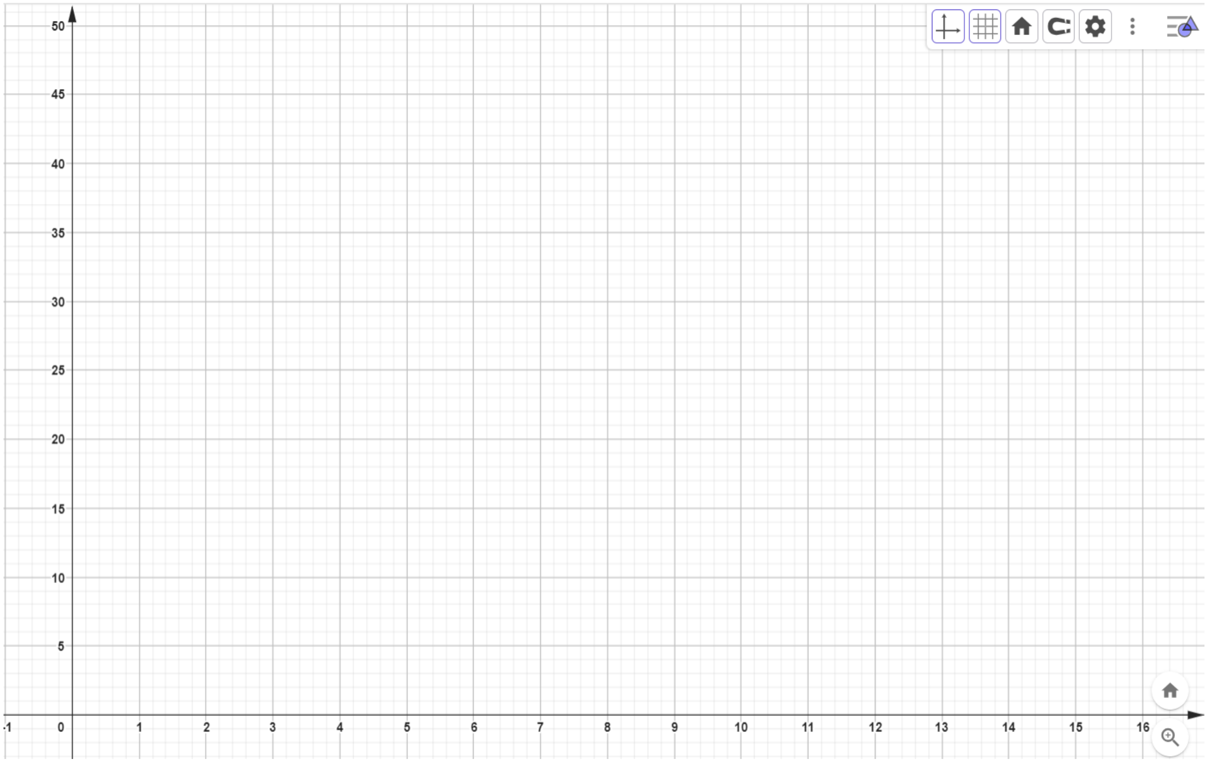
Alto (Unidades[19])	1	2	3	4	5	6	7	…	15	…	n
Área	2	6	12	20	30			…		…	

4.2.24. ¿Cuándo el alto es n (cualquier número de unidades) cuanto es el área? Encuentra una expresión matemática que relacione esos números.

4.2.25. ¿Cuál es la razón entre el alto y el ancho de los primeros 5 números? ¿el cociente es el mismo?

[19] Considera que en esta actividad una unidad representara un cuadro.

4.2.26. Grafica los datos de la tabla anterior considerando el eje horizontal como el alto y el eje vertical como el área.



4.2.27. Ahora como en los casos anteriores para relacionar el 3 con el 15 en la tabla 4.2.23 ¿por cuál número debemos multiplicar el alto y por cual número se debe multiplicar el área?

4.2.28. ¿Se multiplica por el mismo número en el alto y área como en el caso de la tabla 4.2.12?

4.2.29. ¿Qué relación encuentras en los números por los que multiplicas el alto y ancho en la tabla 4.2.12 y el alto y área en la 4.2.23?

4.2.30. En la tabla 4.2.12 ¿cuál es la razón entre el ancho y alto en cualquier par de números?

4.2.31. Ahora, según la pregunta anterior ¿cuál es la razón entre el área y alto en cualquier par de números de la tabla 4.2.23?

Como podemos observar en la tabla 4.2.12 la razón entre el ancho y el alto para cualquier par de números fue la misma, mientras que en la tabla 4.2.23 no fue así. A la razón que se mantiene permanente le llamamos **constante de proporcionalidad** y la gráfica que representa la relación entre esos números se muestra con una recta que pasa por el origen (0,0).

Resumen de pizarra:

“¿Qué encontramos?	**Resumen**

Proceso de la clase para Proporciones y No proporcionales

Actividad del docente.	**Actividad del alumno.**	**Tipo de pensamiento que desarrolla.** **(At)** Atención **(Eva)** Evaluación
Después de leer la descripción y comentarla el docente sugiere que respondan las actividades 4.2.1 a 4.2.4. Amplia la imagen aumentando 1cm cada lado y encontrando las razones de los lados de ambos cuadrados. A continuación, los alumnos reproducen la actividad anterior dibujando un rectángulo El docente pregunta las razones entre el ancho y el alto de cada uno de los rectángulos. Continúa preguntando ¿por cuántos cuadritos deberíamos ampliar la figura para que la razón fuera la misma? El docente pide que escriban su procedimiento 4.2.8.	Los estudiantes reproducen la imagen midiéndola y ampliándola 1cm. Descubren que la razón entre los lados del primer cuadrado es de $^{4}/_{4} = 1$ y la del segundo es de $^{5}/_{5} = 1.$ Después dibujan un rectángulo de 4×2 igualmente dibujan otro y añaden +1 cuadrito creando un rectángulo de 5×3. Los estudiantes descubren que sus razones no comparten el mismo cociente como en el cuadrado: $^{2}/_{4} = .5$ $^{3}/_{5} = .6$ Buscan números que al multiplicar el tamaño de la figura obtengan el mismo cociente o razón, identifican que +1 no funciona para obtener ese mismo cociente. Descubren que al multiplicar $\times 2$ la base y la altura obtienen el mismo cociente o razón: $^{4}/_{8} = .5$ Los estudiantes describirán el proceso que utilizaron para encontrar el número que permite igualar los cocientes de la figura.	**(Eva)** Desarrollo del Pensamiento deductivo, inductivo y analógico.
El docente solicita continuar con las actividades 4.2.9 a 4.2.11. Ahora se preguntará a los alumnos las razones de los lados en cualquier par de rectángulos.	Los estudiantes observan los rectángulos y completan las razones: $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{4}{8}, \frac{8}{16}$ A continuación, los estudiantes observan la imagen con los espacios vacíos y anotan los números que consideran van dentro de los cuadros en concordancia con las actividades anteriores. Modifican las razones obteniendo los números faltantes. Descubren que si multiplicas el numerador y denominador por el mismo número	**(Eva)** Desarrollo del Pensamiento inductivo y deductivo al reconocer las razones, pero identificando nuevas condiciones que las modifican, encuentran una nueva propiedad.

El docente pregunta ¿Qué relación hay entre las operaciones que realizaste en el numerador y denominador? Escucha las diferentes respuestas de los estudiantes y las confronta.	obtendrás otra razón que será equivalente en su cociente. Por ejemplo $\frac{1}{2} \times \frac{14}{14} = \frac{14}{28}$ $^{1}/_{2} = .5$ entonces $^{14}/_{28} = .5$. Los estudiantes comentan la relación que hay entre las operaciones que hicieron en el numerador y denominador con el mismo número para ambas cantidades. Multiplicando numerador y denominador por el mismo número se obtienen una razón diferente con el mismo cociente.	**(AT)** Actitud matemática de claridad.
El profesor solicita completar los números en la tabla 4.2.12, así como las actividades hasta 4.2.15, el docente espera que los estudiantes descubran que el número por el cual se multiplica el alto también se aplica para el ancho. El profesor espera que mediante preguntas se descubra que el cociente de las razones dará siempre el mismo resultado .5.	Los estudiantes observan la tabla y completan los números faltantes descubriendo que cada uno aumentan el doble al anterior para el caso del ancho de los rectángulos: $2,4,8,16,32,64,128$. Los estudiantes descubren que multiplicar por 4 para los números que corresponden al alto de 8 a 32, también aplicar para los números que corresponden al ancho, es decir 16 a 64. Ahora descubren que debe multiplicar por 16 si el alto varía del 4 a 64. Continúan descubriendo que deben multiplicar por 16 el ancho para los números que corresponden del 4 al 64. Los estudiantes descubren un patrón en donde el aumento del alto se presenta como: +1, +2, +4… y en el ancho +2, +4, +8… obteniendo razones como: $^{1}/_{2}\, ^{2}/_{4}\, ^{4}/_{8}\, ^{8}/_{16}$ cada una dará como resultado .5	**(Eva)**Desarrollo del Pensamiento inductivo, deductivo y abstracto.
El profesor solicita completar los números en la siguiente tabla, así como las actividades 4.2.16 a 4.2.19.	Los estudiantes observan la tabla y completan los números faltantes descubriendo que cada uno aumentan de 2 en 2 para el ancho. Ancho: 2,4,6,8,10,12…32.	**(Eva)**Desarrollo del Pensamiento inductivo, deductivo y abstracto,

Pregunte a los estudiantes si sustituyéramos los números por una letra ¿Cómo representaríamos la operación que realizamos para encontrar el ancho? El profesor les pregunta: ¿Cuál es la razón entre el alto y el ancho de los primeros 4 números? ¿el cociente es el mismo? Una vez que los alumnos obtienen un conjunto de puntos que crecen obtienen los valores de números a intermedios.	Los alumnos comienzan a imaginar expresiones matemáticas como $n \times 2$ o $2n$ y como representar de manera general. Los estudiantes descubren un patrón en donde el aumento del alto se presenta como: +1, +1, +1, +1… y en el ancho +2, +2, +2, +2… obteniendo razones como: $1/_2\ 1/_2\ 1/_2\ 1/_2$ cada una dará como resultado .5 … es decir, el mismo cociente. Los alumnos grafican los datos de la tabla y obtienen una serie de puntos que al unirlos que crecen. Después calculan y grafican los datos para los números del alto que corresponden a 3.5, 4.7 y 5.5 aplicando su expresión matemática de $n \times 2$ para el ancho obteniendo: 7, 9.4 y 11.	pensamiento que generaliza.
Sugiere a los estudiantes continuar con las actividades. El profesor deberá de estar muy atento cuando los estudiantes exploren esta segunda búsqueda de una expresión matemática, escúchelos y confronte sus argumentos, guiándolos y acompañándolos a buscar una generalización. El docente pregunta: ¿Cuál es la razón entre el alto y el ancho de los primeros 5 números? ¿el cociente es el mismo? Después solicité la representación gráfica 4.2.22. y pida que comparen la gráfica con la 4.2.18.	Completan la tabla para el área: 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, … 240. Observan que el área es más que el doble del alto, exploran las opciones descubriendo una expresión matemática al observar que, si multiplican el número del alto por ese mismo número más uno, obtendrá el área: $n(n+1)$ o $n^2 + n$. Los estudiantes descubren un patrón en donde el aumento del alto se presenta como: +1, +1, +1, +1… y en el área +4, +6, +8, +10… obteniendo razones como: $1/_4\ 1/_6\ 1/_8\ 1/_{10}$ cada una dará como resultado cocientes diferentes. Continúan sus actividades graficando los datos de la tabla 4.2.23 observan que al graficar los datos los puntos se unen haciendo una curva, a diferencia de la tabla	**(Eva)**Desarrollo del Pensamiento inductivo, deductivo, analógico, abstracto (aclara condiciones) y que generaliza. **(AT)** Actitud matemática de claridad.

Continúa el docente preguntando como en los casos anteriores para relacionar el 3 con el 15 en la tabla 4.2.23 ¿por cuál número debemos multiplicamos el alto y por cual número se debe multiplicar el área? Continue preguntando ¿Qué relación encuentras en los números por los que multiplicas el alto y ancho en la tabla 4.2.12 y el alto y área en la 4.2.23? Ahora pregunte a los alumnos ¿cuál es la razón entre el ancho y alto en cualquier par de números en la tabla 4.2.12? ¿cuál es la razón entre el área y alto en cualquier par de números de la tabla 4.2.23?	anterior que dio como resultado una línea. Los estudiantes relacionan el 3 con el 15 de la tabla 4.2.23 descubriendo que multiplicar el 3 por 5 daba 15, pero del 12 para 240 se multiplica por 20 y por lo tanto no se aplica multiplicar el mismo número como en otras tablas trabajadas. Concluyen que NO se multiplico por el mismo número entre el alto y el área. En la tabla 4.2.12 se tendrá que multiplicar por el mismo número en el alto y ancho cuando se vaya de izquierda a derecha. Mientras que en la tabla 4.2.23 no se multiplica por el mismo número en el alto y el área; es mucho más la cantidad en el área. Los alumnos y alumnas descubrirán que en la tabla 4.2.12 en alto aumenta: +1, +2, +4, +8… mientras que en el ancho aumenta +2, +4, +8, +16… al buscar la razón obtenemos: $^1/_2$ $^2/_4$ $^4/_8$ $^8/_{16}$ los estudiantes descubrirán que el cociente de cada una de estas razones resulta .5. Cuando los estudiantes aplican la búsqueda de razones para la tabla 4.2.23 los números que aumentan el alto y el área de izquierda a derecha no comparten el mismo cociente para todas las razones: En el alto aumentan +1, +1, +1, +1 mientras que en el área es un aumento +4, +6, +8, +10 obteniendo razones:$^1/_4$ $^1/_6$ $^1/_8$ $^1/_{10}$ obteniendo .25, .16, .125, .1.	

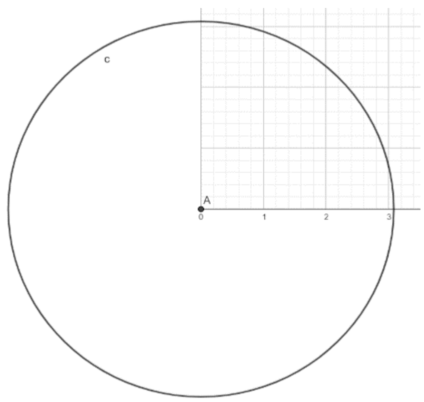
Resumen de pizarra:

“¿Qué encontramos?	Resumen
Encontramos que cuando tenemos razones y queremos modificarlas de manera proporcional debemos multiplicar por el mismo número tanto	Comprendimos cómo es que las razones proporcionales aumentan de igual manera en la cantidad de referencia y la cantidad comparada

en la cantidad de referencia como en la cantidad comparada. La representación gráfica al unir los puntos nos dará como resultado un conjunto de puntos alineados. Las cantidades que aumentan de una manera no proporcional tiene una representación gráfica diferente que no es una línea y al tratar de obtener el cociente mediante las razones, si este no es el mismo cociente para todos los datos, no se tiene una razón proporcional.	cuando multiplicamos ambos datos por el mismo número. Sus representaciones pueden ser con fracciones o decimales. Descubrimos que en algunos casos las razones de los aumentos en las tablas para el ancho, alto y área daban un cociente que era el mismo, mientras que en un caso no fue así.

Evaluación:

A) Como sabemos, el área del círculo se calcula $A = \pi * r^2$ entonces consideremos un círculo cuyo radio es 3 cm.



¿Cuál sería el área de este círculo?

Con base en el anterior ejemplo responde la siguiente tabla.

Radio (cm)	3	6	9	12	15	18
Área del circulo						

De acuerdo con los datos anteriores ¿el área del círculo aumenta de manera proporcional? Explica ¿Por qué?

Según la tabla anterior explica ¿por qué el área depende del radio?

B) Observa la siguiente tabla y escribe los números que faltan:

Columna A	Columna B
1	**2**
2	**4**
3	**6**
4	**8**
5	**10**
6	
7	
…	**…**
20	

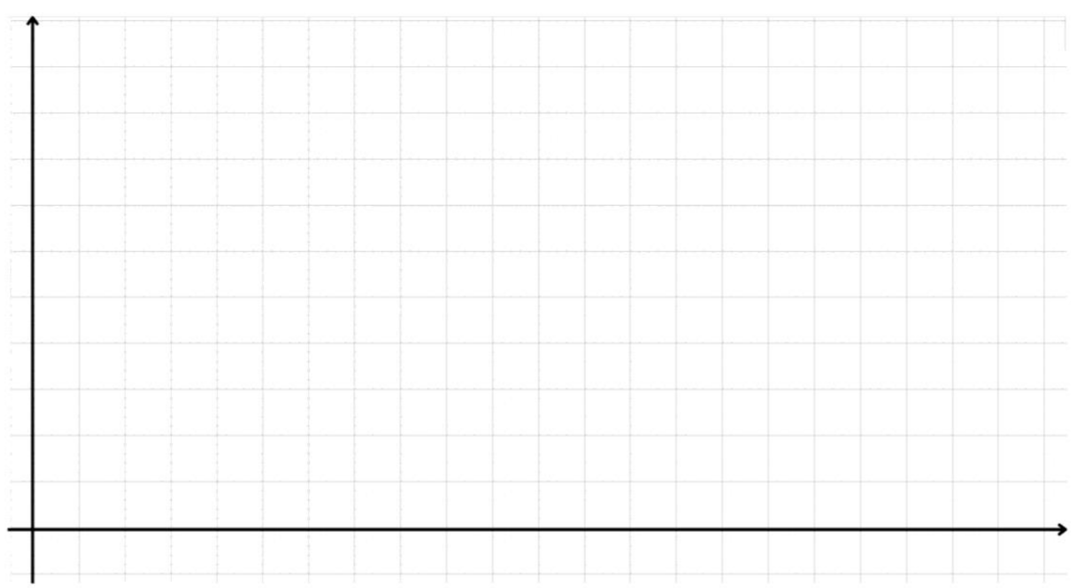
¿Puedes calcular que número corresponderá en la columna B para el número 50 de la columna A?

¿Qué operación realizaste para encontrar la relación entre los números que están en la columna A con los de la columna B?

Si usamos la letra n para representar cualquier número de la izquierda, escribe la expresión matemática que representa a los números de la columna B:

Ahora aplica la expresión matemática que obtuviste: si en la columna A tenemos el 50 ¿Qué número le corresponde en la columna B?

Representa en el plano estas relaciones entre la columna A (horizontal) y las B (vertical):



¿Cuáles son las razones en la columna A y B de los primeros 5 números? ¿el cociente es el mismo?

C) Observa la siguiente tabla y escribe los números que faltan:

Columna A	Columna B
1	**1**
2	**3**
3	**5**
4	**7**
5	**9**
6	
7	
…	**…**
18	

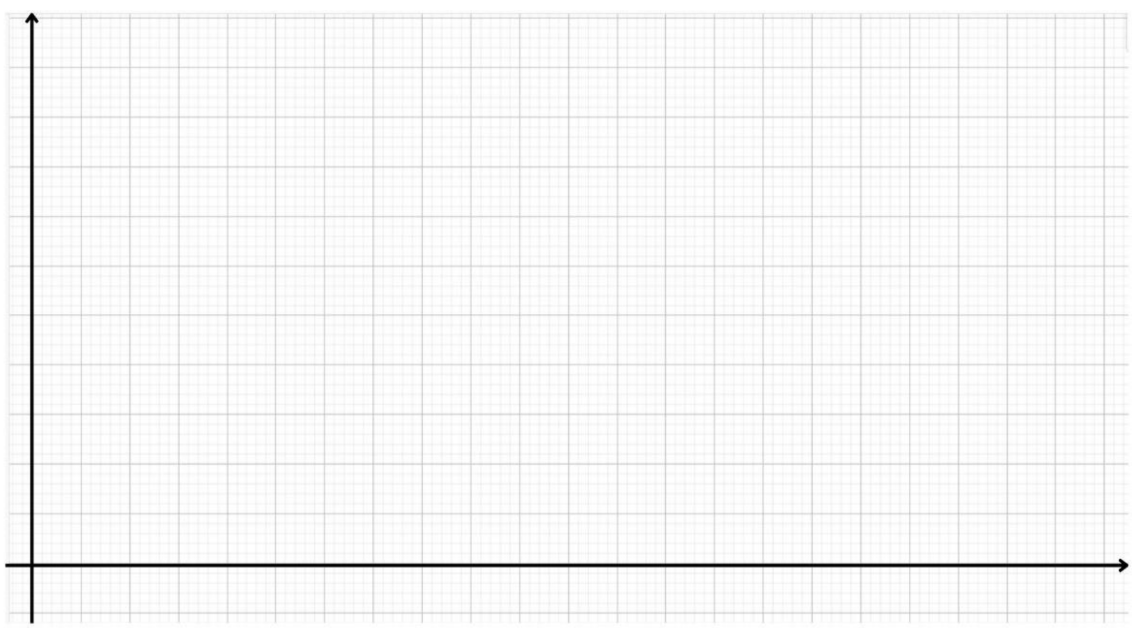
¿Puedes calcular que número corresponderá en la columna B para el número 18 de la columna A?

¿Qué operación realizaste para encontrar la relación entre los números que están en la columna A con los de la columna B?

Si usamos la letra n para representar cualquier número de izquierda, escribe la expresión matemática que representa a los números de la columna B:

Ahora aplica la expresión matemática si en la columna A tenemos el 50 ¿Qué número corresponderá en la columna B?

Representa en el plano estas relaciones entre la columna A (horizontal) y la B (vertical):



¿Cuáles son las razones en la columna A y B de los primeros 5 números? ¿el cociente es el mismo?

4.3. Funciones Lineales: Líneas que pasan por el origen.

Tipo de pensamiento matemático que se va a cultivar (TPMC): Desarrollo del Pensamiento deductivo, inductivo analógico, pensamiento que abstrae, pensamiento que representa, y razonabilidad

Grado: 1° Secundaria

La preparación: El profesor debe encargarse de imprimir **la guía de trabajo** para cada estudiante, considerar trabajar en duplas o de manera individual. También comente la importancia de realizar anotaciones de la clase en el cuaderno ya que más tarde regresaran a ellas y servirán como parte de la evaluación.

Visión general del proceso de la clase:

Las y los estudiantes descubrirán el comportamiento de una función que pasa por el origen representada en una gráfica, Así también, repasaran el concepto de constante de proporcionalidad, la idea de expresión matemática e identificaran algunos conceptos como variable Dependiente e independiente.

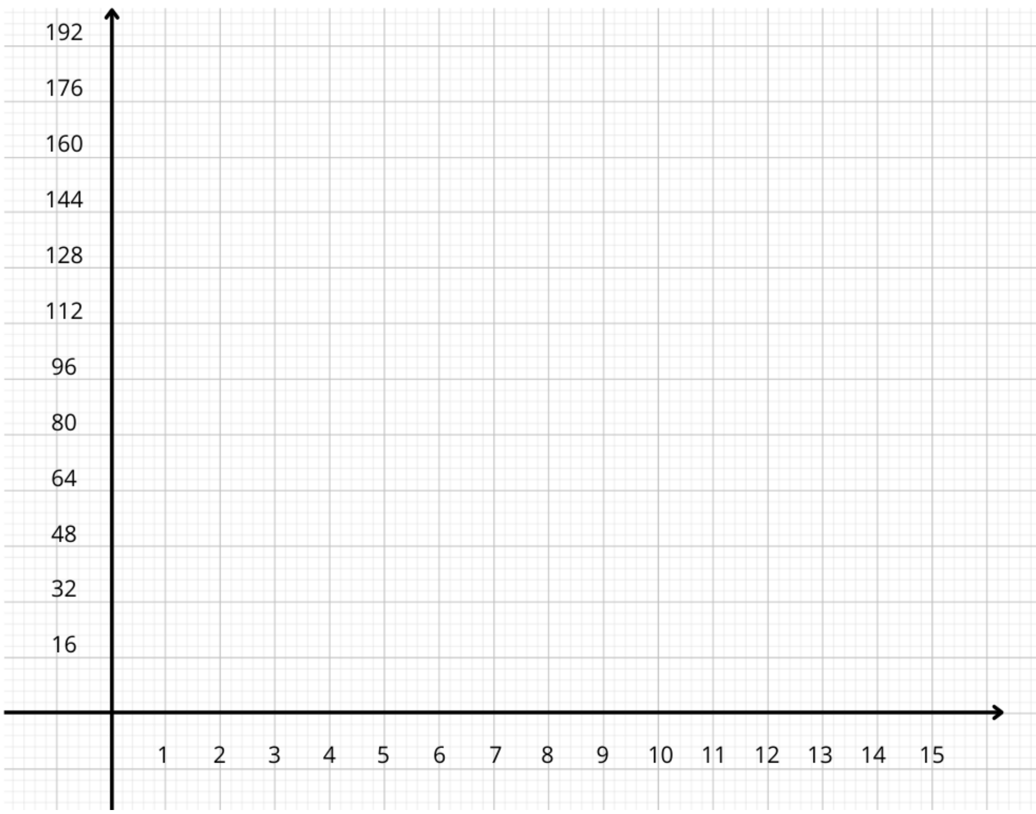
Guía de trabajo para funciones lineales: cantidades que varían juntas (Líneas que pasan por origen)

4.3.1. El día 8 de diciembre del 2015 en México el dólar costó \$16. Con base en esta información observa la siguiente tabla y contesta ¿cuántos pesos mexicanos corresponden a cada cantidad de dólares comprados?

Dólares comprados	0	1	2	4	6	8
Pesos Mexicanos	0	16				

4.3.2. ¿Si compré 15 dólares cuántos pesos mexicanos pagué?

4.3.3. Grafica las relaciones de la tabla. Considera al eje horizontal como los dólares y el eje vertical como los pesos.



Cómo puedes observar la cantidad de pesos que tienes depende del número de dólares, entonces si $\mathbf{x}$ representa el número de dólares y $\mathbf{y}$ representa la correspondiente cantidad en pesos, a la variable $\mathbf{x}$ se le denomina variable independiente (VI) y a la $\mathbf{y}$ variable dependiente (VD) porque depende del número de dólares.

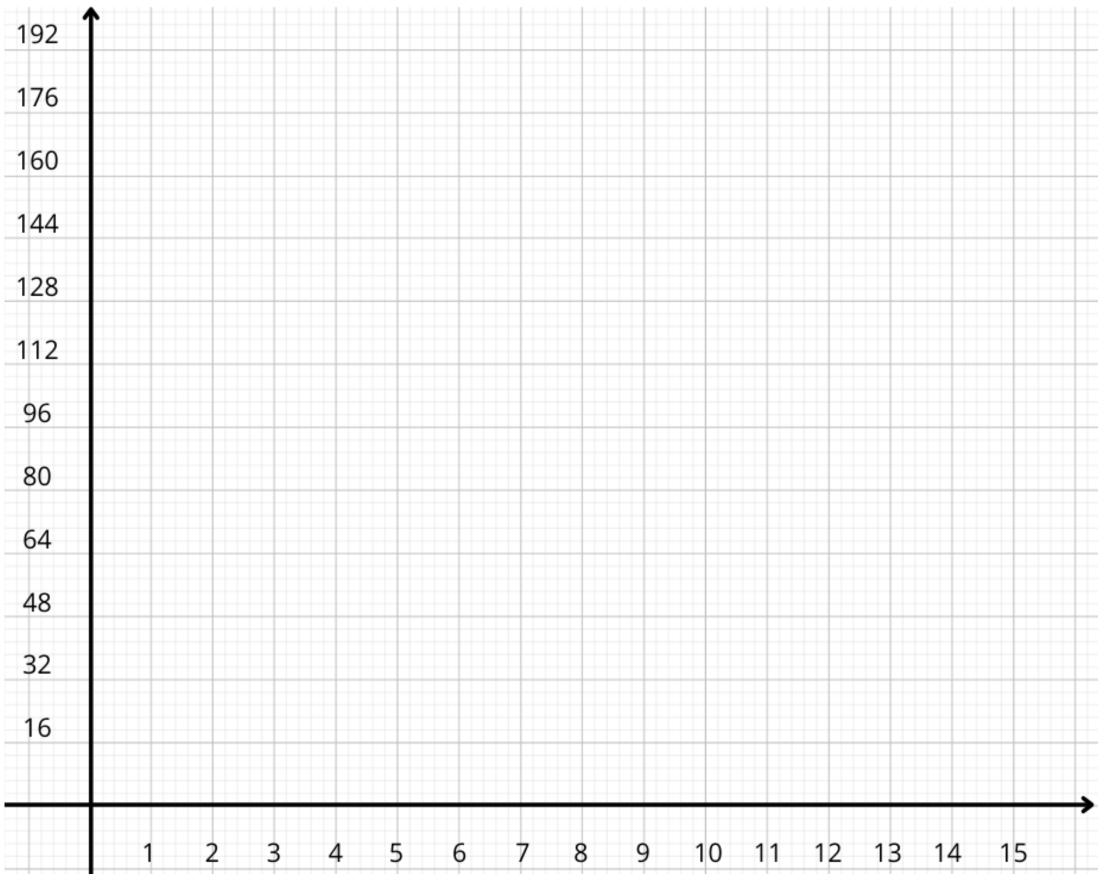
4.3.4. Ahora representa por medio de una expresión matemática (ecuación) esta relación.

4.3.5. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad entre las cantidades que varían en la tabla anterior?

4.3.6. Observa la siguiente tabla, considera la información del inciso 4.3.1 y completa la tabla:

Dólares comprados	0	2.50	5.70	7.80	9.30
Pesos Mexicanos					

4.3.7. Grafica los datos de la tabla anterior.



4.3.8. En la Ciudad de México un huevo vale $2.50 ¿Cuánto pagare por docena?

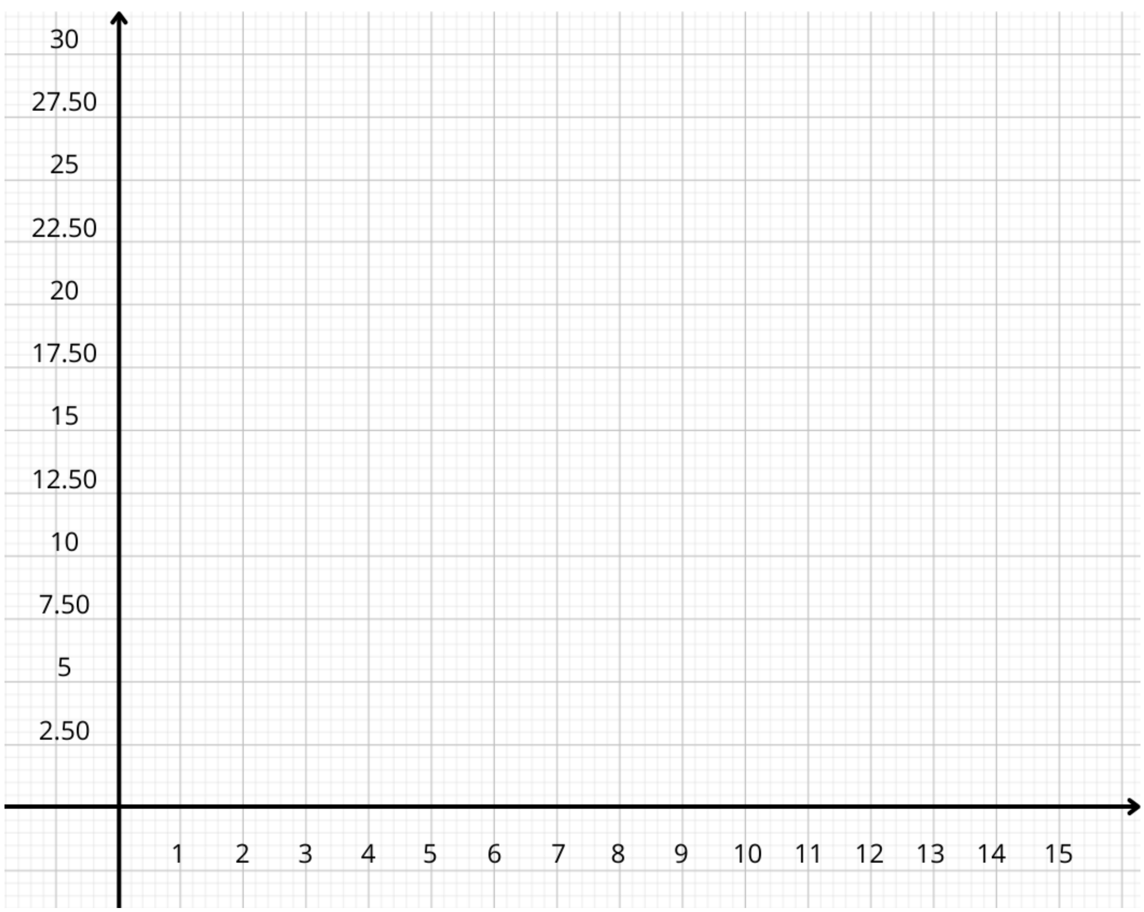
4.3.9. Con la información anterior responde la siguiente tabla:

Piezas de huevo	Costo
1	2.50
2	
3	
6	
⋮	
10	
⋮	
n	

4.3.10. Si n representa cualquier cantidad de huevos ¿cuál sería el costo para n huevos?

4.3.11. Representa matemáticamente la relación entre los huevos y el costo:

4.3.12. De acuerdo con la tabla que respondiste, grafica la relación entre el número de huevos (VI) y el costo (VD).



4.3.13. Si tengo cero huevos ¿Cuánto pagare?

4.3.14. Si pagaste 40 pesos ¿cuántos huevos compraste?

4.3.15. ¿Con que operación determinas el número de huevos que compraste en la pregunta anterior? Escribe la expresión matemática.

4.3.16. Determina una cantidad de dinero y encuentra cuantos huevos puedes comprar con dicha cantidad:

Cantidad de dinero	**Expresión matemática**	**Cantidad de huevos**

4.3.17. Si p representa cualquier cantidad de dinero pagada por los huevos ¿con que expresión matemática determinas el número de huevos que corresponden a dicha cantidad?

Resumen de pizarra:

"¿Qué encontramos?	**Resumen**

Proceso de la clase para funciones lineales que pasan por el origen.

Actividad del docente.	Actividad del alumno.	Tipo de pensamiento que desarrolla.
El docente sugiere completar las tablas sobre la compra de los dólares (4.3.1) así como completar las preguntas hasta el inciso 4.3.5. Pregunte a los alumnos ¿Cuál es la expresión matemática que representa esta relación? Continue preguntando ¿esta cantidad es proporcional y por qué? ¿Cuál es la constante de proporcionalidad entre las cantidades que varían en la tabla anterior? Sugiera continuar con la tabla 4.3.6 para las cantidades de 2.50 dólares, 5.70, etc.	Los alumnos y alumnas obtienen los costos de los pesos por la compra de los dólares: 0-0,1-16, 2-32, 4-64, 6-96, 8-128. Así también obtienen el costo de los 15 dólares a pesos: $15 \times 16 = 240$ Después grafican los resultados, el eje horizontal corresponderá a los dólares y el eje vertical a los pesos. Los alumnos representaran con una ecuación esta relación: $Dolares \times Pesos = Pesos\ totales$ $16 \times \#pesos = Ptotales$ Los alumnos y alumnas descubrirán que las diferencias del 0 a 1 y de 1 a 2 es 1 mientras que la diferencia en los pesos de 0 a 16 y de 16 a 32 serán 16, cuando los números aumenten al doble la diferencia será 2 entre 32 obteniendo razones como estas: ${}^{1}/_{16} = .0625$ ${}^{2}/_{32} = .0625$ Los estudiantes completan la tabla: 0, 40, 91.20, 124.80, 148.80. Y grafican las cantidades.	**(Eva)**Desarrollo del Pensamiento inductivo, deductivo, analógico.
Ahora solicite que lean la actividad 4.3.8 y pregunte ¿Cuánto costará la docena de huevos si cada huevo vale 2.50? Sugiera completar la columna derecha de la tabla en el inciso 4.3.9. Pregunte ¿Cuál será el costo para n cantidad huevos? Y ¿Cómo se representaría matemáticamente?	Los y las estudiantes observaran que la relación es una multiplicación del valor de cada huevo por la cantidad de huevos. $12 \times 2.50 = 30.$ Los y las estudiantes completan la tabla: $2.50, 5, 7.50 \ldots 15 \ldots 25 \ldots n$ Los y las estudiantes descubrirán que si n es aplicado a cualquier número de huevos, está tendría que ser multiplicada por 2.50; la representación matemática podría ser $n * 2.50 = pago\ total$	**(Eva)**Desarrollo del Pensamiento deductivo, analógico, pensamiento que abstrae y representa.

Ahora con los datos de la tabla solicite completar la actividad como se menciona en la actividad 4.3.12. Ahora pregunte a los estudiantes si tengo 0 huevos ¿Cuánto pagare? Comente que comenzar a trazar la línea a partir de 0 en matemáticas puede ser llamado también “origen”. Ahora sugiera a los estudiantes que respondan las preguntas 4.3.14 ¿Cuántos huevos se compraron si se pagó 40 pesos? y 4.3.15 ¿Qué operación determinara el número de huevos? Sugiera continuar con los incisos 4.3.16 y 4.3.17. acompañe a los alumnos y confronte sus respuestas. Ahora pregunte a los alumnos y alumnas: Si p representa cualquier cantidad de dinero pagada por los huevos ¿con que expresión matemática determinas el número de huevos que corresponden a dicha cantidad?	Los y las estudiantes observaran que al graficar los dos puntos obtienen una línea ascendente. Descubren que al igual que la cantidad de huevos el precio aumenta según su el número de huevos comprados. Los y las estudiantes comentaran que la cantidad será cero, evidenciando que a 0 cantidad 0 pesos y partiendo de ahí la cantidad sube de manera proporcional. Los y las estudiantes descubrirán que una división entre el precio total y el precio por unidad les dará la respuesta: $40 \div 2.50 = 16$ Los y las estudiantes elegirán una cantidad de dinero y a partir de esa cantidad buscarán saber cuántos huevos compraron. Observarán que podrán hacer la operación que comentaron en la pregunta anterior $\$ \div 2.50 = n\ de\ huevos$ Los y las estudiantes sustituirán la cantidad por la letra p tal como lo hicieron en actividades pasadas para otras cantidades con ello las alumnas y alumnos expresaran matemáticamente la relación entre el número de huevos a los que pertenece esa cantidad, obteniendo resultados similares a: $\boldsymbol{p \div 2.50 = n\ de\ huevos}$	**(Eva)** Razonabilidad y pensamiento analógico.

Resumen de pizarra:

“¿Qué encontramos?	Resumen
Recordamos que podemos representar con expresiones matemáticas relaciones entre cantidades, también recordamos que estas cantidades presentan una constante de	Comprendimos cómo la constante de proporcionalidad nos muestra el curso de la gráfica, conocemos que un valor que parte de cero irá

proporcionalidad y como son representadas por medio de graficas. También descubrimos la operación matemática y su expresión para el proceso inverso de una función es decir cómo utilizar las cantidades para encontrar no solo el producto sino también una de las variables.	variando desde el origen proporcionalmente, y el producto de la relación entre las cantidades o variables es un punto dentro del plano. Identificamos la operación inversa para descubrir una de las variables.

Evaluación:

Junte y vuelva a evaluar lo que escribieron los estudiantes dentro de esta lección, así también evalué lo que redactaron los alumnos en "**resumen**" añada a su valoración las notas dentro de su lista de cotejo.

4.4. Funciones representadas por rectas que **no** pasan por el origen y valores negativos.

Tipo de pensamiento matemático que se va a cultivar (TPMC): Desarrollo del Pensamiento deductivo, inductivo analógico, pensamiento que abstrae, pensamiento que representa, desarrollar una actitud que busque razonabilidad y claridad, así como el pensamiento funcional y pensamiento de desarrollo (Tipo I: integración de alto nivel y tipo II: integración comprensiva).

Grado: 1° Secundaria.

La preparación: El profesor debe encargarse de imprimir **la guía de trabajo** para cada estudiante, considerar trabajar en duplas o de manera individual. También comente la importancia de realizar anotaciones de la clase en el cuaderno ya que más tarde regresarán a ellas y servirán como parte de la evaluación.

Visión general del proceso de la clase: Identifican relaciones entre cantidades o funciones que no presentan constantes de proporcionalidad, reconocen que una función se representa como una relación entre cantidades y esta puede tener más de una operación, identificando que un valor estará en función de otro. Las y los estudiantes descubrirán el comportamiento de una función que no pasa por el origen representada en una gráfica.

Recomendación: debido a que este es el tema central de la planeación, para la integración de la NEM se deja a la consideración del maestro si al finalizar estas lecciones acude al libro de la colección Ximhai de Saberes y pensamiento científico de Primer grado (SEP, 2024) para invitar a los alumnos a identificar conceptos, así como realizar algunos ejercicios a modo de repaso.

Guía de trabajo para Funciones lineales que no pasan por el origen y valores negativos.

4.4.1. Un videojuego de celular cuesta $15 pesos, dentro de este existen Paquetes de Herramientas de Videojuego para Mejoras (ps) que cuestan $4 pesos por paquete. Con base en la información anterior completa la siguiente tabla utilizando los datos anteriores y calcula el costo total para los siguientes paquetes:

Número de paquetes **(#ps)**	**Costo Total** **(Juego + #ps)**
2	
4	31
6	
8	
10	
12	
…	…
20	

4.4.2. ¿Qué datos requerimos para determinar el costo total?

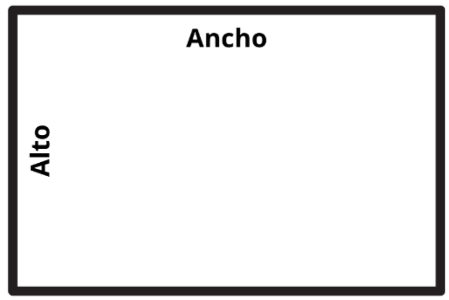
4.4.3. ¿Con que operaciones determinas el costo total dentro de la tabla?

4.4.4. Representa con una expresión matemática la relación entre el número de paquetes y el costo total. En donde x representa cualquier valor con el número de paquetes.

4.4.5. Grafica la tabla anterior y coloca las escalas correspondientes. Considera el eje horizontal como el número de paquetes y el eje vertical como el costo total:

La grafica anterior ¿pasa por el 0,0?

La siguiente imagen muestra un rectángulo con un ancho que es 2 veces el alto.



4.4.6. Completa la siguiente tabla para los valores de:

$Alto$ (cm)	1	3	5	7	9	12	15	18	…	
$Ancho$ (cm)			10	14	18				…	
$Área$ (cm^2)	2			98	162				…	

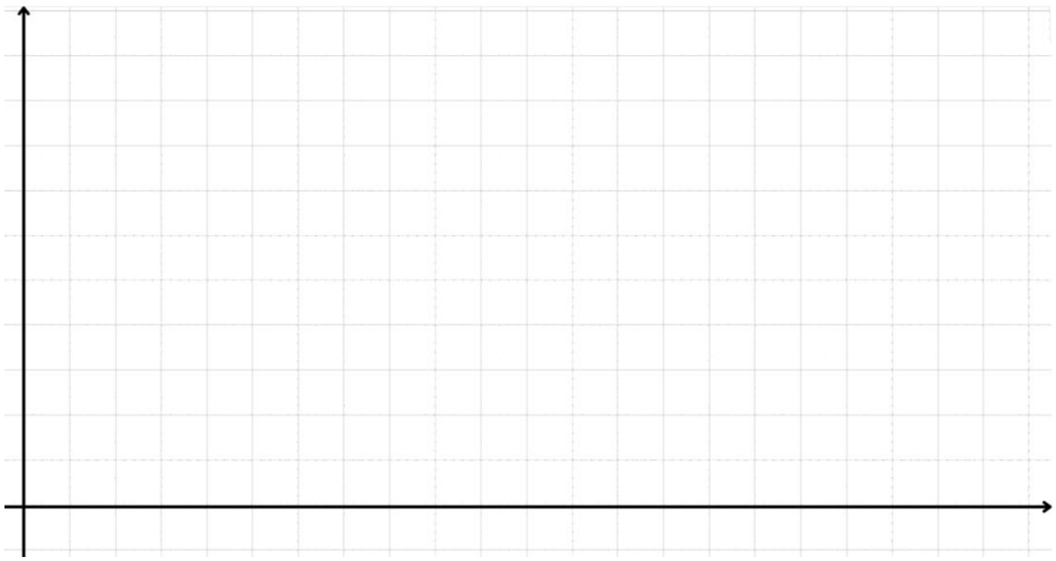
4.4.7. Si identificamos el alto con la variable $\boldsymbol{n}$ y el área del rectángulo con la variable $\boldsymbol{m}$ ¿Cuál es la expresión matemática que relaciona $\boldsymbol{n}$ con $\boldsymbol{m}$?

4.4.8. Ahora consideremos valores intermedios, completa la siguiente tabla:

$Alto$ (cm)	1.5	3.7	5.9	7.8	9.25	12.34	…	$\boldsymbol{x}$
$Ancho$ (cm)			11.8				…	
$Área$ (cm^2)						304.5512	…	

4.4.9. Si identificamos el alto con la variable $\boldsymbol{x}$ (cualquier valor) y el área del rectángulo con la variable $\boldsymbol{y}$ ¿Cuál es la expresión matemática que relaciona $\boldsymbol{x}$ con $\boldsymbol{y}$?

4.4.10. Traza la gráfica para los anteriores valores, considera el alto en el eje horizontal y el área en el eje vertical, escribe las escalas que correspondan:



4.4.11. Según las actividades anteriores observemos si los valores del alto y el área se comportan de manera proporcional. ¿Por qué número debemos multiplicar cuando el alto mide 5 para obtener 7?

Alto	1	3	5	7	9	12	15	18
$Área$	2			98	162			

4.4.12. Según las razones de los valores anteriores ¿Por qué número debemos multiplicar cuando el alto mide 5 para obtener 9? Y ¿son iguales los números por los que debemos multiplicar el alto y el área?

4.4.13. En este ejercicio ¿el área se comporta de manera proporcional con respecto al alto?

Supongamos que el día de mañana deberás ir a una obra de teatro cerca de tu delegación y decides tomar un taxi. El costo de tu viaje al teatro se calculará de la siguiente manera: la tarifa fija aplica al iniciar el viaje y por cada kilómetro se cobrarán 2 pesos.

4.4.14. Observa el taxímetro ¿Cuánto tendrías que pagar al finalizar tu viaje?

4.4.15. Ahora Calcula las tarifas para los siguientes kilómetros.

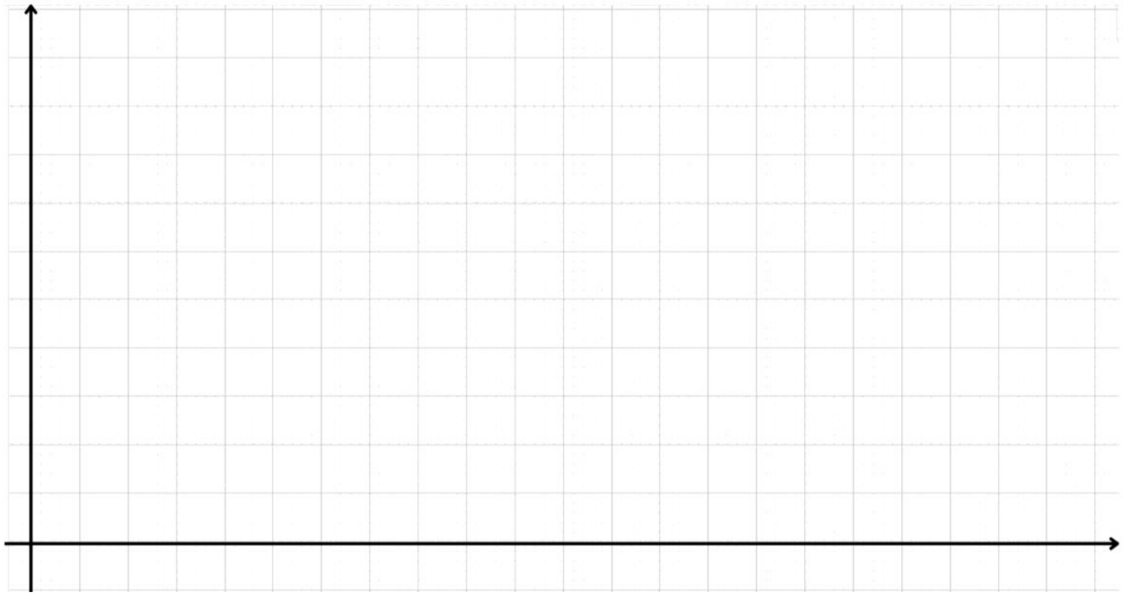
Km	3	6	9	12	15	18	…	x
Costo ($)							…	

4.4.16. Si x representa cualquier cantidad de kilómetros y y representa el costo del viaje ¿con que expresión matemática determinas la relación entre x y y?

Existen formas de representar una función, por ejemplo, la que tú escribiste anteriormente puede ser una. Sin embargo, dentro de las matemáticas hay formas de representar este proceso de relación, usualmente lo representan como:
$f(x) = y$. *Recuerda siempre que las funciones son relaciones entre cantidades.*

4.4.17. Grafica la tabla e incorpora los datos de la actividad anterior. Une los puntos y considera el eje[20] horizontal como los Kilómetros y el eje vertical como el costo. Escribe las escalas que correspondan:

[20] Al eje horizontal también se llama “eje de abscisas”, mientras que al eje vertical “eje de ordenadas”.



4.4.18. De acuerdo con los datos de la tabla y la gráfica anterior ¿Cuál sería la variable dependiente y de quien depende?

4.4.19. Observa la tabla anterior ¿Existe una constante de proporcionalidad?

4.4.20. Tomando en cuenta la relación del ejercicio anterior ¿Qué variables está en función de la otra?

4.4.21. Un grupo de amigos decidió ir a acampar al “Pico de Orizaba” en Veracruz. Al esperar la noche notaron que la temperatura bajaba 2°C cada hora hasta el amanecer. A las 12 am la temperatura era de 3°C. Con base en esta información completa la siguiente tabla.

X X

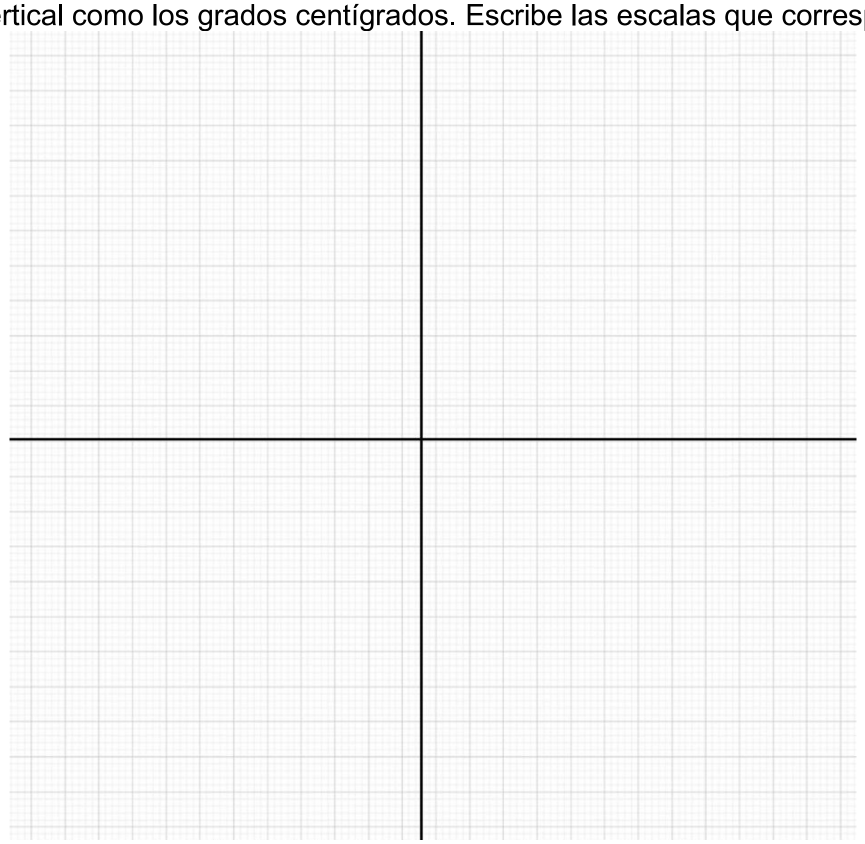
Tiempo en horas	1 am	2 am	3 am	4 am	5 am	6 am
Grados Centígrados						

X X

4.4.22. Observa la tabla anterior ¿Existe una constante de proporcionalidad?

4.4.23. Expresa matemáticamente la función; considera a la variable x como el tiempo y a la variable y como los grados centígrados: $f(x) =$ ______________

4.4.24. Grafica la función, uniendo los puntos. Considera al eje horizontal como las horas y el eje vertical como los grados centígrados. Escribe las escalas que correspondan:



Resumen de pizarra:

¿Qué encontramos?	Resumen

Proceso de la clase para funciones cuyas graficas son líneas rectas que no pasan por el origen y con valores negativos

<table>
<tr><th>Actividad del docente.</th><th>Actividad del alumno.</th><th>Tipo de pensamiento que desarrolla.</th></tr>
<tr><td>Después de repartir las guías de trabajo, leerán en grupo el ejercicio y completaran la tabla que relaciona los paquetes, el juego y el costo total.

Pregunte a las y los alumnos: ¿Qué datos requerimos para determinar el costo total?

Continue preguntando a las alumnas y alumnos: ¿Con que operaciones determinas el costo total dentro de la tabla? Pida a los estudiantes que representen con una expresión matemática la relación entre cantidades, y operaciones de las preguntas anteriores, permita que los alumnos grafiquen los datos anteriores.</td><td>Las y los estudiantes descubrirán que pueden obtener el costo total de los paquetes sumando los $15 que cuesta el juego con el resultado de la multiplicación del número de paquetes y el costo de cada paquete. Obteniendo los siguientes datos: $23, 31, 39, 47, 55, 63 \ldots 95$

Los y las estudiantes descubrirán que el costo total es el resultado de una suma: $\text{costo del juego} + (\text{núm. paquete} \times 4) = \text{costo total}$

Las y los estudiantes responden que las operaciones que pertenecen al costo total son una suma y multiplicación.

Los alumnos y las alumnas escribirán algunas expresiones matemáticas:
$15 + (x \times 4) = Costo\ Total$

Las estudiantes grafican los datos de la tabla anterior. Observan que debido a que hay un cobro fijo de 15 pesos, nunca se pasa por el origen.</td><td>(Eva)
Pensamiento inductivo, deductivo, idea de representación.</td></tr>
<tr><td>Solicite continuar resolviendo la actividad 4.4.6. completando la tabla.

Pregunte a las y los estudiantes: Si identificamos el alto con la variable $\boldsymbol{n}$ y el área del rectángulo con la variable $\boldsymbol{m}$ ¿Cuál es la expresión matemática que relaciona $\boldsymbol{n}$ con $\boldsymbol{m}$?</td><td>Los y las estudiantes responden la tabla colocando los datos:
<table>
<tr><td>Alto</td><td>1</td><td>3</td><td>5</td><td>7</td><td>9</td><td>12</td><td>15</td><td>18</td></tr>
<tr><td>Ancho</td><td>2</td><td>6</td><td>10</td><td>14</td><td>18</td><td>24</td><td>30</td><td>36</td></tr>
<tr><td>Área</td><td>2</td><td>18</td><td>50</td><td>98</td><td>162</td><td>288</td><td>450</td><td>698</td></tr>
</table>
Las y los estudiantes identificaran $\boldsymbol{n} = Alto$ y $\boldsymbol{m} = área$. Entonces representaran: $\boldsymbol{m} = 2\boldsymbol{n} * \boldsymbol{n}$.

Los y las estudiantes completan la tabla:</td><td>(Eva)
Pensamiento inductivo, deductivo, abstracto e idea de representación.</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Ahora pida a los alumnos y alumnas que considerar valores intermedios.

Ahora pregunte a los estudiantes: Si identificamos el alto con la variable x (cualquier valor) y el área del rectángulo con la variable y ¿Cuál es la expresión matemática que relaciona x con y?

Solicite que grafiquen la tabla anterior (4.4.8).

Pregunte a las y los estudiantes: Según las actividades anteriores observemos si los valores del alto y el área se comportan de manera proporcional. ¿Por qué número debemos multiplicar cuando el alto mide 5 para obtener 7?

Así como ¿el área se comporta de manera proporcional con respecto al alto?</td>
<td><table>
<tr><td>Alto (cm)</td><td>1.5</td><td>3.7</td><td>5.9</td><td>7.8</td><td>9.25</td><td>12.34</td></tr>
<tr><td>Ancho (cm)</td><td>3</td><td>7.4</td><td>11.8</td><td>15.6</td><td>18.5</td><td>24.68</td></tr>
<tr><td>Área (cm^2)</td><td>4.5</td><td>27.38</td><td>69.62</td><td>121.68</td><td>171.125</td><td>304.5512</td></tr>
</table>
Los estudiantes escribirán la expresión matemática sustituyendo las literales y relacionando los términos:
$\boldsymbol{x} = alto$
$\boldsymbol{y} = área$
$\boldsymbol{y} = x * 2x$

Los y las estudiantes representaran gráficamente la tabla anterior: obtienen una línea que no pasa por el origen.

Los estudiantes completan la tabla descubriendo que las razones para los números que van de 5 a 7 y de 50 a 98 son $^{1.4}/_{1.96}$. Cuando responden ¿Cuál será la razón para los datos que van del 5 a 9 y de 50 a 162? Obtendrán $^{1.8}/_{3.24}$.

Deduciendo que no hay una constante de proporción en este ejercicio ya que las razones obtenidas cambian.</td>
<td>(Eva) Pensamiento funcional y pensamiento de desarrollo (Tipo I integración de alto nivel y II integración comprensiva) pensamiento paralelo.

(Eva)Actitud de claridad y ¿Qué tan razonable es?</td>
</tr>
<tr>
<td>Continúen las actividades y solicite resuelvan el siguiente ejercicio sobre el cálculo del costo al viajar en un taxi, relacionando el banderazo y los km.

Solicite completen la tabla que continua para los diferentes kilómetros.

Pregunte a los y las estudiantes: Si x representa cualquier cantidad de kilómetros y y representa el costo del</td>
<td>Los alumnos y alumnas obtendrán el resultado del taxímetro, sumando el costo fijo y multiplicando los kilómetros por el precio por kilómetro obteniendo:
$8 + (2)(28) = 8 + 56 = 64$
Los y las alumnas completan la tabla obteniendo los siguientes costos: $14, 20, 26, 32, 40, 48$

Los y las alumnas comentaran que la variable dependiente es el costo total del taxímetro y este depende de la suma de los kilómetros por dos más la tarifa fija.</td>
<td>(Eva) Pensamiento inductivo, deductivo, abstracto, Idea de representación. Así también pensamiento analógico y de extensión.</td>
</tr>
</table>

viaje ¿con que expresión matemática determinas la relación entre $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$? Solicite que grafiquen los datos anteriores y continue preguntando: De acuerdo con los datos de la tabla y la gráfica anterior ¿Cuál sería la Variable Dependiente y de quien depende? Observa la tabla anterior ¿Existe una constante de proporcionalidad?	Los y las estudiantes descubren formas de expresar matemáticamente el costo del taxímetro: $\boldsymbol{y} = 8 + 2x$ Los alumnos y alumnas comentaran entre ellos dialogando sobre cual variable está en función de otra identificando que el costo total o final está en función de los kilómetros más la tarifa fija. Los alumnos y alumnas podrán aplicar los mismos tratamientos que en actividades pasadas para descubrir que no hay una constante de proporcionalidad.	**(Eva)** ¿Qué tan razonable es?, actitud de claridad, pensamiento abstracto y pensamiento paralelo.
Solicite a los alumnos y alumnas que completen la tabla que relaciona el tiempo transcurrido y los grados centígrados. Observen la tabla anterior ¿Existe una constante de proporcionalidad? Continue preguntando: ¿Cómo expresarían matemáticamente la función para esta situación? A continuación, solicite que grafiquen la función obtenida.	Los y las estudiantes obtienen los siguientes resultados: $1, -1, -3, -5, -7, -9$ así también identifican que las razones para los números que van del 2 al 4 y del -1 al -5 es de $^{2}/_{-3}$ mientras que la razón para los números que van del 3 al 6 y del -3 al -9 es $^{3}/_{3}$. Los y las estudiantes contestaran que no existe una constante de proporcionalidad en este ejercicio. Los alumnos y alumnas escriben posibles expresiones matemáticas como: $f(x) = -2x + 3$ Los estudiantes representaran gráficamente los datos de la tabla obteniendo una función que no es proporcional, descubrirán la inclinación de la recta es diferente.	**(Eva)** Pensamiento analógico y de extensión e idea de representación.

Resumen de pizarra:

“¿Qué encontramos?	Resumen
Encontramos que existen funciones que no son proporcionales, así también descubrimos que las funciones al ser graficadas pueden pasar por números diferentes al cero; hallamos expresiones matemáticas para las funciones como por ejemplo $f(x) = 8 + 2x$. Observamos y descubrimos que las funciones cuya grafica es una línea pueden tomar valores positivos o negativos y en particular las que pasan por el origen se les llama funciones lineales.	Una función puede no ser proporcional, así como representarse con una línea que no pasa por el origen. Y las que pasan por el origen se consideran funciones lineales.

Evaluación:

Junté y evalué lo que redactaron los alumnos en “**resumen**”. Solicite a los estudiantes crear dos actividades similares a las trabajadas en clase, donde apliquen lo aprendido sobre funciones proporcionales y no proporcionales, identifique las ideas, conceptos y procedimientos dentro de estas.

5. CAPÍTULO 5: CONSIDERACIONES Y RECOMENDACIONES GENERALES PARA EL DOCENTE.

A continuación, se presentan algunos listados de las consideraciones, reflexiones y recomendaciones obtenidas al final de la elaboración de esta propuesta pedagógica, después de su aplicación piloto a 5 alumnos y alumnas, también se consideran las experiencias vividas tras la aplicación de esta metodología en el servicio social con 15 adolescentes. Todo esto busca sugerir al docente una suerte de cambio en su práctica y la concepción de enseñanza-aprendizaje, lo que nos podría remitir a los primeros capítulos de este trabajo en busca de una reconsideración paradigmática:

- Reconocimos la importancia del cambio dentro de nuestro sistema educativo mediante reflexiones sobre las diferentes dimensiones de la educación a través de tres sexenios.
- Identificamos al paradigma de la complejidad social, sus principales conceptos, historia y una visualización a futuro por parte del profesor sobre los alcances de este paradigma dentro de su práctica.
- Dentro de este trabajo encontramos que la propuesta considera diversos factores (problemas sociales, el sujeto, contexto, etc.) que intervienen de manera compleja en el desarrollo del pensamiento matemático en alumnos y alumnas adolescentes, que según Piaget se encuentran desarrollando su pensamiento lógico-matemático. Con esto la propuesta pretende poner énfasis en el reconocimiento de la belleza del razonamiento, con el fin de que los estudiantes puedan considerar estos aspectos en la formación de su carácter humano, identificando este aspecto juntos con los procesos de razonamiento matemático en el estudiante.

- Realizamos un repaso sobre los aspectos importantes de los constructivismos (Piagetano, Vygotskyano y cognitivo).
- Comenzamos con el reconocimiento de conceptos sobre la metodología Lesson Study.
- Identificamos algunos puntos de contacto dentro de la Lesson Study y los constructivismos. Aquí se comienza a tejer el pensamiento complejo, ya que, el docente debe comenzar a integrar de una manera natural las ideas.
- Reconocimos la importancia de enseñar en esta etapa (adolescencia) bajo esta metodología, y su implementación en otros grados básicos como preescolar y primaria.

Algunas consideraciones sobre las pruebas piloto de esta propuesta pedagógica a una muestra de 5 alumnos y alumnas:

- Esta propuesta no se aplicó de manera conjunta a los 5 alumnos y alumnas, se acordaron pequeñas reuniones de manera individual, en duplas y pequeños grupos de tres estudiantes.
- Muchos de los y las alumnas ya contaban con conocimientos previos sobre ecuaciones de primer grado, conocimiento sobre el uso de literales en matemáticas, así como conocimientos básicos sobre el plano cartesiano.
- Se observó que algunas alumnas y alumnos tuvieron dificultades para comprender ciertos conceptos o palabras dentro de preguntas como: ¿Cuál es el criterio para determinar quién es la mejor goleadora? Aquí la palabra criterio fue confusa y no sabían su definición ni significado, por lo que se añadió la pregunta de: ¿Qué operación matemática relaciona las dos cantidades (goles y partidos) para determinar quién es la mejor goleadora? Seguida de la pregunta para determinar el criterio de la mejor goleadora, con esto se atendió a la causa

de esclarecer al estudiante, preguntando sobre más información, guiándolo a inferir de manera más clara lo que la siguiente pregunta busca, claro que, si el estudiante pregunta puntualmente el significado, este se dirá.

De igual forma el concepto de “expresión matemática” fue algo que resultó desconocido ya que ellos identifican este concepto relacionándolo con la palabra ecuación.

- Durante la aplicación de estas actividades se observaron claramente problemas de comprensión lectora y en varias ocasiones se invitó a los alumnos y alumnas a tratar de leer más de una vez las actividades y preguntas, así como dejar de buscar indicaciones dentro de estas, para buscar reflexionar sobre ¿qué es lo que se pregunta? O ¿Qué datos tenemos y qué nos indican sus relaciones matemáticas?

Ahora mencionaré algunos aspectos importantes, cuando se pretenda trabajar algún tema de matemáticas bajo este método de planeación:

- La documentación: es fundamental por lo que el docente deberá realizar una revisión amplia sobre la metodología Lesson Study y sus categorías, así también el contenido de la materia o lo relacionado al currículo.
- Claridad en los objetivos: es sumamente importante tener claro cuáles son los conceptos matemáticos, ideas o procedimientos que realizaran las y los alumnos para identificar si es importante hacer alguna lección previa, por ejemplo; esta propuesta pedagógica busca desarrollar el pensamiento matemático bajo el tema de funciones lineales, por lo tanto existen conceptos e ideas matemáticas que son fundamentales conocer como las relaciones, razones, proporciones, plano cartesiano, variables dependientes, expresiones matemáticas (ecuaciones) y la idea de función. Así también, este punto le ayudará al docente

para no perder el sendero al momento de confrontar a los alumnos y alumnas en sus respuestas, orientándolos con otras preguntas que los guíen a los objetivos esperados.

- Redefinición del concepto de enseñanza: es sumamente importante que el profesor abandone la idea de que sus compañeros no deben tener una participación dentro de su clase, “aprender juntos” debe ser la consigna que motive al docente para salir de su zona de confort e invite a pedir apoyo, tanto de directivos como compañeros de materia, para elaborar una planeación más completa, tanto en las respuestas que podrían tener los alumnos y alumnas, como en las actividades que podría proponer. Durante la elaboración de esta propuesta cada pregunta y actividad elaborada fue supervisada por el asesor así puesta a consideración en la opinión de otros docentes.
- Secuencias de tareas y elaboración de ejercicios o actividades: el docente debe considerar elaborar un mapa conceptual o una lista de contenidos en orden (desde lo más concreto a lo más abstracto) o cualquier otra herramienta didáctica, con el fin de comenzar una lluvia de ideas para las actividades que propondrá. Es importante recordar que los ejercicios o actividades deben estar situadas y deben ser realizados o simulados por el profesore que las elabora, (así como las opiniones de sus compañeros) por ejemplo: en esta propuesta pedagógica se recurrió a temas como el deporte, el transporte público, un grupo de personas, la compra y venta de dólares, áreas, etc., ya que está dirigido a alumnos y alumnas que cursen los primeros años de secundarias técnicas, diurna, públicas y privadas en una ciudad.
- Elaboración de preguntas y planeación: tras conocer la secuencia de tareas o actividades la elaboración de preguntas es una de las partes más importantes de esta metodología, plantear una pregunta puede generar una actitud favorable

y curiosa o grandes confusiones. Por ejemplo, cuando comenzamos esta secuencia, en la parte de razones, los estudiantes no comprendían que trataban de decir algunas preguntas como, “¿Cuál debe ser el criterio para determinar quién es la mejor goleadora?” o “¿Cuál es la expresión matemática para esta relación?”, estas cuestiones fueron difíciles de entender para los estudiantes. Observando su aplicación piloto en 5 alumnos y alumnas de entre 13 y 15 años, se descubrió una falta de comprensión lectora. Dado lo anterior, el profesor deberá elaborar preguntas que no generen respuestas ambiguas ya que la confusión y los requisitos dentro de la actividad podrían complicar el proceso de reflexión.

Reconociendo y reafirmando la importancia de compartir nuestras actividades con los compañeros profesores, se verá beneficiada en gran medida nuestra planeación, esto siempre que las críticas constructivas busquen alimentar la claridad que buscamos en las clases, fomentando en los estudiantes un insight. El profesor puede considerar también (como se realizó en varias partes de esta planeación) la adaptación de actividades realizadas bajo esta metodología por otros autores (como Isoda, Katagiri, Tenoch, Olmos, entre otros) será de gran ayuda al momento de elaborar actividades, ya que orienta nuestros esfuerzos para lograr una mayor claridad y tino en las preguntas.

Es probable que siempre puedan mejorar nuestras interrogantes para los alumnos y alumnas, es por ello por lo que estudiar nuestras actividades y preguntas ayudará a mejorar y pulir nuestras clases y actividades con apoyo de otros compañeros.

Ahora bien, es importante tener en cuenta antes de elaborar preguntas: ¿Qué es lo que se busca con esa pregunta?, ¿hacia dónde se encamina la respuesta? Y ¿Cuál es el objetivo en esa lección? Es por ello por lo que la secuencia de tareas es fundamental para presenta actividades articuladas. Es importante estar atentos a las soluciones y problemas que plantean los alumnos y alumnas al abordar las tareas, las actividades que se proponen deben estar diseñadas a partir de los conocimientos previos, generados por las actividades anteriores, la idea es que los conocimientos generados por las actividades previas puedan dar respuestas a las nuevas actividades.

- Simulación de la clase: es muy importante realizar más de una simulación en donde se traten de resolver las actividades como lo harían los estudiantes, considerando sus posibles respuestas, así como confusiones.

  Prever qué puede pensar un alumno o alumna no es fácil, ya que las interpretaciones son distintas y variadas, además, aquí cabe mencionar un aspecto importante al tratar de dar sentido al pensamiento matemático de los estudiantes.

  La consideración del pensamiento matemático del profesor, ya que como menciona una investigación realizada por Chris Kooloos llamada “Making sense of student mathematical thinking: the role of teacher mathematical thinking” (Kooloos, 2022) planteo algunos aspectos importantes al momento de considerar el pensamiento del profesor cuando se trata de simular o explicar las actividades que harán los alumnos, por ejemplo, ese trabajo considera la flexibilidad, la preocupación, la incomprensión, la ejemplificación y la proyección como consideraciones importantes que revelan el sentido o la orientación a la cual se encamina nuestro pensamiento matemático al momento de estar en clase con los alumnos.

  Sin embargo, aunque no podamos realizar un análisis minucioso de nuestra simulación, el apoyo con otros compañeros de la materia, ayudara en esta parte del proceso de planeación y el estudio de nuestras clases. Por lo cual, es muy recomendable que al realizar la simulación de nuestras actividades consideremos esos aspectos, así como nuestro capital cultural, el de nuestros estudiantes y el apoyo constante de otros profesores.

Sobre este último punto y sus elementos. Al aplicar este trabajo con 5 alumnas y alumnos de entre 13 a 15 años los resultados obtenidos fueron similares a la narrativa sobre mi experiencia en el servicio social tras seis meses de implementación (pero con el tema de las torres de Hanói) con la diferencia en que estos adolescentes presentaron más problemas en la comprensión lectora sobre algunas preguntas, orillándonos a reestructurar cuestiones claves para facilitar su interpretación y obtener la respuesta deseada. Sin embargo, esta muestra no es significativa y se reconoce que cada grupo, así como cada alumno y alumna tendrá una manera particular de interpretar y/o entender los ejercicios y preguntas.

Ahora bien, cabe señalar que este trabajo va dirigido a los profesores de tercer grado de secundaria, por lo cual, esta sección invita a que el docente concientice que la metodología puesta en práctica puede presentar tras pies y vicisitudes, al trabajar con adolescentes ya sea por su actitud, el desconocimiento de esta práctica docente, el grado de conocimientos con el que hayan llegado a ese nivel, así como otros factores internos o externos. Se recomienda no caer en la desesperación o el confort de repetir viejas estrategias e intentar seguir esta planeación adaptándola a nuestra población. Además, se invita a poner en práctica la observación de clases, sin buscar la comodidad de un comentario y aceptando el diálogo crítico, que aliente al docente a reparar sobre las deficiencias de nuestras planeaciones para siembre buscar un mejoramiento.

A esos profesores cuyas críticas caen como valde de agua fría, se les exhorta a replantearse su quehacer como docentes, sabemos que existen diferentes maneras de aprender y por lo tanto diferentes formas de enseñar un mismo tema. Si bien algunos docentes podría opinar que en realidad (dentro de esta metodología japonesa) los estudiantes no construyen por sí mismos su pensamiento matemático, únicamente son guiados, mi posición va dirigida a reinventar su concepto de enseñanza, donde es dentro de una libertad delimitada que el estudiante podrá navegar en sus pensamientos, si bien no hablamos de preguntas abiertas como para no poder aterrizar el tema y responder lo que sea, sí buscamos la estrecha compañía del docente, porque el conocimiento no solo está ahí, esperando ser descubierto y desarrollado, sino que los alumnos deben imaginar un camino.

Es interesante escuchar las respuestas de cada joven, así como la manera de comunicarse; consideremos también la forma en que creemos que ellos entienden, como un factor importante. Sin embargo, recordemos que los alumnos y alumnas se acercan a estos temas cada vez más abstractos por primera vez, por lo que tener un primer buen encuentro dejará un buen sabor de boca. Reconstruyamos nuestra idea de planear, consultemos y consideremos a otros compañeros en este acto.

Pensar complejamente dentro de la educación implica una capacidad de crítica constructiva y una suerte de integración conceptual que cada profesor dará en diferente medida, puede que algunos se inclinen más hacia las críticas que incompatibilizan teorías y métodos, mientras que otras mentes darán cabida a una transdisciplinariedad e integración del conocimiento, en cualquier caso el profesor debe considerar que: entre más clara sea su comprensión sobre el tema, en esa medida con seguridad podrá adaptarse para invitar a sus estudiantes a aprender por sí y para sí mismos.

Por último: reconsiderar el paradigma de enseñanza-aprendizaje implica un cuestionamiento profundo y la apertura para recibir nuevos conocimientos y métodos sin permitir que nuestro escepticismo y comodidad tome ventaja; profesores y profesoras la comunidad cambia en conjunto, hablamos de deseducarnos y reeducarnos aprendiendo juntos.

REFERENCIAS

Acevedo, D. M. (2023). Integración de Competencias Humanistas en la Educación Mexicana. *Ciencia Huasteca Boletín Científico de la Escuela Superior de Huejutla*, 15-21.

Aguilar, M. D. (12 de Junio de 2012). Enlace: fracaso educativo de Calderón . *La Jornada* , pp. 1-3.

Aparici, R. (2010). *Educación y cultura digital.* Barcelona: Gedisa.

Ausubel, D. P. (1978). *Psicologia Educativa: Un punto de vista cognoscitivo.* Trillas.

Avilés, K. (06 de Septiembre de 2012). Felipe Calderón ha ocasionado la ruina educativa: maestros disidentes. *La Jornada* , pp. 1-2.

Baldor, J. (1983). *Algebra.* Compañía Cultural Editora y Distribuidora de Textos Americanos.

Bautista, V. J. (2012). Una reflexión en torno a la Alianza por la Calidad de la Educación . *REMO*, 19-30.

Bizberg, I. (2020). El fracaso de la continuidad. La economía política del sexenio de Enrique Peña Nieto. *Foro Internacional , Vol. LX, 2*, 629. https://doi.org/ https://doi.org/10.24201/fi.v60i2.2735

Cambridge Dictionary. (15 de Enero de 2024). *Cambridge Dictionary*. dictionary.cambridge.org/es/diccionario/ingles-espanol: https://dictionary.cambridge.org/es/diccionario/ingles-espanol/constructivism

Cardenas R. Maria Luisa, R. R. (2004). La teoria de la complejidad y su influencia en la escuela. *Revista de Teoría y Didáctica de las Ciencias Sociales, N°9*(ISSN 1316-9505), 131-141.

Cedillo, M. I. (2012). *Matemáticas para la Educación Normal.* PEARSON. https://doi.org/www.criced.tsukuba.ac.jp/renkei/msa/

Centro de Estudios Sociales y de Opinión Pública . (2019). El Sistema Educativo Nacional y las recientes reformas educativas. *Documento de trabajo núm. 30*, 9-17.

Chaves, J. M. (2010). Consideraciones básicas del pensamiento complejo de Edgar Morin, en la educación. *Educare* , 67-75.

Dehaene, S. (2016). *El cerebro matemático.* Siglo XXI.

Dekornfeld, O. (Dirección). (2019). *En pocas palabras: el cerebro adolescente.* [Película].

Delval, J. (2000). *El desarrollo Humano.* Ciudad de México: Siglo XXI.

Díaz, G. H. (2010). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo (una interpretación constructivista).* McGrawHill.

Direccion General de Desarrollo Curricular. (2022). *Marco Curricular y Plan de Estudios 2022 de la Educacion Básica Mexicana.* México : DOC. TRABAJO: Sin Edit.

Flores, C. Q. (2020). Entre paradigmas aristotélicos y galileanos, ¿Qué publican los(as) Trabajadores(as) Sociales chilenos(as)? *ESPAÇO TEMA LIVRE*, 528-538.

GAN Teck Hock, I. M. (2021). *Mathematics Challenges for Classroom Practices at the Lower Secondary Level.* SEAMEO-RECSAM- University of Tsukuba. https://doi.org/978-967-930-055-0

Gobierno de México . (20 de 08 de 2015). *Secretaría de Salud* . ¿Qué es la adolescencia?: https://www.gob.mx/salud/articulos/que-es-la-adolescencia#:~:text=%C2%BFQu%C3%A9%20es%20la%20adolescencia%3F,-Centro%20Nacional%20para&text=La%20Organizaci%C3%B3n%20Mundial%20de%20la,de%2015%20a%2019%20a%C3%B1os.

Gobierno de México . (20 de 11 de 2021). *Gobierno de México* . Consejo Nacional de Población: Día Mundial de la Niñez: https://www.gob.mx/conapo/articulos/dia-mundial-de-la-ninez?idiom=es#:~:text=En%20el%20grupo%20de%200,a%2017%20a%C3%B1os%20(33.8%25).

Gonzalez, R. R. (2023). *El lenguaje de las matemáticas. Historias de sus simbolos.* . FCE,SEP,CONACYT.

Hernández, A. G. (27 de Junio de 2011). *La Jornada* . El analbafetismo tecnológico de las autoridades acabó con Enciclomedia: https://www.jornada.com.mx/2011/06/27/politica/002n1pol

Hernández, G. (2018). *Psicología de la educación: una mirada conceptual.* El Manual Moderno.

Hernández, G. (2019). *Miradas constructivistas en psicologia de la educación.* México: Paidós Educador.

Hernández, G. (2020). Paradigmas en psicología de la Educación. México: Paidós Educador.

Hernández, I. V. (29 de Septiembre de 2012). *Expansion* . La educación en México da un paso atrás: https://expansion.mx/mi-carrera/2012/09/29/la-educacion-en-mexico-da-un-paso-atras

Hernández, M. L. (08 de 2011). Adolecencia: ¿adolecer es padecer? Bárbula, Venezuela.

IIPE UNESCO America Latina y el Caribe. (18 de Septiembre de 2018). *Políticas de formación inicial: temas en debate en la región*. IIPE UNESCO America Latina y el Caribe: https://www.youtube.com/watch?v=K3jm1kNJPAc

INEGI. (2022). ESTADÍSTICAS A PROPÓSITO DEL DÍA INTERNACIONAL DE LA JUVENTUD. *COMUNICADO DE PRENSA NÚM. 436/22* (p. 5). México : INEGI.

Instituto Méxicano para la Competitividad A.C. . (2019). *Cuenta Pública Sexenio 2013-2018. Boletín de prensa* . Ciudad de México : IMCO.

Islas, R. A. (2008). Educación en México: ¿oportunidad o desafío nacional de siempre? . *Pluralidad y consenso* , 1-10.

Isoda Masami, R. O. (2020). Más de una década de Estudio de Clases en Chile: hallazgos y avances. *Revista Paradigma, XLI*(www.researchgate.net/publication/342401496_Mas_de_una_decada_de_Estudio_de_Clases_en_Chile_hallazgos_y_avances?enrichId=rgreq-f52355955fddb84a264d2bfb4d0929ab-XXX&enrichSource=Y292ZXJQYWdlOzM0MjQwMTQ5NjtBUzo5MDU3NDc2NzYyNzQ2ODhAMTU5Mjk1ODQ4MjIzOA%), 1990-221.

Isoda, M. (2021). *Mathematics Challenges for Classroom Practices at the Lower Secondary Level. Based on SEAMEO Basic Education Standards: Common Core Regional Learning Standards in Mathematics.* SEAMEO RECSAM. https://doi.org/https://www.criced.tsukuba.ac.jp/locked/Maths_Challenges_Classroom_Practices_Lower_Secondary_Level.pdf

Isoda, R. O. (2021). *Teaching Multiplication with lesson Study.* Springer. https://doi.org/library.oapen.org/bitstream/id/56ebe7fe-59b7-4bf4-9e43-c5ae150b6f1a/2021_Book_TeachingMultiplicationWithLess.pdf

Isoda, S. K. (2016). *Pensamiento matemático: cómo desarrollarlo en la sala de clases.* CIAE & FONDEF. https://doi.org/https://www.researchgate.net/profile/Masami-Isoda/publication/337875130_Masami_Isoda_-Shigeo_Katagiri_2016_Pensamiento_matematico_Como_desarrollarlo_en_la_sala_de_clases_Coordinacion_Segunda_edicion_Roberto_Araya_CIAE/links/5df026fca6fdcc2837176a83/Masami

Jasso, J. A. (2017). INFLUENCIA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA DESERCIÓN ESCOLAR; ESTUDIO DEL CBTIS 236 Y LA PREPARATORIA ANTONIO REPISO (PREVENCIÓN POR MEDIO DE LA LÚDICA. *II Congreso sobre Desigualdad Social, Económica y Educativa en el Siglo XXI*, 488.

Katagiri, M. I. (2016). *Pensamiento matemático: Cómo desarrollarlo en la sala de clases.* Chile : Centro de Investigación Avanzada en Educación .

Kooloos, C. (2022). *Making sense of student mathematical thinking: the role of teacher mathematical thinking.* Springer. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s10649-021-10124-2

Kuhn, T. S. (2013). *La estructura de las revoluciones cientificas.* México: FCE.

La Jornada. (08 de Octubre de 2020). *El 58% de los mexicanos admite problemas de salud por estrés.* La Jornada: https://www.jornada.com.mx/ultimas/sociedad/2020/10/08/el-58-de-los-mexicanos-admite-problemas-de-salud-por-estres-9989.html

Lara-Rosano, A. F. (2017). *Teorias, Métodos y modelos para la complejidad social* . México : Colofón; UNAM; CONACYT.

Lara-Rosano, F. d. (2017). *Teorias métodos y modelos para la complejidad social: un enfoque de sistemas complejos adaptativos.* México : Colofón; UNAM; Conacyt.

Lara-Rosano, F. d. (2017). *teorias métodos y modelos para la complejidad social: un enfoque de sistemas complejos adaptativos* . México : Colofón; UNAM; Conacyt.

López Aguilar, M. d. (2013). Una reforma "educativa" contra los maestros y el derecho a la educación. *El Cotidiano* , 55-76.

Mcnabb, D. (3 de Septiembre de 2017). *El paradigma de la complejidad*. https://drive.google.com/file/d/0B6MAgzpLwdlULXJHVzVidDdkS0E/view?resourcekey=0-WmKM8zh_7r9PXWf68_ZFUQ: https://drive.google.com/file/d/0B6MAgzpLwdlULXJHVzVidDdkS0E/view?resourcekey=0-WmKM8zh_7r9PXWf68_ZFUQ

Meza, L. I. (Verano/ Otoño de 2009). ¿Una nueva reforma para la enseñanza de las matemáticas? Notas para un análisis. *Entre Maestr@s*, 60-61.

Moreno Moreno, P. (2004). La politica Educativa de Vicente Fox (2001-2006). *Tiempo de Educar*, 28.

Moreno, P. M. (2021). *¿Educación por competencias o evolución de la consciencia?: Politica Educativa, Pedagogias del rendimiento y alternativas.* Ciudad de México : Castellanos Editores, UPN.

Morin, E. (1999). *Los siete saberes necesarios para la educación del futuro.* UNESCO.

Pérez, N. M. (2011). Influencia de la sociedad del conocimiento en la Política Educativa del Gobierno de Vicente Fox. *XI Congreso Nacional de Investigación Educativa/13.Política y Gestión/Ponencia* , 1-9.

Piaget, B. I. (1996). *De la lógica del niño a la lógica del adolescente* . Paidós .

Piaget, J. (1970). *L' epistemologia genetica* . Universale laterza UL.

Piaget, J. (2008). *Biología y conocimiento* . Siglo XXI.

Piaget, J. (2011). *El nacimiento de la inteligencia en el niño.* Crítica.

Piaget, J. (2021). *La representación del mundo en el niño.* Ediciones Morata S.L.

PISA . (2023). *PISA 2022 Results The State of Learning and Equity in Education (Volume I).* OECD. https://doi.org/978-92-64-35128-8

PISA. (2019). Programa para la evaluación internacional de alumnos (PISA) 2018. *Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos de la OCDE: NOTA PAÍS*, 1-12.

Pozo, J. I. (2013). *Teorias Cognitivas del Aprendizaje.* Madrid: Ediciones Morata.

PUCV. (16 de 03 de 2023). *INSTITUTO DE MATEMÁTICAS (Facultad de Ciencias)*. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso: http://ima.ucv.cl/dr-masami-isoda-es-el-nuevo-profesor-honoris-causa-pucv/

Querejeta, M. (2020). *Desarrollo y a prendizaje en la Psicología del siglo XX.* Memoria Académica.

Raimundo Olfos, S. E. (2020). Más de una década de Estudio de Clases en Chile: hallazgos y avances . *Revista Paradigma , XLI*, 190 – 221 .

Rangel, L. M. (2008). *Funciones y relaciones* . Trillas.

Resnick, W. W. (2010). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos.* Madrid: Paidos.

Rojas, J. M. (Noviembre de 2003). *Construcción del proyecto educativo de Vicente Fox*. Construcción del proyecto educativo de Vicente Fox: http://anuario.upnvirtual.edu.mx/index.php/publicaciones/anuario-mexico/category/11-2000?download=44:construccion-del-proyecto-educativo-de-vicente-fox&start=20

Rojas, J. M. (2017). Financiamiento de la educación superior en la primera mitad del gobierno de Enrique Peña Nieto: ¿fin del periodo de expansión? *Perfiles Educativos* , 119-140.

Román, J. A. (27 de Mayo de 2015). La reforma Educativa, para lograr el control de la enseñanza: expertos . *La Jornada* , pp. 1-3.

Romero, M. E. (01 de 02 de 2024). Los problemas sociales persistentes en la sociedad japonesa. México , CDMX, México.

Schunk, H. D. (1997). *Teorías del aprendizaje.* Pearson Educacion.

Secretaria de Educación Pública . (2006). *Perfil de egreso de la educación básica* . México : SEP.

Secretaria de Educación Pública . (2017). *Aprendizajez Clave para la Educación Integral .* Ciudad de México : SEP.

Secretaría de Educación Pública. (2024). *Saberes y pensamiento cientifico.* SEP.

SEP. (2019). *La Nueva Escuela Mexicana: principios y orientaciones pedagógicas.* México : SEP.

SEP. (2024). *Saberes y pensamiento cientifico* . Secretaría de Educación Pública . https://doi.org/https://libros.conaliteg.gob.mx/2024/S1SAA.htm?#page/154

SEP. (2024). *Saberes y Pensamiento Cientifico: Colección XIMHAI Primer Grado.* SEP. https://doi.org/978-607-579-108-1

Solís, P. (2018). La transición de la secundaria a la educación media superior en México: el difícil caminoa la cobertura universal. *Perfiles Educativos* , 81.

Tabares, I. L. (2002). Metodología de la investigación holística. Una propuesta integradora desde las sociedades fragmentadas. *Uni-pluri/versidad, Vol. 2, No. 3.*, 22.

TSUKUBA, D. &. (Dirección). (1995). *El estudio de las Clases en Japón* [Película].

Ty W. Boyer, S. C. (2009). Development of Proportional Reasoning: Where Young Children Go Wrong. *National Library of Medicine* , 1-23. https://doi.org/https://pmc.ncbi.nlm.nih.gov/articles/PMC2597581/#:~:text=According%20to%20Piagetian%20theory%2C%20proportional,Schwartz%20%26%20Moore%2C%201998

Universidad Iberoamericana Ciudad de México . (2015). La política educativa del sexenio 2013-2018. Alcances y límites. *documentos de investigación*, 1-56.

University of Tsukuba . (20 de 11 de 2023). *Researchers information* . Isoda Masami: https://trios.tsukuba.ac.jp/en/researcher/0000001461

University Tsukuba. (2021). Lesson 1 (SUB ENG): Teaching Mathematics to Develop Mathematical Thinking as Higher Order Thinking. *Teaching Mathematics to Develop Mathematical Thinking as Higher Order Thinking: How do you teach? Why? Number and Operation*. Japón: SEAMEO-RECSAM. https://www.youtube.com/watch?v=fB_nJHLfrEM

UPN (Dirección). (2021). *Seminarios Optativos: Educacion Matematica* [Película].

UPN, y ILCE (Dirección). (2000). *Serie Enseñanza de las matemáticas: Aritmética (Módulo 2: Máximo Común Divisor)* [Película].

Vázquez, P. R. (30 de 12 de 2012). La Reforma al 3°: un nuevo engaño a la sociedad. *La Jornada* , pp. 1-3.

Viniegra-Velázquez, L. (23 de Agosto de 2021). *scielo.* Colonialismo y educación médica: ¿educare o educere?: https://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S1665-11462021000400306&script=sci_arttext&tlng=es#:~:text=Educare%20significa%20criar%2C%20nutrir%2C%20que,al%20discente%20hacia%20su%20realizaci%C3%B3n.

Volpi, J. (2010). *LEER LA MENTE: EL CEREBRO Y EL ARTE DE LA FICCION*. México : Santillana.

Videos

#1 What is Lesson Study Masami Isoda.

https://www.youtube.com/watch?v=TR34ZdBXmz8&list=PLszxSpzk_nRXT92pctR87O0doRsSsilwU&index=21

Maestros Aprendiendo Juntos - Implementación de un Estudio de la Clase.

https://www.youtube.com/watch?v=ld2sswbYz98&list=PLszxSpzk_nRXT92pctR87O0doRsSsilwU&index=2

Parte 4 - Maestros Aprendiendo Juntos sistema de capacitación docente en Japón.

https://www.youtube.com/watch?v=4mGCJCWad-o&list=PLszxSpzk_nRXT92pctR87O0doRsSsilwU&index=5

Lesson 1 (SUB-ENG): Teaching Mathematics to Develop Mathematical Thinking as Higher Order Thinking.

https://www.youtube.com/watch?v=fB_nJHLfrEM&list=PLszxSpzk_nRXT92pctR87O0doRsSsilwU&index=6