SECRETARÍA DE EDUCACIÓN DE GOBIERNO DEL ESTADO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

UNIDAD 241

"EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA Y ENSEÑANZA DE LAS FRACCIONES. UNA EXPERIENCIA EN LA ESCUELA PRIMARIA"

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE DOCTORA EN DESARROLLO EDUCATIVO CON

ÉNFASIS EN FORMACIÓN DE PROFESORES

PRESENTA

CHRISTINE JANET LUNA DE LA ROSA

DIRECTOR DE TESIS

DR. LUIS MANUEL AGUAYO RENDÓN

SAN LUIS POTOSÍ, S.L.P. DICIEMBRE, 2022.

Doctorado Regional en Desarrollo Educativo

con Énfasis en Formación de Profesores

Estados que integran la Región:

Coahuila

Nuevo León

Tamaulipas

San Luis Potosí

Zacatecas

CÁTEDRA UNESCO CECILIA BRASLAVSKY: Formación docente para la innovación de la educación

POTOSÍ
PARA LOS POTOSINOS
GOBIERNO DEL ESTADO 2021 • 2027

SEGE
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN
DE GOBIERNO DEL ESTADO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL | UNIDAD UPN 241 SAN LUIS POTOSÍ, S.L.P.

DICTAMEN DE TRABAJO DE TESIS

San Luis Potosí, S.L.P., 09 de noviembre de 2022.

C. MTRA.
CHRISTINE JANET LUNA DE LA ROSA
P R E S E N T E. –

En mi calidad de Coordinador Regional del programa de Doctorado Capítulo Noreste, de la Universidad Pedagógica Nacional, y después de haber sido analizado su **Trabajo de Tesis** titulado: ***"Educación matemática realista y enseñanza de las fracciones. Una experiencia en la escuela primaria",*** encuentro que reúne los requisitos a que obligan los reglamentos en vigor para ser presentado ante el H. Jurado del examen para la obtención de Grado, por lo que deberá entregar los 9 ejemplares y 4 Cd's requeridos como parte de su expediente institucional.

A T E N T A M E N T E

Vo. Bo.

ESTADOS UNIDOS MEXICANOS
S. E. G. E.
UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
UNIDAD 241
SAN LUIS POTOSI, S.L.P.

DRA. YOLANDA LÓPEZ CONTRERAS
Coordinadora Regional del Doctorado

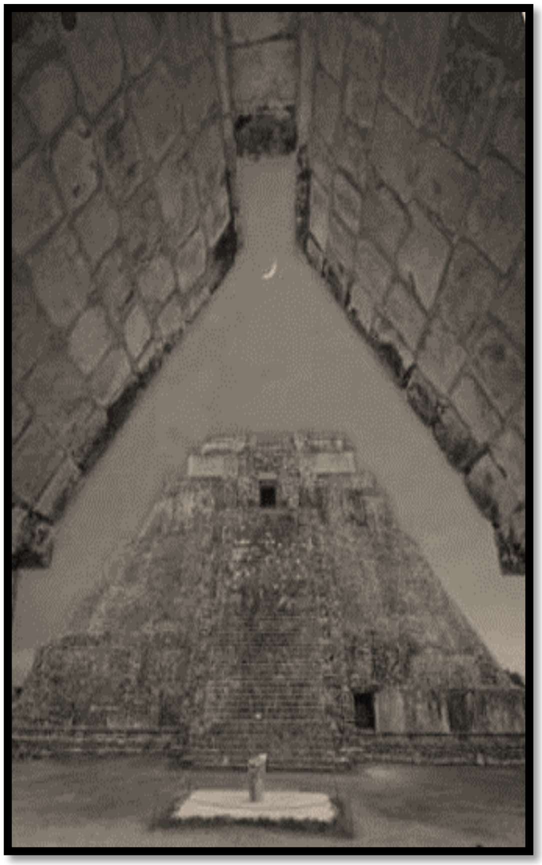
LIC. PASTOR HERNANDEZ MADRIGAL
Director de la UPN, Unidad 241

2022, "Año de las y los migrantes de San Luis Potosí"

Universidad Pedagógica Nacional Unidad 241, Italia No. 903 Fracc. Providencia, C.P. 78390, San Luis Potosí, S.L.P. Tel 444822-10-25 www.upnslp.edu.mx

Agradecimientos

Parecen dibujos,
Pero dentro de las letras están las voces…
Mia Couto.



Dedicada a mis padres,

Josefina e Ignacio.

Al Dr. Luis Manuel Aguayo, por su acompañamiento en todo el proceso. La orientación en varios flancos, por aguzarme la mirada a la investigación.

Al Dr. José Luis Cortina, por abrir nuevas puertas, por sus conversaciones que facilitaron la exploración de la propuesta de enseñanza.

A la Dra. Ivette Delgado, compañera en muchos aspectos, uno de ellos la investigación, por las charlas, en la cuales se obtuvieron grandes saberes de la vida.

A mis hijos:

Kia Cristina, por ser la Luna que me acompañó en esas conversaciones nocturnas, mi guía en la travesía.

Balam Tadeo, porque en lo sensible y lo profundo, fuiste mi soporte, un conocedor, mi pequeño Acajay.

Maki Madai, por enseñarme a tu corta edad, a creer en mí, por tus risas, por tu entusiasmo que me envolvió para continuar.

TABLA DE CONTENIDOS

INTRODUCCIÓN

[…] Cada cultura tuvo modalidades propias de definir
y de delimitar la forma
y el contenido de los objetos de la propia investigación
(Radford, 1997, 30)

El concepto fracción proviene del latín *fractio* que significa romper, es decir partir en partes iguales a una unidad (número natural). En las diversas culturas del mundo, las fracciones como parte de las matemáticas han estado presentes desde sus inicios, "Así como el hombre empezó a contar con los números naturales, empezó también a medir con las fracciones". (Morcote y Flores, 2001; Imvinkelried 2020). Sin embargo generalmente se les asoció con la idea de partir, fracturar (Freudenthal, 1983), fragmentar o quebrar.

Ya los Egipcios, Babilonios, Griegos e Hindúes utilizaban la fracción como parte-todo, empero los Egipcios daban respuesta a una necesidad, a partir del fenómeno 'contar panes', con el fin de ayudar al comercio, cubriendo la necesidad de contabilizar lo que era menos que la unidad, entonces también son una construcción social (Parra et al., 1997). Pero son los hindúes los que sistematizan los conocimientos de los otros pueblos, escribiendo el numerador sobre el denominador. De hecho, los antecedentes más antiguos acerca de la resolución de operaciones con números fraccionarios o quebrados, datan de Aryabhata, en el siglo VI d.C. y Bramagupta, en el siglo VII d.C. Posteriormente, Mahavira, en el siglo IX y Bháskara en el siglo XII, (Peña, 2011). En esta misma línea en investigaciones realizadas por Chemello et al. (Citado en Imvinkelried 2020) se evidencia que en libros españoles para niños que datan de 1800, se retomaba la idea de 'quebrado' con la idea de fraccionar mediante la división en partes iguales de un objeto; idea que continuó en las propuestas de enseñanza del siglo XX, específicamente en las décadas de los 50's y 60's, se incluía la fracción como quebrado.

En la década de los 70's con la llegada de la Matemática Moderna, aparecen las fracciones como medida, proporcionalidad y razones. Sin embargo la explicación llevaba a la misma idea seminal, buscar las veces que la unidad está contenida en el todo para hacer la comparación de las unidades y la representación en la recta numérica. Aunque se le daba el estatus de número, se continuó con la idea de partir enteros, para luego inscribir en la recta las fracciones que irían entre cada número entero.

Avanzando en la historia, de acuerdo a la clasificación que hace Fandiño (2011), hay un primer periodo (1960 a 1980) en el cual, el problema de los significados era la tendencia central y se colocaba en el centro el modelo de Thomas Kieren (1983) que plantea a la fracción como número racional, esto significaba que, después de dominar todos los significados de las fracciones se debía construir el concepto de número racional. En el modelo de Kieren el significado 'parte- todo' es el eje vertebral de los demás significados (cociente, razón, medida, y operador), que generalmente se trabajan en contextos continuos como partir un chocolate en partes iguales, o en contextos discretos como determinar la fracción que representan 25 de 100 alumnos.

También en este modelo, la mayoría de las ocasiones, se concibe la fracción como parte de una unidad, situación que nos lleva a pensar en la fracción como un megaconcepto ligado fundamentalmente con la noción de parte-todo. Este vínculo asocia la idea de fracción con la fragmentación de un todo en partes iguales (Cortina et al., 2012) y genera una creencia recurrente, que la problemática no estaría en cómo se enseña, sino en la complejidad misma del concepto.

Si bien el modelo de Kieren (1983) ha tenido gran aceptación en la elaboración de programas de estudio (Lamon 2007, en Cortina et al., 2012) y entre los mismos matemáticos y educadores, son pocas las evidencias que constatan resultados óptimos en la comprensión de los distintos significados de la fracción que en conjunto permitiría comprender al número racional. Diversas investigaciones han mostrado el escaso impacto positivo para la comprensión de fracciones como cantidades que pueden dar cuenta de algo, es decir como números genuinos.

Freudenthal (1983) ya expresaba dicha preocupación y subraya dos problemáticas. Una era que desde esa perspectiva se ve a la fracción como la suma de múltiples significados y partir del significado parte-todo se representa a la unidad como un objeto susceptible de ser quebrado, partido, coloreado en partes iguales, de esta manera se concibe a la fracción como "tantos de tantos", lo que normalmente da significado al denominador como número de partes en que se corta el entero y al numerador como el número de partes que se toman del entero, así la fracción es algo contenido en un entero

(Cortina, 2013). Una segunda problemática es que vista de esta manera, la fracción tiene una limitante referida a la cantidad de la que puede dar cuenta, solo puede expresar fracciones propias (menores que la unidad), además ofrece un concepto de equivalencia restringido. Es por estas dificultades que Freudenthal (1983) vislumbraba la –equipartición– como un escenario restringido y poco alentador para la comprensión de la fracción.

En este contexto Fandiño (2011) hace un recuento de innumerables investigaciones tanto en el proceso de enseñanza como de aprendizaje que sugieren que, en el ámbito global, son poco alentadores los resultados sobre la comprensión del concepto de fracción, porque la mayoría se basa en el significado parte todo, la enseñanza se da de manera parcelada con los otros significados, se confunde cociente con parte-todo. Otras investigaciones muestran las dificultades de los niños para representar las fracciones en la recta numérica porque intentan seguir la lógica de las propiedades del número natural, lo que les impide verlas como números que cuantifican, en términos matemáticos hay confusión en las ideas de partición, equivalencia y formación de la unidad, así como si reversibilidad porque se ve a la fracción simplemente como fracturador lo que hace más compleja la funcionalidad de la recta como cuantificación de medida mayores a la unidad. (Freudenthal, 1983).

En el análisis del modelo de Kieren acerca de la fracción como número racional que hacen Kilpatrick, Swafford y Findell (2001, en Cortina et al., 2012) destaca que lo fundamental es que los alumnos identifiquen la fracción como una sola entidad, un solo número capaz de cuantificar una longitud en la recta numérica, de igual forma otros investigadores ya reconocían la relación de la fracción con un tamaño o cantidad. Se trata de concepciones que permiten juzgar de manera sensata la asociación de la fracción como medida de una longitud integrada a lo Freudenthal (1983) consideró como enfoque fenomenológico comparador de las fracciones, que se utiliza para comparar el 'tamaño' de dos unidades físicamente independientes, lo que permite reconocer las fracciones impropias y la comprensión en la recta numérica, dando a las fracciones el carácter de números genuinos.

Profundizando en la investigación teórica, encontramos dos propuestas de enseñanza de las fracciones basadas en situaciones de comparación que ven a las fracciones como números que cuantifican una medida y que potencializan la capacidad de los alumnos para interpretar fracciones como cantidades.

La primera propuesta desarrollada en la década de los 70's en Francia, con alumnos de 10 y 11 años de educación primaria fue diseñada por Guy y Nadine Brousseau basándose en la conmensuración. Incluye una secuencia de situaciones didácticas en las que se utilizan hojas de papel y la unidad de medida es el milímetro, en estas situaciones se compara el grosor de las hojas para encontrar el significado de razón. Las fracciones se conciben como una sola entidad formada por dos números, el numerador cuantifica el número de milímetros y el denominador representa el número de hojas[1] .

En Holanda, desde la Educación Matemática Realista (EMR) Freudenthal diseñó otra propuesta de enseñanza partiendo de su análisis fenomenológico en el que las fracciones son una respuesta a la necesidad de comparar dos unidades de medida independientes entre sí. Su propuesta sigue el principio de aprender matemáticas como una actividad social; el de interactividad al organizar conversaciones colectivas; el de realidad desde el que se asume que los alumnos vivencien la matemática, de lo que les es real, imaginable. Vivenciar el quehacer de medir y comparar los lleva a una matematización progresiva (Treffers, 1987) en un contexto de medición que estimula la utilización de medios didácticos, esto es herramientas de medición reinventadas por los propios alumnos que permitan la medición con magnitudes físicas, facilitando la comprensión de la fracción en la comparación de medidas de longitud lineal. (Dvydov, 1991)

Entre ambas propuestas hay una coincidencia, las dos se alejan de la equipartición, aunque cada una tiene características propias. La propuesta de Brousseau parte de la medición, usa una unidad y fracciones no unitarias para medir el grosor de diferentes fajos de hojas, en la de Freudenthal se propone utilizar el enfoque comparativo utilizando una unidad de referencia en relación de una fracción unitaria. A la segunda propuesta es a la que nos afiliamos en esta investigación.

En México, al igual que en otros países, se tiene una preocupación en relación con los números fraccionarios; sin embargo a pesar de abundantes investigaciones sobre la enseñanza de las fracciones, no existe un consenso respecto a la causa de la ineficacia en su aprendizaje, un supuesto es que al no haber una propuesta curricular clara, en el caso de México, pueden coexistir interpretaciones personales que lejos de ayudar a comprender el modelo de Kieren, en el que se basa el plan y programa de estudio mexicano, generan una interpretación única de fracción con el subconstructo parte todo, que puede

[1] Para ampliar la información consultar Brosseau et al, 2004, (Cortina et al., 2012)

convertirse en un obstáculo para la comprensión de los demás subconstructos y poder llegar a una óptima comprensión del número racional.

A pesar del gran número de las investigaciones realizadas no se ha demostrado que el modelo de Kieren sea el de mejores resultados puesto que los aprendizajes de los niños continúan casi sin ningún movimiento favorable, se puede decir que se confía en el modelo con cierta ingenuidad, sin cuestionarlo, de manera acrítica, lo que puede obstaculizar el proceso de enseñanza.

Partiendo de las consideraciones anteriores, un grupo de investigadores coordinados por el Dr. José Luis Cortina, iniciaron un recorrido de experimentación de una propuesta de enseñanza con otro enfoque y metodología que no tenía por objetivo desmitificar el modelo antes mencionado, sino explorar otras rutas de enseñanza que puedan apoyar a los alumnos a razonar sobre las fracciones como números genuinos. Se trata de establecer una determinada relación de aprendizaje en el aula para estudiarla con profundidad y posteriormente, diseñar herramientas y actividades que promuevan el aprendizaje y razonamiento de los alumnos.

Para emprender este recorrido un equipo de investigadores dirigido por el Dr. Cortina inició en el año 2006 un estudio exploratorio con alumnos de educación primaria en el contexto mexicano, su objetivo fue documentar el significado cuantitativo que le atribuyen a los números fraccionarios los estudiantes que están por finalizar la primaria en 13 escuelas de contextos diversos. Los resultados mostraron un conocimiento muy precario sobre la interpretación de las fracciones como cantidades que cuantifican tamaños relativos.

Los resultados encontrados llevaron al equipo a emprender otra investigación (Zúñiga, 2008) con el enfoque comparador, la fenomenología de (Freudenthal, 1983) y la relación de orden inverso (Thompson y Saldanha, 2003) en contextos desfavorecidos del estado de Chiapas México. En este estudio se documentó la diversidad y la naturaleza de los razonamientos de los estudiantes de tercero y cuarto de primaria al involucrarse en actividades didácticas que implican la comparación relativa de tamaños (Thompson y Saldhana, 2003), el objetivo era establecer si dichas actividades eran un punto de partida viable para la enseñanza inicial de las fracciones. Los resultados evidenciaron que es viable involucrar a estudiantes que se inician en el estudio de las fracciones, incluso a aquellos que pertenecen a contextos socialmente desfavorecidos, en actividades basadas en la comparación de tamaños de manera relativa (Zúñiga, 2008). Estas actividades tuvieron el potencial de ayudar a los estudiantes a razonar cuantitativamente sobre fracciones unitarias de manera relativamente compleja. En síntesis se puede decir que es una alternativa al modelo que inicia con la equipartición que tradicionalmente se utiliza.

Posteriormente el mismo equipo realizó un análisis de los resultados de las pruebas estandarizadas en México (PISA, 2003; Excale , 2005; ENLACE 2006), particularmente se analizaron los resultados de los alumnos de sexto de primaria (Cortina, 2006; Pérez, 2008; Zúñiga, 2008). Aunque dichos resultados no informan específicamente sobre el razonamiento sobre las fracciones sí muestran que sus aprendizajes son raquíticos, incluso en la comparación de fracciones menores a la unidad con el mismo denominador. Esta información fue un insumo para el diseño y desarrollo de la propuesta de enseñanza.

En 2011, otra miembro del equipo realizó un estudio exploratorio con alumnos universitarios de la carrera de ciencias económico-administrativas (Maya, 2011), el objetivo fue analizar los efectos positivos de abordar las fracciones desde un enfoque comparador y utilizando el orden inverso de las fracciones así como el tipo de respuestas que se pueden dar para gestar razonamientos sólidos en la comunidad áulica. Parte del estudio se enfocó en determinar el tipo de concepciones sobre las relaciones multiplicativas e identificar qué conceptos multiplicativos deberían dominar los profesionales de dicha carrera. Como resultado de la exploración, Maya (2011) formuló una primera versión de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA), que no se instrumentó pero sirvió como punto de partida para realizar otras exploraciones sobre la viabilidad de la THA.

Durante más de una década el equipo de investigación llevó a cabo exploraciones sobre la viabilidad de una propuesta que apoyara a los estudiantes a razonar sobre la fracción como números que representan magnitudes de medidas (Cobb et al., 2008) documentando la naturaleza de los razonamientos de los alumnos al colocar como referente el enfoque comparador de las fracciones en el contexto de medir y la metodología de experimento de diseño.

Tomando en consideración los resultados de todos los estudios anteriores, la propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones desarrollada por Cortina (2012; 2013) se basa en la caracterización hecha por Freudenthal (1983) y busca apoyar a que los alumnos de la escuela primaria razonen de manera consistente sobre la relación de orden inverso de las fracciones unitarias y sobre el tamaño relativo de fracciones propias e impropias respecto a la unidad (Thompson y Saldanha, 2003).

La ruta de enseñanza se ubica en el contexto de la investigación de diseño, perspectiva metodológica en la que hay un equipo de investigación que conduce una serie de sesiones de enseñanza con estudiantes a las que se les analiza y da seguimiento para poder estudiar a detalle la relación de aprendizaje. En esta metodología se rompe la distinción entre docente e investigador, ambos son parte del equipo y todos se pueden apropiar del discurso aunque participen en momentos distintos pues el propósito es diseñar herramientas y actividades que permitan al equipo experimentar de primera mano el aprendizaje y razonamiento de los alumnos. (Molina et al., 2011)

En este trayecto se dan varios momentos de discusión incluso durante la implementación de la propuesta, también se hacen dos tipos de análisis o ciclos iterativos, un análisis durante la instrumentación y otro retrospectivo al final que tiene como propósito determinar cómo mejorar la propuesta. Aunque, cabe aclarar, la propuesta de enseñanza puede ser revisada en posteriores momentos para convertirse en un proceso cíclico de experimentos prácticos y experimentos teóricos, cuyo propósito es poner a prueba una trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) o trayectoria conjeturada de aprendizaje, que es el principal producto del diseño.

La primera THA diseñada por el equipo del Dr. Cortina se experimentó con alumnos de cuarto grado de educación primaria, se buscaba favorecer el aprendizaje de las fracciones como números que cuantifican magnitudes, es decir como un número que da cuenta del tamaño de cierto atributo, como algo que está separando de la unidad de referencia (Cortina, 2013). Para lograrlo se utilizó la longitud como magnitud de referencia y se diseñó una serie de actividades, que denominamos agenda, en la cual los niños experimentan la “reinvención” de la medición lineal. Las actividades se colocan en el contexto de una narrativa que cuenta las formas en las que un grupo legendario de antiguos mayas (los Acajay) medía.

En la agenda primero se explora la medición arbitraria utilizando partes del cuerpo (pies, cuartas, pasos, etc.) y se plantea la necesidad de buscar una medida estandarizada para dar precisión a la medición. Para ello se requieren ciertas condiciones, a saber:

- La unidad de referencia será la vara de los Acajay (Tikje) de 24 centímetros aproximadamente.
- Los niños crean subunidades en forma de varillas, de plástico o papel (son barras que físicamente son independientes de la unidad)

- La imaginación, que es posiblemente real en su mente, les permite en un momento dado prescindir del material físico.

Las varillas sirven de base fenomenológica para ayudar a los alumnos a razonar sobre el tamaño relativo de las fracciones respecto a la unidad de referencia y entre ellas; para reconocer cuál es mayor o menor que otra según el número de iteraciones necesarias para cubrir la unidad. Este tipo de actividades son útiles para apoyar a los estudiantes a construir formas de razonar consistentes sobre la relación de orden inverso de las fracciones unitarias y sobre el tamaño relativo de fracciones propias e impropias respecto a la unidad (Cortina, 2013).

El experimento de enseñanza tiene criterios para su validación y en ellos toma fuerza la replicabilidad, la generalización y la utilidad, de manera entonces que es justificable que la THA sea cada vez más refinada, las mejoras que pueden sugerir al analizar los razonamientos de los alumnos durante la experimentación, estos análisis nos permiten formular nuevas conjeturas o reforzar las que se plantearon.

La primera THA experimentada fue replicada por Juárez (2017) en un grupo de quinto grado de primaria de la ciudad de México, un contexto diferente que permitiera comprobar la utilidad y generalidad del diseño. En esta experimentación la narrativa de los Acajay fue sustituida por otra referida al pueblo Teotihuacano, la idea era que resultara más vivencial para los alumnos. Una parte de la investigación se orientó a la descripción de lo que sucedió en el aula en cada clase (18 sesiones) y uno de los primeros hallazgos fue que, en la medición los alumnos tuvieron dificultades porque había objetos mentales no consolidados como medir con exactitud o medir desde cero, por esta razón a partir del análisis retrospectivo se tomó la decisión de subsecuentes experimentaciones donde se diera mayor tiempo a la práctica de medir.

En suma, han sido cuatro investigaciones que el equipo del Dr. Cortina ha realizado (2006, 2008, 2012, 2013, 2017, 2018) sobre las fracciones como números que representan una medida, los resultados de todas ellas se utilizaron para la reconstrucción de las actividades de la THA, de los medios didácticos y de las herramientas para la enseñanza, elementos que se cree, conforman los elementos efectivos de la secuencia que ayudarán a la labor del docente para conjeturar sobre la manera cómo podría progresar el aprendizaje de los alumnos y sobre la toma decisiones acerca de qué enseñar cómo y cuándo hacerlo.

Cuando tomamos diferentes elementos del recurso teórico (la fracción como comparador; la iteración de la fracción unitaria) para probar la efectividad de una propuesta de enseñanza basada en la EMR (mediante los análisis en la fase de implementación y retrospectivo de la THA) podemos decir que tenemos una Teoría de la enseñanza en un dominio específico (TEDE) que busca apoyar la mejora de la enseñanza y por ende mejorar el aprendizaje de las matemáticas, en nuestro caso de las fracciones como números genuinos que dan cuenta de un medida. Esto implica que el equipo de investigación tiene diferentes tareas que tienen por eje la TEDE.

Inicialmente se hacen ciclos iterativos de análisis que nos llevan a un análisis retrospectivo del experimento de enseñanza. La TEDE gesta ese movimiento de esquemas propios de una matematización progresiva, que implica el análisis de cómo lo hacen los niños, qué pasa cuando hay una obstrucción, cómo lo resuelven los alumnos. Todo ello nos permite hacer la triangulación entre lo propuesto por la THA, el desarrollo de las sesiones (en el quehacer y el discurso en el aula) y las producciones de los alumnos, que establezcan la utilidad de la TEDE.

En esta lógica, la presente investigación se focaliza en analizar la efectividad de la TEDE basada en la EMR, en la THA se enuncian las conjeturas sobre cómo puede progresar el aprendizaje en un aula, y sobre los medios que apoyan este progreso. Nuestra mirada se posiciona en las prácticas matemáticas del aula vinculadas con las conversaciones colectivas de los alumnos y en la forma de argumentar y explicar sus razonamientos en sus producciones escritas. El objetivo es revisar la utilidad de la TEDE y analizar las percepciones matemáticas que los estudiantes desarrollan al participar en las tareas propuestas, cómo se gestan las reinvenciones en un proceso de aprendizaje , es decir cómo se avanza en la TEDE y lo que es más importante para nuestra presente discusión, cómo apoya instruccionalmente la THA para el refinamiento, el surgimiento de una nueva percepción de la experimentación, es decir el potencial de la THA, para avanzar en el recorrido. Todo ello con la finalidad de que se constituyan como una guía que permita producir otros principios de diseño, como es la experimentación de la TEDE que proponemos.

Problema de investigación, preguntas y objetivos

El estudio de las fracciones en la educación es un problema complejo tanto de enseñanza como de aprendizaje, por esta razón, en esta investigación se replantea su enseñanza dejando de lado prácticas que privilegian un solo constructo de las fracciones (parte- todo) que, como se mencionó párrafos anteriores puede obstaculizar el proceso de enseñanza. Para ello nuestra pregunta central es: ¿Cuál es la efectividad de la TEDE basada en la EMR, para ayudar a los estudiantes a razonar sobre las representaciones de fracciones como números que representan magnitudes (medidas)?

Esta pregunta principal se complementa por las siguientes preguntas secundarias:

¿Qué percepciones sobre las matemáticas desarrollan los estudiantes al participar en las tareas propuestas?

¿Cómo se gestan las reinvenciones en su proceso de aprendizaje?

¿Cómo avanza una Teoría de Enseñanza de un Dominio Específico en las aulas?

¿Cómo apoya instruccionalmente la THA para el refinamiento, el surgimiento de una nueva percepción de la experimentación?

Los objetivos que nos orientaron para contestar esa pregunta son los siguientes:

Objetivo general:

- Analizar la efectividad de la TEDE basada en la EMR, para ayudar a los estudiantes a razonar sobre las representaciones de fracciones como números que representan magnitudes (medidas).

Objetivos específicos:

- Revisar la utilidad de la THA para el progreso del aprendizaje en un aula, y sobre los medios que lo apoyan.
- Caracterizar cómo evoluciona el aprendizaje de las fracciones como números que representan magnitudes en los alumnos.
- Registrar los cambios y/o las razones de las transiciones de cada fase del diseño de la agenda en la TEDE.
- Evaluar la credibilidad de las decisiones durante la implementación de la THA.

Propuesta de enseñanza de las fracciones basada en la EMR

Nuestra propuesta de aprendizaje fue llevada a cabo con estudiantes de quinto grado de educación primaria, en una escuela pública de la Ciudad de México, en turno matutino. El objetivo primordial de la propuesta de aprendizaje fue ayudar a los estudiantes a razonar sobre las representaciones de fracciones como números que representan magnitudes (medidas), mediante la experimentación de la TEDE, habiendo un análisis retrospectivo de su efectividad para gestionarlo.

Este trabajo de investigación se divide en seis capítulos, una introducción, epílogo y un apartado de conclusiones. En el primer capítulo se presenta el planteamiento del problema, a partir del análisis de la literatura internacional (Fandiño 2009; 2011) y nacional, encontrando a más de 40 años de investigación una problemática vigente en el aprendizaje y la enseñanza de las fracciones. También se documentan en este capítulo las dificultades de los profesores versus las dificultades de los alumnos, la mirada se dirige a lo que ocurre con las fracciones en el nivel básico, las dificultades y los errores evidenciados en las pruebas estandarizadas (Pisa 2006 a 2018; Enlace 2006; Excale 2006 a 2013; Planea 2015 a 2018). En este recorrido llegamos a analizar las fracciones en el contexto mexicano mediante el análisis de estudios sobre los materiales escolares, las dificultades de los alumnos en el aprendizaje y la enseñanza de las fracciones.

En el capítulo dos se describe el soporte teórico que guía el experimento de enseñanza, desde su diseño hasta su implementación y difusión. Como lo menciona Cobb et al., (2008), es una teoría para el diseño de recursos para la enseñanza de las matemáticas.

En el capítulo tres se describe la propuesta de enseñanza basada en el experimento de diseño que tiene como eje vertebral el diseño instruccional (que da pauta a la evolución de los medios de matematización), su finalidad, como mencionamos es que se constituya como una guía que permita producir otros principios de diseño al caracterizar el aprendizaje de los estudiantes de una manera que sirva de guía para el maestro, como lo menciona Cobb y Gravemeijer (2008), para abordar problemas sobre los cuales la información existente sea escasa y por tanto insuficiente para apoyar el diseño de ambientes de aprendizaje. El experimento de diseño parte de la puesta a prueba de una trayectoria conjeturada de aprendizaje (TEDE), la cual se constituye como el principal producto del diseño, esta ayuda a fijar los objetivos que se quieren lograr, los medios que logran ese aprendizaje progresivo (formas de participación en colectivo) y a dar cuenta si se han logrado tales objetivos o a tomar decisiones en la adaptación si no se cumplen.

El experimento de enseñanza se llevó a cabo poco antes de la contingencia sanitaria (Covid-19) por un integrante del equipo de investigación en un aula regular, con 31 alumnos, grupo heterogéneo de quinto grado de educación primaria, (en una escuela pública de la

Ciudad de México de turno matutino). En la experimentación estuvieron colaboradores como Zúñiga, empero es hasta el análisis retrospectivo que se da la integración al equipo y se focaliza en las tres primeras prácticas matemáticas de la TEDE: entender la medición como la iteración de una unidad; reconocer y comparar el tamaño relativo de una subunidad, comparación de fracciones unitarias; determinar cuándo una fracción es mayor, menor o igual a una unidad.

En la primera práctica matemática “la medición como iteración de una unidad” cuyo análisis da contenido al capítulo IV, usa la longitud como magnitud de referencia y procura que los alumnos experimenten la reinvención de la medición lineal. Las actividades se contextualizan en una narrativa sobre las formas en que un grupo legendario de antiguos mayas (los Acajay) medía. En esta práctica se analiza cómo vivencian el quehacer y la importancia de medir, un base para las siguientes prácticas.

En la práctica matemática dos “relación de orden inverso y comparación de fracciones unitarias” que se analiza en el capítulo V, se hace una contextualización de la literatura sobre la “relación de orden inverso”, con la intención de facilitar al lector el recorrido que emprenden los alumnos en el quehacer de reconocer y comparar el tamaño relativo de una subunidad de medida. Aquí la TEDE conjetura que en la actividad de medir con el apoyo de la medición de magnitudes físicas (Davidov, 1991) y de las conversaciones colectivas, los alumnos comprenderán esta relación, que implica entender por qué y cómo el tamaño de las entidades cuantificadas por fracciones unitarias disminuye a medida que el número en el denominador crece. (Thompson y Saldanha, 2003).

En la práctica matemática tres “el esplendor de la matematización progresiva. reinvención de la fracción como medida de longitud” que se incluye en el capítulo seis, el análisis se posiciona en las respuestas de los alumnos, cómo explican sus razonamientos, qué se evidencia en su discurso, pero también en sus producciones individuales. La TEDE conjetura que esos medios didácticos (conversaciones colectivas), son una actividad que apoya el aprendizaje colectivo, por ello el hacer un alto y evaluar la efectividad de las interacciones.

La práctica tres permite visualizar diversas reinvenciones con la medición como la iteración de la fracción unitaria, es decir la interpretación de las fracciones como medidas a través de la iteración de una subunidad de medida (numerador y denominador) y determinar cuándo es mayor, menor o igual a una unidad. El análisis tiene dos intenciones, analizar patrones y regularidades en las interacciones de los alumnos para identificar cambios en su razonamiento a través de la interpretación de la relación entre el tamaño de una unidad de medida y el número de iteraciones que requiere para cubrir un cierto largo, lo que llamamos relación de orden inverso; y cómo los alumnos expresan sus respuestas para que el otro comprenda lo que se quiere dar a conocer el por qué y el cómo. En el epílogo se describe qué pasa después de vislumbrar la convencionalidad de la escritura de fracciones y cómo se explica la relación entre las fracciones unitarias y la unidad en las producciones de los alumnos.

Finalmente, en el apartado de conclusiones se muestra un diálogo puntual con la TEDE y se da respuesta a preguntas sobre la experimentación con relación a las prácticas matemáticas, también se reflexiona sobre la pregunta central y los objetivos planteados al inicio de la investigación y se hace una valoración sobre los alcances y las limitaciones del estudio y las recomendaciones para su refinamiento para un estudio posterior de mayor alcance.

CAPÍTULO I

EL APRENDIZAJE Y LA ENSEÑANZA DE LAS FRACCIONES. UNA PROBLEMÁTICA VIGENTE

…La adecuada valoración del adversario
y su perfecto conocimiento
son armas vencedoras en las manos
de quien sabe aprovechar la supremacía
ligada a competencia y conciencia.
(Isabel Fandiño, 2011)

En la actualidad la enseñanza de las fracciones continúan siendo un tema de investigación dados los resultados escolares que se han tenido a lo largo de 40 años, esta situación ha generado múltiples investigaciones pero también ha sido causa de frustraciones en el ámbito de los profesores.

Una extensa revisión de investigaciones (Ríos, 2007; Ruíz, 2008; Ramírez y Block, 2009; Fandiño, 2011; Siegler, 2012; Butto, 2013; Cortina et al., 2012; 2013; Ávila, 2019) confirman la prevalencia de esta problemática y constatan que el estudio de las fracciones no es algo muy apreciado por los estudiantes, incluso los mismos docentes tratan de retrasar o evitar; éstas y otras investigaciones (Pérez, 2008; Cortina, Zuñiga, Visnovska, 2013; Imvinkelried, 2020) han demostrado que un concepto de fracción limitado tiene consecuencias importantes para el aprendizaje de la Matemática en los niveles escolares siguientes. Al parecer, en el mundo de la investigación no existe un consenso respecto a la causa de la ineficacia del sistema en el campo de las matemáticas y sobre lo que implicaría revertir la situación (Cortina, 2006).

La situación en el escenario educativo internacional se hace evidente en la obra de Fandiño (2009; 2011) quien hace una revisión de los estudios sobre la enseñanza o el aprendizaje de las fracciones realizados en los períodos de 1960 a 1980; de 1980 a 1990; y de 1990 a 2005, sin duda esta revisión es un elemento importante que permite comprender el problema, dado que al hacer su recorrido esta autora da cuenta de la naturaleza de las primeras investigaciones sobre la enseñanza de las fracciones y la manera como se articulan con investigaciones más recientes (Cortina, Zuñiga y Visnovska, 2008, 2013; Cortina, 2014, 2020; Cortina y Juárez, 2017; Imvinkelried , 2020). También derivado del recorrido de Fandiño y las conclusiones de otros autores se puede considerar que “Las fracciones son entre los conceptos matemáticos, los más complejos que encuentran los niños en sus años de educación primaria” (Charalambous y Pitta-Pantazi, 2005, p. 233).

Frente a este problema se hace necesario conocer lo que se sabe acerca de este fenómeno, y lo que es más relevante, se requiere conocer lo que es posible hacer para mejorar los aprendizajes. En este sentido, el presente capítulo tiene por objetivo revisar los estudios que sobre la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones se ha realizado en nuestro contexto, el propósito es dar cuenta de los hallazgos de los investigadores respecto de las dificultades que los niños tienen para aprender las fracciones y aquellas que los profesores tienen para enseñarlas, para hacer tal revisión este capítulo se ha dividido en cuatro apartados.

En el primero se abordan las fracciones y su enseñanza como un campo problemático y en el segundo se describen las dificultades en la enseñanza y aprendizaje de las fracciones específicamente revisando investigaciones sobre la educación primaria. En el tercer apartado se revisan los resultados de pruebas estandarizadas con la finalidad de hacer un comparativo de México y otros países que nos permita ver la magnitud del problema; finalmente, en el cuarto apartado se muestran las fracciones en el contexto escolar mexicano y se analizan algunos supuestos sobre el aprendizaje y enseñanza de las fracciones.

1.1 LAS FRACCIONES, UNA MIRADA A LA PROBLEMÁTICA DESDE LA INVESTIGACIÓN

En el panorama de la investigación, la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones ha sido un objeto de estudio recurrente, sin embargo existen autores (Fandiño, 2011; Cortina et al.,2012; 2013; Ávila, 2019) que consideran que aún falta mucho por investigar sobre el tema, dado que tanto la investigación como los resultados de las evaluaciones (Pisa 2006 a 2018; Enlace 2006; Excale 2006 a 2013; Planea 2015 a 2018) muestran que los estudiantes tienen bajos niveles de comprensión de las fracciones. Este problema continúa a pesar del tiempo y de las propuestas de enseñanza surgidas de la investigación.

A decir de Valdemoros (2004), la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones aún tienen dificultades en la educación básica (Valdemoros, 2004; Perera y Valdemoros, 2007 y Pruzzo, 2012), en parte por la ruptura entre el conocimiento científico y el conocimiento didáctico (Ruíz, 2008) pareciera que el campo educativo se distingue por una bifurcación entre las concepciones de los investigadores y la actividad del maestro dentro y fuera del aula, dos rutas que en apariencia llevan al mismo lugar. En la conocida consigna "los profesores deben saber cómo actuar durante la enseñanza para obtener resultados óptimos en los alumnos", se pueden ver entre líneas dos aspectos polémicos, por una parte el concepto de "saber" va dirigido al docente desde la autoridad académica, quién le impone el "deber", pero con un visión restringida respecto del saber vinculado al segundo aspecto que evoca la jerarquía de ese saber, en otras palabras, se percibe a la investigación en una rango mayor, superior a la actividad docente, la investigación sería productora de conocimiento y el docente sólo un consumidor, un técnico de la educación, transmisor de conocimientos generados por los investigadores o expertos del currículo, lo cual crea un malestar e incluso resistencias.

En el caso de las fracciones hay un gran número de investigaciones que hacen referencia al concepto de fracción, pero de manera parcelada, es decir se focalizan en un solo aspecto del saber[1], por ejemplo ¿cómo enseñar el concepto parte-todo?, "crear innovaciones de enseñanza", o ¿cómo aprenden los niños el concepto desde cierta secuencia (desde el ángulo de la psicología)?, o el conocimiento que tienen los maestros en servicio o en formación sobre fracciones.

Investigaciones con mayor profundidad se focalizan en la complejidad del concepto y la manera de enseñarlo, muchas de estas investigaciones parecen ser inaccesibles al docente, ya sea por la parte material o por el lenguaje "académico" alejado de su quehacer docente, por esas razones es frecuente que los docentes desconozcan completamente dichos aportes, y cuando los conocen tienen dificultades para comprender conceptos tan complejos, como el megaconcepto de fracción. Como lo menciona Novoa (2009), el exceso de los discursos oculta con bastante frecuencia una gran pobreza de acciones en la práctica docente[2] y tal situación se evidencia cuando se trata a las fracciones de manera parca, se prefiere utilizar términos ya elaborados para que solo los memorice el alumno, para luego utilizarlo en problemas de una realidad ajena, excluyendo la experiencia en la práctica.

---

[1] Saber algo o hacer algo de manera racional es ser capaz de responder a las preguntas: "¿Por qué dice usted eso?" y "¿por qué hace usted eso?", dando razones —motivos— justificativas que pueden servir de validación del discurso o de la acción. En esta perspectiva, no basta hacer bien algo para hablar de "saber hacer"; es preciso que el actor sepa por qué hace las cosas de cierta manera. (Tardif, 2014)

[2] Se refiere a todo lo que se involucra, desde planes y programas, libro de texto, docentes.

Lo que hay detrás de estas dificultades en el campo de la educación matemática no tiene que ver sólo con el profesor o el alumno, sino también con la manera en la que se da el diálogo entre teoría y práctica, en palabras de James (1907, citado en González, 2001) "… las teorías llegan a ser instrumentos, no respuestas a enigmas, en las que podamos descansar (...) el pragmatismo suaviza todas las teorías, las hace flexibles y manejables" (p. 50). Utilizar la teoría como instrumento y no respuesta, requiere entonces analizar a profundidad de las dificultades que se presentan en la interacción de alumnos y profesores con el concepto de fracción, lo cual permitirá interpretar la diversidad de respuestas que los alumnos puedan dar, es decir las dificultades que coexisten con el conocimiento del contenido.

El conocimiento didáctico del contenido y el conocimiento curricular de los profesores (Reyes, 2015) es una dificultad latente que prevalece particularmente con las fracciones y se distingue por ser una mirada restringida sobre el conocimiento del contenido que deja un hueco en el conocimiento del currículo (a lo que apelan las autoridades) y otro más abismal en lo que al conocimiento didáctico del contenido se refiere[3] (que toma en cuenta las dificultades de la didáctica y el currículo) y en el análisis fenomenológico de las fracciones (dificultades con el contenido). Como lo menciona (Sosa, 2011) "el profesor debe entender lo que está enseñando y el porqué del contenido a enseñar " (p. 19) y dicha situación puede ser una dificultad o una posibilidad de mejora ya que, como lo menciona Tardif (2014) el saber no reside en el sujeto, sino en las razones públicas que un sujeto presenta para tratar de validar, en y a través de una argumentación, un pensamiento, una proposición, un acto, un medio, etc.

Entonces en este capítulo no se pretende dar un informe de las dificultades a lo largo de 40 años de investigación de las fracciones, sino analizar porqué o en qué causas o condiciones residen dichas dificultades, lo que permitirá fijar una ruta para la propuesta de enseñanza que en este trabajo se pretende analizar.

1.1.1 Las dificultades de los profesores versus las dificultades de los alumnos

Ya desde hace varios años Freudenthal y Kieren vislumbraban que fundamentalmente en los niveles básicos de educación, las fracciones eran uno de los

[3] En este trabajo analizaremos el conocimiento didáctico del contenido a la luz de la Educación Matemática Realista (EMR) Para una mejor comprensión se puede leer el artículo de Delgado y Cortina (2021)

contenidos matemáticos con más dificultades tanto para su aprendizaje como para su enseñanza (Perera y Valdemoros, 2009). No obstante que las dificultades mayores se han detectado en la educación básica, la literatura evidencia que la problemática se prolonga hasta el nivel profesional, incluidos los futuros docentes y otros profesiones que implican el estudio de las matemáticas, es por esta razón que si bien se analizan en este apartado los estudios referidos al nivel básico, se complementan con la revisión de estudios realizados con futuros profesores y en servicio en los que se evidencian las dificultades que los profesores tienen para construir el concepto de fracción (Salazar, 2009; Rojas, 2014; Valdemoros, 2010).

En esta línea, un estudio realizado por Behr y Harel (1993) mostró que los maestros carecían de una comprensión clara de los conceptos de parte-todo y partición, de igual forma Gairín et al. (2005) se centró en las fracciones para desarrollar y evaluar una experiencia de aula que completó con un estudio exploratorio mediante entrevistas a futuros maestros en las que les preguntaba qué nociones identificaban cuando veían el símbolo 5/7. Un 9% de respuestas fueron erróneas, pero lo más significativo es que en ninguna de las respuestas se mencionaron los significados medida, operador o razón.

Otro estudio es el de Imvinkelried (2020) quien seleccionó dos grupos de educación básica (1° y 4°) y otro de futuros profesores y se centró en el concepto de cociente para comparar las dificultades que tienen los niños en primaria y las que tienen los futuros profesores. Lo que se observó es que persiste el uso de la equipartición con el soporte principalmente de gráficos, limitándose a las fracciones unitarias. Al cambiar a un contexto discreto se complica su resolución; si bien a partir del esquema del modelo teórico desarrollado por Behr et al., (1983), se infiere que las interpretaciones medida y cociente-reparto de las fracciones se organizan de acuerdo con la relación parte-todo (Castro, 2015), se hace más ríspido el camino cuando se identifican fracciones en conjuntos de objetos discretos, en este sentido, encontraron que los errores de los maestros sobre las fracciones son similares a los de los niños de primaria (Lesh et al., 1988).

Si las dificultades son similares en alumnos y profesores, entonces es preciso preguntar ¿cómo se vincula la forma de enseñanza con las dificultades y errores de aprendizaje? Para tratar de responder se requiere analizar estudios sobre otras vertientes de la enseñanza y aprendizaje de las fracciones, que van desde el dominio conceptual, la forma de enseñanza, el mismo significado de las fracciones y su estructura, los materiales escolares, la perspectiva teórica sobre la que reposa el modelo educativo para fracciones, etcétera.

Las fracciones en el nivel básico

Al realizar una revisión de la literatura referida a la educación básica, hay concordancia con autores como Flores (2010); Pruzzo (2012); Zuñiga (2012); Butto (2013) y Cortina (2013, 2014, 2020) en que existe dificultad en la representación de fracciones impropias en contextos discretos y para reconocer la parte del todo. Esto significa que cuando se trabaja la fracción impropia bajo la concepción parte todo, no se le encuentra significado al hecho de que se tomen más partes de las que se han dividido la unidad (Ríos, 2007 y Pruzzo, 2012).

Otras investigaciones como la de Block (1987) mencionan que las fracciones eran un tema conflictivo para los niños y para los maestros con consecuencias para el aprendizaje de matemáticas en los niveles escolares siguientes. Su investigación consistió en el diseño y experimentación de situaciones didácticas con niños de 3° y 4° año de primaria[4]. Luego de aplicarlas observó que si bien los niños podían dividir una superficie o longitud entre dos o una potencia de dos (2, 4, 8), tenían dificultades cuando debían dividir entre 3. En las situaciones que se precisaba dividir entre tres, hubo dificultades en la comparación de superficies y de fracciones de superficies, en el momento de aceptar un pedazo mayor que un entero, les era difícil entender [5] que hay fracciones fuera de la unidad (impropias) y dudaban si crear una unidad nueva para tomar los que faltaban o simplemente evadirlos, la dificultad se agudizó cuando se debía representar gráficamente la fracción.

Estas dificultades también se observaron en la investigación de Valdemoros (1993, en Flores, 2010) donde observa dificultades en la resolución de problemas con fracciones para comprender la conservación referida (unidad) a la expresión a/b, es decir, para comprender que la reunión de ciertos pedazos iguales permiten recuperar el todo. Su dificultad estriba en que conciben a las partes de manera aislada y sin vinculación con el todo, para ellos cuando el todo es dividido deja de ser el mismo todo (Block y Solares, 2001).

[4] El estudio fue parte de una investigación más amplia del laboratorio de psicomatemática del DIE.

[5] En el sentido de entendimientos como sinónimo de comprensión, ya que la comprensión se refiere a la capacidad para entender las cosas, (Peréz, 2008) y lo pretendemos es identificar cómo estaban entendiendo los niños las fracciones.

En otra investigación de Valdemoros (2004), se ponen en evidencia las dificultades que tienen alumnos de 4º grado de educación básica en lo que concierne al significado cociente de la fracción. Cuando debían hacer la equipartición de líquidos no la hacían exhaustiva, sólo 5 de 37 niños lo resolvieron adecuadamente. En el trabajo con superficies y líquidos hay niños que niños evidencian sólo una concepción del reparto, es decir, al dividir una de las bebidas en ocho partes no usan líneas paralelas a la base de las jarras, sino que trazan diagonales como si en vez de indicar el reparto de líquidos, estuvieran subdividiendo un rectángulo en octavos.

Figura 1

Respuesta de Mariana: ½ y un octavo.

Nota: Si bien la respuesta puede ser correcta, no toma en cuenta el contexto del problema.

Asimismo en la investigación de Perera y Valdemoros (2009) realizada con alumnos de cuarto grado de primaria (9 años de edad)[6], encontraron dificultades en relación al significado intuitivo de cociente, la mayoría de los niños tuvieron dificultades para distribuir un todo entre un determinado número de personas. En su mayoría los alumnos repartieron en medios, como en el caso de Mariana y muchos de ellos no hicieron partición con exhaustividad. Respecto a las actividades ligadas con el significado de fracción como medida, la mayoría de los alumnos tuvieron dificultades para calcular las veces que cabe una longitud determinada en una magnitud dada. También presentaron conflictos para nombrar la parte fraccionaria que se generó al partir un todo en dos partes iguales. Además, no pudieron determinar 1 /2, 3 /4, 1 1 /4 de un todo.

[6] El propósito del estudio fue conocer los cambios que se producen en los pensamientos de los niños de 4° de primaria durante el desarrollo de un programa de enseñanza que recrea experiencias de su propia vida (Freudenthal, 1983).

Los anteriores, son escenarios coincidentes con algunos resultados obtenidos por Figueras (1988) quien subraya la problemática de recuperación del todo a partir de la parte; asimismo muestra que no sólo las fracciones, sino también los conceptos vinculados a ellas, son el tema que presenta mayores dificultades al finalizar la educación primaria (Ávila, Block, Carvajal, 2003).

1.1.2 Fracciones. Las dificultades, los errores

El estudio de Pruzzo (2012) con 433 alumnos de 1° de secundaria, en veintitrés escuelas secundarias de Buenos Aires y la Pampa Argentina, evidencia que el 66% de alumnos no ha construido por completo los aprendizajes sobre números fraccionarios, además se detectan lagunas de aprendizaje que debieron construirse en 4° de primaria, por ejemplo al enfrentarse con un reparto de cantidades discretas (16 alfajores), el 60 % de los alumnos no logró este aprendizaje, de igual forma en problemas de suma de fracciones de cantidades continuas, uno de los más elementales aprendizajes sobre fracciones, el 51% de los alumnos no alcanzó su aprendizaje, lo que provoca que los alumnos queden estancados en esquemas asimiladores previos. Incluso un alumno del mismo grado no construyó la concepción más básica de fracción prevista para cuarto de primaria, la relación parte todo.

En suma el 82 % de los alumnos no habían construido los atributos básicos que permiten la comparación de fracciones de uso frecuente entre sí y con números naturales, por ello se situaban en nivel de riesgo respecto a los aprendizajes prioritarios de las fracciones establecidas para 4º año de primaria. Hasta cierto punto esta situación refleja lo que Brousseau (en Cortina et al., 2012) denomina obstáculo didáctico, es decir, un aprendizaje puede no coadyuvar a otro y por el contrario puede ser contraproducente, limitando la extensión del mismo. Lo anterior se da con la equipartición (fracción como fracturador) y conduciría a “las fracciones propias únicamente” (Freudenthal, 1983) como medio principal para introducir el concepto de fracción, lo que trae consigo la complicación de tratar con fracciones impropias tal como se plasma en el libro de texto como dividir y tomar (Butto, 2013).

En esa línea temática, Butto (2013), realizó su investigación bajo el modelo de Kieren (1983) con un grupo de 26 niños de 6° de primaria en una escuela de la ciudad de México. El trabajo se dividió en tres etapas; un cuestionario inicial, entrevista clínica individual y la aplicación de una secuencia didáctica con las ideas básicas de fracción, de fraccionamiento en cantidades continuas y discretas, representación de fracciones en la recta numérica y no numérica, comprensión de lo que representan las fracciones propias e impropias y su representación gráfica y numérica.

En el cuestionario inicial y la entrevista clínica, los resultados reportaron que 16 de los 26 niños tienen dificultades para comprender las fracciones propias e impropias así como su ubicación en la recta numérica y 8 de estos 16 niños tienen las ideas básicas de fracción pero manifiestan dificultades para comprender la idea de equivalencia en la formación de la unidad con fraccionamientos continuo y discreto. También tienen dificultades para ubicar fracciones propias e impropias en la recta numérica; no perciben que la recta está numerada y cada numeración corresponde a una unidad, la otra mitad de los 16 alumnos no tienen claras las ideas básicas de partición, equivalencia y formación de la unidad, simplemente dividen y toman partes del todo, esto es, ven a la fracción tal como lo señala Freudenthal (1983), como fracturador, lo cual conduce únicamente a las fracciones propias

En la aplicación de la propuesta se observa la dificultad para ubicar fracciones propias e impropias en la recta numérica, dado que no se percibe que la recta está numerada y cada número entero marca una unidad. De manera recurrente se presentaron dificultades con el fraccionamiento en contexto discreto, al final de la aplicación se pudo aminorar, más no erradicar. A más de una década de la investigación de Butto (2013), Cortina (2008, 2012, 2014, 2020), señala que esas dificultades pueden ser resultado de las limitaciones de construir el concepto de fracción mediante la equipartición, parte de un todo, como fracturador.

En el estudio de Pérez (2008), se analizan los resultados de la prueba Excale 2005 del sexto de primaria, en ellos se observa que eventualmente sólo el 26% de los estudiantes son capaces de resolver correctamente tareas que implican la identificación de fracciones comunes equivalentes; el 23.1% puede ubicar fracciones comunes en la recta numérica y el 22.9% es capaz de dividir un entero en tres partes iguales; el 7.7% es capaz de comparar fracciones menores a la unidad con el mismo denominador y el 4.6% es capaz de ordenar fracciones menores a la unidad, todo esto bajo el criterio “p.≤.67”.(Backhof et al., 2006). A pesar de ser una información de más de 15 años los resultados poco se han modificado[7].

[7] En el apartado se abordan las pruebas estandarizadas a profundidad.

En el mismo contexto, la investigación de Zúñiga (2008) menciona que aunque los resultados de la misma prueba, en la cual el 35% o menos de los estudiantes logra resolver con éxito los problemas que tienen que ver con fracciones (con base en el criterio probabilístico p.≤.67), los resultados no revelan específicamente qué están comprendiendo los estudiantes, pero sí muestran un panorama general que sugiere que los aprendizajes en fracciones no se están alcanzando en la educación primaria.

En la misma línea de investigación el estudio de tipo exploratorio llevado a cabo por Cortina, Cardoso y Zuñiga (2012) con alumnos de sexto de primaria de 13 escuelas de contextos diversos de la ciudad de México y Chiapas, reconoce limitaciones mayores a las reportadas en la literatura, en la forma de interpretar a las fracciones como cantidades. Los resultados de este estudio[8], sugieren que hay un gran número de alumnos que egresan de la primaria con un conocimiento muy precario de las fracciones como números que cuantifican tamaños relativos, particularmente en las escuelas indígenas, rurales y urbanas vespertinas. El 30.4% del total de los alumnos participantes ni siquiera asoció de manera consistente la inscripción “1/2” con la noción de mitad. Dicha dificultad para concebir las fracciones como cantidades también se manifestó en un estudio realizado por Clarke y Roche (en Cortina et al., 2012) con 323 alumnos australianos de sexto grado.

Dichos investigadores reportaron que el 22.9% de los estudiantes no identifican correctamente ni dan una explicación adecuada sobre cuál de las siguientes fracciones representa la cantidad mayor: “3/8” y “7/8”. La comparación entre “1/2” y “5/8” resultó más difícil, sólo el 60% de los alumnos identifica “5/8” como la mayor y lo justificó adecuadamente (Cortina et al. 2012). En otro estudio de Cortina (2013) se deja ver que la problemática se extiende a nivel internacional, a niños de sexto de primaria (10 y 12 años) de países iberoamericanos se les dificulta reconocer el lugar que le corresponde a una fracción en la recta numérica. En México, Backhoff, (et al. 2006) reportan que el 76.9% de los alumnos de sexto grado no cumplieron con el criterio probabilístico “P≥.67” de responder correctamente un reactivo que implicaba identificar el lugar que le corresponde a una fracción como “3/5” en la recta numérica

[8] Se aplicaron 297 cuestionarios, mediante un instrumento de seis reactivos donde se pedía a los alumnos que compararan cantidades de leche en dos cartones dibujados; las fracciones a comparar fueron: 1/3 vs. 1/2, 3/4 vs. 1/4, 1/3 vs. 2/3, 2/4 vs. 1/2, 4/9 vs. 3/4 y 5/10 vs. 1/2. Las comparaciones podrían basarse en evaluar si las diferentes fracciones representan cantidades mayores o menores o igual a ½. También se incluyó un reactivo en el que los estudiantes tenían que indicar qué fracción de 5/4 y 8/9 indicaba la mayor cantidad de leche (Cortina et al., 2013)

1.2. LAS PRUEBAS ESTANDARIZADAS

En las primeras décadas del siglo XX se inició en el mundo el desarrollo de tests para la evaluación individual de capacidades humanas y para la selección o clasificación de estudiantes en las escuelas. No obstante en las últimas décadas se han reconsiderado ciertas aproximaciones a esa manera de evaluar y la luz de los avances en las ciencias cognitivas, la medición educativa y los métodos de análisis estadístico se han analizado prácticas de evaluación educativa a gran escala para mejorar su diseño, su implementación y el uso válido de los resultados (Pellegrino, Chudowsky y Glaser, 2001; Mislevy, 2006; Simon, Ercikan, y Rousseau, 2013, en INEE, 2015). Con ello se dio paso a una era de evaluaciones estandarizadas que permiten conocer el aprendizaje que logran grupos de estudiantes de distintos países, principalmente en lectura, matemáticas y ciencias.

Aunque en 1995 México tomó parte en la aplicación de pruebas estandarizadas a nivel internacional en matemáticas y ciencias en el programa TIMSS, poco después se retiró, lo que explica que hasta antes del año 2000 muy poco se supiera sobre el estado global del aprendizaje del alumnado mexicano (Cortina, 2006a), otro hecho importante es que 8 años antes se firmaba el Acuerdo Nacional para la Modernización de la Educación Básica (1992), que era parte de una reforma a gran escala.

En la historia del sistema educativo mexicano, se aprecian ciertos esfuerzos para reformas pedagógicas que toman como referencia a los Estados Unidos de América. Un ejemplo de ello es el movimiento nacional de reforma que en Estados Unidos se desencadenó a partir de la publicación del estudio *A Nation at Risk* (1983; Una nación en riesgo) durante el primer periodo de gobierno del presidente Ronald Reagan. Este movimiento implicó la instrumentación a gran escala de políticas de mejoramiento educativo coherentes con los posicionamientos de la psicología experimental, entre las que se contó la elaboración de estándares educativos y la conducción extensiva de pruebas estandarizadas de desempeño.

Otras experiencias en el diseño y aplicación de pruebas estandarizadas es la prueba PISA por sus siglas en inglés Programme for International Student Assessment (Programa Internacional para la Evaluación del Alumnado), de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE). Esta prueba se aplica cada tres años y desde la *psicometría*[9] evalúa el desempeño global del alumnado[10] en tres áreas disciplinares básicas: lectura, ciencias y matemáticas.

Los resultados de las pruebas PISA 2000 y 2003 sugieren que en términos del aprendizaje de las matemáticas, los logros de la reforma han sido escasos (Cortina, 2006a) no solo en México sino a nivel mundial. En Estados Unidos los resultados de la prueba PISA en el 2000 estuvieron por debajo de las metas que se establecieron para el mediano plazo, lograr que el estudiantado estadounidense estuviera en el primer lugar mundial en matemáticas y ciencia para el año 2000. Algo similar se evidencia con el informe PISA (2004) en España en el caso concreto de los números racionales, desde estudios como los de Instituto Nacional de Calidad y Evaluación INCE (2002) ya advertían en España las deficiencias de los alumnos en este tópico matemático (Gairín y Muñoz, 2005)

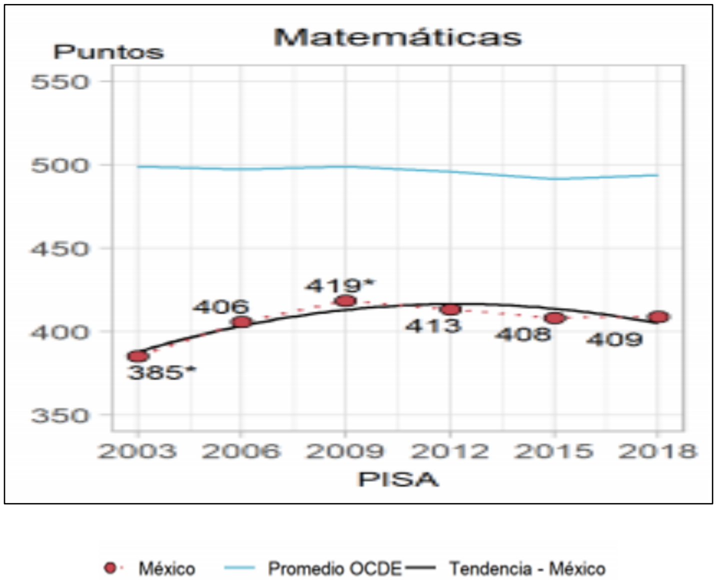
En México la prueba PISA de 2003 muestra una situación poco alentadora en lo que toca a los conocimientos y habilidades matemáticas, la mayoría de los alumnos se ubicaron en el nivel I (insuficiente) con un puntaje promedio de 385 que ubicó a México en el último lugar entre los países integrantes de la OCDE y en el lugar 37 de los 40 países participantes. Esta situación evidenciaba que el sistema educativo mexicano poseía una capacidad limitada para formar estudiantes con competencias óptimas de matematización, menos del 0.1% del estudiantado se ubicó en el Nivel 6 (Cortina, 2006a). Cabe además resaltar que en el transcurso de los años este escenario poco ha cambiado, si bien se dio un crecimiento favorable hasta el 2009, como se puede observar en la siguiente gráfica, posteriormente aparece una tendencia decreciente y con perspectivas negativas.

[9] Cobb (2004, cit. Por Cortina, 2006) explica que la psicometría concibe al estudiantado como un solo colectivo (o “individuo colectivo”) y usa métodos en los que estadísticamente se agregan los resultados de alumnos individuales, se hacen inferencias respecto a qué sabe, cuánto sabe y qué afecta a su aprendizaje. Estos posicionamientos implican además entender el aprendizaje como atributo psicológico y como un fenómeno linealmente cuantificable.

[10] La prueba PISA evalúa a la población de jóvenes de entre 15 años, 3 meses y 16 años, 2 meses de edad inscritos en un sistema educativo y no tienen un rezago escolar importante (más de dos años). Según su desempeño, a cada estudiante se le ubica en una escala de 7 niveles 0-6, con valor máximo de 700 puntos, el Nivel 0 es el más bajo (menos de 358 puntos) y el Nivel 6, el más alto (más de 668 puntos); los ítems buscan evidenciar la capacidad de los estudiantes para *matematizar* situaciones. Matematizar se entiende como el proceso conceptual que implica interpretar cuantitativamente una situación y lidiar con ella exitosamente, lo que más se valora son las capacidades del alumnado para lidiar de manera relativamente compleja con situaciones nuevas y difíciles, haciendo uso de conocimientos matemáticos.

Figura 2

Desempeño de matemáticas. Prueba PISA 2003-2018.



Fuente: OCDE.PISA (2018)

En el examen PISA 2019, los países de la OCDE en su conjunto obtienen un promedio de 489 puntos mientras que en México el resultado es de 409 puntos para ubicarse mayoritariamente en el nivel 1 de desempeño global (menos de 421 puntos pero más de 358). De 2003 a 2018 México se ubica en el mismo nivel 1 a pesar del amplio número de investigaciones y propuestas de enseñanza y de acuerdo con los criterios psicométricos especificados en el documento PISA-Internacional, los alumnos ubicados en los niveles 0 y 1 tienen pocas posibilidades de participar exitosamente en las sociedades modernas de conocimiento, estos alumnos estarían marginados del mercado laboral globalizado y tecnologizado (Pérez, 2008).

El promedio del porcentaje de estudiantes con bajo nivel de aprovechamiento y competencias en matemáticas es de 24% para la OCDE y más de la mitad, 56%, para el caso de México sólo el 1% de los estudiantes obtuvo un nivel de competencia superior en matemáticas, mientras que los países asiáticos como China o Singapur tienen niveles cercanos o superiores a 40 por ciento; aquí cabría la pregunta ¿qué prácticas educativas son frecuentes en los países que obtienen mejores resultados en pruebas como la de PISA?

Ahora, dentro de los estándares básicos de competencias en Matemáticas planteados por las pruebas estandarizadas internacionales y nacionales (PISA, ENLACE[11], EXCALE, PLANEA), se considera a las fracciones como uno de los estándares del pensamiento numérico con el mayor porcentaje de dificultades, lo cual se evidencia en los resultados del Examen de la Calidad y el Logro Educativo para sexto de primaria[12] (EXCALE-06), donde se consideran algunos ítems relacionados con este tipo de números en la educación básica (6° de primaria y 3° de secundaria), por ejemplo entre los conocimientos y habilidades relacionados con el concepto de fracción que fueron evaluados y que el plan de estudios de primer grado de secundaria supone que los alumnos ya dominan al ingresar a este nivel educativo, se encuentra la comparación y orden de los números fraccionarios y decimales. En la prueba EXCALE- 06 del 2005 sólo el 34% de los estudiantes evaluados fueron capaces de resolver correctamente ítems que implican comparar fracciones menores a la unidad con el mismo numerador como el siguiente.

Figura 3

Reactivo de la prueba EXCALE-06

Carlos y Raúl compraron cada uno, un metro de cordón para jugar con sus trompos,
Carlos utilizó 2/3 de su cordón y Raúl ocupó 2/5.
A partir de esta información.
¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

A. Carlos ocupó más cordón que Raúl

B. Carlos ocupó menos de ½ metro de cordón

C. Raúl ocupó más de ½ metro de cordón

D. Raúl ocupó más cordón que Carlos

RESPUESTA CORRECTA

Nota. Reactivo muestra, (Backhoff, E., et al 2006), tomado de (Pérez, 2008).

[11] En México, las evaluaciones de logro con alcance nacional en educación básica son relativamente recientes. La prueba ENLACE fue diseñada para aplicarse de manera censal y tuvo como propósito evaluar el rendimiento de los estudiantes de tercero de primaria a tercero de secundaria y del último grado de media superior en Español, Matemáticas y una tercera asignatura seleccionada cada año (por ejemplo Ciencias). La intención original se transformó en la rendición de cuentas de escuelas y docentes, a la que se asociaron propósitos no previstos y consecuencias como la publicación de rankings escolares, el otorgamiento de estímulos económicos a los docentes y la premiación a los alumnos con mejores puntuaciones en este tipo de exámenes. (INEE, 2015).

[12] Los Exámenes para la Calidad y Logro Educativos (EXCALE) son pruebas criteriales y con un diseño matricial, estaban alineadas al currículum nacional, lo que permitía evaluar un dominio amplio de contenidos de los programas de estudio evaluados al final de cada nivel escolar, 3° de preescolar Excale-03 6° de primaria EXCALE-06 y 3° de secundaria EXCALE-09 (INNE, 2015).

Una respuesta razonada en este ítem implica que el estudiante reconozca que entre más grande sea el denominador de una fracción unitaria, más pequeña será la fracción y entre más pequeño el denominador más grande será la fracción; por lo que ante dos fracciones con iguales numeradores la que tenga por denominador el número más pequeño será la fracción más grande (Pérez, 2008). Aunque esta prueba no informa los *entendimientos* que sí logran desarrollar los estudiantes y cómo pueden ser aprovechados en la enseñanza, sí lo hace respecto del conocimiento que ha adquirido el estudiantado (Pérez, 2008), y son un referente para indagar sobre dichos razonamientos y para reflexionar sobre la problemática para comparar con el mismo EXCALE- 06 del 2013 y otras pruebas como caso de PLANEA los diferentes aprendizajes logrados.

De forma particular, los datos reportados por Excale-06 del 2013 muestran que el 50% de los alumnos mexicanos logran identificar la representación numérica de un número fraccionario dado en forma gráfica, pero sólo el 33% de los estudiantes de sexto grado de primaria son capaces de comparar números fraccionarios; el 36% puede resolver problemas que implican una multiplicación de números fraccionarios por naturales y el 28% es capaz de dividir un número fraccionario entre un número natural; el 22% es capaz de resolver un problema aditivo con números fraccionarios (INNE, 2013) .

En suma, de acuerdo al (INNE, 2013) el 38% de los estudiantes que termina la primaria no tiene los conocimientos y habilidades mínimas en matemáticas que se establecen en el currículum nacional; mientras que apenas un 36% adquiere estas competencias en su nivel más básico y sólo el 8% se localiza en un nivel avanzado. En lo concerniente al estado de Zacatecas México, hay una variación mínima nada alentadora pues los resultados muestran un decremento, el 34% de los estudiantes se encuentran en el nivel por debajo de lo básico y sólo el 26 % alcanzaron el nivel medio.

De igual forma, al realizar un comparativo con los resultados Excale-06 de 2005, 2009 y 2013 a escala nacional y por entidad, Zacatecas obtiene un promedio de 500 puntos, se observa un incremento mínimo en 2009, pero en 2013 disminuye en 9 puntos y en el 2005 cuando se incrementa en 2 puntos el promedio nacional, Zacatecas tiene un avance mínimo de 6 puntos en relación a 2009 lo que permite deducir que en matemáticas se mantienen las dificultades.

Al comparar estos resultados con lo que registra la investigación de Pérez (2008) y Zuñiga (2008) se evidencia que los alumnos siguen manifestando mayores dificultades en fracciones, números decimales, conversión de unidades, porcentajes, e interpretación de gráficas. En esta investigación se señala que el 74% de los alumnos de sexto grado de primaria se ubican en los dos niveles de más bajo desempeño,[13] un 4.3 % más bajo que en el 2006. Además los resultados de esta prueba sugieren que más de la mitad de los estudiantes de tercero de secundaria siguen presentando carencias graves en sus habilidades y conocimientos matemáticos. Sin duda, estos resultados reflejan la pobreza de los aprendizajes logrados durante el paso por la primaria, pero de manera tangible los resultados de los alumnos de tercero de secundaria son más bajos que los de sexto de primaria (Backhoff et al., 2006).

La prueba estandarizada más reciente, es la del Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA), 2015-2018 para la cual el INEE consideró como antecedente el análisis de las fortalezas y limitaciones de las pruebas EXCALE y ENLACE[14], la prueba PLANEA tenía la finalidad de conocer qué tanto los estudiantes mexicanos dominan aprendizajes clave, en el 2018 se aplicó a una muestra de 104, 973 estudiantes de sexto de primaria la prueba relativa a Lenguaje y Comunicación y Matemáticas. Para fines de este estudio, el análisis se centrará en los resultados obtenidos en *Sentido numérico y pensamiento algebraico* que ocuparon 71 de los 147 reactivos de la prueba en matemáticas con una confiabilidad de 0.905.

Los resultados de PLANEA se expresan de dos maneras: a) en una escala de 200 a 800 puntos, con una media de 500 puntos que se estableció a partir de 2015; b) en cuatro niveles de logro, Nivel 1 dominio insuficiente; Nivel II dominio básico; Nivel III dominio satisfactorio y Nivel IV dominio sobresaliente. En 2015 se obtuvo una puntuación nacional promedio de 500 puntos y en 2018 de 503 puntos, como se puede apreciar hubo un incremento poco o nulo significativamente. Por su parte, el Estado de Zacatecas se ubicó entre los tres estados del país con menores incrementos o mejor dicho entre los estados con incrementos negativos, en 2018 tuvo 16 puntos menos que en 2015, es decir en 2015 obtuvo 505 puntos y en 2018 sólo 490 puntos.

Con respecto a las fracciones, que se encuentran dentro del eje *Sentido numérico y pensamiento algebraico,* en los niveles de logro alcanzados por estos estudiantes en la prueba PLANEA los resultados a nivel nacional se pueden observar en la siguiente tabla.

---

[13] En el caso de la prueba Excale 2005 (Backhoff, E., Andrade, E., Sánchez, A., Peon, M., y Bouzas, A., 2006), se clasificó a los alumnos en cuatro niveles de desempeño: Avanzado, Medio, Básico y Por debajo del básico.

[14] Se atendieron las recomendaciones derivadas de un estudio que se llevó a cabo a petición del INEE durante 2013 y 2014 por un grupo de especialistas de diferentes instituciones. (Martínez, 2015)

Tabla 1

Prueba PLANEA 2018. Niveles de logro de estudiantes de sexto de primaria

Nivel de logro	Porcentaje de estudiantes a nivel nacional	Actividades de acuerdo al nivel de logro
Nivel I	59.1%	Los estudiantes logran escribir y comparar números naturales sin ceros intermedios.
Nivel II	17.9%	Identificar una fracción en un modelo continuo
Nivel III	14.8%	Identificar una fracción en un modelo discreto, comparar fracciones y multiplicarlas por un número natural; usar las fracciones para expresar una división, identificar el dividendo o divisor, así como
Nivel IV	8.2%	Resolver problemas aditivos con números naturales, decimales y fraccionarios que involucran dos o más transformaciones y los que implican dividir o multiplicar números fraccionarios por naturales; ubicar una fracción en la recta numérica; usar las fracciones para expresar el resultado de un reparto; identificar la sucesión

Fuente: Planea (2018), p.13.

Lo que estos resultados muestran es la necesidad de poner atención en los números fraccionarios, si bien las pruebas estandarizadas no revelan específicamente lo que comprenden los estudiantes, sí pueden mostrar un horizonte que sugiere que los aprendizajes en fracciones no se están alcanzando, ya que un 59.1 % de los estudiantes no lograron resolver con éxito los problemas que tienen que ver con las fracciones. Esta información se puede tomar como referencia para ver lo que está sucediendo al interior de las aulas y buscar formas de apoyar a los profesores y estudiantes para que se avance en su comprensión.

Ante este panorama, se requiere explorar nuevas vías para provocar el mejoramiento educativo en matemáticas, lo que de acuerdo con Cortina (2006), implica enormes esfuerzos conceptuales y de investigación, sin perder de vista las experiencias en otros países.

1.3 LAS FRACCIONES EN EL CONTEXTO ESCOLAR MEXICANO

Desde hace mucho tiempo el aprendizaje de fracciones se ha reconocido como un desafío para el sistema educativo mexicano así como para el de muchos otros países, la importancia de este hecho se puede comprender desde dos sentidos; en primer instancia en la relevancia de su conocimiento como predictor de otros conceptos como los propios del álgebra (Siegler et al., 2011; 2012) y en los resultado poco favorables que se han evidenciado en las pruebas estandarizadas.

Ante las dificultades que presentan los estudiantes se ha generado una discusión que se pregunta si son verdaderamente importantes como para mantener su presencia en el currículo escolar, importancia que se ha investigado y validado con estudios como los de Siegler et al. (2011; 2012) en los que se evidencia que el conocimiento que los estudiantes construyen sobre las fracciones y la división en la escuela primaria es un predictor confiable para inferir lo que pasará con sus conocimientos futuros sobre álgebra en particular y sobre el rendimiento general en matemáticas en la escuela secundaria[15]. Asimismo, la teoría alternativa del desarrollo numérico (número enteros y fraccionarios) que propone (Siegler et al., 2011) enfatiza una continuidad clave del desarrollo en todos los tipos de números reales. Esta teoría propone que el desarrollo numérico es en esencia un proceso de ampliación progresiva de la clase de números y de aprender las funciones que conectan ese conjunto cada vez más amplio y variado de números con sus magnitudes, con ello rompe con la idea (central) de los modelos de números enteros (por ejemplo que al multiplicar dos números siempre será mayor la cantidad, que al dividir dos números será menor o el tener sucesores únicos) que no son aplicables para los números en general.

Para la mayoría de los niños, las fracciones proporcionarán la primera oportunidad de aprender que varias propiedades invariables de los enteros no son verdaderas para todos los números; pese a esta conjetura, en la actual escenario educativo dicha habilidad matemática no se ha desarrollado, el dominio de las fracciones (incluidos los decimales y el porcentaje) es raquítico. Por el contrario, esta mirada poco se ha modificado, prevalece el referente 'básico' del conocimiento sobre números enteros para la comprensión del desarrollo numérico, es decir, los programas de estudio se han centrado en el desarrollo

---

[15] El estudio longitudinal de 6 años se realizó con niños de 10 años, en dos muestras, una del Reino Unido y otra de EE. UU; la conjetura inicial era que el conocimiento de las fracciones de los niños de 10 años predeciría su conocimiento de álgebra y el rendimiento general en matemáticas en la escuela secundaria (a los 16 años), más allá de los efectos de la capacidad intelectual general, de otros conocimientos matemáticos y de sus antecedentes familiares.

del conocimiento sobre números enteros, relegando el desarrollo del conocimiento sobre otros tipos de números, como fracciones y números negativos, a un estado secundario (Siegler et al., 2011).

Esta perspectiva centrada en los números enteros puede verse en los programas de estudio mexicanos, a partir del tercero o cuarto grado de primaria se propone abordar a las fracciones de manera formal (SEP, 2011) pero a menudo las propuestas de enseñanza en el aula no profundizan en los aspectos ya mencionados, maestros y alumnos se basan en gran medida en la comprensión inicial de los números enteros para dar sentido a los números fraccionarios, (Vamakoussi y Vosniadou, 2010, en Siegler et al., 2011) lo que genera una confusión entre las propiedades de las fracciones y los números enteros que implica memorizar algoritmos aritméticos de fracciones sin comprender las magnitudes de las fracciones que se manipulan, situación que se extiende hasta el nivel secundario. En palabras de Freudenthal (1983) hay un aparente dominio de la fracción que no toma en cuenta su significado ni lo que se puede hacer con ellas. En el mismo sentido, Kerslake (en Stelzer et al., 2016) señala que un buen número de niños eran capaces de resolver problemas de adición con fracciones pero no podían explicar las bases conceptuales del procedimiento utilizado.

En suma, la realidad educativa demanda una conexión entre la investigación y el aula con la finalidad de ofrecer a los profesores alternativas de enseñanza que ayuden a sus estudiantes a mejorar su comprensión de las fracciones y a su vez a la comprensión de otras nociones matemáticas importantes. En palabras de Siegler et al. (2011), la enseñanza de fracciones debe reconocerse como de importancia crítica y mejorarse antes de que se pueda esperar un aumento en el rendimiento de los estudiantes en álgebra.

Por último en el contexto de la educación básica se ha estudiado el proceso general de enseñanza aprendizaje y se ha juzgado la calidad de la enseñanza basándose solamente en un constructo de fracción, el ligado a los números racionales, esto es, al modelo que plantea la fracción como número racional, pero pocas veces se ha puesto la atención en la posibilidad de desplegar la enseñanza tomando como referente un constructo o modelo de fracción que ponga en el centro su condición de número más allá de la estructura, esto significa seguir la formación de los estudiantes que muestran ese bajo desempeño desde otra mirada (Cortina, 2014), cambiar la perspectiva permitiría reconocer la necesidad de investigar sobre los efectos de las innovaciones propuestas para evitar transformar a los alumnos sólo en sujetos experimentales de teorías cuyos efectos se suponen, pero no se han comprobado.

1.3.1 Estudios sobre los materiales escolares

Es pertinente recuperar las lecciones del pasado si el interés no es la innovación sino la mejora de la enseñanza (Ávila, 2019), con estas palabras se resalta la importancia de analizar otros materiales a lo largo del tiempo para comprender cómo se han dado las propuestas de enseñanza desde tanto en el currículo mexicano como en el libro de texto y analizar su pertinencia para la mayoría de los estudiantes.

Lo conducente es iniciar con una alerta sobre el currículo, tomaremos la idea de D'Amore y Fandiño (2014) quienes sostienen que una actitud típica del mundo de la didáctica activa aunque no de la investigación, es considerar que los currículos nacionales no están a la altura de la situación actual y como consecuencia, miran con admiración los currículos de otros países, es decir, no debemos confiar ingenuamente y de forma acrítica en que la aplicación de un currículo extranjero con resultado óptimos tendrá los mismos efectos en otro país, no se trata de juzgar, pero sí el ser cuidadosos, analizar las metodologías, las ideas y los conceptos para que se tornen herramientas para el docente y no falsas ilusiones o nuevas recetas.

En tal sentido a continuación se revisa una serie de estudios que tratan el análisis del currículo y los materiales que lo acompañan, en función de la incidencia que tienen en los profesores, ya sea porque facilitan o dificultan la realización de ciertas actividades al ofrecer, o no, sugerencias para la enseñanza y el soporte material para llevarlas a cabo (Ávila, 2019)

Ávila (2019) realizó una investigación documental cuyo objetivo fue poner de relieve los aspectos valiosos y las debilidades de tres propuestas curriculares para la enseñanza de las fracciones, (1960,1972 y 1993) para ello analizó los programas de estudio y los libros de texto de la educación primaria mexicana de los años 1960, 1972 y 1993. El análisis se realizó mediante la identificación de los subconstructos del número racional (Kieren, 1983) así como el tránsito entre el conocimiento informal (etnomatemático), conocimiento intuitivo, al técnico-simbólico.

Propuesta de 1960, lo didáctico-intuitivo.

Para Ávila (2019), este currículo privilegiaba el lenguaje descriptivo, se daba la definición acompañada de algunas imágenes sin que los alumnos produjeran suficientes intuiciones para apoyar la comprensión. Las fracciones se incluían desde el primero hasta el sexto grado de primaria, su estudio se centraba en el significado parte-todo y aunque la definición de fracción no era central, la atención se focaliza en las definiciones para llevar a cabo el procedimiento.

En lo que se refiere a los términos de la fracción (trabajados con la representación a/b, parte de algo que se ha fracturado), el numerador designaba las partes que se toman de un entero y el denominador las partes en las que se fractura el entero. También se incluían las fracciones propias e impropias y los procedimientos para ordenar y operar con ellas, no obstante, se hacía sin tener un soporte experiencial. El objetivo era alcanzar el manejo simbólico y culminar con la idea de que al multiplicar el numerador y el denominador de una fracción por el mismo número se obtienen fracciones equivalentes (Ávila, 2019). Esta práctica de enseñanza prevalece en algunos salones de clase y se transforma en un obstáculo didáctico (Brosseau, 1987) al querer trabajar con otros significados de la fracción.

En relación al libro de texto[16] se observa que de grado en grado se iba complejizando, en los dos primeros grados se incluían más imágenes (conocimiento informal) y a partir de tercer grado se utilizaba el lenguaje técnico simbólico. Cómo se puede apreciar en la siguiente figura, las dos primeras páginas corresponden al libro de texto de texto de tercer grado (SEP, 1960c, pp. 54-55) y muestran el tránsito al nivel técnico simbólico, la última página corresponde a una lección de libro de sexto año, (*Aritmética y Geometría,* SEP, 1970, p. 55) que muestra el uso integral del lenguaje simbólico (Ávila 2019).

[16] El libro de sexto año, de 22 páginas dedicadas a las fracciones (sólo 6 contienen imágenes, todas similares a las utilizadas en los grados precedentes), se asemeja más a un compendio del contenido de toda la primaria que a un libro de texto de aritmética y geometría elemental.

Figura 4.

Libro de texto de tercero y sexto de primaria de 1960, (en Ávila, 2019)

$\frac{3}{4} =$ $\frac{6}{8} =$

= 1 entero

$= \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{8}$

Solamente puedes sumar o restar fracciones que tengan un **mismo denominador.** Por eso tienes que sumar o restar:

$\frac{\text{medios}}{2} + \frac{\text{medios}}{2} = \frac{\text{medios}}{2}$ $\frac{\text{medios}}{2} - \frac{\text{medios}}{2} = \frac{\text{medios}}{2}$

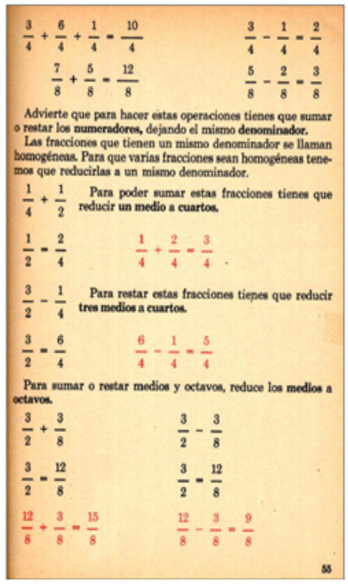
$\frac{\text{cuartos}}{4} + \frac{\text{cuartos}}{4} = \frac{\text{cuartos}}{4}$ $\frac{\text{cuartos}}{4} - \frac{\text{cuartos}}{4} = \frac{\text{cuartos}}{4}$

$\frac{\text{octavos}}{8} + \frac{\text{octavos}}{8} = \frac{\text{octavos}}{8}$ $\frac{\text{octavos}}{8} - \frac{\text{octavos}}{8} = \frac{\text{octavos}}{8}$

Ejemplos:

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{2}{2} = \frac{4}{2}$ $\frac{5}{2} - \frac{3}{2} = \frac{2}{2}$

54



$\frac{3}{4} + \frac{6}{4} + \frac{1}{4} = \frac{10}{4}$ $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$

$\frac{7}{8} + \frac{5}{8} = \frac{12}{8}$ $\frac{5}{8} - \frac{2}{8} = \frac{3}{8}$

Advierte que para hacer estas operaciones tienes que sumar o restar los **numeradores,** dejando el mismo **denominador.**
Las fracciones que tienen un mismo denominador se llaman homogéneas. Para que varias fracciones sean homogéneas tenemos que reducirlas a un mismo denominador.

$\frac{1}{4} + \frac{1}{2}$ Para poder sumar estas fracciones tienes que **reducir un medio a cuartos.**

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$

$\frac{3}{2} - \frac{1}{4}$ Para restar estas fracciones tienes que reducir **tres medios a cuartos.**

$\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$ $\frac{6}{4} - \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

Para sumar o restar medios y octavos, reduce los **medios a octavos.**

$\frac{3}{2} + \frac{3}{8}$ $\frac{3}{2} - \frac{3}{8}$

$\frac{3}{2} = \frac{12}{8}$ $\frac{3}{2} = \frac{12}{8}$

$\frac{12}{8} + \frac{3}{8} = \frac{15}{8}$ $\frac{12}{8} - \frac{3}{8} = \frac{9}{8}$

55

En la multiplicación de fracciones comunes se presentan dos casos: que la multiplicación equivalga a una adición abreviada de varios números, o que se trate de obtener una o varias partes de un número.

En el primer caso la operación se efectúa de esta manera:

Ejemplo 1 $3 \times \frac{1}{2} = \frac{3 \times 1}{2} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ (Esta operación expresa 3 veces $\frac{1}{2}$)

Ejemplo 2 $5 \times \frac{2}{3} = \frac{5 \times 2}{3} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$ (5 veces $\frac{2}{3}$)

Se multiplica el entero por el numerador y al producto se le pone el mismo denominador.

En el segundo caso se procede así:

$$\frac{2}{3} \times 12 = \frac{2 \times 12}{3} = \frac{24}{3} = 8$$

Esta operación expresa que se trata de obtener los $\frac{2}{3}$ de 12, y puede realizarse mentalmente pensando así:

$\frac{1}{3}$ de 12 es 4;

luego $\frac{2}{3}$ de 12 son 8.

Es muy importante entender que el resultado de una multiplicación no es siempre mayor que los factores, como sucede en la multiplicación de enteros.
Una propiedad de la multiplicación, que puede aplicarse cuando se opera con fracciones comunes, dice: El orden de los factores no altera el producto.

Ejemplo

$$24 \times \frac{3}{4} = \frac{24 \times 3}{4} = \frac{72}{4} = 18$$

$$\frac{3}{4} \times 24 = \frac{3 \times 24}{4} = \frac{72}{4} = 18$$

55

Empero, debe recordarse que en una reforma no todo se elimina ni todo es nuevo, muchas prácticas educativas tienen historia y son incorporadas en la formación docente. Después de tres reformas hay prácticas arraigadas, por ejemplo en el caso de la enseñanza de las fracciones, el abuso de la equipartición como sinónimo de fracción y tener como objetivo la mecanización del procedimiento; pero parte de ello se debe a la poca certeza sobre la manera de organizar la enseñanza de las fracciones y cómo estructurar una enseñanza que tome en cuenta la naturaleza del objeto matemático y no una simple transferencia que resultó óptima en otro espacio y tiempo. Es ilusorio creer que al transferir un saber a otro ser, automáticamente éste aprenderá las bases mismas de la matemática, aprendería a "razonar", a usar correctamente las deducciones y a demostrar (D'Amore y Fandiño, 1995, en Fandiño 2011).

Propuesta 1972, la matemática moderna

La noción de fracción en esta propuesta basada en la teoría de conjuntos[17] se enmarca en la idea de número racional como concepto constituido por los subconstructos

---

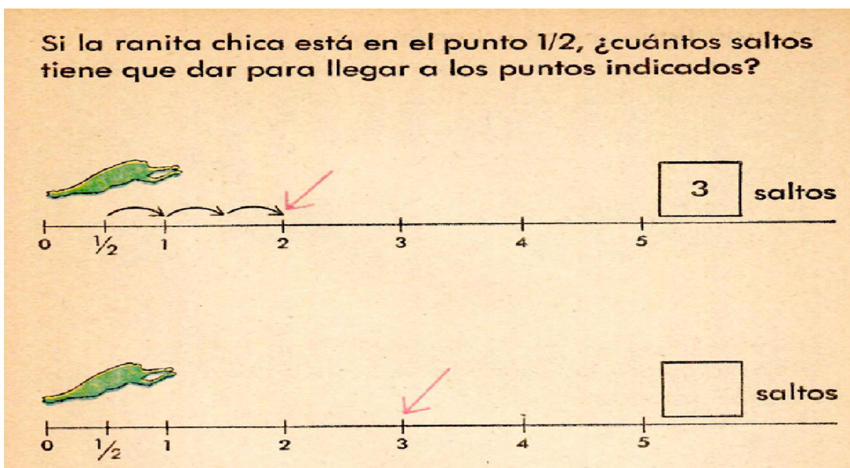
[17] La matemática moderna tuvo como base la "teoría de conjuntos" no demasiado formal y ciertamente no axiomática. Se anticipa que la matemática moderna fue un fracaso en todo el mundo (Kline,

medida, cociente, razón y operador multiplicativo, pero su tratamiento no fue sistemático y el paso por el nivel intuitivo le otorgó demasiada confianza al significado parte-todo (Ávila, 2019).

Había una ambivalencia entre quebrado y fracción, como parte de una colección de objetos, el denominador representa el número partes del entero y el numerador la cantidad de partes que se toman del entero, las dificultades se generaban al intentar pensar a las fracciones como complemento de los números enteros, es decir, se inicia su enseñanza a partir de las reglas de los naturales; los conjuntos se pueden contar asignando números a los objetos en una forma 1: 1, y el número final en un conteo se puede usar para representar la cardinalidad del conjunto que se contó (Siegler et al., 2011). Además se agrega la recta numérica, en la cual la fracción también se basa en las regularidades de los números naturales.

Figura 5

Introducción a las fracciones en la recta numérica. Segundo año. SEP (19721a, p. 107, en Ávila 2019, p. 38)



En la figura anterior se puede pensar que ½ tiene un sucesor establecido que es un entero, entonces los niños están predispuestos a asumir que cada número tiene un sucesor único, situación que dificulta aprender a pensar en las fracciones como entidades numéricas.

1973); se reveló del todo innatural, forzada, sin resultados significativos, ya que la capacidad de resolver problemas incluso banales era imposible de alcanzar por esta vía. (D´ Amore, et al., 2014). En el contexto Mexicano tuvieron que pasar varios años más para compartir dichas revelaciones.

Figura 6

Matemáticas. Quinto grado. SEP, (1972c, p. 41 en Ávila, 2019 p. 45)

$$\frac{1}{10} = \frac{}{} = \frac{}{} = \frac{4}{40} = \frac{}{} = \frac{}{} = \frac{}{} = \frac{}{} = \frac{}{} = \frac{}{}$$

$$\frac{1}{11} = \frac{}{} = \frac{}{} = \frac{}{} = \frac{}{} = \frac{}{} = \frac{}{} = \frac{}{} = \frac{}{} = \frac{9}{99}$$

Si a, b, n representa cualquier número y b, n son distintos de cero

Observa que, en general, $\frac{a}{b} = \frac{a \times n}{b \times n}$

Si lees cada línea de derecha a izquierda

podrás ver que, en general, $\frac{a}{b} = \frac{a : n}{b : n}$

Consideremos las fracciones equivalentes:

$$\frac{2}{8} \quad \frac{3}{12}$$

y observemos que $2 \times 12 = 24$; $8 \times 3 = 24$.

Los productos cruzados (2×12 y 8×3) son iguales, ésta es otra manera de comprobar que 2 fracciones son equivalentes, comprueba calculando los productos cruzados, si se cumple una igualdad similar en otros casos (**Puedes usar las fracciones obtenidas en la página anterior**).

Por otra parte, a pesar de la dificultad para conceptualizar las fracciones, son pocas las lecciones que sobre el tema se incluyen en los libros de texto y las incluidas generalmente tratan del significado parte- todo. En los libros de texto se concluye con la definición de equivalencia fundamentada en los productos cruzados y a pesar de que el interés en el currículo era el aprendizaje por descubrimiento el libro se volcó a la formalización del lenguaje técnico simbólico.

Propuesta constructivista de 1993.

En teoría, en esta propuesta el significado parte-todo de la fracción se incluiría de manera breve y con una perspectiva diferente, la noción debería estar siempre inmersa en situaciones problemáticas y ejercicios contextualizados. Lo relevante es que en ésta el modelo de Kieren (1987), que deviene de una perspectiva mayormente psicológica que postula un aprendizaje individual a partir de la construcción del mismo alumno, tiene una presencia muy fuerte. En este caso, el estudio de las fracciones en su dimensión formal se incluye hasta el tercero y cuarto grados de la escuela primaria porque se requiere de una reversibilidad de pensamiento, que en los niños de primero y segundo grado aún no se da.

La fracción se presenta vinculada sistemáticamente a situaciones de medición y de reparto, así como de razón.

En quinto y sexto grados, además de un trabajo intenso con la razón, se incluyen nociones afines a ella como el porcentaje y la escala, lo que representa un claro ensanchamiento de la idea tradicional de fracción (Ávila, 2019), empero no se acompañan de la formalización de los procedimiento, sino que se deambula en el lenguaje informal e intuitivo.

Sobre este respecto, en el estudio de Flores y Morcote (2001) se hace un análisis de los planes y programas de estudio de la educación primaria, específicamente sobre lo que denominan "conocimiento didáctico para las fracciones" y observan que, aparentemente las fracciones se pueden encontrar a partir del tercero y cuarto grado con el significado de parte todo, pero al explorar en el apartado orientaciones pedagógicas de matemáticas del programa, identifican una confusión ya que se plantean como cosas iguales los significados cociente y parte todo. De manera que para el profesor la dificultad tiene que ver con identificar la diferencia entre los subconstructos de parte todo y cociente ya que se aborda un mismo discurso para los diferentes ciclos y no se profundiza en los demás significados de la fracción. (SEP, 2011)

Al no haber una propuesta curricular clara, pueden coexistir interpretaciones personales que lejos de ayudar a comprender el modelo de Kieren, en el que se basa el plan y programa de estudio mexicano, genere una interpretación de fracción con el subconstructo parte todo, cuyo estudio en la educación básica puede convertirse en un obstáculo para la comprensión del megaconcepto de fracción.

Como lo menciona Cortina et al. (2012) Los programas de estudio mexicanos —al igual que los de muchos otros países— son ambiciosos en los objetivos de aprendizaje que se plantean, particularmente respecto a los números racionales que además están especificados en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006).

En términos ideales debería iniciarse con el estudio de los significados de la fracción y al terminar el tercer grado, el estudiante tendría la capacidad para describir situaciones de medición utilizando fracciones comunes, al terminar el sexto grado, además de interpretar las fracciones en diferentes contextos como la medición, relaciones parte todo, cociente, razones y proporciones, el alumno también debería tener la capacidad para utilizar la notación decimal para expresar fracciones en diferentes contextos y relacionar estas dos notaciones con la de los porcentajes. En los libros de texto estos subconstructos y variantes aparecen desarticulados, desorganizados y desagrupados, lo cual aumenta las dificultades para enseñarlos ya que, generalmente el maestro se basa más en el libro de texto que en el programa de estudios, donde hay aparentemente hay una mejor organización.

Las afirmaciones anteriores son coherentes con los resultados del estudio que Valdemoros (2010) hace con una profesora en servicio, donde evidencia una marcada dependencia de la maestra con los libros de texto que provoca una enseñanza mecanizada. En otro estudio de Perea y Valdemoros (2007) concluyen que los libros de texto introducen aisladamente diversas interpretaciones del concepto de fracción.

Así mismo, la investigación realizada por Real (2017) se apoya en el estudio de Figuera (2016) para caracterizar la estructura y organización del modelo de enseñanza actual (2011) en la educación básica en México y pone de manifiesto una descoordinación y una interpretación “romántica” que hacen los autores de los libros de texto sobre los programas de estudio.

Tabla 2

Competencias a desarrollar en el modelo de enseñanza (Real, 2017)

Competencias de los programas de estudio	Competencias de los libros de texto de matemáticas
Resolver problemas que implican determinar y usar la relación “la mitad de”	Resolver problemas usando la relación “la mitad de”
Resolver problemas mediante la adición y sustracción de fracciones de la forma $m/2^n$ cuando $1 \leq n \leq 3$	Resolver problemas y hacer ejercicios a través de la adición y sustracción de la forma $m/2^n$ cuando $1 \leq n \leq 3$
Expresar verbalmente fracciones de la forma $m/2^n$ como medidas y como resultados del proceso de distribución	
Representar fracciones de la misma forma con símbolos	Representar el resultado de un proceso de distribución o una relación entre la(s) parte(s) y un todo continuo a través de una fracción
Identificar representaciones aditivas equivalentes con fracciones	
Comparar fracciones con el mismo numerador o denominador	Comparar fracciones para determinar cuál es mayor
Interpretar y representar fracciones usando diagramas o esquemas	

En las conclusiones de Real (2017) se afirma que los autores no consideran algunas clases de fenómenos como la descripción de procesos cíclicos y periódicos; la descripción de razones; la comparación de cantidades y valores de magnitud a través de expresiones que se usan en el lenguaje cotidiano; las comparaciones directas de objetos; y la medición de magnitudes usando la recta numérica (Real y Figueras 2015 en Real 2017), lo que conlleva a desaciertos en el proceso de enseñanza aprendizaje. Estas ideas son coherentes con lo que señala Cortina et al. (2012), quien señala que las actividades para la enseñanza de las fracciones sugeridas en los programas de estudio y en los libros de texto, pueden no ser pertinentes para un importante número de estudiantes.

1.3.2 Dificultades de los alumnos en el aprendizaje de las fracciones

Como se ha mencionado, la literatura internacional advierte sobre las dificultades en el proceso de enseñanza aprendizaje de las fracciones, Fandiño (2011) desglosa algunas de estas dificultades; en un primer momento los errores típicos que tienen los estudiantes identificados en el contexto internacional, que de acuerdo con dicha autora están relacionados con:

- Ordenar fracciones y escribir números decimales
- Las operaciones entre fracciones y entre números racionales
- Reconocer los esquemas más comunes
- Utilizar el adjetivo "igual"
- Manejar la equivalencia
- Simplificar las fracciones
- Utilizar figuras no estándares
- Pasar de una fracción a la unidad que la ha generado y
- Manipular de manera autónoma esquemas, figuras o modelos.

Este tipo de dificultades o errores, de acuerdo con Brousseau (1997) no son un error del niño como tal, producido por la ignorancia de un saber o por la comprensión errónea, sino lo concibe como un obstáculo,[18] (que implica la adecuada adquisición de saberes

[18] Los obstáculos en el aprendizaje matemático pueden tener tres orígenes distintos, (Brousseau, 1997), algunos de ellos relativos al desarrollo cognitivo ("obstáculos ontogenéticos"), se relacionan con el estudiante y su naturaleza (por ejemplo: inmadurez para aprender un determinado concepto, desde la postura Piagetana, la reorganización de los conocimientos desarrollados mediante la asimilación y la acomodación es necesaria para poder superar esas limitaciones y aprender otros más complejos); los "obstáculos epistemológicos" son aquellos cuya causa está en la misma matemática, esto es en el concepto matemático que es objeto de aprendizaje. En un tercer tipo, los "obstáculos didácticos" la causa reside en la elección del maestro (Fandiño, 2011), por ejemplo:

específicos), que posteriormente dificulta y obstruye la adquisición de saberes más complejos (Cortina et al., 2013).

Dificultades en el ordenamiento

El ordenamiento de fracciones puede considerarse un obstáculo de origen epistemológico, (Brousseau, 1997) que se presenta cuando la comprensión de cierto concepto matemático interfiere con la comprensión de otro más complejo, en este el conocimiento de los números naturales interfiere en la comprensión de los números racionales. Por ejemplo, para la fracción ¼, al tomar como referente las reglas de los números naturales el estudiante supone que el sucesivo es 2/4 y que el "sucesivo "de 0.2 es 0.3; este conocimiento intuitivo que funciona con los números naturales no funciona con los racionales, es decir la propiedad de densidad establece que entre los racionales .2 y .3 hay una infinidad de números.

Dificultades en la realización de operaciones

Otra dificultad que tienen los alumnos aparece al momento de realizar las operaciones entre fracciones, ante el problema de determinar 2/3 de 3/4 para los alumnos resulta más fácil resolverlo con el algoritmo que con la representación gráfica, pero no con la comprensión del algoritmo, sino con la intuición de multiplicar a/b x c/d= a x c y b x d lo cual puede ser producto de un obstáculo didáctico. La mecanización del algoritmo[19] sin necesidad de construir realmente el concepto de multiplicación entre fracciones es un camino óptimo para el alumno, pero no así con la división, la suma y la resta, porque en éstas no identifican su uso por ello utilizan la representación gráfica o lo que se conoce

---

metodología y didáctica, explicaciones precedentes, materiales usados, etc. Los dos primeros no pueden ni deben ser evitados, sino ayudarlos a superarlos. (D'Amore en Fandiño, 2011).

[19] En los años 60' (antes de las didácticas) se propuso no dar a los estudiantes explicaciones sobre el significado de a/b + c/d (Stenger, 1971, en Fandiño 2011) y simplemente aplicar el algoritmo que se basa en encontrar el mínimo común múltiplo entre b y d, es decir el denominador común de las dos fracciones, pero esto creaba problemas y por ello se dio la siguiente regla formal: a/b +c/d= ad+bc / bd con la que se obtuvieron mejoras formales, pero un rotundo fracaso en el aprendizaje

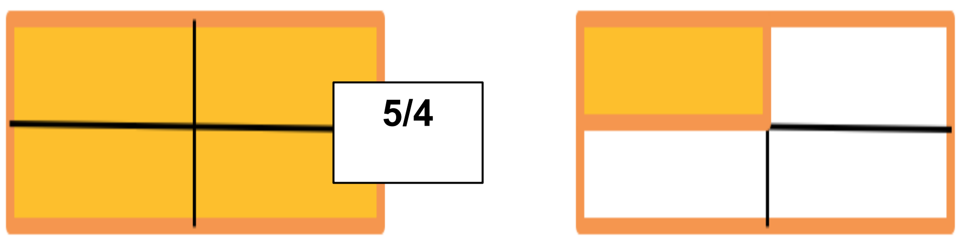
como la regla algorítmica que no necesita justificación que, por otra parte, se relaciona con la sobreexplotación de la representación gráfica.

Dificultades en el reconocimiento de esquemas y figuras no estándar

En palabras de Fandiño (2011), reconocer los esquemas más comunes para utilizarlos en la solución de un problema puede resultar un gran dificultad, un obstáculo que tienen los estudiantes porque se trata precisamente de conocimientos y no de falta de éstos, un ejemplo aparece cuando al utilizar las fracciones impropias, por ejemplo para representar 5/4 con las siguientes figuras:

Figura 7.

Representación de fracciones impropias utilizando dos enteros.



Generalmente los niños sostenían que la superficie marcada eran 5/8, pues siempre habían trabajado sólo con un entero, por esta razón, tomaban los dos rectángulos (dos enteros) como uno solo y suponían que la superficie coloreada eran 5/8, lo cual no tiene sentido, desde un punto de vista lógico, pero el alumno había aprendido que ¾ representa menos de la unidad por eso son cuartos.

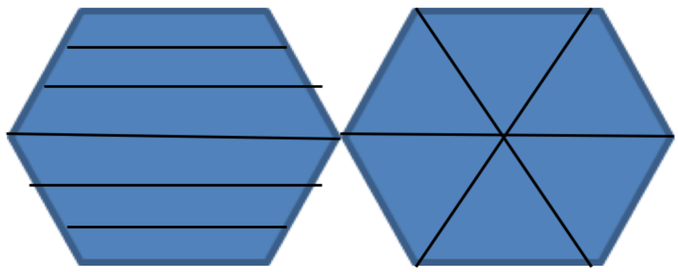
Figura 8.

Representación gráfica de ¾. El entero se divide en 4 partes “iguales” y se colorean 3.

Otro error recurrente aparecía cuando se pedía marcar cierta fracción en figuras no estándares usadas en la escuela primaria. Por ejemplo, al pedir al niño que partiera un hexágono, en 6 partes iguales generalmente lo hacía de manera horizontal como lo haría con un rectángulo.

Figura 9.

Dificultad en el reconocimiento de 6/6 (a partir del modelo del rectángulo).Dividir la figura en seis partes iguales.



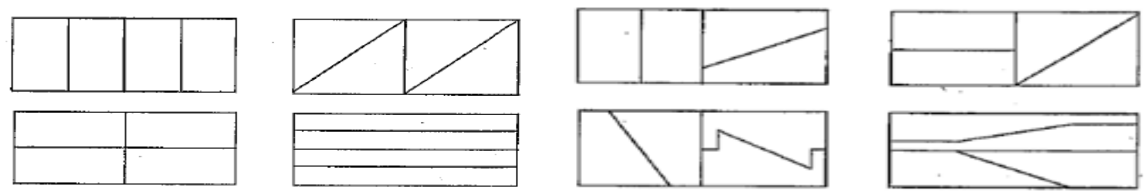
Esta figura no coincide con el modelo que hasta entonces se le ha propuesto al alumno, por esta razón tiene que sobreponer la partición del segundo hexágono, esto significa que cuando hay imágenes o figuras que se constituyen demasiado pronto como modelos, es difícil reelaborar o pensar en otra imagen en lo inmediato para llegar a una "definitiva"; hablamos pues de un modelo intuitivo, aquel modelo que responde a las solicitudes intuitivas y que tienen una aceptación inmediata fuerte.

Dificultades en la gestión del adjetivo "igual" y manejar la equivalencia

Regreso a las líneas anteriores acerca del uso reiterado de figuras simples (modelos intuitivos fuertes) en las cuales se hace una división exhaustiva omitiendo la mayoría de las veces otro tipo de recurso, que termina por convertirse en obligatorio y esperado (modelos parásitos, un modelo demasiado pronto y difícil de infringirlos). El estudiante los retoma como recurso único, pero con ciertas restricciones, pues la dificultad radica en partir en "partes iguales" que pueden sobreponerse, pareciera que canónicamente solo se puede de manera idéntica, al hablar gráficamente, y se suele rechazar otras particiones. Esta dificultad también forma parte del obstáculo didáctico que más adelante se aborda a profundidad en las dificultades de enseñanza.

Figura 10.

Uso excesivo de figuras simples divididas en partes iguales, entendidas como congruentes vs. La interpretación relativa de su extensión, el área. (Tomado de Fandiño, 2011)



En relación a la gestión de equivalencia, de acuerdo con Fandiño (2011) al estudiante le cuesta trabajo comprender el sentido de equivalencia entre fracciones, a distintas edades. Incluso, menciona Fandiño, menos del 30% de los estudiantes de 15 años sabe resolver estas situaciones, muchos recurren a la estrategia tan difundida de "multiplicar (o dividir) arriba y abajo (numerador y denominador) por el mismo número, estrategia en la que se observan diferentes comportamientos que dependen de, si se pasa a números más pequeños o más grandes 2/4 a 4/8 o cuando es a la inversa 2/4 a 1⁄2, este ejemplo puede estar muy desgastado por la representación gráfica, pero en el caso de 3/6 a 9/18, se dan nuevos comportamientos, al ponerlo en situación real los estudiantes no relacionan el término equivalencia con la mitad o el doble de una fracción en casos discretos, por ejemplo: 3 bolas blancas de 6 negras es ½ del total de las bolas, pero si tenemos 9 blancas de 18 negras, les resulta difícil decir que es igual, a ½.

Así llegamos a otro tipo de dificultades en la gestión de la fracción irreducible o simplificación de fracciones, en este caso generalmente aparece el recurso de "cancelar arriba y abajo" (Fandiño, 2011). Por ejemplo 3/6 se reduce a ½ (equivalencia), pero el alumno entra en el conflicto porque intenta dividirlo hasta no quedar nada, entonces al tomar como referente lo utilizado con los números naturales escribe 0/2, pues desde su perspectiva ha realizado una división exhaustiva que da como resultado cero en el numerador.

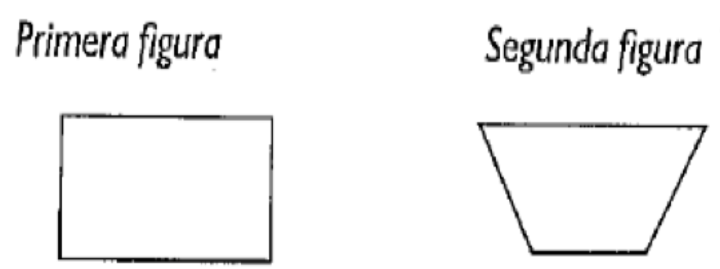
Dificultades al pasar de una fracción a la unidad que la generó

Muchos currícula y libros de texto para la enseñanza de las fracciones se basan en el modelo kierenano (Ávila, 2019), que recalca lo intuitivo y empata con el modelo Piagetano porque postula la asimilación y acomodación, contexto que justifica el uso generalizado e intuitivo de la representación de fracciones en una unidad (representación gráfica ya establecida) y partir una unidad dividida en partes iguales más pequeñas a la unidad el estudiante encuentra una fracción del todo, éste es un recurso trabajado en exceso ya que al final de cuentas se institucionaliza una representación gráfica de la parte y el todo en figuras estándar.

De acuerdo con la lógica del modelo antes mencionado, después de dominar dicho conocimiento (identificar parte de una unidad) para el alumno será fácil hacerlo a la inversa, es decir identificar el todo dada la parte, pero eso no pasa así, no se puede de manera casi instantánea desconectar un conocimiento para dar paso a uno nuevo. Un problema que se presenta de manera recurrente en los alumnos de 3° y 4° incluso 5° de primaria se puede ver cuando se les da una figura (unidad) y se les pide identificar una fracción de tal unidad (Fandiño, 2011) pero difícilmente se le plantean situaciones a la inversa. Dado que la imagen del primer modelo (mental) se da demasiado pronto y en apariencia funciona bien, se convierte en un obstáculo para los aprendizajes futuros[20]. Entonces resulta fundamental construir la idea de que no siempre hay una única respuesta correcta para estas situaciones y que todas ellas pueden resolver el ejercicio y romper el modelo mental de una figura regular perfecta como unidad. En el siguiente ejemplo tomado de Fandiño (2011) se da cuenta de lo anterior, se dan las siguientes figuras.

Figura 11

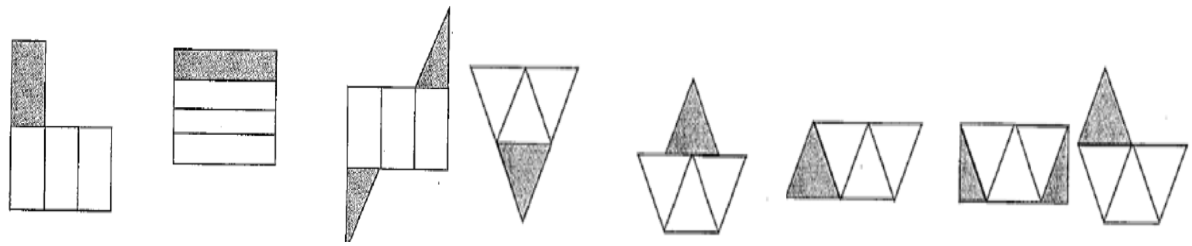
Representación de ¾ de una unidad en ambas figuras



[20] Se convierte en un concepto errado y puede convertirse en un evento a evitar (de manera más profunda se abordará en las dificultades de enseñanza).

Figura 12

Se muestran ¾ de la unidad y se les pide hallar la unidad que ha sido fraccionada



Como se puede ver, la situación rompe con un mini concepto que se insinúa como un modelo parásito, querer romper la figura en 4 partes iguales como tendencia generalizada que en bastantes situaciones se considera como un obstáculo ontogenético, pero desde nuestra perspectiva se evidencia de un obstáculo didáctico que puede ser evitado.

1.3.3 Dificultades en la enseñanza de las fracciones

La enseñanza de las fracciones en el nivel básico e incluso en el universitario presenta diversas dificultades, desde las características propias de las fracciones (términos y significados), hasta otros factores que son motivo de preocupación tanto para los docentes como para los estudiantes. No entraremos en detalles, no daremos ejemplos en cada dificultad, pero en este apartado se tratará de poner en evidencia las probables causas de las dificultades en la enseñanza de las fracciones, que de forma simultánea se dan en el aprendizaje.

En un primer momento debe destacarse el desorden semántico en los numerosos estudios sobre las fracciones, pues desde la perspectiva teórica que se toma (ya sea muy amplia o anquilosada) se establece una limitada comunicación entre los docentes y la propia teoría. En palabras de Cortina (2020), hay una amplia variedad de propósitos, y siguen diversas pautas metodológicas y marcos teóricos implícitamente, así como diversidad de términos: parte, entero, unidad, medida, cantidad, iteración, cociente e incluso fracción. Además, los significados atribuidos a esos términos no siempre son compatibles entre sí ni con las prácticas en el aula; quedando en intentos de un modelo de enseñanza, pero que de alguna manera convergen con el modelo kierenano[21]

El modelo de Thomas Kieren (1980) sobre la enseñanza de las fracciones que ha considerado la noción de número racional para guiar la instrucción de fracciones, sin descartar su origen abstracto y formal, es la conjetura[22] de la metodología y didáctica, y de los materiales utilizados por los docentes en el contexto mexicano y de otros países. Este modelo redefine el concepto de fracción con fines pedagógicos (Cortina, 2020), lo considera un concepto compuesto por varias constructos (parte todo, cociente, medida, relación y operador) que se abordan en el aula como los distintos significados de la fracción, pero planteando como base al significado parte todo, un significado tan arraigado por su facilidad de comprensión que corre el peligro de ser obstáculo para los demás significados, que se consideran de mayor “complejidad”.

Ante esto, es pertinente revisar algunos supuestos básicos que han guiado el diseño de actividades y estrategias de enseñanza en los currículos de la educación básica para favorecer el aprendizaje de las fracciones. Uno de estos supuestos, mencionado por Cortina (2013, 2020) es considerar la <<equipartición>>[23], si no como el único, sí como el contexto más favorable para el desarrollo inicial de nociones fraccionarias en los niños, lo que nadie ha demostrado que así sea, pero se confía en este supuesto con ingenuidad, sin cuestionarlo, esto es de manera acrítica; lo que puede obstaculizar el proceso de enseñanza.

Conocimiento del contenido y la enseñanza

En el análisis que realizan Thompson y Saldanha (2003), se da relevancia a los contextos en los que se produce el aprendizaje y la enseñanza. Lo que los estudiantes aprenden a través de la instrucción en cualquier momento, que no es solo función de la instrucción; sino que está influenciado por lo que los docentes ya saben (incluidas las creencias que tienen sobre las matemáticas, hacerlo y aprenderlo) y por la instrucción en

[21] Movimiento posterior a las matemáticas modernas que introduce a los números racionales en lugar de los quebrados, este modelo ha generado confusión entre las fracciones y los racionales, se basa fundamentalmente en los números racionales.
[22] Esta conjetura supone que al enseñar el significado de los racionales (sus aplicaciones) a los niños,lograrán comprender su confluencia. Dicha tesis es el sustento del Rational Number Proyect (Behr,Harel, Post y Lesh, 1992; en Cortina 2020.
[23] De acuerdo al análisis de Freudenthal (1983) la fracción como fracturador.

la que han participado recíprocamente (Tardif, 2004), se trata de observar las acciones de instrucción de un maestro en cualquier momento (su praxis), es decir, no se trata simplemente de ejecutar un plan.

Empero la enseñanza está influenciada tanto por lo que el maestro entiende como por lo que está enseñando y por lo que discierne sobre lo que los estudiantes saben y cómo podrían construir productivamente sobre ese conocimiento. En el caso particular de la enseñanza de las fracciones también influye la concepción que tiene de ellas desde su primer encuentro como estudiantes o en la práctica; la explicación recae en la distancia que se produce entre la formación recibida y la realidad educativa.

Pero pocos se ocupan de la lógica de la progresión, de la formación del practicum, es decir, el maestro no es solo un repositorio de información para ser transmitida al alumno, “el profesor debe entender lo que está enseñando y el porqué del contenido a enseñar” (Sosa, 2011, p. 19), en este tenor la equipartición limita sus habilidades (Martínez 2001,citado en Ávila 2016), dado a su peligrosa facilidad y cierta comodidad de aprendizaje (fracturar una unidad en partes iguales, como sinónimo de congruencia al sobreponerse)[24], ya que de acuerdo a Reyes (2015) pensar correctamente sobre el conocimiento del contenido se requiere ir más allá del conocimiento de los hechos o conceptos de un dominio, si bien el modelo de Kieren introducido en el conocimiento del currículo conjetura que en algún momento se van a unir (juntar) los significados de la fracción (con base en la equipartición), al profesor no se le da dirección viable, una base para trabajar en algo, es decir no solo dar objetivos, sino medios para provocarlos (pues se necesitan herramientas complejas) y al no haber esa certeza se convierte en una dificultad en la enseñanza para el docente.

Distinción entre fracciones y números racionales

Al distinguir las fracciones como lo que Kieren (1980) llama un sistema de ideas personalmente conocido y el desarrollo de lo que comúnmente se toma como el sistema de números racionales.

---

[24] *“enfocar las fracciones desde el punto de vista de “parte-todo” es algo bastante limitado no solo fenomenológicamente sino también matemáticamente- este enfoque produce solo fracciones propias”* (Freudenthal, 1995, en Morcote y Flores, 2001)

- Se destaca una tendencia entre los libros de texto a confundir fracciones y racionales.
- Por el modelo que impera pareciera rentable señalar que el objetivo es querer comprender el número racional.
- El sistema, donde se usan "números racionales" como lo usan los matemáticos, está mucho más allá del alcance de los estudiantes que del plan de estudios y los diseñadores de instrucción.

En síntesis se debe tener claro lo que quieren decir con "fracciones" y por "números racionales" para que eviten diseñar objetivos de aprendizaje incoherentes.

En los análisis realizados por Freudenthal (1983) y por Thompson y Saldanha (2003), Cortina et al. (2013), se identifican tres imágenes de las fracciones que se supone deben ser adquiridas por los educandos cuando se utiliza la equipartición como el medio principal para introducir el concepto, pero como se ha mencionado se convierten en un obstáculo didáctico (OD), que en nuestra conjetura deviene de la equipartición (como fracturador).

- La fracción como resultado de transformar un objeto (OD-To): el entero es representado como un objeto susceptible de ser partido fácilmente, y con una transformación de manera irreversible, (de forma física o imaginaria) que ha sido rebanado, cortado, quebrado o coloreado en partes iguales. Orientar a los estudiantes a asociar las fracciones con esta imagen podría interferir con la posibilidad de que, a la larga, comprendieran las relaciones recíprocas (Cortina et al., 2013), es decir, que 1 es cinco veces el tamaño de 1/5.
- La fracción como tantos de tantos (OD-Tt): Es la definición más generalizada y con cierta ingenuidad aceptada como única de “fracción” (en la educación primaria) n/d identificando al denominador como el número de partes en que se corta el entero y el numerador como el número de partes que se toman del entero; Thompson y Saldanha (2003) señalan que este imagen al ser de naturaleza aditiva, no multiplicativa, dificulta la noción de tamaño relativo, lo que conlleva a una restricción a fracciones propias y no da apertura a las fracciones mayores a la unidad. (fracciones impropias).
- La fracción como incluida en un entero (OD-Ie): concebir una fracción como algo que necesariamente está contenido dentro de un entero. Será difícil para el estudiante tratar de una fracción de otro entero cuando no tenga físicamente

> nada en común, por ejemplo “¿El número de chicos qué fracción es del número de chicas?” Thompson y Saldanha (2003). Así, para estos autores la imagen de una fracción como algo que necesariamente está contenido dentro de un entero limitaría tanto el tipo de situaciones en las que se pueden utilizar las fracciones como las cantidades de las que pueden dar cuenta únicamente menores a la unidad.

La tarea pedagógica consistiría entonces en encontrar maneras de apoyar el aprendizaje de las fracciones que no fomenten el desarrollo de las imágenes arriba descritas (Cortina, 2020).

1.3.4 Realidad y falso realismo. A la realidad le gusta esconderse (Heráclito)

Un amplio catálogo de profesionales entre ellos filósofos, cineastas, novelistas pueden permitirse el lujo de jugar con la realidad dado que en este juego es, precisamente, donde haya oportunidades para su sustento. Empero para nosotros, como profesores que enseñamos matemáticas, la idea central es que las matemáticas sean vivencialmente reales a quienes las tienen que aprender, por lo cual debemos perseguir una realidad sobre la cual tenga sentido la matematización (Alsina, 2007). La actividad matemática no es un medio para el aprendizaje, sino un fin en sí mismo. Aunque el término “realidad” en el contexto escolar, sobre todo en las matemáticas se ha tornado un tanto falso, solo como un recurso donde se aplica el concepto y no donde se crea.

Estas realidades matemáticas abundan en nuestros discursos y son parte de las lecciones de los libros de texto, convirtiendo lo que debería ser una motivación para unas matemáticas activas en un artificio para consagrar unas matemáticas pasivas (Alsina, 2007).

Tabla 3

Realidades que pueden confundir sustrayendo el interés por su conocimiento (adaptación de Alsina 2007)

Realidades matemáticas (Alsina, 2007)
Realidades falseadas y manipuladas. Son situaciones aparentemente realistas (al contar con palabras y datos de uso cotidiano) pero deformadas o cambiadas para poder dar lugar a ejercicios matemáticos rutinarios. Se trata de una preparación *ad-hoc* justificada por motivos pedagógicos.
Realidades inusuales. Son situaciones de carácter excepcional o muy poco frecuente que aparecen como si fueran cotidianas
Realidades caducas. Se trata de situaciones ya pasadas, en general irrepetibles, que algún día fueron de actualidad pero que el paso del tiempo ha hecho desaparecer. Para los estudiantes del siglo XXI son ya ficciones históricas, pero que aún las vemos en el libro de texto, por ejemplo la <balanza>.
Realidades lejanas Están relacionadas con escenas de culturas alejadas, hechos exóticos, folklóricos y curiosos que en absoluto se identificarán con las realidades locales actuales. Ejemplo: «Los misioneros y los caníbales». Tres misioneros y tres caníbales han de cruzar un río en una barca en la que sólo caben dos personas. (Un ejemplo muy explotado en los primeros años de educación primaria).
Realidades ocultas Se trata de hechos no observables directamente, sobre los que no hay ni intuición ni experiencia, que dan lugar a ejercicios formales o modelos cuyos resultados no pueden ser contrastados (medios de transporte que no existen, balanza que no puede fabricarse, inventos futuristas).
Realidades no adecuadas Son situaciones no adecuadas a la edad y circunstancias de los estudiantes, o no correctas pues pueden confundirlos u ofenderlos. En general, ni son positivas ni son interesantes (exclusión, violencia de género, etc.)
Realidades inventadas Se trata de realidades ficticias, maquilladas como situaciones aparentemente posibles. A menudo incluyen datos o medidas equivocadas, guiando, perversamente, a creencias falsas e induciendo más tarde a errores inadmisibles.

Fandiño (2015) ilustra la falsa realidad con la situación "encontrar 874/ 423 de una pizza" la imposibilidad concreta de ciertos problemas. Teóricamente podría llevarse a cabo, pero solo de forma mecánica no de manera intuitiva, pues aún entre en lo cánones de la equipartición, esta situación <<es un absurdo>>, una ejemplo de realidad falseada, manipulada y posiblemente inventada, ya que nadie parte una pizza en tantos pedazos.

Una situación como esta puede generar una gran confusión que se disfraza de realidad matemática.

Un ejemplo más es la siguiente situación: “Queremos hallar los 6/8 de 12 personas. ¿Cuántas personas son?”. A pesar de que la fracción no es descabellada, es irreal para el estudiante porque hay cierta incongruencia entre la forma cómo le han enseñado la fracción <equipartición> y lo que se quiere partir <personas>. A primera vista no se puede resolver debido a la imposibilidad de dividir 12 personas en 8 partes, es una realidad no adecuada, incluso manipulada. Un experto puede abogar por la equivalencia 3/4 de 12 personas, que serían 9 personas, pero se pierde el sentido, sería una situación forzada. Para matematizar, la situación debe “pedir a gritos” ese concepto que le ayude a resolver, aclamar las matemáticas que emergen de ese quehacer, del proceso de matematizar.

CAPÍTULO II

LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA AL SALÓN DE CLASES

No puede haber nada más destructivo para una verdadera educación que el gastar largas horas en la adquisición de ideas y métodos que no llevan a ningún sitio. [...] Los elementos de matemáticas deberían tratarse como el estudio de un conjunto de ideas fundamentales, cuya importancia pueda apreciar el estudiante inmediatamente.
Alfred North Whithead

En el contexto de la educación matemática, en la década de los 60´s y 70´s del pasado siglo se dio una transición importante que tuvo un impacto global. Se transitó de una “matemática tradicional”, criticada por sus procedimientos inconexos del álgebra y las operaciones algebraicas y por su enfoque mecanicista (Sorando, 2002), a una matemática que, supuestamente, daría solución a las necesidades del campo científico y tecnológico.

En EE.UU, particularmente a partir del lanzamiento del satélite Sputnik por la URSS, se generó la idea de que con ese hecho la URSS tomaba ventaja en la guerra fría demostrando sus avances científicos, se prendieron las alarmas al constatar su bajo nivel en la educación matemática. Por esta razón, con el respaldo del sector político y económico se abocaron a preparar una reforma a la educación, la que dio origen al movimiento de las “matemáticas modernas”. En este período la ciencia se convirtió en la protagonista principal al convertirse en el instrumento de solución a los problemas de la enseñanza de las matemáticas y de la sociedad en general. En la reforma de las “matemáticas modernas” se postulaba que si se construían lógicamente todas las matemáticas elementales, comenzando por axiomas y definiciones y avanzando con teoremas y propiedades, se podrían comprender todas las Matemáticas (Kline, 1976). Se trataba entonces de reconstruir las matemáticas a partir de conceptos generales y estructuras, era una matemática deductiva, basada en la teoría conjuntista[1].

[1] Esta teoría ha estado en el centro de procesos que tuvieron lugar principalmente en Alemania entre la segunda mitad del siglo XIX y la primera década del siglo XX, y suponía una nueva manera de

No obstante, al aplicar este enfoque a la aritmética, por ejemplo, los enteros se definen como clases de equivalencia, por lo que cabría preguntarse si ¿De verdad así comprende un niño lo que es un entero?, ¿Se puede partir de los conceptos ya construidos, para que el niño comprenda que son las fracciones, convertida a entero?

Si bien en esta reforma se salvaba a la matemática misma, también perdía el interés para los estudiantes y al trabajar con un concepto como las fracciones, se producía una enemistad de por vida con las matemáticas que se abordaban con un alto rigor estructuralista. En palabras de Sorando (2002) ¿cómo se va a valorar la importancia de las estructuras matemáticas si no se conocen abundantes ejemplos concretos donde advertir su presencia o su singularidad por oposición con otros donde no se encuentran? No obstante las críticas, se continuaba con una matemática memorística con una clara independencia de la realidad, dado que no se comprendía su estructuralismo, el qué, cómo y para qué.

En ese contexto, la obra de Kline (1976) tuvo el valor de denunciar los errores del sistema tradicional memorístico y a la vez alertar sobre los nuevos desastres de la matemática moderna, no con tono apocalíptico, sino como alertador de lo que podría pasar si continuaba. Fue así como EE.UU y otros países aceptaron el fracaso predecible de las matemáticas modernas, por el contrario, México permanecería con ellas por más de 20 años (Aguayo, 2019).

Una vez reconocido el fracaso, ¿qué dirección debía tomar la educación matemática?, bajo ese cuestionamiento las nacientes corrientes didácticas enfatizaron la importancia de las experiencias previas de los estudiantes, de la imaginación creadora, de las intuiciones y con ello llegaron nuevas reformas, la reestructuración del currículum alrededor de la resolución de problemas.

2.1 LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA Y LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

Cabe aclarar que Holanda fue reticente a las matemáticas modernas desde su inicio, desde los años sesenta observó al movimiento con una actitud crítica, siendo el impulso inicial del movimiento de reforma que dio origen, en 1968, al proyecto Wiskobas

hacer matemáticas, (García, 2011) ver artículo completo Epsilón - Revista de Educación Matemática 2011, Vol. 28(2), nº 78, pp. 39-51 (iniciado por Wijdeveld y Goffree). Este proyecto fue llevado a cabo por un grupo de educadores en matemática del nivel primario y secundario bajo la dirección de Hans Freudenthal.

La corriente didáctica que surgió de este movimiento ha inspirado muchas de las ideas para la reforma en la enseñanza de la matemática en varios países como Inglaterra, Alemania, Dinamarca, España, Portugal, Sudáfrica, EE.UU., Japón, Malasia y Puerto Rico (De Lange 1996, en Santamaría , 2006). En Latinoamérica, Argentina hizo lo propio en 1999, con la creación del grupo patagónico de didáctica de la Matemática GPDM.

2.1.1 La Educación Matemática Realista.

La educación matemática realista (EMR) tiene sus orígenes en el proyecto Wiskobas, es una corriente didáctica conocida a nivel mundial cuyo creador fue Hans Freudenthal (Gravemeijer et al., 2000; Bressan, Zolkower y Gallego, 2004; Santamaria, 2006; Bressan, et al., 2016). Esta teoría surgió en Holanda como reacción al movimiento de la matemática moderna[2] (que en términos generales no tuvo los resultados esperados) que se había propuesto en varios países después de la segunda guerra mundial como "solución" al bajo rendimiento y comprensión de las matemáticas, pero en realidad solo se acortó la brecha entre la secundaria y la universidad, (Castelnuovo, en Santamaria 2006) y continuó con una didáctica muy rígida.

En la década de los 70´s, Holanda ya veía con reticencia a la educación matemática moderna, dado el enfoque mecanicista para la enseñanza de la matemática que se enfoca principalmente en los resultados más que en el proceso. En ese contexto, el Dr. Hans Freundenthal, junto a un grupo de educadores de primaria en el departamento de IOWO (Instituto para el Desarrollo de la Educación Matemática, actualmente Instituto Freudenthal) de la universidad de Utrech, daban forma en un primer momento al proyecto curricular para la enseñanza elemental de las matemáticas, que más adelante se convirtió en la EMR, donde ya se le daba importancia al proceso del estudiante. En palabras del mismo autor "la forma de aprender matemáticas es haciéndolas y ver a la matemática como una actividad humana", pero aclaraban, el término "realista" debe interpretarse como algo referido a la experiencia, no a la vida real de todos los días (Gravemeijer & Terwel, 2000),

[2] La llamada "matemática moderna" que en México se instauró en la década de los 70s, proponía el estudio de estructuras matemáticas mediante el aprendizaje por descubrimiento.

esto significa ofrecer a los estudiantes situaciones problemáticas que pueden imaginar[3], que sean experiencialmente reales en su mente. Dichas situaciones problema pueden venir del mundo real, pero también de la naturaleza, sociedad o cultura, incluyendo temas escolares diferentes de las matemáticas, siempre y cuando se tornen conocidas, cercanas para ellos, tengan aplicación y sean una fuente de aprendizaje.

La primera aproximación que este grupo hizo al diseño curricular postula las siguientes ideas fundamentales:

- El uso de contextos como vehículos para el crecimiento entre lo concreto y lo abstracto, es decir, instrumentos de conocimiento (Rico, 2008), tomados del mundo real (escolar, social y científico) con una historia que justifica toda la actividad matemática. Estos instrumentos a su vez se desglosan en situaciones personales, ocupacionales sociales, científicas comprensibles para el individuo, que provocan la creación de esquemas, la formulación y visualización de los problemas, el descubrimiento de relaciones y regularidades, la identificación de semejanzas con otros problemas para hallar soluciones y propuestas que necesariamente vuelvan a proyectarse en la realidad para analizar su validez y significado; es en este proceso que el lenguaje se convierte en un puente entre lo concreto y lo formal (Llinares, 1997).
- El uso de modelos como la columna vertebral del proceso, lo que significa que los modelos de pensamiento son importantes para unir la brecha entre los procesos de solución informales ligados al contexto, con los procedimientos matemáticos más formales. La producción de un modelo, aún descriptivo, de un fenómeno o situación permite que los estudiantes investiguen la situación, formalicen la descripción, obtengan un “modelo de” esa situación en particular y transiten gradualmente de un modelo general, que es solución de otras situaciones similares, esto es a modelos prospectivos que son fundamentales para elevar su nivel de comprensión, que pueden usarse en otras situaciones y ayudarles para que lo conviertan en un “modelo para” solucionar problemas fuera y dentro de la matemática misma.

[3] Esta interpretación de Rastros "realistas" se remonta a la expresión holandesa "Zich Realiseren", que significa "imaginar". (Van den Heuvel-Panhuizen , 2014)

- El uso de construcciones y producciones libres o abiertas de los alumnos en los procesos de enseñanza aprendizaje, que sirven de marco de referencia para el desarrollo de la trayectoria de aprendizaje de los alumnos. Estas producciones libres continúan en los momentos claves de los procesos de esquematización y formulación progresiva en el uso de modelos, debido a que son una fuente de estimulación para el razonamiento en los alumnos, ya que pueden intercambiarse las producciones y discutir conceptos con sus pares para establecer la reflexión sobre su propio aprendizaje, este proceso les permite reinventar o transformar los modelos que desarrollan para resolver problemas contextuales. De igual manera las producciones propias del alumno son esenciales para que el profesor identifique los diferentes niveles de comprensión (en un grupo heterogéneo) y establecer los avances o dificultades que los alumnos manifiestan, con ello podrá dar rumbo al proceso de enseñanza aprendizaje como actividad matematizadora.
- El carácter interactivo de los procesos enseñanza/aprendizaje, para ello se requiere favorecer la discusión en toda la clase, entendida como una interacción contextualizada (saber docente y alumno). El alumno se concibe como un individuo activo, reflexivo, crítico que participa en la trayectoria de su aprendizaje bajo la guía del docente, quien lo lleva a tomar decisiones en este proceso a compartir sus estrategias con otros y en esa reciprocidad obtener ideas para mejorar dichas estrategias, evocar la reflexión que les permita alcanzar un nivel más alto de comprensión y finalmente volver a explicar la actividad matemática al mundo de la realidad.
- El entrelazado de los distintos ejes en el currículo de matemática, lo que supone un currículum interconectado (numeración, álgebra, geometría, medición y manejo de datos), que posibilite distintos modos de hacer matemática. Bajo esta lógica, el profesor plantea su recorrido de enseñanza basándose en contextos y situaciones problemáticas que incluyen contenidos matemáticos interrelacionados, que son una fuente abundante para que los estudiantes desarrollen conceptos matemáticos. La oportunidad de utilizar diferentes herramientas matemáticas que se enriquecen con la interconexión de los ejes temáticos, significa respetar los métodos informales, las estrategias intuitivas y los procesos cognitivos de los alumnos.

Cabe mencionarse que estas características estaban basadas en la teoría de los tres niveles de Van Hiele[4] pero además, en la fenomenología didáctica de Freudenthal (1983) y la matematización progresiva de Treffers (1987), que son parte medular de los principios de la EMR.

2.2 NOCIONES FUNDAMENTALES DE LA EMR.

Para Freudenthal (1983) el término educación incluye tanto el logro de los objetivos de la instrucción formal como el desarrollo de actitudes de toda la clase: morales, sociales, emocionales, religiosas y cognitivas, todo lo cual hará del ser humano un hombre culto, formado, que es uno de los objetivos más relevantes de la Educación Matemática Realista. (Santamaria, 2006).

En este sentido hablar de una "matemática realista", significa pensar en una matemática que debe estar conectada con la realidad, esto es, permanecer cercana a los alumnos y ser relevante para la sociedad en orden de constituirse en un valor humano. La diferencia fundamental entre la educación tradicional y la EMR es que esta última concibe a la matemática como una "actividad humana," que se realiza entre grupos heterogéneos, con niños con capacidades cognitivas diferentes y sin restringirlo a unos cuántos de cada uno, sino realizarla en un solo grupo, lo cual daría mejores resultados (Bressan, et al. , 2016).

En congruencia con dicha "filosofía educativa", aunque en tiempo cronológico distinto", existen autores que comparten el mismo principio, por ejemplo Chevallard (1999) en su Teoría Antropológica de lo Didáctico sostiene la doble dimensión de la matemática, como actividad humana y como producto de dicha actividad, además, Vigotsky concibe el aprendizaje como una construcción social que parte del alumno y Dewey se caracteriza frecuentemente como un firme defensor de los enfoques abiertos basados en proyectos para la instrucción (Cobb, Visnovska y Zhao, 2008) en los que el hacer como "actividad" y

[4] Los niveles de los esposos Van Hiele fueron creados fundamentalmente para explicar el aprendizaje de la geometría y desde su perspectiva se asume que los estudiantes transitan por varios niveles de comprensión que van desde el contexto informal hasta las matemáticas más formales. Mediante la creación de varios niveles de atajos y esquematizaciones se comprende cómo se da la relación entre conceptos y estrategias. El primer nivel del pensamiento se gesta a través de la experimentación cuando el estudiante establece características fundamentales del objeto de estudio sin relacionarlas entre sí. En el segundo nivel aprende a establecer interrelaciones entre esas características. En el tercer nivel, el alumno es capaz de justificar esas interrelaciones a partir de sus propiedades y del uso del método matemático.

el pensar y reflexionar son acciones que producen aprendizaje. Bajo esta misma lógica Shulman (1986) destaca la importancia del conocimiento didáctico del contenido, es decir subraya la relevancia de la investigación sobre la práctica de los profesores, pero no una práctica genérica sino aquella en la que se fusiona la materia a enseñar y la pedagogía.

Estos autores, aunque indirectamente, valoraron la manera en la cual la EMR coloca el razonamiento matemático de los estudiantes, es decir, compartieron la idea de que dicho razonamiento es el centro del proceso del diseño instruccional (Treffers en Santamaria, 2006)

2.2.1 La matematización. Una actividad humana creadora

Como se ha podido apreciar, la EMR de Freudenthal "no pretende ser una teoría general del aprendizaje, sino que es más bien una teoría global, una "filosofía de la educación" (Bressan, Zolkower y Gallego, 2004), que asume que el punto de partida del aprendizaje debe colocarse en situaciones del mundo real, en problemas contextuales que requieren organizarse, mediante modelos desarrollados por los estudiantes y basados en sus propias necesidades, deben ser modelos (matemáticos) que puedan probar y mejorar a partir de su experimentación, en otras palabras, son modelos que les ayudan a matematizar la realidad ya que "… Matematizar es organizar la realidad con medios matemáticos… incluida la matemática misma." (Freudenthal 1973, p. 44)

En palabras de Gravemeijer (1994), matematizar significa hacer matemática y esta actividad de matematizar, hacer más matemática, puede relacionarse con características de la matemática misma como la generalidad, la certeza, la exactitud y la brevedad.[5] Esta idea es fundamental para Freudenthal.

Matematizar es matematizar algo, algo no matemático o algo que aún no es lo suficientemente matemático, que necesita más, una matematización más perspicaz. Matematizar es matematizar la realidad, piezas de la realidad. Pero la realidad no es solo eso, puesto que asume que la educación matemática de los niños debe apuntar a matematizar la realidad de todos los días ya que los niños no pueden matematizar la matemática, porque, en un principio, no hay objetos matemáticos que sean de su

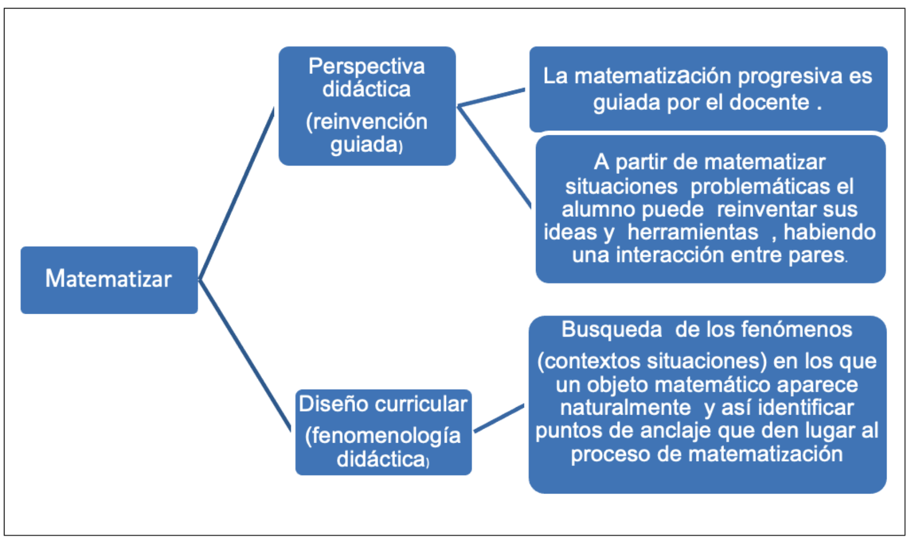
[5] (Ver también Treffers 1987): Generalización, observar analogías, clasificar, estructurar. Certeza, reflexionar, justificar, probar (usando un abordaje sistemático, elaborando y testeando conjeturas, etc.). Exactitud, modelizar, simbolizar, definir (limitando interpretaciones y validez). Brevedad, simbolizar y esquematizar (desarrollando procedimientos estándar y notaciones).

experiencia real (Bressan, et al. 2016). Así pues la EMR se preocupa tanto en el cómo y el qué del aprendizaje de la enseñanza matemática. El qué, significa ver la matemática como actividad humana significativa en dos niveles, en el de la matematización horizontal y el de la matematización vertical con bajo y alto nivel de habilidades.[6] El cómo, remite a la enseñanza basada en los principios de realidad; de interconexión y de reinvención, esto es, al aprendizaje bajo los principios de la actividad, de niveles y de interacción.

Cómo se puede ver en la siguiente figura, para poder "hacer" matemáticas como actividad humana, los estudiantes deben organizar su actividad (matematizar) basándose en los anteriores principios lo que plantea la necesidad de una relación estrecha entre enseñanza y aprendizaje, en la que se pueden establecer diferentes grados de intervención del alumno y el profesor.

Figura 13

De la EMR al realismo en clase



En este proceso de matematización los maestros tienen un papel proactivo en el aprendizaje de los estudiantes, inicia desde el diseño de una situación de aprendizaje que se ajuste a los principios de la EMR y que considera diversas fases: 1) la matematización del contexto (fase donde todavía no intervienen los alumnos) que consiste en el análisis fenomenológico, es decir, en trazar el camino por donde el aprendiz debe caminar en el

[6] En la matematización horizontal, los estudiantes usan herramientas matemáticas para organizar y resolver problemas situados en situaciones de la vida real, lo que implica pasar del mundo real al de símbolos, aprendiendo a estructurar, organizar, simbolizar, visualizar, esquematizar por sí mismos. Por su parte la matematización vertical se refiere al proceso de reorganización dentro de lo matemático (abstraer, generalizar, unificar y cuando es necesario especificar), sistema que resulta en accesos directos mediante el uso de conexiones entre conceptos y estrategias.

proceso de aprendizaje; 2) trabajo previo en el aula, que inicia con un diálogo con los alumnos para recoger sus conocimientos previos y experiencias; 3) trabajo en contexto, los alumnos descubren las matemáticas que hay en el contexto de aprendizaje elegido, documentan lo que van aprendiendo a través de sus producciones libres y el docente interviene como guía en la progresión de la matematización procurando estructurar un ambiente de reflexión individual y grupal); por último 3) trabajo posterior en el aula en el que se establece un diálogo con los alumnos para que comuniquen lo que han descubierto, es una comunicación entre pares, una co-construcción del conocimiento (Alsina, 2011). En síntesis se trata de garantizar el traspaso paulatino del control del proceso de aprendizaje al propio individuo en formación.

2.2.2 Reinvención guiada, aprendizaje y enseñanza

En todo proceso de aprendizaje de la humanidad siempre ha estado la figura de un maestro que imparte la doctrina a sus discípulos (estudiantes), pero ¿puede el proceso de aprendizaje ser de alguna manera repetido por alumnos de forma individual? Para Freudenthal (2002), un joven inteligente puede reinventar muchas matemáticas por su cuenta, pero entonces, ¿por qué los menos inteligentes no pueden hacerlo bajo la guía de otros, adultos y compañeros?, la pregunta tiene argumentos muy válidos lo veremos enseguida.

El conocimiento y la habilidad, cuando son adquiridos en la propia actividad, se aprenden mejor y están más disponibles para ponerlos en situación que cuando son impuestos por otros. El aprendizaje en la actividad también puede ser agradable y por lo tanto, aprender por reinvención puede ser motivador y fomentar el interés por experimentar las matemáticas como una actividad humana. En el contexto escolar, si el alumno es guiado para reinventar la matemática, le será más fácil aprenderla, retenerla y movilizarse cuando se requiera, mucho mejor que si se la imponen. Guiar esta reinvención significa entonces dar al alumno oportunidades para reflexionar que pueden reforzarse mediante la verbalización y la interacción comunicativa con los otros.

En otras palabras, la reinvención guiada hace alusión a la actividad de matematización que dirige el docente.(Gallegos y Pérez , 2013) para lograr un delicado equilibrio entre la fuerza de la enseñanza y la libertad de aprendizaje. Una reinvención guiada debe tener ciertas características, a saber:

1) Elegir situaciones de aprendizaje dentro de la realidad actual del alumno, (matematización horizontal) que subyacen en el contexto de la situación.
2) Ofrecer medios y herramientas para la matematización progresiva.
3) Realizar una instrucción interactiva e interactiva, no sólo en el sentido del maestro de clase y el aprendiz, sino con más espacio y tiempo para una interacción en un grupo heterogéneo, en una relación mutua con el aprendizaje que deja al maestro en segundo plano, y cuya aparente retirada se manifiesta en permitir que el alumno sea un crítico latente.
4) Considerar que la producción propia del alumno incluye no sólo soluciones, sino también problemas.
5) Entrelazar hilos de aprendizaje, esto es, establecer relaciones con otros conocimientos del currículum
6) Considerar procesos de aprendizaje a largo plazo. (Treffers,1987, en Freudenthal, 2002)

En síntesis, la pretensión de la reinvención guiada es que los alumnos puedan reinventar las matemáticas bajo la guía de un adulto, es decir, mediante las situaciones problemáticas que organiza y dirige el profesor, los alumnos tendrán oportunidad de reflexionar sobre su actividad matematizadora, la cual se traduce didácticamente en una "reinvención guiada", término utilizado por Freudenthal para expresar el rol del docente y los libros de textos escolares en la reconstrucción de las matemáticas por parte de los alumnos. En este caso, cabe mencionar, convergen dos de las ideas claves de su filosofía de educación, matematización y reinvención guiada. Desde la óptica del alumno reinvención guiada. Desde la óptica del maestro matematización progresiva (horizontal y vertical)[7].

2.2.3 Fenomenología didáctica y matematización

Las matemáticas son un instrumento cognitivo (conocimiento público) que sirve para organizar, estructurar y matematizar partes de la realidad (Freudenthal, 2002). Mediante

[7] La matematización horizontal permite transitar del mundo de la vida al mundo de los símbolos. En el mundo de la vida se vive, se actúa, se sufre. En el otro se crean los símbolos, se recrean y se manipulan, mecánica, comprensiva y reflexivamente, esto es la matematización vertical. Freudenthal (1991)

estas acciones que no son otra cosa que hacer matemáticas, cada sujeto se apropia de ellas. Entonces, si la matemática surge de la *matematización* (organización) de la realidad, el aprendizaje matemático debe originarse también en esa realidad, es decir en relación con los fenómenos[8] propios de esa realidad para los cuales fue creado y para los cuales han sido ampliadas en el proceso de aprendizaje de la humanidad. Debe volverse a la historia, en particular, y comprobar cómo fue descubierto mediante ensayo y error en su época, y describir cómo sirve para organizar dichos fenómenos.

Para Freudenthal (1983) los conceptos, estructuras e ideas matemáticas sirven para organizar los fenómenos —tanto del mundo real como de las matemáticas, por ejemplo, los números organizan el fenómeno de la cantidad y en un nivel más alto el fenómeno número se organiza mediante el sistema decimal, es decir, en un primer momento las matemáticas organizan los fenómenos, y esas mismas matemáticas pueden organizar otras matemáticas que pueden convertirse en fenómenos y hacer parte del primer elemento de la pareja (fenómeno- matemáticas).

En la terminología de Freudenthal (1983) describir está relación entre las cosas pensadas y los fenómenos [Noumenon phenomenon] como fenomenología, significa analizar la manera cómo las cosas pensadas (noumenos) sin necesidad de los sentidos, describen los fenómenos (phenomenon) para hacerlos accesibles para el pensamiento. Por ejemplo, la fracción como cosa pensada puede ser una definición de fracción o de número racional, pero los fenómenos aparecen por ejemplo en una comparación (tamaño, proporción, medición y reciprocidad proporcional) que es inherente a la construcción del concepto de la misma fracción.

Comparar medidas de objetos por ejemplo en la situación "Juan gana la mitad que Pedro" nos permite reflexionar que la misma cosa ½ puede aparecer en muchos fenómenos: "representar un trozo de un pastel dividido en dos partes iguales"; "representar el resultado de repartir un chocolate entre 2 niños", "la proporción de café y azúcar vertidas en una taza" o "la longitud de un lienzo si se utiliza un metro como unidad de medida (Freudenthal, 1983 en Puig, 1997). Entonces estas representaciones (interjuego entre lenguaje y cosa) van construyendo en la mente el concepto de fracción como medida, parte todo, cociente, razón, etc., es decir, van generando la construcción de una multiplicidad de significados que tienen las fracciones y que se derivan del tipo de situaciones a las que

---

[8] El fenómeno es la intuición de los objetos exteriores y la que el espíritu tiene de sí mismo representadas en las formas del espacio y del tiempo. Rico (1997)

pueden asociarse en el mundo real. Entonces, este objeto mental es muy complejo y no es posible aprenderlo enseguida, es un proceso que se da a largo plazo.

Describir el noumenon en su relación con los phainomena para los cuales es el medio de organización, e indicando cuáles son los phainomena para cuya organización fue creado y a cuáles puede ser extendido, significa explicar de qué manera actúa el noumenon como medio de organización de esos fenómenos y de qué poder nos dota sobre ellos (Godino, 2010). Empero, hay una diferencia entre fenomenología y fenomenología didáctica, si la relación entre noumenon y phainomenon se enfoca en los procesos cognitivos o en la manera cómo se adquiere tal relación en un proceso de enseñanza—aprendizaje, se habla de la fenomenología didáctica de ese noumenon, en ésta una estructura matemática se trata como producto cognitivo que describe sus objetos posiblemente no matemáticos de una determinada forma. En el caso de la fenomenología a secas, se considera como materia de enseñanza y aprendizaje lo que es un proceso cognitivo.

Entonces las matemáticas surgen de los fenómenos porque abstraen, organizan y estructuran grandes familias de fenómenos, dando lugar a los conceptos matemáticos pero, para llegar a ellos primero se conforman los objetos mentales.

La constitución de objetos mentales.

Habitualmente se considera que para concebir un cierto objeto X, se enseña o se intenta enseñar el concepto de X (Godino, 2010), así, pareciera que el término -concepto de- es más digno que la misma enseñanza; se cae en la ilusión que éste agrega más comprensión a lo que se aprende. En contraste con esta idea, se piensa que utilizar procedimientos “menos formales” es solo una acción para llegar de nuevo a los conceptos, sin embargo la cognición no comienza con conceptos, sino en sentido contrario, los conceptos son el resultado de procesos cognitivos. En este sentido, Freudenthal evita utilizar el término “adquisición de concepto” y en su lugar habla de la constitución de los objetos mentales, acción que desde su punto de vista, es anterior a la adquisición de conceptos y puede ser altamente efectiva, incluso si no le sigue la adquisición de conceptos, ya que,

> […] históricamente el objeto mental -de grupo- precede al concepto de grupo; por medio siglo aproximadamente Leibniz y John Bernoulli usaron la palabra "función"

para algunos sucesos que no era más que un objeto mental, y solo en la primera aparición de un símbolo de letra para una función en los papeles de Alembert y Euler era el camino pavimentado para el concepto de función. (Freudenthal, 2002)

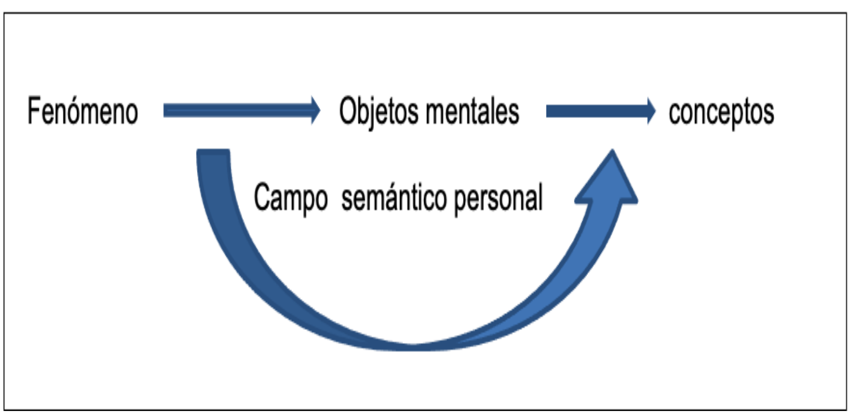
Lo anterior significa que deberían buscarse primero fenómenos que pudieran compeler al estudiante a constituir el objeto mental que está siendo matematizado (Godino, 2010), poner por delante la fenomenología, o sea, las situaciones problemas (fenómenos) que inducen a la acción matemática (matematizar), para que con ello se comenzarán a constituir "objetos mentales", es decir, una estructura cognitiva personal que posteriormente podrá ser enriquecida con la visión discursiva cultural.

En términos de las fracciones, podría decirse que antes de la construcción de fracción como mega concepto (ya sea comparador, fracturador, etc.) deberían constituirse objetos mentales reflexionando sobre fenómenos como medir en contextos escolares y familiares con medidas no arbitrarias de diferentes tamaños, describir una cantidad o un valor de una magnitud por medio de otra, comparar dos objetos como cosa con un tercer objeto. Todo esto a través de la historia de las fracciones donde los objetos mentales matemáticos se modifican como consecuencia de su uso y el uso en el contexto (Freudenthal, 1983).

En la siguiente figura, puede apreciarse cómo a través de la actividad matemática se evoca la constitución de objetos mentales (que están en la mente del sujeto) en contraposición a la adquisición de los conceptos ya definidos que provienen de la matemática como disciplina.

Figura 14

Constitución de objetos mentales



La actividad matemática permite construir conceptos a partir de la constitución de objetos mentales, que a su vez gestan otros objetos mentales y ambos se constituyen como medios de organización de fenómenos. Las modificaciones de un objeto mental no indican que el objeto mental original era erróneo y que se tenga que ver la historia de los objetos mentales matemáticos como un avance hacia la verdad, (Gómez, 2011), ya que cada objeto mental tiene un proceso dinámico que los crea, en el cual hay otros objetos metales.

De manera entonces que desde esta perspectiva, la propia actividad matemática, que implica temas de la realidad y matemáticos, debe tratarse como materia prima para la reflexión, aunque en este punto surge la incógnita ¿cómo formar una educación matemática que concilie la realidad con la matemática misma? De acuerdo con Freudenthal la respuesta se encuentra en la amalgama de la reinvención guiada cuyo contenido principal es la matematización progresiva (Treffers, 1987); los niveles de procesos de aprendizaje (Van Hiele)[9], y la "fenomenología didáctica" (Freudenthal, 1983).

Desde la perspectiva de Santamaria (2006), se trataría de comenzar con una exploración fenomenológica de los aspectos reales de los conceptos y estructuras matemáticas (primer nivel), continuar lentamente hasta las operaciones formales (segundo nivel) y avanzar entonces hasta matematización progresiva (tercer nivel), dando así una primera idea para un marco de la teoría educacional. Si pensáramos en las fracciones se comenzaría con el listado de fenómenos que pueden organizarse y que le dan el *status* de mega concepto por su multiplicidad de significados, esto nos obliga a conocer la historia de la matemática y la relación en particular con las fracciones, sus inicios y sus usos en contexto. También sería necesario explorar los contextos[10], ¿para qué se usan las fracciones? ¿A qué situaciones dan respuesta las fracciones? y posteriormente plantear una trayectoria hipotética de aprendizaje en la que se propongan situaciones problema a los estudiantes.

[9] El primer nivel del pensamiento se da cuando, a través de la experimentación llega a establecer características fundamentales del objeto de estudio (sin relacionarlas entre sí). El segundo nivel, tan pronto como aprenda a establecer interrelaciones entre esas características. El tercer nivel, cuando el alumno sea capaz de justificar esas relaciones o interrelaciones a partir de sus propiedades y del uso del método matemático. Se retomarán a mayor profundidad en apartados posteriores.

[10] Aquí el término "contexto" se utiliza para referirse a la agrupación de todos los fenómenos que comparten una misma característica estructural (Gómez, 2011).

2.3 EL ANÁLISIS FENOMENOLÓGICO

El análisis fenomenológico de un concepto matemático o de una estructura, es la descripción de los fenómenos para los cuáles el concepto o estructura es un medio efectivo de organización y de la relación entre concepto-estructura con los fenómenos. En el contexto de la fenomenología didáctica, este análisis cobra relevancia porque no es otra cosa que una agrupación y clasificación de fenómenos (Puig, 1997).

Ahora bien, el análisis fenomenológico tal como la plantea Freudenthal (1983), se conforma con varios análisis fenomenológicos que se articulan unos con otros ya que además son necesarios para desarrollar procesos de enseñanza. En el contexto de la fenomenología didáctica todos son importantes aunque propiamente dicho, sólo uno de esos análisis pueda considerarse estrictamente didáctico. En otras palabras, cuando se prepara la enseñanza de un determinado concepto o estructura matemática desde la perspectiva de la EMR, debe realizarse un "análisis fenomenológico, el cual a su vez se integra con varios análisis de menor jerarquía, en la siguiente tabla pueden apreciarse los distintos análisis y fenomenologías que integran un "análisis fenomenológico"

Tabla 4

Análisis Fenomenológico. Fuente: Puig, 1997

ANÁLISIS FENOMENOLÓGICO	
Tipo de fenomenología	**Fenómenos a analizar**
Fenomenología.	Se analizan los fenómenos ya organizados en las matemáticas y se toman en el momento actual, con sus usos y el estado en que se encuentren.
Fenomenología histórica.	Se analizan especialmente los fenómenos para cuya organización se creó el concepto o estructura matemática en cuestión. También se revisa la manera cómo se extendió a otros fenómenos.
Fenomenología genética.	Se analizan los fenómenos que, se consideran, corresponden con el desarrollo cognitivo de estudiantes.
Fenomenología didáctica.	Se analizan los fenómenos propios del mundo de los alumnos, los que se propondrán en las secuencias de enseñanza.

La fenomenología didáctica[11] de Freudenthal ya como metodología de investigación (Puig, 1997*)* propone la búsqueda de contextos y situaciones que requieren ser organizados matemáticamente. Desde la EMR, las dos fuentes principales de esta búsqueda son la historia de la matemática y las invenciones y producciones matemáticas espontáneas de los estudiantes; se conjunta la fenomenología pura (conceptos, estructuras); histórica (cómo se produjeron, se adquirieron o conformaron); didáctica (relaciones de los procesos enseñanza aprendizaje en el desarrollo educativo) y termina en todo caso con una fenomenología genética, pero no focalizada, "…Al escribir una fenomenología didáctica uno puede pensar que debería estar basada en una fenomenología genética, pero que esta idea es errónea…" (Freudenthal en Puig, 1997)

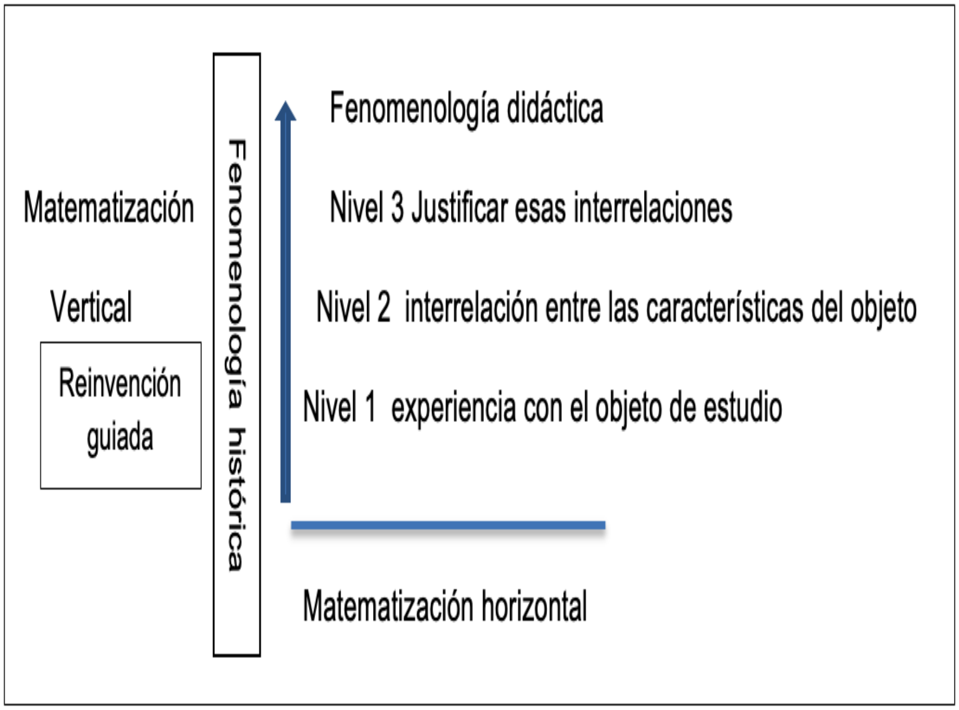
Esta idea Freudenthaliana discrepa de la educación tradicional, que se focaliza en los resultados , el producto (conjunto de saberes adquiridos), que tiene como una de las bases la teoría psicogenética de Piaget, que enfatiza en el estado cognitivo del aprendiz, pero deja desprotegido el ámbito del aula, el proceso (desarrollo educativo). La didáctica realista invita pues a reemplazar la visión del alumno como receptor pasivo de una matemática prefabricada, por la de un sujeto que participa, junto con otros, en la organización matemática de fenómenos imaginables. (Bressan, 2004).

Entonces, el objetivo de una investigación fenomenológica didáctica en tanto metodología de investigación es encontrar situaciones problema de las cuales se puedan generalizar situaciones para abordar la enseñanza de un determinado objeto matemático y encontrar situaciones que puedan evocar procedimientos paradigmáticos de solución como base para la matematización vertical. Desde esta perspectiva, encontrar fenómenos que puedan ser matematizados nos permite comprender la manera cómo fueron inventados, creados o construidos.

[11] En la fenomenología pura, los conceptos o las estructuras matemáticas se tratan como *productos* cognitivos, mientras que en el caso de la fenomenología didáctica se tratan como *procesos* cognitivos situados en el sistema educativo como materia de enseñanza y siendo aprendidos por los alumnos.. (Puig, 1997)

Figura 15

Procesos de la Fenomenología Didáctica



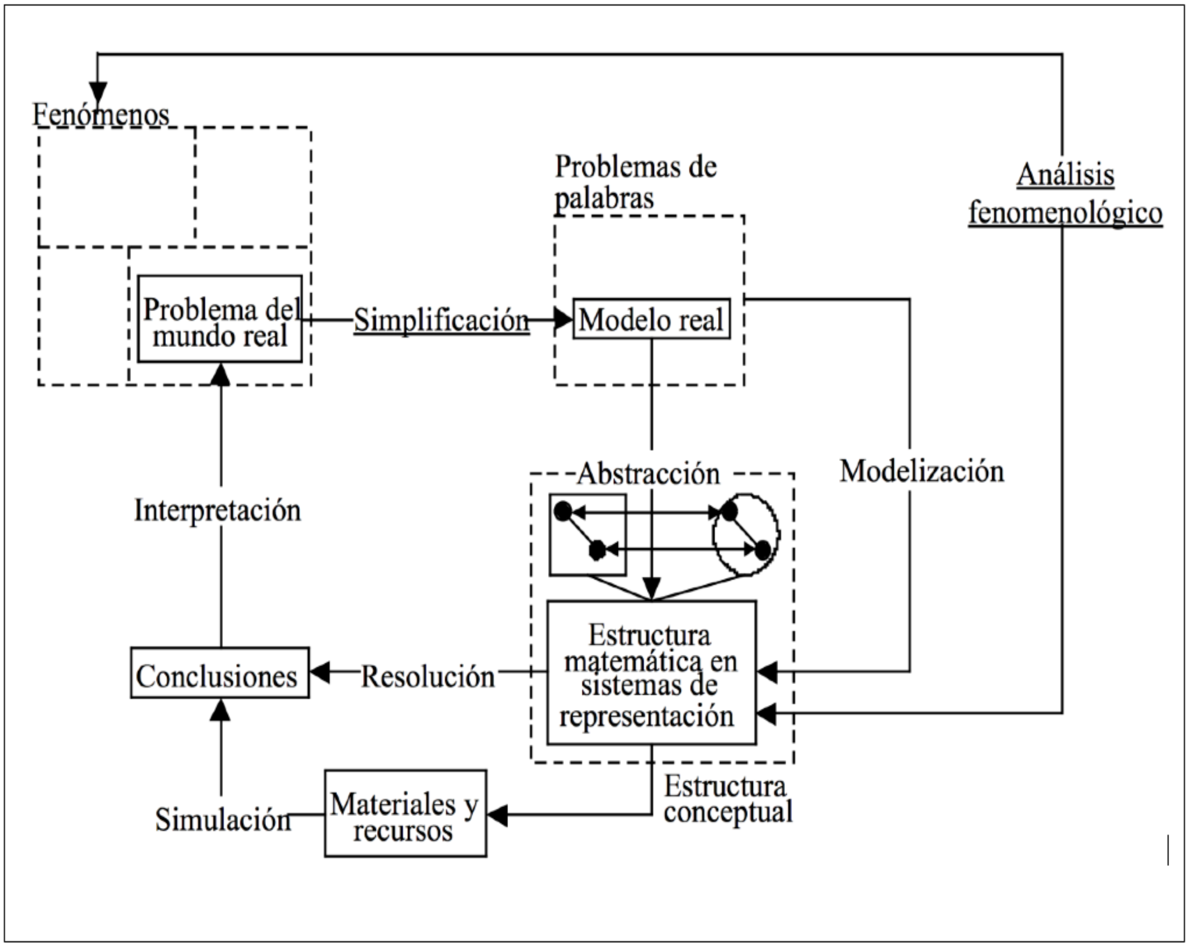
La actividad en un nivel está sometida a análisis en el siguiente, el tema operatorio en un nivel se torna objeto del siguiente nivel. (Santamaría, 2006), es decir no se sustituye el objeto mental, sino por un nuevo objeto mental que contiene al concepto creado por la definición que es compatible con él, al menos provisionalmente .

Es así que el análisis fenomenológico permite identificar los contextos que organizan esos fenómenos y las subestructuras que les sirven de modelos y describir las relaciones entre esas subestructuras y esos contextos.

El análisis desde la perspectiva fenomenológica será la herramienta para analizar los temas matemáticos que se enseñan, por ende es necesario tener un conocimiento teórico del análisis fenomenológico y de las técnicas que conforman su conocimiento técnico.

Figura 16

Análisis fenomenológico (Gómez, 2011)



Lo teórico [estudio de los fenómenos] establece también las maneras en que el tema organiza esos fenómenos (fenómeno, contexto, característica estructura, subestructura relación entre subestructuras y contexto); situación, uso de tema y problemas a los que el tema da respuesta. Lo técnico [identificación de fenómenos que dan sentido al tema] es la organización de esos fenómenos.

2.4 PRINCIPIOS DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA

Ahora bien, para organizar y dirigir la matematización progresiva, la EMR propone una serie de principios.

Principio de actividad

Este principio gira en torno de la idea de que la matemática debe pensarse como una actividad humana, accesible para todos y como toda actividad, la mejor manera de aprenderla es haciéndola ya que "enfocar el contexto como un ruido, susceptible de perturbar la claridad del mensaje matemático, es un error; el contexto por sí mismo es el mensaje, siendo las matemáticas un medio para decodificarlo (Freudenthal, en Bressan, Zolkower y Gallego, 2004, p.3).

En el sentido de la idea anterior y parafraseando a Freudenthal (1993) podría decirse que aprender el resultado de las matemáticas ya hechas es anti didáctico, al contrario de esto, hay que aprender a hacer matemáticas, aprender el proceso de la actividad en sí proporcionando situaciones problemáticas para que los alumnos adquieran conocimientos que les permitan abordar esas situaciones en la vida cotidiana porque la matemática no sólo instructiva, es educativa porque permite comprender y participar en la forma en la que se organiza el entorno social y cultural. De manera entonces que se debe tratar a la propia actividad matemática como materia prima para la reflexión.

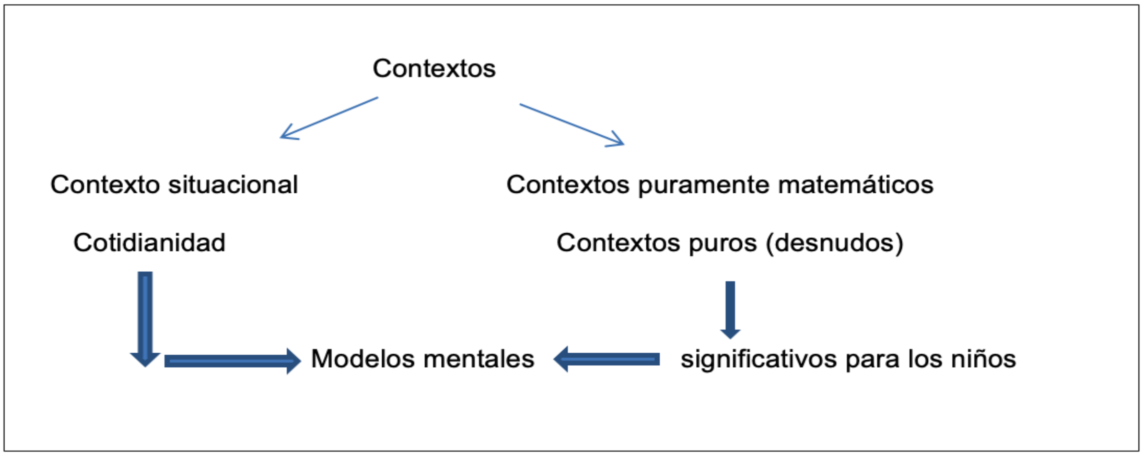
Principio de Realidad

En este principio se asume que la matemática surge como una organización (matematización) de la realidad, por ello su aprendizaje debe originarse en ella también, de manera que sería necesario presentar los problemas de modo tal que los alumnos puedan imaginar las situaciones en cuestión y, a partir de ahí, utilizar su sentido común y poner en juego los procedimientos de cálculo, las estrategias de resolución y los modelos matemáticos que mejor sirvan para organizarlas.

Al ser significativos para el aprendiz, en la EMR se piensa que los contextos propician que los alumnos puedan poner en práctica sus conocimientos previos, aquellos que son parte de su sentido común (Freudenthal, citado por Bressan, et al., 2004).

Figura 17

La función de los contextos



Empero, debe aclararse que un contexto realista no alude al significado literal de la palabra, en la EMR el contexto depende de las experiencias previas de los alumnos y/o de su capacidad para imaginarlo o visualizarlo, es decir, los contextos son situaciones problemáticas que puedan ser "reales" en la mente del alumno. Muchos de estos contextos (reales en la mente del alumno) se tornarán modelos mentales a los cuales los alumnos podrán acudir para recordar estrategias de solución utilizadas en ellos.

Principio de Reinvención

Como lo menciona Freudenthal (en Bressan et al., 2004), la matemática no es otra cosa que una forma de sentido común, sólo que más organizada, es un proceso que se hace a través de la reinvención guiada, como "…un balance sutil entre la libertad de inventar y la fuerza de guiar"(p.5).

Bajo esta lógica, la educación matemática a través del profesor debe dar a los alumnos la oportunidad (guiada) de reinventar la matemática, no de crearla ni descubrirla, sino reinventar modelos, conceptos, operaciones y estrategias matemáticas mediante un proceso similar al que usan los matemáticos al inventarlas. Como se puede advertir, el papel del maestro es preponderante, dado que será él quien dirija este proceso para que el alumno pueda realizar tal reinvención.

Como se dijo, no se trata de inventar, sino de que el alumno transite de sus producciones informales a una institucionalización, es decir, al uso de los modelos matemáticos establecidos convencionalmente y en ese proceso el docente es intermediario entre el alumno y las situaciones; entre los alumnos y otros alumnos y; entre las producciones informales y las estrategias convencionales o instituidas.

Para orientar adecuadamente este proceso es importante que el profesor tenga la capacidad de anticipación, de observación (y autoobservación) y de reflexión acerca de los aprendizajes a corto y largo plazo de sus alumnos. (Bressan, et al., 2016), todo ello permitirá al docente conocer al alumno en su proceso cognitivo, incluso las discontinuidades en su aprendizaje, que de acuerdo a Freudenthal (en Gravemeijer, et al., 2000) son esenciales ya que tales discontinuidades pueden ser vistas como producción de cortes breves o toma de diferentes perspectivas y permitirán organizar el ambiente en el aula para lograr la reinvención.

Principio de Niveles

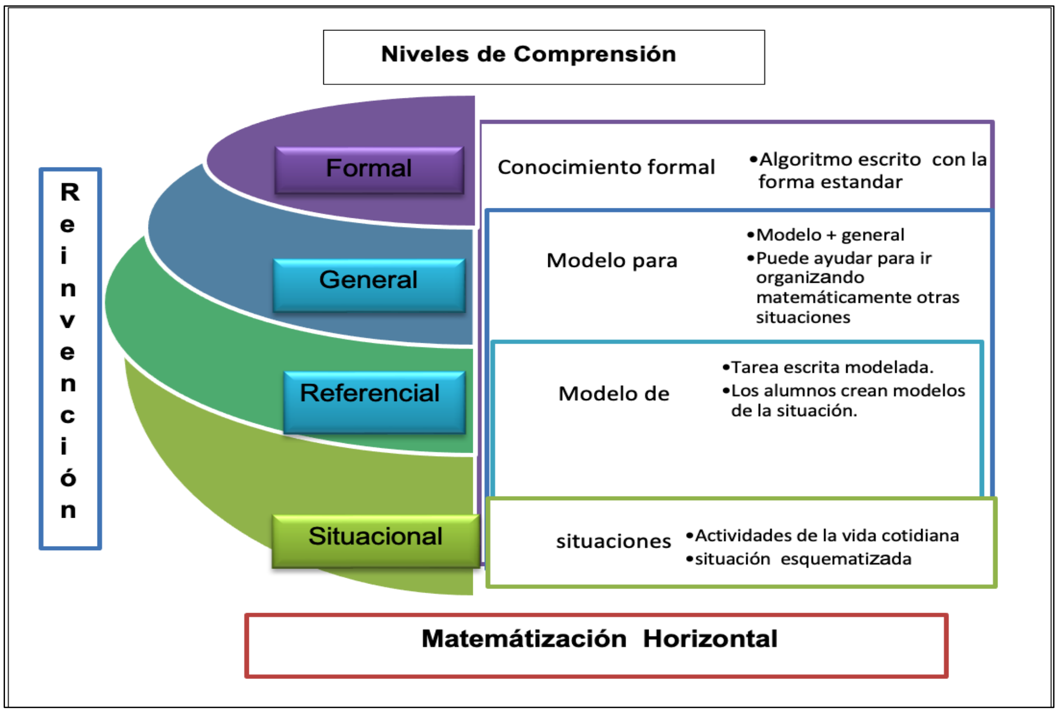
A partir de lo expuesto en los anteriores principios, se puede decir que la reinvención guiada reposa sobre lo que Treffers (1987, en Santamaría, 2006) denomina "matematización progresiva", es decir, para aprender los alumnos deben comenzar por matematizar una situación de la realidad para luego analizar su propia actividad matemática. La conceptualización del proceso de matematización progresiva fue profundizado por Treffers (1987) y retomado por Freudenthal (1991), para establecer dos formas de matematización:

- La matematización horizontal, (va del mundo real al mundo de los símbolos) que consiste en convertir un problema contextual en un problema matemático, basándose en la intuición, el sentido común, la aproximación empírica, la observación y la experimentación inductiva. Es un proceso de negociación y generalización de los procesos de solución informales.
- La matematización vertical, (desenvolverse en la matemática misma, en el mundo de los símbolos) conlleva reflexionar y generalizar las estrategias para reinventar su propia caja de herramientas didácticas con el objeto de lograr mayores niveles de formalización matemática.

En un análisis más fino, puede pensarse que la matematización progresiva da lugar a reconocer ciertos niveles de comprensión: el nivel *situacional, el referencial, el general y* *el formal. Esos niveles* están ligados al uso de estrategias, modelos y lenguajes de distinta categoría cognitiva sin que ello signifique que constituyen una jerarquía rígida e inflexible (Freudenthal, 1991; Gravemeijer, 1994; Gravemeijer & Terwel, 2000). La manera como se estructuran estos niveles puede verse en el siguiente diagrama.

Figura 18

Matematización progresiva (Gravemeijer, 1994)



Como se puede apreciar, el Nivel situacional es el conocimiento de la situación y en éste el alumno utiliza estrategias en el contexto de la misma.

En el Nivel referencial aparecen los modelos, las descripciones, los conceptos y los procedimientos que esquematizan el problema concreto.

En el Nivel general mediante la exploración, la reflexión y la generalización del nivel anterior, los alumnos superan la referencia al contexto.

Por último, en el Nivel formal los alumnos trabajan con los procedimientos y notaciones convencionales.

Cabe aclarar que estos niveles son dinámicos, es decir, un alumno puede funcionar en diferentes niveles de comprensión, para contenidos distintos o partes de un mismo contenido ya que, “La evolución entre niveles se da cuando la actividad en un nivel es sometida a análisis en el siguiente, el tema operatorio en un nivel se torna objeto del siguiente nivel” *(Freudenthal 1971, en Bressan, et al. 2016, p.7).*

En este contexto los modelos y la reflexión colectiva, son representaciones de situaciones donde se reflejan aspectos matemáticos relevantes para solucionar ya que se aceptan modelos o estrategias informales de los alumnos porque éstos organizan la actividad, sirven como puente entre las matemáticas formales y las informales, lo que favorece la matematización vertical. Este proceso de matematización debe basarse en el análisis reflexivo del trabajo oral y escrito de los alumnos, con particular atención en los momentos claves (búsqueda de atajos, cambios de punto de vista, creación o apropiación de modelos más elaborados, etc.), en los procesos de esquematización o formalización progresivas y en organizar o estructurar las discusiones en torno a las soluciones propuestas por los mismos, de modo tal que pueda hacerse visible y explícita la trayectoria seguida hacia niveles de generalización más formales, eficientes y sofisticados.

Principio de interacción

El aprendizaje de las matemáticas es una actividad social (Bressan et al., 2016) en la que se discute sobre la interpretación del problema, sobre los distintos procedimientos y sobre las justificaciones y eficacia de la solución. Esa interacción entre alumnos y profesores genera la reflexión y permite acceder a niveles superiores de comprensión. Por esta razón el docente debe ser consciente de ello para ofrecer problemas que permitan dicha interacción, no necesariamente en el mismo nivel, pues como ya se comentó puede haber la interacción de distintos niveles, donde los estudiantes utilizan sus procedimientos informales que fungen como palanca para alcanzar los formales. (Santamaria, 2006).

Cierto es que en la EMR, se destaca el lugar que ocupa el alumno y su aprendizaje en la individualidad, sin embargo no se deja a un lado la importancia que en su trayecto tiene la interacción con los demás.

Principio de interconexión (estructuración)

Este principio reposa sobre la idea de que el alumno como sujeto activo y en una actividad humana, puede resolver una situación con las herramientas que él posee, con los recursos con los que cuente o utilizar más de una estrategia para llevar a cabo su proceso, es decir, la resolución de situaciones problemáticas realistas exige establecer la conexión y aplicación de varias herramientas matemáticas. En palabras de Freudenthal (1982) “Lo que realmente importa es saber cómo encaja el tema en todo el cuerpo de la enseñanza matemática, si se puede o no integrar con todo, o si es tan estrafalario o aislado que, finalmente, no dejaría ninguna huella en la educación”, (citado en Bressan et al., 2016, p. 6)

La EMR no hace profundas distinciones entre los ejes curriculares, lo cual da una mayor coherencia a la enseñanza y hace posibles distintos modos de matematizar las situaciones bajo diferentes modelos y lenguajes, logrando alta coherencia a través del currículo, entonces “…la interrelación entre ejes debe darse tan pronto, tanto tiempo y tan fuertemente como sea posible”. (Freudenthal 1991, en Santamaria 2006 p. 22).

La razón es que el estudiante al resolver situaciones es su vida cotidiana no parcela su saber, por tanto él puede resolver una situación problemática con conexiones entre la aritmética, la geometría u otra; así que el principio de interconexión en la EMR, busca esa ,interrelación entre los ejes de enseñanza o las unidades de las matemáticas.

Freudenthal (1991 en Santamaria, 2006, p.22) hace énfasis en que la mejor forma de aprender y enseñar matemática es en grupos heterogéneos; entonces no se puede atomizar la matemática, mientras un alumno resuelve una situación problema con algebra otro lo hará con geometría o aritmética, así que la EMR como actividad humana exige una ampliación en el rango de comprensiones y herramientas matemáticas.

CAPÍTULO III

EL EXPERIMENTO DE DISEÑO. UNA ALTERNATIVA METODOLÓGICA PARA LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA

El almacén del conocimiento
dejó de ser exclusivamente acústico,
se convirtió en un archivo material y
por tanto se podía ampliar sin límites
(Vallejo, 2022)

A partir de la década de los setenta comenzó a desarrollarse un movimiento en psicología y educación denominado enfoque cognoscitivo[1] (Brown, 1992) que trajo consigo la necesidad de buscar alternativas a la metodología experimental, rutas metodológicas [evolutivas] que pudiesen capturar la naturaleza del aprendizaje y la enseñanza de forma libre y real; buscar métodos que renunciaran al control de las variables a cambio de una mayor validez. De lo que se trataba era de investigar cómo se daba el aprendizaje y la enseñanza sin tener el control absoluto de las variables y los posibles resultados, y de saber lo que sucedía realmente en las aulas de clase.

Por lo tanto, se requería una nueva metodología para llevar a cabo la investigación que no fuese por el camino positivista en el que generalmente el objetivo consiste en explicar, predecir y controlar los fenómenos de estudio e identificar las regularidades sujetas a leyes con la intención de generalizar y obtener leyes universales (Latorre et al., 1996, en Gutiérrez 2005). Para dar valor y contexto a dicha idea, la experiencia propia de Ann L. Brown[2] señala:

---

[1] Véase artículo completo *Design Experiments: Theoretical and Methodological Challenges in Creating Complex Interventions in Classroom Settings*. (Brown 1992)

[2] Psicóloga investigadora. Su interés en la memoria humana la llevó a focalizarse en las estrategias de la memoria activa que ayudaría a mejorar la memoria y las diferencias del desarrollo en las tareas de la memoria. Su comprensión acerca de que las dificultades en el aprendizaje de los niños normalmente provienen de una incapacidad para usar estrategias metacognitivas condujo a profundos avances en la teoría sobre la Psicología educativa y en los procedimientos de enseñanza. Brown fue clave en el desarrollo del método de la enseñanza recíproca, en el que profesores y alumnos se turnan en la conducción de las lecturas estructuradas de textos.

> […] Mi formación fue la de una teórico del aprendizaje clásico preparado para trabajar con "sujetos" (ratas, niños, estudiantes de segundo año), en laboratorios estrictamente controlados. Los métodos que he empleado en mi vida anterior no son transportados fácilmente a las actividades de investigación que supervisó actualmente. Difícil hacerlo en contextos arbitrarios. Me moví de la posición psicológica clásica de concentrarse en un estudio teórico de los procesos de aprendizaje de estudiantes individuales para concentrarse en conceptos, un intercambio entre maestros y estudiantes, para establecer un ethos en el aula, eso fomentaría el aprendizaje autorreflexivo. (Brown, 1992, p. 144)

3.1 LA INVESTIGACIÓN DE DISEÑO, LOS ORÍGENES.

En este contexto, la historia de la investigación tuvo un cambio, se transitó de la realización de experimentos en condiciones de laboratorio con procedimientos cuidadosamente definidos y controlados, a la realización de experimentos de diseño, ahora el foco del diseño era "el diseño de algo" que intentaría experimentar en entornos de la vida real con el objetivo de perfeccionar el diseño que se prueba para en la práctica. Desde esta aproximación tanto investigadores como docentes coincidimos en la prioridad de conocer lo que sucede en el aula cuando los alumnos adquieren conocimientos a partir de metodologías sensibles a la complejidad de los contextos de enseñanza/aprendizaje, lo que conlleva aumentar la relevancia de la investigación para la práctica.

Es de este modo, para la contribución a la resolución de un problema y generar nuevo conocimiento, Collins (1992, 2010) pone en evidencia la relevancia de la metodología "experimento de diseño" al compararla con la metodología experimental cuando afirma que[3] […] aprender en un laboratorio no se parece en nada a lo que pasa en un aula, lugar de trabajo u hogar típico, donde la mayoría del aprendizaje ocurre en la vida. (Collins, 2010, p. 3). De esta manera, para evitar las distorsiones del laboratorio, se establecen experimentos de diseño en las situaciones desordenadas que caracterizan el aprendizaje en la vida real.

En los experimentos realizados en condiciones de laboratorio se evitan efectos contaminantes, es decir, los alumnos únicamente se concentran en la tarea sin distracciones, acciones o interrupciones; la presentación es usualmente unidireccional en

[3] Metodología utilizada para estudiar el aprendizaje humano en psicología, basada en estudios experimentales.

lugar de depender de la interacción entre profesores y alumnos. En contraste, los experimentos de diseño se basan en la interacción social que presenta muchas variables[4] dependientes en situaciones complejas como el aula, donde los estudiantes pueden estar compartiendo ideas, pero también haciendo el bullicio y ruido que caracterizan el aprendizaje. En este caso el objetivo no se trata de identificar todas las variables o características de la situación, que afectan a cualquier variable dependiente que interesa, tampoco identificar la naturaleza y extensión del efecto.

Entre otras características, el experimento de diseño rechaza los procedimientos fijos [inflexibles] cuidadosamente documentados para que puedan ser replicados por otros experimentadores que sigue el método experimental, en cambio plantea una revisión flexible del diseño basado en las necesidades de los estudiantes, que comienza con procedimientos y materiales planificados no completamente definidos (con el objetivo de observar varias perspectivas del diseño y desarrollo); esta revisión (que involucra al investigador, maestro y desarrollador instruccional) depende de su éxito en la práctica para desarrollar un perfil cualitativo y cuantitativo que caracterice el ulterior diseño en la práctica. Cabe aclarar que cada implementación de un diseño educativo es diferente por lo que es importante identificar la teoría sobre la que se basa cada uno de ellos, por ejemplo, en la investigación de tesis doctoral de Santamaría (2006) y en el estudio de Cortina (2014) se tuvo como soporte a la Educación Matemática Realista.

Es así como los experimentos de diseño], introducidos de manera formal por Brown (1992) y Collins (1992), fueron desarrollados como una forma de llevar a cabo una investigación formativa para probar y refinar diseños educativos[5] basados en principios derivados de investigaciones previas con la finalidad de mejorar la práctica educativa, esto es, para que se dé un 'cambio'. La educación a lo largo de la historia ha tenido que adaptarse constantemente a una sociedad cambiante, por lo tanto, el "cambio" como concepto es preferible a la noción de 'mejora', en la medida que se considera que una mejor educación depende de las necesidades y prioridades de la sociedad en un momento dado

[4] Variables: (a) variables climáticas, como el compromiso de los alumnos, la cooperación entre los alumnos y el riesgo tomando por los alumnos, (b) variables de resultado, incluyendo el aprendizaje de contenido, habilidades, estrategias y disposiciones, y (c) variables del sistema, como la difusión del uso, el mantenimiento capacidad y facilidad de adopción (Collins, 2010).

[5] Se trata de una metodología específica de la educación. Al contrario de otras metodologías que vienen de la psicología o la sociología.

en tiempo (Freudenthal, 2000) y a medida que la sociedad cambia, la educación también debería cambiar.

3.2. LA INVESTIGACIÓN DE DISEÑO. UN PARADIGMA EMERGENTE EN EL CAMPO EDUCATIVO.

La investigación basada en el diseño (Brown, 1992; Collins, 1992; Molina 2011; Mckenney, Reeves, 2013; Valverde 2014) es un paradigma[6] metodológico emergente, principalmente de naturaleza cualitativa desarrollado en el campo de las "Ciencias del aprendizaje". Su objetivo es el estudio del aprendizaje en contexto a través del diseño sistemático y el estudio de estrategias de instrucción y herramientas de enseñanza, de una forma sensible a la naturaleza sistémica del aprendizaje, la enseñanza y la evaluación (Molina et al., 2011). Su propósito es atender tanto la resolución de problemas como el uso del conocimiento y a través de ese proceso generar nuevo conocimiento (Mc Kenney y Reeves, 2013).

Aunque es un paradigma relativamente joven (finales del siglo XX, principios del XXI), Dewey (1900) expresaba ya la necesidad de articular las ideas empíricas y los avances teóricos para informar sobre las iniciativas y la mejora de problemas en la práctica; necesidad que años más tarde Freudenthal (1973) aún evocaba, él decía que en la investigación tradicional la cadena que va de la investigación hasta el aula es demasiado larga, y que el rastro no debe comenzar en sillones o en el laboratorio, sino en aula. Hacer una investigación básica inspirada en el uso, es entonces "un conocimiento utilizable" (Lagemann, 2002)

En este sentido se reitera que en esta perspectiva los investigadores (que pueden ser los mismos docentes) intentan resolver problemas importantes del mundo real y al mismo tiempo buscan descubrir nuevos conocimientos que puedan informar sobre el trabajo de otros que enfrentan problemas similares, se trata de una mejora continua, de trabajar de manera sistemática y simultánea. (Mc. Kenney & Reeves, 2013).

---

[6] De Miguel (1988) porque es una definición muy orientada a la investigación educativa. Para él, paradigma se refiere a "un punto de vista o modo de ver, analizar e interpretar los procesos educativos que tienen los miembros de una comunidad científica y que se caracteriza por el hecho de que tanto científicos como prácticos comparten un conjunto de valores, postulados, fines, normas, lenguajes, creencias y formas de percibir y comprender los procesos educacionales" (Sosa, 2010).

La mayoría de la investigación realizada en esta ruta se ha encaminado al diseño de entornos de aprendizaje, utilizados en mayor medida en el campo de la didáctica de la matemática (Molina et al., 2011); dicha afirmación se sustenta en la difusión de los estudios de diseño en diversas publicaciones y colectivos de investigadores, como el grupo Design-Based Research Collective (2003).

3.2.1 Naturaleza de la Investigación de Diseño

Al revisar la literatura ubicada bajo la rúbrica "experimentos de diseño" o "estudios de diseño", se observa una variación de términos para referirse más recientemente a la investigación de diseño, entre otros se utiliza "investigación formativa" (Newman, 1990); "experimento de diseño" (Brown, 1992); "investigación basada en diseño" (Barab y Squire, 2004); "investigación del desarrollo" (Gravemeijer, 2004); "experimentos formativos" (Reinking y Bradley,2008) e; "investigación de diseño" (Kelly et al. 2008 en Molina, 2011).

Esta diversidad se explica en parte, por las tradiciones metodológicas en los diversos sectores educativos, por las preferencias individuales de los investigadores y por los recursos disponibles para proyectos específicos. En nuestro caso para evitar un error en la identificación respecto del ex diseño experimental o para evitar confusiones con el término "diseño instruccional" se adoptará la terminología de "Investigación de Diseño" para referirnos al paradigma en general, y "Experimento de diseño" para la metodología específica, enfocándonos en "experimentos de enseñanza".[7]

En esta polisemia cada autor propone una serie de matices que contribuyen a la comprensión de este paradigma de investigación, pero en el intento de configurar la metodología que se utilizará en esta investigación se retoman aquellos términos que más pueden contribuir a su concreción (más adelante se profundiza sobre sus características). Sobre este respecto Molina (2011), precisa que la investigación de diseño está dirigida principalmente a comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje en los que el propio investigador (qué puede ser el mismo docente) se encuentra implicado. Como lo planteó Freudenthal (en Gravemeijer y Terwel, 2000), en esta forma de investigar desde el principio es fundamental involucrar a todos los participantes y dar un papel central al diálogo entre investigadores, desarrolladores de planes de estudio y profesores, bajo el lema desarrollo

---

[7] Asumimos que una noción similar a la de "Experimento de Diseño" es la de Ingeniería Didáctica, mayormente utilizada en la escuela francesa de Didáctica de las Matemáticas.

educativo en diálogo con el "campo" (Freudenthal, 1991), además es necesario crear la oportunidad para que los maestros se involucren en el proceso de aprendizaje del investigador para adquirir conciencia y poder explicar su desarrollo.

En esta misma idea Confrey (2006, p.135, en Molina et al., 2011) menciona que la investigación de diseño pretende documentar los recursos y conocimientos que manifiestan los alumnos en la resolución de las tareas, las interacciones entre los estudiantes y profesores, la evolución de las concepciones y en general, cómo se realiza la enseñanza a lo largo de la experimentación.

Por su parte, Mckenney y Reeves (2013) afirman que la investigación del diseño con el apelativo "educativo" es un género de investigación en el que el desarrollo iterativo de soluciones (productos, procesos, programas o políticas educativas) a problemas educativos prácticos y complejos, proporciona el marco para la investigación científica que, para responder preguntas de investigación, puede utilizar métodos cuantitativos, cualitativos y probablemente con mayor frecuencia, mixtos (p.8). Al hacerlo así, la investigación de diseño educativo se mantiene con los mismos estándares que otros trabajos científicos si se trata de proporcionar transparencia al proceso y garantías adecuadas para las afirmaciones de conocimiento que produce.

Un argumento adicional para no polarizar la investigación de diseño es que el ser humano procede de una realidad objetiva (recursos tangibles) y un realidad subjetiva (compuesta por varias realidades con múltiples interacciones que construyen significados distintos), ambas formas pueden coexistir, dándose un diálogo entre una visión objetiva y otra subjetiva, que conforman la naturaleza humana (Hernández et al., 2014), entonces la investigación puede ayudarse de métodos cualitativos y cuantitativos (métodos mixtos), que son más conscientes, así como nuestra estructura mental y comportamiento habitual (p. 548). En palabras de Romo (2020) la legitimidad de la investigación depende de lo que queremos cuidar, ya que puede haber una diversidad metodológica que se puede nutrir de varios marcos de referencia. La visión objetiva (cuantitativa) no puede ser absoluta como tampoco la subjetiva (cualitativa), entonces la intersubjetividad captura la dualidad entre la inducción y la deducción, lo cualitativo y lo cuantitativo.

3.2.2 La Investigación de Diseño y otras metodologías

Algo que podría confundir al lector es que la Investigación de Diseño mantiene una estrecha relación con la investigación-acción y el diseño instruccional, por esta razón es menester profundizar sobre sus distinciones. La investigación-acción y el diseño instruccional son metodologías de investigación, mientras que la investigación de diseño es un paradigma dentro del cual se pueden utilizar diversas metodologías en diferentes momentos de la investigación, todas enmarcadas en la metodología del experimento de diseño.

Entonces la investigación de diseño y la investigación acción mantienen una relación cíclica que permite la retroalimentación de la teoría y la práctica, su desarrollo en contextos naturales, y su interés por comprender o mejorar la realidad educativa. Sin embargo, el papel del investigador es distinto en una y otra; en la primera (investigación de diseño) el investigador es externo o puede ser el docente, mientras que en la segunda (la investigación acción) los miembros del grupo, organización o comunidad fungen como coinvestigadores (Hernández et al., 2014).

Asimismo, existen otras diferencias importantes entre ambas, la investigación-acción surge del paradigma crítico y como tal pugna por el cambio, "educar para transformar", donde el conocimiento genera responsabilidades, por ello todos los participantes del proceso se tornan miembros activos de la investigación. En cambio, en la investigación de diseño se persigue el desarrollo de una teoría, y adicionalmente algún otro producto del diseño sin necesidad de que respondan a una problemática existente, es decir, no se trata de dar respuesta a un problema como tal, sino tener un producto particular -teórico o de otra índole, así como información sobre el proceso de diseño que aporte directrices para guiar futuros diseños. (Molina et al., 2011). Sin embargo, al pensar en continuos podría darse un punto de encuentro, el experimento de diseño[8] podría utilizarse en la evaluación de la investigación de diseño.

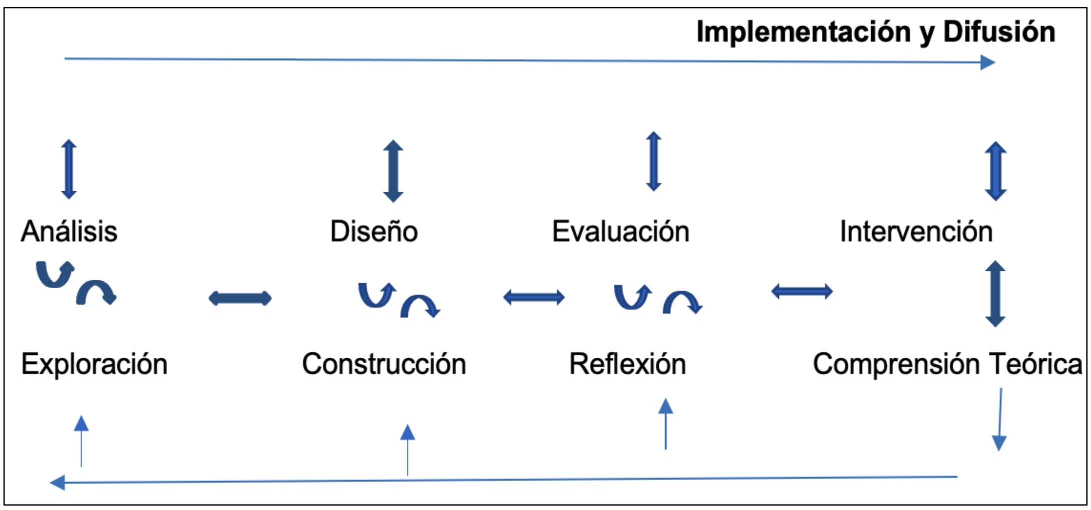
Como se puede ver en la siguiente figura, en la investigación de diseño se da un proceso flexible, bidireccional, que tiene lugar en la interacción con la práctica y produce los resultados duales de conocimiento e intervención. El punto de partida es el análisis de

[8] Los experimentos de diseño son una metodología de la educación matemática cuyo fin principal es el desarrollo de recursos educativos, tanto de naturaleza teórica como práctica, que contribuyan al mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en el ámbito escolar. Cobb, 2007, en (Cortina, 2014 p. 272)

problema, en nuestro caso la exploración en el contexto pedagógico actual del aprendizaje de fracciones, así como el contexto de enseñanza en el aula y el análisis polisémico de la fracción (justificables en términos con los puntos terminales). En el desarrollo de soluciones se plantea una propuesta de enseñanza basada en el experimento de diseño, que tiene como eje vertebral el diseño instruccional (que da pauta a la evolución de los medios de matematización), que se acompaña de la reflexión y refinamientos iterativos que potencializan el cierre de la brecha entre la teoría y la práctica, todo ello con la finalidad de que se constituyan como una guía que permita producir otros principios de diseño.

Figura 19

Modelo para realizar investigaciones de diseño (McKenney & Reeves, 2012)



Ahora bien, la investigación de diseño va más allá del diseño y prueba de intervenciones particulares solamente. Las sesiones de implementación incluyen determinados supuestos y exigencias específicas teóricas sobre la enseñanza y el aprendizaje, reflejan un compromiso para comprender las relaciones entre teoría, plan de acción y práctica, al mismo tiempo que el análisis previsto de cada sesión específica puede contribuir a elaborar teorías localizadas sobre la enseñanza y aprendizaje de un contenido específico. Este aspecto lo distingue de otros enfoques o metodologías como la investigación-acción.

Ahora bien, el diseño instruccional,[9] es parte de la investigación de diseño con un punto de convergencia entre el diseño de situaciones problemáticas que pueden imaginar, y la condición de que sean experiencialmente reales en su mente. Las situaciones problema pueden venir del mundo real, pero también del contexto escolar, siempre y cuando se tornen conocidas, cercanas para ellos, que tengan aplicación y sean una fuente de aprendizaje. No obstante, el proceso no termina ahí, es un proceso cíclico que requiere una metodología de mayor alcance, la metodología de experimento de diseño, cuyo propósito es que tanto el alumnado como el investigador-docente construyan conocimiento. El docente construye conocimiento sobre el proceso de construcción de conocimiento de los alumnos, los demás investigadores construyen conocimiento sobre profesor y alumnos y sobre sus interacciones.

De manera entonces que los experimentos de diseño son complejos, multivariables, multiniveles, intervencionistas, iterativos, orientados por la teoría y hacia la práctica y generadores de modelos teóricos (Cobb et al., 2003; Confrey, 2006; Lesh y Kelly, 2000, citado por Molina et al., 2011 p. 79).

3.3 LA INVESTIGACIÓN DE DISEÑO. CARACTERÍSTICAS DEL PARADIGMA

Al hacer una recapitulación de nuestro paradigma, se puede considerar que la investigación que en él se propone es pragmática porque se ocupa de generar conocimiento (Lagemann, 2002) y soluciones utilizables en los problemas de la práctica. Es también fundamentado porque utiliza la teoría, los hallazgos empíricos y la sabiduría artesanal para guiar el trabajo. Es intervencionista porque se realiza para hacer un cambio en un contexto educativo particular y aunque este no es su objetivo central, lo importante es crear recursos que lo puedan llevar a un nivel mucho más amplio. La investigación de diseño educativo

[9] La metodología de diseño instruccional se conforma de las siguientes 3 fases. La primera fase para desarrollar una secuencia *inicial y provisional* de conceptos que interesa investigar; en la segunda fase lo investigadores experimentan con la secuencia y discuten con uno o varios grupos de alumnos cada uno de los conceptos con la guía de los investigadores, estas discusiones colectivas son documentadas por los investigadores, y analizadas con la finalidad de identificar la diversidad de argumentos que los alumnos presentan (cuando los alumnos son capaces de proporcionar colectivamente razonamientos lógicamente coherentes, se avanza al siguiente concepto de la secuencia. Cuando no es así, en cada concepto de la secuencia, los investigadores tratan de entender las razones por las que se dificulta el avance y realizan los ajustes a la secuencia; como tercera fase, se propone una nueva secuencia la cual es conocida como Trayectoria Hipotética de Aprendizaje. (Cobb, Visnovska, Zhao, 2008; Gravemeijer, 2004)

también es iterativa porque generalmente evoluciona a través de múltiples ciclos de diseño, desarrollo, prueba y revisión. Es colaborativa porque requiere la experiencia de asociaciones multidisciplinarias, incluidos investigadores y profesionales. Es adaptativa porque el diseño de la intervención y a veces también el diseño de la investigación se modifica a menudo de acuerdo con las ideas emergentes. Finalmente, está orientado a la teoría no solo porque utiliza la teoría para fundamentar el diseño, sino también porque el trabajo de diseño y desarrollo se lleva a cabo para contribuir a una comprensión científica más amplia. (Mc kenney y Reeeves, 2013).

3.3.1 Elementos de la Investigación de Diseño

El objetivo de la investigación de diseño es mejorar, cambiar la forma en que un diseño opera en la práctica, documentar sus diseños en detalle, registrar todos los cambios; la meta caracterizar los elementos de diseño que estén en cada fase y las razones de las transiciones de cada fase a la siguiente, lo que significa evaluar la credibilidad de las decisiones de diseño. Este tipo de investigación se distingue por cinco características esenciales:

1. Los objetivos centrales del diseño, entornos de aprendizaje y desarrollo de teorías o de aprendizaje, están entrelazados.
2. El desarrollo e investigación tienen lugar a través de ciclos continuos de diseño, difusión, análisis y rediseño (Cobb, 2004; Collins, 1992).
3. La investigación de diseño contribuye al desarrollo de teorías contextualizadas sobre enseñanza y aprendizaje que ayuden a comunicar a más profesionales y poder contribuir a otros diseños educativos.
4. La investigación debe explicar cómo los diseños funcionan en entornos auténticos. No solo debe documentar el éxito o fracaso, sino también centrarse en aquellas interacciones que clarifican nuestra comprensión de los problemas de aprendizaje involucrados.
5. La evaluación del diseño se basa en métodos que pueden documentar los procesos, que proporcionan evidencias críticas para establecer la conexión entre estos y por qué ocurren ciertos resultados, de esta manera se cumple con su objetivo central que es el rediseño.

Aquí cabe hacer hincapié en que la investigación de diseño no debería convertirse en un eufemismo del "todo vale", es decir, que se pueda utilizar todo tipo de metodologías o que sea un búsqueda o intervención demasiado simplificada y carente de sentido; debemos ser muy cautelosos en ese sentido para definir dentro del experimento de diseño, el tipo de experimento a seguir, para lo cual necesitamos conocer su tipología.

3.3.2 Experimentos de diseño

La multiplicidad de contextos en los que este tipo de estudios puede tener lugar junto con el tipo de personas involucradas, son factores que ocasionan la existencia de diversos tipos de experimentos de diseño. (Molina et al., 2011). Entre ellos se destacan los siguientes:

- Experimentos de diseño “uno a uno”. Un equipo de investigación conduce una serie de sesiones de enseñanza con un pequeño número de estudiantes; el objetivo es crear a pequeña escala la relación del aprendizaje en el aula ordinaria, de modo que pueda ser estudiada con mayor profundidad y detalle (Cobb y Steffe, 1983; Steffe y Thompson, 2000).
- Experimentos con el grupo. Un equipo de investigación colabora con un profesor (que puede ser uno de los miembros) y el equipo asume la responsabilidad de la “enseñanza” (Cobb, 2000; Confrey y Lachance, 2000; Gravemeijer, 1994).
- Experimentos sobre el desarrollo del conocimiento de profesores en activo. Los investigadores colaboran con los profesores para apoyar el desarrollo de una comunidad profesional.
- Experimentos sobre el desarrollo del conocimiento de profesores en formación. Un equipo de investigación ayuda, organiza y estudia la formación de los futuros docentes (Simon, 2000, citado por Valverde 2014).

De acuerdo con nuestro objeto de estudio, la presente investigación se encuadra en los experimentos en el grupo [experimentos de enseñanza], que son los estudios de diseño más frecuentes (Cobb y Gravemeijer, 2008) y consisten en una secuencia de episodios de enseñanza en los que los participantes son normalmente un investigador-docente, uno o más alumnos y uno o más investigadores-observadores (Steffe y Thompson, 2000). La duración del experimento puede ser variable, (en tiempo) y en el ambiente de aprendizaje a observar, pueden ser pequeñas habitaciones-laboratorio para entrevistas, clases completas o incluso ambientes de aprendizajes más amplios.

La característica principal de estos estudios es la construcción de un diseño para establecer la ruptura de la distinción entre docente e investigador, motivada por el propósito de los investigadores de diseñar herramientas y actividades que permitan experimentar de primera mano el aprendizaje y razonamiento de los alumnos (Molina et al., 2011).

3.4. PERSPECTIVAS PARA LA INVESTIGACIÓN BASADA EN EL DISEÑO

A cincuenta años de iniciado el desarrollo de la Educación Matemática Realista (EMR) bajo la filosofía de la matemática como actividad humana, actualmente continúa con la visión de ser una teoría siempre relacionada con procesos, más que con productos. Esto significa que la EMR no se piensa como una teoría preestablecida o terminada, tampoco como un conjunto de objetivos, medios, contenidos y métodos inertes que recaen sólo en un dominio teórico de instrucción.

Al contrario de esto, a través de los años se ha hecho énfasis en investigar la enseñanza que tiene lugar en el aula mediante el diálogo con los agentes involucrados (investigadores, maestros, desarrolladores instruccionales). Este diálogo se ha hecho dentro y fuera del instituto Freudenthal con diversos agentes que han puesto su propio acento en la EMR, con ello, en lugar de percibir como un desacierto se ha hecho más robusta. Esa diversidad de colaboraciones ha representado una reflexión estimulante dentro de la comunidad de investigación, lo que provoca una revisión profunda sobre cómo debería ser la educación matemática, experimentando en la práctica y reflexionando sobre esta práctica experimental, lo que ha permitido una colaboración que ha permitido madurar a esta la teoría.

Consecuencia de este proceso de maduración, el desarrollo educativo, como lo nombra Freudenthal (1991), es mucho más que un diseño instruccional.[10] Es un todo que abarca una estrategia de innovación basada en una educación explícita y filosófica, donde se investiga para que la teoría surja del trabajo en la práctica, y a su vez se mejore la práctica a partir de nuevas ideas y materiales curriculares. Esto significa reformular la idea

[10] En el diseño instruccional, a decir de Freudenthal, los objetivos de aprendizaje pueden tener sentido desde la perspectiva del experto, pero no desde la perspectiva del alumno, dado que, por lo general, en este tipo de proyectos hay poco o nulo espacio para el aporte personal del alumno

de diseño instruccional, se trata ahora de que el motor de la instrucción sea ayudar a los estudiantes a transformar sus formas actuales de razonamiento por formas más sofisticadas de razonamiento matemático (Graveimeijer, 2004). La idea central es que, para el diseñador instruccional, esto implica un cambio de perspectiva que va de la descomposición del conocimiento experto, hecho como punto de partida para el diseño, hasta imaginar a los estudiantes elaborando, refinando y ajustando sus formas actuales de conocimiento.

Dentro de este marco, el diseñador (que puede ser el mismo investigador o el docente investigador), diseña las actividades, establece las herramientas que se van a usar, las representaciones que es necesario tener, cómo va a ser la comunicación (discurso) en el aula, cómo deben implicarse los alumnos en la actividad, etc., luego realiza un experimento de pensamiento anticipado al imaginar cómo se pueden realizar las actividades educativas propuestas en la interacción en el aula y lo que los estudiantes pueden aprender a medida que participan en ellas. Después, al hacer el análisis del proceso de aprendizaje real de los estudiantes, cuando las actividades de instrucción se desarrollan en el aula, formula conjeturas y las somete a prueba, luego las reformula las vuelve a someter a prueba, finalmente busca formular una teoría local que pueda apoyar a otros docentes

La secuencia de instrucción puede concebirse entonces como una teoría de instrucción local que sustenta una secuencia de instrucción prototípica (Gravemeijer, 1994, 2004). Esta teoría de instrucción local (conjeturada) puede ser refinada y revisada en repeticiones posteriores del proceso de diseño y análisis, que puede convertirse en un proceso cíclico por sí mismo.

3.4.1 La Investigación de desarrollo como metodología de enseñanza

En el contexto de las ideas anteriores, para alejarse de la noción convencional del diseño instruccional, en el instituto Freudenthal se diseñó un método de investigación que se denominó “investigación del desarrollo” (Gravemeijer, 2004) cuyo objetivo era desarrollar una educación matemática que correspondiera con la idea de Freudenthal (1991) acerca de "las matemáticas como una actividad humana". En esta metodología de investigación hay vínculos fuertes con la “investigación de diseño” y los “experimentos de diseño" de Brown (1992), ambos se estructuraron con cierta afinidad respecto del proceso cíclico de la teoría de EMR.

En la investigación de desarrollo el investigador puede usar todo su conocimiento del dominio específico concerniente a la disciplina para desarrollar una secuencia instruccional en la que, mientras los estudiantes participan en las actividades de la secuencia, desplieguen ideas matemáticas importantes y contribuyan en su evolución, estas acciones se ajustan a la actividad de "investigación para el desarrollo".

Por su parte, la investigación de diseño [*design research*][11] implica analizar el aprendizaje, las estrategias y las herramientas de enseñanza, con la finalidad de desarrollar recursos educativos (teóricos y prácticos) que contribuyan a la enseñanza aprendizaje de las matemáticas en el ámbito escolar, así mismo aporta información sobre el diseño instruccional que sirve de guía para realizar otros diseños (Cobb et al., 2003; Santamaría 2006; Molina et al., 2011), lo que obliga a una validación para utilizarse como método de investigación (Cobb y Gravemeijer, 2001 en Molina et al., 2011.) en la que se articula la fiabilidad, replicabilidad, capacidad de generalización y utilidad como criterios que evalúan su calidad.

- La fiabilidad, las inferencias y afirmaciones que resulten deben ser razonables y justificables en un análisis sistemático donde las argumentaciones tienen que ser explícitas y permitan a otros investigadores monitorear el análisis.
- La replicabilidad, el modelo elaborado será sustituido por otro más avanzado y así se comprueben los resultados del primer estudio.
- La capacidad de generalización, está íntimamente relacionada con la replicabilidad y sea aplicable a un número mayor de contextos y promover el aprendizaje.
- La utilidad, los resultados obtenidos deben dejar claro lo que implica la enseñanza.

3.4.2 El experimento de diseño y el desarrollo educativo.

De acuerdo con Freudenthal (1991), las matemáticas deben considerarse ante todo como un proceso, una actividad humana. Sin embargo, al mismo tiempo, esta actividad debe dar lugar a las matemáticas como un producto. Entonces lo anterior nos lleva a la pregunta ¿cómo dar forma a una matemática que integre ambos objetivos? La respuesta

[11] Una forma de investigación de diseño que ha sido utilizada en Europa es denominada *developmental research* (investigación de desarrollo) (Kelly, 2004, en Molina 2011); no obstante, en la actualidad se ha impuesto el término *design research* (investigación de diseño) (Cobb y Gravemeijer, 2008).

se basa en la 'reinvención guiada', los 'niveles en el proceso de aprendizaje' y la 'fenomenología didáctica'; esto es, en una ingeniería (diseño) del ambiente de aprendizaje que requiere llevar un proceso cíclico de desarrollo a conciencia para poder comunicarlo y explicarlo con tanta franqueza que se justifique solo y que esta experiencia puede transmitirse a otros para convertirse en su propia experiencia (Freudenthal, 1991).

Esta visión de la teoría surge del trabajo en el aula y a la vez se mejora con la práctica, porque conforma nuevas ideas y materiales curriculares, y se da a través de "experimentos pensados" [prácticos] y "experimentos enseñados" [teóricos]. En los primeros el investigador intenta anticipar o prever la manera como una actividad se desarrollará en la clase para luego poner a prueba el experimento pensado.

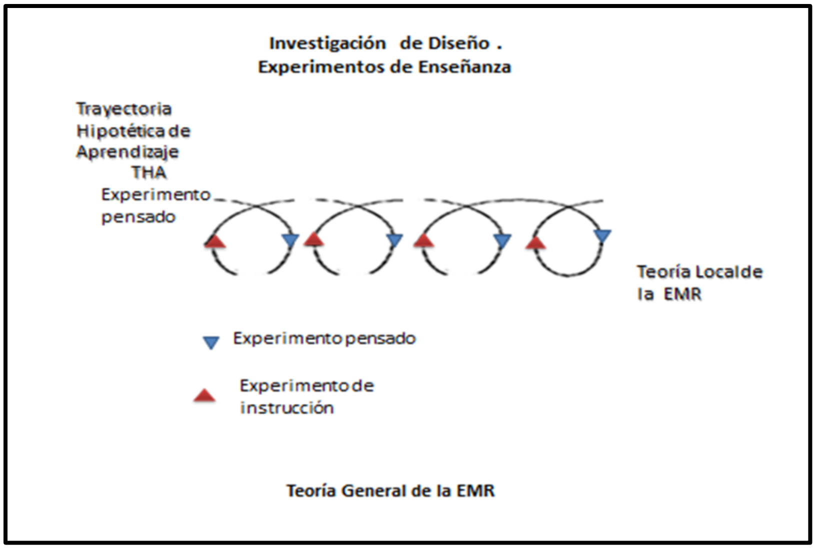
Empero, un experimento de diseño también implica la puesta a prueba de una trayectoria hipotética de aprendizaje[12] (THA) o trayectoria conjeturada de aprendizaje, la cual se constituye como el principal producto del diseño. La THA consiste en formular conjeturas sobre cómo ha de desarrollarse ese aprendizaje (Cobb, Visnovska y Zhao, 2008), es decir la THA enuncia las conjeturas sobre cómo puede progresar el aprendizaje en una aula y sobre los medios que apoyan ese proceso, además conjetura sobre las maneras en que los alumnos reorganizan colectivamente sus razonamientos en diferentes puntos de la secuencia de un concepto matemático específico (en nuestro caso fracciones), junto con los medios que habrán de apoyar el proceso de reorganización.

En un experimento pensado, los resultados alimentan al siguiente experimento pensado para dar paso al experimento enseñado, es un proceso de enseñanza, como se puede ver en la siguiente figura, cíclico y acumulativo de larga duración que implica el diseño, la experimentación, la reflexión y el rediseño (Santamaria, 2006).

[12] En un primer momento Simon (1996) introdujo el término de trayectoria hipotética de aprendizaje (THA), dado que la trayectoria de aprendizaje real no se puede conocer de antemano , en una THA se considera el objetivo de aprendizaje, las actividades de aprendizaje y el pensamiento y el aprendizaje en el que los estudiantes pueden participar .

Figura 20

Reflexión. Experimento de enseñanza



Fuente: Gravemeijer, 1997, en Santamaría 2006. p. 14)

Como ya hemos mencionado, durante la experimentación de una THA, la realización de las actividades instruccionales en el salón permite que los investigadores evalúen la viabilidad de las conjeturas sobre el progreso esperado, esto es, si aquello que pasó se parece a lo que se esperaba, sí es radicalmente distinto, por qué no se avanzó como se esperaba, si se tendría que explorar otra ruta o si el diseño afecta o no el supuesto original. También pueden reconocer si las actividades mentales (reales) del grupo corresponden con las que ellos habían anticipado en la THA. Esta evaluación conducirá a la comprensión de los estilos de razonamiento de los estudiantes que formarán la base del diseño de las actividades instruccionales siguientes, de la modificación de la THA y ayudarán a establecer nuevas conjeturas sobre la actividad mental esperada, aunque cabe subrayar que se espera crear un producto que sea de utilidad a otros maestros, esto significa que lo central del análisis no es dar cuenta de todo lo que pasó en el aula sino de verificar si la estrategia diseñada fue viable o qué modificaciones requiere para serlo. De esta manera, las actividades instruccionales son experimentadas, revisadas y diseñadas (Gravemeijer, 2004).

De esta manera se asume que el diseño de la THA se inicia con la revisión y análisis de la literatura existente en el campo y con la delimitación de los objetivos, luego la THA se materializa en una secuencia de enseñanza que se integra con las situaciones problemáticas. Ya en el proceso del experimento de enseñanza se buscan evidencias que justifiquen, refuten o confirmen la THA, sin dejar de prestar atención a nuevas posibilidades que se le presenten (Santamaria, 2006). Con estas acciones se espera que la revisión y ajuste de las THA continúe y conforme sea utilizada por más y más educadores en contextos y circunstancias distintas a las que originalmente llevaron a su formulación, se haga una herramienta cada vez más útil y lograr una THA cuya utilidad haya sido ampliamente probada y sea considerada ya no una THA, sino una teoría local de enseñanza (Gravemeijer, 2004).

Por su parte las teorías instruccionales locales se refieren al resultado final del proceso de experimentar con una THA, bajo una relación flexible con los experimentos de pensamiento e instrucción que son lo mismo, pero con mayor evidencia de su viabilidad. Esto es, la teoría local conjeturada ofrece un marco en cuyo contexto el maestro (diseñador) puede desarrollar trayectorias de aprendizaje hipotéticas, y por otro lado los experimentos de micro instrucción dan forma a la teoría de la instrucción local; aunque por muy local que sea la teoría de la instrucción, se toma como teoría general debido a que no se adaptará en su totalidad a la situación específica en el aula X del maestro Y (Gravemeijer 2004). La teoría de instrucción no puede, ni debe considerarse unívoca para la toma de decisiones concretas que el maestro debe tomar en las aulas reales porque es una teoría que no busca «gobernar» los quehaceres de los docentes, al contrario, busca ser una herramienta que les permita ser más eficaces en lograr los propósitos de su profesión

En la tradición de EMR señala Gravemeijer (1994), en principio el proceso de desarrollo y revisión de los diseños no puede ser completamente codificado. La actividad del diseñador instruccional se asemeja a la de un "bricoleur"[13], la de una persona experimentada y hábil que utiliza la mayor cantidad posible de materiales que están disponibles (las herramientas y materiales del bricolaje son muy heterogéneas) y algunos otros tendrán que ser adaptados, dar nuevas aplicaciones para lo que fueron creados, es decir, lo que se busca es un diseño que sea pragmáticamente útil. Esto crea pues la necesidad de que se desarrollen trayectorias de aprendizaje hipotéticas que se ajusten a su propia situación, mientras usa la teoría de la instrucción local como un recurso.

[13] Término francés que referencia a un (handyman) "talachero", quien inventa soluciones pragmáticas en situaciones prácticas; es experto en el uso de cualquier cosa que esté disponible.

3.4.3 Las fases de un experimento de enseñanza

Ahora bien, para conducir o dirigir un experimento de enseñanza deben considerarse tres fases: Preparación, instrumentación y análisis retrospectivo (Gravemeijer y Cobb, 2006, en Cortina 2014, p. 274)

Preparación

Para preparar un experimento de enseñanza primero se hace una revisión de la literatura existente en el campo, luego para conjeturar el punto de partida, en un primer momento se específica la «gran idea» que ha de ser enseñada, después se reconoce la importancia de escuchar a los estudiantes y evaluar su comprensión del tema, y basándose en la teoría instruccional local conjeturada se formula la THA, que se compone de: a) objetivos de aprendizaje para los estudiantes; b) actividades de instrucción planificadas y herramientas que se utilizarán y d) la conjetura del proceso de aprendizaje en la que el equipo de investigación anticipa la manera cómo el pensamiento y la comprensión de los estudiantes pueden evolucionar cuando las actividades de instrucción se desarrollan en el aula. Todas estas conjeturas son contrastadas y evaluadas. El proceso de planificación también hace énfasis en la importancia de la visión general del investigador sobre la educación matemática. Esta forma de trabajar puede describirse como «bricolaje guiado por la teoría» (Gravemeijer, 1994), este bricolaje tiene una finalidad pragmática, se busca reconocer todo lo que pueda ayudarle al maestro en su misión de lograr que sus alumnos aprendan un aspecto de las matemáticas.

Instrumentación

Durante el desarrollo del experimento de diseño se ponen a prueba las conjeturas y si se revisa una es posible que se tengan que revisar todas por si se requiere modificar acciones sobre la marcha de acuerdo con los objetivos, con el análisis de la actividad individual de los niños, con los procesos sociales en el aula, y con la recogida de datos (producciones de los alumnos, entrevistas, lo que ocurre en al aula), también se requiere revisar o en su caso reformular la THA que evidencia nuevos experimentos de pensamiento anticipado. Este proceso continuo de experimentación enfatiza que las ideas y conjeturas se modifican al interpretar el razonamiento y el aprendizaje de los estudiantes en el aula. Los datos empíricos sobre las actividades de los estudiantes en la mayoría de los casos se interpretan a la luz del marco teórico de la EMR (conscientes de que no se puede reducir a un conjunto sofisticado, complejo de prácticas que han sido desarrolladas por una comunidad de diseñadores durante un periodo prolongado de tiempo).

Análisis retrospectivo

El objetivo de este análisis es revisar la experiencia completa para determinar la viabilidad de las conjeturas o hacer ajustes a las mismas, en otros términos, al final, el entrelazado entre la interacción acumulativa del diseño de las actividades de instrucción y los datos empíricos reunidos, tiene que ser desentrañado para sacar la secuencia de instrucción óptima al final, porque no tiene sentido incluir actividades que no coinciden con las expectativas de los estudiantes, o que solo entorpecen su aprendizaje. Por lo tanto, habrá que hacer adaptaciones cuando se omitan las actividades no funcionales o menos funcionales.

En la siguiente figura (No. 21), es de destacar que las conjeturas sobre el fenómeno de aprendizaje en estudio y los medios que lo sustentan se basan en las evidencias que se van obteniendo, y en fundamentos teóricos sobre enseñanza y aprendizaje procedentes de la literatura[14]. Ambas fuentes actúan recíprocamente, es así como los constructos teóricos son utilizados tanto para el diseño como para interpretar los datos recuperados que, en la puesta en práctica puedan ser modificados, con ello se puede establecer la necesidad de elaborar nuevos constructos.

Por tanto, la aplicación de una propuesta de enseñanza no consiste en la confirmación de unos constructos teóricos previamente construidos, sino en la acomodación a la realidad observada para contribuir al desarrollo de un modelo teórico que describa el aprendizaje o desarrollo de los alumnos, de los cambios que son considerados aprendizaje o desarrollo de los alumnos a lo largo del experimento de enseñanza, entendidos como ocasionados por las maneras de operar y las situaciones puestas en juego por el investigador-docente (Molina, et al., 2011).

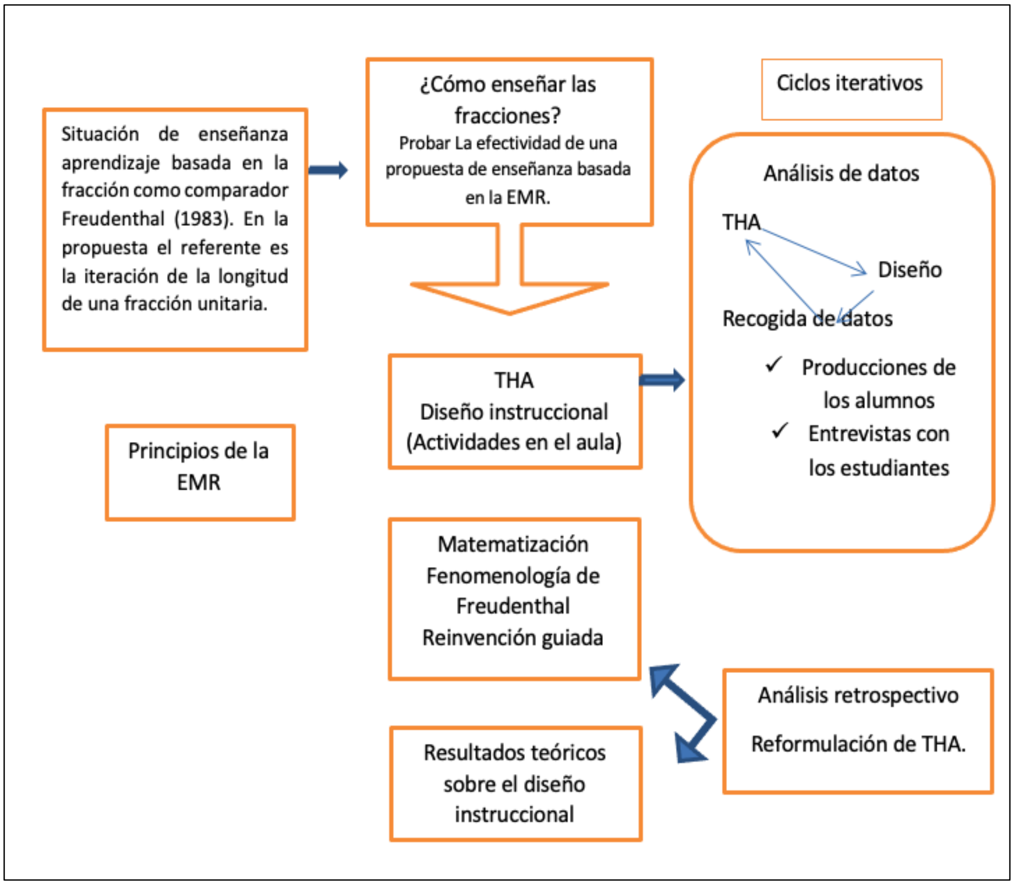
Asimismo, mediante el diálogo a la luz de los datos obtenidos, el equipo de investigadores podrá realizar una triangulación entre éstos, la THA y el diseño, ya que se

[14] Para este estudio nuestro marco teórico la EMR, el análisis fenomenológico de las fracciones, Freudenthal, (1983), así como contrastar los resultados con los obtenidos en otros estudios inspirados en la metodología de los experimentos de diseño en la investigación de fracciones, experimentos de diseño Cortina, (2014).

debe tener disposición para modificar el modelo ante observaciones inesperadas. El análisis final también permitirá extraer información sobre el diseño instruccional que sirva de guía para otros diseños.

Figura 21

Investigación de Diseño (Estructura). Fuente: Adaptación de Molina et al. (2011).



En consecuencia, la secuencia de instrucción se unirá como una reconstrucción del conjunto de actividades de instrucción y otras herramientas para la enseñanza que se cree constituyen los elementos efectivos de la secuencia. Esta reconstrucción de la secuencia óptima se basará en las deliberaciones y las observaciones de los investigadores del desarrollo (Gravemeinjer, 2004). De esta manera, el resultado de un experimento de investigación de desarrollo será considerado adecuado y empíricamente fundamentado y se podrá documentar lo que los estudiantes saben y entienden sobre sus concepciones, aunque sean erróneas o simplemente las desconozcan.

3.5 EL CONTEXTO DE LA INVESTIGACIÓN

En el ámbito global desde la década de los 80´s se han desplegado esfuerzos para mejorar cómo se enseñan y aprenden las fracciones, desde teorizar sobre la naturaleza del concepto, su importancia y cómo son usados (Dickon, 1991; Freudenthal, 1983; Kieren, 1980; Thompson y Saldanha, 2003). Sin embargo el modelo de enseñanza de fracciones que ha permeado en los currículos de estudio en varias partes del mundo y en México, es el de Kieren (conocimiento integral del número racional, con una interconección entre cuatro subconstructos; Medida, cociente, razón y operador (Real, (2017).

En dicho modelo se encuentra que la interpretación más natural es el aspecto de medida, caracterizado a través de la relación parte todo en subáreas de una región o superficie unitaria (pasteles, pizza y barras de chocolate) (Llinares, 1997) y los mecanismos constructivos la partición y la equivalencia [equipartición]. Así, la apropiación del término " fracción" es concebida como el resultado de transformar un objeto, susceptible de ser partido fácilmente, lo que conlleva a asociar la idea de fracción con la necesidad de fragmentación de algo en partes iguales, y tomar una parte de ellas, tantos de tantos (Thompson y Saldanha, 2003), es decir, se identifica el denominador como el número de partes en que se corta el entero y el numerador como el número de partes que se toman del entero, se concibe que la fracción necesariamente está contenida dentro del entero, el numerador es parte del denominador.

Si tomamos el ejemplo de 2/5 con las tres anteriores estrategias basadas en la equipartición, se piensa que el entero ha sido cortado en 5 partes iguales, de las cuales se toman 2 (naturaleza aditiva, no multiplicativa, ya que no implica la noción de tamaños relativos, sino a un subgrupo de dos elementos de un conjunto de 5), es así que solo es factible para un entero ≤ 1. En consecuencia, las actividades de equipartición (fracción como fracturador) conducirán a "las fracciones propias únicamente" (Freudenthal, 1983, p. 147) y con ello se da una visión sesgada, ver a la fracción como fracturador, es decir se restringe no sólo fenomenológicamente sino también matemáticamente (en las actividades que procuran la matematización de la equipartición de objetos, ya que implican "un concepto de equivalencia muy restringido).

Sin embargo, un vasto cúmulo de investigaciones lo han traducido como una inadecuada adquisición de saberes específicos, los cuales posteriormente dificultan la adquisición de saberes más complejos. Generalmente estas investigaciones se han enfocado en obstáculos cognitivos y epistemológicos[15] bajo la caracterización del modelo kierenano, y supuestamente con las propuestas de enseñanza deben ser superados. Partir del entendimiento de la fracción parte todo y avanzar a un nivel de mayor dificultad (la fracción como razón) como se sugiere desde este modelo, es una dificultad fundamental, en este tenor Llinares (1997) ya invitaba a propuestas didácticas para el desarrollo de competencias matemáticas en fracciones que se diera un lenguaje dotado de significatividad (medida).

No obstante, se hace necesario buscar otras opciones para mejorar la enseñanza de las fracciones, utilizando alternativas de enseñanza distintas a la partición y repartición equitativa y buscar con su viabilidad corroborar que las imágenes que emergen de la equipartición, descritas anteriormente, no deben ser consideradas obstáculos ontogenéticos ni epistemológicos —que deben ser superados—, sino obstáculos didácticos susceptibles de ser evitados.

La propuesta de enseñanza que aquí se presenta se basa en la caracterización hecha por Freudenthal (1983) para apoyar a que los estudiantes razonen de maneras consistentes sobre la relación de orden inverso de las fracciones unitarias y sobre el tamaño relativo de fracciones propias e impropias respecto a la unidad (Thompson y Saldanha, 2003). Esencialmente consiste en comparar, en lugar de fracturar, y se espera que los alumnos razonen en el contexto de medición, cuántas iteraciones (o copias) de una parte produciría algo del tamaño de un entero; la ruta de enseñanza inicial con situaciones experiencialmente reales.

Para la investigación de diseño, se llevó a cabo un análisis preliminar de los estudios exploratorios[16] existentes en la literatura con niños de tercero y cuarto de primaria como referente en la experiencia de enseñanza en niños de tercero y cuarto; los resultados mostraron que los estudiantes cuentan con nociones y conocimientos previos que les

---

[15] Brousseau (1997), hace una transposición del obstáculo epistemológico, al obstáculo didáctico, el cual puede tener tres orígenes (Ontogenético, epistemológico y didáctico)
Obstáculo ontogenético, desde la postura piagetiana, el alumno debe superar el obstáculo no evitarlo, atribuido los estadios, idea válida para en el modelo de Kieren iniciar por el parte todo. Se da un proceso de reorganización de conocimiento; conciliar ideas y nociones que parecieran incoherentes.
Obstáculo epistemológico, tiene origen en la propia disciplina matemática; cuando la comprensión de cierto concepto matemático interfiere con la comprensión de otro más complejo.
[16] Realizado en el campo de las fracciones, consiste en formular una trayectoria e investigar sobre su viabilidad, a través de la instrumentación de un experimento de diseño con alumnos de 4º grado de primaria, que busca favorecer el aprendizaje de las fracciones como números que cuantifican magnitudes.

permiten imaginar, de manera correcta, el tamaño de una magnitud cuantificada por una fracción unitaria, cuando ésta es definida como el inverso de una multiplicación por un número entero (Cortina, 2014). Con ello, se documenta que las relaciones recíprocas de tamaño relativo pueden servir de base para la enseñanza de las fracciones, desde que ésta inicia.

El estudio se realiza en el cuarto grado de la educación primaria, dado que de acuerdo con el currículo (por una parte), el estudio del modelo de Kieren se inicia en este grado de manera formal con la enseñanza del significado parte todo, desde la equipartición. Recordemos que para que el experimento de diseño tenga validez y pueda ser utilizado como método de investigación requiere la articulación de una fiabilidad, replicabilidad, generalización y utilidad, por lo cual, de acuerdo con esta metodología, resulta pertinente instrumentar un experimento de enseñanza.

El experimento se llevará a cabo en un quinto grado de primaria integrado por 31 alumnos, 16 mujeres y 15 hombres de contextos diversos, de la escuela "República de Tanzania", turno matutino de organización completa, ubicada en el municipio de Iztacalco Cd. De México. Un alto porcentaje de los alumnos viven en distintas colonias del municipio, que por ubicación no corresponden a la institución, pero mucho influyen las actividades económicas de los padres que se trasladan a trabajar y la escuela es un punto intermedio o de paso. El otro porcentaje de alumnos son hijos de personas que viven en la colonia, en su mayoría son cuidados por los abuelos mientras que sus padres trabajan. No podemos ignorar los contextos en los que se produce el aprendizaje y la enseñanza, lo que los estudiantes aprenden a través de la instrucción en cualquier momento no es solo una función de la instrucción; está influenciado por lo que ya saben (incluidas las creencias que tienen sobre las matemáticas, hacerlo y aprenderlo) y por la instrucción en la que han participado. (Thompson y Saldanha, 2003).

De manera general, de acuerdo al diagnóstico, la mayoría de los estudiantes aún no han desarrollado la habilidad de dimensionar los números naturales de forma que los puedan ubicar correctamente en una recta numérica. Más del 80% de los alumnos no dimensionan correctamente a los números fraccionarios

Un argumento más para la toma de decisión es que nuestra investigación tiene como uno de sus objetivos documentar todo el proceso de la instrumentación del experimento de enseñanza, que se toma como referencia, para evitar transformar a los alumnos en sujetos experimentales de teorías cuyos efectos se suponen, pero no se han comprobado. Por el contrario, debemos preservar el derecho a aprender de nuestros estudiantes limitado al derecho de enseñar. Como se mencionó anteriormente la investigación de diseño busca corroborar una THA, para que después de ser replicada en distintos contextos, obtener esa validación y poder convertirse en una teoría local, de esta manera se busca contribuir a una teoría general.

En el contexto nacional poco se ha divulgado sobre la implementación de experimento de diseño en el aula (Gravemeijer y Cobb, 2006) como metodología para la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones, empero por más de una década el doctor Cortina y su equipo de investigación han trabajado en el campo de las fracciones haciendo estudios exploratorios e instrumentando experimentos de diseño (Cortina y Zúñiga, 2008; Cortina et al., 2012; Cortina et al., 2014; Cortina 2020), de modo que con este estudio se pretende aportar a este recorrido de investigación cuya finalidad pedagógica es ayudar a los estudiantes a razonar sobre las representaciones de fracciones como números que representan magnitudes medidas.

3.5.1 La Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA)

Los experimentos de diseño son complejos[17] ya que están compuestos de elementos diversos y tienen una riqueza que nos proporciona una diversidad de entornos para el aprendizaje; es así como la metodología de experimento de diseño se centra en la caracterización de una situación de enseñanza aprendizaje en toda su complejidad, (Molina et al., 2011).

En nuestra investigación el punto de partida son las ideas fundamentadas de Thompson y Saldanha (2003) sobre las relaciones recíprocas de tamaño relativo, además, se retoman las ideas de Freudenthal (1983) sobre la fracción como comparador y los principios de la EMR, así como la THA desarrollada por el Doctor Cortina y su equipo de investigación (Cortina y Zúñiga, 2008), en la que las fracciones unitarias son abordadas como un recurso para cuantificar la relación recíproca de multiplicar una magnitud por un número entero. Cabe hacer la aclaración que para la implementación y mejora de la THA, es necesario tomar en cuenta aspectos como:

[17] A diferencia del paradigma positivista, que concibe la complejidad como un problema o algo a eliminar, para la investigación de diseño es un potencial didáctico.

a) Caracterizar las fracciones en la secuencia de instrucción

b) Intervenir en múltiples aspectos del sistema de actividades del aula

c) Crear un entorno favorable para el aprendizaje de las matemáticas.

3.5.2 Secuencia de instrucción y trayectoria hipotética de aprendizaje

En la secuencia instruccional[18] (Cortina, 2020) todas las actividades se usa la longitud como la magnitud de referencia, y se procura que los niños experimenten la "reinvención" de la medición lineal. De acuerdo con la filosofía de la EMR, en este punto confluyen la matematización y reinvención guiada. Desde la óptica del alumno será reinvención guiada, desde la óptica del maestro será matematización progresiva, para lograrlo se requiere de la fenomenología didáctica de Freudenthal (1983).

El experimento se basa en la caracterización de la fracción como comparador, ya que resulta útil para organizar y dar sentido cuantitativo a múltiples fenómenos que son parte de su mundo, porque propone la búsqueda de contextos y situaciones que requieren ser organizados matemáticamente. Desde la EMR, las dos fuentes principales de esta búsqueda son la historia de la matemática y las invenciones y producciones matemáticas espontáneas de los estudiantes, motivo por el cual se contextualiza con la historia[19].

Desde la fuente histórica se utiliza una narrativa sobre las formas en que un grupo legendario de antiguos mayas (los Acajay) medía. Primero se explora la medición utilizando partes del cuerpo (pies, cuartas, pasos, etc.). Posteriormente se explora la medición utilizando una vara (de 24 cm aprox., Anexo 1) como medida estandarizada. A partir de la experiencia de medir con la vara, se problematiza ¿Cómo crear unidades de medida más pequeñas para dar cuenta de manera precisa y sistemática de la longitud de los espacios que la vara no cubre exactamente?

---

[18] Una secuencia instruccional en la que los estudiantes desplieguen ideas matemáticas importantes mientras participan en ellas y contribuyan en su evolución, se ajusta a la actividad de "investigación para el desarrollo" o "investigación de diseño".

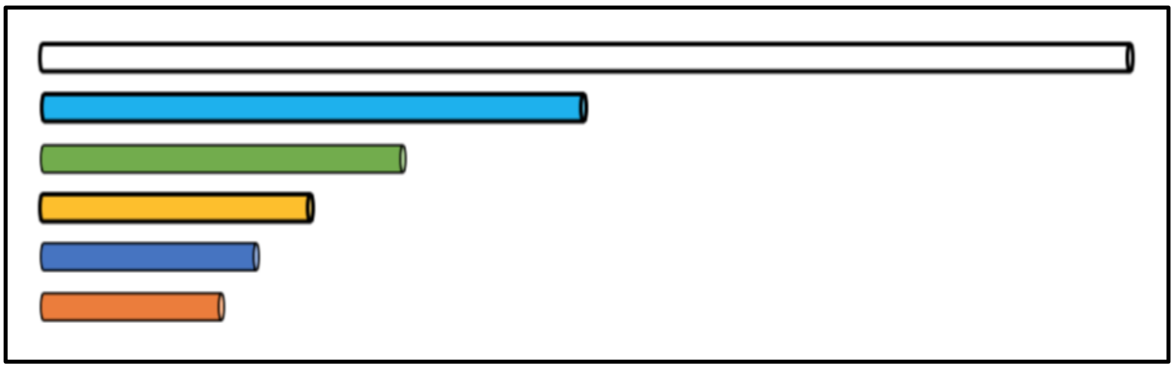
[19] Las fracciones son una construcción social, pues como lo menciona Parra, et al.(1997): "Todo conocimiento es una respuesta, una adaptación que la humanidad ha logrado ante situaciones que ha enfrentado o ante problemas que se ha planteado". Se sabe que los babilonios, egipcios, griegos e hindúes ya las utilizaban. (Peña, 2011).

Actividades de la THA

Respecto de la THA, brevemente podemos decir que primero los estudiantes participan en actividades en las que usan popotes de la misma longitud (aproximadamente 24 cm de largo), como una unidad estandarizada, para medir la longitud de diferentes cosas en sus aulas. Posteriormente, los niños crean las subunidades en forma de popotes de plástico o papel, resaltando que es una sola subunidad (Cortina 201; 2020).

Figura 22

Vara de kia.



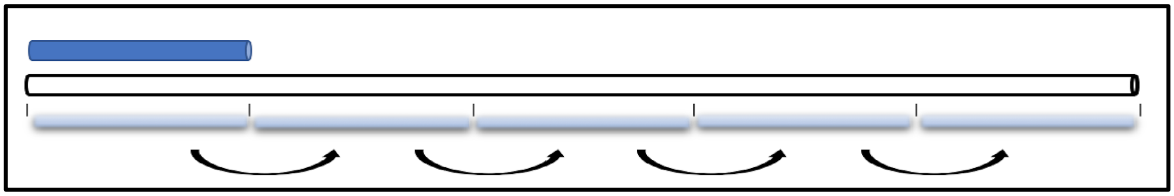
Nota: Es una vara de madera o plástico como unidad para medir longitudes, y cuatro popotes de distintos colores que sirven como subunidades, de longitud 1/2, 1/3, 1/4, 1/5 y 1/6.

En este caso se asume que la matemática surge como una organización (matematización) de la realidad, por ello su aprendizaje debe originarse en ella también, de manera que se presentan los problemas para que los alumnos puedan imaginar las situaciones en cuestión y a partir de ahí, utilizar su sentido común y poner en juego los procedimientos de cálculo, las estrategias de resolución y los modelos matemáticos que sirvan para organizarlas (crear varas más pequeñas, subunidades de medida llamadas pequeños; cumplir con un criterio iterativo respecto la vara).

En palabras de Cortina (2020), “Las subunidades que los estudiantes crean no están contenidas dentro de la unidad de referencia, como lo estarían los segmentos de igual tamaño, sino que son barras físicamente independientes de la unidad. Las subunidades se crean para que cumplan una condición específica. La subunidad de tamaño 1/2 debe tener una longitud tal que dos iteraciones produzcan una longitud idéntica a la longitud de la unidad de referencia. La subunidad de tamaño 1/5 debe tener una longitud tal que cinco iteraciones de la misma produzcan una longitud idéntica a la longitud de la unidad de referencia (ver Figura 23), y así sucesivamente” (p. 8).

Figura 23

Subunidad 1/5.



Nota. Una barra azul como subunidad de 1/5, porque cinco iteraciones producen una longitud idéntica a la de la unidad de medida. (Cortina, 2020).

En la THA desde temprano se busca cultivar en los alumnos la imagen de una fracción unitaria como número que da cuenta del tamaño de cierto atributo, en algo que está separando de la unidad de referencia, en nuestro caso el referente de la unidad es la longitud de un objeto concreto, “la Vara de Kia, que llamaremos Tikje”. Por ejemplo: 2/3 Iteración de una fracción unitaria (un pequeño), iterar dos veces el pequeño de a 3.

Así, los pequeños son subunidades (independientes) de la vara de referencia, 5/3 marca la iteración de una subunidad de 1/3 tan grande como la unidad de referencia. (Cortina, 2020, p. 7). El numerador indica el número de veces que se iteró una subunidad, para representar un cierto tamaño. El denominador muestra el tamaño de la subunidad que se usó, en relación con el tamaño de la unidad de medida; entonces 5/3 es el tamaño de algo que corresponde a 5 iteraciones de una subunidad 1/3, 5 tan grande como la unidad de referencia.

Su tamaño relativo está determinado por el número de iteraciones que serían necesarias para que la subunidad represente un tamaño igual al tamaño de la unidad de referencia, como se especifica en el denominador. Una subunidad se considera 1/3 del tamaño de la unidad de referencia porque serían necesarias 3 iteraciones para producir un tamaño igual al tamaño de la unidad 5/3 (la unidad 1/3 1/3 1/3), por ello es importante utilizar la longitud como la magnitud de referencia.

Asumir las ideas de Thompson y Saldanha (2003), trae por consecuencia la puntualización de objetivos de aprendizaje en fracciones al considerar que las fracciones impropias deben ser introducidas de manera temprana en la enseñanza, toda vez que éstas son siempre el recíproco de una fracción propia (por ejemplo, el recíproco de 3/5 es 5/3). [20]

3.5.3 Criterios para las actividades de la THA

Los criterios fundamentales sobre los que se basan las actividades de la THA son los siguientes:

- La unidad estandarizada será la vara (Tikje) de 24 centímetros aproximadamente.
- Los niños crean subunidades en forma de varillas de plástico o papel (son barras que físicamente son independientes de la unidad)
- Se ofrece un contexto directamente tangible en el que los estudiantes puedan matematizar cuantitativamente sobre el significado numérico de las fracciones, a través de la historia de las fracciones (los acajay) y las producciones de los propios alumnos.
- La imaginación, que es posiblemente real en su mente y en un momento dado prescindir del material físico.

Objetivos

En nuestra investigación hemos procurado puntualizar los objetivos de aprendizaje para formular una THA, orientados por la idea central de proponer alternativas a la forma en que tradicionalmente se han definido los grandes objetivos de enseñanza del concepto (Cortina, 2013).

[20] "Concebir dos cantidades como una relación recíproca de tamaño relativo: la cantidad A es 1 / n, el tamaño de la cantidad B significa que la cantidad B es n veces más grande que la cantidad A. La cantidad A es n veces más grande que la cantidad B significa que la cantidad B es 1 / n tan grande como la cantidad A" (Thompson y Saldanha p. 106). En esta formulación, la cantidad más pequeña no necesita ser concebida, necesariamente, como incluida en la más grande.

Objetivo Central de la THA

- Ayudar a los estudiantes a razonar sobre las representaciones de fracciones como números que representan magnitudes medidas.

Objetivos específicos

- Identificar nociones previas de los alumnos (experiencias escolares y extraescolares) y documentar lo que los estudiantes ya saben y entienden, que aquello sobre lo que tienen concepciones erróneas, o simplemente desconocen
- Medir longitudes utilizando una unidad estandarizada y números enteros.
- Interpretar un número entero como una medida que da cuenta de la acumulación de la longitud de una unidad
- Comprender la medición como la iteración de una unidad usando unidades de medición no convencionales
- Familiarizarse con el uso de la unidad de medida común.
- Comprender la relación del orden inverso de las sub-unidades de medida, es decir, a mayor denominador menor medida.
- Comprender la equivalencia entre la iteración de la longitud de subunidades de medida (del tamaño de una fracción unitaria) y la longitud de la unidad común (tamaño relativo de una subunidad de medida).
- Interpretar a las fracciones como medidas realizadas a través de iterar una subunidad de medida (numerador, denominador).
- Identificar cuándo una medida fraccionaria es menor, igual a, o mayor a uno.
- Caracterizar cómo evoluciona el aprendizaje de las fracciones en los niños.
- Registrar los cambios y/o las razones de las transiciones de cada fase del diseño.
- Evaluar la credibilidad de las decisiones durante la implementación de la THA.

Instrumentos

La instrumentación del experimento de enseñanza se diseñó para desarrollarse en 13 sesiones de una hora cada una durante el ciclo escolar 2020 - 2021.

Como consecuencia del carácter cíclico de los estudios de diseño, se hacen necesarios dos tipos de análisis de datos: uno continuo, que se efectúa después de cada sesión, y uno final cuando todos los datos del proceso de investigación han sido recuperados, es por esta razón que los instrumentos de recolección de datos deben permitir esa inmediatez y ser perdurables en el tiempo. Para lograrlo se realizarán videograbaciones de la clase, se recolectarán producciones de los alumnos, grabaciones de las discusiones en el equipo de investigación y se tomará nota de las decisiones tomadas de manera justificada entre el equipo de investigación (informe) con el fin de dar una descripción detallada de la evolución de la investigación así como de evaluarla y garantizar su calidad (Cobb y Gravemeijer, 2008) mediante el análisis retrospectivo.

La exhaustividad de la recuperación de datos puede permitir analizar de forma retrospectiva el papel de ciertas variables que inicialmente no fueron consideradas pero que, posteriormente, se erigen como relevantes para el fenómeno en estudio. Los investigadores recogerán muchos más datos de los que podrán analizar y emplear, siendo necesario clasificarlos a posteriori para distinguir la información relevante de la irrelevante (Ruíz, 2020).

3.6 ELEMENTOS DE LA METODOLOGÍA ESPECÍFICA PARA EDUCACIÓN

Hemos argumentado que la investigación de diseño puede constituirse como una metodología coherente que une la investigación teórica y la educación, en tanto herramienta para el análisis y la innovación en la enseñanza que emerge de las aulas, en lugar de arrojar innovaciones sobre las paredes metafóricas de estas.

Ya desde los artículos de Brown (1992) y Collins (1992) se vislumbraban alternativas a la metodología experimental, rutas metodológicas que pudiesen capturar la naturaleza del aprendizaje y la enseñanza de forma libre y real; el experimento de diseño se constituía entonces como una metodología específica de y para la educación al contrario de otras metodologías venidas de la Psicología o la Sociología que se adaptaron a la investigación educativa.

Desde esta óptica, no sólo se trata de comenzar en el aula, sino de experimentar lo que en ella se hace; la enseñanza, las discusiones colectivas, donde el aprendizaje se hace visible y donde el maestro toma decisiones, hablamos entonces de prácticas áulicas que emergen del contexto pedagógico y van más allá del espacio físico.

Como ya se mencionó, se trata de generar «un conocimiento utilizable» (Lagemann, 2002) y caracterizar el aprendizaje de los estudiantes de una manera que sirva de guía para el maestro, como lo menciona Cobb y Gravemeijer (2004), para abordar problemas sobre los cuales la información existente sea escasa y por tanto insuficiente para apoyar el diseño de ambientes de aprendizaje; en términos de la EMR, tienen que ver más con la participación que logran los niños en ciertas prácticas, en este caso matemáticas.

En la actualidad la investigación basada en el diseño fincada en el pragmatismo de Dewey y la EMR constituye un soporte conceptual pertinente para las diversas propuestas de innovación, pero no es sinónimo de la investigación acción; existen diferencias importantes entre ambas, la investigación-acción surge del paradigma crítico y como tal pugna por dar respuesta a un problema, «educar para transformar», en contraste la investigación basada en el diseño tiene como objetivo un producto de diseño (la pretensión es formular teorías que sirvan para diseñar innovación educativas a nivel local), así como información sobre el proceso de diseño que aporte directrices para guiar futuros diseños.

El experimento de diseño parte de la puesta a prueba de una THA o trayectoria conjeturada de aprendizaje que en la EMR se llama teoría local, la cual se constituye como el principal producto del diseño, la THA nos ayuda a fijar los objetivos que se quieren lograr, los medios que logran ese aprendizaje progresivo (formas de participación en colectivo) y a dar cuenta si se han logrado tales objetivos o a tomar decisiones en la adaptación si no se cumplen. Entonces lo replicable no son las actividades sino la agenda, pero sólo en un mundo idealizado y abstracto se puede replicar el proceso de aprendizaje como tal.

Como consecuencia de su carácter cíclico, estos experimentos implican dos tipos de análisis de datos, una serie de análisis iterativos que se realizan durante los diferentes ciclos y un análisis final retrospectivo de todos los datos recogidos en el proceso de investigación (Molina, 2011). Las cuestiones a las que da respuesta el primero de estos análisis se relaciona con el objetivo de promover el aprendizaje de los estudiantes, el eje central está en la discusión colectiva, en la manera como se incide en las formas de razonar que se establecen en el salón de clase y cómo se modifican.

El análisis retrospectivo por su parte tiene el objetivo de contribuir al desarrollo de la teoría, analizar la coherencia de la THA. En síntesis, dentro de los experimentos de diseño, reconocemos que los experimentos de enseñanza son los más próximos a la práctica habitual del docente ya que colocan en el centro el diseño, la puesta en práctica y el análisis del conjunto de intervenciones en un aula para procurar el aprendizaje. Busca pues caracterizar los elementos de diseño que estén en cada fase y las razones para las transiciones de una fase a la siguiente, lo que significa evaluar la credibilidad de las decisiones de diseño.

CAPÍTULO IV

PRIMERA PRÁCTICA MATEMÁTICA.

LA MEDICIÓN COMO ITERACIÓN DE UNA UNIDAD

"La belleza de las matemáticas
Sólo las descubren los más pacientes"
Maryam Mirzakhani

En el presente capítulo se analiza la reconstrucción de la primera práctica matemática de la TEDE, el propósito es analizar si ésta apoya para que los estudiantes razonen sobre las representaciones de fracciones como números que representan magnitudes. Para ello habrán de analizarse los registros de clase donde aparecen la primera práctica matemática de la TEDE y las producciones que los alumnos realizaron de manera individual o colectiva, se trata entonces de analizar la actividad matemática y el razonamiento público.

Lo esencial es seguir la trayectoria de la conjetura en relación a sus objetivos, es decir, identificar los conocimientos matemáticos que surgieron en clase, cómo se desarrolla la reinvención, cómo se genera la matematización en las discusiones colectivas para reinventar las ideas, principios y conceptos.

4.1 DE LA ITERACIÓN CON UNIDADES ARBITRARIAS A LA UNIDAD COMÚN

En la primera práctica matemática[1] se pide a los alumnos que midan longitudes utilizando una unidad estandarizada y números enteros, el propósito es que interpreten un número entero como medida de la longitud de un objeto, para lograrlo la práctica se divide en dos partes. En la primera el objetivo es que los alumnos comprendan la medición como iteración de una unidad usando unidades de medición no convencionales, y en la segunda

[1] De acuerdo a Stephan et al. (2003), una práctica matemática se puede describir como una forma compartida de razonar y argumentar matemáticamente en el aula, la cual va evolucionando a medida que el maestro y los estudiantes discuten situaciones, problemas y métodos de solución. La evolución se da cuando se les reconocen como claras, razonables y apropiadas.

práctica se trata de que se familiaricen con el uso de una unidad de medida común. Para iniciar la reinvención las actividades se contextualizan en una leyenda acerca del pueblo Maya, los Acajay, quienes medían longitudes con la vara de Kia (unidad lineal aproximada de 24 cm).

En la primera sesión el objetivo fue utilizar unidades arbitrarias de medida para calcular la longitud de objetos e indagar las ventajas de hacerlo de esa manera, pero sobre todo identificar las desventajas de medir usando partes del cuerpo (el brazo, la mano, el pie, etc.). La segunda sesión se enfocó en reconocer que en ocasiones se puede iterar la unidad no convencional para medir, además de reflexionar sobre la necesidad de introducir una medida estandarizada como solución al problema de las inexactitudes que se generan cuando se usan las partes del cuerpo. En la tercera sesión se trata de reconocer la importancia de iterar la vara de Kia para no dejar "huecos" entre las iteraciones ni superponer las iteraciones.

En síntesis, la práctica matemática completa articula todas las actividades en un solo proceso que se da por normalizado[2] cuando los alumnos interpretan las medidas (como números enteros) como la suma de iteraciones de la longitud de la unidad estandarizada (vara de Kia).

4.1.1 Sesión Uno. Aprender un quehacer, la medición

La primera sesión inicia con la instauración de las normas generales por parte del profesor, de acuerdo con la EMR estas servirían como soporte y regulación para el trabajo público y para las interacciones del grupo. Una primera norma, como se puede ver en el siguiente fragmento, es el papel del error en la clase.

> *En esta clase se vale equivocarse, sale. Todos nos equivocamos y no hay nada y ningún problema con equivocarse, ¿sí?; lo que nunca se vale (acentúa con dedo) es hacer sentir mal a alguien porque se equivocó […], se vale no entender, se vale equivocarse, tenemos que ser muy respetuosos con nuestros compañeros siempre […]. Escuchar, sí, cuando*

[2] Recordemos que en esta perspectiva el término normalizar se entiende como el establecimiento y consolidación de las reinvenciones; es decir en el contexto de la discusión colectiva las contribuciones no deben limitarse a describir procedimientos matemáticos, las explicaciones deben aludir a la situación real que se está trabajando. Ello facilita que los otros miembros de la comunidad entiendan y evalúen las aportaciones de sus compañeros.

alguien habla y no lo escuchamos, aunque estemos callados le estamos faltando al respeto, ok. Entonces tenemos que escuchar siempre a quien esté hablando.

Cuando el maestro cuestiona: *¿Cuándo un compañero está hablando que tenemos que hacer nosotros para ser respetuosos con él?,* los alumnos permanecen en silencio, pero el maestro considera insuficiente la respuesta e insiste "*debemos escucharlo"*; *¿Se vale no entender, que te expliquen y seguir sin entender?* algunos alumnos responden síííí, respuesta que, como se puede apreciar en el siguiente fragmento, permite al dispositivo introducir la actividad.

[1] M: Sí, muy bien Lucas, sí se vale. Sí se vale que no entienda, que me expliquen y que siga sin entender. ¿Y se vale que me expliquen dos veces y siga sin entender?

[2] M: Sí… ¿y se vale que tres veces me expliquen y siga sin entender?

[3] Aos: Síííí (a coro).

[4] M: ¿Y de quién es la responsabilidad de entender? De todo el grupo, lo que nunca se vale es hacer sentir mal a alguien por no entender, ¿sale?; eso tampoco lo hacemos. Vamos entendiendo cómo vamos a trabajar.

Establecer normas generales es importante porque en la EMR el aprendizaje es una actividad social (Bressan et al., 2016) que implica un diálogo colectivo con formas de participar que son reguladas por las normas establecidas por el docente. De acuerdo con el principio de interactividad, es necesaria esta instauración para generar un ambiente de respeto y confianza en el que todos los alumnos, expresen su incomprensión (más de una vez si se requiere) cuando así sea el caso. En el siguiente fragmento puede apreciarse que la respuesta del maestro hace evidente la delegación de responsabilidades al alumno sobre su actuar ante la incomprensión.

Entonces algo que no quiero que se valga, y tenemos que hacer un gran esfuerzo, es no entender y no decir. Cuando decimos "no entendí" le estamos ayudando al maestro, porque yo maestro no me puedo meter en sus cabezas para ver si entendieron o no, los que saben si entendieron o no son ustedes, entonces cuando no entendí lo tengo que decir, se vale no entender, ¿sí?; lo que no se vale es no entender y no decir […] y cuando decimos "no entendí" no sólo le ayudamos al maestro, le ayudamos a todos nuestros compañeros a entender, esa es una forma en la que le ayudamos a nuestros compañeros a aprender, diciendo no entendí.

De acuerdo con Cobb et al., (2008) el establecimiento de estas normas es primordial para apoyar el aprendizaje pero su desarrollo tiene que darse mediante una discusión pública (bidireccional) que no quede en el terreno discursivo. Por ahora, como se ha visto los alumnos han consentido las normas, sin ponerlas en práctica, en los diálogos se manifiesta que ha sido el docente quien las ha preestablecido, pero ha sido necesario para dirigir las conversaciones colectivas que la TEDE ha conjeturado.

¿Cómo medían, cómo medimos?

Como se ha mencionado, el objetivo de la primera parte de la práctica uno era que los alumnos reconocieran la medición con unidades no convencionales. En correspondencia con el principio de realidad de la EMR, la actividad es lo más próxima posible a la realidad inmediata de los alumnos, a aquella que les significa y que pueden matematizar.

Esta práctica emerge de la realidad de los alumnos a través de las preguntas del profesor *¿qué es la medición?, ¿a qué les suena medición?* Las respuestas de los alumnos refieren a medir números y a partir de ellas el docente propicia un diálogo colectivo en el que incluye otras preguntas, *¿cómo le hacemos para medir?, ¿cómo mide la gente?* Los alumnos mencionan la regla y el metro, respuestas esperadas pues la acción se basaba en esta conjetura para, a través de la reinvención guiada, orientarlos hacia el uso de unidades no convencionales, esta vía se fue configurando en un diálogo público donde el profesor plantea preguntas *¿cómo mide el estilista cuando corta el cabello?* y evoca situaciones cotidianas en las que se requiere la medición.

> [5] M: ¿Han visto más gente midiendo con alguna otra cosa?
>
> [6] Ao: Con hilo.
>
> [7] M: Interesante, medida con hilo. Oigan y ¿ustedes creen que siempre hemos medido con las reglas? ¿Siempre se ha medido con el metro y la regla?
>
> [8] Aos: Nooo (algunos, un tanto inseguros)
>
> [9] M: Cecilia, ¿Siempre se ha medido con la regla? (se acerca a su lugar)
>
> [10] Aa: No.
>
> [11] M: Entonces, ¿cómo media la gente cuando no había reglas?… pues no median. Cecilia, ¿cómo crees que media la gente cuando no había reglas?
>
> [12] Cecilia: (pensativa) No sé…
>
> [13] M: ¿Quién sabe cómo habrían medido antes de que sí hubiera reglas y metros?… este, Hernán ¿cómo…?
>
> [14] Hernán: Con rocas.
>
> [15] M: ¿Con rocas? Con rocas mediremos… ¿Han visto alguna vez a alguien que no esté usando ni metro ni regla?
>
> [16] (Silencio)
>
> [17] M: ¿No se les ocurre? ¿Estás pensando?
>
> [18] (Alumnos permanecen en silencio)
>
> [19] M: Aarón, ¿a ti se te ocurre cómo?

[20] Aarón: (niega con la cabeza).

Como se puede apreciar, el diálogo permite situar a los alumnos en el tiempo anterior a las medidas convencionales [9] [11] [13] [15]. Empero, si bien se lleva a los alumnos a ese tiempo, una parte de sus aportaciones se disipan. Este tipo de respuestas podría haber sido recuperadas al reflexionar cómo medían nuestros antepasados cuando no había muchos instrumentos de medición, pues al hacerlo podrían reconocer que para medir con el hilo se tiene que recurrir a otra medida para conocer su longitud, para luego, por medio de la discusión pública percatarse de que el hilo es una mejor herramienta para medir la longitud.

La TEDE se apoya en la trayectoria conjeturada de aprendizaje pero lo esencial es hacer matemáticas, entonces es deseable que el alumno "viva", matematice el fenómeno y en esta conversación colectiva, llegue al razonamiento de que tal vez las partes de su cuerpo puedan servir para medir y comunicar (aunque sea de manera inexacta) la longitud, es decir se trataría de hacer matemáticas y transformar sus saberes al experimentar la necesidad de medir y validar si funciona. Ahora bien, en esta reinvención guiada (Freudenthal, 1983) es importante recuperar en el diálogo público las aportaciones de los alumnos para que aprendan un quehacer (medir) y no la definición de la medición. En el futuro esta situación, que ya se vivió, puede preparar a los alumnos para nuevos saberes.

En las conjeturas, se establecía el propósito de ubicar a los alumnos en un contexto de medición en el que utilicen unidades no convencionales, pero recuérdese que el experimento de enseñanza se lleva a cabo en un ambiente con variables no controladas, en esta ocasión dichas variables influyeron en el desarrollo de la secuencia, entre otras variables están los observadores en el aula y un maestro no titular en el grupo. Al parecer, estas variables dificultaron que la situación se desarrollara como se esperaba [16 a 22] [29], por esta razón como se puede observar en el siguiente fragmento, hubieron de tomarse decisiones [23] [25 a 27] [35] cómo plantear una serie de preguntas que devolvieran al alumno el control de la situación y provocar el razonamiento público sobre un quehacer matemático.

[21] M: ¿Nunca han visto medir a nadie sin metro y sin regla?

[22] Aos: (niegan con la cabeza)

[23] M: A veces yo he visto a gente midiendo así, miren (se dirige al pizarrón y avanza midiendo con pies) ¿Si han visto a gente midiendo así?

[24] Aos: ¡Sí!

[25] M: ¿Sí? Y no usaban ni regla ni metro, ¿verdad? ¿Qué está haciendo cuando mide así?

[26] Ao: Midiendo pasos.

[27] M: ¡Ah! Entonces con pasos se puede medir, ¿verdad? (vuelve a medir con pies y los va contando). ¿Con qué más se podrá medir Xiomara?

[28] Ao: Con las manos. Así.

[29] M: ¿Estás pensando? Xiomara está pensando, muy bien, ahorita no se le ocurre nada, pero está pensando, está haciendo algo bien importante también, ¿verdad?...

[30] M: ¿Rubén? Rubén, ¿Cómo?

[31] M: Me decías, ¿no? Que hay otra forma de medir.

[32] Rubén: Ah sí, con los brazos (lo hace sobre su banca) mides con los brazos.

[33] M: ¿Con los brazos? ¿Cómo mediremos con los brazos?

[34] Ao: Así (abre brazos) …

[35] M: ¿Así? ¿Podría medir? (abre los brazos y mide pizarrón)

[36] Ao: Así es un metro.

[37] M: ¿Cómo más?, a ver enséñanos cómo medirías con los brazos (le pide que pase al frente), aquí, vente.

[38]Ao: (abre sus brazos y mide de extremo a extremo) así… y luego damos la vuelta (se gira con brazos abiertos).

[39]M: ¿Así pensarías?

[40] Ao: Si…

Como se puede observar, la actividad mejoró cuando se dio mayor independencia a los alumnos porque se logró que se involucraron en el quehacer matemático [26] [28] [32] [34] [38]. Cuando ellos realizan las acciones, la conversación colectiva permite el razonamiento público a partir de la experiencia de los otros, al cuestionarse *¿cómo midieron?* y argumentar la estrategia utilizada, la matematización de la realidad provocada por el dispositivo permite reconocer la opción de medir con las partes de su cuerpo lo que significa que el alumno hace esa reinvención, medir con unidades no arbitrarias. En sus respuestas, los alumnos reconocen esa posibilidad*: ¨medir con dedos al cortar el cabello, medir su banca, su lapicera o su borrador con los dedos¨.*

No obstante que algunos alumnos afirman que pueden usar las partes de su cuerpo para medir, suponen que esas partes (brazos abiertos) equivalen a un metro o que se pueden medir con centímetros, es decir al relacionar las unidades arbitrarias con la unidad convencional de medida [33 a 36] su razonamiento se convierte en un obstáculo epistemológico (Brousseau, 1997 citado en Cortina et al., 2013) porque no les permite comprender el concepto de medición como construcción social que surge de la necesidad de utilizar unidades de medida no convencionales antes de institucionalizar ciertos convencionalismos, en este sentido la actividad no logra que los alumnos reconozcan estas aportaciones para ponerlas en juicio público y experimentarlas en su quehacer.

Como se puede ver en el siguiente fragmento, la actividad propicia que los alumnos se encuentren con las medidas no convencionales, pero en ocasiones este conocimiento obstaculiza la posibilidad de comprender "otra realidad", es el caso de Antonio.

> [41] M: ¿No podríamos usar las manos para medir?
>
> [42] Ao: Así.
>
> [43] M: ¿Alguien que crea que sabe cómo medir?, Antonio.
>
> [44] Antonio: Bueno yo dije que con la imaginación porque sí ya sabemos cuánto es un metro podemos imaginar.
>
> [45] M: Pero antes no sabían cuánto era un metro, ahorita ya se inventó el metro.

Para Antonio resulta vivencial medir con el metro [44], por ello el contexto que se propone (medir cuando no se inventaba el metro) queda en segundo término, al parecer se requería que la actividad planteara una situación en la que Antonio tuviera la necesidad de medir con instrumentos convencionales. Entonces hay momentos en los que el dispositivo debe "negociar", con los alumnos el contexto[3] de la actividad para que en su hacer matemático encuentren otras formas de medir.

En un momento posterior se retoma la situación del "corte de cabello" para reconocer los dedos como unidad e instrumento de medida. La situación permite que los alumnos se remitan a sus experiencias (cuando acuden al estilista) fuera del aula y que imaginen otro tipo de instrumentos para medir. Al parecer en el cierre del primer momento de la práctica matemática la actividad "se detuvo".

> [46] M: Pero, ¿cómo sé?, por ejemplo, ¿cómo puedo medir este pizarrón sin usar metro ni nada?
>
> [47] (alumnos en silencio)
>
> [48] M: ¿No se les ocurre? ¿Estás pensando?
>
> [49] (alumnos permanecen en silencio)

---

[3] En el sentido de realizables o imaginables no sólo como dominio de aplicación sino también y sobre todo como punto de partida para la matematización (principio de realidad). Van den Heuvel-Panhuizen, (1996 en Martínez et al., 2002).

[50] M: Aarón, ¿a ti se te ocurre cómo?

[51] Aarón: (niega con la cabeza).

[52] M: ¿No? El otro Aaron ¿no?

[53] (silencio)

El silencio de los alumnos. [47] [49] [51] [52] [53] parece indicar que es necesario provocar la respuesta para estimular la imaginación sobre cómo se podría hacer, sin embargo, a pesar de las preguntas la actividad continuó estancada y cómo se puede apreciar en el siguiente fragmento, fue necesario renegociar explícitamente una explicación aceptable (Stephan et al., 2003) antes de pasar a la siguiente actividad.

[54] M: ¿Con las manos? ¿Se te ocurre cómo puedo medir este pizarrón sin usar metro ni nada, Fernanda?

[55] Fernanda: Así (junta sus manos)

[56] M: A ver ven, ¿así? (imita) pero, exacto. Y qué les parece medir así el pizarrón, ustedes me dicen si se puede o no, ¿verdad? Vamos a ver cuántas manos mide mi pizarrón (con las palmas de la mano) ¿me ayudan a contarlas?

[57] Todos: una, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce, trece.

[58] (Silencio)

[59] M: ¿Otra forma de medir?

[60] (silencio)

[61] M: ¿Han oído hablar de las cuartas… o palmos?

[62] (Los alumnos niegan moviendo la cabeza)

[63] M: Es como medir con las manos (pone las manos de forma horizontal, una primero y enseguida la otra sin dejar espacios) pero así miren (se dirige a pizarrón y comienza a medir con cuartas). En lugar de así (palmas), así miden cuando miden con las cuartas (mide con cuartas) ¿ya vieron?

[64] M: A veces también miden así miren (usa unidad de jemes) ¿ya vieron? Saben cómo se llama cuando se mide así… jemes. Que práctico, ¿no les parece muy práctico medir con partes de su cuerpo?

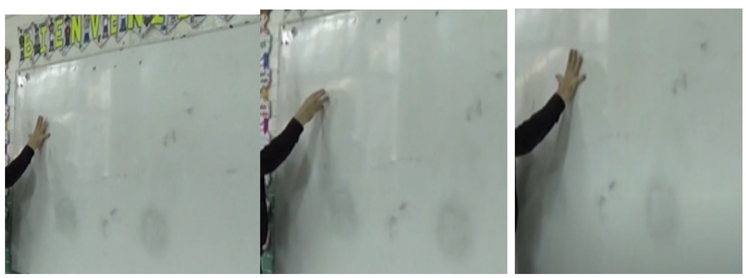
Medir con las palmas de la mano se vuelve una actividad normalizada, [56] [57] [61 a 64], es decir se ha comprendido que pueden usar partes del cuerpo como instrumentos de medida o incluso otros instrumentos diferentes del metro que son una respuesta a la necesidad de medir en la realidad que se les propone. Sin embargo el último procedimiento [56] [63] podría haberse planteado como un apoyo para la iteración de una unidad más que otra variedad de unidades. La manera de poner una mano enseguida de la otra, sin dejar espacio puede funcionar como un primer recurso para que los alumnos indaguen la importancia de iterar la unidad sin dejar huecos entre iteraciones y sin sobre iteraciones.

Conjeturamos que esto permitirá que la actividad matemática refuerce el razonamiento de que, en las iteraciones se deben cuidar los espacios o sobre iteraciones.

En el trabajo con la trayectoria conjeturada se pueden tomar ciertas decisiones [63 a 64], pero no deben considerarse únicas, pues la enseñanza se lleva a cabo en aulas reales y las condiciones siempre serán diferentes (Gravemeijer, 2004). En esta lógica, la TEDE se puede refinar en la situación de la medida con las cuartas (palmos) y “jemes”, por ejemplo se puede abrir a la discusión acerca de ¿qué pasa con los espacios?, lo que permitiría prever acciones posteriores o articularla con la problemática que tuvieron los antepasados al medir.

Figura 24

Medición con cuartas.



Cuando miden con cuartas (imagen 24) los alumnos pueden reflexionar sobre las posibilidades de medir con diversos instrumentos y diferenciar entre cuarta, mano y jeme (unidades utilizadas en sesiones posteriores). En este momento se normaliza la posibilidad de contar poniendo una mano y enseguida la otra sin dejar espacios y que, para medir con cuartas se abre y se cierra la mano (aunque se corre el riesgo de dejar espacios sin contar por la sobre posición de los dedos). En el caso del jeme (distancia entre el dedo pulgar e índice), al medir con una sola mano puede aparecer un obstáculo, dejando espacios sin medir.

Cabe aclarar que la actividad no se centra en la reflexión sobre las medidas utilizadas en el pasado, sino en la actividad de medir, esto es en ¿cómo se mide? En la TEDE lo fundamental es que sea el quehacer matemático lo que lleve a los estudiantes a elegir la opción más adecuada para medir sin dejar espacios en las iteraciones. La oportunidad que brinda el razonamiento público tiene que ver con que los alumnos compartan los saberes que pusieron en juego que les han permitido apropiarse de ciertas estrategias de medición a partir de la indagación (experimentación). Que el dispositivo pueda conjeturar estas oportunidades ayuda a evitar obstáculos didácticos (Brousseau, 1997, en Cortina 2013) y permite el avance de la actividad para ayudar a aprender a los alumnos.

Hacer matemáticas. El aprendizaje, la práctica y la participación.

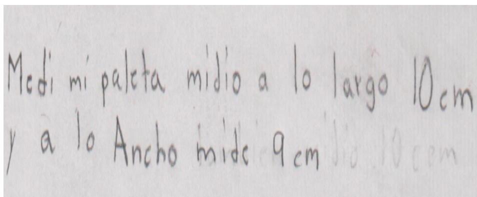
En la siguiente actividad el objetivo es incorporar a los alumnos a un quehacer <matematizar>, pero el énfasis no se hace en aprender las unidades de medida arbitrarias, sino en medir, para ello se pide a los alumnos medir tres objetos de su entorno inmediato sin usar la regla, tal como se habría hecho en la antigüedad. En el siguiente fragmento se observa la manera como el docente introduce esta actividad.

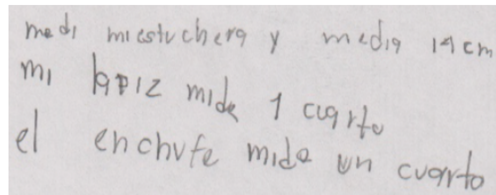
> [65] M: Entonces si no vamos a usar regla ni metro, ¿qué vamos a usar?
>
> [66] Los dedos, las manos, los pies… (Los alumnos hablan en conjunto)
>
> [77] M: Fabiola nos dice las manos, Ana Paula el cuerpo, ¿Dominic podemos usar los dedos?
>
> [78] M: Leticia ¿vas a medir la regla?
>
> [79] L: (asiente con la cabeza)
>
> [80] M: ¿Con qué vas a medir la regla?
>
> [81] L: (levanta un dedo)
>
> [82] M: Muy bien
>
> [83] Aa: ¿Cómo se llama éste (hace un jeme)?
>
> [84] M: jemes.
>
> [85] (los alumnos siguen midiendo con cuartas, dedos, etc., algunos comentan con un compañero, Lupita se levanta a medir, al igual que Azucena y Fabiola se levantan a medir el pizarrón juntas)
>
> [86] M: ¿qué es más grande, la cuarta o jeme?
>
> [87] Aa: El jeme
>
> [88] M: ¿El jeme es más grande? (muestra ejemplo de las dos)
>
> [89] (alumna regresa a su lugar)
>
> [90] M: ¿tú mediste tu brazo? Y ¿Cuánto midió tu brazo?
>
> [91] Ao: tres
>
> [92] M: ¿tres qué?
>
> [93] (la compañera de lado lo apoya contando jemes en su brazo)

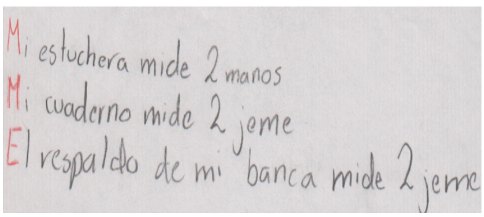
Como se puede observar, el diálogo público permite que los compañeros se ayuden [85] [93] bajo la guía del docente [86 a 88], de esta manera el grupo entero matematiza. Los alumnos midieron su banca, la lapicera, el pizarrón, entre otros objetos, aunque no todos pasan de un nivel a otro o en sintonía necesariamente, hay ajustes y desbalances. En las siguientes producciones se observan procesos de matematización horizontal[4] que muestran el proceso hacia la matematización vertical.

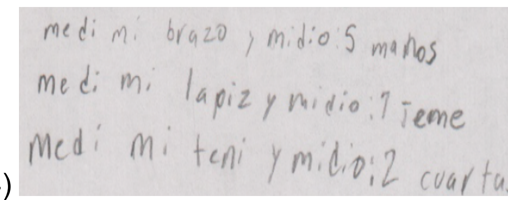
Figura 25

Producciones de medición con medidas no convencionales.

(1) 

(2) 

(3) 

(4) 

Se puede observar que en las producciones (1) y (2) aún no se tiene una base sólida para continuar la matematización vertical, lo que se puede atribuir a la poca experiencia para medir con unidades arbitrarias, lo cual no se considera desafortunado sino un elemento a considerar para reajustar las próximas actividades. Las producciones (3) y (4) que son similares a las de la mayoría de los alumnos, dan cuenta de un avance en el proceso puesto que las medidas no convencionales (jemes, cuartas, palmos, dedos, pasos, pies) son modeladas para cubrir la necesidad de medir y posteriormente comparar cuál es mayor que otra, en estos casos los alumnos están en proceso de crear un ***modelo de*** la situación.

Entonces, medir tres objetos sin usar unidades normalizadas [81] [83 a 88] [90 a 93], les permitió participar en la siguiente actividad desde el hacer, matematizar la situación, medir sin usar medidas convencionales y la contextualización es el marco que ayuda a introducir a los estudiantes en la actividad de medir.

[4]Asociada con actividades de la vida cotidiana; en las cuales los alumnos introducen su conocimiento y estrategias situacionales para aplicarlas en la situación (Santamaria, 2006)

El error, un recurso para el aprendizaje.

Para Brousseau (1997, en Invinkelried, 2020) los obstáculos se manifiestan en forma de errores que no son consecuencia del azar y que persisten en el tiempo si no se los trabaja adecuadamente, bajo esta idea en este apartado se pretende analizar el aprendizaje como resultado del quehacer matemático de los alumnos. La actividad se genera cuando se provoca el error, esto provee al dispositivo de información sobre las formas de interpretar las situaciones erróneas, cómo se resuelven y cuáles son los procedimientos que utilizan los alumnos en colectivo, lo cual está relacionado con las decisiones que se tomarán posteriormente.

En la actividad se propone medir el largo del salón utilizando pies (pasos), la indicación es que observen bien ¿cómo se va a medir? y ¿cuántos pies son? El profesor, de manera intencional mide con los pies sin respetar el punto de partida y la secuencia, la pregunta que detona la discusión es: *¿estoy midiendo bien o no?,* de la cual se desprenden tres posibles errores.

a) Medir a partir del paso dos

Por medio de cuestionamientos cuyas respuestas de inicio fueron ambiguas, se busca incluir a los alumnos en el quehacer que se propuso, para ello la pregunta se reformula, *¿quién cree que lo puede medir mejor que yo?,* Mario pasa y comienza a medir con pies *uno, dos, tres, cuatro, hasta cinco*, sin contar el primer paso, pero sin dejar espacios entre un pie y el otro, esto que abrió el intercambio de razonamientos [94- 105].

> [94] M: Ah, a ver fíjense vamos a escuchar todos porque aquí acaba de pasar algo muy interesante, algunos piensan de una forma y otros piensan de otra, verdad.
>
> [95] M: Lupita dice que cuando yo mido así, voy a volver a medir como medí ahorita, que creo que es como midió Mario, que mide mal. Uno (comenzando a contar desde segundo pie), dos, tres, cuatro, cinco; ¿se mide mal así Lupita?, a ver pásale allá, vamos a escuchar la explicación de Lupita.
>
> [96] Lupita: Porque primero es uno (comienza a contar desde el primer pie), dos, tres…
>
> [97] M: Así que medí yo, ¿no?
>
> [98] Aos: Sí… No…
>
> [99] Aa: (comienza otra vez) uno, dos, tres, cuatro, cinco…
>
> [100] M: Así medí yo Lupita, mira, es igual, es igual, es igual, es igual fíjense. Uno (comenzando a contar desde el segundo pie), dos, tres, cuatro… es igual, ¿no?

[101] M: A ver, Lupita va a hacer la explicación, sale. A ver, unos dicen que me adelante un paso más. ¿Quién cree que medimos igual? Levante la mano quién cree que medimos igual, levante la mano. Algunos creen que medimos igual, explícame por qué no medimos igual Lupita, vamos a oír todos a Lupita.

[102] Lupita: es que primero comienza desde acá (indicando el segundo pie) uno y es desde acá (indicando el primer pie)

[103] M: ¿Ven la diferencia?

[104] Aos: Sí… No…

[105] M: Está haciendo muy buen esfuerzo, pero a mí no me queda clara la diferencia. A ver, Lucas, pásale tú y explica.

El maestro guía la actividad hacia la reflexión sobre el punto de partida, *a ver fíjense, creo que así midió Mario, me dicen si lo estoy haciendo bien, a ver ¿listos? Uno (comienza a contar desde el segundo pie como lo había hecho al principio) dos, tres, cuatro… ¿le medí bien?, ¿quién cree que lo hice bien?,* sólo algunos chicos participan, *¿quién cree que lo hice mal?*, la mayoría de los alumnos levantan la mano y argumentan, *porque no contó el primero*. Con ello el profesor provoca el razonamiento [96] [99] [101][105] en la discusión y el trabajo público, [94][95][97][98][103][104].

En lo dicho por el docente se establece que no hay una respuesta correcta que él deba dar, sino que debe ser una construcción social generada a partir del análisis de la situación y de los argumentos [97][98][100][102] expuestos en el diálogo colectivo. En este caso el error aparece cuando el alumno dice que no comprende la diferencia en la forma de medir y el docente pone en el debate público tal incomprensión.

Esta conversación pública, como se puede observar en el siguiente fragmento, tiene una doble intencionalidad, que el alumno exponga sus saberes en el hacer [106][108][113][114], [111 a 115], para que ello genere el despliegue de estrategias para reconocer el error [114], de acuerdo con Freudenthal (1983), esto significa dar a los alumnos la responsabilidad de reinventar ideas, conceptos y modelos.

[106] Ao: Usted, mide así de aquí (señalando segundo paso) empieza desde aquí, debe comenzar desde aquí (pone dos pies junto a la pared).

[107] M: quédate aquí, quédate aquí. Mira empiezo desde aquí, y empiezo uno (cuenta hasta el segundo pie), dos, tres, cuatro. Leticia, ¿viste el problema en lo que acabo de hacer?

[108] Jacinto: Es que no cuenta el que está pegado a la pared, no lo cuenta.

[109] M: ¿no lo cuento?

[110] Aos: ¡No!

[111] Jacinto: Comienza aquí (mostrando el segundo pie) uno. Usted empieza así.

[112] M: o sea, para mí así es uno, y para ti cómo es uno.

[113] Jacinto: Uno (contando desde el primer pie) dos, tres…

[114] M: ¿ya vieron la diferencia? A ver, a ver si ya me quedó claro, para medir bien éste tiene que ser uno (acentúa el primer paso).

[115] (los alumnos afirman).

Mediante el quehacer de los alumnos se va clarificando el error [106][108][111] y es en el diálogo colectivo donde se da el razonamiento público [106][113][114][115] que transforma las ideas erróneas que en futuras prácticas pudieran obstaculizar el aprendizaje. Así se refinó la medición, bajo consenso se acepta que debe partirse del paso uno, aunque se presenta otro obstáculo ¿cómo medir ahí donde se dejan espacios?, esto es, ¿cómo medir de forma discontinua?

b) La medición discontinua

Cuando se midió el largo del salón utilizando pies (pasos) se propuso medir sin respetar el primer paso ni la secuencia de un pie al otro, pero en el curso de la actividad, como se puede apreciar en el siguiente fragmento, el primer error perdura, los alumnos miden cada pie por separado y llaman a esta acción "pasos más largos" que la unidad de referencia.

[116] César: (comienza a medir otra vez con pasos más grandes que pies) uno, dos, tres, cuatro, cinco.

[117] M: ¿Qué problema hay con esa forma de medir o no hay problema?

[118] César: uno, dos, tres, cuatro, cinco (midiendo con pasos largos y no pies)

[119] M: Pero, cuál es la diferencia en las formas de medir.

[120] Jaime: Ah, los pasos

[121] Ao: Es que él los hizo más largos.

[122] Jaime: los pasos más largos.

[123] Lucas: Es que él estaba así contando (pasos largos), así y así

[124] M: Entonces, cómo tendrías que medir.

[125] (César regresa a contar)

[126] César: Uno, dos (da un paso ligeramente más grande de pie), tres, cuatro, cinco.

[127] M: Cinco, y ¿los tengo que tener bien pegaditos o no?

[128] Aos: Si

[129] M: o ¿los puedo tener así separaditos?

[130] Aos: No.

[131] M: ¿Qué tiene que los mida separaditos?

[132] Aa: porque mides más

[135] M: Ana Corina nos acaba de decir algo bien importante, qué problema hay con que mida yo así, que no los pegue bien.

[136] Ana Corina: Hay un espacio que no estás contando.

[137] M: Hay un espacio que no estoy midiendo, verdad, que no estoy contando, entonces voy a dar menos pasos, ¿verdad?

[138] (pocos alumnos responden afirmativo)

[139] M: A ver, vamos a ver cómo mide Aarón

[140] Aarón: Uno, dos, tres, cuatro, cinco (midiendo con pasos más grandes a pie)

[141] M: ¿está bien o no?

[142] (Daniela niega con la cabeza)

[143] M: Por qué no

[146] Daniela: Porque está dejando espacio

[147] M: Porque está dejando espacios.

En la discusión colectiva [117][119][124][127][129][131][141][143] emergen opiniones que ponen en tela de juicio esta acción (medir con pies separados o dejando espacios) [121 a 123] –situación conjeturada en la TEDE para actividades posteriores –. En ese momento la intención del dispositivo era deconstruir el error para averiguar la causa [116][118][125][126][140], su naturaleza y la manera como afecta la iteración de la unidad de medida (hasta ahora arbitraria).

En el trabajo público [120 a 123] se observa que la actividad fue efectiva, permitió reconocer que el error fue dejar espacios y una parte no se midiera [136][137][147]. Sin embargo, no se logró normalizar la actividad [138], al parecer la respuesta al error [137] fue precipitada, tal vez hubiera sido mejor esperar a que, mediante su quehacer matemático, los alumnos llegaran a esa reinvención, pero la actividad se encontró con una disyuntiva, continuar con el trabajo público o seguir con la actividad para analizar el error en la sobre posición de la unidad de referencia. La decisión fue encapsular el error sobre la medida discontinua que expresa longitud y trabajarlo hasta la siguiente sesión, pues en este trabajo público los alumnos encontraron el error al sobreponer la unidad.

c) Medir pie sobre pie

Durante la actividad, los alumnos identifican otro error al cuantificar las iteraciones, ‘medir un pie sobre otro pie’. En la EMR se considera que los alumnos siguen una senda de aprendizaje individual con niveles de habilidades distintas (Freudenthal, 1991) lo que hace rico el proceso, esos es, trabajar en un grupo heterogéneo posibilita la matematización progresiva y la reinvención guiada, es el reconocimiento de este error lo que permite llegar a la reinvención guiada [151][153].

> [148] Mario: (comienza a medir como lo hizo Luis H.) uno, dos, tres, cuatro, cinco.
>
> [149] M: ¿Qué piensan de esa forma de medir?
>
> [150] Aos: ¡Que está mal! (se escuchan más murmullos)
>
> [151] M: Fíjense, voy a medir como él. Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis (avanzando menos de un pie, se sobreponen), qué problema hay. ¿Qué problema hay Yuya?
>
> [152] (otros alumnos levantan la mano)
>
> [153] Ao: Está cortando espacios.

Como se puede apreciar, los alumnos realizan un matematización progresiva [153], la mayoría asegura que esa es una forma de medir incorrecta [150] y cuando imaginan la manera correcta de medir, están pensando en el quehacer, en lo que ya vivieron en la clase y no en una definición dada. Si bien el proceso tiene discontinuidades, el grupo realiza un esfuerzo para participar en el quehacer y dar sus argumentos.

El error, motor de un buen aprendizaje.

En la actividad que se propuso, provocar y reconocer el error permitió que los alumnos hicieran matemáticas y pusieran en juego sus habilidades para pasar de un nivel situacional a uno de creación de un modelo (Santamaria, 2006) en el que reconocen la necesidad de medir sin dejar espacios, medir desde el paso uno (pegado a la pared, paso cero) y no empalmar los pasos. Este reconocimiento les ayudará a cuantificar adecuadamente las iteraciones de la unidad establecida.

> [154] Ao: Porque está adelantado los pasos
>
> [155] M: ¿por qué está adelantando los pasos? Bien pasen a su lugar
>
> [156] Aa: porque no contó el pie que estaba en la pared

Mediante la discusión sobre el error, los alumnos normalizan herramientas matemáticas [153] [154][156] que les ayudan a organizar y solucionar una situación problemática superando el error (Santamaria, 2006). En la EMR se propone trabajar con grupos heterogéneos y como no se controlan todas las variables, incluidas las experiencias previas del alumno, el desarrollo de herramientas matemáticas no fue lineal, hubo avances y retrocesos, actividades que fueron efectivas como el uso de error y otras no tanto como la de buscar unidades no convencionales. Por estas fluctuaciones se hizo necesario tomar decisiones para continuar con la TEDE.

Desventajas de medir con unidades arbitrarias.

La siguiente actividad implicó conectar los haceres con la situación principal, lo que Gravemeijer (1994), enmarca como el nivel referencial en el que los modelos, estrategias, descripciones y procedimientos refieren a la situación concreta. Se trataba de medir el pizarrón con cuartas e identificar quién tenía la cuarta más grande y quién la más pequeña y por qué.

La actividad inició con la reflexión de los quehaceres antiguos. *Fíjense, parece tan sencillo medir con las partes del cuerpo, pero no es tanto, ¿verdad? Está un poco complicado, como no tenían reglas o centímetros los antiguos, se les complicaba. ¿Cómo mediremos con las manos? ¿Cómo mediremos, con cuartas? ¿Quién nos podría enseñar cómo mediremos con cuartas?*

Jacinto, quien comenzó a medir una cuarta tras otra sin dejar espacios y sin sobreponer, anota en el pizarrón –*Jacinto 15 cuartas*; continua Javier pero la hace con jemes porque no sabe hacerlo con cuartas, así que Jacinto lo orienta y Javier escribe –*Javier 18 cuartas–;* enseguida –*Mario 16 cuartas –;* en ese momento el profesor cuestiona.

> [157] M: ¿Qué está pasando con las formas de medir?
>
> [158] Aa: Cambia
>
> [159] M: A ver, cambia ¿Cómo cambia?
>
> [160] Aa: Miden diferente
>
> [161] Xiomara: uno, dos, tres… trece (le sobra un pedazo) y cachito.
>
> [162] M: ¿trece? (anota en el pizarrón Xiomara 13 cuartas). A ver, ahora lo va a medir el maestro, sale, a ver si yo sí lo hago bien, sale. Uno, dos, tres… diez (escribe en el pizarrón – maestro 10 –)

[163] M: A ver, vamos a pensar en esta pregunta, quiero que todos piensen en esta pregunta todos ¿Por qué no nos salió igual?

[164] M: Vamos a pensar. ¿Por qué no nos dio igual? Si se habrá equivocado alguien por eso, por eso no nos dio igual, ¿alguien ya sabe?

Como se puede apreciar, al contrario de la actividad del error, que de acuerdo con la TEDE fue cedida a la clase, en este caso la explicación del profesor hace énfasis en la normalización de las estrategias y el trabajo público para llegar a un razonamiento público, a un conocimiento social. Cabe subrayar que en la actividad sobresale la mayéutica[5] [157][159][162 a 164] cuando el profesor pregunta a la clase para conectar con la siguiente actividad.

¿Quién tiene la mano más grande, quién repite más veces, quién menos?

La intención de esta actividad era normalizar la medición como iteración de una unidad, comprender que entre más grande sea la unidad de medida menos veces se repite y entre más pequeña, más veces se repite, para articularla con un objetivo posterior.

En el contexto de la medición con unidades arbitrarias, el dispositivo invita a imaginar la relación entre el tamaño de la mano y el número de iteraciones, por ejemplo -*Javier tiene la mano más grande, porque 18 es un numerote y la mano del maestro es más pequeña porque fueron menos veces-.* Los alumnos dicen que no, que el maestro tiene más grande la “cuarta”, ante ello se propone hacer un ejercicio de imaginación con Javier y Paola acerca del tamaño de su “cuarta” y el número de repeticiones que necesitan para medir el pizarrón - *¿quién creen que tiene la cuarta más grande y quién más chica y por qué?-.*

En el siguiente fragmento se pueden observar las interacciones que se dieron mientras realizaban la actividad. A pesar de que algunos alumnos expresaron que - *al ser más grande la mano menos números* [174] [179] *y abarca más espacio*- [183 a |184], la mayoría solo normaliza la idea de *más grande menos números*, pero su justificación se basó en un conocimiento anterior que resulta inapropiado, - *menos números es menos espacio*- [173 a 176], lo que representa un obstáculo epistemológico (Brousseau, 1997 en Cortina 2013) que se refleja con sus producciones. Por esta razón, en correspondencia con

[5] Preguntas con la intención de animar al estudiante a reflexionar sobre sus actividad matemática, en concordancia con la norma social de hacer preguntas aclaratorias (cuando surgiera un conflicto en las interpretaciones) como algo compartido (Martínez et al., 2002)

el dispositivo se tomaron decisiones, hacer preguntas aclaratorias (Stephan et al., 2003) que permitieran evidenciar la falta de comprensión, [177 a 180] [183-184].

(S1, min. 55:30- 1: 15)

[165] Paola: (la alumna se niega al principio) porque las manos son diferentes

[166] Aos: Sí.

[167] Paola: Es por la medida de las manos, que miden diferente (en concordancia con Penélope, Azucena y Cecilia)

[168] Azucena: Porque las manos son más diferentes

[169] M: ¿le entendiste, sí? (dirigiéndose a otra alumna) ¿estás de acuerdo, le entendiste?

[170] Aa: porque una mano es más grande

[171] M: porque una mano es más grande que la otra, verdad, claro que sí.

[172] M: y, por qué Paola nada más le dio 13 y a Javier le dio un número más grande.

[173] Aarón: porque entre más grande menos espacio ocupa.

[174] Aarón: o sea, porque entre más grande la mano menos números se hacen

[175] M: Entre más grande la mano

[176] Aos: menos espacio ocupa.

[177] M: más espacio ocupa y menos repeticiones necesita. ¿me entendieron o no, quién me entendió?

[178] M: A ver, muchos no le entendieron ¿verdad?

[179] M: Entre más larga la mano más espacio, menos números. ¿Quién no ha entendido? Entonces, le puedo preguntar a Daniela y me lo puede explicar ¿sí?

[180] M: Denisse ¿me lo puedes explicar? A ver, voy a volver a hacer la pregunta, ¿quién no ha entendido? (Algunos alumnos alzan la mano)

[181] M: A ver, Azucena no ha entendido, ¿quién lo puede explicar?

[182] Jacinto: Es que, entre más grande sea la mano menos espacio va a ocupar y va a ser menos número de veces.

[183] M: Eso es lo que tú explicaste (refiriéndose a Aarón que explicó primero) ¿entre más grande la mano menos espacio ocupa? (Varios alumnos afirman que es correcta la afirmación)

[184] M: Pero, a ver, estamos discutiendo aquí (señala tamaño de las dos cuartas, marcadas). A ver, la pregunta es ¿por qué a Javier le dio 18 y a Paola 13?, si Paola tenía la mano más grande, la cuarta más grande.

[185] Jacinto: Porque al tener la mano más grande también tiene menos números

[186] M: Noemí, a ver está es nuestra tarea de todos, ver si le entendemos a Noemí o no. Aarón ésta es tu tarea, a ver si esto es lo mismo que dijiste tú

[187] Noemí: porque entre más grande la mano abarca más espacio

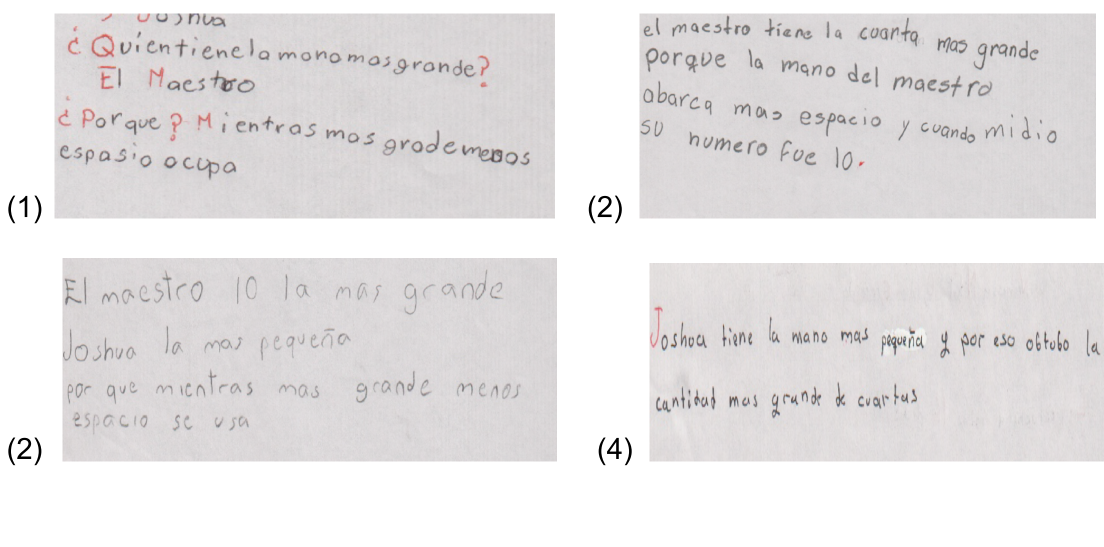
[188] Aa: Son menos números.

Como se puede observar, la reflexión sobre las justificaciones les permite la reinvención, <<entre más grande es la unidad de medida, menos iteraciones son>> al identificar que la medida cambia en relación al tamaño de la mano [165][167 a 168][170]. Sin embargo, no se logran validar los números como símbolos que cuantifican, se ven como simples marcas ya que las justificaciones de los niños se centraron en la idea de menor número menor espacio [173 a 176] [182 a 184], probablemente interfirieron dos factores, lo arraigado de las propiedades de los números naturales como “a menor número menor espacio medido” y el desconocimiento del lenguaje matemático, es decir la manera de expresar sus concepciones es errónea aunque no su quehacer [173 a 174][175 a 176] [185]. Estos factores junto la representación de los números como marcas sin vinculación con la cantidad, influyeron para que no se diera la reinvención.

Frente a estas dificultades fue necesario recurrir -de manera explícita- a las normas generales establecidas, *se vale no entender, se vale equivocarse y escuchar a nuestro compañero que está hablando* [177][178][184][186] que permitieron evitar una retroalimentación fallida [177 a 178] [182] o reinvenciones erróneas (imagen 3) para tomar esta situación problemática en la siguiente sesión [187][188].

Figura 25

Comparación de las cuartas (medida arbitraria)



Empero, más que catalogar la actividad como efectiva o no, lo que se puede observar es que ayudó a evitar la ilusión de transparencia de la comunicación didáctica conjeturada en la TEDE, es decir ayudó a diferenciar el saber que la práctica desea lograr y los conocimientos efectivamente construidos por los estudiantes, lo que posibilita a ajustar los objetivos para la siguiente sesión.

En general la secuencia de actividades funcionó relativamente bien, dado que introdujo a los alumnos a la práctica de medir sin unidades arbitrarias. Los alumnos generalizaron su uso, pero no se logró generar la necesidad social de utilizarlas, es por ello que en la siguiente actividad hubo necesidad de intentar que comprendieran por qué es importante medir en la vida social.

4.1.2 Sesión Dos. Contextos y situaciones problemáticas realistas, el quehacer de la medición.

En el análisis de las discusiones sobre la iteración y en las producciones de los alumnos de la primera sesión se observan ciertas limitaciones, no se reconoció la importancia de medir, es decir para qué medir y cuál es la relevancia de hacerlo o no como práctica social, no solo en el ámbito escolar. Estas limitaciones dificultan que, al momento de comunicar los resultados, comprendieran las desventajas de medir con unidades arbitrarias.

También se observaron dificultades en la actividad que pretendía que los alumnos comprendieran que la “cuarta” más grande se repite menos veces pero ocupa más espacio, por estas razones el dispositivo se modificó para orientar la reinvención de dichos conceptos y pasar de un nivel referencial a un nivel más formal ya que, como lo señalan Cobb et al., (2008) y Gravemeijer (2004), cuando los alumnos son capaces de proporcionar colectivamente razonamientos lógicamente coherentes, se avanza al siguiente concepto de la secuencia, cuando no es así los investigadores tratan de entender las razones por las que se dificulta el avance y realizan los ajustes a la secuencia.

En la segunda sesión de la primera práctica matemática se plantean tres actividades. En la primera (adecuación a la TEDE), aprovechando las fechas patrias se planteó una situación con la bandera, se cuestionó ¿cómo es la bandera? ¿De qué tamaño es? ¿Qué podía hacer para saber de qué tamaño es? ¿Cómo la mido? ¿Cuánto mide la bandera de largo con cuartas? El objetivo era reconocer la necesidad de medir, para ello se retomaron los razonamientos de la clase anterior para reconocer las ventajas y desventajas de usar unidades arbitrarias (las partes del cuerpo) en la medición, *¿alguien* *ha visto medir a alguien? ¿Quiénes miden? ¿Qué es eso de medir? ¿Alguien, para su trabajo medirá algo?* Se trataba de matematizar la situación y llegar a razonamientos públicos acerca de las ventajas y desventajas de medir con las manos.

En la segunda actividad también se trataba de matematizar una situación que implica la reinvención de la medición con las partes del cuerpo, haciendo énfasis en que a mayor tamaño de la mano más espacio y menos iteraciones. La consigna de la situación era comunicar por teléfono las medidas de una ventana que requería cortinas, pero no se contaba con regla (cinta métrica) ni otro instrumento convencional, la pregunta detonadora fue ¿qué creen que pasó y por qué?

La tercera actividad tenía el objetivo de servir como vínculo con la sesión posterior, en esta se relata una historia acerca de cómo se medía hace muchos años; la leyenda trataba sobre un pueblo mítico prehispánico Maya que tuvo un problema para comunicar medidas de ciertos objetos que habían sido medidos con unidades arbitrarias. La actividad sería un recurso de contextualización para llevar a cabo la TEDE.

¿Qué medimos? La antesala de la actividad

A través de una dinámica similar a la mayéutica socrática se recuperaron los razonamientos anteriores para favorecer el trabajo público, esto es, se dio oportunidad a los alumnos de articular las ideas que reinventaron en la primera sesión para ponerlas en práctica en el quehacer cotidiano.

> [1] M: Penélope ¿te acuerdas que hicimos la clase pasada?, no te acuerdas nada de lo que hicimos la clase pasada! ,¿eh?
>
> [2] Penélope: Medimos…
>
> [3] M: Ah! dilo fuerte Penélope.
>
> [4] Penélope: Medimos con las manos el pizarrón (otro niño levanta la mano)
>
> [5] M: que medimos con las manos el pizarrón, ¿ya te acordaste de algo más Carmen?
>
> [6] Carmen: También medimos con los pies.
>
> [7] Ana Corina: Medimos con los dedos.
>
> [8] M: Medimos también con los dedos (otro niño dentro del salón: cuartas), con cuartas (otro niña con los jemes)

Como se puede observar, en un primer momento se pone en común la estrategia de medir sin instrumentos de medida convencionales, las aportaciones de los alumnos [4][6][[7][8] evidencian que han “normalizado” el uso de medidas arbitrarias, no obstante, resultó arriesgado asumir que todo el grupo lo había comprendido, por ello la decisión de ofrecer más experiencias ligadas para que emergieran esas ideas y principios como una necesidad de la situación.

> M: Antes de que volvamos a retomar esas actividades de medir, algo que no les pregunté la sesión pasada, y les quería preguntar, es ¿alguien ha visto mediar a alguien algo? ¿Quiénes miden?¿qué es eso de medir? ¿Alguien para su trabajo medirá algo?, a ver Lucas usted ya pensó en alguien (…)

A partir de estos cuestionamientos los alumnos intercambian sus experiencias sobre la necesidad de medir, Lucas dice *mi papá es ingeniero, agarra su metro y mide los terrenos,* otros mencionan que los que diseñan ropa miden para que les quede la ropa a la medida. Empero, el dispositivo busca integrar a todos los alumnos, por ello el docente intenta incluir a los demás,[6] toma el caso de Jaime para analizarlo en el grupo puesto que Jaime no veía el trabajo de su padre (mecánico) como un oficio donde se midiera.

Mediante anécdotas como la verificación del auto, Jaime dice que el escanner sirve para medir cosas del carro, Sofía añade que *los instaladores cuando miden un cable*. La conversación se centra en la necesidad de utilizar instrumentos especiales para medir, en palabras de los alumnos: *los constructores para medir los edificios, los que venden fundas para los teléfonos para no tener una más chiquita de lo que es; los zapateros.*

El propósito era llevar a los alumnos, en un primer momento, a reconocer la importancia de medir e identificar los instrumentos de medición convencionales que se utilizan en la actualidad para contrastarlos con aquellos momentos en los que no existían. Con esta reflexión y con la guía del docente se pueden maximizar las oportunidades para producir, intercambiar y apropiarse de ideas y facilitar el proceso de reinvención, en palabras de Freudenthal (1991), ayuda a los alumnos a alcanzar mayores niveles de comprensión matemática.

La conversación inicia cuando el maestro expone su vivencia sobre el decorado para el mes de septiembre y pide a los alumnos que expongan la suya, de esta manera la conversación colectiva permitió que los alumnos comprendan qué hacer cuando no se tienen instrumentos para medir,

[6] Antes de la sesión el docente tuvo una conversación con los padres de los alumnos para explicar la dinámica de trabajo (que forma parte de la investigación), de la cual surgieron datos importante para la contextualización y son tomados en cuenta para dirigir las preguntas, por ejemplo el trabajo que desempeñan los padres de familia, la interacción de la primera sesión en relación a su forma de participar, de trabajo; algún implemento de referencia, como el uso de lentes etc.

M: […] hoy en día muchos usan instrumentos de medición, estuvimos platicando como se medía antes de que hubiera instrumentos de medición, o cómo podríamos medir si no tuviéramos a nuestro alcance un instrumento de medición. Fíjense la anécdota que me paso el otro día […] Fíjense que la semana pasada estaba con unos compañeros en la oficina y les dije –hay que decorar, ya es momento de decorar, poner nuestros motivos nacionales– y en eso ¿qué creen?, que me habla mi hermano, que me quería preguntar algo, y entonces me habla por teléfono y le contesto y le platico que íbamos a decorar y me dice: –¡ ah! ¿Saben que debería de poner? - una bandera como la que pusimos nosotros en nuestra oficina, y ¿qué creen que le dije yo? (Algunos alumnos responden que sí) ¿Si saben cómo es la bandera que puso en su oficina? (murmullos, larga). ¿Cómo saben?

Mariana: – con banderas, unos muñequitos de mariachi y carteles

Fabiola: –con muchas banderas en la puerta de su casa; otra alumna – sus coches y algunos otros en las oficinas de trabajo de sus padres.

La mayoría de alumnos participan y aunque hay casos como Denisse, que si bien no interactúa igual que el resto del grupo (es muy observadora y se integra al quehacer cuando se le proporciona el contexto para hacerlo), realiza un esfuerzo productivo al hacer matemáticas.

Vale la pena subrayar que, ante la necesidad de medir sin instrumentos convencionales, con sus comentarios, los alumnos dieron la pauta para continuar, pues la actividad se liga con sus intereses inmediatos y reconocen que medir es una necesidad de su realidad lineal [10][11][12][17] que puede reinventarse a través de una realidad vivencial [19]. El dispositivo se ocupa de la reflexión sobre esa comunicación, es decir de cómo comunicar esa parte que se necesita para obtener una réplica idéntica ¿cómo cuantificar? En el siguiente fragmento puede verse el planteamiento de la situación problemática de comunicación de una medida cuándo no hay una unidad de referencia.

[9] M: […] es como grandecita, pero mediana, pero más grande, pero no como muy grande y tampoco como muy mediana, sino más o menos.

[10] Jaime: Ir a ver la bandera.

[11] M: No, pero no podía ir a ver, entonces ¿qué podía hacer yo para saber de qué tamaño era?

[12) Niños: Una videollamada, una foto.

[13] Docente: Una foto, esa podría ser una buena idea, pero una vez me mandaron una foto de la que está allá en el zócalo y en mi teléfono se ve así miren (muestra su celular, los niños ríen), así que en una foto no hubiera servido tanto, ¿verdad?, (se escucha por la videollamada) porque en mi teléfono se iba a ver...

[14] Aos: chiquita.

[15] Ana Corina: debieron haberle tomado las medidas y mandárselas.

[16] M: pues eso les dije, ¡ay! hermano pues mídela y me dices cuanto mide para saber yo, y cuando vaya al puesto de las banderas saber cuál comprar ¿verdad? y ¿qué creen que me dijo mi hermano?

[17] Lucas: que no sabía medir

[18] M: que sí sabía medir, pero que en su oficina a diferencia de la oficina del papá de Lucas no usan metro, tampoco usan regla, ya todo lo hacen nada más en la computadora y dice - ¿cómo la mido?

[19] Aos: Con cuartas, con jemes

[20] M: Pues justamente eso hizo, le dije mídela con las cuartas, le dije te voy a presentar al grupo con el que estoy trabajando ahorita y esos niños ya todos saben medir con cuartas, lo saben hacer muy bien, bueno eso creo, ¿será cierto o no? (Murmullos sí) ¿si será cierto ahorita? y total que fui y compré la bandera y era cómo esta (muestra una bandera real pegada en el pizarrón), ¿ya la vieron?

[21] Ao. (Lucas): ¿De ese tamaño era la bandera que tenían en la oficina?

[22] M: De ese tamaño era.

Como se puede apreciar, en la actividad se gestionan los niveles de matematización progresiva (Gravemeijer et al., 2000) para transitar de un nivel a otro [15 a 19], los alumnos internalizan el nivel situacional utilizándolo como una herramienta para pensar y asociar la actividad con lo que ya vivieron (nivel referencial). También puede verse un vínculo mediante esta memoria referencial, ya que mencionan lo que vivieron para comprender una situación nueva sin caer en la predicción económica para aplicar un método, de lo que se trata es de transitar por la reflexión de las situaciones para decidir cómo reinventarla, es un quehacer que posteriormente podría ser útil para otras actividades [20 a 22]. De esta manera los alumnos se convierten en la guía del docente para dar solución a su problemática real, poder comprar la bandera cuya imagen aparece en su teléfono pero de tamaño real.

Medir, un quehacer propio del trabajo público.

El dispositivo genera un ritmo natural para la actividad (medir la bandera) y en el curso de la conversación aparece el recurso material que puede apoyar el quehacer (medir con cuartas), lo que permite ayudar a los alumnos que aún no habían comprendido la medición con las partes de su cuerpo. El maestro inicia la conversación de la siguiente manera:

[…] De dónde vamos a empezar Victoria, ¿dónde empezamos?, vamos a ver cómo mide Victoria, bien abierta la mano, haber ábrela bien (la apoya tomando la mano), ¿si estás viendo bien Sofía? Abrimos bien la mano, ¿verdad? y ahora la cerramos, la abrimos bien, vamos a tratar otra vez, ¿sale? (cuentan los niños con ella, pero separa la mano) –A ver hay que hacerlo con mucho cuidado, creo que hay que empezar otra vez, tienes que hacer un gran esfuerzo para medir con mucho cuidado, ¿verdad?, porque tenemos que llevar la mano hasta dónde está y ahí mismo empezar, porque si lo hago así ¿qué pasa? (mide con su cuarta, 1,2, 3, 4) ¿Qué pasa si yo le cuento así? (a propósito deja espacio) ¿Qué pasa?

En un primer momento se mide la bandera con cuartas, trabajo público en el que algunos alumnos siguen con dificultades porque no extienden totalmente su mano (había sobre posición) y dejan espacios entre una medida y otra, empero son los mismos alumnos quienes manifiestan que dichas medidas son inexactas, porque la mano se puede abrir más o menos. En esta experiencia, la medición discontinua discontinua ya no fueron advertidas como errores [24][25][26] sino como una actividad de validación de procedimientos entre los mismos alumnos. Así, mediante la guía del dispositivo la TEDE avanza al normalizar lo que es importante para medir: partir del inicio, de manera continua y sin dejar espacios.

[23] Aos y Victoria: se deja espacio

[24] M: Se deja espacios ¿Verdad? y ¿qué pasa si lo hago así? (lo hace sin abrir la mano 1, 2) tiene que ser bien abierta la mano Victoria (asiente con la cabeza, mide con apoyo del docente y dan 7 cuartas y cachito, casi ocho)

[25] M: A ver Román y ¿cómo empezamos a medir?, ¿cómo se empieza, de dónde vas a medir?

(El alumno mueve sus hombros en señal de no saber por completo)

[26] M: A ver, abre bien tu mano, (trabaja junto con el niño) así ¿verdad? porque vas para allá, ok!, entonces ciérrala, pero este dedo se queda tocando, juntas tu pulgar, 2 (se le complica a Román abrir y cerrar su mano para contar la siguiente cuarta), a ver fíjate Leticia sí lo va hacer, ponte atrás de ella (para ver lo que hace) , fíjate cómo lo va hacer Leticia, pon mucha atención (Leticia cuenta y Román a lado de ella), muy bien Leticia, (luego se refiere a Román) ¿cree que si lo puedas hacer? (Román se pone a medir, pone y quita su mano y trata de seguir donde se quedó)

[27] M: ¿No?, ¿te cuesta trabajo?

(el niño lo mira fijamente, retrocede un paso y mueve sus manos hacia atrás)

[28] M: ¿Qué tal que le haces así? (pone sus manos sobre la bandera una y secuencialmente pone la otra abierta ya en su cuarta, Román observa), así ¿si crees que puedas?

(Román comienza a medir)

[29] M: a los que les cueste trabajo, a los que nos cueste trabajo cerrar, lo podemos hacer como Román, ¿verdad? (pasan otros 4 niños al frente a medir, observa las acciones y retoma)

[30] M: ¿Así van o los tenemos que poner pegaditos? (hace la representación con las manos)

[31] Aos: pegaditos (el docente apoya al niño, pero abiertos, lo más abierto que puedas, utilizan la técnica de Román, pasa Yuya y luego Sofía).

En la medición de la bandera hubo varias intervenciones para guiar la medición con cuartas [24 a 31] o usando las manos. Por ejemplo Victoria y Román lo hicieron correctamente pero dudaron cómo hacerlo, mediante la mayéutica pública (que evita individualizar la discusión) se pide la asistencia de otros alumnos para que funjan como ayuda entre pares [26]. Las intervenciones permitieron que los alumnos reconozcan que no todos los procedimientos para medir son iguales y que por ello hay necesidad de buscar otras formas de medir [25 a 28].

Por otra parte, mediante la reinvención guiada los alumnos encuentran la estrategia para medir con las cuartas y la manera de hacerlo con mayor exactitud. En el marco de esta necesidad el dispositivo propuso otra forma de medir (usar la cuarta de cada mano una después de la otra sin dejar espacio para evitar el obstáculo de la sobre posición) ya ratificada por el colectivo [29], lo que permitió al grupo validar las estrategias correctas para medir.

En la EMR este tipo de contextos realistas son abiertos (admiten estrategias variadas y/o varias soluciones) y dan lugar a valiosas discusiones matemáticas entre los alumnos (Zolkower et al., en Bressan 2016). En este proceso de matematización progresiva los alumnos razonaron ¿por qué las medidas de la bandera no son las mismas?, y cuando expresan sus medidas; *siete cuartas, ocho cuartas, algunos responde 6 cuartas y unos pocos cinco cuartas*, se focalizan en que, las unidades arbitrarias no son del mismo tamaño. También en ese proceso, el objetivo de la discusión colectiva era validar las desventajas de usar dichas unidades, por ello la conversación giró nuevamente la mirada hacia el quehacer matemático (medir la bandera), pero ahora con dos alumnos que hicieran posible observar la diferencia entre el tamaño de sus manos.

[32] M: A ver, vamos a pedirle a la maestra que mida, a ver que nos enseñe su mano.

(la maestra levanta su mano derecha)

[33]Aos: Le va a salir cuatro, cuatro cuartas

[34] M: Levanten la mano quién cree que le va a salir un número más grande que ustedes.

(nadie levanta la mano)

[35] M: ¿Sofía tú crees que les va a salir un número más grande que ustedes?

[36] M: No, ¿quién cree que le va a salir un número más chico?

(más de 13 alumnos de 31 levantaron la mano)

[37]M: A Ver, vamos a contar todos, (la maestra comienza a medir la bandera con cuartas).

[38]Aos: 1,2,3… 6

[37] M: cinco y cacho, oigan ¿y a mí? , ¿Me va a salir un número grande o chico?

[38]Aos: Chico, mediano chico

[39]M: Pero ¿por qué medio chico?

(murmullo)

[40] M: ¿por qué chico si mi mano está grande?

[41] Lucas: Porque entre más grande sea la mano, más chico…

[42] M: Carmen ¿va salir un número grande o chico?

[43] Carmen : Chico

[44] Yuya: También chico

[45] M: También chico ¿por qué? (Yuya)

[46] Yuya: Entre más grande la mano, menos espacio ocupa

[47] M: me… más espacio cubre ¿no? y menos… (Yuya lo vé y asiente con la cabeza)

[48] Ana Corina: Entre más grande sea la mano más espacio ocupa y menos son las medidas

[49] Ana Paula: Porque entre más grande sea la mano, más espacio ocupa, pero menos medidas

[50] M: Entre más grande sea la mano más espacio ocupa, pero menos medidas, ¿entendiste Daniela? ¿Ahora sí? (Daniela mueve la cabeza en señal que sí) ¿lo puedes explicar tú? (mueve la cabeza en señal de no) , Azucena ¿tú lo puedes explicar?, ¿estás de acuerdo o no con lo que dice ? entre más grande sea la mano ¿o cómo es? (interviene Ana Corina) más espacio ocupa, otro niño, cubre), pero menos medidas ¿verdad?

En este fragmento se observa [32 a 44] que los alumnos ya disponían de ideas, estrategias y algunas reglas para medir; *por qué la mano de un adulto no solo es más grande que la de un niño* (haciendo referencia a las estaturas) y al medir con las cuartas declaran: –*entre más grande la mano va a salir un número más chico,* lo que evidencia que ya la ven como una regularidad, pues expresan: *cuando la cuarta es más grande hay menos repeticiones*.

Sin embargo, durante la conversación pública hay alumnos como Yuya [46] que aún tienen la idea que *entre más grande la mano menos espacio ocupa*, esta consideración no surge por un mal quehacer o por una incorrecta reinvención, sino que al igual que Daniela, Azucena [50] y otros alumnos, Yuya identifica la relación entre tamaño de la mano y cantidad de iteraciones pero lo expresa como *a más grande la mano menor espacio,* en lugar de expresarlo como: *menos números de iteraciones.*

Ahora bien, en la matematización progresiva el avance es diferenciado y dinámico porque la comprensión no se logra de igual manera o con el mismo ritmo en todos los alumnos, entonces más que describir en forma exacta lo que puede hacer el alumno en cada actividad, ésta sirvió para observar quehaceres y para adecuar las actividades de modo que todos los alumnos lleguen a la reinvención deseada [48][49][50]. Es por la razón anterior que el dispositivo toma la respuesta de Yuya para recurrir nuevamente al quehacer, pero con el estímulo de la imaginación[7] que provoca la matematización de algo imaginable en su cabeza y que ayudará a poner de manifiesto la progresión de niveles.

> [51] M: A ver chicos, ahora vamos a usar la imaginación, va a entrar Margarita al salón (un niño buenos días) y está midiendo la bandera y Margarita midió….
>
> [52] Lucas: es que no sabemos si es una niña grande o chiquita.
>
> [53] M: ¡Muy buena pregunta!, fíjense cuántas manos midió Margarita (apunta en el pizarrón 20 manos), ¿es muy grande?
>
> [54] Jaime: Es una niña de 4 años
>
> [55] Lupita: Que tiene la mano muy chiquita
>
> [56] M: ¿Por qué Denisse, tiene la mano muy chiquita? ¿cuántas veces le cupo la mano para medir?
>
> [57] Aos:20
>
> [58] Ana Corina: porque ocupa menos espacio y tiene que hacer más medidas
>
> [59] M: Ahora entra Rocío y contó 3 cuartas, vamos a imaginarnos la mano de Rocío (les remite a algunos niños al nombre de una maestra)
>
> [60] Aos: Pues grande porque es de la maestra
>
> [61] M: hay que chiquita Rocío (simula con sus manos a un bebé) solo le midió 3 manos la bandera, ¿qué chiquita es verdad?
>
> (Bullicio, no)
>
> [62] M: ¿Tú qué piensas Yuya? ¿Cómo tendrá la mano?
>
> [63] Yuya: Grande
>
> [64] M: ¿muy grande?
>
> [65] Lucas: más que la de usted porque mide... (Apunta al pizarrón)
>
> [66] M: A ver ahora entra Julia, fíjense cuánto le mide a Julia: es 1 mano (los alumnos gritan de asombro, Lucas trata de representar la mano de Julia con su brazo completo sobre la bandera)
>
> [67] M: ¿Verdad que tiene una mano chiquita Julia?
>
> [68] Aos: No. (Algunos expresan el desacuerdo)

---

[7] Invita a establecer inferencias, que hagan deducciones, sin verlo imaginen para hacerlo.

[69] M: Sí uno es el número más chiquito que hay

[70] Aos: No. (Bullicio)

[71] Aa: Tiene la cuarta más grande

[72] Xiomara: Porque entre más chiquita la mano, es una cifra más grande de número y mientras más grande la mano es más pequeña

[73] M: Entonces la mano de Rocíó ¿cómo es?

[74] Xiomara: Es grande (junto con otros niños)

[75] M: ¿Y la de Julia?

[76]: Xiomara: Muy muy grande (como la de Hulk)

Se puede apreciar un esfuerzo para argumentar la regla normalizada [52 a 58] –*el tamaño de la unidad de medida (no convencional) tiene relación inversa con el número de iteraciones*–, entre más grande la cuarta (unidad arbitraria) menor será el número de repeticiones para cuantificar una longitud o a la inversa [72].

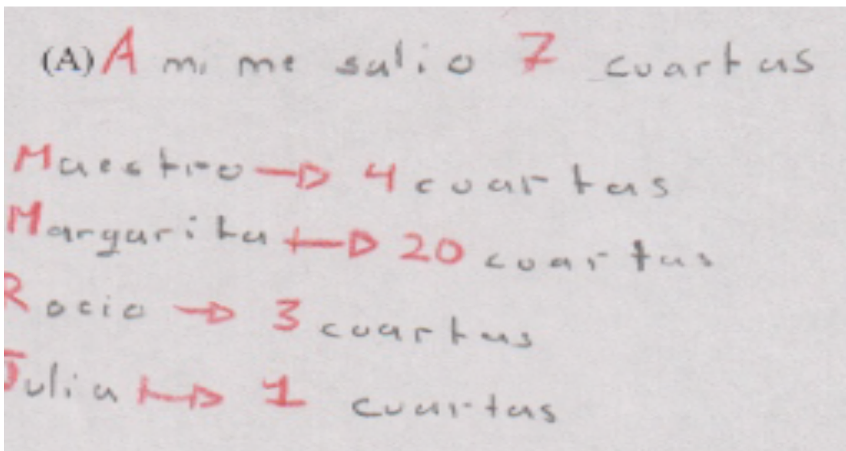
A partir de este trabajo público (*¿cómo será la mano si son 20 repeticiones de la misma, al medir lo largo de la bandera?),* se reflexiona sobre la relación entre el instrumento y la longitud a medir, si bien parte de los alumnos ya validaban la reinvención de la idea [59] (*porque ocupa menos espacio y tiene que hacer más medidas)*, la evolución entre niveles se da cuando en cierto nivel la actividad se analiza en el siguiente, cuando el tema operatorio en un nivel se torna objeto del siguiente nivel (Freudenthal, 1971 en Bressan et al., 2016). Es en ese momento que el dispositivo gira para continuar con el análisis, con el recurso de la imaginación que impulsara a la reinvención [61] [66].

También es de apreciarse que, a partir de contraejemplos [61], [67] [69] y de la experiencia del quehacer realizado, los alumnos se enfocan en predecir, cotejar, comparar y argumentar quién tiene la cuarta más grande, *hay que chiquita Rocío, solo le midió 3 manos la bandera, ¿qué chiquita es verdad?* Para los alumnos resulta ilógico que la mano de Rocío sea pequeña, pues solo son 3 iteraciones, es por ello que dicen: *pertenece a una maestra*, pues han comprendido que a menos iteraciones le corresponde un instrumento (la mano) más grande.

De igual manera, al observar las iteraciones de Julia, comprenden que es difícil que sea real, puesto que el número de iteraciones sería enorme, *la mano de Hulk* [66 a 75]. Al estimular la imaginación (real en la mente de los alumnos), el dispositivo permite comparar lo probable y lo real, es decir el colectivo reflexiona sobre la escasa probabilidad de que existía una mano con una longitud tal que alcance a medir con cuatro cuartas la bandera, lo que les ayuda a reflexionar que, un pequeño número de iteraciones no significa que la longitud a medir sea pequeña (regla de los números naturales), principio que en un inicio fue adecuado. La situación permite a cada alumno comparar con su propia mano y reconocer qué mano (que forma la cuarta) era la más grande (Imagen 4), lo que les hizo pensar en la relación entre espacio medido y tamaño de la unidad [72 a 76] disipando con ello la idea de que a mayor tamaño de la unidad, menos longitud a medir.

Figura 26

La cuarta como unidad arbitraria.



El dispositivo guió la reinvención del inverso – *a mayor tamaño menos repeticiones, por abarcar un mayor espacio*, esto es, llevó a los alumnos a reflexionar sobre la longitud y el tamaño de la unidad, objetivo en la progresión vertical de la TEDE.

No obstante, los razonamientos colectivos se orientaron a formalizar las reinvenciones que emergieron en el trabajo público respecto de *las ventajas y desventajas de medir con unidades arbitrarias*– (medir el pizarrón y la bandera con partes del cuerpo). Frente a las cuestiones sobre las ventajas de medir con las manos, en el discurso colectivo sobresale el razonamiento '*medimos más rápido, es más fácil'* y sobre las desventajas hubo muchos respuestas esperadas pero llamó la atención la de Lupita (que lleva a otro punto de la TEDE, ¿qué pasa con los cachitos?) *No es tan preciso; no eres tan preciso, si te sale siete, siete y medio.* Lupita y otros alumnos pensaban qué sucedería cuando la medida no es exacta, lo que evidencia un nivel de matematización vertical que valida/ formaliza las desventajas de esta medición.

De esta manera el dispositivo logra que algunos alumnos piensen en la exactitud, la discusión colectiva subraya esa desventaja y por ello el dispositivo gira para discutir nuevamente[8] la idea de 'exactitud' como atributo de la unidad de medida, es decir que una mano grande cuantifica una longitud más grande que una mano pequeña.

> M: A ver ¿qué hubiera pasado si Paola hubiera medido la bandera y me hubiera dicho; maestro, maestro la bandera mide siete cuartas y yo hubiera ido al puesto y hubiera comprado una bandera de siete cuartas? ¿Hubiera encontrado una bandera de este tamaño? (muestra la bandera del pizarrón)

Mediante esta pregunta, la actividad regresa a la reflexión sobre los razonamientos públicos antes expuestos, la idea era vincular las 'manos diferentes" con la desventaja para comunicar una medida', en el siguiente fragmento puede observarse tal regreso.

S2 min. 54:40

[77] Jaime: Está muy grande (ejemplifica con su mano)

[78] M: ¿Hubiera salido del mismo tamaño?

[79] Niños: No.

[80] M: Hubiéramos comprado una banderota ¿verdad? (Niños comentan y afirman que sí)

[81] M: y que tal que yo le hubiera dicho a Penélope: compra una bandera de siete cuartas porque yo la medí de 4 cuartas, ¿hubiera comprado una cómo está?

[82] Aos: sí, no más chiquita (voltean a verse)

(pasa Penélope y mide 4 y quedan en el color blanco)

[83] Docente: Hubiera medido hasta aquí la bandera (Color blanco)

[84] Lucas: No quedaría bien, porque quedaría así como cortada

Se puede observar que el profesor comienza a medir desde donde está la bandera de referencia (pegada en el pizarrón), los alumnos cuentan hasta siete y marcan donde llegó, pues la medida de referencia fue la cuarta del docente comparada con la cuarta promedio de los alumnos. La reiteración de la cuarta del maestro rebasó la bandera hasta el pizarrón.

Recurriendo a herramientas culturales[9] (experiencias previas de medir con la bandera) reorganizadoras de la comprensión, la discusión gira en torno de lo que podría

[8] Cabe resaltar que el tiempo (14:40min. a 56:50 min.) de la actividad 'Bandera' fue una variable que demandó tomar la decisión de avanzar hacia el siguiente objetivo de la TEDE y tomar la última participación colectiva como situación de enganche para la siguiente actividad por las preguntas abiertas que dejó.

[9] En una TEDE, las herramientas culturales incluyen materiales físicos, tablas, imágenes, gráficos y sistemas de símbolos tanto convencionales como arbitrarios, que sirven de andamiaje para el proceso de internalización del colectivo (Stephan et al., 2003)

pasar [78][79][84]) porque el objetivo es articularla con la siguiente situación de comunicación de medidas (las cortinas).

Entonces la modificación/adecuación a la TEDE pareció ser efectiva, en general los alumnos comprendieron la importancia de medir en la vida social, la necesidad de medir con exactitud (tamaños de las manos) y la necesidad de medir desde cero (longitud), es decir vieron a los números no como simples marcas, sino como elementos que miden una longitud.

Medir con unidades arbitrarias, la comunicación de la longitud.

Una vez que los alumnos se han familiarizado con las ventajas y desventajas de medir con las partes del cuerpo, la siguiente actividad se orientó a reflexionar sobre las desventajas de usar las "cuartas" para comunicar la medida de una longitud, y a generalizar[10] que manos de diferente tamaño generan medidas desiguales.

> M: Les voy a platicar algo que le pasó a mi hermana. Fíjense que en su casa tiene una ventanita, (la representa con sus manos) y ella quería hacer unas cortinas y mi prima sabe coser cortinas, entonces estaba mi hermana en el teléfono y le dice: prima ya necesito las cortinas, me urge tener esas cortinas, sí pero ¿de qué tamaño?, ¿de qué tamaño? y entonces a mi hermana tampoco tenía reglas y ¿qué creen que se le ocurrió?
>
> [85] Aos: con cuartas.
>
> [86] M: Con cuartas, midió la ventana y midió 7 cuartas, le dijo; prima hazmelas de 7 cuartas, mi prima fue y compró la tela e hizo las cortinas y ¿qué creen que pasó cuando las llevaron a instalar?
>
> [87] Leticia: Estaban más cortitas. Porque midieron mal
>
> [88] M: Porque midieron mal, ¿qué querrá decir eso?
>
> (se escucha yo, yo)
>
> [89] M: a ver cuándo medimos esto (se dirige a la bandera de tela pegada en el pizarrón) nos dieron medidas diferentes ¿verdad? ¿Quién midió mal? ¿Por eso nos dieron medidas diferentes? ¿por qué alguien midió mal?
>
> [90] Carmen: Porque no todos tenemos la misma mano
>
> [91] M: A ver, acabas de decir algo muy importante Carmen, pero creo no te escucho todo el grupo, entonces voz bien fuerte, voz de recreo.
>
> [92] Carmen: No todos tenemos la misma mano

---

[10] De acuerdo a Freudenthal (en Gravemeijer, 1994) en la EMR generalizar no se entiende como la aplicación de un procedimiento conocido a situaciones nuevas (esto sería aplicar o transferir según su característica de novedad para el alumno) sino que implica conectar varias situaciones reconociendo características similares que permiten clasificarlas dentro de un determinado tipo.

[93] M: ¿No tenemos la misma mano? ,

[94] Carmen: Sí

[95] Denisse: una mano es más grande que otra.

[96] M: ¿unas manos son más grandes que otras?

[97] Denisse: sí

[98] M: Si la mano de mi prima hubiera sido más grande ¿qué hubiera pasado con las cortinas?

[99] Aos: Serían más grandes

1:04:50 hrs

[100] Jaime: Porque no tienen la misma mano y no pueden saber cuál es más grande o más pequeña; en este caso una mano era más grande de que quien la mide

[101] M: ¿y qué tal si la mano de mi prima fuera más chica?

(hay comentarios)

[102] M: Saldrían chiquitas las cortinas.

[103] Lucas: Saldrían 20 cuartas.

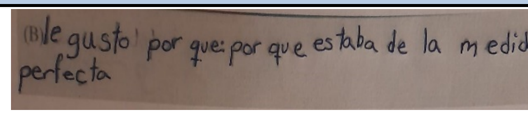
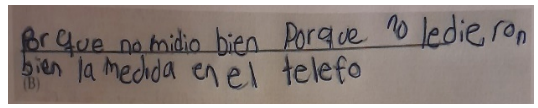
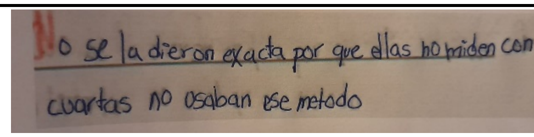
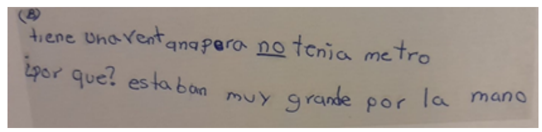
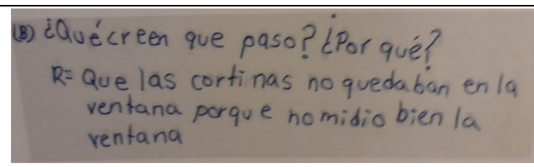
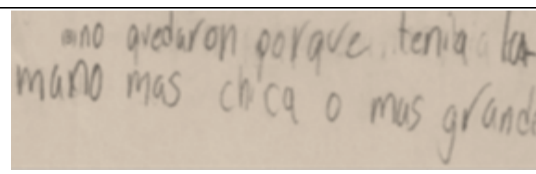
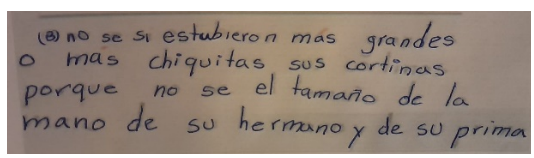
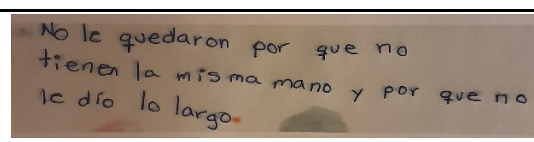
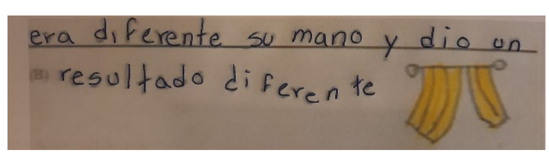
Cómo se puede apreciar, mediante la guía del dispositivo ocurre la reinvención, los alumnos establecen la relación entre tamaño de la mano y medida de la cuarta [90][92][95][98][99][100], entre longitud y tamaño. La "mala medición" [88-90] se reconoce con una buena justificación 'no todos tienen la misma mano' y no por eso está mal [89][90].

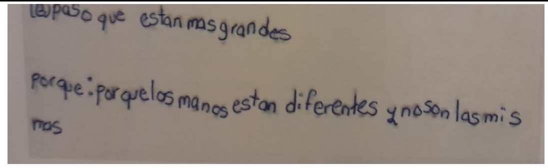
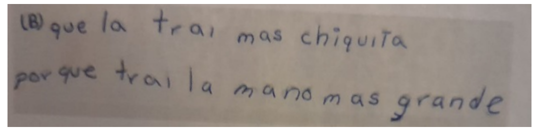
Llevar a los alumnos a imaginar el tamaño de la mano cuando la longitud de las cortinas mide 7 cuartas [98 a 99] [101 a 103] es un mecanismo para la reinvención del principio "entre más veces se repite la mano es más pequeña y si la mano es grande se repite menos veces". Recordemos que para la EMR son centrales la reflexión y la justificación (Gravemeijer, 1994) y en el fragmento anterior, a través de las justificaciones y razonamientos colectivos, se refleja que los alumnos generalizan y formalizan este principio

En las producciones de los alumnos (Tabla 5) se evidencia que, de acuerdo a la EMR, se logró una matematización progresiva, es decir se evidencia la manera como los alumnos transitaron de un problema cotidiano a un problema matemático, proceso que involucró la reinvención de ideas, estrategias y principios.

Tabla 5

Niveles de Matematización

Matematización Vertical	Evidencias de los niños
Dos alumnos se ubican en el contexto de la propia situación, su justificación fue solo de orden situacional.	 
Dos alumnos establecen una relación entre la estrategia utilizada y el contexto de la situación, "no usaron el método de las cuartas y no tenían un metro". Matematizan las relaciones entre las cuartas y la actividad de medir; encuentran que al medir la ventana no hay una medida exacta por el tamaño de la mano.	 
No midió bien/ midió mal. Ocho de los alumnos reconocen que las cortinas no tenían las medidas correctas, uno de ellos considera importante no dejar espacios al cuantificar las repeticiones.	
No sé el tamaño de la mano/ no sé si es chica o grande. Seis alumnos reflexionaron sobre la idea de que las manos son diferentes y por ello el tamaño de las cortinas podría variar.	 
Manos diferentes / no son del mismo tamaño. Ocho de los alumnos reflexionaron sobre la relación entre tamaño y longitud y generalizaron el principio de que la cuarta no es una unidad común por no ser del mismo tamaño, desventaja para comunicar la cuantificación de la unidad de medida y su relación con la longitud.	 

Mano más grande vs mano chica. Cinco alumnos analizaron la relación entre las manos de diferente tamaño y la longitud que cuantifican; es decir reflexionaron sobre las cortinas que quedaron grandes. Cómo la cuarta de la prima es más grande, las cortinas también lo son.	 

En este proceso de matematización progresiva los alumnos toman referencias, generalizan y formalizan sus ideas y principios y llegan a la reinvención de conceptos al pasar por distintos niveles de comprensión no necesariamente lineales. Aunque en un primer momento el trabajo es colectivo, posteriormente llega al aprendizaje individual, por ello la importancia del análisis de las producciones de los alumnos, por ejemplo los dos primeros se situaron en la matemática horizontal y sería necesario seguir su progresión hacia la matematización vertical mediante el trabajo colectivo.

En el contexto social de la medición (min. 57- 1:05 h),[11] los alumnos reconocen las dificultades para comunicar la medida de una longitud hecha con instrumentos no convencionales, no obstante articular un instrumento de medida común (acordado en la comunidad), no se comprendió tan bien como el reconocimiento de que ‘a mayor tamaño de la unidad usada, menos números de repeticiones de la unidad de medida’. Al parecer fue por la variable tiempo (discusión colectiva demasiado corta para este objetivo), la que determinó estos resultados. Recordemos que la conversación también se da cuando las normas no se han cumplido, no se normalizaron o han sido comprometidas (figura 1), en este caso faltó más tiempo para el reconocimiento ‘que a mayor tamaño de la unidad menos repeticiones se realizarán o que a menor tamaño más repeticiones se harán de la unidad de medida’.

[11] Cabe resaltar que el tiempo otorgado por la institución escolar para la experimentación de la TEDE rondó entre 1 h. 20 min. por sesión, lo que demandó al equipo tomar la decisión de avanzar hacia los objetivo de la TEDE, conscientes de las repercusiones que la situación podría traer.

La leyenda de los Acajay. Una actividad articuladora.

La actividad que se trabajó enseguida se basa en la narrativa[12] de los Acajay e intenta ser una situación articuladora, es decir pretende que la actividad de medición tome una dimensión más amplia. De acuerdo con las conjeturas de la TEDE, que los alumnos se identifiquen con los personajes (desde una cultura referencial) para reconocer la necesidad de nuevas herramientas de medición, razonables para los alumnos y que no parezcan arbitrarias o impuestas, aunque sean propuestas por el profesor para que se validen como unidad de medida acordada socialmente.

La intención conjeturada de la actividad tiene que ver con reinventar una manera de medir longitudes utilizando una unidad estandarizada para solucionar el problema de la comunicación de una longitud exacta. Para conducir la conversación hasta el tema de las pirámides, la actividad comienza con cuestionamientos del tipo ¿cómo era antes el lugar donde ahora están?, y también se recurre a la experiencia de los alumnos *–¿Ustedes fueron a las pirámides de Teotihuacán?* Luego, como se puede ver en el siguiente fragmento, la leyenda de los Ajacays se va tornando elemento fundamental para plantear el problema.

> (En el pizarrón, *a la luna ellos le decían …)*
>
> [150] Aos: Kia S2 h. 1:07:40-1:09:40
>
> [102] M: a la pirámide del Sol (reafirma la respuesta de una niña)
>
> [103] M: Esta es una historia ¿a ver si la quieren escuchar? (los niños no responden de forma concisa). Esta es una historia que me platicaron en Chiapas, me la platicó una guardiana. Era una señora anciana que a ella se la había contado, su abuela y a su abuela su abuela…(se escucha ruido)
>
> [104] Aos: Sí.
>
> […] Allá en Chiapas había una población que se llamaba así Napiniaca. Napiniaca, parece ser, aunque los arqueólogos no lo han confirmado, llegó a ser la ciudad Maya más hermosa que ha habido, donde habían acueductos, canales, pirámides, se conocen muchas ciudades ¿verdad?, se conoce Palenque, de las grande ciudades Mayas, se conoce Tikal, pero Napiniaca era una ciudad antigua (con sus manos indica que lo imaginen, manos en su sien) que hoy sólo existe a lo mejor las ruinas, tal vez están por ahí y no las han encontrado, pero existe en la memoria, en esta historia que les estoy platicando, ¿sí? En Napiniaca vivía un grupo de pobladores que se llamaban Acajay, eran un grupo sobretodo

[12] Narrativas accesibles, imaginables y significativas que orientan a los alumnos tanto hacia la naturaleza de los modelos, herramientas y operaciones a utilizar para su resolución como a las características y el grado de exactitud de las respuestas a obtener (Zolkower y Bressan en Martínez, 2002)

de mujeres, y antes de que Napiniaca fuera la gran ciudad que fue; cuando apenas era un pueblito, los Acajay eran famosas y famosos artesanos

[105] M: Yuya, ¿qué quiere decir artesanos?, Leticia

[106] Leticia: Que hacían artesanías

[107] Lucas: Que hacían cazuelas como para comida...

[108] M: Jarrones de barro, precisamente había una Acajay que se llamaba Numa, se dedicaba a lo que dijo Ana Corina, hacia vasijas, pero no hacia cualquier tipo de vasija, hacía vasijas para los rituales que ellos hacían, entonces ¿ustedes creen que eran vasijas mal hechas o bien hechas?

[109] Aos: Bien hechas

[110] Lucas: porque eran para los rituales y tenían que estar bien, no deberían de fallar

[111] M: y tenía que estar bien hecha ¿verdad?, para los rituales que ellos hacían y entonces justamente fue algo de lo que hizo que tuviera mucho éxito Napiniaca, porque llegaba gente de otros lugares a comprarles, a encargarles que les hicieran cosas, aja, y cuenta la leyenda que un día Numa se tuvo que ir a hacer un mandado y ¿sabe quién le ayudó a Numa? Su hija, y entonces llegaron unas personas importantes de otra comunidad, traían una vasija, la venían cargando con mucho cuidado, llegaron ahí donde tenía Numa su casita y su taller , y dijeron : ¿está Numa, la artesana, la famosa Numa ? y la hija dijo, no está y dijeron qué pena, porque nos tenemos que ir y no podemos dejar esta vasija, pero necesitamos que nos hagan una vasija que sea de la misma altura que esta vasija para nuestro ritual y ¿qué creen que hizo la hija?

[112] Lucas: la hizo ella

[113] M: Ella no era tan buena para hacerlo, pero ya había visto cómo su mamá medía, su mamá usaba (hace la representación con la mano)

[114] Aos: cuartas... con sus manos

[115] M: Las manos ¿verdad?, entonces ella dijo, pues no está mi mamá, pero no se preocupen, yo la puedo medir, entonces midió, medía 7 cuartas (apunta en el pizarrón) y cuando llegó Numa ¿qué creen que pasó?

[116] Lucas: Se sorprendió y la regañó.

[117] M: le dijo: mamá vinieron estas personas, pero como no estaba yo, hubiéramos ganado un buen dinero con esa vasija, pero ya no la vamos a poder hacer porque ya se fueron; y le dijo su hija- no, no te preocupes mamá, yo la medí y mide 7 cuartas; dijo Numa- ¡ah! vamos hacer la vasija. Numa se puso hacer la vasija, midió con mucho cuidado 7 cuartas, hizo la vasija y cuando llegaron a recogerla ¿qué creen qué pasó?

[118] Aos: Era más grande (mayoría)

[119] Aos: Más pequeña. (un niño)

[120] M: Más grande (reafirma), y ¿qué creen que hicieron los clientes?

[121] Lucas: Se enojaron, se fueron .

[122] M: y ¿qué creen qué pasó con Numa?

[123] Lucas: pues se alteró.

[124] M: Pues que se alteró mucho y le dio mucha pena, porque ella era la famosa artesana. (¡Los niños se asombran !)

[125] Lucas: La primera vez que había fallado

[126] M: La primera vez que había fallado y cuenta la leyenda que ese día estaba muy alterada, entonces se quedó afuera de su casita, conforme iba cayendo la tarde, se veían los pájaros y las aves y se veía la luna y la luna estaba llena, la luna se llamaba (apunta)

Hasta aquí, la narración,[13] que busca dar un contexto matematizable para visualizar, ha permitido que los alumnos distingan la comunicación de medidas como un problema. En este contexto los alumnos hacen inferencias [111][114][115][117][118] sobre el tamaño de la unidad de medida a partir de la reflexión de las veces que la utilizaron.

[151] M : Kia y ¿qué creen? que se quedó dormida , sin darse cuenta,

[152] Aos: ¿quién, Kia?

[127] M: Numa, Numa tuvo un sueño muy especial

[128] Aos: ¿cuál?

[129] M: Soñó que le hablaba *Kia y le contaba lo que había pasado y que esas pasaban mucho en Napiniaca, que por estar midiendo con las manos luego uno tomaba una medida y otro hacia algo con esa medida...*

[130] Lucas: porque era una niña

[131] M: y no quedaba igual y ¿qué creen que le dijo Kia?

[132] Lucas: No te preocupes, yo te ayudare

[133] M: *cuenta la leyenda que Kia le dijo - ustedes deberían medir todo con la misma Vara*

(los niños, ¡ahhhhhh!)

[134] M: *Con una vara en lugar de con las manos, que midieran con una vara y en ese momento, como estaba dormida afuera, empezó a sentir que se le enterraba algo*

[135] Aos: una vara (el maestro muestra la vara)

[136] Jaime: ¿un popote?

[137] M: La vara de kia

[138] Lucas: ¿la vara de kia? ¡a verla !

[139] M: Bueno la vara de Kia era de caoba blanca y tenía motivos lunares especiales

[140] Aos: ¡Ah!

[141] M: pero me platicaron que era justo de este tamaño, entonces en la próxima clase vamos a aprender cómo median los antiguos Acajay de Napiniaca, cómo medían las cosas usando la vara.

[142] Aos: un palo (se escucha de fondo)

[143] M: a esta vara ellos llamaban (apunta en el pizarrón), el Tikje.

[13] A pesar de que el tiempo se agotaba (1:08 h - 1:17 h) se decidió continuar el trabajo con el dispositivo y dar un contexto general de la narrativa.

[144] Niños: tikje

[145] M: el tikje de Kia

[146] Aos: el tikje de kia ,

[147] M: El tikje de Kia ¿sale?, bueno ¡muchas gracias chicos! y dense un aplauso, hicieron buen trabajo.

De acuerdo con la conjetura de la TEDE, es fundamental comprender cómo se mide con con la vara de Kia, en este sentido la narrativa logra subrayar ideas y principios ya normalizados; la necesidad de medir en la vida social, las dificultades para comunicar la medida de una longitud con unidades arbitrarias, la necesidad de la exactitud (tamaños de las manos), la relación entre tamaño y longitud para poder llegar a la reinvención de tener una unidad común.

Sin embargo la parte final de la narrativa se vio comprometida, Lucas pone de manifiesto la idea de 'relación entre tamaño y longitud' al externar que no eran las mismas medidas de la mamá y la niña, pero su comentario no es recuperado. Al parecer el factor tiempo[14] fue determinante, por lo extenso de la narrativa se desgastó la clase, recordemos que los alumnos sólo imaginaban la situación y no tenían acompañamiento visual que reforzara a las palabras. Hubo saturación de ideas y ambigüedad entre pasado y presente, lo que desvanecía la necesidad de tener una unidad de medida común, se desdibujó la vara de kia, el tikje [142-177] ante la preeminencia del anécdota. Al parecer hizo falta material visual para enriquecer la contextualización. No obstante, la narrativa logró que los alumnos reconocieran la necesidad de una unidad común para medir, pero podría funcionar mejor al ampliar el tiempo destinado para ello.

Creemos que la narrativa debe ocupar toda una sesión para que los estudiantes tengan una participación más activa, también podrían incluirse diferentes materiales (imágenes, objetos) que les permitan inferir, deducir, y hacer plausible el uso de la unidad convenida comúnmente (la vara de Kia). Por ejemplo, mostrar las dos cestas para medir la altura, (importancia de medir correctamente, no empalmar mano, no dejar huecos) comparar y visualizar el problema que tuvo Numa y su hija (la necesidad de la exactitud, tamaño de las manos); presentar la vara como se describe en la leyenda y que los alumnos

[14] En este experimento de diseño, la variable tiempo no pudo ser controlada, pues la investigación sólo tenía el tiempo proporcionado por la institución, recordemos que las sesiones no tenían la constancia de la clase regular (tres días por semana con 1:20 h. por sesión distribuidas en 4 meses) y fue un investigador externo quien fungió como profesor. Empero la investigación también es una herramienta para los docentes, lo que valida los hallazgos y propuesta que se hacen a la TEDE para su operatividad.

la hagan en el salón para que sean iguales (principio de exactitud) y medir con ella en el salón, incluso en su casa (la necesidad de medir desde cero, sin empalmar la unidad de medida y sin dejar huecos). La narrativa también podría incluir una reflexión sobre la conversación entre Numa y su hija, quizás hablar con la luna (Kia) para puntualizar las reinvenciones a las que llegaron y su importancia en la utilización de una unidad común socialmente.

4.1.3 Sesión Tres. Medir con una unidad común

En continuidad con la sesión anterior, la primera parte de la sesión 3 se focalizó en recuperar la Narrativa de los Acajay con apoyo de material didáctico (una pirámide maya a escala y la vara de Kia). En la segunda parte el objetivo fue que los alumnos se familiarizaran con el uso de la unidad de medida, sobre todo con iterar la vara sin dejar huecos y sin sobreponer las iteraciones.

En la discusión colectiva, la tarea era averiguar si la discusión pasada proporcionó bases para utilizar "la vara de Kia" como solución razonable. Los alumnos expresaron la dificultad de medir con cuartas, al igual que la narrativa destacaba la dificultad de medir con el 'tikje' (vara de Kia).

[1] M: Porque Numa sólo le dio una, ¿qué podrían haber hecho?

[2] Javier: Duplicar

[3] M: Duplicarla, ¿cómo?

[4] Javier: Con otra madera

[5] M: ¿Y que fuera más grande o más chica que está?

[6] Ao: igual

[7] M: Igual, para que todos midieran …

[8] Aos: Lo mismo

En esta dinámica los alumnos expresan principios ya establecidos en la cultura de aula como la importancia de que las unidades de medida sean iguales, la exactitud, para utilizarla como unidad común, así como medir desde cero sin empalmar la medida en la reiteración de la unidad para medir, necesarios para la siguiente actividad.

[9] Ao: ¿y cómo se mide?

[10] M: ¿cómo se medirá con la vara?

[11] Mario: Así (hace la representación)

[12] M: A ver Mario pasa a medir este libro, a ver cómo lo hace Mario. Esa es una buena pregunta, ¿cómo le hará para medir este libro?

(Mario mide con la vara de Kia desde cero y sin empalmar la unidad, cuenta uno, dos)

[13] M: ¿Vieron cómo midió Mario?

[14] Aos: sí

La participación en las discusiones colectivas proporciona a los alumnos recursos que les permiten reorganizar su pensamiento para consolidar su quehacer de medir a partir de procesos razonablemente vivenciados, mientras participan en la reinvención que contribuye a su evolución.

Medir con el Tikje .

Para cumplir con la tarea de medir, los alumnos se identifican como Acajays, *entonces cada uno de ustedes va a ser Acajay, a cada uno le voy a entregar lo que distingue a los Acajay, una vara de Kia (desde ahora tikje).* La consigna fue 'medir cuatro cosas y escribir qué cosa medí y cuánto midió'.

La actividad (29:00 min.- 43:43 min.) permitió en tiempo y espacio que los alumnos mostrarán sus formas de medir, cómo realizaban el quehacer, socializar sus metodologías, desde trabajar entre pares hasta la discusión grupal y se pudo observar que todos midieron con el tikje.[15]

Al cuestionarlos sobre cómo midieron surgieron dos tipos de respuestas, una relacionada con un conjunto de reglas y procedimientos aprendidos por entrenamiento (Stephan et al., 2003), que obtienen al medir poniendo una vara, enseguida otra vara, luego otra vara, etc., hasta medir por ejemplo el ancho del escritorio o del pizarrón sin dejar huecos y sin sobreponer la vara. A pesar de utilizar la vara, algunos alumnos evidencian que aún no logran consolidar la iteración de la unidad sin dejar huecos, *miden el marco de fotos dando vuelta a la vara, para no moverla, Javier también mide así la ventana, otros niños también miden dando vuelta a la vara.*

[15] De acuerdo a las producciones individuales de los alumnos, 16 de los 31 utilizaron el tikje, de los otros 15 niños algunos miden con otra unidad, por ejemplo Yuya y Román utilizan centímetros, Hernán y Leticia decimales y Luis Humberto fracciones.

En el segundo tipo de respuestas los alumnos vinculan la medición con procedimientos aprendidos, pero sin saber en qué situación aplicarlos.

El dispositivo había conjeturado estás tendencias, por ello mediante la discusión pública se provoca la reflexión sobre la medición y se "negocia" el procedimiento más adecuado recurriendo a las ideas, procedimientos y conceptos ya normalizados como aplicar las normas viejas a la nueva necesidad de medir sin dejar huecos, lo que se observa en el siguiente fragmento.

> [15] M: ¿qué mediste Yuya? (el maestro se acerca con Yuya) a ver ¿cómo mediste?,
>
> [16] 41: 02 M: ¡Pero no lo mediste con la vara!¿cómo sabes que mide un centímetro, si lo mediste con la vara?
>
> [17] M: quédate ahí Paola, explícale a Yuya cómo se mide el libro (Paola intenta explicar a Yuya cómo medir el ancho del libro con la vara)
>
> [18] M: A ver, explícame otra vez, yo no entendí nada y tu Yuya.
>
> [19] M: Con una vara nada más ¿cómo le harías? (mide con la vara, la pone y quita para ubicarla donde se quedó)
>
> [20] Yuya mide con su vara, en la primera pone su dedo para no perderse, parte en la segunda a partir del ancho de su dedo, ya para la tercer vara solo pone la vara donde se quedó)

Lo fundamental fue dar la oportunidad a los alumnos con menos posibilidades para participar en la discusión, como se puede observar la guía del docente y la interacción entre pares intentan que esos alumnos reinventen sus ideas y herramientas [15-19], aunque prevalezcan inconsistencias [20] como dejar espacios al medir.

Siguiendo el quehacer con el tikje, se provoca la discusión pública, *¡Muy bien!, oigan lo que si vi, es que medían un poco diferente, algunos y otros, entonces les platico como vi que median y ustedes me dicen si fue una buena forma de medir o no ¿sí?,* el maestro pone acento en medir con la parte inferior circular de la vara lanzando la pregunta *¿por qué estamos midiendo con esta parte de la vara?*

> S3 Min.46:50 – 50:30 min.
>
> [24] Jacinto: porque si lo ponemos aquí ya se midió una parte (indica la parte circular de la vara)
>
> [25] M: A ver mide cómo midieron ellos (empieza a medir y va dando vuelta a la vara, que se sostiene en su parte circular)
>
> [26] M: Entonces explícales
>
> [27] Jacinto: Que aquí ya está midiendo una parte (se refiere a la parte circular de la vara cuando está en vertical)

[28] M: Ese espacio lo estoy midiendo, pero no lo estoy contando, ¿si?

[29] M: Pero luego lo hace así, miren (marca la parte circular de la vara que ocupa un espacio y luego la segunda vara) entonces la segunda vara la estoy midiendo de acá a acá, verdad, ¿este espacio qué es ?

[30] Ao: chiquito.

[31] Aa: Ah! ya. Ya lo entendí.

Las respuestas ancladas a sus experiencias previas de medición [24][27] contribuyen a la reflexión sobre cómo medir, sobre las dificultades al medir dejando espacios entre cada iteración [25] y sobre la importancia de las formas en que los alumnos interpretan la situación [25] [28-31], ya que hay alumnos que giran la vara por la parte de abajo y al dar vuelta a la vara dejan un pequeño espacio sin contar.

Mediante la conversación colectiva se hace énfasis en la importancia de medir sin dejar huecos con una iteración correcta del tikje y en establecer/formalizar esas ideas, principios y conceptos, como a continuación se muestra.

[32] M: Entonces ¿qué pasa si midiera así y fuera yo un Acajay?

[33] Aa: Que le saldría mal

[34] M: Que le saldría mal, verdad. Contaría menos de lo que tengo que contar

[35] Aa: y ya no sería más porque como hay un espacio lo haríamos más grande

[36] M: Lo haríamos más grande, verdad, y diríamos, mide tres varas y en realidad medía menos de tres varas, pero como tengo esos espacios, me lo hizo más grande.

En este fragmento se observa que los alumnos ponen de manifiesto la relación entre medida, longitud y número, las medidas son la acumulación de la longitud y los números representan esa longitud al señalar que, cuando se dejan espacios sin medir, la longitud sería menor [34][35], con ello también identifican la inconsistencia entre el número como símbolo [35] que representa mayor cantidad de iteración y la exactitud con la que se cuantifica [36]. Así, se discuten las distintas formas de medir y sus ventajas y dificultades en función de los razonamientos públicos generalizados con el apoyo de las normas establecidas [39][40].

S3. Min. 52:40- 57:40min.

[37] M: ¿Por qué no es una buena forma de medir eso?

[38] Jaime: porque estamos dejando un espacio y no estamos contando ese.

[39] M: ¡Ok! Azucena ¿tú entiendes cuál es el espacio que no estamos contando?

[40] Jaime: Es esta parte (le señala a azucena, indica con su mano y con la vara cuál es), esta parte que tú la estás dejando no la estás contando.

[41] M: Esta es otra forma que vi que median. A ver si me dicen que esta forma ¿está bien o mal? , ¡sale!, pongan mucha atención, sale.

Una , dos… (pone la vara, luego el ancho de su dedo, luego la vara y así sucesivamente)

[42] Aa: No, porque está dejando espacio, maestro.

[43] Aos: Está dejando un espacio

[44] M: Ahora sí, Sofía.

[45] Sofía: Porque aquí dejamos un gran espacio con el dedo y aquí sientes que no cuenta, pero sí cuenta y mides mal

[46] M: Mides mal, entonces qué podemos hacer si no podemos ni voltearla, ni nada

(varios niños comentan)

[47] M: Poniéndole el dedo aquí (pone la tikje e indica con la punta de su dedo hasta dónde llegó)

[48] M: ¿dónde acaba la vara?

[49] Aos: ¡Ajá!

[50] M: ¿y luego?

[51] Sofía: Así seguirle

[52] M: ¿a partir de dónde empieza o de dónde acabo?

[53] Sofía: De donde acabo (mientras explica pone la vara donde dejó la punta del dedo) Exactitud, longitud

[54] M: ¿Ahí es donde pusiste el dedo?

[55] Sofía: mj! (quita la vara y vuelve a ponerla desde el inicio. Mide pone la punta del dedo y pone la vara)

[56] M: como tratar de hacer una marquita mental, si , si podemos, podemos usar nuestro lápiz, sino hacemos una marquita mental, verdad, buscamos como hasta dónde llegó realmente (pone el tikje en el pizarrón y va marcando, y desde ahí poner de nuevo el tikje y así sucesivamente).

Los argumentos de los alumnos acerca de la medición [38][40][42][43][45][53][55], dan cuenta que las ideas trabajadas se han consolidado y conforme avanza la discusión se normalizan como parte de la medición adecuada, no dejar espacios [52] [53] y no sobre iterar el tikje [47-53]. Al generalizar la nueva herramienta de medición como reinvención frente a la necesidad de los Acajay para comunicar y replicar con exactitud la longitud, los alumnos han creado un modelo de razonamiento matemático.

Finalmente puede decirse que esta primera práctica matemática logra que los alumnos normalicen el uso de la herramienta de medición (vara de Kia, ‘tikje’), *fíjense esta estrategia no la había visto, fíjense en la estrategia que hicieron, las alumnas miden el cuadro de foto, ponen una vara y enseguida la compañera pone la de ella, luego la primero* *quita su vara y la pone donde quedo la otra niña.* De esta manera se establece el principio de la iteración de la unidad convenida, que permite medir sin dejar huecos y sin sobre iterar desde el punto de inicio.

> M: Ahí sí es con mucha precisión ¿verdad?, porque entre una medida y otra no se encima nada verdad, ni se enciman no dejamos espacio verdad. Si enlazamos las dos medidas vamos a medir menos y si dejamos espacio vamos a medir más

A partir de la reinvención guiada estas ideas resultan asequibles, razonables para los alumnos y dan lugar a la normalización de una estrategia formalizada para medir, estrategia que ha emergido de la actividad de los mismos alumnos.

CAPÍTULO V

SEGUNDA PRÁCTICA MATEMÁTICA.
RELACIÓN DE ORDEN INVERSO Y COMPARACIÓN DE FRACCIONES UNITARIAS

Cada viaje es diferente,
pero cuánto mejor sea el plan de viaje,
más fácil resultará para otros.
(Simón. 1995)

En el capítulo anterior se analizó la primera práctica matemática, trataba sobre la medición, medir longitudes utilizando una unidad estandarizada. En esa práctica se hizo énfasis en la importancia de la medición como práctica social, es decir se trató de matematizar esa realidad y hallar soluciones que necesariamente deben aplicarse nuevamente en quehaceres de medición para analizar su validez y significado.

En el caso de la medición es importante que los alumnos determinen las consecuencias que surgen al medir su realidad o cuáles son los beneficios de hacer una buena medición en una realidad en la que tenga sentido la matematización y no solo sean procedimientos bien ejecutados carentes de significado. Esta práctica era necesaria para introducir a los alumnos en la longitud como iteración acumulada de una distancia.

Proporcionar a los alumnos experiencias de matematizatización (para que puedan argumentar sus razonamientos) basadas en su realidad que se encuentren más allá de la cultura escolar, implica que el análisis no se limite al desempeño en la solución de procedimientos, se trata más bien de que los alumnos entiendan que medir es un quehacer social que vive fuera de la escuela, más allá de la cultura de aula. Dicho reconocimiento era esencial para poder avanzar a la práctica dos[1], la cual inicia con la interpretación de

[1] En la agenda de la TEDE se conjeturó que al entender la medición como una actividad social, que se vive fuera de la escuela, sería más fácil gestar la tarea central, “hacen vivencial el quehacer de medir”, la iteración de una unidad que da cuenta de una longitud. De esta manera el quehacer se

medidas como resultado de iterar una unidad. En este quehacer, la longitud que se va acumulando permite reconocer la ‘medida’ como la acumulación de la longitud de una unidad.

Además, en la TEDE, al normalizar el uso de la vara de Kia (Tikje) como herramienta de medición, los medios matemáticos para el discurso del aula (reconocer, argumentar, explicar, negociar, opinar) se funden en un razonamiento colectivo durante varias discusiones y eventualmente dichos razonamientos se tornan compartidos y adecuados, lo que permite avanzar a las demás actividades propuestas.

El análisis de las prácticas realizadas puede permitir algunas inferencias acerca de la forma en que se llevan a cabo los quehaceres matemáticos, pero recuérdese el objeto de análisis es la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) enmarcada en la la TEDE, por ello, para conocer con mayor precisión la manera cómo se vivencia dicha trayectoria, se habrán de tomar como referencia los objetivos específicos de las prácticas matemáticas para analizar las experiencias matemáticas que la TEDE propicia (matematizar, reconocer, justificar, argumentar, entre otras) como medios matemáticos que convierten a los alumnos en hacedores legítimos de matemáticas.

La segunda práctica matemática que se desarrolla tanto en el quehacer de matematizar como en el del aprendizaje, está necesariamente asociada a prácticas sociales (Stephan, 2003) que ven al aprendizaje como cambios en el formas de participación de los alumnos en la cultura de aula (Cobb, 2003).

En ese sentido, el razonamiento colectivo de los alumnos pretende dar sentido a las fracciones unitarias como números que cuantifican relaciones recíprocas y multiplicativas, mediante la iteración, particularmente con el objetivo de reconocer el tamaño relativo de una subunidad de medida, cuya longitud corresponde a una fracción unitaria; relación de orden inverso de las fracciones unitarias. Comprender esta relación implica entender por qué y cómo el tamaño de las entidades cuantificadas por fracciones unitarias disminuye a medida que el número en el denominador crece. (Thompson y Saldanha 2003).

---

desprende del puro aspecto técnico y se vuelve importante hacerlo por los beneficios o consecuencia que de ello pueda emanar.

5.1 RELACIÓN DE ORDEN INVERSO

Al revisar la literatura sobre el orden inverso, encontramos estudios como el de Tzur (2007, en Cortina et. al, 2014), Streefland (1991) y Cortina, (2013), que muestran las dificultades de los alumnos para dar sentido a la relación de orden inverso. Las dificultades se deben en gran parte a la preeminencia de la comprensión cuantitativa que desarrollan los niños sobre los números naturales en los primeros años de la escuela. En esa comprensión, como regla general se tiene en cuenta que entre más grande el número es más grande la cantidad, en el caso de la medición, mayor longitud. Dicho posicionamiento interfiere con la comparación de números fraccionarios, un caso típico es el de creer que 1/3 es mayor a ½ porque se piensa al denominador como número natural y que la cantidad está contenida en la unidad.

De acuerdo con Cortina (et.al, 2014), la relación de orden inverso a través de la iteración, implica un cambio importante en la forma en la que los alumnos pueden concebir la fracción. En nuestro experimento, interpretar la fracción como número que puede cuantificar cantidades mayores que uno rompe con la idea limitante de la fracción como fracturador (Freudenthal, 1983) que solo conduce a las fracciones propias.

Al llevar esta idea al contexto de la medición (práctica uno) se entiende que: *a mayor tamaño de la unidad de medida, menos repeticiones para abarcar un mayor espacio y viceversa*, esto es, 'interpretar la relación entre el tamaño de una unidad de medida y el número de iteraciones que requiere para cubrir un cierto largo'. Comprender esta relación implica entender por qué y cómo el tamaño de las entidades cuantificadas aumenta o disminuye de acuerdo a la longitud y el tamaño de la unidad y que puede estar o no contenida en la misma unidad.

Dicha comprensión permite dar coherencia a la comparación 9< 3 (nueve "pequeños"[2] es menor que tres "pequeños"), traducido al contexto de las fracciones corresponde a las fracciones unitarias 1/9 < 1/3, donde el razonamiento sobre el tamaño relativo es coherente con la relación de orden inverso, es decir a menor tamaño de la unidad de medida más repeticiones se requieren para cubrir la unidad de referencia (Tikje) y a la

---

[2] En la TEDE, se propone nombrar a las fracciones unitarias como los "pequeños" de 2,3,4,5, 6 …. En la práctica dos se conjetura que a partir de los "pequeños" como unidades separadas de la unidad de referencia, los alumnos pueden establecer el tamaño relativo de la subunidad. Un "pequeño" de dos necesita dos iteraciones para cubrir la unidad de referencia, el pequeño de tres necesita tres iteraciones. Así, al requerir necesitar más iteraciones, el "pequeño" (fracción unitaria) es menor y cuando es más grande necesita menos iteraciones.

inversa, a mayor tamaño, menos veces repeticiones. Empero, la idea no se limita a la unidad de referencia, pues cuando un "pequeño" tiene más iteraciones se entiende que puede ser mayor o igual a la unidad, por ejemplo en la fracción 3/2 hay tres iteraciones del "pequeño" de dos,lo que significa que la fracción es una medida mayor que un Tikje que mide 2/2.

Con base en la idea anterior, en esta segunda práctica matemática el objetivo es que los alumnos reconozcan que, mientras más grande es el número en el denominador menos grande es la fracción unitaria o, mientras más veces cabe el pequeño en la vara (Tikje) menos grande es (Juárez, 2011). Por ejemplo, una subunidad como 1/3 ("pequeño de tres") se consideraría un tercio del tamaño de la unidad de referencia porque serían necesarias tres iteraciones para producir una longitud igual a la de la unidad (Tikje).

Para esta práctica conjeturamos entonces que a partir de que los alumnos vivan el quehacer con las subunidades ("pequeños"), les será razonable y coherente establecer la relación de orden inverso, identificar que una fracción como 1/44 es mayor que una fracción como 1/45 (Cortina, 2014), ya que en la vivencia de dicho quehacer se dan explicaciones fundamentadas cuantitativamente sobre por qué el razonamiento anterior es sensato, esto es que la fracción unitaria disminuye a medida que el numerador crece, ya que su tamaño relativo está determinado por el número de iteraciones necesarias para que la subunidad represente un tamaño igual al tamaño de la unidad de referencia, como se especifica en el denominador, en una relación multiplicativa[3] con el tamaño.

En la TEDE se conjetura que es crucial la comprensión de las fracciones unitarias en el contexto de la medición (longitud) para desarrollar una comprensión cuantitativa de las fracciones vinculadas a la multiplicidad tomando en cuenta el principio del orden recíproco y las relaciones multiplicativas que implican su uso como un precursor para una comprensión deseada de las fracciones,

> Concebir dos cantidades como una relación recíproca de tamaño relativo: la cantidad A es 1 / n, el tamaño de la cantidad B significa que la cantidad B es n veces más grande que la cantidad A. La cantidad A es n veces más grande que la cantidad

[3] La multiplicación se aparta del cálculo básico de la suma repetida, como técnica cuantitativa (cálculo para realizar), que lleva a la inclusión -limitada- a la equipartición. En nuestra THA se visualiza como un proceso de reflexión de la multiplicidad, que sugiere algo para imaginar, situaciones vinculadas a la medida, la proporcionalidad y las fracciones, lo que les permitirá desplegar acciones adecuadas (vivenciar el quehacer).

B significa que la cantidad B es 1 / n tan grande como la cantidad A" (Thompson y Saldanha, 2003, p. 106).

Desde esta perspectiva multiplicativa, "A es 6/5 tan grande como B" (es decir, seis veces 1/5), lo que no implica que A y B tengan algo en común, más bien significa que A es 6 veces más grande que (1/5 de B), idea que se aleja de la relación parte todo y de la multiplicación como suma reiterada, ideas que nos llevaría a la limitante "de" concebirlo dentro "del" entero en donde ilógico pensar en 6/5 como 6 de 5 cosas.

En consecuencia, el foco de atención en nuestra TEDE es que, en un primer momento, los niños razonen sobre el tamaño (medida) en lugar de la numerosidad (cualidad que se concede a los números naturales), ya que de acuerdo con la EMR los alumnos pueden argumentar, analizar, cuestionar y tratar de entender el razonamiento de otros en función de la producción de los "pequeños", esto es reflexionar sobre el tamaño de una unidad de medida y el número de iteraciones que requiere para cubrir una cierta longitud. De esta manera se ve la actividad matemática como un quehacer colectivo (comunitario) que rebasa la simple comprensión porque se busca que lo experimenten, y reflexionen.

Así, en la TEDE desde el principio se propone apoyar a los estudiantes a imaginar las fracciones unitarias como números que permiten conocer el tamaño de un atributo específico (por ejemplo la longitud) de una cosa que está separada de una unidad de referencia. Además, se trata de apoyarlos también para que comprendan las fracciones como números que pueden cuantificar el tamaño de entidades (Cortina, 2014).

Entonces, el objetivo base de nuestra segunda práctica era que los alumnos reconocieran el tamaño relativo de una subunidad de medida cuya longitud corresponde a una fracción unitaria de la longitud de la unidad de referencia (tikje), conjeturando así que podrían determinar la desigualdad entre fracciones unitarias mediante la comparación, es decir, que los alumnos sean capaces de comparar el tamaño de una multiplicidad de unidades y puedan justificar sus comparaciones.

5.2 EL TAMAÑO RELATIVO DE UNA SUBUNIDAD DE MEDIDA

Para desarrollar la segunda práctica matemática se inició pidiendo a los alumnos que usaran la vara (Tikje) para cuantificar la longitud de diferentes objetos, la conjetura era que habrían de surgir cuestionamientos sobre el residuo, lo que nos llevaría a la siguiente actividad "el residuo como un problema importante, un cacho puede significar muchas longitudes”. Se había conjeturado que, en correspondencia con sus vivencias, los alumnos propondrán unidades de medida pequeñas y que serían unidades arbitrarias o convencionales propias de la cultura de aula, lo que hubiera permitido al docente proponer un método para crear unidades más pequeñas (tamaño relativo de subunidades) enmarcadas en la leyenda de los Acajay, las cuales corresponden a una fracción unitaria que representa el tamaño específico de algo que *no* es parte del todo o de la unidad (Cortina 2014).

En esta actividad, para producir los “pequeños” de 2, 3, 4, 5 y 6… (que corresponden a 1/2, 1/3, 1/4 , 1/5 y 1/6) y medir longitudes menores que un tikje, el tamaño inicial de los “pequeños” tendría que ser reducido o ampliado, decisión que tendría que tomarse mediante ensayo y error, es decir después de iterar los “pequeños” tomando en cuenta la exactitud, medir, es decir midiendo con precisión para cumplir una condición, cubrir la longitud de la unidad de referencia (Stephan, 2003).

En la segunda actividad se les pidió comparar medidas de longitud a partir del valor relativo de las fracciones (actividad medular para toda la TEDE) tomando como referente los “pequeños” elaborados en la clase y utilizando los símbolos matemáticos: mayor que >, menor que <, los números y el código Acajay de los “pequeños”. La idea era hacer énfasis en el orden inverso de las fracciones, esto es, en que a mayor número de iteraciones, la subunidad es de menor longitud, con ello se pretende desvanecer la comprensión cuantitativa que los niños desarrollan cuando aprendieron números naturales.

$$\boxed{6} \quad < \quad \boxed{4}$$

Posteriormente el profesor presenta varios problemas que no habían sido resueltos en clase en los que pide que recurriendo a la imaginación comparen el tamaño de los pequeños (subunidades). Por ejemplo comparar un pequeño de 7 con uno de 50, la conjetura era que los alumnos darían soluciones razonables al considerar la relación de orden inverso. La conjetura era que anticiparon que *los “pequeños”* pueden interpretarse como unidades legítimas de medida fraccionarias, números genuinos que cuantifican y se pueden comparar utilizando como recurso una vara de longitud igual a la del tikje, por ejemplo un pequeño de 2 es mayor que un pequeño de 6, situación que podría servir de base para comprender el denominador en el contexto de la fracción como comparador, así $\boxed{6}$ significa que se requieren seis iteraciones para cubrir la unidad de referencia. Como mencionamos, aquí no se piensa que la medida (“pequeño de seis”) está contenida dentro de la unidad o que son seis partes en las que se divide el entero, idea que posteriormente limita la comprensión de las fracciones impropias.

5.2.1 El tikje como unidad de medida para cuantificar

Para delinear la ruta de la TEDE, partimos de la conjetura que al utilizar la vara como unidad para cuantificar su realidad inmediata, su longitud propiciaría una conversación sobre la importancia de medir, sobre cómo medir y para qué medir.

Así pues, en lo que sigue la actividad se analiza desde dos perspectivas, una hace énfasis en la manera cómo la actividad permitió a los alumnos reconocer la importancia de medir, es el caso de las consecuencias que surgen cuando se hace con precisión recurriendo a las normas matemáticas instauradas por la cultura de aula: la exactitud entendida como medir desde el inicio (principio del cero), sin dejar huecos y hacerlo de manera iterada. La otra perspectiva se centra en la manera como la actividad detona la reflexión sobre las inconsistencias de medir con el tikje y la necesidad encontrar una manera de cubrir los espacios que no cubrió.

Medir la estatura de los Acajay o rescatar las normas establecidas.

Como lo mencionó Stephan (2003), para crear experiencias que lleven a los alumnos a la comprensión del quehacer de medir, se deben conocer los atributos que se van a medir y lo que significa medir, incluyendo los aspectos sociales y el uso de herramientas como parte integral del aprendizaje de medir. A partir de la práctica social sobre el crecimiento de los hijos, se gestó la situación de medir en la cultura de aula. Se les pidió medir su propia estatura como una vivencia coherente para los alumnos.

En un primer momento se les pidió utilizar tiras de papel para marcar su estatura y posteriormente que la cuantificaran utilizando como unidad de medida el tikje. Durante la práctica matemática, la actividad fue una conjunción de experiencias que les permitió constituir las normas matemáticas establecidas en el aula por el colectivo, a saber, la importancia de medir desde el principio sin dejar espacios entre cada iteración, y la importancia de la estrategia de iteración.

¿Precisión, sinónimo de exactitud? Construir un significado basado en el contexto de medición.

Entender la actividad de medir a partir de la iteración de una unidad exige distinguir entre precisión y exactitud. La precisión es la organización y estructuración del espacio cubierto por la unidad iterada; medir desde el principio, sin dejar espacios entre cada iteración. La exactitud por su parte nos remite al valor real donde se incluye la estimación; extender la actividad para incrementar, decrementar y comparar longitudes para llegar a la exactitud.

En el siguiente fragmento se resalta la importancia de la precisión así como la manera en la que, a partir de la realidad, se hace énfasis en la importancia de medirse a sí mismo como un quehacer que propicia oportunidades de aprendizajes equitativos (Cortina, 2019). Los alumnos comenzaron a ayudarse para medir sus tiras pero lo hacen sin precisión, no toman la medida desde el suelo y tienen la tira separada de la pared, por ello el docente interviene para que lo hagan correctamente, al final logran hacerlo por sí solos y el desacierto se toma como área de oportunidad.

[1] M: …, a la persona más importante la vamos a medir hoy, la persona más importante se llama mí mismo.

[2] M: A ver, párese derechito (le pide ayuda a compañero) ponle una marca (miden altura), corta una tira que sea de esa estatura. El otro alumno se coloca en el pizarrón; fíjense cómo lo estamos haciendo, nos vamos a medir todos, sale (marca altura de alumno), a ver, corta una tira que sea de esa altura.

[3] M: A ver, (Jaime ayuda a medir su tira) todos la vamos a medir (dirigiéndose al grupo). Hasta abajo (le dice a Jaime), hasta el mero suelo señor (se cae tira). A ver ayúdale tú, vamos a tratar.

[4] M: A ver Mario, ayúdanos tú, que mida hasta el suelo.

[5] Mario: Ya.

[6] M: … Marquenle, pero a ver, que sea hasta abajo, que sea correcto, que quede exacto, por favor que quede exacto (reitera).

[7] M: Sin darle vuelta, jalalo, jalalo hasta el suelo.

[8] M: a ver, los que lo hicieron enrollado no funciona (refiriéndose a dobles), hay que medir haciendo rayitas, sale (reiterando). Muy bien (refiriéndose a equipos que si reiteraban). Miren que bien lo hizo Carmen (muestra tira), hizo sus rayitas, ya vieron, ya vieron cómo midió Carmen (pasa al frente y muestra a todos), haciendo sus rayitas.

[9] M: Ok, ¿hasta dónde es uno? Ponme los números

[10] M: Ahí ¿irá el uno o irá el cero?

[11] (silencio)

[12] M: Hernán tú qué crees, ¿ahí va el uno o va el cero?

[13] Hernán: El uno

[14] M: ¿eh?

[15] Hernán: el uno

[16] M: El uno, por qué crees que va el uno

[17] Hernán: Porque ahí empieza la tira.

[18] M: ¿hasta dónde es uno? (marca en el pizarrón señalando número de iteración), hasta aquí es uno, hasta aquí es dos (marca), hasta aquí es tres (marca), hasta aquí es cuatro (marca), hasta aquí es cinco (marca) y hasta acá es seis (marca aún cuando se pasa de tira), verdad.

[19] M: pero, cuánto es hasta acá (marcando lo que la alumna mide)

A partir de este intercambio, los equipos que habían enrollado las tiras parecen haber interpretado la importancia de medir desde el inicio haciendo marcas y sin doblar, pues si no lo hicieran dejarían espacios sin medir, como lo menciona Hernán para el “uno” es el inicio. Al compartir sus procedimientos se reconoce que el "uno" significó la distancia cubierta por la primer iteración, cuando el docente pide que aclaren la estrategia del doblez de las tiras y pregunta si "uno" podía significar el inicio, se pondera la estrategia de Carmen quien indicó que "uno" significaba la primera iteración; "dos", la segunda; y "tres", la tercera iteración.

El intercambio fue significativo porque se trataba de apoyar a los estudiantes a actuar en un entorno espacial en el que medir significaba la acumulación de distancias (Stephan, 2003) y aunque la actividad requería la parte que sobra de una iteración, primero se discute la estrategia del doblado y la importancia de medir desde cero reiterando la unidad de medida, lo que sirvió como base para delinear las posibles ideas matemática en las durante la ejecución de la secuencia.

En un primer momento los procedimientos giraron en torno a medir con exactitud, la importancia de iniciar la medición desde el suelo y pegadito a la pared para que se encaminaran hacia a la precisión, todo ello con la finalidad de generar procedimientos informales y razonamientos sobre los cuales los estudiantes pudieran anclar sus reinvenciones.

En este caso lo que se puede ver es que se dio una relación de aprendizaje democrático en la que lo esencial fueron los procedimientos de todos, sin importar si eran correctos o no. De acuerdo con Cortina (2019), al socializar los procedimientos se da oportunidad de cultivar un interés matemático, un acceso democrático a las matemáticas que desencadena discusiones en el aula, y al ser más constantes y llegar a puntos de encuentro, van consolidando las normas matemáticas establecidas.

[1] M: ¿Sofía? Ok, entonces ahí va uno ¿verdad? Porque, que tal que dijera yo voy a hacer una tira de uno de largo y la corto aquí (señalando inicio de tira)

[2] Hernán: No se va a poder cortar

[3] M: ¿Cuánto va a medir si la mido aquí?

[4] Aa: Nada

[5] M: No va a medir nada, verdad, cómo es que medimos nada

[6] Aos: Cero

[7] M: Si la corto aquí cuánto va a medir…

[8] Aos: Cero

[9] M: Cero, y ¿si la corto aquí? (señalando primera iteración)

[10] Aos: uno

[11] M: a ver, si midiera hasta aquí cuánto mediría (señala 1 tije)

[12] Ao: un tije

[13] Ao: nada

[14] M: si midiera hasta el suelo no mediría nada, verdad. Azucena, ¿si midiera hasta aquí? (señala 1 tije)

[15] Ao: fuera como un enanito

[16] Azucena: 1 tije

Como se puede observar, el maestro reintroduce la tarea de medir con precisión y los alumnos intentan compartir su hallazgo, medir reiterando la unidad. Por ello proponen incluir la explicación de que, “al inicio de la tira no se mide nada”, lo que resulta interesante porque ya utilizaban al tikje como unidad de referencia [15] [16] lo que en términos de la EMR es un modelo de la situación desde un punto de vista más matemático que puede utilizarse en situaciones más generales. También se estableció una relación de trabajo en colectivo donde los alumnos socializan sus procedimientos mediante la intervención proactiva del docente, quien al mismo tiempo intenta involucrar a los alumnos con las tareas y las herramientas de medición ya que el objetivo era de ayudarles a reconocer la importancia de la precisión en la actividad de medirse.

En la perspectiva de la EMR, el principio de interacción se refiere a la negociación explícita, a la intervención, discusión, cooperación y evaluación como elementos esenciales en un proceso de aprendizaje constructivo donde los métodos informales de los estudiantes son usados como una “palanca” para alcanzar los métodos formales (Santamaria, 2006 p. 21). En esta interacción, se estimula a los alumnos mediante distintos medios didácticos aunque no todos están en el mismo nivel, pues como ya se comentó cuando se da la interacción en un grupo heterogéneo, las habilidades de resolución también son diversas y precisan de adecuaciones para un acceso más democrático de la matemática, es decir, utilizando distintas herramientas físicas como el tikje maximizado, es necesario regresar a los niveles cuando sea necesario para lograr una práctica productiva (Santamaría, 2006 p. 24).

[1] M: Miren traje un tikje gigante.

[2] M: Imaginemos que ese es el tikje, (muestra la vara de 24cm.) pero vamos a hacerlo grande con nuestra imaginación.

[3] M: ...A ver me dicen si lo estoy haciendo bien., sale! Voy a marcar aquí. (intencionalmente no respeta la norma de medir a partir del inicio)

[4] Aos: ¿por qué no lo está midiendo desde el principio?

[5] Lucas: Ah! Porque dejó un espacio

[6] M: …Tengo que empezar de donde empieza el tikje, verdad.

[7] Aos: sí.

[8] M: Voy a empezar desde donde empieza el tikje.

(mide desde el inicio pero intencionalmente deja espacio entre cada vara)

[9] Victoria: De qué estaba dejando espacio arriba del popote

[11] M: Entonces ¿no tengo que marcar aquí arriba?, ¿Dónde tengo que marcar?

[12] Aos: Donde termina el popote.

Como se puede apreciar la medición permitió el tránsito de niveles de comprensión para que todos pudiesen tener la misma oportunidad de aprendizaje, la práctica matemática tuvo adecuaciones para esta matematización progresiva ya que el docente utiliza el tikje para estimular la imaginación de los alumnos, hacer algo real en la mente es lo que le da el nombre a la EMR.

5.2.2. Las trampas del entero. El cachito de la unidad

El episodio de la historia de los Acajay que se introdujo en la clase después de medir las estaturas ilustra una discusión sobre cómo solucionar el problema del residuo en la medida como auténticos Acajay. En este caso los alumnos van reconociendo las insuficiencias de medir con el tikje y conforme se involucran en la medición con las tiras, el maestro hace que observen que con frecuencia queda un resto, un cacho que la vara no cubre exactamente. El siguiente fragmento ilustra cómo algunos estudiantes advirtieron que la vara no era suficiente para medir y comunicar una longitud, por ello la pregunta sobre qué hacer con el residuo.

Sesión 4. Min. 35-37.

[1] Aa: Es que yo no supe qué hacer con éste (refiriéndose a pedazo que sobró al iterar)

[2] Equipo 3: manifiestan su duda al observar que la última iteración no alcanza una vara completa (borran -6- y escriben 5 y un cachito)

[3] Esteban: Yo seis tijes

[4] M: Eh Esteban ¿exacto?

[5] M: ¡Donatello!... seis y medio, ¿quién más midió seis y medio chicos?

[6] M: tú seis y medio, a ver pásale

[7] M: Tú ¿cuánto mediste?

[8] Ao: Yo siete

[9] M: Siete, ¿exacto?

[10] Ao: Siete y medio.

[11] de seis? Leticia: No mide seis porque mide cinco… mide cinco y cacho (al no saber qué representa ese cacho)

[12] M: Mide cinco y este pedacito, este pedazote, ¿verdad?, pero no mide…

[13] Aos: Seis

[14] M: Seis. Quién… este Sofía, dónde está tu tira, pásale, Sofía dice que midió siete y cachito, vamos a ver si es cierto. ¿Dónde está la tira?

[15] M: Hernán, a ver tu tira (se aproxima para tomarla). Vamos a ver, cuánto dices que mediste Hernán.

[16] Hernán: seis

[17] M: ¿seis? ¿seis exactos?

[18] (el alumno afirma con la cabeza)

[19] M: a ver, ven a medir. entonces ¿mides 6 y diez décimos?

[20] M: mide más de cinco y menos de seis, verdad. Pero, esto (señalando la parte entre cinco y seis) cómo le hago para sacar cuentas de este tamaño.

[21] M: Nada más a Corina no le dio exacto. Aquí tengo todos sus trabajos,

[22] M:miren; a Donatello tampoco le dio exacto, a Aarón no le dio exacto, a Ana no le dio exacto y no levantó la mano, a Carmen (lee el trabajo), Carmen ¿te dio seis exactos o ya no estás segura?

[23] M: Si, seis exactos, ok. Fabiola, tampoco le dio exactos, Paola, Xiomara, a quién más no le dio exacto.

[24] (la mayoría de los alumnos levantan la mano)

[25] M: Ok. Entonces, cómo creen, qué habrán hecho los Acajay cuando median y no les daba exacto, estos mismos problemas tenían los Acajay.

[26] M: Importante reinvención

[27] Ao: Lo intentaban otra vez.

[28] M: Lo intentaban, pero ¿cuántas veces lo acabamos intentando con mi amigo Hernán?

[29] M: Pero, ¿no llega a seis, verdad, a lo mejor para diciembre ya llegó a seis verdad?, o para Enero, pero ahorita no mide las seis varas, verdad, se me queda corto.

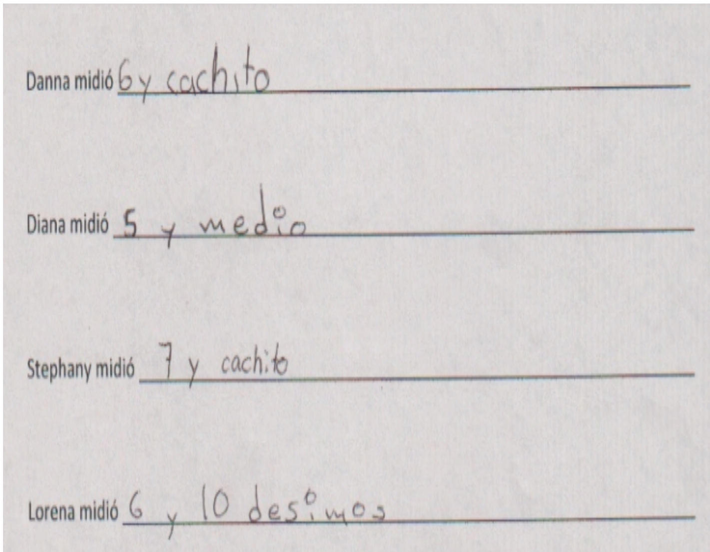
[30] M: ¿Entonces qué habrán hecho los Acajay para medir esos espacios cuando miden más de cinco, pero menos de seis?

El diálogo constituye una secuencia que recupera elementos de la primera práctica cuando los alumnos midieron el pizarrón, el escritorio y el libro, incluyendo la pregunta acerca de qué pasa con el pedacito que no mide la unidad. Así, el discurso colectivo se articula con la actividad de medirse a sí mismos sin contar con referentes para medir los "cachitos", situación en la que pueden experimentar un proceso similar por el cual las matemáticas han sido inventadas (Freudenthal, 1991). Las propuestas de los alumnos giran en torno a cuantificar el "cachito" utilizando medidas arbitrarias antes trabajadas (partes del cuerpo), medidas convencionales de la práctica escolar como los décimos. Pero son los mismos alumnos quienes a través de la discusión, reconocen las insuficiencias de dichas alternativas;

Cuando en la actividad, el docente les pide expresar la medida de su estatura la clase reconoce la problemática de la exactitud. En un inicio, algunos optaron sólo por enunciar la unidad completa, 5, 6 o 7 tikjes, pero a través del diálogo y contrastando sus producciones individuales (figura 27), reconocen que la unidad de medida de los Acajay era insuficiente para expresar la medida exacta su estatura, es decir al realizar las iteraciones no se corresponde exactamente la vara con la longitud de dichas iteraciones (son cortas limitas o se excede la longitud). Es entonces que señalan la necesidad de contabilizar ese cachito, tomando como referencia la unidad de longitud antes creada.

Figura 27

Producciones de los alumnos



[31] Nota: Los alumnos. 9 utilizan el medio; tikje y medio, 6 y medio. 9 alumnos; el cacho o cachito, tikje y chacho. 8 solo a la unidad, tikje; Una alumna usa los décimos, al igual que 3 niños de manera numérica los decimales 5.5 tikje.

El uso de las tiras y el tikje como herramienta para medir hace evidente la necesidad de buscar otra unidad de medida para los “cachitos” Sobre este respecto, en la EMR se establece el principio de niveles, donde los alumnos hacen referencia a las normas matemáticas establecidas, medir con precisión y sin dejar espacio, que se materializan en la iteración, cuántas veces se repite la unidad establecida, desvaneciéndose la idea suma reiterada, la medida contenida dentro de la unidad.

Por ejemplo al realizar la técnica del doblado se hace énfasis en las veces que debe doblarse, pero no se considera la precisión o las veces que se repite. Mientras que, iterar la unidad de referencia tiene que ver la precisión, con no dejar espacios, con cuantificar desde el inicio y considerando la exactitud de la unidad con que se mide, en otras palabras, tiene que ver con el hecho de que la unidad de referencia se sobreponga de manera lineal en lo que se quiere medir y que la iteración se pueda acumular sin restricciones, lo que permitiría que fuera razonable para la clase que no siempre de una medida exacta. De esta manera se reconoce una relación (informal) con el residuo, ya que la unidad está separada del objeto (tiras), lo que permite pensar en otras unidades de longitud más pequeñas que la unidad de referencia susceptibles de ser iteradas las veces necesarias, esto es, sin restricciones. Esta noción es la base de la propuesta para enseñar fracciones desde el enfoque comparador (Freudenthal, 1991), lo que facilita comprender las fracciones impropias (Kieren, 1983).

Ahora bien, la actividad resulta exitosa hasta ese momento porque la mayoría de los alumnos (23 de 31) reconocen que la cuantificación de iteraciones no siempre da un número exacto, con ello se gesta la invención de nuevas unidades de medida que tienen como referente al Tikje. Las nuevas unidades permiten solucionar situaciones en las que, por ejemplo, un objeto mide más de cinco tikjes pero menos de seis, lo que exigiría crear unidades de medida más cortas que el tikje (Cortina, 2019, p.15). Sobre este respecto en la conversación colectiva aparecen dos reflexiones; una, que un cacho puede tener varias connotaciones y dos, que retomar las unidades de medida arbitrarias no es suficiente, porque conducirán a la misma situación de no medir con exactitud.

Un “cacho” puede significar muchas longitudes.

El propósito esencial de la actividad era que los alumnos encontraran la relación entre las iteraciones enteras del tikje y el residuo cuando este no cubría exactamente otra longitud (Cortina, 2019). En este caso las intervenciones de los alumnos en el debate les permitieron llegar a razonamientos más sofisticados, con ello se logró un avance en la matematización progresiva cuando se percataron que sobraba un cacho que no siempre era del mismo tamaño.

[1] M: ¿sí llega a los seis? Pero los seis están acá arriba y Román llega hasta acá (señala la línea que está poco antes de seis)

[2] Ao: no maestro

[3] M: ¿sí mide los seis Román?

[4] Aos: sí, no

[5] Ao: son seis cincuenta, mmm bueno más poquito que seis

[6] M: ¿seis y otro poquito o le falta un poquito?

[7] Ao: le falta un poquito

[8] M: Entonces ¿mide seis más algo?

[9] Ao: no, cinco y cachito, un cachitito

[10] M: a ver, si no pasa de seis ¿mide más de seis o menos de seis?

[11] Aos: menos de seis

[12] M: Entonces ¿mide seis y cachito?

[13] Aos: sí, no

[14] M: ¿cinco y cachito o cinco y cachote?

[15] Aos: cinco y cachote

[16] M: ah mide cinco…

[17] Aos: y cachote

[18] M: no, ésta es la rayita de Román, aquí fue donde le marcamos a Román, verdad, entonces ¿mide seis?

[19] Antonio: no, le falta

[20] M: ah, oyeron lo que dijo Antonio

[21] Antonio: que le faltaba cacho para el seis

[22] M: Pásale Victoria, ¿por qué no crees que mide siete y medio?

[23] Aa: porque no está arriba de la línea del siete

A medida que los alumnos se involucran con el quehacer de medir como cuantificación de una longitud y ponen de manifiesto lo vivenciado en diferentes situaciones, aparecen razonamientos más sofisticados como el del "cachito". En un primer momento lo catalogan como una misma unidad de medida, posteriormente, cuando observan varios escenarios de medición reconocen que no siempre es el mismo cacho, puede ser un cachito o un cachote [5,9,14,15,17,21], por ejemplo los alumnos reconocen que es cachote [14 a 17] porque es una longitud más grande, tanto que casi llega a otra iteración completa de seis, sin embargo también reconocen cuando le falta un cachito.

Lo que se observa entonces es que ya le dan una cualidad al cacho, puede ser cachote si se acerca más a la medida del tikje o un cachito si está alejado de la longitud del Tikje, asimismo en la discusión se pone de manifiesto que, aunque falta un cachito, no es una iteración completa de la unidad de referencia, con ello también se valida la la exactitud.

[1] M: Pero ¿qué habrán hecho los Acajays? A ver ¿quién midió otra cosa que no le dio exacto?

[2] Victoria: porque no da la medida exacta y solo un cacho

[3] M: y solo el cacho y no sabemos de qué tamaño son los cachos, verdad.

[4] (Victoria asiente con la cabeza)

[5] M: Pero pues podían a lo mejor tener, de hecho ellos tenían una palabra hay una palabra que ellos usaban ¿ saben cómo llamaban al cachito ?, también tenían una palabra para "cachito", le llamaban así, miren.

[6] Aos:

[7] M: caimo ¿saben que quiere decir caimo?

[8] Ao: pequeño caimo

[9] M: A ver chicos ¿habrá sido un problema o no? ahora ustedes son Acajays

[10] Ao: sí

[11] M: ¿ por qué sería?

[12] A Primeramente no era exacto.

De acuerdo con la matematización vertical, los alumnos anticipan la importancia de la exactitud para cumplir con la condición de iterar, que a su vez les ayuda a identificar la necesidad de encontrar otras unidades que den cuenta del tamaño de un cacho (caimo), en palabras de los alumnos puede ser “pequeño ” dependiendo de la longitud que falte para llegar a la próxima iteración de la unidad referida (tikje). Como se ha mencionado, esta idea es la base para la reinvención de subunidades que den cuenta del cacho, es decir de la longitud entre un tikje y otra iteración del mismo.

Insuficiencia de las medidas arbitrarias para medir

Usando la narrativa de los Acajay, los alumnos se remiten al uso de las medidas arbitrarias (manos, dedos, pasos), empero son ellos mismos quienes identifican que son insuficientes y poco apropiadas para medir los s (cachos) porque no resuelven el problema de la exactitud.

[1] Entonces, ¿qué habrán hecho los Acajay para medir esos espacios que miden más de cinco pero menos de seis?

[2] Aa: (alza mano) utilizaron cuartas

[3] Ao: Pero no tenían las mismas medidas

[4] M: ah, ya oyeron lo que dijo Jaime; pero no tenían las mismas cuartas, también podían usar dedos, verdad.

[5] Ao: Pero no tenían los mismos dedos

[6] M: Pero no tenían los mismos dedos tampoco funciona, chispas. Ya sé, ya sé qué podrían haber hecho, inventar una nueva vara.

[7] Aos: ohhh

[8] Ao: Más chiquita

[9] M: ¿Qué les parece mi idea de hacer una nueva vara?

[10] M: ¿qué hicieron los Acajay?, verdad, porque el problema es que estamos midiendo como Acajay usando la vara

[11] Aos: el tije

[12] M: ¿estamos usando el tije verdad?, pero ¿por qué usaban el tije los Acajay, por qué no usamos la mano?

[13] Ao: porque todos tienen las manos diferentes

[14] M: porque todos tienen las manos diferentes en cambio el tije…

[15] Aa: es igual

[16] M: todos lo tienen igual, verdad, pero ¿qué problema pasaba Yuya, cuando medimos con el tije?

[17] M: ¿no? Ok, creo que varios ya tienen una idea, ¿Román qué problema tenemos?

[18] Román: que medimos mal

[19] Dominic: porque no nos da exacto

[20] M: porque no nos da exacto, verdad, no podemos decir cuánto mide con exactitud

[21] Román, ¿por qué sabemos que mide más de cinco?

[22] Aos: pero menos de seis

Como se puede apreciar, los alumnos han trascendido a las primeras medidas utilizadas por el pueblo Acajay, lo que significa un avance, pues las posibilidades que encuentran se enmarcan en la reinvención de nuevos instrumentos y no recurriendo a un instrumento convencional como la regla métrica. A pesar de la aparente sencillez de la actividad, los alumnos encaran la problemática de las medidas arbitrarias (partes del cuerpo) argumentando que no son suficientes para comunicar una medida de longitud exacta, dado que esas partes son de diferentes tamaños por la particularidad de cada persona [2,3,5,12,13].

En la discusión se establece que las medidas arbitrarias tienen una función limitada porque al cuantificar las iteraciones [19] no permiten medir con exactitud, ya que a cada persona le pertenecería una medida diferente, produciéndose una comunicación confusa. Bajo este argumento validan el uso de una unidad de medida común para conseguir la exactitud [15] y son ellos mismos quienes reconocen la limitación del Tikje [19] para medir la longitud más de cinco pero menos de seis [21-22]. De esta manera van incorporando el lenguaje matemático a la cultura del aula para expresar sus reinvenciones, del mismo modo anticipan que debe haber otra medida más pequeña para dar solución a la cuantificación exacta de iteraciones cuando son menores a la unidad de referencia.

Otro aspecto que resulta evidente en la conversación de los alumnos es la matematización progresiva (Treffers, en Santamaria, 2006), ya que reconocen lo que están haciendo en la actividad y no solo en la situación real, es decir, usan la imaginación para advertir la factibilidad o no de usar medidas arbitrarias para cuantificar una longitud externa a la de referencia (tiras de estatura), lo que les permite reflexionar ese quehacer vivenciado considerando los diferentes niveles de comprensión de la clase para crear un modelo de la situación que les permite tomar la decisión de buscar otro tipo de unidad de medida para medir ese residuo mayor que un tikje, pero menor que otra iteración del mismo.

5.3. EL ARTE DE REINVENTAR UNIDADES MÁS PEQUEÑAS QUE LA UNIDAD.

En concordancia con Freudenthal (1991), nuestra idea de "reinvención guiada" renuncia al sentido estricto de invención, en nuestro experimento se trata que los alumnos lleguen a ver al conocimiento que adquieren como suyo, al vivenciarlo, pensarlo y reflexionarlo.

Si bien la actividad enmarcada en la narrativa de los Acajay, apoyada por la mayéutica socrática como recurso para las negociaciones lo permite, en la THA se concibe como un proceso de aprendizaje social ya que se produce inmerso en una práctica social, es por ello un aprendizaje compartido donde cada uno es responsable; por esta razón hablamos de una trayectoria de aprendizaje flexible que genera un ambiente en el que se da la sensación de que, la compresión, las ideas, la justificación y propuestas emanan de los alumnos para que creen un bagaje de herramientas y de conocimientos matemáticos cada vez más sofisticados que permiten dar solución a las situaciones que se plantean.

En el siguiente fragmento se representan dichas posibilidades, a partir de la pregunta ¿qué habrán hecho los Acajay para medir esos espacios?, Jaime, junto con el grupo, elabora ideas que le permiten empezar a revisar sus ideas anteriores y avanzar hacia la invención de otra unidad de medida más pequeña.

[1] Ao: Está buena, está buena la idea.

[2] Ao: Tampoco, salió lo mismo.

[3] M: A lo mejor una más chiquita

[4] Ao: Sí

[5] Ao: Más pequeña

[6] Ao: Que mida la mitad de un tikje

[7] M: ¿que mida como la mitad de un tikje? ¿Y eso por qué ayudaría?

[8] Ao: Para que queden los medios exactos.

[9] M: ah, fíjense en lo que acaba de decir Jaime. ¿Tú ya conocías a los acajay, verdad, tú ya sabías de Numa verdad?

[10] M: Pero esa parte de la leyenda no se las he platicado, de cómo resolvieron este problema los acajay. ¿quieren saber cómo resolvieron este problema?

[11] Jaime: porque ellos no tenían las mitades exactas y quisieron inventar la mitad de uno.

En la conversación de la clase se evidencia la incorporación a su lenguaje matemático de términos como exactitud, que les significan al haberlo vivenciado al medir objetos del salón y su propia estatura. Asimismo, ellos son los que proponen hacer una unidad de medida más pequeña que la vara [5][6][8][11] y si bien se observa una referencia a las medidas arraigadas a la equipartición (medios), ahora la relacionan con una unidad fuera de la unidad de referencia. Esta reinvención ayuda a la comprensión cuando comparan el tikje con las unidades más pequeñas para continuar con la construcción de los pequeños.

[1] M: Muy bien, hicieron una nueva varita, ok.

[2] M: ¿se acuerdan que quería decir oti?

[3] Aos: No

[4] M: Empieza con p de pequeño

[5] Aos: Pequeño

[6] M: Ah que bien, que niños tan listos, ¿qué quería decir ?

[7] Aos: Pequeño

[8] M: Pequeño, ¿y por qué le dirían pequeño?

[9] Jaime: porque era más chico que el tikje

[1] Aos: Oti.

[2] M: Oti, ¿y saben qué quiere decir oti?

[3] M: quiere decir dos

[4] Ao: dos pequeños

[5] Aos: Pequeño de dos

[6] M: Entonces fíjense, cuando medimos el pequeño de dos es una varita que cuando medimos el tije mide dos ¿entendimos eso o no?

[7] Aa: Se pasa los pequeños no son más que el medio y menos que la unidad

[8] M: ¿Necesito algo más largo o algo más corto? Cuando mida yo esto, tiene que medir dos (tije). Tú que crees Yuya, necesito algo más largo o más corto

[9] M: ¿le corto?

Como se puede apreciar, hay un mayor recorrido en la matematización progresiva cuando se hacen comentarios como “es más chico que el tikje” [9], ya que los alumnos anticipan que puede haber unidades fuera del Tikje que se pueden comparar y que más adelante será una característica esencial de las subunidades, “estar separadas de la unidad de referencia” [3][4][5] [6].

Con ello se observa que a lo largo de las actividades los alumnos van creando y ampliando un bagaje de conocimientos a los cuales pueden regresar en cualquier momento (encadenamiento). Un ejemplo de esto es que, en el diálogo, el “medio” se ha resignificado, un concepto arraigado en la equipartición ahora es parte de una reinvención, de una nueva subunidad que ayuda a nombrar una parte más pequeña fuera de la unidad que está relacionada con la comparación. Estás anticipaciones permiten cultivar el interés de toda la clase, pues se da una combinación de niveles de matematización, es decir logran pasar de un *modelo de* a un *modelo para*.

La exactitud y la iteración sin dejar espacio, pasaron de ser un referente situacional a herramientas que ayudan en otras situaciones similares. Los alumnos advierten la necesidad de crear otras unidades que den respuesta a la exigencia de cuantificar una longitud menor a la del tikje, con ello se gesta la reflexión sobre la precisión sin dejar espacios y sobre la exactitud, con ello se propicia que se focalicen en la estrategia de la iteración para producir subunidades que den cuenta de longitudes más pequeñas que la unidad de referencia como el “oti”, de esta manera se enuncia la condición iterativa necesaria, cubrir a la unidad dos veces con una subunidad menor que el tikje.

5.3.1 Los “pequeños”, subunidades independientes de la unidad.

Para la elaboración de las subunidades (unidad de referencia) es importante sentar las bases y cultivar las reinvenciones para que los alumnos lleguen a anclar de forma sensata la manera de solucionar el problema de los residuos. Pero este anclaje no se da linealmente porque como se conjeturó en la trayectoria de aprendizaje, hay situaciones donde es necesario regresar a las ideas anteriores, por ejemplo en la elaboración de subunidades fue necesario imaginar el tikje en tamaño macro y tener en cuenta las longitudes que se van a cuantificar.

En el marco de una reinvención guiada, la imaginación es una vía importante para lograrlo, recordemos que en la EMR se concibe como lo imaginable en la mente del sujeto algo que puede ser real para ellos sin ser necesariamente palpable en la realidad, entonces uno de nuestros propósitos es que los alumnos imaginen la cantidad del segmento que sirve de referencia como independiente de lo que es medido (Thompson y Saldanha, 2003), esto refuerza la habilidad matemática de anticipar y estimar la longitud del “pequeño” que puede ser menor, tan grande como o más grande que la unidad de referencia; por ejemplo es posible anticipar que se necesitan dos pequeños de a dos para cubrir el tikje y que un pequeño de dos es más pequeño que un tikje aunque en los números naturales el dos sea mayor que uno. En la situación de medir se visualiza la unidad de referencia y el alumno anticipa que un pequeño de a dos es menor, pues se necesitan dos iteraciones para igualarlo.

Entonces, en el contexto de la narrativa de los Acajay las subunidades de la vara (unidad de referencia) se introducen como solución al problema de cómo medir considerando las longitudes de los "cachos", por ejemplo aquello que mide más de 5 tikjes pero menos de seis. Pero para crear otras unidades, las longitudes deben satisfacer condiciones específicas, la primera, estar separada de la unidad de referencia y que cumpla una condición iterativa.

El pequeño de a dos. Oti

Siguiendo la narrativa de los Acajay se pide a los alumnos que elaboren un pequeño de dos que satisfaga la condición de que dos iteraciones cubran exactamente al tikje, otra condición es que debe estar separado de la unidad de referencia. Para cumplir las condiciones de auténticos Acajay se les proporcionaron popotes de color azul que funcionaron como s.

[32] M: las mitades… no sabemos bien, verdad. Ya les platiqué la clase pasada qué fue lo que hicieron los Acajay

[33] Ao: los pequeños

[34] M: ¿se acuerdan qué hicieron? Se les ocurrió hacer una nueva varita, se llamaba cómo, quién se acuerda cómo se llamaba, empieza con o…

[35] Aos: oti

[36] M: y ¿qué quiere decir?

[37] (docente escribe en pizarrón: pequeño de a dos)

[38] M: pequeño de a dos

[39] M: y qué quería decir pequeño de a dos, ¿Qué mide dos varas?

[40] Ao: no, la mitad de un tikje

[41] M: ¿es la mitad de un tikje? No bueno, no sé si sea la mitad, pero los Acajay me contaron que ellos decían que el pequeño de a dos era una varita como ésta (la muestra) vamos a poner mucha atención, era una varita extra, ¿Yuya, Román estamos poniendo atención?, era una varita extra, pero tenía una cualidad especial, si con esta varita mido mi tikje tiene que medir dos exactos, tiene que caber aquí exactamente dos veces, entonces ¿éste será el pequeño de a dos?

[42] Ao: le mide el popote a la mitad y le corta lo que sobra, así yo le hice

[43] M: a ver, a ver déjenme explicar la actividad y ahora resolvemos todas las dudas que tengamos, vamos a tomar el oti, el popotito, entonces necesitaría uno más grande o uno más chico

[44] Ao: más chico

[45] M: ok, entonces lo podemos cortar, así es como lo hicieron los Acajay, entonces es importante que lo hagamos así, ok. Qué tal que lo corto muy cortito

[46] Ao: no queda

[47] M: no queda, pero qué creen, una buena noticia trajimos bastante material, entonces si necesito más material pueden usar más material, cuánto material puedo usar

[48] Ao: dos.

Algunos alumnos identifican al dos como pequeño de a dos [9], desvaneciendo con ello la condición de los números naturales relativa a que dos tiene un valor mayor a uno, ya que reconocen que el pequeño de a dos necesita iterarse dos veces para cubrir el Tikje aunque no tomaron en cuenta la exactitud [11]. Si bien es cierto que resulta complejo identificar si los alumnos lo reinventan o solo están trasponiendo la clásica equipartición, sí puede identificarse que en la TEDE no se da una respuesta concreta “ no sé si sea la mitad”, sino que se mencionan las condiciones específicas que debe cumplir el oti, ser una unidad externa y que se itere dos veces exactas para cubrir la unidad [14] [15]. Este quehacer podría ser provechoso cuando se involucren en actividades relativas a la imaginación espacial de la longitud (Cortina, 2019), para después introducirlos en situaciones de comparación de “pequeños”.

[49] M: Algo en lo que tenemos que mejorar es en medir con exactitud, entonces tenemos que hacer un pequeño de a dos que quepa exactamente dos veces en la vara, ¿si entendemos?

[50] M: bueno, entonces cortenle dónde creen que sea el popote y luego lo miden, tiene que caber exacto dos veces

[51] M: a ver, voy a medir, a ver quién me presta su lápiz, ¿tienen lápiz todos? Necesitamos lápiz, lo voy a medir ¿si cabe dos veces exactas?

[52] Aos: no

[53] M: ¿Necesito algo más largo o algo más corto?

[54] Aos: más corto

[55] M: como así de largo, ¿así creen que funcione?, a ver voy a probar… (corta) uno, dos (iterando) ¿necesito uno más corto o uno más largo?

[56] Aa: un tantito más largo

[57] M: un tantito más largo… ah entonces voy a necesitar uno nuevo, verdad ¿alguien tiene duda de cómo hacerlo? ¿Mario?

[58] M: ¿alguien? ¿Ya podemos comenzar? (se acerca a un alumno) no tiene que quedar a la primera… a ver, éste fue el que hizo Jaime (comprueba) uno, dos (queda corto) ¿necesita uno más largo o más corto?

[59] Aos: más largo

[60] Jaime: es que acá tengo el otro

[61] M: necesitas uno más largo, haz un más largo y prueba

[62] (docente comienza a pasar a los lugares de los alumnos para cuestionar si el tamaño es correcto)

[63] M: ¿necesitas uno más largo o uno más corto?

[64] Ao: largo

[65] M: muy bien, a ver puedo ver. A ver, vamos a ver, Antonio dice que ya le quedó, a ver tu lápiz Antonio, creo que no le marcaste exactamente… uno, dos (sobrepasa al iterar) ¿ya le quedó o le tiene que quitar un pedazo?

[66] Aa: le tiene que quedar

[67] M: Entonces le tenemos que quitar una cosita de nada, verdad, a ver mídelo otra vez, muy bien.

[68] Ao: ya

[69] (alumno trata de medir antes de cortar)

[70] M: ¿usaste la regla? No se vale usar la regla, a ver chicos, no se vale usar regla, somos Acajay, los Acajay no usaban regla todavía no la inventan, ¿ya acabaste? (se dirige a otro alumno)

[71] Ao: si

[72] M: todos los que quiera. Tiene que quedar con exactitud

[73] (los alumnos siguen realizando pequeño y docente guiando a través del análisis de si debe ser más largo o corto el popote para dar dos iteraciones)

[74] M: (dirigiéndose a la alumna) ¿usaste la regla o cómo le hiciste?

[75] Aa: no, pensé

[76] M: ¿nada más la pensaste? A ver, pruébame

[77] (alumna realiza iteración y no sale exacto)

[78] M: si uno me quedó un poquito más corto, lo pueden usar como referencia y hacer uno más largo

[79] M: ¿ya te quedó? Sin regla ni nada

[80] Ao: si

[81] (alumno mide iterando, queda exacto, chocan la mano en señal de éxito)

[82] Ao: si (itera doblando)

[83] M: acuérdate que no doblamos, no damos vueltas, de acuerdo (los alumnos comprueban a través de la iteración, cortan o realizan uno nuevo de ser necesario)

A partir de la construcción del del oti la clase discute las diferentes formas de realizarlo y resalta las estrategias que ayudan a considerar la importancia de la iteración, la de la imaginación del segmento, la de la longitud comparada con la vara que es la referencia. Por otro lado, la costumbre de usar medidas convencionales (regla métrica) enriquece el debate y permite resaltar la importancia de la exactitud. [19][22][23]

En un primer momento se recuerda a los alumnos que por ser Acajays no disponen de medidas convencionales [37-39], esta consideración estimula su capacidad de invención y provoca que surjan estrategias basadas en la iteración. Al cuestionar qué tan chico o qué tan largo debe ser el popote, los alumnos recurren a la imaginación, lo representan en la mente y hacen la comparación, luego para calcular su exactitud pasan a la estimación y la iteración del pequeño que han cortado. Con esto puede verse que se reúnen varias habilidades matemáticas en un mismo quehacer [23 24] [32-36], la iteración, la imaginación y la estimación, habilidades que les permiten revisar la confección del pequeño de dos (oti) y avanzar hacia la reflexión sobre la relación entre iteración y exactitud, es decir, que al iterar pueden encontrar con exactitud las dos subunidades que cubren la vara de referencia.

Al reconocer "que el oti es una unidad fuera de la unidad de referencia que cabe dos veces en ella" comprenden que el dos representa dos iteraciones, noción que se distancia de la idea acerca de que la unidad es fracturada en dos partes iguales. A partir de esta reinvención la clase puede cuantificar sin restricciones el número de iteraciones que se requieran, y al hacer la comparación reconocen que un pequeño de dos es menor que un tikje y que se necesitan dos otis para igualar a la vara.

[84] M: Jaime, a ver, oigan, entonces ¿qué fue lo que hicimos ahorita que hicieron los Acajay?

[85] Ao: marcamos y medimos

[86] M: ¿pero cómo se llama ese popotito?

[87] Aos: oti

[88] M: ¿qué también se llama en español…?

[89] Aos: pequeño de a dos

En la última reflexión sobre el oti se evidencian las dos condiciones inherentes a él, es una medida independiente de la unidad de referencia y cumple una condición iterativa, debe iterarse dos veces para cubrir la unidad de referencia. El reconocimiento de estas dos condiciones facilitará la comprensión de la noción de fracción unitaria como relación de tamaño relativo entre dos cantidades independientes que son accesibles para los alumnos

(Cortina, 2019), por ejemplo un pequeño de a dos (½) es menos que un tikje. Esta construcción fue posible gracias a las actividades de comparación, a la construcción física del oti y a las conversaciones colectivas que actúan como un medio de apoyo para la clase en su conjunto.

5.3.2. Los Caimos: Eticaimo, Uticaimo, Auticaimo, Ambaticaimo

Con base en las conjeturas de la TEDE, se suponía que al hacer los “pequeños”, los alumnos reconocerán que las subunidades no están contenidas dentro de la unidad de referencia, sino que son autónomas. De esta manera se encaminaron a la comprensión del tamaño relativo, tal como se hizo con el oticaimo cuando dos iteraciones del pequeño de dos (½ fracción unitaria) cubren un tikje.

Entonces, una vez iterado el oticaimo (“pequeño” de dos 2/2), el denominador representa el número de iteraciones necesarias para que la subunidad represente la misma longitud que la de la unidad de referencia (Cortina, 2020), lo mismo pasa con el “pequeño” de tres (1/3) es decir, son necesarias tres iteraciones del “pequeño” para igualar la longitud de la unidad. De esta manera se puede reconocer que 1⁄2 es mayor que 1/3 pues al ser fracciones unitarias se reconoce que un “pequeño” de dos solo necesita dos iteraciones para igualar la longitud de la unidad, mientras que el pequeño de tres requiere de tres iteraciones

Empero, para realizar una reflexión que tome en cuenta las dos condiciones mencionadas, esto es que los “pequeños”son subunidades independientes y que se comparan considerando la relación entre iteración y longitud de la unidad de referencia, es necesario profundizar en la construcción de los caimos.

[90] M: ok, y ¿ustedes creen que con esos dos (ya podían medir todo exactamente?

[91] Aos: no

[92] M: ¿Dominic, por qué no?

[93] Dominic: porque también hay más grandes que la mitad

[94] M: porque luego tendríamos que medir cosas que son más grandes que la mitad y con esto ¿no nos saldría exacto?

[95] Dominic: (niega)

[96] M: algunas cosas sí, ¿pero otras no nos darían exactas con éste, verdad, entonces, qué habrán hecho los Acajay?

[97] Ao: profe, por eso yo hice dos de estos

[98] M: no, teníamos que hacer uno nada más. ¿todavía no has hecho tu pequeño de a dos, entonces?

[99] Ao: Sí

[100] M: a ver chicos, entonces ¿qué habrán hecho los Acajay si no les alcanzaba?

[101] Aa: hicieron más pequeños

Como se puede ver, son los alumnos quienes reconocen la necesidad de tener otros pequeños [59 60] [62][65][69 70], de confeccionar más caimos [66][67]. Obsérvese que para hacer esa reinvención fue fundamental la orientación del docente.

Eticaimo. El "pequeño" de tres

Hemos mencionado las estrategias que los alumnos utilizan para confeccionar y perfeccionar el pequeño de a dos y otros "pequeños", estas acciones pueden ser interpretadas como anticipadoras de procedimientos más formales (Santamaria, 2006), ya que al realizar las iteraciones de los pequeños, en la conversación colectiva los alumnos justifican sus producciones y argumentan por qué el "pequeño" de dos (popote azul) es mayor que el "pequeño" de tres (popotes color verde), argumento que describe y justifica la estrategia para comparar fracciones unitarias, lo cual, además, les permite anticipar la reinvención de los siguientes caimos.

[102] M: ¿cómo o por qué uno más pequeño?, fíjense lo que hicieron el eticaimo, a ver necesito atención, Mario, necesito toda la atención. Entonces el oticaimo no era suficiente entonces hicieron el…

[103] Aos: eticaimo

[104] M: qué creen que quiere decir eticaimo

[105] Aa: pequeño de a tres

[106] M: ah muy bien Sofía, muy bien. ¿A ver, cómo sería el pequeño de a tres?

[107] Aos: más pequeños

[108] M: ¿a ver cómo sería el pequeño de a tres, qué característica tendría? Dominic ya sabe, Lucas ya sabe, Donatello ya sabe, a ver Noemí, a ver vamos a escuchar a Noemí

[109] Noemí: tiene que ser más chiquito para que quepan tres popotitos aquí (se refiere a la vara)

[110] M: ¿tiene que caber…?

[111] Aa: tres veces

[112] M: tiene que caber tres veces en la vara ¿va a ser más largo o más chico que el pequeño de a dos?

[113] Aos: más chico

[114] M: ¿por qué si tres es más grande que dos?

[115] Fabiola: tiene que ser más pequeño porque sino no puede caber (tomando vara)

[116] M: ¿sí es más grande que el pequeño de a dos no va a caber aquí?

[117] Ao: no, tiene que ser más pequeño

[118] M: Azucena no entiende por qué es más pequeño, quién más no entiende por qué es más pequeño, muy bien Azucena, muy bien, Yuya ¿tú entiendes por qué es más pequeño?

[119] Yuya: no

[120] M: ¿lo estás pensando? Esteban lo está pesando, ¿Luis Humberto, tú lo puedes explicar?

[121] Luis Humberto: porque tiene que caber tres veces

[122] M: porque tiene que caber tres veces, ¿le entendiste Yuya? Si, entonces cuándo midas con tu pequeño de tres cuántas veces tiene que medirla

[123] Aos: tres

[124] M: ¿tiene que caber un poquito más de tres veces?

[125] Aos: no

[126] M: no, verdad, tiene que caber…

[127] Aos: tres

[128] Azucena: dijeron que tiene que medir exacto tres

[129] M: exacto tiene que medir tres veces. Yuya, ¿entendimos?

La respuesta de los niños sobre el tamaño de los “pequeños” [73- 76] evidencia su anticipación sobre que el “pequeño” de tres, sería menor que el eticaimo. Como lo señala Freudenthal (1991) en el principio de realidad “todo lo que puede ser imaginable, realizable en su mente” es un recurso para el proceso de reinvención [75].

Entonces el quehacer no solo es práctico, también se despliega la imaginación al cuestionar qué tan grande o chico es el nuevo “pequeño” de tres en relación a la unidad de referencia [76] [78] [80]. Los alumnos imaginan el número de iteraciones necesarias para cubrir la unidad,también mencionan sus especificidades [77], tiene que ser más chiquito y se debe iterar tres veces, esto significa que al comparar [81] dos subunidades que están fuera de la unidad, reconocen la exactitud y el atributo de iteración, es decir, reconocen a los “pequeños” como subunidades independientes de la unidad. Todas las ideas construidas se conjugan en el principio de orden inverso de acuerdo a su tamaño relativo, es decir mientras hacen las iteraciones, los alumnos desarrollan habilidades matemáticas como explicar, desarrollar y argumentar [83-96].

En esta discusión resalta la utilidad y funcionalidad de la herramienta física de los pequeños [90-92] para comprobar la exactitud [93-96] pues recordemos que un grupo heterogéneo enriquece las argumentaciones diferentes, lo cual es parte de las normas generales, “los alumnos pueden equivocarse o expresar no entendí”, lo que permite, como lo señala Vigotsky, brindar la ayuda ajustada mediante el cuestionamiento socrático y la herramienta física (tikje) apoya a todos para comprender [96-98] por qué el “pequeño” de tres es más más chico que el “pequeño” de dos.

[130] M: ok, está bien, pero hay que hacer un esfuerzo. Ahora para no confundirlo con el pequeño de tres les voy a pasar un popote verde, lo vamos a hacer verde para no confundir el pequeño de a tres con el pequeño de a dos

[131] M: córtele primero y luego mide, no ande midiendo, no te tiene que salir a la primera hay mucho material, dónde están tus tijeras. ¿Cómo se llama (se dirige a una alumna)?

[132] Aa: oticaimo pequeño de a tres

[133] M: ¿cuántas veces cabe en la vara?

[134] Aa: tres veces

[135] M: ¿es más grande o más chico que el de dos?

[136] Aa: más chico

(un alumno lo comprueba a través de la iteración y marcando)

[137] Ao: (muestra al docente un pequeño de a tres iterando)

[138] M: a ver (comprueba) (le sobra un pedazo)

[139] Ao: pero yo sí pude (comprueba y se da cuenta de error)

[140] (el docente le da más material)

[141] Ao: ya quedó, ya quedó…

[142] M: te estás haciendo experta Acajay Azucena

En la EMR se habla de que, “la clase completa” no todos van al mismo ritmo (Santamaria, 2006), de modo que para alcanzar al mismo nivel de comprensión como lo hacen Yuya, Azucena, Esteban y Antonio se requiere enfocarse en la elaboración de los pequeños [99], mientras que otros lo imaginan [102-105] y unos más usan la estimación y la iteración aunque requieran más material para hacerlo con exactitud [106-110]. En la actividad podemos apreciar las normas generales, se vale equivocarse, tenemos que escuchar y observar lo que otros han propuesto, normas que permiten la discusión colectiva sobre las maneras de hacer y comparar los pequeños. Estas discusiones enriquecen el proceso de aprendizaje y le permiten a Azucena [111] tomar algunas ideas para mejorar sus estrategias.

Uticaimo. El "pequeño" de a cuatro

La actividad de medir y diseñar subunidades permitió la interacción de todos los alumnos, hacer una matemática democrática donde se da oportunidad para mostrar las estrategias de elaboración de "pequeños", esta interacción entre alumnos y docente en la conversación colectiva posibilita alcanzar niveles más altos de comprensión sobre el orden inverso a partir del tamaño relativo.

> M: A ver, necesito tres voluntarios (varios niños levantan la mano). Uno que trabaje con Ana (una alumna dice yo); alguien que trabaje con Daniela (Ana Corina dice yo), porque ellas no vinieron la clase pasada. Y también alguien que trabaje con Carmen para que le ayuden a hacer sus pequeños de a dos y de a tres. Necesito otro voluntario más (varios niños levantan la mano) para trabajar con Román, porque Román no entregó su pequeño de a tres.

Freudenthal (1991) afirma que la mejor forma de aprender y enseñar matemáticas es en grupos pequeños y heterogéneos, en correspondencia con esta idea, el trabajo se organiza en parejas, de esta manera, con la "ayuda ajustada" los alumnos que habían faltado a sesiones anteriores, confeccionan sus "pequeños" con ayuda de compañeros con una matematización más avanzada.

[143] M: a ver chicos, ¿con este creen que ya hubieran podido los Acajay medir todo?

[144] Aos: Nooo

[145] M: ¿no, necesitarán todavía más?

[146] Aos: si… un oticaimo de a cuatro

[147] M: (Escribe en pizarrón uaticaimo) qué creen que quiera decir

[148] Aos: pequeño de cuatro

[149] M: ¿sería más grande o más chico que el pequeño de a tres?

[150] Aos: más chico

[151] M: Entonces, ¿cómo es? Es un pequeño de…

[152] Aos: De a cuatro

[153] M: De cuatro y va tener que caber aquí ¿cuántas veces?

[154] Aos: cuatro veces.

[155] M: Fíjate Cecilia Este cabe tres veces (muestra el popote), el que quepa cuatro, ¿va ser más chico o más grande? (le pregunta a una alumna) ¿tú qué crees?

[156] Aa: Más chico.

[157] M: ¿y, el pequeño de a cuatro, cuántas veces cabría?

[158] Sofía: cuatro

[159] M: ¿sería más grande que el de tres?

[160] Sofía: más… chico

[161] M: ¿por qué?

[162] Sofía: porque tiene que caber cuatro veces en el tikje

[163] M: ¿Por qué tiene que caber cuatro veces? Y ¿el de a cinco, sería más grande o más chico?

[164] Sofía: más chico

En la discusión se puede apreciar un argumento razonable sobre por qué cuando el número aumenta la longitud disminuye [118-119] [124-133], es un razonamiento sobre el orden inverso de acuerdo a su tamaño relativo. No obstante, el escepticismo es una parte fundamental en el trabajo con la TEDE porque se trata de que aparezcan otros argumentos para que dicho razonamiento sea aceptado o rechazado por la clase. Recordemos que para el análisis se tomaron en cuenta las producciones libres de los alumnos, lo que nos ayudó a identificar diferentes niveles de matematización, lo que marcará el camino hacia un nivel mayor de abreviación y esquematización a través de un proceso denominado matematización progresiva (Freudenthal, 1991).

Imaginar el “pequeño” de 20

Al continuar con la actividad, el diseño de subunidades va más allá de la simple práctica, se convierte en una “actividad reflexiva” (Freudenthal, 1991), no sólo tangible también, se refiere también a la manera como los alumnos la reinterpretan a partir de sus pensamientos, es decir cómo la imaginan, si es realizable o imaginable,

[134] M: Ahora si va el reto difícil Ana. En la hoja quiero que dibujen, primero quiero que lo imaginemos, uno que no hemos hecho, quiero que lo imaginemos, no vamos a decir nada, solo que lo imaginemos el pequeño de a veinte, vamos a imaginarlo

[135] M: Entonces me imagino de qué tamaño sería un pequeño de a veinte, a lo mejor ni me cabe en la hoja

[136] Aos: yo creo que chiquito

[137] M: ¿Sería grande, grande o pequeño, pequeño?

[138] Aos: Pequeño.

[139] M: Ah! Entonces si cabe, ¿no?, primero lo dibujo de qué tamaño creo que es y luego escribo, creo que sería de este tamaño porque… Por ejemplo, creo que sería muy grande, porque 20 es un número muy grande. El pequeño de a 20 va a ser gigante. Parece que Lupita no está de acuerdo conmigo, pero entonces lo que ustedes crean.

[140] M: Obvio si no dibujaron algo muy grande la tienen mal, porque veinte es un numerote.

[141] (No, no, es chiquito, se comenta en el grupo)

[142] M: El veinte es un numerote, entonces tendría que dibujar algo muy grande, no?

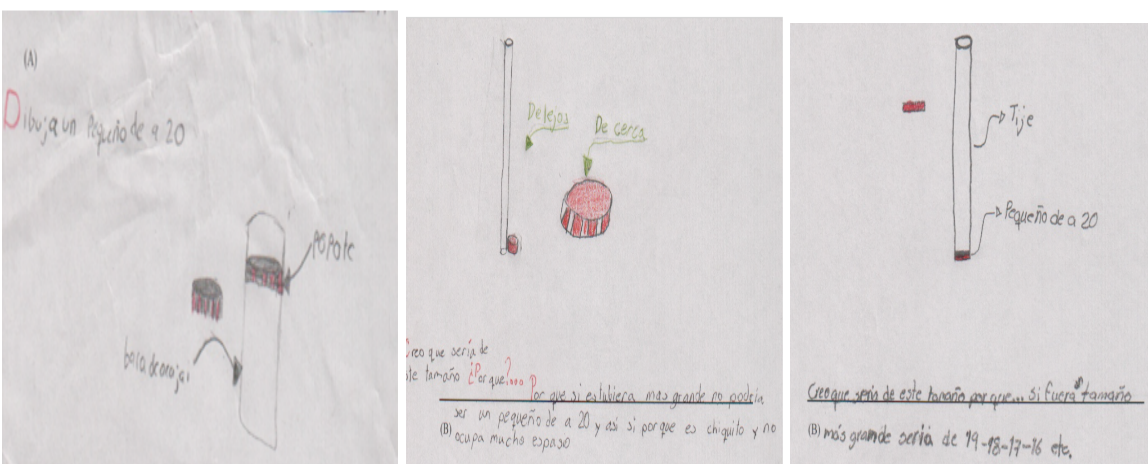
[143] M: Lucas dibujaste algo grande o pequeño?

[144] Lucas: Pequeño

Las preguntas pueden ser un medio adecuado para potencializar la imaginación [137][139][142][143] en la situación de los pequeños y obtener el razonamiento de los estudiantes cuando (en su mente), comparan el "pequeño" de a veinte con el tikje. Las respuestas sugieren que el grupo ha avanzado en la matematización progresiva sobre el tamaño relativo [138][141][144], pero se busca no sólo el "aprendizaje de contenidos matemáticos" sino también que los niños vivencien la matemática, que se involucren en la argumentación, en el análisis de la respuesta, incluso que cuestionen ya que el "se vale equivocarse" puede aprovecharse [135] [139] [140] para propiciar ese quehacer y en colectivo tratar de comprender el razonamiento de otros[4].

Figura 27

Producciones de los alumnos



Nota. Los alumnos representan el tamaño del "pequeño" de a veinte en relación a la unidad de referencia (tikje). Las veces que cabe el pequeño de a veinte en la vara.

[145] Leticia: Entre más grande el número menos grande el popote.

[146] Sofía: sería de este tamaño, porque si fuera tamaño más grande sería 19, 18, 17, etc.

[147] Ana Paula: Yo creo que sería de este tamaño porque si lo hago muy grande no me cabría 20 veces, pero de este tamaño si cabe las 20.

---

[4]Indicador para decidir si se avanza a la siguiente parte de la TEDE o se reajusta. Recordemos que lo replicable es la agenda no las actividades o sesiones.

[148] Luis Humberto: Entre más grande sea el número más chico tiene que ser el popote.

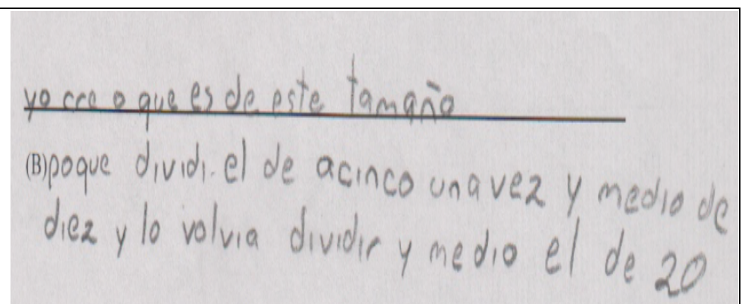
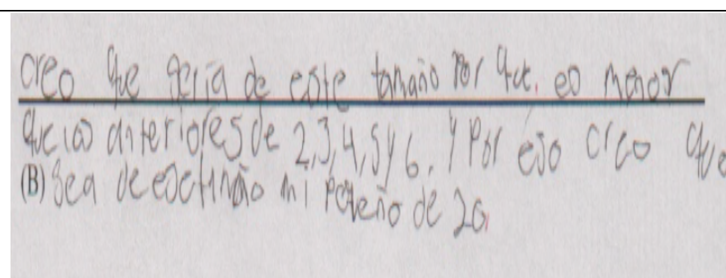
[149] Fabiola: Porque si estuviera más grande no podría ser pequeño de a 20 y así sí porque está chiquito.

En sintonía con lo dicho en las discusiones colectivas, los alumnos toman como referentes los dibujos que realizaron para obtener recursos que les permitan reorganizar su pensamiento (Stephan, 2003). En la figura del centro se observa la representación del “pequeño” de veinte que hace Luis Humberto, en ella expresa ya dos unidades, una de referencia que representa al “veinticaimo” nombrado así por toda la clase. En la segunda imagen Sofía representa la longitud e incluye una explicación coherente en función de dicha cualidad “tienen que ser pequeño para poder hacer y cuantificar las 20 iteraciones”. Por su parte Fabiola representa al “pequeño” de veinte anticipando la cuantificación y comparación, menciona el tamaño relativo al reconocer que un veinticaimo (fracción unitaria 1/20) es más chico que uno de 19, 18, 17, 16, lo que significa que que reflexiona sobre la relación de orden inverso y comprende que a mayor tamaño menos repeticiones por abarcar mayor espacio [145][148].

Guiados por el docente, los alumnos reflexionan acerca de su actividad matematizadora y la vinculan con sus producciones individuales, esto marcará parte del camino a seguir hacia un nivel mayor de abreviación y esquematización (ver figura 3).

Tabla 6

Niveles de matematización progresiva. Orden inverso de las fracciones unitarias.

Situacional Carmen explica de acuerdo a la equipartición, por lo cual solo da solución a la situación, sin encontrar una regularidad y características propias de la subunidad, como lo es ser una unidad independiente.	 yo creo que es de este tamaño (B)poque dividi el de acinco una vez y medio de diez y lo volvia dividir y medio el de 20
Referencial. Modelo de Se hace referencia al quehacer, cómo se le dio solución a la problemática de los pequeños, encontrado ciertas similitudes como a mayor número menor longitud, dado que son más iteraciones en la unidad.	 creo que seria de este tamaño por que es menor que los anteriores de 2,3,4,5 y 6. y por eso creo que (B) sea de este tamaño mi pequeño de 20.

Fracción unitaria Se resalta "Menos cacho" haciendo alusión sólo a una subunidad, la cual se itera. Razonamientos informales de la fracción unitaria.	~~Yo creo que seria de este tamaño porque.~~ (B) Mientras más grande el número menos cacho de popote vamos a usar
Tamaño relativo / orden inverso Hay razonamientos informales avizorados al tamaño relativo "el trozo" tamaño relativo es de menor tamaño a mayor iteración.	(B) Creo que ser· de este tamaño por que si serio grande nesesitoriamos en tije mas grande Creo que seria de es te tamaño Por que siempre que el numero es mas grande el troso de popote es menos
Imaginación Es imaginable es su mente, en relación a la unidad ya conocida, visualizan el tamaño que tendría el pequeño de 20 como una unidad independiente, que debe caber en el tije 20 veces (iteración), también sus razonamientos informales los conducen al tamaño relativo.	yo imagino que seria ese porque no se trata de que el numero sea gran de es de que en el Tije cabieran 20 y no podia ser grande pus yo creo que es un poco chiquito porque si estuviera grande no cabria
Orden inverso de acuerdo al tamaño relativo. La mayoría de la clase concuerda con este tipo de razonamiento más formal, que resulta muy sensato a los alumnos, el 20 lo relacionan con el número de iteraciones, que en lenguaje matemático es el denominador, al ser muy grande el tamaño (longitud) de la subunidad es pequeña para caber 20 veces.	Creo que seria de es te tamaño Por que siempre que el numero es mas grande el troso de popote es menos Por que siempre que el numero es mas grande el troso de popote es menos ~~Creo que sería de este tamaño por que...~~ (B) Entre mas pequeño mas espacio ocupa (B) Creo que seria de este tamaño porque... R= el numero 20 es un numero muy grande en tonces seria pequeño

En palabras de Stephan (2003), las imágenes ayudan a los estudiantes a explicar su razonamiento, pero también sirven para que otros alumnos comprendan su explicación. Por lo tanto, no se quedan como meras explicaciones o comprensiones individuales, se convierten en un conocimiento colectivo, no solo por ser socializado o divulgado, sino porque de acuerdo con las normas generales establecidas, obliga a los alumnos a explicar esa reinvención y ponerla de manifiesto en la dinámica de aula (describir, argumentar y saber escuchar a la otra parte).

Mediante la negociación queda constituida como explicación aceptable, porque implica hacer una descripción de cómo se dio la interpretación de la situación en la que juegan un papel fundamental las normas matemáticas constituidas en el aula, la precisión y la exactitud. Dos condiciones para crear “pequeños” (caimos) independientes de la unidad con la propiedad de iterarse sin restricciones.

5.3.3. Los Acajay y los símbolos. La exigencia de una comunicación efectiva

El análisis que de la segunda práctica matemática hasta aquí hemos hecho, se ha centrado en la manera como los alumnos reconocen y solucionan el problema de medir una longitud en la que es insuficiente el tikje y se ha visto que las actividades de la TEDE permitieron mediante la construcción de subunidades (pequeños caimos), que los estudiantes comprendieran la relación entre el tamaño de la subunidad y las veces que cabe en la unidad de medida (Tikje). En este quehacer también se puede apreciar cómo la actividad conjeturada traspaso lo tangible, porque la mayoría de alumnos comprendieron que entre más veces se itera una subunidad es más chica, y entre menos se itera, es más grande, es decir, comprenden el orden inverso de las fracciones unitarias en el contexto de la medición.

Empero, en este quehacer también surge la necesidad representar los pequeños caimos cuando se compara el tamaño de varias subunidades, al imaginar el “pequeño” de 20, se externa la problemática que tuvieron los Acajay para tener una representación más corta que “pequeño de 20”, lo que les economizaría tiempo y esfuerzo.

> M: Otro problema que tuvieron los Acajays es que escribían la medida de los pequeños, verdad, pero para escribir el pequeño de a 20, fíjense que largo, para escribir *“el pequeño de a 20”* gastamos mucha tinta, ya vieron todo lo que hay que escribir para poner “pequeño de a 20” (lo subraya en el pizarrón) no habrá una forma más económica, más simple de escribir?
>
> [1] A ver qué les parece esta Azucena, que también se parece a la que hizo Leticia, a la que hizo Sofía y a la que hizo Horacio, miren (escribe *“p. de a 20”)*
>
> [2] M: pero miren, Ana Corina y Lupita propusieron otra forma, a ver qué les parece (escribe *“p. 20”),* así lo escribió Leticia y Ana Corina, ¿qué les parece ésta forma?,

Otros niños validan la propuesta de “p.”, pues ahorra espacio, tinta y se entiende que es “p” de pequeño, pero otros mencionan que esa representación se podría confundir con “palmos” y por ello no la aceptan para esta situación. Jaime menciona otro problema, para poner *“p. 20”,* se requeriría encontrar una abreviatura para cada “pequeño”, propone escribir p.p. para representar un “pequeño” muy chico , el grupo la rechaza y vuelven a la negociación.

[3] M: […] y cómo escribirías pequeño de a dos

[4] Ana: p y 2

[5] M: ah! la p y luego el dos, verdad (escribe). Penélope cómo escribirías pequeño de a diecisiete

[6] Penélope: la p y el 17

[7] M: y tú crees que sería un pequeño grande o uno pequeñito

Penélope: pequeñito.

En el marco de la EMR se puede catalogar como un nivel situacional en el cual hay posturas iniciales y se avanza hacia un nivel referencial *modelo de***,** que se aplica a todos los pequeños. Los alumnos que propusieron “p. de” utilizan ya una abreviatura específica para los “pequeños”, un nivel que pudiese ser más general pero es hasta que algunos alumnos proponen la representación “↓-20” que se habla de una introducción al mundo de los signos, lo que es evidencia de un razonamiento más sofisticado. En estas reinvenciones, como se puede ver en el siguiente fragmento, el docente muestra la solución al colectivo.

Aarón: (escribe en pizarrón “↓-20”)

[1] M: ¿qué querrá decir?

[2] Aos: pequeño de a 20

[3] M: Xiomara, ¿cómo que es pequeño de a 20?

[4] Xiomara: porque está hacia abajo y la línea

[5] Xiomara: porque la línea está indicando hacía abajo y está…

[6] M: la flecha indica hacia abajo, ¿y qué más?

[7] Xiomara: la línea yo siento que es pequeño

[8] M: dices que es como la forma de decir que es pequeño (indicando guión)

[10] Ao: que disminuye menos 2

[11] M: que disminuye menos de 20 o que es un pequeño de a 20.

[12] Aarón: la flecha que indica hacia abajo es porque está indicando el pequeño y cuando la ponemos al revés, hacia arriba, es porque indica grande

[13] M: ah, pero éste es para pequeño, entonces ¿cómo escribiría pequeño de 15

[15] ¿Quién cree saber cómo se escribiría pequeño de a 15, con ése código, con el código de Aarón?

[16] (Alumno escribe en pizarrón “↓-15”)

[17] M: ¿Así se escribiría? ¿si lo entendió? ¿Por qué es así Hernán?

[18] Hernán: Ah porque sería abajo porque el número mayor sería para arriba y así es pequeño.

[19] M: ¿la flechita nos diría que es un pequeño verdad? Ok.

[20] Ao: con símbolos.

Los alumnos están haciendo matemáticas como auténticos Acajay, buscan una solución para representar sus “pequeños” [1-8][12][16-20] a partir de sus producciones libres [P.D a 20, P.Q. d. 20, P. de a 20, P. 20, y ↓-15] y la dinámica de la actividad permite discutir sus producciones en el colectivo. En el discurso ya se observa un lenguaje propio de la medición, interpretan correctamente la representación simbólica, “es un pequeño de a 20” [3][8][12] lo que es evidencia de que reconocen el tamaño relativo de la subunidad. Lo anterior permite la reflexión sobre la reinvención más sensata que se justifica por la economía para expresar que es un pequeño, “↓-“, además, dicho símbolo [19], puede ser utilizado para representar otros “pequeños”, eso da la pauta para llegar a una representación formal.

La alianza de los Acajay. El Código

Frente a la necesidad de una representación económica se hace necesario complementar o adecuar los símbolos del código propuesto por Arón, Yuya y Noemi, esto genera una conversación que es guiada por el docente y permite articular la idea que el “pequeño” debe tener una característica que lo distinga de los números naturales. La actividad los lleva a hacer inferencias sobre la unidad de medida y la conveniencia de usar un código u otro.

> M: que original, fíjense que me llamó mucho la atención este sistema porque los Acajay hicieron algo parecido, no igual, pero parecido a lo de Aarón. Inventaron un símbolo especial para señalar que algo era pequeño, no usaban una inicial o una abreviación, que también serían buenas ideas. Ellos usaban un símbolo especial, fíjense, como si hiciéramos el pequeño de a 5 en el sistema de Aarón (escribe en pizarrón “↓-5”) entonces

para escribir pequeño de a 5 sería así verdad, pero los Acajay lo pensaron un poco diferente, ellos usaban otros números, sus propios números, pero aquí vamos a usar los que conocemos, los que nos enseñaron desde preescolar, entonces lo que hacían es que escribían el número y hacían esto, fíjense (escribe en pizarrón)

$$\boxed{5}$$

En la actividad se propuso continuar con la comparación de subunidades, tarea para la que el profesor no requiere los “pequeños” de manera física porque su finalidad es provocar la reflexión sobre el tamaño relativo de las subunidades [2-3] [5-6], que en la mente de los alumnos sea lo más razonablemente posible. Para esta reflexión es necesario continuar las conversaciones colectivas, pues como se ha mencionado, en un grupo heterogéneo son muchas las posibilidades que enriquecen las discusiones ya que “trabajar con alumnos de distinto nivel de habilidad y destreza matemática, con la guía de un docente hábil puede maximizar las oportunidades para generar o producir, intercambiar y apropiarse de ideas y facilitar el proceso de reinvención ya mencionado” (Gallegos y Peréz, 2013, p. 17)

Con la narrativa como referencia, para los alumnos es sensato vincular el código con los Acajay y la clase lo adopta como solución razonable para representar los “pequeños”. El docente justifica el código, *“sobre todo lo hicieron para distinguirlo de cuando escribían 5 varas, es como el sistema de Aarón, solo que en lugar de poner flechita ellos usan la cajita”* para lograr la aceptación general. Así, el código ha emergido de la clase, no se introdujo desde afuera, como algo impuesto.

[1] M: ¿se acuerdan cuál era el oticaimo?

[2] Aos: pequeño de a dos

[3] M: cómo escribirían el oticaimo

[4] Ao: (pasa al pizarrón y escribe $\boxed{2}$)

[5] M: ah, qué dice ahí Penélope

[6] Penélope: pequeño de a dos

[7] M: y ahí, qué diría, qué escribió Penélope.

[8] Aos: pequeño de 8

[9] M: pequeño de a 8, ok muy bien, ¿a ti te queda claro? Daniela, a ver el pequeño de 7 cómo se escribiría.

[10] (alumna pasa al pizarrón y escribe $\boxed{7}$)

[11] M: ¿Así sería, eh?

[12] Aos: sí Penélope: (escribe en pizarrón $\boxed{8}$)

[13] M: Me estaba preguntando de cuántos pequeños podemos hacer (sostiene vara)

[14] Aos: si… hasta el 50… hasta el 30.

[15] M: pero podríamos hacer algunos con nuestra imaginación también, verdad.

[16] M: ¿se acuerdan cómo hicimos el pequeño de 20 con nuestra imaginación? Podríamos hacer muchos pequeños, verdad, pero fíjense que me quedé pensando en esto, sí esto sería posible o no (escribe en pizarrón $\boxed{1}$)

[17] Aos: pequeño de 1

[18] Ao: eso es un tikje

[19] M: ¿Cómo sería el pequeño de uno?

[20] Ao: más largo

[21] M: muy muy largo, ¿más largo que éste? (señalando vara)

[22] Aos: noooo, sería igual… es un tikje.

El uso del cuadrado como símbolo ayudaría a la comprensión de la representación o para la denominación de una subunidad (en el lenguaje convencional "denominador") y son los alumnos quienes justifican su uso asignándole el significado de "número de iteraciones de una subunidad", es decir en el sistema propuesto, el oticaimo representa dos subunidades que cubren la longitud de la unidad de referencia. Para los alumnos es razonable que el 1 también se representa en esta casilla, pues de acuerdo con la comparación, solo se itera una vez y puede ser equivalente a un tikje, dando apertura a la comparación de subunidades (fracciones unitarias), incluso con la unidad de referencia, por ejemplo; $\boxed{6}$ es menor que $\boxed{2}$

En esta comparación, el docente procura apoyar a los alumnos para que razonen que, "entre más iteraciones de una subunidad necesarias para cubrir el largo de la unidad de referencia, más corta es la subunidad" (Delgado y Cortina, 2020, p. 334), por esta razón los alumnos afirman que es más pequeño $\boxed{6}$ que $\boxed{2}$, de esta manera surge una nueva necesidad, ¿cómo representar que un pequeño es menor que o mayor que otro?

Dicha necesidad genera una nueva negociación para seleccionar los símbolos convencionales[5] para representar al mayor y al menor (ya normalizados por los alumnos en

[5] La negociación tardó más de una hora y se refuerza en posteriores sesiones, recordemos que la TEDE procura ser una herramienta teórica para el docente, pero no gobierna su actuar, es decir

la tradición áulica; >,<) en la comparación de las fracciones unitarias[6] representadas en las casillas.

> [1] M: Leticia, fíjense, ¿qué dice aquí? Victoria (escribe en el pizarrón $\boxed{7}$ $\boxed{50}$)
>
> [2] M: pequeño de 50; vamos a usar nuestra imaginación nada más, ¿Penélope, de qué tamaño será el pequeño de 7?
>
> [3] Ao: chiquito
>
> [4] Antonio: (escribe en el pizarrón $\boxed{7} > \boxed{50}$)
>
> [5] Antonio: creo que el pequeño de a siete es más grande que el pequeño de cincuenta
>
> [6] Antonio: ¿por qué? porque el siete sólo cabe siete veces y el otro cincuenta
>
> [7] Ana Corina: creo que el pequeño de cincuenta es más pequeño porque tiene que caber cincuenta veces, en cambio el de siete sólo tiene que caber siete veces
>
> [8] Esteban: Creo que el pequeño de a siete es mayor que el pequeño de a cincuenta, porque el cincuenta ocupa menos espacio y el siete un poco más en el tikje

En la actividad se propuso continuar con la comparación de subunidades, tarea para la que el profesor no requiere los “pequeños” de manera física porque su finalidad es provocar la reflexión sobre el tamaño relativo de las subunidades [2-3] [5-6], que en la mente de los alumnos sea lo más razonablemente posible. Para esta reflexión es necesario continuar las conversaciones colectivas, pues como se ha mencionado, en un grupo heterogéneo son muchas las posibilidades que enriquecen las discusiones ya que “trabajar con alumnos de distinto nivel de habilidad y destreza matemática, con la guía de un docente hábil puede maximizar las oportunidades para generar o producir, intercambiar y apropiarse de ideas y facilitar el proceso de reinvención ya mencionado” (Gallegos y Peréz, 2013, p. 17)

En síntesis, en esta segunda práctica se realizaron los primeros ajuste a la TEDE, conjeturar que antes de vivenciar el quehacer es importante que la comunidad áulica experimente la importancia de medir como un acto público, es decir fuera de la escuela, su relevancia a partir de situaciones reales que demandan hacerlo, una necesidad auténtica, como lo fue la actividad en esta THA de medir con exactitud sus estaturas para luego comunicarlas compararlas.

En esta dinámica fue razonable y obvio utilizar los atributos de la medición: medir desde cero (exactitud), sin dejar espacio (precisión) para realizar las iteraciones que

---

dependerá mucho de las variables de su grupo (en particular) y decidir si esta actividad de los símbolos (<,>) es pertinente ahondar en ella. Lo replicable es la agenda.

[6] Actividad que se analiza a profundidad en el siguiente capítulo y da paso a la tercera práctica matemática.

cubrieran la medida de referencia, con el fin de comunicar medidas como parte integral de la reinvención de medir, experimentación que lleva a los alumnos a reconocer que, la cuantificación de iteraciones no siempre da un número exacto, con ello se gesta la invención de nuevas unidades de medida que tienen como referente al tikje

El reconocimiento de la necesidad de subunidades que den cuenta de los cachos más pequeños a la unidad permitió reconocer el valor relativo de las fracciones unitarias (pequeños); mientras más veces se itera el pequeño para ajustar la vara (tikje), representado por el denominador menos grande es la fracción unitaria, o viceversa entre menos iteraciones, la fracción unitaria representa mayor tamaño. El reconocimiento de estas dos condiciones (orden inverso de la fracción y su valor relativo) facilitará la comprensión de la noción de fracción unitaria.

CAPÍTULO VI
TERCERA PRÁCTICA
EL ESPLENDOR DE LA MATEMATIZACIÓN PROGRESIVA O LA REINVENCIÓN DE LA FRACCIÓN COMO MEDIDA DE LONGITUD.

Todo lo que no invento es falso
(Ruíz, 2020)

UNA TAREA DETECTIVESCA

En esta tercera práctica se trata a la fracción como unidad de medida, particularmente haremos una reflexión sobre la participación de los alumnos y la manera cómo, frente a una necesidad, sus respuestas son cada vez más sofisticadas, lo que da lugar a un diálogo basado en y para la matematización progresiva.

En correspondencia con nuestra perspectiva metodológica (experimento de diseño), se requirió de un análisis retrospectivo del desarrollo de la TEDE especialmente sobre las conversaciones colectivas, las producciones de los alumnos y las reflexiones del equipo de investigación para regresar a las conversaciones y triangular con la teoría. Todo un proceso de implementación y difusión (McKenney & Reeves, 2012) para hacer un modelo teórico (un referente para el docente) que describa el desarrollo de las reconstrucciones de los alumnos a lo largo del experimento y determinar la viabilidad de las conjeturas sobre las maneras de desarrollar el aprendizaje (Cobb, 2008).

Se trata entonces de documentar lo que los alumnos saben y comprenden sobre sus concepciones, aunque sean erróneas. De ahí la importancia de la reconstrucción progresiva de estas formas de pensar, que de alguna manera el maestro conjeturó para detonar esa participación en la que intencionalmente se busca que las producciones de los alumnos generen la discusión. El que aquí se presenta es un análisis retrospectivo sobre la naturaleza del discurso en el aula como medio para la reflexión, análisis que pretende ayudar a los maestros para que lleguen a las conjeturas no solo del desarrollo instruccional, sino también de las formas en que responden los alumnos, estas conjeturas permitirán al maestro encaminar las respuestas de los alumnos hacia un razonamiento más sofisticado, hacia la reorganización progresiva de ese razonamiento que puede verse como un recurso educativo (Visnovska, 2009) para el docente.

En una primera aproximación analizaremos varias producciones de los alumnos que generaron discusiones sobre las dificultades para comunicar sus respuestas. La clasificación de estas producciones se basó en la justificación y argumentación que las acompañaba. Para ello se pidió a los alumnos que analizarán y manifestarán qué respuesta les parecía mejor y propusieran una manera para mejorarlas.

La actividad tuvo dos intenciones, analizar patrones y regularidades en las interacciones de los alumnos para identificar cambios en su razonamiento sobre la relación entre el tamaño de una unidad de medida y el número de iteraciones que requiere para cubrir un cierto largo, lo que llamamos en la TEDE relación de orden inverso. Una segunda intención fue analizar la manera como los alumnos expresan sus respuestas para que el otro comprenda lo que quiere dar a conocer (por qué y cómo). A medida que participaban en la actividad, el docente se esforzaba por ayudarlos a escuchar las presentaciones de sus compañeros tomando en cuenta que al orquestar discusiones colectivas la conjetura ayudaría a los autores de las respuestas y a los demás compañeros a darse cuenta que muchos de los que escuchaban no podían entender sus explicaciones sobre la relación de orden inverso en fracciones unitarias.

En síntesis, la idea es hacer un análisis retrospectivo en función de: a) el sentido que los alumnos que escuchan le dieron a las presentaciones; b) de lo que escucharon los escuchas y; c) de lo que valía la pena escuchar (Visnovska, 2019, p. 549). Al hacerlo también es posible profundizar en la comprensión sobre el inverso de las fracciones y dar sentido a las producciones de los niños. Recolectar esta información permitirá reconocer que en la clase había una matematización progresiva, una comprensión colectiva y que luego de eso era necesario evaluar los logros individuales de los estudiantes.

La interpretación es razonable desde nuestra TEDE, ya que la conjetura establece que el grupo normalizará las nociones del orden inverso, que comprenderán la idea de que a mayor tamaño de la unidad de medida menos repeticiones se requerían para abarcar un mayor espacio y viceversa, lo que significa comprender la relación entre el tamaño de una unidad de medida y el número de iteraciones que requiere para cubrir una determinada longitud, lo que implica entender por qué y cómo el tamaño de las entidades cuantificadas aumenta o disminuyen de acuerdo a la longitud y tamaño de la unidad que puede no estar contenida en la misma, idea que resulta viable para hacer el andamiaje necesario para la siguiente práctica matemática.

La TEDE caracteriza este proceso como la orquestación de discusiones colectivas (Visnovska y Cortina, 2018) como medio para que emerjan explicaciones ancladas en la escucha y en la justificación. Esas discusiones intentan dar sentido a las explicaciones de los demás, manifestar si se está de acuerdo o expresar la no comprensión de las soluciones propuestas, lo que Treffers (1987) llama "proceso de negociación" que potencializa el propósito de dichas discusiones y da lugar a un razonamiento matemático lógico, viable y sensato en el contexto de la problemática (los Acajay). Son discusiones que en palabras de Visnovska y Cortina (2019), pueden apoyar productivamente el aprendizaje matemático de los alumnos, llevándolos por el viaje de la experiencia (vivir la actividad) y ayudar a guiar la reinvención de ideas matemáticas específicas, en nuestro caso la fracción como medida, a partir de ideas claves como la medición, iteración, tamaño, el orden inverso, fracciones unitarias (los "pequeños") y el uso de símbolos.

Desde una postura similar Dewey (en González, 2001) lo concibe como la libertad para favorecer el desarrollo natural del niño, proceso en el que el interés es considerado como el motor del trabajo escolar, en nuestro caso ese interés es la necesidad de dar solución a una situación vivencialmente importante para el alumno. En ambos casos el maestro funge como guía del proceso y a partir de un análisis fino de la creación de significados que requieren nuevo vocabulario, debe tomar la decisión de otorgar o no un nuevo vocabulario para poder dar paso a la siguiente actividad o práctica social. Puede decirse entonces que "la educación es una constante reorganización o reconstrucción de la experiencia" (Dewey, en González 2001 p. 23), en palabras de Freudenthal (1991), la experiencia caracterizada por una "matemática humana" experiencial, es vivencial para quien la realiza.

En el sentido de las ideas anteriores, los diálogos de los alumnos a través de las interacciones sostenidas en la historia de los Acajay ayudan a la TEDE para avanzar o retomar alguna de las prácticas estudiadas, pues recordemos que en esta matematización progresiva puede haber ese tránsito entre un nivel y otro, ya que las conversaciones colectivas son un medio para dar la iniciativa de la búsqueda activa de esa matematización. Precisamente, al análisis de estas conversaciones colectivas y de los aprendizajes que generan dedicamos este capítulo.

6.1 NEGOCIACIÓN Y GENERALIZACIÓN ENTRE PARES. LA POSIBILIDAD DE CONSTRUIR UN SOLO DIÁLOGO.

A decir de Treffers (1987), las construcciones u "objetos mentales" (Freudenthal, 1983) son una estructura cognitiva personal que se enriquece con la visión discursiva cultural, ya que pasa por la verbalización de lo pensado en el contexto de la matematización (acción matemática) y puede modificarse como consecuencia de su uso en la negociación de formas progresivas de hacer matemáticas. Por esta razón las producciones de los alumnos son esenciales en los procesos de enseñanza, dado que los alumnos negocian la manera de dar solución a una situación específica a través de un quehacer, lo que significa hacer de la matemática una práctica social.

Para Visnovska (2009) al igual que para Treffers (1987), es importante poner en el centro del proceso al razonamiento matemático de los estudiantes, al mismo tiempo que se proponen medios específicos para que su razonamiento sea apoyado sistemáticamente. Entre este conjunto de medios resulta revelador el proceso de negociación y generalización (Treffers, 1987) porque brinda formas de simbolizar dichos objetos mentales porque está amalgamado con el principio de interacción de la EMR, esto es, con las contribuciones de diversos alumnos en una democracia participativa (Cortina, 2019) en la que ponen de manifiesto sus construcciones para que puedan ser comparadas y contrastadas, lo cual les permite "reflexionar" acerca de la actividad matematizadora, tanto la propia como la de otros.

No obstante, la reflexión sobre las construcciones de los alumnos debe ser tomada con precaución y hacer énfasis en la naturaleza del discurso y la calidad de las discusiones para evitar la aparente sencillez de una respuesta que puede ser aceptada como viable sin una mayor participación de los alumnos, es decir mediante una participación pasiva. Si bien una respuesta puede ser correcta, por sí sola no explica el por qué, ya que "En tanto el alumno no es capaz de reflexionar acerca de su propia actividad, el nivel más alto permanece inaccesible para él" (Freudenthal, 1973, p.130);

Tomando como referencia lo anterior, la TEDE busca generar una participación activa abierta a un diálogo democrático, argumentado, justificado y validado por toda la clase, que involucra razonamientos diversos para explicar esa respuesta, justificar por qué es coherente y razonable. Mediante la guía del docente deberá construirse ese acuerdo para llegar a la solución más sensata, a una matemática democrática (Cortina, 2019), una matemática para todos (Freudenthal en Gravemeijer y Terwel 2001) que en el futuro permitirá a los estudiantes un mejor desempeño como trabajadores de cualquier ámbito, así como una mayor participación crítica e informada dentro de la sociedad en la que viven (Zúñiga, 2008, p. 68).

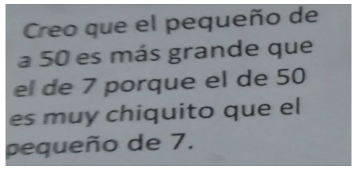
Por su parte, Van den Heuvel-Panhuizen (2005, en Pochulu y Rodríguez, 2015) señala que las producciones y construcciones de los alumnos pueden reflejar distintos niveles de comprensión y destreza en el quehacer, en este caso se trata de medir, iterar, comparar. Esta información permite tomar decisiones sobre la TEDE, pues como lo refirió Dewey (en González, 2001) la secuencia no puede ser una colección establecida de tareas, debe reflejar lo que los alumnos hacen en el salón de clases, esta característica adjudica al profesor un papel de guía y orientador de los alumnos, evitando que caiga en los postulado del "maestro-camarada" o que oriente sus acciones bajo concepciones que atenúan la influencia del educador dentro del activismo escolar.

Entonces, en la actividad matemática se dan dos procesos articulados, la dinámica de la clase (los niveles de comprensión de los alumnos) y el recorrido de la trayectoria hipotética de aprendizaje. Para gestionar el primero, el profesor requiere preguntar sobre la actuación (sobre el cómo) y sobre la justificación (el por qué), pero también requiere que esas preguntas sean plausibles para la clase, es decir que sean lógicas para que logren gestionar la actividad y las participaciones.

Siguiendo la lógica anterior, al comparar fracciones unitarias de acuerdo a su tamaño relativo en la actividad donde los alumnos razonan que entre más iteraciones de una subunidad son necesarias para cubrir el largo de la unidad de referencia, más corta es la subunidad (en términos de longitud, es más pequeña), la TEDE propuso comparar un "pequeño" de 7 con uno de 50 (en fracciones unitarias 1/7 y 1/50). Para compararlos, los alumnos basaron su razonamiento en la imaginación espacial unidimensional (longitud) basada en la práctica de los pequeños puesto que la propuesta fundamentada en Stephan et al. (2003) establece la conjetura posible de la medición de longitudes de objetos como una práctica común.

Después de la actividad de medir en la que los alumnos construyeron los "pequeños", el profesor interviene para dar fluidez a la secuencia del aprendizaje, esto es, para conjuntar lo aprendido con la nueva situación. Un ejemplo de ello se puede ver en el siguiente fragmento cuando el grupo analiza sus producciones, especialmente cuando reflexiona sobre el cómo y el por qué. Se puede observar que a partir de la reinvención se establece la idea "a mayor número de iteraciones, menor la longitud representan" que es uno de los objetivos de la TEDE porque permite comprender el valor relativo y el orden inverso de las fracciones.

A: (Da su respuesta y su justificación)


Creo que el pequeño de a 50 es más grande que el de 7 porque el de 50 es muy chiquito que el pequeño de 7.

[1] M: ¿qué les parece esa explicación, es muy clara

[2] Aa: Más o menos

[3] M: ¿Por qué crees que más o menos Lupita?

[4] Lupita: Así no se explica bien.

[5] M: ¿Por qué no?

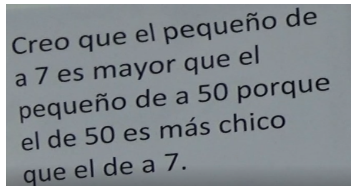
[6] Horacio: Porque primero dice que el pequeño es más grande y luego que es más chiquito

[7] M: Primero dice que el pequeño es más grande y luego que es más chiquito y a lo mejor eso confunde al lector verdad. Porque primero dice que es más grande y luego que es más chiquito, entonces cuando redactamos tenemos que ser cuidadoso, para que quede claro lo que queremos decir, es importante que primero lo leamos y veamos si nos queda claro o no verdad.

Como se puede apreciar, la respuesta fue catalogada ambigua, la frase "*el pequeño de 50 es más grande que el de 7"* refleja un conocimiento ligado a las regularidades de los números naturales, la que sostiene que "a mayor número mayor valor". También se puede observar que los alumnos tienen dificultades para expresar que el "pequeño" de 50 es menor, por ello cuando expresan que el de 50 es más grande toman como referencia la cantidad de iteraciones, que en efecto con el pequeño de 50 son más ya que el pequeño de 7 tiene menos iteraciones.

Empero cuando la respuesta se refuerza con la frase *-porque el de 50 es muy chiquito que el pequeño de a 7*-, al parecer en el *muy* la intención va encaminada a subrayar el orden inverso de las fracciones unitarias en relación al tamaño relativo de los pequeños, ya que al imaginar que se cubre la unidad con los "pequeños" se reconoce que se requerirían muchos más "pequeños" de 50 que de 7, pero al momento de expresar esta idea no resulta clara la justificación y cae en esa aparente vaguedad [6] que la reflexión colectiva y la interacción de experiencia clarifica. En suma, conjeturamos que al conocer los argumentos de sus compañeros, los alumnos hacen un análisis más profundo en el que todos pueden participar, comparar y consensuar una mejor explicación, sin enfocarse solo en la acción, también en la justificación. De esta manera construyen un saber colectivo que los compromete a usarlo en posteriores discusiones colectivas.

A: (otra respuesta se pone a discusión)


Creo que el pequeño de a 7 es mayor que el pequeño de a 50 porque el de 50 es más chico que el de a 7.

[8] M: ¿Qué les parece esa explicación?

[9] Aos: mejor

[10] M: ¿Se parece a la primera verdad?, pero en este caso no se contradice, aquí en la primera dice (Señala la respuesta del fragmento anterior) - *Creo que el pequeño de a 50 es más grande que el de 7 porque el de 50 es muy chiquito que el pequeño de 7*

[11] Lucas: Que el 50 es más grande.

[12] M: Aquí sí es consistente, Fabiola

[13] Fabiola: Además no explicó

[14] M: No explica nada verdad, de hecho repite lo mismo, fíjense no hay una explicación, sino que repite, vuelve a decir lo mismo.

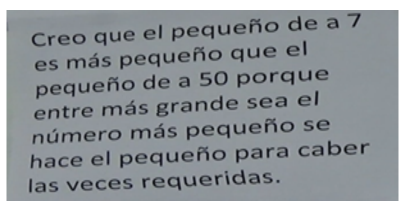
Como se puede apreciar, la respuesta entrelaza aprendizajes colectivos y establece la relación entre la construcción propia y la de los otros [10] [12]. Fabiola dice que *no explica*, que se redunda en lo mismo, por ello exige un nivel mayor de matematización mediante el diálogo en la clase, un proceso interactivo (Freudenthal, 1991) en el que el alumno puede reinventar sus ideas mediante la interacción.

Hasta aquí se ha analizado lo que cada autor de la producción (alumno) quiso decir, pero no se puede dejar de lado la relevancia de la justificación porque pretende dar a conocer lo que se quiere. La clase hace énfasis en ello, en ir más allá “está bien” o “está mal” [6] [7], con ello da pautas a la TEDE, pues lo que surge en el aula anticipa lo que está en el horizonte (Van den Heulvel- Panhuizen, 2005), en este caso cómo se comprende. Pero la clase abandona la pretensión de que sea el profesor quien valide, ahora es la clase quien válida la calidad de las respuestas sobre el cómo y el por qué.

De esta manera la TEDE da cuenta de cómo los alumnos generalizan y ponen en juego las reinvenciones que han normalizado y revelan las formas de razonamiento surgidas durante el análisis colectivo de las respuestas. La discusión colectiva es un espacio en el que se deciden las formas de razonamiento que necesitan más apoyo para mejorar la verbalización, lo que permite el reacomodo de objetos mentales en torno a la idea "a mayor número de iteraciones es menor la magnitud", al representar una cantidad mayor de iteraciones, el tamaño de la subunidad será de menor longitud lo que en la TEDE se denomina "orden inverso de las fracciones unitarias con relación a su tamaño relativo".

Ahora bien, para que el alumno construya y comprenda esta noción debe reconocerse la importancia del proceso de negociación y generalización en las discusiones colectivas, ya que de esta manera se puede apoyar su razonamiento, por ello resulta fundamental gestionar más experiencias que brinden la oportunidad de tratar el error como oportunidad de aprendizaje, ya sea validando las respuestas para construir un argumento que sea evidencia de un razonamiento más sofisticado, un nivel más alto de matematización.

Sobre este respecto y como se puede ver en el siguiente fragmento, la producción que se muestra es evidencia de un nivel de comprensión mayor sobre la relación de orden inverso [15-17] y del tamaño de los pequeños. Si bien los alumnos tuvieron mayores oportunidades para construir explicaciones [18], TEDE buscó tomar atajos, cambios de punto de vista y respuestas más elaboradas, que complementaran la explicación.



[15] M: ¿Les parece bien, entre más pequeño es el número más grande es el pequeño, verdad?, en la clase pasada hasta hicimos un pequeño de a uno, ¿se acuerdan? ¿Y salió pequeño o salió grande?

[16] Aos: Grande, grandísimo.

[17] M: Salió grandísimo, verdad, pero ¿qué creen que le falta a esta explicación?

(los alumnos se quedan callados por un momento)

[18] M: y es que no nos dice porqué pasa eso, nos dice que eso pasa, pero no nos dice porqué ¿verdad?. Nos dice que entre más pequeño es el número más grande es el más pequeño, eso es correcto; pero ¿por qué?

[19] M: Creo que el pequeño de a 7 es más grande que el pequeño de a 50, porque entre más grande sea el número más pequeño se hace el pequeño para caber las veces requeridas; es un poco parecido al anterior, verdad , pero ¿cuál es la diferencia?

[20] Aos: Que sí explica por qué.

[21] M: Que sí explica por qué verdad, entonces si ven se parecen mucho (hace relación con las dos explicaciones, el maestro relee la última explicación hasta ahora) y esa me

parece una explicación muy bonita porque lo que dice esta persona (explicación sin el por qué) es cierto que se parece a lo que dice esta persona, pero la diferencia es que si explica porque y vamos a ver otro más que se parece mucho al de todos ustedes.

[22] M: Horacio ¿este si la alcanzar a ver o no?, Leticia.

[23] Leticia: Creo que el pequeño de a 7 es mayor que el pequeño de a 50 porque el de a 50 es más chico que el de a 7.

[24] M: Se parece a la primera, verdad, pero en este caso no se contradice.

La explicación sobre la relación de orden inverso utilizando "pequeños", propició el desarrollo de herramientas culturales (verbalizar, argumentar, justificar, negociar validar, y generalizar) y de medición (comparar los pequeños con base a la vara de referencia) (Stephan et al., 2003) que podrán aplicarse flexiblemente en nuevas situaciones, con ello se facilita la reorganización de la comprensión porque no quedarían simplemente como amplificadoras de conocimiento, sino como catalizadores para el desarrollo en los procesos del pensamiento.

Así pues, recorrer el camino de una matematización vertical significa potencializar a los alumnos para que justifiquen sus decisiones [19] [23], siempre y cuando se consideren las oportunidades que brindan la conversación colectiva y la naturaleza del discurso, para que los alumnos negocien y generalicen sus argumentos y de manera consensuada construyan un saber colectivo y democrático que todos se comprometen a usar.

6.2 REINVENTAR LA FRACCIÓN COMO MEDIDA DE LONGITUD.

Desde la caracterización hecha por Freudenthal (1983) en el marco fenomenológico de la fracción como comparador, abordar la reinvención de las fracciones como números que representan magnitudes de medida (Thompson y Saldanha, 2003) permite apoyar la creación de contextos que permitan introducir el concepto de fracción por diferentes vías.

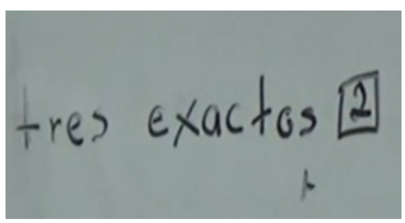
Recordemos que desde la revisión de la literatura se pudo reconocer la equipartición como un inicio muy limitado para el aprendizaje de las fracciones, dado que concebir la fracción contenida en un entero, lo que Thompson y Saldanha (2003) clasifican como "tantos de tantos", se limita a situaciones que dan cuenta solo de cantidades menores a uno, comprometiendo con ello la comprensión del significado de las fracciones que excedan al entero (fracciones propias e impropias). La equipartición entonces resulta un escenario restringido porque facilita la comprensión sólo de las fracciones menores a uno.

En nuestra TEDE conjeturamos que si construimos la imagen de una fracción unitaria como número que da cuenta del tamaño de cierto atributo, como algo separado de la unidad de referencia (Cortina, 2013) que cuantifica y representa un tamaño mayor, igual o menor a la unidad, los alumnos podrán considerar las fracciones como números que pueden dar sentido cuantitativo a múltiples fenómenos. De esta manera sería razonable para ellos que una subunidad sea considerada $1/2$ del tamaño de la unidad de referencia, porque serían necesarias dos iteraciones para producir un tamaño igual al de la unidad, y no porque esa subunidad estuviera contenida en ella o que esta hubiese sido fracturada en dos partes iguales.

Asimismo los alumnos pueden manifestar que "3 "pequeños de 2" son necesarios para medir una tira que mide una unidad y media, porque al comprender que la subunidad no está contenida en la unidad, se reconoce que, al iterarla sin restricciones, se puede usar para medir. La tira requiere tres iteraciones del "pequeño" de dos (3/2), lo que se constituye como contexto tangible (los pequeños y la vara de referencia) para apoyar a los estudiantes a razonar cuantitativamente sobre el significado numérico de las fracciones.

Figura 28

Medida de una tira de papel con el "pequeño de a dos"



[1] Ao: Tres "pequeños de a dos".

[2] M: ¿Tres "pequeños de a dos"? Pero, ¿por qué habrá dicho qué tres "pequeños de a dos"?

[3] Ao. ¿Tres exactos son tres?...

[4] M: ¿Por qué dijiste que medía así? (Le entrega a Noemí un popote azul) ¿Qué significa esto, Yuya? (Señala en el pizarrón " $\boxed{2}$ ") ¿Qué usó? ¿Qué "pequeño" usó?

[5] Yuya: El "pequeño de a dos".

[6] M: El "pequeño de a dos" usó. A ver, Noemí…

[7] Noemí: (Mide el popote azul con la tira del pizarrón)

[8] M: Noemí, midió uno…

[9] Noemí: (Mueve el popote sobre la tira)

[10] M: …dos…

[11] Noemí: (Mueve el popote sobre la tira)

[12] M: …y tres, ¿verdad?

[13] Noemí: (Afirma con la cabeza)

[14] M: Midió tres exactos de a dos, ¿se acuerdan quién más midió así? ¿algo parecido? (señala la tira del pizarrón), tres veces el "pequeño de a dos", levanten la mano.

[15] Aos: (Levantan la mano)

[16] M: Sino, aquí les digo, miren… Creo que fueron Ana Corina, Denisse, Daniela, Javier, Leticia, Lupita, Luis Humberto, Mario, Penélope, Antonio, Donatello, Carmen, Dominic, Esteban, Román, Victoria, y también, por supuesto, Noemí, ¿verdad? Pero no todos escribieron como Noemí (observa la hoja) no todos escribieron como Noemí, ¿entendemos por qué lo escribió así? (señala lo escrito en el pizarrón), Azucena, ¿no le entiendes? ¿qué "pequeño" usó?

[17] Azucena: El "pequeño de a dos".

[18] M: El "pequeño de a dos", ¿verdad? ¿y cuántas veces lo usó?... tres veces lo usó, lo usó una, dos, tres veces, ¿ya entendimos o no? ¿quién más todavía no entiende?

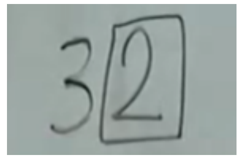
[19] Aos: (Nadie levanta la mano)

Como se puede apreciar, a través de la conversación colectiva los alumnos no sólo reconocen la iteración como recurso para hacer la cuantificación de las fracciones unitarias, también utilizan los "pequeños" como instrumento de medición para cuantificar la longitud de algo [4, 7, 11]. Un aspecto importante es la situación planteada, como Acajays requieren de medir una tira de papel para hacer sus vestimentas, el tikje y los "pequeños" son sus herramientas para medir. La tarea exige iteraciones que rebasan la unidad de referencia, por ello no comienzan partiendo la unidad, como se estila en la tradición escolar, al contrario de esto, se trata de cubrir toda la tira contando la fracción unitaria ("pequeño de dos") tantas veces sea necesario.

Como señala Freudenthal (1983), un número ilimitado de iteraciones permite considerar la cantidad representada por cualquier fracción común como adecuada para ser agregada sin restricción (Cortina, 2020). Esta necesidad de cuantificar una misma subunidad permitió poner la mirada en la manera de representarla, pues ya no es la representación de una fracción unitaria (el "pequeño de a dos"), sino la cuantificación de la acción que, luego de las propuestas planteadas, lleva a los alumnos a la siguiente reinvención.

Figura 29

Sugerencia de Ana Corina para representar la iteración del "pequeño de dos".



[20] Ana Corina: Bueno, el tres es el número que se hace y el "pequeño de a dos" el que se ocupó.

[21] M: Explícanos cómo si estuvieras midiéndolo (le entrega el popote azul)

[22] Ana Corina: Una, dos, tres… (mide el popote azul con la tira que está en el pizarrón)

[23] M: ¿Ya vieron de dónde salió el tres? ... ¿Viste de dónde salió el tres, Azucena? ¿Qué es el tres? ¿Viste que es el tres, Román?...

[24] Román: (Niega)

[25] M: ¿No? ...Por favor, otra vez (dirigiéndose a Ana Corina)

[26] Ana Corina: Que el tres es las veces que se puso el "pequeño de a dos" y el "pequeño de a dos" fue el que se ocupó. Ana Corina ya se acerca a la representación de fracción

[27] Román: Ah…

[28] Horacio: A lo que se refiere Ana Corina es que este (señala el número tres escrito en el pizarrón) es las veces que se tiene que usar el "pequeño" para que quepa en la… en la tira.

[29] M: ¿Entendieron?

[30] Ao: No…no escuché maestro.

[31] M: No escuchamos, despacito y voz bien fuerte.

[32] Horacio: A lo que se refiere Ana es que tres veces utiliza el "pequeño" para que pueda caber tres veces en la tira.

[33] M: Tres veces utiliza el "pequeño" para que pueda caber tres veces en la tira, ¿eso fue lo que dijiste... (dirigiéndose a Ana Corina)

Ana Corina: (Afirma con la cabeza)

[34] Hernán: Pues yo digo que es así como este (señala en el pizarrón el "tres exactos" $\boxed{2}$) miren, vean aquí son tres exactos porque como ella midió el "pequeño de a dos", aquí caben unos tres (señala la tira) y por eso aquí puso el número tres y aquí puso el "pequeño de a dos" (señala en el pizarrón el 3 $\boxed{2}$).

[35] Hernán: (Pone el popote azul sobre la tira) Tres y por eso puso el tres.

[36] M: Puso tres porque le midió tres, ¿verdad?

[37] Aos: Sí

[38] M: Pero, ¿por qué puso el “pequeño de a dos”?

[39] Hernán: Ah porque con eso utilizó…ah…

[40] M: Entonces aquí qué diría, diría algo así como “tres veces” (señala el pizarrón) ¿Si? ¿Ya?... ¿Lo quieres explicar tú?... Ahora va Lucas, muy bien

[41] Ana Corina: (Le entrega el popote azul a Lucas)

[42] Lucas: Es porque esta varita la midió con el dos Tije y esto (señala el número tres) es lo que le dio en este…en la tira.

[43] M: O sea, ¿esa varita es la que usó para medir? ¿Cuál es esa varita Román?... ¿No?

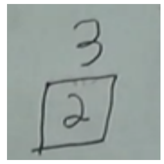
[44] Ao: La de “pequeño de a dos”

Ya hemos mencionado la importancia de las conversaciones colectivas ancladas en la escucha y de la justificación para dar sentido a las explicaciones de los alumnos [20-44].

Al verbalizar sus razonamientos matemáticos, Ana Corina, Román, Horacio, Hernán y Lucas, [26], [28], [32-34] apoyan a sus compañeros a democratizar la reinvención de la representación de la iteración de la fracción unitaria. La reflexión de la actividad matematizadora que inicia Ana Corina permite una mayor participación del colectivo, ya sea verbalizando su comprensión o validando el proceso que los llevó a la reinvención de su representación y a la reorganización de su esquema para la comprensión de la cuantificación de los “pequeños”, lo que les permite encontrar atajos (matematización vertical) para no escribir toda la palabra “pequeños” y usar menos grafías para distinguir el número de veces que se reitera el “pequeño” (el número en la casilla).

Entonces, en la conversación colectiva son los alumnos quienes negocian el uso de la representación, expresar con el número 3 las veces que se itera la subunidad es un paso hacia la generalización del sistema 3 $\boxed{2}$ que expresa la medida de algo. De esta manera la comunidad normaliza el uso de los “pequeños” para cuantificar la longitud de algo [42-44]. Este razonamiento es parte del proceso de vivenciar la reinvención de la fracción con el apoyo que brinda la TEDE, por su parte la la narrativa de los Acajay ofrece un contexto tangible que apoya a los estudiantes a razonar cuantitativamente sobre el significado numérico de las fracciones. (Cortina, 2020, p. 9)

[45] M: Ya vivían antes, yo creo porque se parece muchísimo a como lo escribían los Acajay, cuando escribían estas medidas, también ponían (escribe en el pizarrón) el tamaño del pequeño, pero, ¿qué creen?, este no lo ponían aquí (señala el número tres de “3 $\boxed{2}$ ”), lo ponían aquí (escribe de nuevo en el pizarrón) miren…



[46] Aos: Oh…Oh…

[47] M: Entonces, ¿ahí qué dice?

[48] Aos: El "pequeño de a dos" … (hablan varios a la vez)

[49] Lucas: El "pequeño de a dos" tres veces

[50] M: ¿Lucas?... Dice lo mismo, dice tres "pequeños de a dos", tres veces…

[51] Aos: "El pequeño de a dos"

En la representación propuesta, el denominador da cuenta del tamaño de la subunidad y el numerador de la cantidad de veces que la subunidad fue iterada. Es interesante recordar que para llegar a la reinvención de la fracción unitaria en la que el denominador representa los "pequeños", en un primer momento los alumnos vivenciaron la importancia de medir, de generalizar una forma de comunicar y representar dichas longitudes, todo ello en un contexto tangible, para que después emerja en esta práctica matemática la necesidad de nombrar su complemento, el numerador, ese elemento que inventan los niños para comunicar las iteraciones.

Asimismo la TEDE apoya esa negociación para que, anticipadamente, se generalice la relación entre el tamaño de un parte y el número de veces que se repite, lo que nombramos relación de orden inverso, para pasar luego a situaciones de comparación de fracciones unitarias enmarcadas en el código de los Acajay. En estas situaciones debe representarse y comunicarse como una práctica social, por lo tanto los "pequeños" evolucionan para dar solución a nuevos fenómenos que permiten a los alumnos reajustar la comprensión de los "pequeños", ahora ya no solo se considerados como partes de una longitud, sino que pueden servir para medir.

Es así que en la tercera práctica matemática de la TEDE se trata de interpretar la fracción como medida de longitud mediante la iteración de una subunidad, esta práctica que emerge al utilizar las subunidades para medir tiras de papel, permite determinar correctamente y con facilidad cuando una fracción es menor, igual o mayor que la unidad. Con ello se hace necesario agregar un nuevo símbolo al sistema de notación, un número que dé cuenta de la cantidad de veces que la subunidad fue iterada, de esta manera se introduce la noción de numerador de una fracción y la reflexión sobre cuándo una longitud es menor, mayor o igual que el tikje.

6.3 USAR SUBUNIDADES PARA MEDIR POR DERECHO PROPIO.

Para autores como Siegler (2015, la "fracción como medida" frecuentemente se reduce a una fracción que se coloca en la recta numérica para representar la longitud contenida en números enteros. Esta idea se desprende de la equipartición, ya que al dividir la recta numérica en partes iguales y marcar lo que representa cada parte es una actividad que se utiliza como simple medida de comparación con la unidad que contiene dichas longitudes, por ejemplo en la lección 17 del libro de tercer grado de matemáticas (SEP, 2002) se presentan situaciones donde aparecen las fracciones en el contexto de medición, se hace referencia a tiras de papel como unidades no convencionales de medida (Ávila, 2019), son fracciones propias contenidas en una tira roja que funge como unidad de referencia, por ejemplo, ½ de la tira roja. En términos de Kieren (1980) se trata de producir una unidad segmentada para medir una longitud determinada.

Empero, hay quienes siguiendo a Davydov y Tsvetkovich (1991), se han apartado de la equipartición, pues limita la comprensión de las fracciones impropias. Para Davydov (1991, en Cortina 2020) la medición de magnitudes físicas debe ser el punto de partida y el contexto principal para la enseñanza de las fracciones, idea fundamental que orientó nuestra TEDE, en ella se articulan también las ideas de Thompson y Saldanha (2003) quienes comparten la formulación acerca del tamaño relativo de una subunidad. En el contexto de las tiras de papel, las fracciones unitarias se convertirían en subunidades de medida para producir tiras de cierta longitud (magnitud lineal).

En el contexto de la narrativa de los Acajay, los alumnos deducen que los "pequeños" eran usados *para medir sus vestimentas, sus penachos, cuando había eventos importantes.* Para los alumnos es sensato utilizar vestimentas bien hechas, pues al ser distinguidos, los Acajay tenían que resaltar en el pueblo de Napiniaca y lo hacían mediante esas tiras o listones que llevaban en sus vestimentas, por ello era importante la exactitud y la precisión.

S8, min. 40- 57.

[1] M: De una medida específica, porque como eran Acajay la medida de la tira tenía que ser muy exacta, y entonces algo que era muy importante medir era esas tiras, esos listones que se colocaban en sus ropas ¿si Acajay, Denisse? ¿entendimos lo que dije Penélope?, sí, entonces a ver Acajay les voy a pasar (muestra un fragmento de tira de papel) vamos a pensar que esta era una…

[3] Ao: Tira

[4] M: Pues de este tamaño se las colocaban, a la mejor porque se colocaban muchas, pero cuando las hacían así todas eran del mismo tamaño, la pregunta es ¿cuánto medirá?, entonces vamos a usar nuestra vara y nuestros pequeños, oigan no empezamos hasta que todos nos queda claro, con la vara, con nuestros pequeños vamos a medir la tira y vamos a apuntar la media en nuestra hoja en donde está el inciso A (Figura 30)

[5] M: Eso ¿qué quiere decir que midió? … a el pequeño de a uno, pero no sé cuánto midió en la tira, ¿cómo es que medirían dos pequeños de a 4 y el tikje?

[6] M: Pero ¿cómo se podría escribir en código Acajay?

[7] M: A ver a Jaime se le olvidó cuánto mide el anaranjado y a que bien lo está midiendo en la vara para saber que es un pequeño de qué

[8] Ao: de a seis

Cuando los alumnos utilizan “pequeños” de material concreto hacen más fácilmente las comparaciones con la unidad, como las subunidades son independientes de la unidad, pueden comprobar sus medidas, es el caso del “pequeño” naranja. Se puede ver en el siguiente fragmento que cuando olvidan su medida, lo comparan con la unidad y comprueban que es un pequeño de seis.

S8. 1h. 8min

[9] Ao: Pequeño de a seis

[10] M: ¿cómo puede saber qué es de a seis?

[11] M: Mídelo en tu vara para saber qué es

[12] Ao: ¿Este pequeño cuál era?

[13] M: No me acuerdo vamos a verlo

[14] Ao: Midiendo

[15] Aa: ¡es de a cinco!

(el niño toma el tikje y se da cuenta que es el de cuatro, asienta con la cabeza su descubrimiento)

[16] Arón: No son 4, son 6 de a cuatro. (Toma su pequeño amarillo y mide su tira)

Esta comparación permite la ayuda entre pares, algunos recurren a los “pequeños” de material concreto, otros utilizan la imaginación para reconocer el orden inverso de las fracciones unitarias y hacer estimaciones [16]. De esta manera comprenden que el denominador (seis) representa la longitud de la subunidad y las veces que se itera el “pequeño” para cubrir la unidad, también reconocen que si una subunidad requiere de más iteraciones para cubrir el Tikje tiene menor longitud. Arón además utiliza atajos, como usar directamente al número entero 6 y la casilla que enmarca al pequeño de 4, para concluir que se necesitan seis pequeños de a cuatro para cubrir la tira.

Figura 30

Representación de la medida fraccionaria en código Acajay

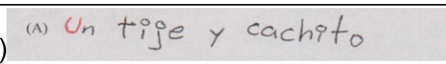
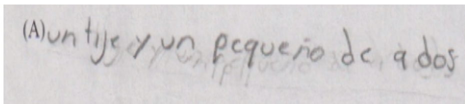
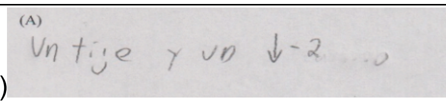
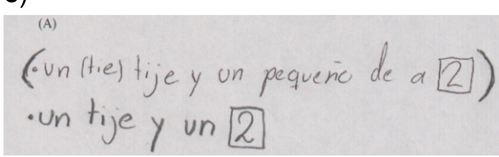
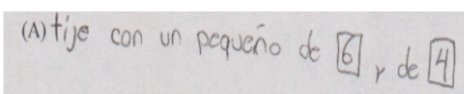
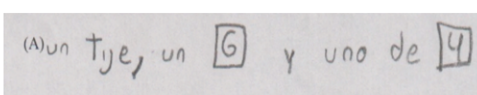
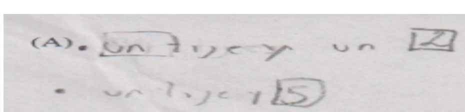
[17] M: ¿Qué quiere decir Paola?
[18] Paola: Que el seis ocupó al “pequeño de a cuatro”.
[19] M: Seis, Xiomara, ¿qué quiere decir? ¿Qué “pequeños” son?
[20] Xiomara: ¿El de a cuatro?
[21] M: Ajá, ¿y cuántas veces lo repitió?
[22] Xiomara: Seis.

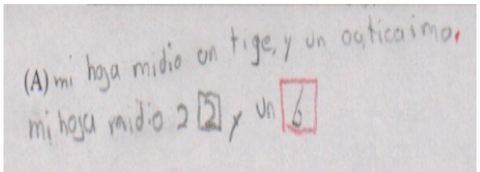
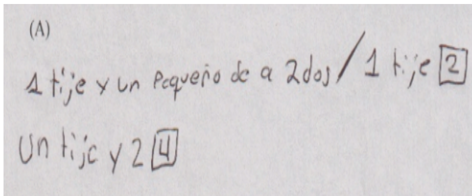
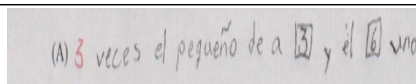
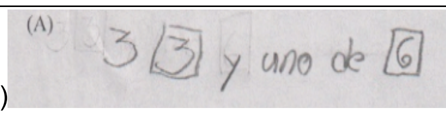
En el proceso de matematización vertical, la invención de Noemi y Yuya acerca de (↓-20; práctica 2, donde Aarón argumentaba que la flecha hacia abajo indica el pequeño y hacia arriba indica grande) fue base para la comprensión del código Acajay de ‘casilla para el denominador’ y la reinvención del número entero a un lado para representar las iteraciones, esto es un atajo que apoyó la reorganización en el progreso de matematización vertical que se gesta a partir de la representación de los pequeños con símbolos. Como menciona (Freudenthal, 1991), se da un movimiento ya en el mundo de los símbolos porque esta reinvención se torna una conversación [17- 22] que denota una interpretación de la representación armónica entre el quehacer de medir y los pequeños al representar con el seis las iteraciones, además al usar la casilla para representar al pequeño de 4, se economiza tiempo y espacio de escritura.

Obsérvese que intencionalmente las tiras son mayores que la unidad de referencia, lo que permite al alumno ver las iteraciones como algo natural, sin restricciones. En la siguiente tabla puede observarse la progresión en los niveles de matematización de los alumnos, en donde se describe además de ello como lo representan de forma gráfica, hasta llegar a la utilización del símbolo de la casilla para representar los pequeños.

Tabla 7

Niveles de matematización en la medición de tiras.

a)  Carmen Daniela 	Cuatro alumnos de 31, utilizan solo lenguaje alfabético, para expresar la medida de la tira, identifican la unidad de referencia y otra subunidad. Podemos decir que están en el nivel referencial, aunque no hay una economía en su representación usan los pequeños para medir, pasan de la simple representación de medidas a cuantificar con ellos.
b)  Donatello	Donatello usa un lenguaje alfanumérico, hace referencia a la medida utilizando los pequeños, los representa con el código creado por la clase antes de llegar al código Acajay. Hay un movimiento en la matematización, toma lo ya normalizado y objetivado para tomar atajos, en esta situación es la economía en la representación gráfica, economiza esfuerzo, usando pequeños, luego con una reinvención usa símbolos, signos que se validan en la cultura de aula, para llegar a la representación Acajay.
c)  Ana Corina  Román  Dominic  Xiomara	En la mayoría de los alumnos hay una avance en la matematización vertical; usan el código Acajay para representar los "pequeños" según las iteraciones necesarias para cubrir la unidad de referencia, Por ejemplo el denominador (dos) significa dos iteraciones para cubrir un tikje. También utilizan **modelos para** un contexto más general. Pasan de una matematización referencial a una general al enlazar lo nuevo, con lo aprendido y hacer una reorganización con la nueva representación, usar la 'casilla para el denominador' como representación del pequeño de dos, pequeño de cuatro… Acortan la trayectoria, utilizan a los pequeños como su unidad de medida, para medir las tiras.

d)  Jaime  Luis Humberto	Usar las subunidades y la unidad de referencia favoreció el intercambio de ideas sobre la medición con tiras y se visualizan atajos como el uso del símbolo 'casilla'; no usar grafías sino el símbolo que representa a los pequeños y los números enteros 1,2,3 … para cuantificar la medida, utilizando como modelos y símbolos (Treffers,1997). Jaime y Luis Humberto utilizan un número para cuantificar las iteraciones de la fracción unitaria cuando aún no se ha normalizado. Incluso Luis Humberto ya hace comparaciones, es decir, en ambos ya se percibe un nivel de matematización más avanzado.
f)  Fabiola	Aparece el numerador como acción, verbalizada, con el número 3 se representa la cantidad de iteraciones de la fracción unitaria. Fabiola, de manera intuitiva coloca el numerador como el número de veces que se itera a la fracción unitaria, en este caso 1/3 es iterado 3 veces conformando un tikje y un pequeño de a seis.
g)  Sofía	Sofía usa atajos para llegar a la representación en el código Acajay, utiliza el símbolo "casilla para el denominador" y usa sólo el número 3 para representar las veces que se itera (numerador),ha suprimido la descripción por la simbolización. Podemos apreciar un nivel de matematización formal cercano a la convencionalidad de la fracción 3/3, como unidad de medida que puede ser mayor a la unidad de referencia cuando se complementa con un pequeño de a seis.

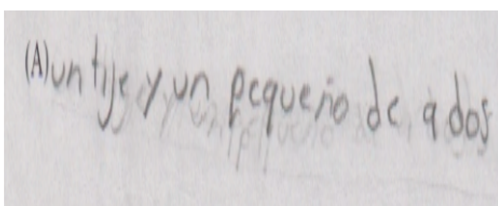
A partir de la producciones de los alumnos se gestó una conversación colectiva (más de 25 minutos) en la que se compararon las formas de medir las tiras y la manera como se representaron. En esas dos acciones se evidenció un avance en la matematización vertical, ya que todos utilizan los "pequeños" para medir, aunque en sus representaciones se puede ver que el uso de símbolos no ha sido generalizado. El colectivo discutió cómo simbolizar las acciones y el resultado considerando la tira que se midió con el Tikje y el "pequeño" de a dos.

6.3.1. Representación de los pequeños. Hablar del símbolo (que expresa al denominador)

Recurramos a la semiótica[1] de la significación, al estudio de los sistemas de significación (D'Amore, et al. 2014) para argumentar la importancia de la representación de los pequeños cuando las tratamos en el aula como instrumentos legítimos para medir y comunicar dicha medida y cómo estas se pueden transformar en otras representaciones que al conjuntarse transmitan la idea de forma gráfica, el símbolo de 'casilla', para representar a los pequeños y que se puedan contabilizar las iteraciones de los mismos.

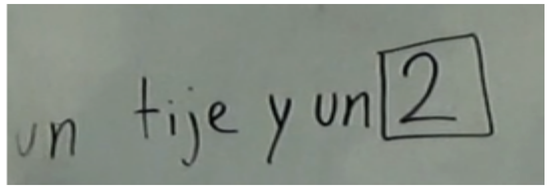
La importancia de hacerlo desde el código Acajay, tiene que ver con una convención social donde se producen reglas para validar esos símbolos que son resultado de un proceso comunicativo en el que se solicita una respuesta que, de acuerdo con Eco (2000, en D'Amore, 2014), se verifica cuando existe un código que establezca una correspondencia válida para el destinatario y reglas determinadas por una cultura. El siguiente diálogo puede ilustrar las representaciones apoyadas en el código Acajay que pueden ser transformadas para llegar a una representación común con base en las reglas establecidas por la misma comunidad.

> [9] M: A ver chicos, ¿a quién de ustedes les midió así" un tikje y un pequeño de a dos"? (Varios niños levantan la mano)
>
> [10] M: ¿Quién de ustedes lo escribió así?
>
> (Daniela)



> [11] M: ¿Está larguísimo, verdad?
>
> [12] Aos: Sí
>
> [13] M: ¿Quién usó una forma de escribir que fuera más breve?
>
> (Varios niños levantan la mano)
>
> [14] M:…Ana Corina pásale, vamos a ver cómo lo escribió Ana Corina.
>
> [15] Ana Corina:

[1] En la postura de Eco (2000, en D'Amore et al, 2014) la semiótica estudia los procesos culturales como procesos de comunicación considerando como base un sistema de significación.



[16] M: Ya vieron, ¿qué querrá decir eso Denisse?

[17] Denisse: Un tikje y un pequeño de a dos.

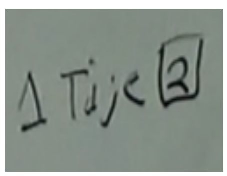
[18] M: Román, tú lo escribiste diferente, pásale Román

[19] M: ¿Cuál les parece mejor el de Ana Corina o el de Daniela? ¿cuál les hubiera gustado más a los Acajay?

[20] Aos: El segundo (el de Ana Corina)

[21] M: A ver estamos trabajando con un tikje y un pequeño de a dos y vemos dos formas de escribir la medida, pasa Luis Humberto y escribe 1 tikje y un pequeño de a 2 .

Luis Humberto



Cómo se puede ver, la discusión estuvo centrada en la representación más económica de las iteraciones y permitió que los alumnos reflexionaran sobre representaciones para la medida más breves y abstractas.

[22] M: A ver, ¿observan la de Luis Humberto, se parece ,verdad?

[23] Lucas: Pero nada más le puso el número

[24 Javier: Está mejor la de Luis Humberto

[25] M: A ver, Javier cree que esta mejor la de Luis Humberto, ¿por qué?

[26] Ao: Es más corta

[27] M: ¿Es más concisa y se entiende verdad?, ¿si la vemos? (indica con su dedo y lee) un tikje y …

[28] Ao: ….un pequeño de a dos

Luis Humberto utiliza el código Acajay para representar la medida de la tira, en su representación se evidencia la relación entre un conocimiento anterior (la economía de símbolos de los Acajay) y la reinvención de su representación en la que utiliza la cuantificación de los pequeños.

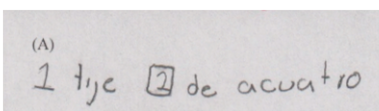
Trabajar con los modelos de Daniela, Ana Corina y Luis Humberto, permite a los alumnos discutir sus ideas para generalizar la representación más económica y efectiva, es lo que D'Amore et al. (2014) describen como la transformación de las representaciones cognitivamente construidas que emergen en su discurso (Duval en D' Amore et al. 2014) y exigen una simbología para abreviar los discursos, es decir las representaciones evolucionan de acuerdo a las necesidades del fenómeno, al inicio simplemente lo comunican, después tienen la necesidad de objetivar y representarlo con un símbolo.

En el trayecto de la generalización los alumnos reflexionan sobre las subunidades para identificar la importancia de la representación del "pequeño" en código Acajay como sistema de significación (Eco, 2000 en D' Amore, 2014) que establece una correspondencia entre lo que representa y lo representado; entre el símbolo de la 'casilla' y los números naturales que representan las iteraciones.

Nótese en el siguiente fragmento que en algunas partes del diálogo no se establece la correlación entre lo que representa la casilla y lo representado, por ello es necesario recurrir a las reglas establecidas en el código Acajay para validar estos símbolos, que si bien son provisorios permitirán asociarse con otros elementos y a formar un signo más adelante.

Denisse: Yo puse un tikje y dos pequeños de a 4

[29] M: Un tikje y dos pequeños de a 4, ¿y cómo escribiste los dos pequeños de a 4?



[30] M: ¿Cómo quedaría utilizando este sistema un tikje y dos pequeños de a 4

[31] A ver ¿se entiende lo que nos está diciendo Denisse?

[32] M: Pero, a ver ¿esto qué significa Denisse? (señala el 2 en el cuadrito)

[33] Denisse: Dos pequeños de a cuatro

[34] M: No, ¿en el dialecto Acajay qué dice aquí?

[35] Aos: El pequeño de a dos

[36] M: Entonces ¿cómo tuvo que haber escrito dos pequeños de a cuatro?, usando el código de Acajay

Como se puede apreciar, Denisse verbaliza su reinvención de acuerdo con lo normalizado en la cultura del aula, pero cuando lo representa gráficamente utiliza el símbolo de la casilla para el dos (las iteraciones) en lugar del pequeño de cuatro. Con ello da cuenta que si se cambia la casilla por el número de iteraciones puede indicar otra cosa, aunque no todos los alumnos dan la misma significación a la 'casilla', cuando se habla de iteraciones no distinguen del todo que son números naturales que indican dicha acción. Empero estas variantes sirven a la TEDE para dar tratamiento a esta representación a través de la matematización que hacen los alumnos, proceso que demanda la "ayuda ajustada" entre pares para pasar del plano social al plano individual Vygotsky (en D'Amore, 2014), en ese trance la guía del docente [30-36] permite hacer reajustes y reacomodar los objetos mentales para reinventar nuevas simbolizaciones.

En este proceso Denisse es consciente de la importancia de economizar la representación, por ello cumple con la primera regla que se estableció como Acajay, por su parte Daniela pasa del nivel situacional y referencial aunque no haga uso de la casilla como lo valida la discusión colectiva. En dicha validación Corina y Humberto dan pauta para la reconsideración del uso de la casilla como representación que signifique a los pequeños y a las diferencias entre los números naturales que representan la acción de cuantificar las longitudes lineales de ciertos objetos.

6.3.2. Iterar una subunidad. La emergencia del numerador

Recordemos que en el nivel formal también se puede trabajar con procedimientos y notaciones generales para que en determinado momento puedan retomarse para solucionar una problemática específica. Al realizar el análisis del ciclo iterativo del experimento de diseño, se pudo identificar [29-33] que los alumnos reinventan una escritura para representar una cantidad mayor a la fracción unitaria, es decir intentan representar "dos pequeños de cuatro" (que no es una fracción unitaria) con base en un código generalizado por la clase ("la casilla"), empero se da una desequilibrio al vivenciar la necesidad de representar la cuantificación de la medida de las fracciones unitarias (pequeños) .

En el siguiente diálogo puede observarse la manera como se reconsideraron los procesos por los que pasan los alumnos para reinventar el denominador $\boxed{4}$

[37] M: ¿qué dice aquí Luis Humberto?

[38] Luis Humberto: Un tikje y un pequeño de a 4 y un pequeño de a 4

[39] M: Un tikje y dos pequeños de a 4

[40] Lucas: Maestro ¿le puedo poner en medio pequeño?

[41] M: Podrías ponerle pequeño

[42] Lucas: En medio

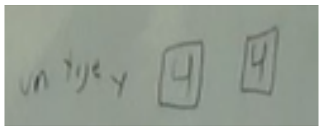
[43] M: Pero

[44] Aa: O antes podemos poner y dos

[45] M: Aquí está miren, ah! Tú también dices que podríamos escribir un tikje y dos pequeños ¿sería otra forma de escribirlo?

[46] Aos: Aja!, sí, sí.

[47] M: Un tikje y dos pequeños de a 4



Al analizar los argumentos de Luis Humberto se puede apreciar que propone representar la acción con dos pequeños de cuatro, lo que significa que toma el ‘modelo de’ la casilla para representar dos veces el pequeño de cuatro $\boxed{4}$ $\boxed{4}$ (en la matemática tradicional sería un tipo de notación en el que la ‘y’ funge como el signo de +), [38], sin embargo la estrategia de Luis Humberto (repetir dos veces “un pequeño de dos”) no es tan económica, por ello se genera una discusión colectiva acerca de la manera para economizar, es decir se da lugar a la progresión de la matematización porque, de acuerdo con el enfoque realista, son los alumnos quienes construyen los modelos [33-35] [44] [47]. Los modelos de Denisse y Luis Humberto sirvieron de base para evolucionar hacia un conocimiento matemático formal propuesto por la clase y si bien en estos modelos se hace énfasis en la necesidad de representar la cuantificación de las fracciones unitarias, se puede observar también la importancia de que toda la clase reconozca la casilla como símbolo para representar a los pequeños.

Representación de la cuantificación de las iteraciones y dificultades en la interpretación de la “casilla”

En este momento de la TEDE la mayoría de alumnos reconoce las fracciones como medidas que representan la iteración del tamaño de una subunidad (Cortina,2020), las identifican y las utilizan para medir aunque algunos como Denisse aún no reconocen la importancia del cuadro como símbolo que representa el tamaño del “pequeño” y no las iteraciones, lo que se convierte en un obstáculo para la matematización.

Como se ha podido ver, las interacciones entre los alumnos son esenciales en el proceso pues les permiten reflexionar acerca de la actividad matematizadora, tanto la propia como la de otros, con ello puede decirse, siguiendo a Freudenthal (1991) que es una matemática humana que se hace en una micro-sociedad en la cual *la imagen del matemático está dentro de la del hombre (alumno) y la imagen de la enseñanza de la matemática dentro de esta sociedad* (p.132).

Considerando la importancia de la interacción y los niveles de matematización progresiva, la TEDE retoma la reflexión sobre las subunidades para consolidar una representación simbólica que permita comunicar efectivamente el tamaño de la subunidad. Para ello, como se puede ver en el siguiente fragmento, da la misma oportunidad de matematización a los alumnos con distinto nivel de habilidades (Freudenthal, 1991).

> [48]Fíjate Yuya cómo aprendimos a escribir “el pequeño de a dos”, cómo se escribe pequeño de a dos.
>
> [49]Paola: (Se levanta y escribe en el pizarrón “$\boxed{2}$ ”)
>
> [50]M: ¿Tu entiendes por qué? (dirigiéndose a Yuya), entonces que nos explique Paola.
>
> [51]Paola: El cuadro explica que es el pequeño y el dos es el número.
>
> [52] M: ¿Cómo se escribe “pequeño de a seis”?
>
> [53] Xiomara: (Escribe en el pizarrón “ $\boxed{6}$ ”)
>
> [54] M: Si le pusieras los signos, ¿cómo los pondrías entre esos dos
>
> [55] Xiomara: (Escribe en el pizarrón “ $\boxed{6} > \boxed{2}$ ”)
>
> [56] M: ¿Qué dice ahí?
>
> [57] Xiomara: “El pequeño de a seis” es mayor que “el pequeño de a dos”.
>
> [58] M: ¿Ese? ¿Por qué es el “pequeño de a dos”?
>
> [59] Xiomara: Ahh…(modifica lo que escribió en pizarrón y lo deja de la siguiente manera
>
> “ $\boxed{6} < \boxed{2}$ ”)
>
> [60] Xiomara: Porque este (un popote azul) es más grande que “el pequeño de a seis”, cabe menos veces en el tikje que “el pequeño de a seis”.
>
> [61] M: Entonces, ¿qué dice ahí?
>
> [62] Xiomara: “El pequeño de a seis” es menor que “el pequeño de a dos”.

Los diferentes niveles de comprensión de los alumnos [51] [57] [60][62] se pueden ver de manera longitudinal y revelan el largo camino que la clase ha recorrido. Sus argumentos, aparentemente banales, reflejan un avance, desde el uso del material físico para la comparación de los pequeños y encontrar una forma de nombrarlos (‘pequeño de dos o de seis'), y recurrir a modelos anteriores de matematización para reinventar símbolos que lo que ya significa una acción de matematización vertical, un ejemplo es el uso del símbolo mayor que y menor que para comparar los pequeños y la 'casilla' para representar la fracción unitaria que permitirá comparar sus iteraciones con el tamaño de la unidad.

6.3.3 Las reinvenciones de la clase

Todo el proceso vivido en las clases, la actividad matemática, las conversaciones colectivas y desde luego la acción del profesor van permitiendo que durante el trayecto aparezcan ciertas reinvenciones. En este apartado damos cuenta de algunas de ellas

Uso de la casilla para el denominador

Esta reinvención aparece cuando los alumnos utilizan los pequeños para representar las fracciones unitarias que utilizan para medir. En un primer momento utilizan el lenguaje alfanumérico, pero con las reinvenciones de los alumnos se transforma en un un símbolo que representa a los pequeños (la flecha hacia abajo ↓20, pequeño de 20) tal como lo hacen los Acajay. La casilla □ se plasma en un registro gráfico [51] que aún puede recurrir a representaciones auxiliares para que lo valide la clase.

Los signos matemáticos

De acuerdo con D' Amore et al. (2014), las expresiones "igual a", "menor que" y "mayor que", en matemáticas tienen sentido en el contexto de números o en el de medidas expresadas en unidades semejantes, empero la representación simbólica de estas relaciones no se objetiva fácilmente, pasar de la expresión "6 es mayor que 2" a la de "6 > 2" como se ve en el fragmento [55-59] no ha sido fácil, porque los niños no recuerdan <<¿de qué lado va la punta?>>. Al observar dificultades similares en una de las clases que estudiaban D' Amore et al. (2014 p. 97) decidieron organizar una discusión colectiva en la que los alumnos discutieron el uso de los signos pero utilizando objetos imaginables antes de la representación aritmética. En nuestro caso, para potenciar la matematización progresiva podrían utilizarse los pequeños [60] para reforzar la apropiación de los símbolos. En el siguiente fragmento[2] se observa la discusión sobre “de qué lado va la punta”.

[1] M: (Escribe en el pizarrón “ 50 ”) ¿Te lo imaginas?,¿Si te lo imaginas, Sofía? ¿Cuántas veces cabrá en la vara? No sería “grandotote”, ¿verdad? ¿Cómo sería? Enséñame con tus dedos, ¿cómo de qué tamaño te lo imaginas?

[2] Yuya: (Hace una seña con sus dedos) 

[3] M: Ah, y si hacemos “el pequeño de a siete” (escribe en el pizarrón “ $\boxed{7}$ ”) ¿Cuál crees que sería más grande?

[4] Yuya: Este (señala el $\boxed{7}$)

[5] Sofía: (Escribe en el pizarrón “<” y queda lo siguiente “ $\boxed{50}$ < $\boxed{7}$ ”)

[6] M: ¿Y por qué dicen “el pequeño de cincuenta”, Sofía?

[7] Sofía: Porque el cuadro significa que es pequeño.

[8] M: Ah, entonces dice “el pequeño de cincuenta”, ¿verdad? ¿Y acá qué dice entonces Yuya? (Señala el $\boxed{7}$)

[9] Yuya: “El pequeño de a siete”

[10] Lucas: Ah, que “el pequeño de a cincuenta” era más chico que “el pequeño de siete”.

[11] M: ¿Por qué?

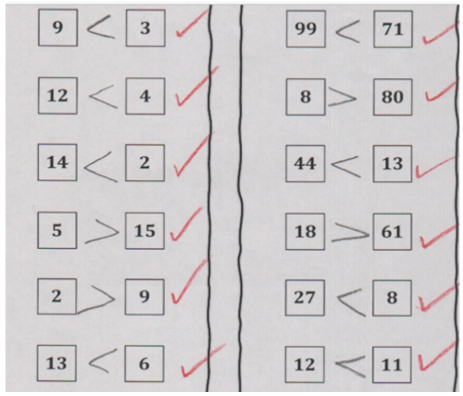
[12] Lucas: Porque la de cincuenta debe caber cincuenta veces y debe ser chiquita y la de siete un poco más grande.

Los alumnos señalan correctamente [10] que el pequeño de 50 es más chico que el pequeño de siete, dando significado al símbolo ‘>’, leerlo de izquierda a derecha [5], justificándose a partir de la representación del número en la casilla, como un pequeño [6-7] [8-9] dándole significación al cuadrito como parte de la representación de una fracción unitaria (pequeño).

[2] En las decisiones de la TEDE en el análisis retrospectivo, se incluye un espacio de 1 hora para ahondar en los signos de mayor que > menor que < e igual a =, utilizando estrategias específicas con el grupo, recordemos el bricolaje (Gravemeijer 2000) donde cada grupo tiene características particulares, con esto queremos decir que si el grupo lo necesita , es recomendable incluir en la agenda el uso de estos símbolos.

Figura 31

La consigna para las los alumnos fue; escribir > (mayor que) o < (menor que) según sea el caso.



En la representación de los pequeños hay una verbalización y descripción que lleva a nombrar esa acción de comparación y luego simbolizarla con los signos de menor que y mayor que, con una lectura de izquierda, tal cual es el proceso de lectura, que les resulta real.

Los números enteros

A partir del significado que colectivamente se les da, los números enteros se utilizan como símbolos que representan una acción, cuantificar las iteraciones de las fracciones unitarias (los pequeños), de ahí la importancia de hacerlo con solo una sub unidad de medida. En el siguiente fragmento puede verse la consigna que lanza el profesor, (se trata de representar la longitud de un tikje más un “pequeño de dos)

> S8. 1 h, 8 min.
>
> M: Oigan, a ver, fíjense, algo que les pasaba a los Acajay cuando empezaron a medir con los pequeños. Se dieron cuenta que no era tan buena idea combinarlos, lo mejor era usar,…un solo caimo, un solo pequeño o el tikje. Pero tenían que medir todo usando el mismo instrumento. La medida que les salga escríbala en el inciso B.
>
> Entonces volvemos a medir la tira, pero ya no se vale usar de varios verdad?, Dominic ¿tú cómo lo mediste? *-Un tikje, un pequeño de a seis y un pequeño de 4-*
>
> Fijensé Dominic midió un tikje, un pequeño de a seis y un pequeño de a 4. Uso tres diferentes, pero a los Acajay les gustaba usar el mismo instrumento, entonces usen el mismo y escriban su medida. En la B pongan la medida cuando se usa el mismo.

Las representaciones que usan los alumnos para dar respuesta a la consigna nos permiten ver diferentes niveles de matematización:

a) Dos alumnos (de 30) no resolvieron la tarea.
b) Siete alumnos usan una representación alfanumérica; uno de ellos utiliza la frase "3 veces el pequeño de 2" sin utilizar el código Acajay, no utiliza atajos para llegar a una simbolización más abstracta, pero seis alumnos ya utilizan la 'casilla' para representar los pequeños, hay un atajo en la interpretación del denominador.
c) Una alumna, Sofía usa la casilla para representar al "pequeño" de 4, su representación es $\boxed{4}$ "cabe", como sí la tira lo contuviera 6 veces, no toma en cuenta la iteración que se hace con el pequeño de 4.
d) Una alumna, Xiomnara, usa el código Acajay pero utiliza otra subunidad, representa del mismo modo el "pequeño" de a seis y las iteraciones de este, lo que evidencia una confusión con el uso de la casilla. $\boxed{8}\boxed{6}$
e) Siete alumnos combinan unidades, usan el tikje y una subunidad o dos subunidades distintas, por ejemplo 7 tijes y un p. $\boxed{5}$; 6 $\boxed{4}$ y cachito.
f) 12 alumnos miden, cuantifican y representan las tiras con el pequeño de dos y lo simbolizan $\boxed{2}$ 3 ; otros tres lo hacen con el pequeño de cuatro 6 $\boxed{4}$. Utilizan por completo los símbolos y dan una interpretación.

En términos generales, los alumnos normalizaron el símbolo $\square$ para representar los pequeños, doce alumnos fueron capaces de representar la medida de la tira con ambos símbolos, sin duda sus niveles de comprensión permitirán hacer ajustes a la actividad.

Por otra parte, al observar sus respuestas podríamos afirmar que existen condiciones para avanzar en la TEDE, pero recordemos que nuestra Trayectoria Hipotética de Aprendizaje que comparte principios con la EMR, se basa en la matematización como actividad humana donde todos tienen el derecho de vivenciarla. Por esta razón no es suficiente el número de alumnos que hasta el momento utilizan el código Acajay porque dicha representación debe ser normalizada por toda la clase.

Por otro lado, es notorio que casi todos los alumnos dan una respuesta para ellos es sensata (medir con los pequeños), no se quedan solo en la comparación, ya los identifican como herramientas para medir aunque les resulte difícil hacerlo con una sola unidad de medida. Empero, medir con una sola subunidad es una actividad que puede ser fuente de una discusión colectiva en la que se reflexionen las ventajas de hacerlo de una u otra manera, lo que permitiría pasar a otro nivel.

6.3.4 Vivir la medición, reinventar la iteración de la fracción unitaria.

Con base en lo observado creemos prudente que, para que surja la necesidad de encontrar una forma más económica y rápida de medir es necesario trabajar más actividades en las que los alumnos tengan que medir con la misma subunidad. Se trataría de continuar vivenciando la medición con “pequeños” usando material concreto, por ejemplo el oticaimo azul, el eticaimo verde, el uaticaimo amarillo, el auticaimo morado y el ambaticaimo naranja. Precisamente para seguir vivenciando la medición con una misma subunidad, como se puede observar en el siguiente fragmento, se planteó una nueva tarea con una tela similar a las tiras de los Acajay.

> M: …Algunos, por ejemplo, usaron su “pequeño de a dos”, (señala la medida de la tira en el pizarrón) la usaron tres veces, ¿verdad? Pero después lo tenían que apuntar y, de hecho, lo apuntaron de diferentes formas… no venía preparado, pero (busca algo) hice esta hoja (se las muestra) con las formas que ustedes usaron, ¿si alcanzan a ver? (se acerca a los alumnos para mostrarles la hoja), son las diferentes formas que usaron.

$$3\ \boxed{2};\ 6\ \boxed{4}\ ;\ 8\ \boxed{6}$$

Se organiza la discusión colectiva.

[1] M: Yuya, ¿qué “pequeño” tiene Lucas en la mano?... Lucas tiene el “pequeño de a dos” en la mano, ¿verdad? ¿Y cuántas veces lo ocupó?

[2] Aa: Tres.

[3] M: Tres veces, ¿verdad? O sea, ya es como si dijera…

[4] Lucas: …el tikje le midió dos veces…

[5] M: ¿Perdón?

[6] Lucas: En el tikje le midió dos veces.

[7] M: En ese cabe dos veces en el tije, ¿verdad?

[8] Lucas: Y aquí midió tres (señala la tira del pizarrón)

[9] M: Pero en esa tira…

[10] Lucas: Le dio tres veces

[11] M: Le dio tres veces

Así mismo se argumenta sobre medir con el pequeño de cuatro 6 $\boxed{4}$

[12] M: ¿Qué quiere decir Paola?

[13] Paola: Que el seis ocupó al “pequeño de a cuatro”.

[14] M: Seis, Xiomara, ¿qué quiere decir? ¿Qué “pequeños” son?

[15] Xiomara: ¿El de a cuatro?
[16] M: Ajá, ¿y cuántas veces lo repitió?

[17] Xiomara: Seis.

[18] M: ¿Eso es?

[19] Arón: (Afirma con la cabeza)

[20] M: ¿Sí? ¿A alguien no le queda claro?... Yuya, ¿entendemos?... ¿Sí?... ¿Sofía? ¿Román?

[21] Román: Sí.

[22] M: ¿Sí?... Oigan, fíjense que me emocioné mucho cuando vi que escribían los pequeños así, porque se parece mucho a cómo lo hacían los Acajay… se parece muchísimo.

Al medir con los pequeños y representar esas medidas, los alumnos generalizan herramientas matemáticas como el tikje (unidad de referencia), los pequeños (como subunidades fuera de la unidad) y los símbolos de las fracciones representadas por la casilla para el denominador. Estas herramientas los ayudan a organizar y encontrar la manera de medir la tira de los Acajay, pero también a normalizar el uso de los símbolos "mayor que" y "menor que" cuando comparan las medidas.

En el proceso de medir las tiras y comparar los tamaños se observa un cambio en los esquemas de representación, por ejemplo Lucas y Xiomara quienes no escribieron nada en la tarea B, ahora identifican y describen las regularidades que hay con la casilla y el número entero [4][6][8][10] [15-17], lo interpretan como la cuantificación de las iteraciones de las fracciones unitarias, también reconocen la relación implícita entre numerador/ denominador y el tikje (la vara) [4][6] es decir reconocen que en una vara caben dos pequeños de dos. Para Treffers (1987) lo anterior implica un proceso de reorganización de esquemas ya que se representa de manera simbólica la cantidad de las iteraciones del pequeño y se reconocen las regularidades como en el caso de Xiomara, quien en un primer momento ponía la casilla para ambas representaciones $\boxed{8}$ $\boxed{6}$, pero luego de la discusión acepta que la casilla es solo para los pequeños, con el ejemplo que Xiomara da $6\,\boxed{4}$ la clase combina e integra modelos para formular y generalizar un modelo matemático [22] similar al de los Acajay $3\,\boxed{2}$ $\frac{3}{\boxed{2}}$ que para ellos resulta sensato y razonable porque corresponde con sus reinvenciones, en palabras de los alumnos, *el número de arriba son las veces y el de abajo nos dice que "pequeño" fue.* En este modelo es posible que el numerador sea mayor al pequeño pues está representando sus iteraciones, pero al ser una subunidad que no es parte de la unidad tiene un nivel mayor de abstracción que posteriormente puede dar pie a la interpretación de la fracción convencional.

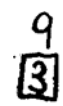
6.4 CUANTIFICAR LAS ITERACIONES DE UNA FRACCIÓN UNITARIA. LA DUPLA PERFECTA (DENOMINADOR Y NUMERADOR)

Debemos subrayar que la reinvención del sistema de notación de la fracción implica más que su representación porque está unida a la interpretación del denominador que da cuenta del tamaño de la subunidad y del numerador que representa las veces que fue iterada dicha subunidad, además se debe reflexionar sobre la situación en la que la longitud da cuenta una medida menor, mayor o igual de la unidad de referencia. De aquí la importancia, de volver a analizar el discurso de los alumnos sobre el quehacer de medir el tamaño de las tiras. En el siguiente fragmento se pide representar "nueve veces el pequeño de a tres", la discusión se da a partir de dos respuestas.

Figura 32

Reinvenciones de Azucena y Noemí, que gestan la discusión colectiva, y surgiera la necesidad de mirar al denominador.

Azucena 

Noemí 

[1] Paola: Es que el nueve debe de estar…

[2] Aos: (Comienzan a hablar al mismo tiempo) Al revés…al revés…

[3] M: Noemí, ¿cómo debería de haberlo escrito? Fíjate Azucena, vamos a poner atención, dicen que lo escribiste al revés, vamos a ver porqué.

[4] Noemí: (Pasa al pizarrón) Es que lo puso al revés, porque decía…nueve y tres "pequeños".

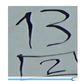
[12] Aa: Tres veces el "pequeño de a nueve".

[13] Horacio: Tres veces el "pequeño de a nueve".

[14] M: Tú escribiste, tres veces el "pequeño de a nueve" (dirigiéndose a Azucena) pero lo que yo te había pedido era nueve veces el "pequeño de a tres". Vamos a hacer otro intento, ¿sale? (le da el plumón a Azucena)

Como se puede apreciar, los alumnos asumen que el denominador dentro de la casilla expresar que el pequeño es la unidad de medida que se utilizó y al número sobre la casilla (9) ya no lo ven como un ente separado del esquema de representación sino como un complemento que da cuenta de la cantidad de veces que se itera la unidad. Se puede decir entonces que hay un reacomodo de los objetos mentales que les permite formular y utilizar la notación convencional de la fracción, esto es, que la subunidad (3) se iteró nueve veces, 9 veces 1/ 3. Sobre este respecto la interpretación de Luis Huberto y Donatello después de la discusión se distancia del uso de material físico para allegarse el recurso de la imaginación, que evoca una abstracción más elevada en la que se generaliza la iteración sin restricciones.

[1] Luis Humberto: Trece veces el "pequeño de a dos".
[2] Donatello: (Escribe en el pizarrón)



[3] M: Trece veces, ¿se imaginan de qué tamaño sería?... ¿Trece veces el "pequeño de a dos"?

Ya hemos mencionado que las reinvenciones de los alumnos en los diferentes niveles de matematización frecuentemente pueden interpretarse como anticipadoras de procedimientos más formales que anuncian nuevas reinvenciones como las fracciones impropias. Para los alumnos se itera la subunidad (denominador) que puede ser mayor que la unidad de referencia, este es un proceso que puede apoyar a la comprensión de una fracción mayor a la unidad.

Volvamos al quehacer de medir usando la nueva notación, en esta forma de razonamiento el numerador es verbo, acción de iterar, por su parte el denominador representa el tamaño de la subunidad, entonces los alumnos interpretan la fracción como medidas que dan cuenta de una longitud y que están compuestas por dos números.

M: No venía preparado, pero les traje una hoja, para ver si conocen el código akahai (toma unas hojas) …Entonces fíjense, aquí está escrito en letra (señala una hoja) y ustedes lo tiene que escribir en código Acajay.

En esta actividad la representación e interpretación objetiva el quehacer, la primera parte se focalizó en representar tres veces el pequeño de dos, seis veces el pequeño de cuatro, y ocho veces el pequeño de seis en un nivel de matematización más formal (medidas fraccionarias construidas en las sesiones anteriores), en la segunda parte de la actividad se les pidió su interpretación de la representación en la que incluyen iteraciones iguales, menores y mayores a la unidad de referencia. La intención era gestar la siguiente reinvención cuando tiene el mismo número de iteraciones que el pequeño (reflexión sobre el denominador como longitud de la subunidad y como el número de iteraciones necesarias para igualar la unidad de referencia).

$$\frac{2}{\boxed{2}}$$

La mayoría de la clase hace la representación formal de las fracciones de acuerdo al código Acajay, un quehacer de acción, representación, interpretación y reflexión hacía la siguiente reinvención.

6.4.1 Las fracciones como medida. Comparar la medida con el tamaño de la unidad

Hasta el momento se ha visto que en el quehacer de medir con las unidades fraccionarias ("pequeños") se vive un ciclo: medir, cuantificar, comparar, comunicar, representar, imaginar, hacer, interpretar; pero cada vez con un nivel más alto de abstracción en el que está permitido regresar a los niveles anteriores para tomarlos como referencia, pero no siempre se inicia con lo mismo, se puede iniciar por ejemplo con actividades como medir, cuantificar, hacer, representar, comparar. Con las acciones de este quehacer, que siempre incluye la reflexión, verbalización y justificación, en la agenda el proceso se puede dar de la siguiente manera.

Justo lo necesario. El numerador y el denominador son iguales

A partir de medir y comparar, "se busca establecer que el denominador de la fracción indique tanto el tamaño de la subunidad como el número de veces que tendría que ser iterada para producir una longitud igual a la longitud de la unidad de referencia" (Delgado y Cortina, 2021). Por esta razón, en el contexto de la narrativa, se pide el apoyo de la clase para solucionar el problema que se les presentó a los Acajay.

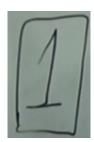
[1] M: ¿Qué habrán hecho los Acajay cuando se les perdía la vara?
[2] Lupita: Los unimos.
[3] M: ¿Cómo vamos a unirlos?... Luis Humberto tiene una idea, ¿qué podemos hacer si no hay varas? Y la vara que tenemos…
[4] Ao: Se rompió…
[5] M: Está rota, ¿qué habrán hecho los acajay cuándo se les rompía su vara?... Vamos a escuchar a Luis Humberto.

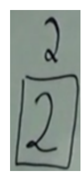
[6] Luis Humberto: (Muestra sus “pequeños”) Medían dos veces el “pequeño de a dos” para…
[7] M: ¿quién cree que si les paso un popote ahorita puede hacer una nueva vara?
[8] Aos: (Varios levantan la mano y hablan al mismo tiempo) Yo…Yo…hacer una vara.
[9] M: Vamos a escuchar a Dominic, ¿qué fue lo que hiciste?
[10] Dominic: Lo puse dos veces y lo que sobró lo corté.
[11] M: Muy bien, ¿por qué? ¿Qué sabías? ¿qué la vara cuánto iba medir? ¿cuánto tenía que medir?
[12] Dominic: Dos “pequeños”.

La conversación versa sobre cómo hacer el tikje, los alumnos proponen utilizar como unidades de medida los pequeños normalizados, para producir las tiras con medidas [6, 10 12]. En la respuesta de Lupita [2] lo razonable es unir los pequeños (nivel de matematización referencial), por su parte Luis Humberto señala que dos pequeños forman la misma medida que la vara, Dominic propone sobreponer la subunidad y hacer las iteraciones (matematización vertical) porque se requieren dos pequeños de dos y cortar lo que sobra, al hacer la comparación aparece la necesidad del símbolo igual (aunque aun no se haya objetivado).

Figura 33

Representaciones de la unidad de referencia (vara) con diferente nivel de matematización

Esteban 

Leticia 

La interpretación de Esteban y la producción de Leticia nos permite identificar dos abstracciones. A partir de la respuesta de Dominic Esteban deduce que dos pequeños de dos forman un tikje que puede representarse con la casilla, así da significado al denominador. Cuando Leticia interpreta el pequeño de la casilla como la integración de dos pequeños de dos, evidencia un nivel más alto de matematización, ya no recurre a la separación de los pequeños $\boxed{2}$ $\boxed{2}$, sino que registra la fracción como una medida compuesta por dos números.

[13] M: Fíjense, fíjate Dominic lo que escribió Leticia, ¿qué dice ahí?
[14] Dominic: Que dos veces cabe el “pequeño de a dos”.
[15] M: ¿Qué mide dos veces el “pequeño de a dos”?
[16] Leticia: El tije.
[17] M: Entonces, ¿qué es más grande? ¿el tije o dos veces el “pequeño de a dos”?
[18] Aos: (Hablan al mismo tiempo) El tije…Los dos…Igual…

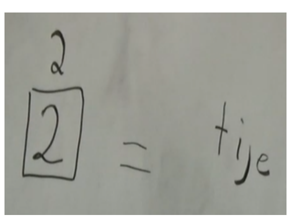
Los alumnos deducen que al sobreponer dos veces el pequeño de dos, se tendrá la misma longitud que una vara, de manera entonces que con esta actividad conjeturamos que los alumnos puede hacer la reinvención y reconocer que el número de abajo en la casilla (denominador) puede decir también cuántas iteraciones se necesitan para tener 'justo' una vara.

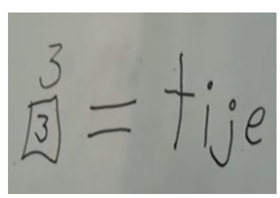
> [19] M: Vamos a pedirle a Jaime que nos explique… ¿Por qué dices que es del mismo tamaño?
> [20] Jaime: (Pasa al frente) Porque un tikje mide lo mismo que dos "pequeños de a dos".
> [21] M: ¿Un tikje mide lo mismo que dos "pequeños de a dos"?
> [22] Aos: Si…
> [23] M: Oigan, ¿y cómo se escribe es lo mismo? (señala el pizarrón)
> [24] Ao: Es igual…
> [25] Leticia: (Escribe en el pizarrón)

En el fragmento anterior se observa un cambio en los esquemas de los alumnos, pasan de un nivel referencial que describe los 'modelos de' para esquematizar un nuevo sistema de notación, empero, la nueva tarea demanda el reacomodo de dichos objetos mentales porque exige representar la abstracción de: "dos pequeños de dos son igual a un tikje" [20-22]. Ese desajuste les demanda revisar sus esquemas ya normalizados para revisar cuál puede apoyarlos en esa nueva invención, por ello la conversación colectiva enmarcada en la comparación de dos pequeños y la vara permitió la generalización del sistema de notación para las medidas fraccionarias que pueden producir justamente la unidad.

Figura 34

Reinvención del uso del símbolo igual para representar la igualdad en longitud (Leticia,2/2 Fabiola 3/3) .

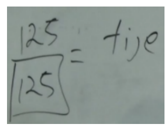




Al poner en relación las formulaciones que hicieron los alumnos en la discusión de las representaciones se observa una reinvención común (Leticia, Fabiola, Paola, Lupita, Daniela) que refiere al uso del símbolo igual. Al continuar con la comparación de medidas fraccionarias y el tikje, como se puede ver en el siguiente fragmento, se involucra una vez más la ‘imaginación’ al dejar de lado las medidas físicas de los pequeños de cuatro, de cinco, de seis...

[26] M: Imagínense, ¿te lo imaginas Azucena? El “pequeño de a 125”
[27] Azucena: (Afirma con la cabeza)
[28] M: ¿Cuántas veces cabría en tu vara un “pequeño de a 125”?
[29] Azucena: Sería chiquitito (hace una seña con los dedos)
[30] M: Sería chiquitito (también hace una seña con los dedos) ¿y cuántos necesitaríamos para hacer la vara?
[31]Aa: (Levanta la mano) 125…

Fig. 9 uso de la imaginación para realizar la comparación de la subunidad con la unidad de referencia.



En el proceso de matematización vertical después del uso frecuente de los pequeños (con material físico) como medida fraccionaria [28-31] comienza a funcionar como “modelo para” y aparecen las argumentaciones lógicas sobre las relaciones numéricas como “125 veces el pequeño de 125 es igual a un tikje”.

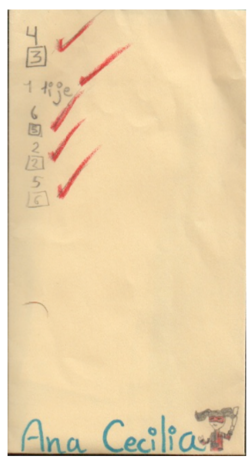
En la figura 33 se ilustra que al principio las medidas están relacionadas con las subunidades físicas, con la medición conectada a cada uno de los pequeños, después estas interpretaciones se esquematizan de tal manera que la fracción aparece como medida y el denominador (en la casilla) representa el número de iteraciones. También logran establecer la relación utilizando el símbolo igual y finalmente llegan a la expresión numérica (fig. 34) en la que el numerador indica la longitud del pequeño y al mismo tiempo las veces que se debe iterar para producir una longitud igual a la unidad de referencia (tikje).

Comparación de las medidas fraccionarias con el tamaño de la unidad

En el proceso de matematización vertical se busca generalizar y formalizar las reinvenciones de los alumnos, lo que implica conectar varias situaciones al reconocer características similares que permiten clasificarlas dentro de un determinado tipo (Santamaria, 2006). Cuando los alumnos comparan las medidas fraccionarias con el tamaño de la unidad, reconocen la doble interpretación del denominador, como representación del tamaño de pequeño y como número de veces que se necesita iterar para cubrir la unidad, para ello se apoyan en el sistema de notación establecido por la clase.

Este proceso de matematización vertical puede considerarse como una actividad de organización que permite a los alumnos estructurar sus reinvenciones para que sirvan de puente con otras, por ejemplo una vez que se han familiarizado con las fracciones como medidas que dan cuenta de un tamaño, también les permiten reflexionar si la longitud que representan es menor, mayor o igual que la longitud de la vara, esta reflexión toma como base aquello que el denominador dice de la subunidad, pero también de las iteraciones que se requieren para ser cubrir justo una vara del mismo tamaño.

Para que los alumnos usen los pequeños para hacer tiras de medidas diferentes y las comparen con la unidad (Tikje), se les entregan tiras de diferente tamaño para que las midan con los pequeños para medirlas y corten lo que sobra, estas tiras se depositan en un sobre, en el cual también se escriben las medidas.



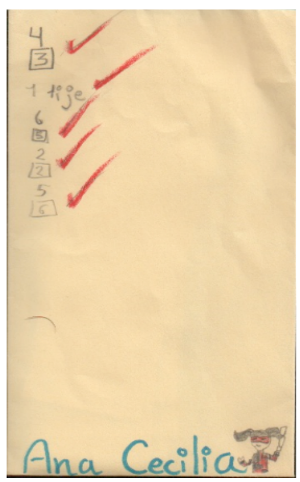
Iteración de la subunidad. Mayor, menor o igual a la unidad.

En el proceso de matematización vertical se busca generalizar y formalizar las reinvenciones de los alumnos, lo que implica conectar varias situaciones reconociendo características similares que permiten que se las clasifique dentro de un determinado tipo (Santamaria, 2006). Entonces, al mismo tiempo que los alumnos comparan las medidas fraccionarias con el tamaño de la unidad, reconocen la doble interpretación del denominador, como representación del pequeño y como el número de veces que itera para cubrir la unidad, para ello se apoyan en el sistema de notación establecido por la clase.

Esta actividad organiza y estructura sus reinvenciones que sirven como puente para otras nuevas, por ejemplo una vez que los alumnos se han familiarizado con las fracciones como medidas que dan cuenta de un tamaño, son también usadas para reflexionar sobre si la longitud es menor mayor o igual que la vara, lo hacen al razonar que el denominador da cuenta de la subunidad pero también de las iteraciones que se requieren para hacer justo una vara del mismo tamaño. Para identificar los pequeños se les entregan tiras de diferente tamaño para que usen sus pequeños, las midan y corten lo que sobra, estas tiras se depositan en un sobre, en el cual también se escriben las medidas.

Figura 35

El quehacer se objetiva en las tiras



En la medición y comparación hay alumnos que identifican la regularidad que expresa el denominador, como indicador del pequeño que se necesita y las iteraciones justas para completar la vara, con esta acción los alumnos se adelantan en el tránsito de identificar cuál medida fraccionaria es mayor a la unidad y por qué.

[1] M: ¿Cómo sabes que ese es el de a tres?

[2] Xiomara: (Mide el "pequeño" con el tikje)

[3] M: Ah, porque cabe tres veces en el tikje, ¿verdad? Entonces, así puedo recordar cuál era el “pequeño” de a tres… ya que sabes cuál era el “pequeño” de a tres (toma el tikje) ahora, ¿qué vas a hacer? (sostiene la tira de papel y el tikje en la misma posición)

[4] Xiomara: (Mide la tira con el popote verde)

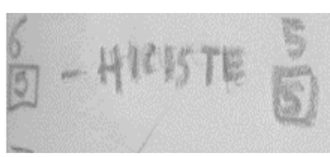
[5] M: Daniela, ¿lo medirías? Uno… (toma el popote verde) tendría que medir cuatro de estos, ¿verdad?... cuatro veces este, y hasta donde mida y ahí le… (señala con los dedos)

[6] Aos: Cortamos

Al comparar y construir las tiras, los alumnos deducen las medidas con base en las iteraciones de las subunidades (fig. 35), las tiras no eran de un tamaño exacto, lo que no permitía construir tiras con un número exacto de iteraciones, por ejemplo en la primer tira deducen que se necesita un pequeño de a tres y que deben hacer cuatro iteraciones pero sobra un cachito que cortan, por ello reportan la medida con cuatro iteraciones de tres pequeños. En esta actividad se activan diferentes niveles de matematización para dar solución al problema de medir y producir la tira.

Parte de la clase reconoce que es más adecuado el pequeño de tres, otros no lo reconocen y optan por usar su vara para poner la subunidad y contar las iteraciones de esta manera se dan cuenta que necesitan tres, el pequeño de tres para hacer su tira. Una vez que construyen sus tiras la mayoría usa el sistema de notación aceptado colectivamente.

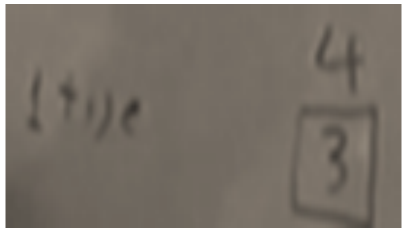
En el caso de la representación de Hernán puede verse que, al igual que sus compañeros cortó exactamente donde llegaban las iteraciones del pequeño de cinco, pero en su representación registró cinco pequeños de seis. Azucena, Denisse, Fernanda y Román midieron con iteraciones exactas pero en la discusión colectiva aceptaron las representaciones acordadas por la clase. Ana, Javier, Jaime, Mario, Noemi tuvieron alguna dificultades con la representación, especialmente con con los pequeños de seis, la tira midió cinco veces el pequeño de cinco y ellos anotaron seis pequeños de cinco.

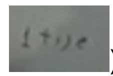
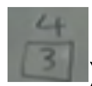


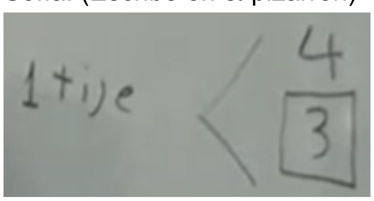
Las acciones de los alumnos, como se puede ver en el siguiente fragmento, fueron puestas a discusión en el colectivo, la argumentación de sus reinvenciones generó otra actividad, la comparación de las medidas fraccionarias con la longitud de la tira para determinar cuándo una fracción es mayor, menor o igual que la unidad.

Figura 36

Actividad sostenida en la interpretación del denominador, como las iteraciones que se requieren para igualar la longitud de la unidad.

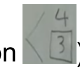
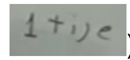
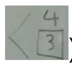


[1] … ¿Cuál tira nos habrá salido más larga? (señala en el pizarrón)
[2] Aos: (Algunos levantan la mano)
[3] M: Fíjense, ¿una medía…? (señala en el pizarrón )
[4] Aa: Un tije…
[5] M: ¿Y la otra medía…? (señala en el pizarrón )
[6] Aos: Cuatro veces el “pequeño” de a tres.
[7] M:¿tú qué piensas Yuya? ¿Cuatro veces el “pequeño” de a tres habrá salido más largo o más corto que la de un tije?... ¿Lupita ya sabe?
[8] Sofía: (Escribe en el pizarrón)



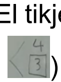
Yuya no contesta la pregunta pero la situación la invita a participar como observadora y corroborar su respuesta, Sofía verbaliza y representa la comparación con la notación establecida, el símbolo “menor que”, establece que un tikje es igual a tres veces el pequeño de tres (Fig. 8) y resulta razonable que la longitud sea menor a cuatro pequeños de tres.

En la respuesta de Sofía se observan los atajos en su proceso ya que utiliza sus reinvenciones normalizadas de comparación para usar un sistema de notación que economiza la representación. Esta notación promovió el análisis de las regularidades del denominador que indican que subunidad usar y cuántas iteraciones se necesitan para hacer justo un tikje, lo que es evidencia de un cambio de esquemas que va de recurrir a un nivel de matematización general a uno cada vez más formal (usar los símbolos mayor que >, menor que< e igual =) que, de acuerdo con la EMR es posible transitar. De esta manera los alumnos comparten la representación de las medidas fraccionarias como una invención propia que les permitió solucionar una problemática “real”

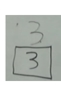
> **Sofía:** El tikje es más pequeño, porque este (señala en el pizarrón ) ocupa más espacio, si aquí diría tres (escribe “3” en el pizarrón) sería igual que el tije, aquí es más pequeño porque aquí se le aumenta uno (escribe en el pizarrón “1” a un lado de )
>
> **Jacinto:** Este es más pequeño (señala en el pizarrón ) que este (señala en el pizarrón ) porque sí diría tres veces el “pequeño” de a tres, sería igual, del mismo tamaño que el tije, pero no, se le aumenta otro…son cuatro

La explicación de Sofía y Jacinto da cuenta de una comparación entre dos medidas de longitud y se aprecia que identifican la relación entre denominador y numerador. Para ellos el primero indica el tamaño de la subunidad y el segundo las veces que fue iterado. Así, se construye un nuevo acuerdo en la clase, que las subunidades pueden ser iteradas sin restricciones (cuatro veces el pequeño de tres), es decir las iteraciones pueden sobrepasar la longitud de la unidad de referencia y en un movimiento reversible convierten el tikje a las subunidades porque reconocen que el denominador también da cuenta de las iteraciones que se necesitan para ser una longitud de la misma medida que el tikje. En su mente es imaginable y coherente hacer la comparación de igualdad entre el tikje y tres iteraciones del pequeño de tres (que nombramos como atajo en la matematización vertical).

Otro aspecto de la reinvención está centrado en el uso de los símbolos mayor y menor que, en dicha representación respetan la lectura de derecha a izquierda y mencionan que el tikje es más pequeño y registran el símbolo adecuado.

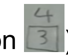
> **Jaime**: El tikje terminaría siendo lo mismo si ponemos el tres en vez del cuatro (señala en el pizarrón ) y sería lo mismo, pero aquí le agregaron uno y termina siendo un tije y medio.
> M: ¿Entendimos?... A mí no me queda muy claro, entonces… (pasa al pizarrón) a ver si así es como lo están explicando, porque como que a mí no me queda muy claro

Jaime también hace reinvenciones como las de sus compañeros, pero en su primera verbalización menciona que la iteración del pequeño representa un medio aunque su representación es correcta

M: Entonces, creo que lo que están diciendo es…que si hubiéramos hecho una que fuera (escribe en el pizarrón que midiera tres veces el “pequeño” de a tres, sería…

Aos: Lo mismo.

Este razonamiento consensuado por la clase genera otro razonamiento en relación con la primera explicación de Jaime, Paola intenta explicar por qué Jaime lo expresó de esa forma ("un tikje y medio").

> **Paola:** Es que, como este no es tres veces el "pequeño" de a tres (señala en el pizarrón 
>
>) y es cuatro veces el "pequeño" de a tres, por eso no da exacto, pero, si pusiéramos tres veces el "pequeño" de a tres en vez de cuatro veces el "pequeño" de a tres si nos daría exacto…

En la respuesta de Paola se evidencia su recorrido en el proceso de matematización porque basa su reinvención en la exactitud que es una de las condiciones que la clase estableció en la primera práctica para el quehacer de medir.

Considerar su reinvención a partir de sus objetos mentales con un trabajo previo, donde se prueba una y otra vez hasta que se convierte en un hábito permite que tal reinvención se convierta en un puente para otras, es el caso de la respuesta de Xiomara, cuando el docente pregunta ¿cuál es tu "pequeño" de a tres? .... (el verde) y, ¿cómo sabes que es un "pequeño" de a tres?, se aprecia que ella regresa a reinvenciones pasadas, esto es una característica de la EMR, un tránsito libre en la matematización.

> [1] Xiomara: Porque cuando lo mido en el tikje, tiene que caber tres veces.
> [2] M: Entonces, si lo usas tres veces, ¿te queda más largo o más corto que el tije?
> [3] Xiomara: Queda igual.
> [4] M: Te queda igual, pero no lo usaste tres veces, ¿lo usaste…?
> [5] Xiomara: Cuatro.

Como se puede observar hay una iteración más de la subunidad que se conecta con la respuesta de Paola, 'al no quedar exacto el tikje'. Paola se refiere a que es más grande más grande, mientras que Xiomara afirma "que se pasó de la unidad", ante la falta de exactitud también se da una reinvención primitiva de la iteración de la unidad de referencia, no son ni una ni dos iteraciones de la unidad. Parte de estas reinvenciones se pueden articular en la explicación de Ana Corina quien subraya la reinvención del tamaño de la medida fraccionaria que es mayor que la unidad e insuficiente para completar otra unidad.

> Ana Corina: Bueno es que, en el tikje cabe tres veces, entonces el "pequeño" de a tres, cabe tres veces en el tikje, pero cuatro veces ya sería más grande, o sea, ya no es del tamaño del tikje, pero si ponemos tres veces si va a caber.

Ana Corina menciona el tamaño porque objetiviza la acción comparar y verbalizar de sus compañeros (es más más grande por que tiene una iteración más de la subunidad), ella lo nombra como tamaño y como advierte que tiene una iteración más que la unidad deduce que es de mayor tamaño.

6.4.2 El entramado hacia la convencionalidad. La fracción

Hasta donde hemos analizado, podemos ver una articulación natural de reinvenciones que conducen a la formalidad de un sistema de notación para representar la fracción como medida en las que se itera una subunidad para dar cuenta de un tamaño (Delgado y Cortina, 2020).

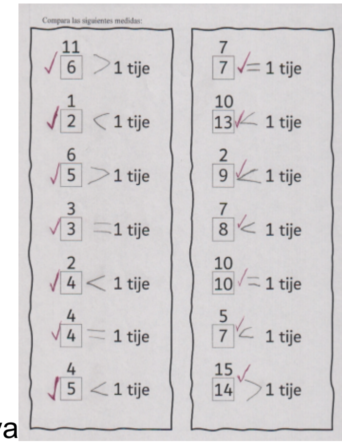
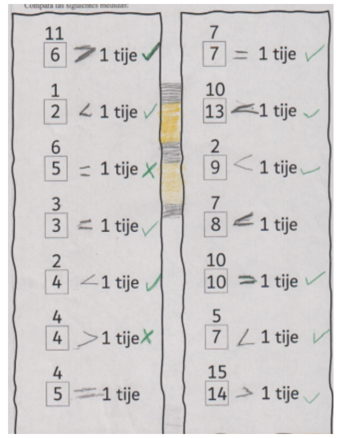
Al inicio de la práctica la clase había generalizado el uso de la casilla para identificar al denominador, representan con números enteros las iteraciones en la parte superior de la casilla. En estas notaciones, que fueron posibles por las reinvenciones (que consideramos pilares en la matematización), el denominador da cuenta de la subunidad que está fuera de la unidad y de la cantidad necesaria de iteraciones para igualar la longitud de la unidad.

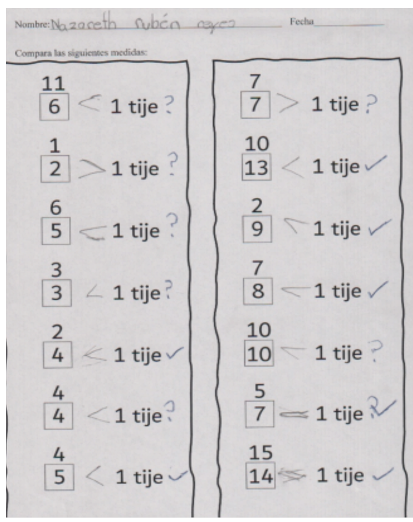
Conforme avanza la TEDE las conversaciones colectivas son más dinámicas, sobre todo por los atajos que utilizan los alumnos, por ejemplo la relación de orden inverso les es razonable, comprenden que cuando el denominador es más grande será menor la subunidad. También comprenden que si las iteraciones se registran con números enteros representan una acción, es decir el conteo de estas iteraciones y que cuando ambos son iguales la longitud es igual al tikje.

Con las ideas anteriores se posibilita la comparación entre las medidas fraccionarias y la unidad, lo que a su vez potencializa la comprensión de que, si la iteración es menor al denominador la longitud será insuficiente para igualar a la unidad, ejemplo de ello es que en la última conversación colectiva se evidencia que la mayoría de alumnos fue capaz de hacer una comparación correctamente y con facilidad. Todas estas reinvenciones nos muestran que este recorrido es asequible y adecuado para llegar a la convencionalidad de la fracción. En la siguiente figura se puede visualizar el inicio de la convencionalidad, los razonamientos que los alumnos plasmaron dan cuenta de la factibilidad de la comunicación y de la economía de la inscripción.

Figura 37

*Compara las siguientes cantidades utilizando los símbolos de **>** (“mayor que”) **<** (“menor que”) y **=** (“igual”), según sea el caso.*

Yuya  Adamary  Román



Si bien en esta actividad no todas las comparaciones fueron correctas, sí evidencian un camino favorable, de los 30 alumnos del grupo siete presentan alguna inconsistencia, pero la mayoría de la clase lo hace con facilidad y correctamente como Yuya. Con 15 iteraciones del pequeño de 14 han normalizado que si denominador y numerador son iguales las longitudes son iguales y que si es menor el denominador será insuficiente para igualar a la unidad (tikje).

6.5. EPÍLOGO. LOS PEQUEÑOS, LAS FRACCIONES

Al embarcarse en el análisis didáctico del concepto,
Hans Freudenthal dijo:
"Espero no ahogarme en tanta riqueza fenomenológica".

En estas dos sesiones, la narrativa sobre los Acajay sirvió como ruta de navegación para que los alumnos llegaran a interpretar la fracción como una medida de longitud. La propuesta basada en dicha narrativa y documentada a modo de bitácora, muestra lo útil que es cuando se desea apoyar a los estudiantes para que desarrollen formas consistentes de razonar acerca de la relación de orden inverso de las fracciones unitarias (Thompson y Saldanha, 2003) y sobre el tamaño relativo de fracciones propias e impropias que metafóricamente sirven como remos que conducen el razonamiento de un enfoque comparador que ve a la fracción como medida de longitud y al final las interpreta como medida en la que se itera una subunidad.

Siguiendo con la metáfora, al llegar a tierra firme, al concretizarse la reinvención de la fracción como medida, podemos explorar otros paisajes, como la comparación de fracciones no unitarias cuando se identifica cuál es mayor, menor o igual a la unidad de referencia. En estas nuevas exploraciones se vivencia la necesidad de potencializar un razonamiento que permita comprender que el denominador de la fracción indica tanto el tamaño de la subunidad como el número de veces que requiere ser iterada para producir una longitud igual a la de la unidad de referencia y comprender también que el numerador representa dichas iteraciones.

En las actividades de comparación de fracciones (sin utilizar material físico) los alumnos reflexionan sobre el orden inverso y su valor relativo y ponen en práctica reinvenciones que potencializan nuevas concepciones. Si en la TEDE se sostiene que entre mayor número de iteraciones la longitud de la subunidad es menor, ahora el razonamiento de los alumnos les dice cuántas iteraciones del pequeño son necesarias para igualarla con la unidad (tikje), su razonamiento es más sólido porque conjuntan lo que representan los pequeños y las iteraciones necesarias para igualar a la unidad, esto se evidencia en las reinvenciones de Carmen, Mario y Donatello quienes, por ejemplo; Carmen argumenta que, 9/ $\boxed{10}$ *es menor que 10/* $\boxed{9}$ *porque 9/*$\boxed{10}$ *sería menor de un tije, pero con el 9 /* $\boxed{9}$ *sería igual que un tije.*

$$\overset{9}{\boxed{10}} < \overset{10}{\boxed{9}}$$

(el denominador y numerador)

En su razonamiento comparador implícitamente utilizan fracciones propias e impropias. Por su parte Donatello evidencia un nivel de matematización más alto porque utiliza la representación de fracciones unitarias para hacer la iteración y el conteo, él manifiesta que es mayor por uno; la medida[3] 9/10 es menor que 10/9 porque si fuera 10/10 sería un tikje, también si fuera 9/9 sería un tije, pero el 10/9 se pasa por uno, el de 9/10 le falta uno. También Mario encamina su razonamiento en esa misma lógica, dice que la medida de 9/10 es menor que la medida de 10/9 porque 19/9 se pasa por uno y 10/9 es más grande que un tije 10/9.

En un primer momento estas representaciones consolidan la idea de que diez subunidades de 9 es una medida mayor a la unidad de referencia pero menor a dos tijkes, idea que se apoya en la interpretación de la representación gráfica (imaginación) sin apoyo físico de los pequeños (subunidades), también se apoya en la interpretación de la notación convencional de la fracción donde el número de abajo representa la subunidad y el de arriba el número de veces que fue iterada. Jacinto utiliza una argumentación más sofisticada, *9/10 es más pequeña que 10/9 porque 9/10 no forma un tije y 10/9 es más grande porque sí forma un tije. Cómo se puede apreciar,* utiliza la iteración como modo de comparación entre las dos medidas.

La argumentación anterior es posible cuando se reconoce que 10/9 representa una longitud mayor a 9/10 porque es más que la unidad de referencia (9/9) y la segunda (9/10) resulta insuficiente para completar la unidad. En ese mismo sentido se orienta la explicación de Xiomara quien expresa, *9/10 es menor que un tije porque le falta un pequeño para ser 10 pequeños de a diez. El 10/9 se pasa de la unidad por un cachito pequeño. Así que el 9/10 es menor que 10/9.* La explicación de Xiomara orienta a otras explicaciones, como la de Diana quien menciona, *10/9 es mayor y 9/10 es menor por que 10/9 es uno más que la unidad y 9/10 es uno menos.*

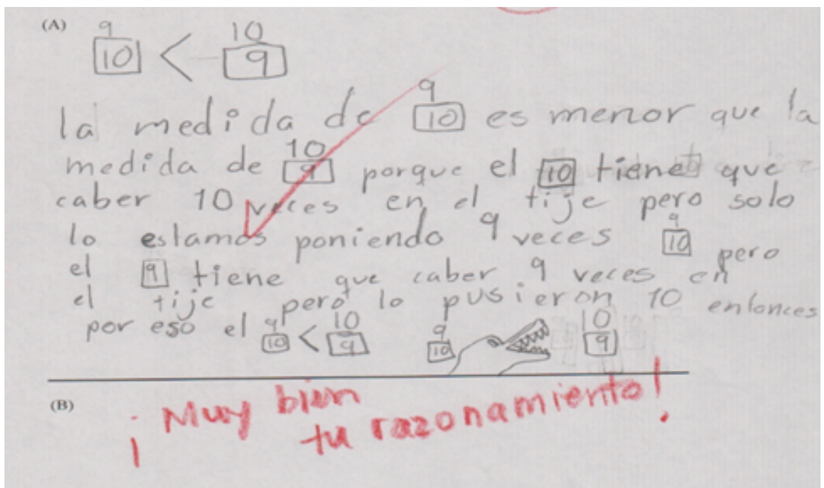
Como se observa, los alumnos son capaces de comparar correcta y fácilmente el tamaño de muchas medidas fraccionarias utilizando como referencia la unidad para llegar

[3] En este texto aún no se utiliza la representación convencional, empero por practicidad del texto se omite la casilla, en espera de la comprensión del contexto, que hablamos de pequeños (subunidades).

a la representación convencional. Para ello ponen de manifiesto las reinvenciones y herramientas creadas durante el quehacer de medir como comparar e interpretar las fracciones como medidas que dan cuenta una longitud e incluso pueden ser mayores que la unidad. La bitácora que elaboramos también registra las experiencias de los alumnos como Acajay, específicamente cómo se dio el razonamiento (fig. 1) y cómo los valida la comunidad.

Figura 38

Comparación de nueve pequeños de diez y diez pequeños de nueve.



Esta argumentación fue posible gracias a las reinvenciones (que consideramos pilares en la matematización) que permiten al alumno comprender que el denominador da cuenta de la subunidad que están fuera de la unidad, de la exactitud al momento de medir, y de la comparación respecto de la la unidad de referencia. También se le da otra interpretación al denominador, que da cuenta de las subunidad necesarias para igualar la longitud de la unidad.

En estos momentos de la TEDE las conversaciones colectivas son más dinámicas por los atajos que los alumnos utilizan y que se aprecian en su argumentaciones, un ejemplo de ello es que la relación de orden inverso es totalmente razonable porque cuando el denominador es mayor saben que la subunidad es menor y que las iteraciones se representan con número enteros para simbolizar una acción (el conteo de las iteraciones). Esos razonamientos se combinan con otros como, cuando numerador y denominador son iguales la medida es igual a la unidad. Esta idea les permite hacer comparaciones de medidas fraccionarias con cierta facilidad y potencializa el razonamiento de que, si el número de iteraciones (numerador) es menor al denominador la medida será insuficiente para igualar a la unidad, pero si el numerador es mayor al denominador la medida será mayor que la unidad.

En las respuestas que los alumnos dieron en la última conversación realizada, se evidencia que la mayoría hace la comparación con facilidad y correctamente. Todas estas reinvenciones nos permiten afirmar que el recorrido de enseñanza experimentado es asequible para el profesor y adecuado para llegar a visualizar la convencionalidad de la fracción, en palabras de Visnovska y Cortina (2018), es apropiado para "desarrollar un conocimiento más general que puedan aplicar flexiblemente en situaciones nuevas" (p. 3).

En el sentido de la afirmación anterior, en el siguiente fragmento se puede observar la manera como Ana Corina parte de la fracción como medida para realizar iteraciones de una medida fraccionaria mayor que la unidad de referencia, se aprecia que ella considera las fracciones como medidas de longitud y no como elementos de una simple comparación con la unidad de referencia.

[1] Ana Corina: (Señalando al pizarrón) ¡Siete veces el pequeño de a seis!
[2] M: ¡Ajá!
[3] Ana Corina: Y después poner la otra tira y hasta ahí cortarle.
[4] M: ¡Ah! Y después ponemos una, la ponemos juntito y la usamos de guía, ¿verdad?
[5] Aos: ¡Sí!
[6] M: Entonces, ¿ya no hay que volver a medir?
[7] Ana Corina: ¡Todos!
[8] M: Ya no hay que volver a medir todos, ¿verdad?, ¿les parece esa buena idea de Ana Corina?
[9] Aos: ¡Sí!

De esta manera los razonamientos de los alumnos proporcionan información sobre su aprendizaje en relación con las conjeturas de la TEDE y las discusiones colectivas juegan un papel importante en la configuración de las formas en que los estudiantes interpretan las fracciones.

CONCLUSIONES

Vosotros en lo tierno y profundo del futuro
aprendisteis de nuevo a leer y escribir
recordad siempre:
no hay nada más hermoso que ser frágil
en un mundo infinito.

Juan F. Rivero, "Las hogueras azules" (2020)

Para iniciar es necesario recordar tres conjeturas que dan sustento a la tesis. La EMR como perspectiva teórica para dar seguimiento a la actividad matemática de los estudiantes (participar en el contexto social de su comunidad áulica). La segunda se centra en cuestiones del diseño instruccional de nuestra THA, en las formas de ayudar a los estudiantes a razonar sobre las representaciones de fracciones como números que representan magnitudes, medidas. La tercera, el experimento de enseñanza, como apoyo a la instrumentación y como necesidad de documentar el análisis de la agenda de la THA para avanzar en el recorrido.

Lo principal que se ha visualizado es en su conjunto nuestra TEDE. El objetivo principal era probar la efectividad de una propuesta de enseñanza basada en la EMR que busca apoyar la mejora de la enseñanza y por ende mejorar el aprendizaje de las fracciones como números genuinos que dan cuenta de un medida. El aprendizaje en el contexto de la instrucción no puede explicarse adecuadamente en términos de uno u otro, es decir los procesos de enseñanza y aprendizaje coexisten. Por ello la importancia de dar ideas concluyentes acerca de la efectividad de la propuesta, al especificar las prácticas matemáticas y el aprendizaje progresivo en colectivo e individual dentro de estas prácticas.

Diálogo con nuestra TEDE

En general, los resultados validan la efectividad de la TEDE basada en la EMR, para ayudar a los alumnos a razonar sobre las representaciones de fracciones como números que representan magnitudes. Empero resulta pertinente puntualizar los aciertos de nuestra propuesta, que en un primer momento se anunció como una alternativa a la forma en que tradicionalmente se ha realizado la enseñanza de las fracciones, se trataba de abandonar la enseñanza de las fracciones como una estructura de los racionales para plantear un diseño instruccional en el que se les viera como un conocimiento útil. A partir del seguimiento realizado se ratificó que la TEDE es un recurso teórico para los docentes y la agenda es lo replicable, lo que permitirá a los profesores prever cómo podría progresar el aprendizaje de los alumnos y tomar decisiones sobre cómo y cuándo hacerlo.

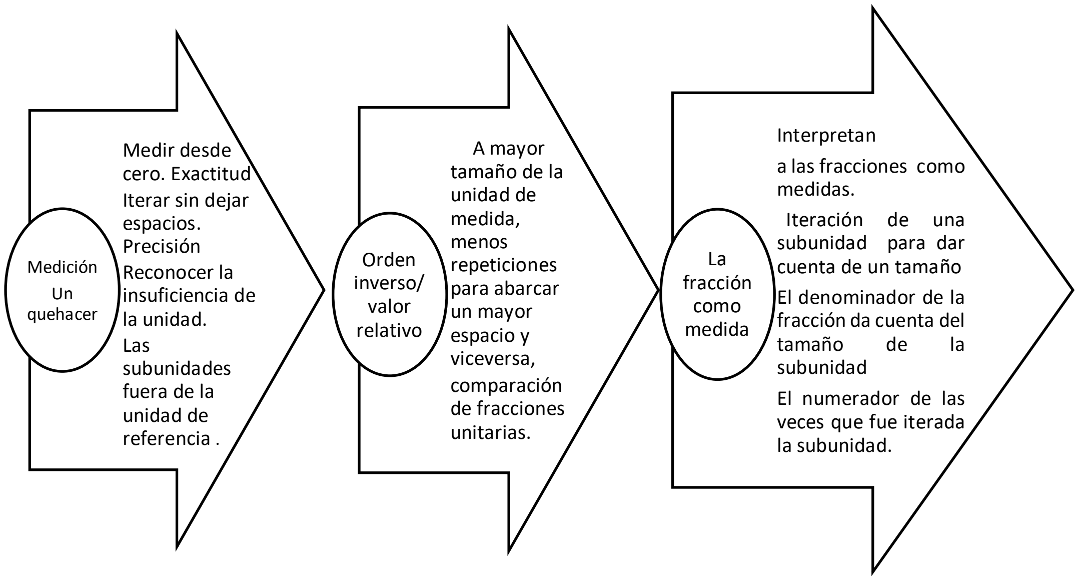
La propuesta se basó en la fracción como comparador (Freudenthal, 1983) y el referente principal fue la iteración de la longitud de una fracción unitaria, mediante ello fue posible que los alumnos concibieran las fracciones como números genuinos (práctica 1, 2 y 3) es decir utilizaron las fracciones como números que pueden representar una medida y que se pueden contabilizar sin restricciones, también a partir de las representaciones de dos medidas pudieron comparar si dos fracciones eran iguales o una mayor que la otra.

Es importante puntualizar que la situación planteada en la problemática permitió identificar las concepciones inadecuadas acerca de las fracciones que tenían los alumnos, si bien identificaban el nombre de los números fraccionarios, no fueron capaces de identificar cuando una fracción era mayor que otra, pues prevalecían ideas sobre los números naturales (a mayor número, mayor cantidad) que les obstaculizan las comparaciones. Después de la instrumentación de la TEDE específicamente en la práctica tres, se hizo evidente la transformación de sus concepciones, en esta práctica la mayoría de los alumnos fue capaz de identificar que 1/2 es mayor que 1/4 o que ½ es igual a 2/4 es igual y que 3/2 es mayor que 2/2. Estos avances de la TEDE se ilustran en la figura 39.

En sus reinvenciones los alumnos reconocen en los números fraccionarios propiedades numéricas que ya identificaban en los números enteros, por ejemplo que pueden usarse para dar cuenta de los tamaños diversos de magnitudes (longitudes) y que como cantidades se pueden agregar sin restricciones (Freudenthal, 1983). Estas reinvenciones se daban al mismo tiempo que se desvanecía la cualidad de numerosidad para los números fraccionarios, esto permitió la comparación razonable de los números fraccionarios e identificar si uno de ellos justo, insuficiente o más grande que la unidad de referencia, también fueron capaces de justificar sus comparaciones.

Figura 39

Aprendizajes que se gestaron con la TEDE.



En nuestra TEDE se propuso una progresión de objetivos de aprendizaje que se basan en la EMR, fundamentalmente en el principio de matematización progresiva (niveles) y el de reinvención guiada. Para lograr tales objetivos se plantearon situaciones en las que los alumnos vivenciaron y experimentaron un proceso similar por el cual las matemáticas han sido inventadas (Freudenthal, 1991).

Las situaciones estuvieron basadas en la narrativa de los Acajay donde el contexto tangible permitía pensar a “los pequeños como subunidades”, lo que permitió, bajo el principio de realidad, experimentar la necesidad de medir sin instrumentos modernos, partir de una reinvención de los alumnos y medir longitudes. De esta manera se les pudo conducir por el viaje de la experiencia y ayudarles a guiar la reinvención de ideas matemáticas ligadas a la fracción como medida a partir de ideas claves como la medición como quehacer, la iteración de las subunidades, el tamaño, el orden inverso, el valor relativo, las fracciones unitarias; el uso de herramientas, símbolos para su comparación y representación que les brindaran un acercamiento a la convencionalidad de la fracción.

Bajo el principio de interactividad la TEDE permitió la orquestación de conversaciones colectivas en el espacio áulico, como medio didáctico para el surgimiento de las reinvenciones sin importar su nivel de matematización, pues en la perspectiva de la

EMR es importante que todos los alumnos avancen. Mediante la TEDE se gestó un acceso democrático a las matemáticas, el diálogo colectivo y las discusiones en el aula, fueron cada vez más constantes y espontáneas entre los propios alumnos (práctica 3), de esta manera llegaron a puntos de encuentro que consolidaron sus reinvenciones e iniciaron vivenciar la medición (iteración de la fracción unitaria), el uso de un código para el denominador, el uso de los signos matemáticos (> < =), representar la acción de cuantificar las iteraciones de las fracciones unitarias mediante número enteros y comparar la medida de la fracción con el tamaño de la unidad.

En este recorrido, el docente- investigador fungió como guía del proceso y a partir del análisis sobre cómo los estudiantes razonaron, tomaba la decisión de plantear o no otra actividad para validar sus reinvenciones y dar paso a la siguiente práctica social, pues recordemos que en la matematización progresiva se puede transitar entre un nivel y otro. También a partir del análisis recurrente fue necesario planificar las discusiones sobre las reinvenciones de los alumnos (prácticas matemáticas) y tomar decisiones sobre las siguientes tareas y objetivos de aprendizaje.

Recapitulando, los alumnos construyeron la noción de la fracción unitaria como número que da cuenta del tamaño de cierto atributo (tamaño relativo) tomando en cuenta el orden inverso (a mayor denominador menor medida) la comprendieron como algo separado de la unidad de referencia que cuantifica y representa un tamaño mayor, igual o menor a la unidad. Es así que los alumnos pudieron considerar a las fracciones como números que pueden dar sentido cuantitativo a múltiples fenómenos.

La TEDE permitió más que un desarrollo instruccional, colocar en el centro el razonamiento matemático el aprendizaje vivenciado como un evento social que implica la participación de toda la comunidad áulica, como una práctica colectiva, un proceso de negociación que dio sentido a las explicaciones de todos . Al verbalizar sus razonamientos matemáticos, se apoyó a la democratización de la reinvención de la representación de la fracción como medida y determinar la desigualdad entre fracciones unitarias mediante la comparación.

Toma de decisión y medios didácticos

El horizonte antes descrito confirma a la TEDE como un apoyo al quehacer educativo del docente, un recurso teórico práctico para la toma de decisiones en la enseñanza, es decir, no solo ayuda a poner la atención en los procedimientos matemáticos de los alumnos que indican que hubo “un aprendizaje”, sino que es un apoyo sostenido para darse cuenta de ese razonamiento matemático que se vincula con el desarrollo de las capacidades docentes y hacerlos más eficaces en lograr sus propósitos educativos. También ayuda para que los docentes vean al medio didáctico como una perspectiva más amplia a la actividad de enseñar un contenido y desarrollen capacidades como:

- La orquestación de discusiones colectivas que permiten analizar sus explicaciones que deben aludir a las realidad.
- Comprender el concepto de fracción impropia como número que puede cuantificar algo mayor a la unidad.
- Evaluar los razonamientos matemáticos con las pautas de la THA y tomar decisiones para poder progresar en la enseñanza.

Desde esta óptica, el Experimento de Diseño colaboró para madurar nuestra TEDE ya que en el equipo de investigación se configuraron discusiones para en las que se consolidó una comprensión amplia de la EMR y su potencial para la enseñanza de las fracciones como números genuinos, incluso en otras áreas de las matemáticas. Se conjeturó también la manera como se desarrollaba el razonamiento matemático de los alumnos y cómo ciertas destrezas matemáticas (la organización de conversaciones colectivas a través de establecer normas de participación) y ajustes en el uso de los medios y las herramientas didácticas apoyarían a los docentes en la mejora de su práctica educativa.

Alcances y las Limitaciones del estudio

El análisis retrospectivo nos permite reconocer la utilidad de la TEDE para mejorar significativamente la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones, para entender las fracciones impropias como números que, de forma razonable, pueden servir para cuantificar el tamaño de algo que es mayor a la unidad y también les posibilitó entender a la fracción como algo que está fuera de la unidad, que es independiente de ella.

La TEDE probó ser un buen recurso no sólo para ayudar a los alumnos en la comprensión del concepto de fracción, sino para apoyar a las maestras y maestros en el desarrollo de sus capacidades de orquestación de un aprendizaje social, ya que brinda bases sólidas (como las conversaciones colectivas) para brindar a los alumnos las mismas posibilidades de interactuar y expresar sus razonamientos, ello facilita a los demás integrantes de la comunidad áulica entender y evaluar las aportaciones, tomando los posibles errores como una oportunidad de aprendizaje colectivo y transitar a un aprendizaje individual, lo que conlleva un avance en la matematización vertical.

En contraste, el mismo análisis retrospectivo nos alerta sobre algunas limitaciones del estudio. Al ser una propuesta nueva basada en el enfoque comparador (Freudenthal, 1983) aplicada desde la EMR y con una metodología de Experimento de Diseño, para muchos especialistas podría resultar difícil aceptar los efectos positivos, sobre todo porque podrían considerar que es un camino demasiado largo para llegar a la interpretación de la fracción y además de difícil la la replicabilidad de la THA.

Empero, en nuestra opinión es una oportunidad de mostrar una articulación apropiada entre la EMR, el experimento de enseñanza y la THA, para gestionar el aprendizaje de las matemáticas. Recordemos que al ser un proceso conducido por conjeturas se considera un proceso susceptible de revisión y mejora (Gravemeijer, 1994) para una mejor replicabilidad de la agenda y para garantizar la validez en los subsecuentes experimentos de enseñanza.

Recomendaciones a la TEDE

Como ya se mencionó, la trayectoria no puede ser una colección inamovible de tareas, sino que deben reflejar aquello que los estudiantes hacen en el salón de clases, en este sentido nuestra primera sugerencia se focaliza en la práctica de medir. Sí bien es importante que los alumnos vivencien el quehacer de medir, de acuerdo a la EMR debe tratarse que los alumnos experimenten la necesidad, relevancia e importancia de medir en su vida diaria, partiendo de un interés genuino, como un quehacer social que existe fuera de las paredes del aula.

Bajo esta lógica, lo que sugerimos es reducir las actividades relacionadas con el quehacer de medir, rescatando tres actividades clave para vivenciar la importancia de dicho quehacer: la interpretación de las medidas como resultado de iterar; la actividad de comunicar medidas y la medición como un quehacer. Resaltamos que fueron importantes las actividades; “Bandera”, “Cortinas” y la de “comunicar la estatura”, pero sugerimos dedicar menos tiempo a las actividades de medir con partes del cuerpo y cuidar el uso de las medidas con partes del cuerpo (cuartas y jemes) para evitar posibles confusiones en la precisión de las medidas.

En relación a los medios didácticos para procurar el aprendizaje de las fracciones, creemos pertinente sostener el uso de la narrativa, pero acompañarla con la utilización de más material físico además de las subunidades hechas con tiras de papel, también creemos pertinente utilizar material gráfico para la contextualización de la narrativa por ejemplo la unidad de referencia (Vara de Kia), las canastas para realizar la medición e incentivar la imaginación a partir de referentes visuales, las pirámides a escala podrían ser uno de esos referentes.

Asimismo, creemos necesario potencializar el diálogo en las conversaciones colectivas desde la primera práctica, cuidando la calidad de las discusiones como eventos sociales en los que los alumnos participen más sustentandose en normas de la cultura del aula como: escuchar; es válido equivocarse y; participar en un ambiente de respeto.

En síntesis la TEDE probó ser una ruta alternativa con resultados alentadores para apoyar a los estudiantes a razonar sobre las representaciones de fracciones como medidas para dar cuenta de una longitud. De acuerdo con la trayectoria estas representaciones cada vez serán más generales y darán oportunidad a robustecer la TEDE como teoría local y posteriormente hacerse un recurso teórico para los docentes.

Bibliografía

Aguayo, L. (2019). Seminario matemática educativa, cultura y sociedad. *" La enseñanza de las matemáticas en la educación básica: un reto de la reforma educativa".* CICATA. México. 17 de octubre.

Alsina, C. (2007). *Si Enrique VIII tuvo 6 esposas, ¿cuántas tuvo Enrique IV? El realismo en educación matemática y sus implicaciones docentes.* Revista Iberoamericana de Educación, (43) Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura Madrid, España pp. 85-101.

Alsina, A. (2009). El aprendizaje realista: una contribución de la investigación en Educación Matemática a la formación del profesorado. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIII (pp. 119- 127). Santander: SEIEM

Alsina, À. (2011). *Educación matemática en contexto: de 3 a 6 años.* Cuadernos de Educación: Barcelona.

Ávila, A. Block, D y Carvajal, A. (2003). Investigaciones sobre educación preescolar y primaria. En Ángel D. López y Mota (Coord.) Saberes Científicos, Humanísticos y Tecnológicos: procesos de enseñanza y aprendizaje. Tomo 1. El campo de la educación matemática, 1993-2001. Educación en ciencias naturales .Pp 49-170 México: COMIE, SEP, CESU .

Ávila, A. (2015). La investigación en educación matemática en México: una mirada a 40 años de trabajo en el campo. *XIV CIAEM-IACME, México*

Ávila, A. (2019). *Significados, representaciones y lenguaje: Las fracciones en tres generaciones de libros de texto para primaria.* Educación Matemática, vol. 31. (2), 22-60 DOI: 10.24844/EM3102.02

Backhoff, E., Andrade, E., Sánchez, A., Peón, M. y Bouzas, A. (2006). El aprendizaje del español y las matemáticas en la educación básica en México: Sexto de primaria y tercero de secundaria. México: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

Ball D.L., Thames, M.H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59* (5), 389-407.

Barab, S., y Squire, K. (2004). Design-based research: Putting a stake in the ground. Journal of the Learning Sciences, 13(1), 1-14.

Behr, M., Lesh, R., Post, T. y Silver, E. (1983). Rational number concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), Acquisition of Mathematics Concepts and Processes (pp. 91-125). Nueva York: Academic Press

Behr, M. J.; Harel, G.; Post, T. y Lesh, R. (1993): Rational Numbers: toward a Semantic Analysis. Emphasis on the Operator Construct. En T. P. Carpenter, E. Fennema y T. A. Romberg: Rational /umbers. An integration of Research. Hillsdale New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Publishers

Block, D. (1987). *Estudio didáctico sobre el aprendizaje y la enseñanza de las fracciones en la escuela primaria* (Tesis de maestría). Departamento de Investigaciones Educativas, CINVESTAV-IPN. México.

Block y Solares (2001). *Las fracciones y la división en la escuela primaria: análisis didáctico de un vínculo.* Educación matemática 13 (2), 5-30.

Bressan, A; Zolkower, B Gallego, M.F. (2004). *La educación matemática realista. Principios en que se sustenta.* Escuela de invierno en Didáctica de la Matemática.

Bressan, A., Gallegos M.F., Pérez S. y Zolkower B. (2016). *Educación Matemática Realista. Bases Teóricas.* GPDM. Bariloche Argentina.

Brousseau, G. (1986). *La relation didactique : le milieu, Actes de la IVème Ecole d'Eté de didactique des mathématiques.* IREM . (Paris) 7. 54-68.

Brousseau, G. (1997), *Theory of Didactical Situations in Mathematics*, Dordrecht, Países Bajos, Kluwer.

Brown, Ann. (1992). Design Experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. *Journal of the Learning Sciences*, *2*(2), 141-178.

Butto, Z. C. (2013). El aprendizaje de fracciones en educación primaria: una propuesta de enseñanza en dos ambientes*. Horizontes Pedagógicos, 15* (1), 33-45. ISSN: 0123-8264 .

Charalambous, C. y Pitta-Pantazi, D. (2005). Revisando un modelo teórico sobre fracciones: implicaciones para la docencia y la investigación. En HL Chick y JL Vincent

(Vol.Eds.), *Actas de la 29a conferencia del Grupo Internacional de Psicología de la Educación Matemática: Vol. 2* , (págs. 233-240). Universidad de Melbourne

Chevallard, Y. (1982). Sur l'ingénierie didactique. Texto preparado para la Segunda Escuela de Verano de Didáctica de las Matemáticas (Órleans. Fr) tomado de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Sur_l_ingA_c_nierie_didactique_-_YC_-_1982.pdf (5 de septiembre de 2020)

Chevallard Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. Recherches en didactique des Mathématiques, *Vol.* 19(2), pp. 221-226.

Cobb, P. and Steffe, L. P. (1983). The constructivist researcher as teacher and model builder. Journal for Research in Mathematics Education, 14(1.), 83-95.

Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. EnAnthony Kelly y Richard Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 307-333). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P., Stephan M., Mcclain K., y Gravemeijer K. (2001). Participating in classroom mathematical practices. *Journal of the Learning Sciences,10* (1-2), 113-164.

Cobb, Paul, Confrey, Jere, DiSessa, Andrea, Lehrer, Richard y Schauble, Leona. (2003). Design experiment in Educational Research. *Educational Researcher*, *32*(1), 9-13.

Cobb, P., (2004) Putting Philosophy to Work: Coping With Multiple TheoreticalPerspectives p. 42-43

Cobb, P. y Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes, en Kelly, A.E., Lesh, R.A. y Baek, J.Y. (eds.). *Handbook of design research methods in education. Innovations in Science, Technology, Engineering and Mathematics Learning and Teaching*, 68-95.

Cobb, P., Visnovska, J., y Zhao, Q. (2008). Learning from and adapting the theory of realistic mathematics education. *Education et Didactique, 2*(1), 55-73.

Collins, A. (1992). Toward a design science of education. In E. Lagemann & L. Shulman (Eds.), *Issues in education research: problems and possibilities* (pp. 15-22). San Francisco: Jossey-Bass.

Collins, A. (2010) Design Experiments. Northwestern University, Evanston, IL, USA. Elsevier Ltd. All rights reserved.

Comisión Nacional de Excelencia en Educación (1983). Una nación en riesgo: El imperativo de la reforma educativa. Un informe a la nación y Secretaría de Educación, Departamento de Educación de los Estados Unidos.

Confrey, J. y Lachance, A. (2000). Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design. En Anthony Kelly y Richard Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 231–266). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Confrey, J. (2006). The evolution of design studies as methodology. En R. Keith Sawyer (Ed.), The Cambridge Handbook of the Learning Sciences (pp. 135-152). New York, NY: Cambridge University Press.

Cortina (2006) *Instructional Design in Ratio.* Vanderbilt University

Cortina, J. L. (2006a). Las mediciones de la calidad del aprendizaje matemático en México: ¿Qué nos devela la prueba PISA 2003 y cómo podemos responder? Educación Matemática, 18 (1), 161-176.

Cortina, J. L., y Zúñiga, C. (2008). La comparación relativa de tamaños: Un punto de partida alternativo y viable para la enseñanza de las fracciones. Educación Matemática, 20(2), 5-23

Cortina, J. L., Cardoso, E. y Zúñiga, C. (2012). *El significado cuantitativo que tienen las fracciones para estudiantes mexicanos de 6º. de primaria. Revista Electrónica de Investigación Educativa, 14*(1), 70-85. Recuperado de http://redie.uabc.mx/vol14no1/contenido-cortinacardozo.html

Cortina, J. L., Zúñiga, C. y Visnovska, J.(2013*)* La equipartición como obstáculo didáctico en la enseñanza de las fracciones.*Educación Matemática.25* (2),729.

Cortina, J. L. (2014). Investigar las fracciones: experiencias inspiradas en la metodología de los experimentos de diseño. *Educación Matemática*, 270-287. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40540854014

Cortina, J.L. (2020). On the problem of characterizing fractions for instructional design purposes or Characterizing fractions for instructional design purposes.pp.1- 15.

Davydov, VV (1991). Sobre el origen objetivo del concepto de fracciones. Concentrarse en Problemas de aprendizaje en matemáticas, 13 (1), 13-64

Delgado I. y Cortina J. (2021). En La Educación Matemática Realista. Naturaleza y posibles aportes en México. Formación y Profesión Docente. Entre preinscripciones, teorías y prácticas docentes. Pp. 325-342.

Design-Based Research Collective. (2003). Design-Based Research: An Emerging Paradigm for Educational Inquiry. Educational Researcher, 32(1), 5–8.

D´ Amore B., Fandiño M., Lori M. (2014). *La Semiótica en la didáctica de la matemática*. Bogotá, Colombia: Cooperativa editorial magisterio.

Dewey, J. (1900). The school and society. Chicago: University of Chicago Press.

ENLACE 2006 – 2007: http://enlace.sep.gob.mx (15 de febrero de 2008)

Escolano, R. y Gairín, J.M. (2005) Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 1, 17-35.

Fandiño Pinilla M.I. (2009). Las fracciones. Aspectos conceptuales y didácticos. Bogotà: Magisterio. Prefacio de Athanasios Gagatsis. Prefacio a la edición en idioma español de Carlos Eduardo Vasco Uribe. Páginas 222. ISBN: 978-958-20-0970-0.

Fandiño M. (2011). *Las Fracciones: Aspectos conceptuales y didácticos.* Bogotá, Colombia: Cooperativa editorial magisterio.

Fandiño Pinilla M. I. (2015). Las fracciones: aspectos conceptuales y didácticos. Capitulo 2 del libro: L. A. Hernández Rebollar, J. A. Juárez López, J. Slisko Ignjatov (Eds.) (2015). Tendencias en la educación matemática basada en la investigación. Volumen 1. Puebla (México): BUAP Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (Facultad de Ciencias Físico Matemáticas). Pagg. 25-38. ISBN 978-607-525-002-1.

Fazio y Siegler. (2010). *Enseñanza de las Fracciones. International Academy Education, 22.*

Figueras, O. (1988). Dificultades de aprendizaje en dos modelos de enseñanza de los racionales (Tesis doctoral). México: Cinvestav-Matemática Educativa.

Flores, P. y Morcote, O. (2001). *Algunos elementos del conocimiento profesional en la planeación de clases de futuros profesores de secundaria (un caso: Las fracciones).* Universidad de Sevilla. En Actas del Encuentro de Matemáticos Andaluces, España.

Flores, R. (2010). ***Significados asociados a la noción de fracción en la escuela secundaria****. (*Tesis de Maestría). Centro de Investigación de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México .

Flores, R. y Martínez, G., (2009)*. **Una Construcción de Significado de la Operatividad de los Números Fraccionarios.*** *Memoria Electrónica del X Congreso Nacional de Investigación Educativa,* México.

Freudenthal, H. (1973): Mathematics as an Educational Task. Dordrecht: Kluwer Academic.

Freudenthal H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: Reidel.* [Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas] Traducción de Luis Puig (2001). En Varios Autores. Textos seleccionados de Educación Matemática. Ciudad de México: Cinvestav.

Freudenthal H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Freudenthal H. (2002). University of Utrecht Revisiting Mathematics Education China Lectures. Academic Publishers New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow. Kluwer.

Gallego M. F. y Pérez S. (2013). Aportes «Realistas» a la Educación Matemática. Una propuesta para repensar la enseñanza de la matemática desde el enfoque didáctico de la educación matemática realista. Desde la Patagonia difundiendo saberes - Vol. 10 (16). ISSN 1668-8848.

Gairín S. y Muñoz J.M. (2005). El número racional positivo en la práctica educativa: estudio de una propuesta editorial. IX SIMPOSIO SEIEM. Departamento de Matemáticas. Universidad de Zaragoza.

García. J. M. (2011). La matemática moderna en la España de principios del siglo XX. Contexto histórico. Epsilón - Revista de Educación Matemática. Vol. 28(2), nº 78, pp. 39-51.

Godino J. D. (2010). Perspectiva de la Didáctica de las Matemáticas como Disciplina Tecnocientífica. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. (Disponible en, http://www.ugr.es/local/jgodino)

Godino J. D. (2010). Perspectiva de la Didáctica de las Matemáticas como Disciplina Tecnocientífica. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. (Disponible en, http://www.ugr.es/local/jgodino)

Gómez P. y Cañadas M. (2011). La fenomenología en la formación de profesores de matemáticas. *Voces y Silencios: Revista Latinoamericana de Educación, Vol. 2, No. especial, 78-89 ISSN: 2215-8421* 12

Gonzalez J. (2001). John Dewey y la pedagogía progresista. El legado Pedagógico del siglo XX para la escuela del siglo XXI. Barcelona: Graò,15---39.ISBN:8478272569

Gravemeijer, K. (1994). Desarrollo educativo e investigación del desarrollo en la educación matemática. *Revista de Investigación en Educación Matemática*, *25* (5), 443-471. Recuperado de https://doi.org/10.2307/749485

Gravemeijer, K., Cobb, P., Bowers, J. & Whitenack, J. (2000). Symbolizing, modeling, and instructional design. In P. Cobb, E. Yackel & K. McClain (Eds.). *Communicating and Symbolizing in Mathematics,* 225-273.

Gravemejer, K. & Terwel, J. (2000). Hans Freudenthal: A mathematician on didactics and curriculum theory. *Journal of Curriculum Studies 32(6)*: 777-796.

Gravemeijer (2004) Local Instruction Theories as Means of Support for Teachersin Reform. Mathematics Education, Mathematical Thinking and Learning,6(2).

Gravemeijer, K., y Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, y N. Nieveen (Eds.), Educational design research: The design, development and evaluation of programs, processes and products (pp. 45-85). New York: Routledge

Gutiérrez D. (2005). Fundamentos teóricos para el estado de las estrategias cognitivas y metacognitivas, universidad pedagógica de Durango. Pp. 21 28.

Hernández, Fernández y Baptista. (2010). *Metodología de Investigación*. Mc Grall Hill education.

Imvinkelried, M. (2020). Las concepciones de los futuros docentes sobre la noción de fracción. (Tesis de MDE), Universidad Nacional del Litoral Facultad de Humanidades y Ciencias Maestría en Didáctica Específica, Argentina.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. 2015. Plan Nacional para la Evaluación de los aprendizajes 2015. *Resultados Nacionales de Logro.pdf*. Informe de resultados, México. Recuperado de: http://planea.sep.gob.mx/content/ba/docs/2015/estadisticas/Resultados_Nacionales_Logro.pdf

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (2018) Planea. Resultados nacionales.Sexto de Irimaria. Lenguaje y Comunicación . Matemáticas. Ciudad de México, Autor.

Kelly, Anthony y Lesh, Richard. (2000). *Handbook of research design in mathematics and science education*. New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kieren T. (1980). *The rational number constructs its elements and mechanisms*. University of Alberta.

Kline M. (1976). El fracaso de la Matemática Moderna. Madrid. Edición En Castellano, Siglo XXI Editores S. A.

Lagemann, E. (2002). *An elusive science: The troubling history of education research*. Chicago: University of Chicago Press.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional Reasoning. In J. Hierbert & M. Behr (Eds.), Number concepts and operations in the middle grades (pp. 93-117). Reston, Virginia: Lawrence Erlbaum Associates.

Llinares, S. y Sánchez, M. (1997). *Fracciones. La relación parte-todo*. Madrid: Editorial Síntesis. S/p.

Lizarde E., Hernándéz A. y Reyes M. (2019).Ruta crítica en la construcción del MTSK. Meta-análisis del análisis didáctico de los docentes en formación inicial. XV CIAEM-IACME. 445-452.

Maya F. (2011). *El razonamiento multiplicativo en jóvenes universitarios del área Económico Administrativa* (Tesis Doctorado). Universidad Pedagógica Nacional. México D.F.

Malet, O. 2010. Los significados de la fracción: una perspectiva fenomenológica*. Revista mendomática, 21.*

Martínez, M., Da Valle, N., Zolkower, B, y Bressan, A. (2002). La relevancia de los contextos en la Resolución de Problemas de Matemática: una experiencia para docentes y sus capacitadores. Paradigma, XXIII (1); 59-94.

Martínez, A. M., Cobos, J. C., y Torres, E. (2015). Matematización y modelización: experiencias y saberes. Una propuesta de aula. Espiral. Revista de Docencia e Investigación, 5(2), 9-22

McKenney, S., & Reeves, T. (2012). *Conducting Educational Design Research: What it is, How we do it, and Why*. London: Routledge.

McKenney, S., y Reeves, T. (2013). Educational design research. En *Handbook of research on educational communications and technology* (pp. 131-140). Springer, New York, NY.

Merriam Webster. (Dakota del Norte). Cultura. En el diccionario Merriam-Webster.com. Recuperado el 9 de septiembre de 2019 de https://www.merriam-webster.com/dictionary/culture

Molina, M., Castro, E., Molina, J., y Castro, E. (2011). Un Acercamiento a la Investigación de Diseño a través de los Experimentos de Enseñanza. *Enseñanza de las ciencias*, *29*(1), 75–88.

Morcote, O. y Flores, P. (2001). Algunos elementos del conocimiento profesional en la planeación de clases de futuros profesores de secundaria (un caso: las fracciones).

Novoa, A. (2009). Para una formación de profesores construida dentro de la profesión. Universidad de Lisboa. Revista de Educación 350. Pp. 203-218

Parra, C. et-al. 1997. Didáctica de las Matemáticas. Aportes y reflexiones. 5 ed. Argentina; Paidos Educador. Pp 51- 75.

Peña, P. (2011), *Resignificación del algoritmo para operar aditivamente con fracciones en un contexto escolar*. Instituto Politécnico Nacional de México, México. Recuperado de www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/maestria/pena_2011.pdf

Perera, P. y Valdemoros, M. (2007). *Propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones en cuarto grado de educación primaria.* (Tesis de doctorado). Centro de Investigación de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Perera, P y Valdemoros, M. (2009). *Enseñanza experimental de las fracciones en cuarto grado. Educación matemática, 21 (1), 29-61.*

Pérez, L. (2008). Las fracciones como facilitadoras o limitantes del aprendizaje matemático, tesis de maestría en la Universidad Pedagógica Nacional. México, DF.

PISA 2003 (2004). Evaluación Pisa 2003. Resumen de los primeros resultados en España. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia

Pisa 2018 https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA2018_CN_MEX_Spanish.pdf

Pochulu M. y Rodríguez M. (2015). *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos.* Argentina.

Puig, L. 1997 Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, 61-94. Barcelona: Horsori / ICE. ISBN 84-85840-65-8.

Pruzzo, V. (2012). Las fracciones: ¿Problemas de aprendizaje o problemas de la enseñanza? *Revista Pilques. Sección Psicopedagógica, 14* (8)

Ramírez, M. y Block, D. (2009). La razón y la fracción: un vínculo difícil en las matemáticas escolares*. Educación Matemática, 21* (1).

Real, R. (2017). Teaching Model of Fractions for the Early Grades of Mexican Primary Education. *Journal of Mathematics Education, 10* (2), 95-111.

Ríos, G .(2007). Una ingeniería didáctica aplicada sobre fracciones. *Omnia,13* (2), 120-157.

Rodríguez, R., Palmenia de la C. y Olfos, R. (2018). Instrumentos consistentes para la enseñanza de fracciones; en 4o. grado. *Revista electrónica de investigación educativa, 20* (1), 48-58. DOI: 10.24320/redie.2018.20.1.1358

Ruiz, A. (2020). Conversaciones en el confinamiento. “Narrativas e investigación. La narrativa de la solidaridad en jóvenes de la periferia urbana”. UPN Colombia. Zacatecas, México. 14demayo.

Ruíz, S. (2008). Problemas Actuales de la Enseñanza Aprendizaje de las Matemáticas. *Revista OEI. Iberoamericana de Educación, 47* (3), 1-8.

Reyes, A. (2015). “El conocimiento especializado del profesor de matemáticas”. En: Aguayo, L. (Coord.) *Construir la profesión El continente de lo didáctico, pp.81-104.* México. Taberna Editores.

Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Barcelona: Instituto de Ciencias de la Educación-Horsori.

Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L., & Gómez, P. (2008). Planificación de las Matemáticas Escolares en Secundaria. El caso de los números naturales. *Revista SUMA*, *58*, 7-23.

Rico, L. (2012). Aproximación a la Investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 1,* 39 - 63 © Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). www.seiem.es.

Real, R. (2017). Teaching Model of Fractions for the Early Grades of Mexican Primary Education. *Journal of Mathematics Education, 10* (2), 95-111.

Romo, M. (2020). Conversaciones en el confinamiento. *"Los Paradigmas y perspectivas metodológicas en la Investigación Educativa".* UPN Aguascalientes. Zacatecas, México. 8 de mayo.

Ruiz, A. (2020). Conversaciones en el confinamiento. "Narrativas e investigación. La narrativa de la solidaridad en jóvenes de la periferia urbana". UPN Colombia. Zacatecas, México. 14demayo.

Siegler , RS, Thompson, CA, y Schneider, M. (2011). Una teoría integrada del número entero y el desarrollo de fracciones. Desarrollo cognitivo, 62, 273–296.

Santamaria, F. (2006). *La Contextualización de la Matemática en la Escuela Primaria de Holanda.* (Tesis de MC). Facultad de Ingeniería Universidad Nacional del Comahue, Argentina.

Secretaría de Educación Pública. (2013). *Evaluación Nacional de Logro Académico en Centros Escolares*. *Sexto grado.* México.

SEP. 2011. *Plan Y Programa de Estudios. Educación básica primaria.* México.

Shulman, L. (1986). Conocimiento y Enseñanza: Fundamentos de la Nueva Reforma. Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. Trad. Alberto Ide. *Revista Estudios Públicos,*(83), 163-196.

Shulman, L. (2001). "Conocimiento y enseñanza" En: *Estudios públicos 83*

Siegler, R. (2012). Early predictors of high school Mathematics Achievement. Association for psychological science. *sagepub.com/journalsPermissions.nav* DOI: 10.1177/095679761244010.

Simon, Martin y Blume, Glendon. (1996). Justification in the mathematics classroom: A study of prospective elementary teachers. *Journal of Mathematical Behavior, 15*(1), 3-31.

Sorando J. M.(2002) . ¿Os acordáis de los conjuntos? Suma Vol. 39, 121-126.

Sosa, L. (2011). Conocimiento matemático para la enseñanza en bachillerato: Un estudio de dos casos. (Tesis doctoral). Universidad de Huelva, España.

Soto M. y Aguayo L. (2020). Enseñar a enseñar Matemáticas. Un recorrido de estudio e investigación para la formación de profesores. México.

Steffe, Leslie y Thompson, Patrick (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En Anthony Kelly y Richard Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Mahwah: NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Stelzer, F., Canet, L., Andrés, M.(2019). Relaciones entre el conocimiento conceptual y el procedimental en el aprendizaje de las fracciones. Cuadernos de Investigación Educativa. ISSN 1510-2432

Stephan, M., Bowers, J., y Cobb, P. (Eds.) (2003), Supporting students' development of measuring conceptions: Analyzing students' learning in social context, Resto, Virginia, EUA,National Council of Teachers of Mathematics.

Tardif, M. (2014). *Los saberes del docente y su desarrollo profesional.* Madrid, Narcea

Thompson, P. W., y Saldanha, L. A. (2003). Fractions and multiplicative reasoning. En J. Kilpatrick, G. Martin y D. Schifter (Eds.), Research companion to the principles and standards for school mathematics (pp. 95-113). Reston, Virginia, EEUU: National Council of Teachers of Mathematics

Treffers, A. (1987). *Didactical background on a mathematics program for primary education*. Dordrecht: Reidel.

Treffers, A. (1993). *Estudios Educativos en Matemáticas.* El legado de Hans Freudenthal, *25, (1/2), 89-108*.

Tzur, R. (2007). Fine grain assessment of students' mathematical understanding: participatory and anticipatory stages in learning a new mathematical conception. Educational Studies in Mathematics, 66, 273–291.

Valdemoros, M. 2004. Lenguaje, fracciones y reparto. *Revista Relime. Educación Matemática,* 7 (3),235-256.

Valdemoros, M. E. (2010). Dificultades experimentadas por el maestro de primaria en la enseñanza de fracciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 13 (2), 423-440

Valverde, G. (2014). Experimentos de enseñanza: una alternativa metodológica para investigar en el contexto de la formación inicial de docentes. Actualidades Investigativas en Educación, vol. 14. (3), pp. 1-20.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2014), “Realistic Mathematics Education.” En S. Lerman (ed.), Encyclopedia of Mathematics Education, Pp. 521 – 532. DOI 10.1007/978-94-007-4978-8.

Visnovska, J., y Cortina J.L (2018), Resourcing teachers in transitions to plan for interactions with students´ideas, en L. Fan, L. Trocuche , C. Qi, S. Rezat, y J. Visnovska (Eds.) Research on mathematics texbook and teachers´resources advances and issues, Cham , Suiza, Springer.

Visnovska, J. (2009). *Apoyar* el aprendizaje de los profesores de matemáticas *: construir sobre la enseñanza actual prácticas nacionales para lograr una agenda de desarrollo profesional* (Doctorado inédito disertación). Universidad de Vanderbilt, Nashville, TN.

Zúñiga, G. (2008). *Conocimientos Previos para entender las fracciones como cantidades de tamaño relativo. (Tesis MC.)* Universidad Pedagógica Nacional , México D.F.

ANEXO 1.

La vara de Kia

En las montañas, altiplanos, valles y costas de México se cuenta una leyenda sobre una ciudad muy antigua llamada Napiniaca.

Cuenta la leyenda que en Napiniaca vivieron mujeres y hombres sabios que se dedicaban a diversos oficios, como la agricultura, jarcería, elaboración de ropajes, bordado, orfebrería, cerámica y construcción. Estos hombres y mujeres sabios eran conocidos como los acajay. Algo que ocupaba su atención era la medición, ya que para desempeñar bien sus oficios necesitaban medir con precisión.

En un principio, los acajay medían utilizando partes de su cuerpo. Hoy en día, algunas personas todavía utilizan estas formas de medir; por ejemplo, utilizan sus pasos y cuentan cuántos se requieren para cubrir alguna distancia. A veces utilizan sus manos (cuartas) para medir cosas relativamente pequeñas, y también usan sus dedos.

La leyenda cuenta que en Napiniaca vivió una mujer acajay que se llamaba Numa. Ella se dedicaba a la elaboración de cestas. A Numa le ayudaba en su trabajo su hija Raxba. Una tarde llegó una clienta a pedir que le hicieran una canasta de un tamaño específico. Como Numa no se encontraba en casa, Raxba tomó la medida utilizando su mano y la apuntó. Cuando regresó Numa, leyó la medida y vio que la clienta quería una canasta que midiera 3 cuartas de alto.

Al día siguiente la clienta fue por su cesta y notó que no era del tamaño que había solicitado. Numa se sorprendió, ya que había tenido cuidado de que la cesta midiera exactamente 3 cuartas de alto. Numa no entendía qué había pasado. Entonces, comparó su mano con la de su hija y notó que la suya era más pequeña; lo que con la mano de su hija medía 3 cuartas, con la suya medía 4.

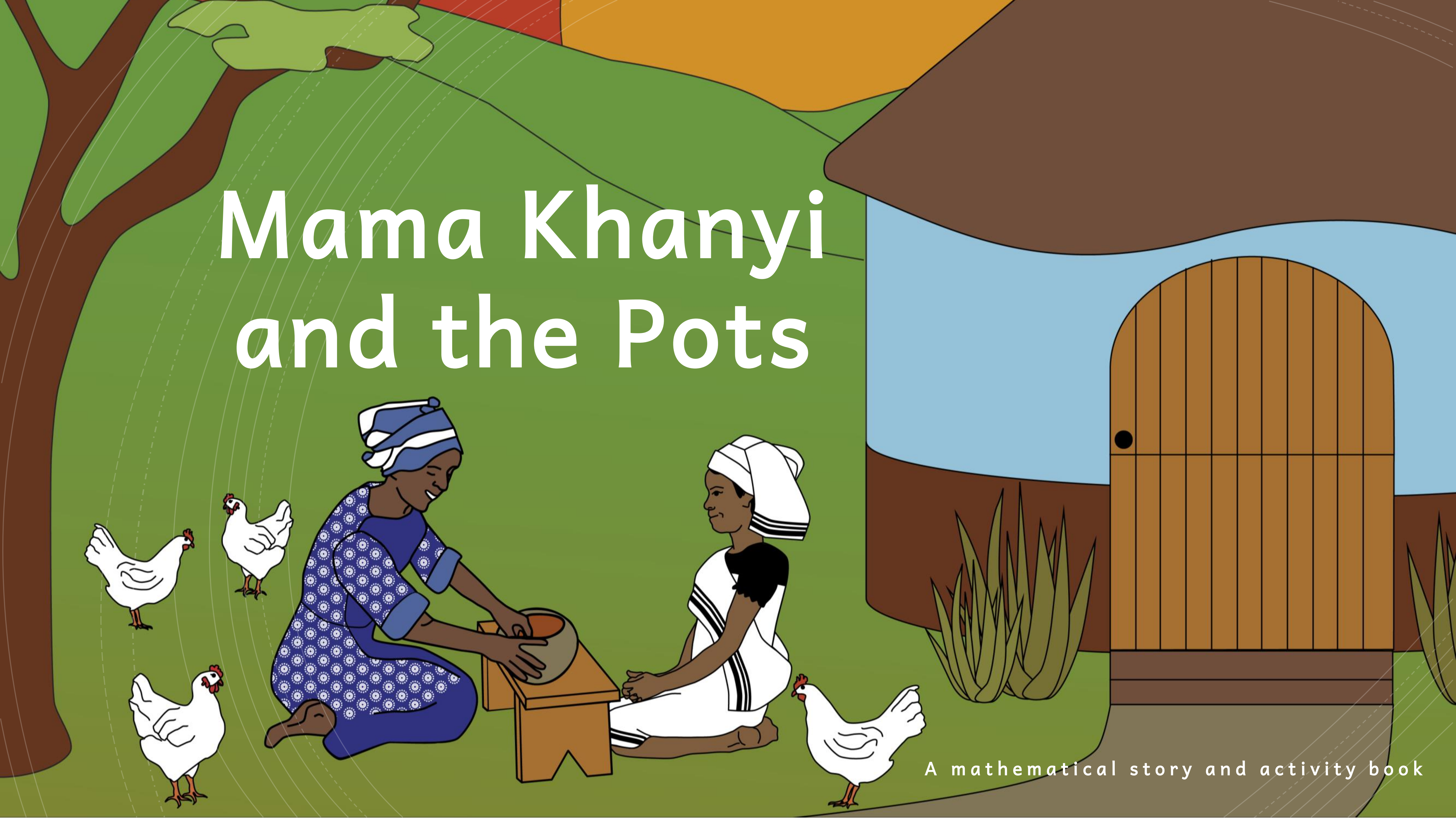
Esa noche Numa se quedó afuera de su jacal mirando a Kia, que es el nombre que en Napiniaca usaban para la Luna. Numa estaba triste por lo que había sucedido ese día y, sin quererlo, se quedó dormida a la luz de la luna. Soñó que hablaba con Kia y le platicaba lo que había sucedido ese día. También soñó que platicaban sobre cosas similares que le sucedían con frecuencia a otros acajay. Era común que tuvieran problemas con las mediciones que hacían otras personas.

Numa soñó que Kia le hablaba y aconsejaba que utilizaran una misma medida, en lugar de usar las partes de sus cuerpos para medir. Esa madrugada, cuando Numa despertó fuera de su jacal, encontró a su lado una hermosa vara de caoba blanca, decorada con incrustaciones de oro, plata y jade, y que tenía figuras lunares.

En la tarde, Numa convocó al Consejo de los acajay y les relató su sueño. También les mostró la vara que había encontrado a su lado. Los acajay conferenciaron por muchas horas, discutiendo si sería conveniente que todos midieran utilizando una medida del mismo tamaño. Al final acordaron que así debía ser y les encargaron a los carpinteros que tomaran la vara de Kia y la copiaran para que todos ellos tuvieran una vara que fuera del mismo tamaño.

Así se dice que sucedieron las cosas en la antigua ciudad de Napiniaca, cuna de hombres y mujeres sabios llamados acajay.

Mama Khanyi and the Pots



A mathematical story and activity book

Mama Khanyi and the Pots

A mathematical story and activity book

Words: Pamela Vale with Mellony Graven and Jana Višňovská
Artwork: Carmen Ford
Published by the South African Numeracy Chair Project, Rhodes University. Printed in Andika Font v.5.000 (SIL International)

Story adapted from: Cortina, J.L. & Višňovská, J. & Zúñiga, C. (2014). Unit fractions in the context of proportionality: supporting students' reasoning about the inverse order relationship. *Mathematics Education Research Journal, 26*(1), 79-99.

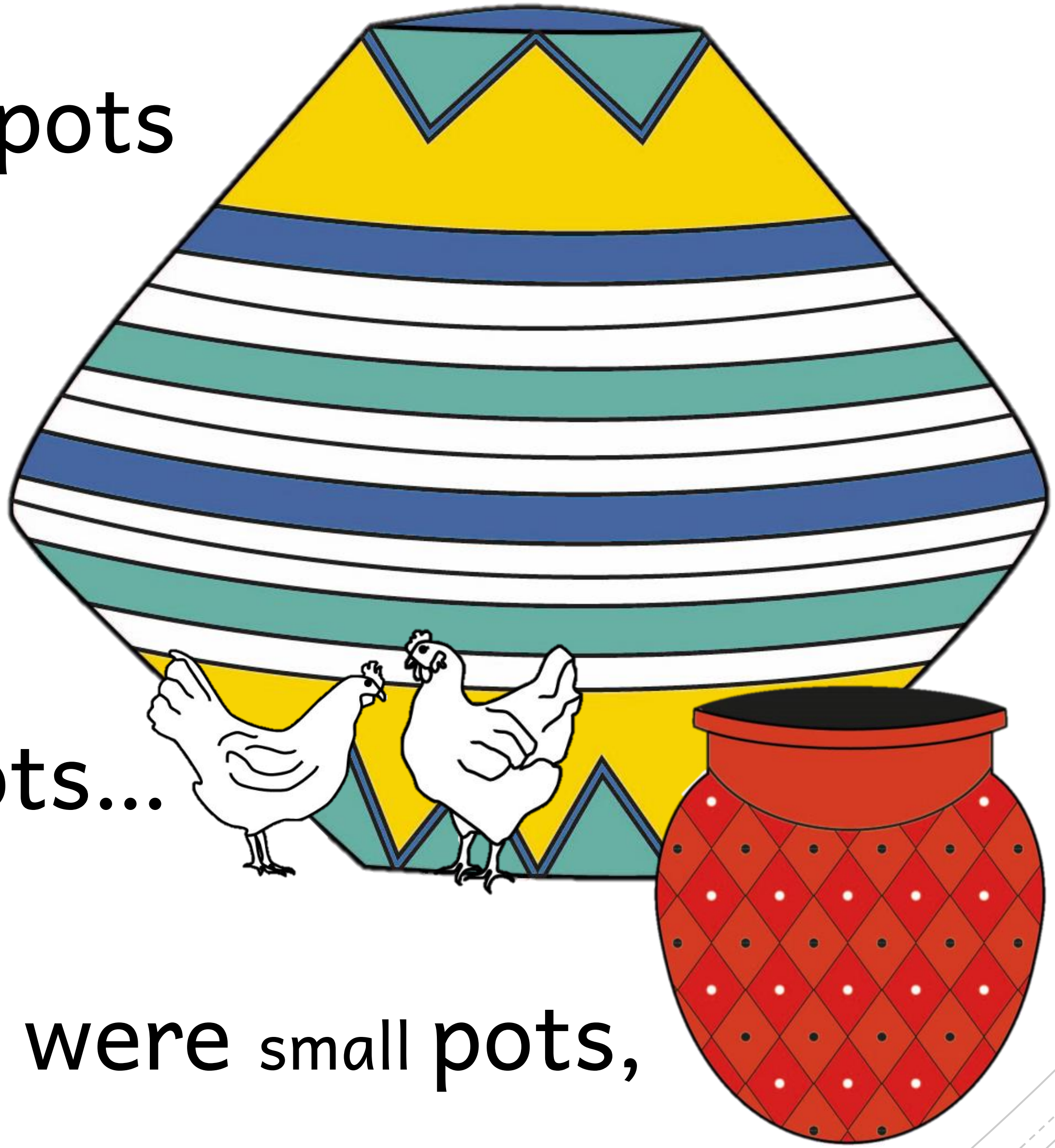
This work, and associated resources, are downloadable from:
https://www.ru.ac.za/sanc/teacherdevelopment/miclegr4-7/

Mama Khanyi was a famous potter who lived long, long ago in the village of Matewu. She lived with her daughter, Thembi.

People travelled from near and far to buy her pots.

She made beautiful clay pots in all shapes and sizes.

There were BIG pots...

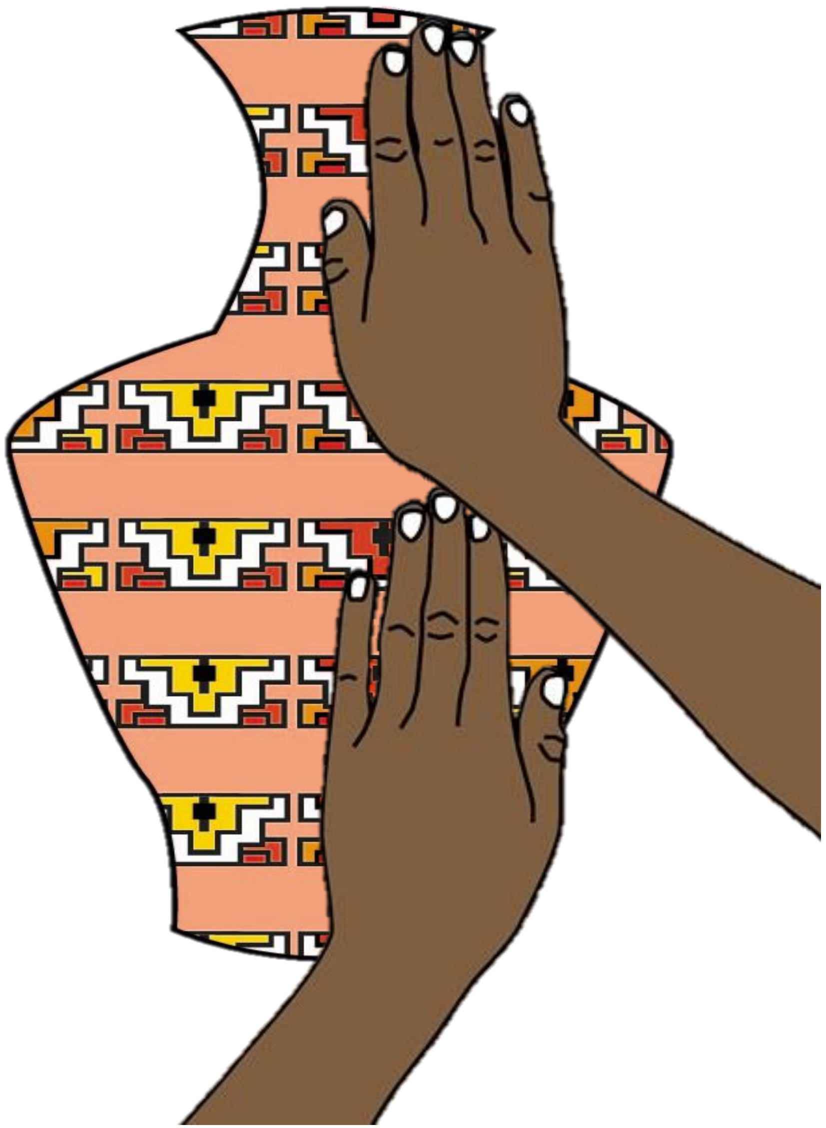


and there were small pots,

and round pots...

and tall pots...

all painted in bright patterns.



Mama Khanyi lived in a time before measuring tools like rulers and tape measures.

She used her hands to measure the pots.

What else do you think she could use to measure?

One day Mama Khanyi went to collect some firewood.

Two elders visited from a village far away. They wanted to ask Mama Khanyi to make a very special pot. The pot was a gift for a wedding.

It needed to be exactly the same height as the one they were carrying.

Thembi measured it very carefully with her hands for her mom.

When Mama Khanyi returned from the field, Thembi told her of the elders' visit.

Mama Khanyi was sad that she missed them, but Thembi told her that she had carefully measured the pot.

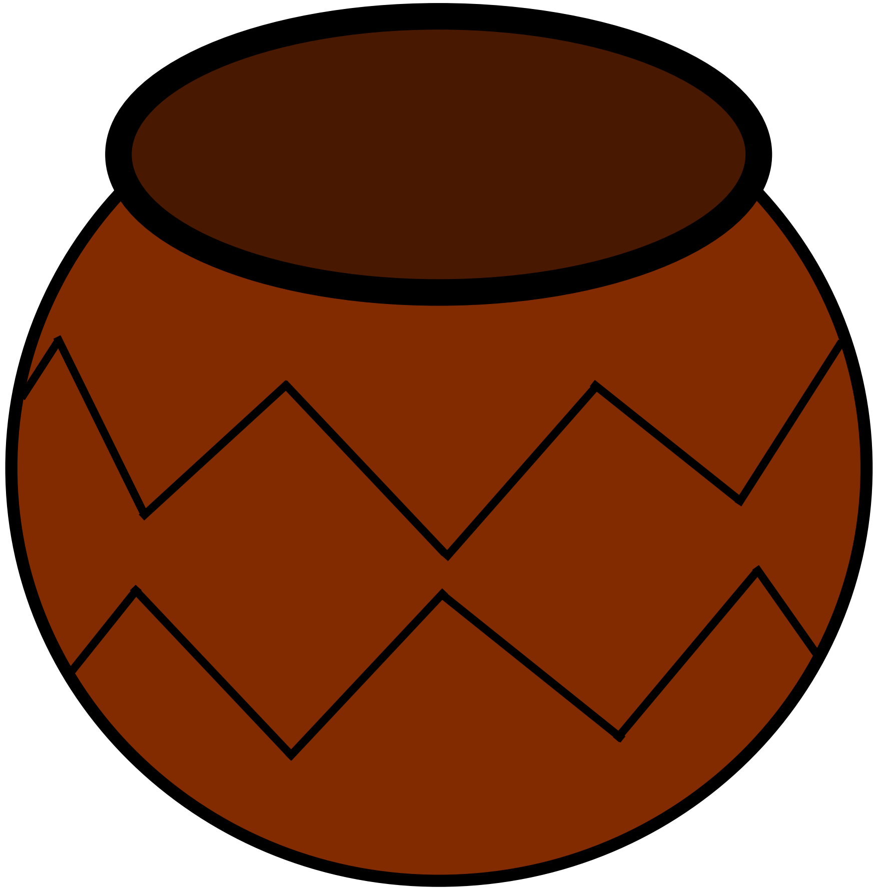
"Mama," she said, "they want you to make a pot that is THREE hands high. They said they will come to fetch it tomorrow."

Thembi ran off to play and left Mama Khanyi to make the pot.

“Three hands high, that is easy to do,” Mama Khanyi said to herself as she started to make the pot.

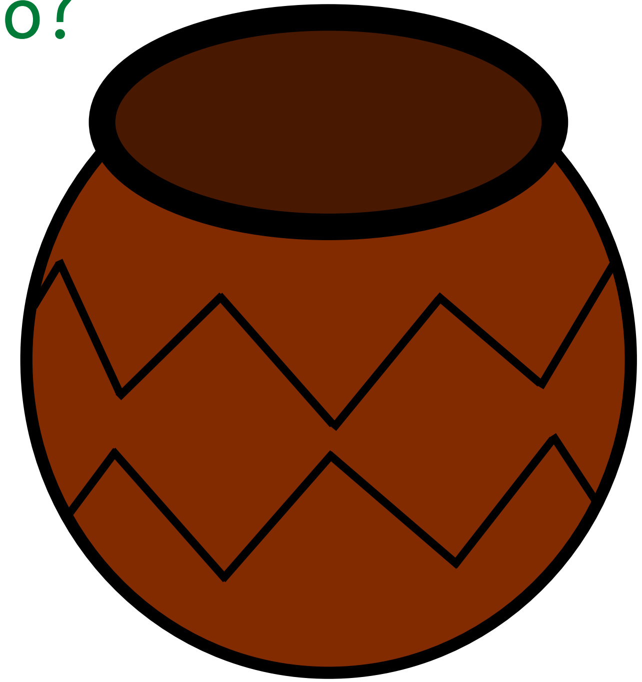
She worked very carefully to make sure the pot was EXACTLY three hands high.

The elders returned the next day. They brought the old pot and put it down next to the new one. The new pot was the wrong size!



Which pot is the one Mama Khanyi made?

Why do you say so?



Mama Khanyi asked the elders to let her make them a new pot. They agreed.

This time Mama Khanyi measured the pot herself.

Do you think Mama Khanyi got the same measurement as Thembi?

Why do you say so?

That evening Mama Khanyi sat outside under the full moon. She could not sleep.

She knew that she had taught Thembi how to measure properly. She knew that her and Thembi's hands were different sizes, and was worried the same mistake would happen again.

Was there another way for Thembi to help her mom take measures of pots?

She heard someone sigh...
"I will help," said a voice from above.

Mama Khanyi got a fright!
"Who said that?"

It was Moon.

"Look below the tree at dawn," said Moon. "I will leave something there to help you and Thembi."

Mama Khanyi ran to the tree the next morning to see what Moon had left her.

The only thing lying under the tree was a perfectly straight, white stick!

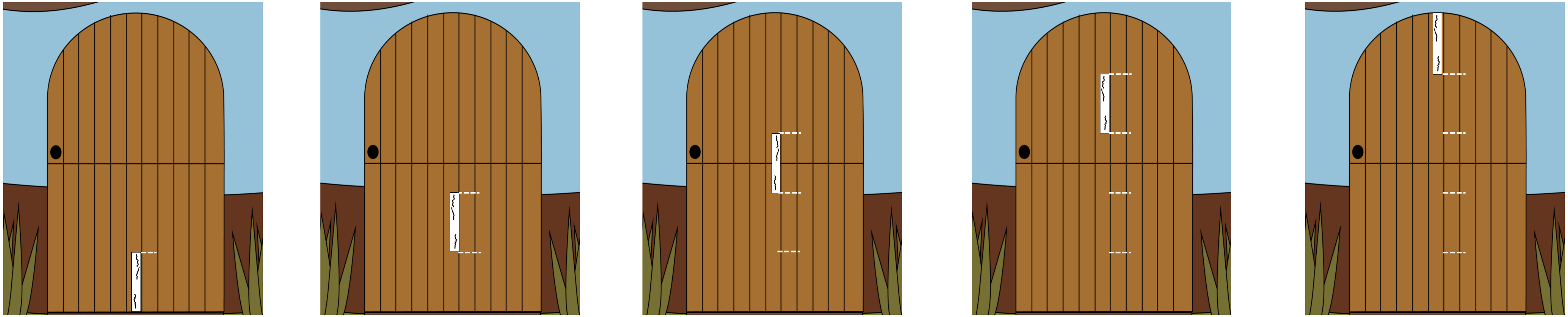
Could this really be something that would help her and Thembi to measure pots?

Mama Khanyi called Thembi to come and look at the stick.

"Moon said that this will help us to measure pots. How can a stick help us?"

"I know!", said Thembi, "we can use the stick to measure instead of our hands. If we always use the same stick, we will always get the same measurement."

Mama Khanyi and Thembi practised using the stick by measuring the door of their hut. They were very careful when measuring.



Thembi placed the stick upright on the ground and drew a line where it ended. Then she carefully placed the stick on the line and made another line to see where to place the stick next.

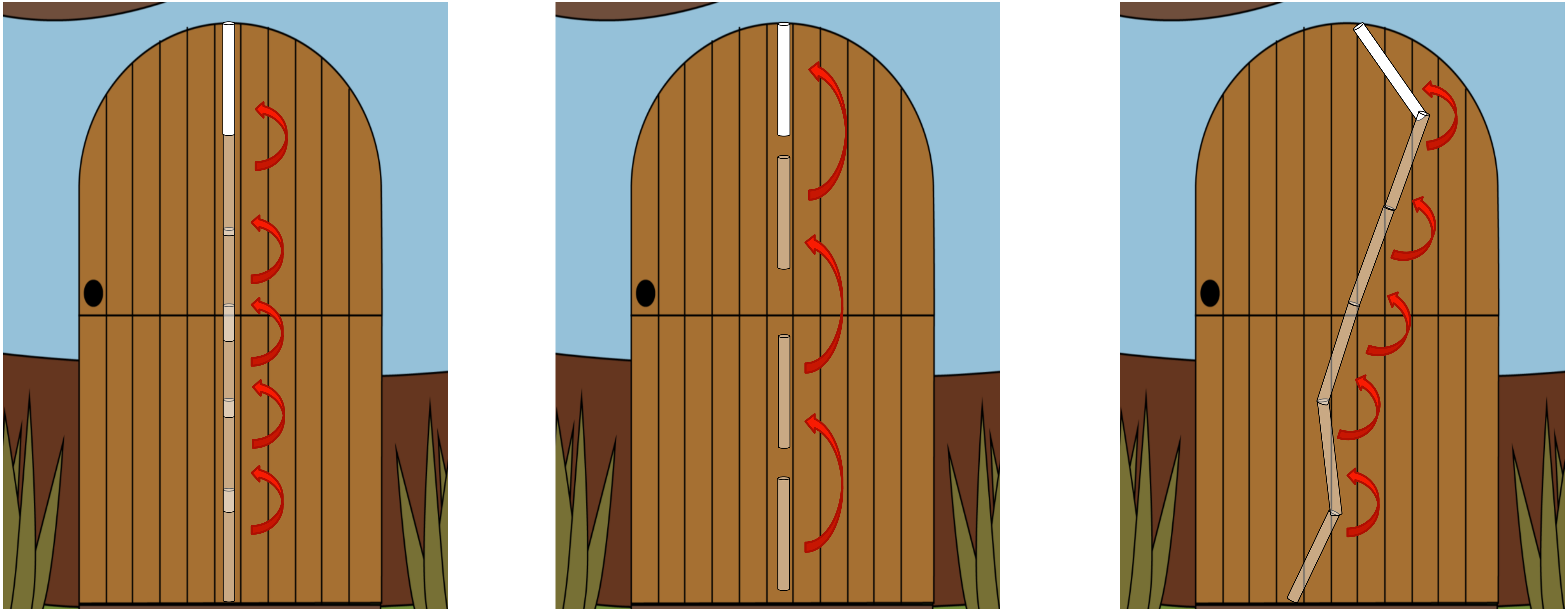
Mama Khanyi and Thembi both measured the door as five sticks high.

And then they measured a path, a tree, a chair, a bed and each time they both got the same measurement.

Why do you think they drew a line at the end of the stick each time so carefully?

Why did they measure straight up, vertically, along the line?

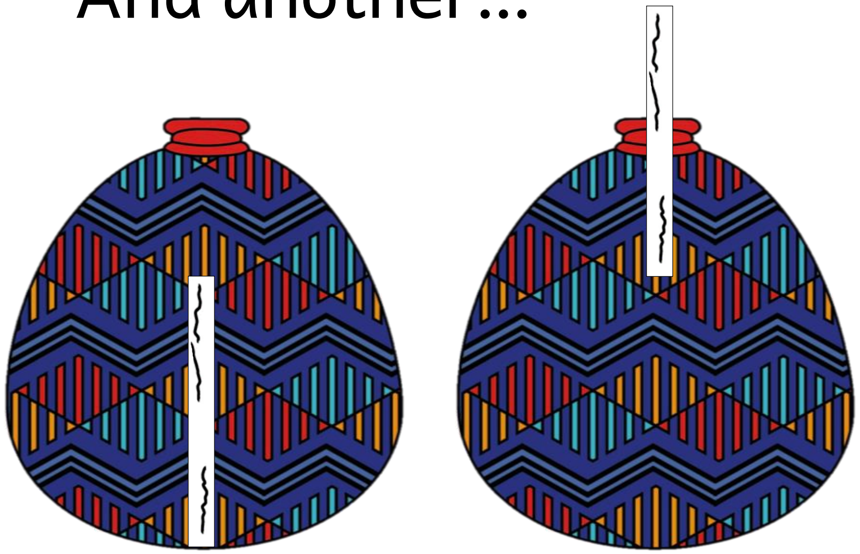
What would happen if they placed the stick skew sometimes?



Explain why these are not good ways to measure.

Next they decided to try to measure one of their pots.

And another...



and another...

and another...

"Oh no!" said Thembi. "What do we do when the stick does not fit exactly?"

“We can’t use our fingers because our hands are different sizes.”

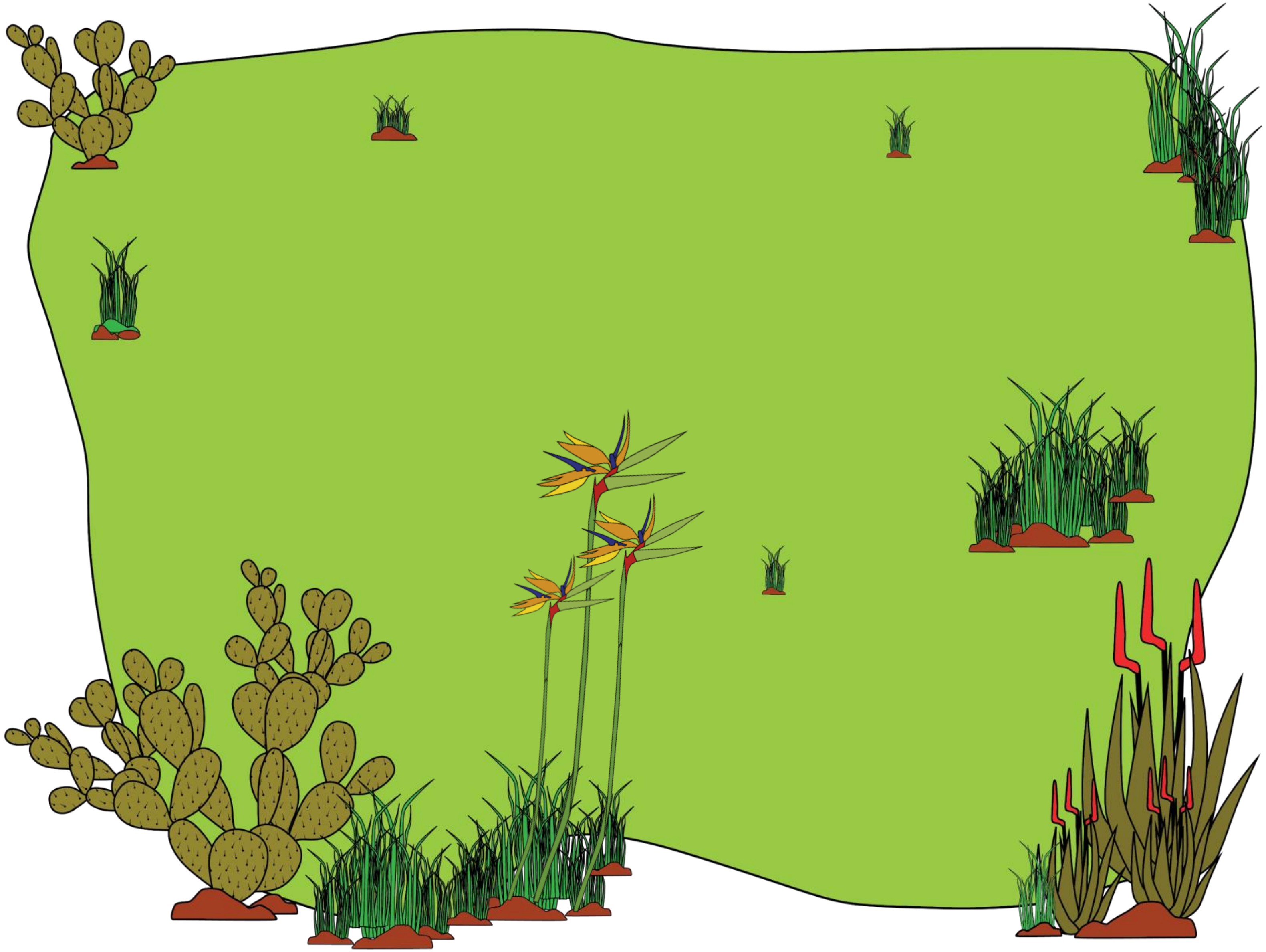
Can you think of something they could do to measure the pieces that are less than one stick?

Mama Khanyi looked out at the field and spotted her favourite plant.

It had a long, straight stem and beautiful flowers.

Can you find it?

Mama Khanyi suddenly thought of a plan!



“We can use this plant to make smaller pieces to use to measure when the white stick is too long.

But, we must make them very carefully.

We can call these smaller pieces ‘smalls’.”

“We should start with a piece so long that when we measure the stick with it, it will fit along the stick exactly TWO times,” said Mama Khanyi.

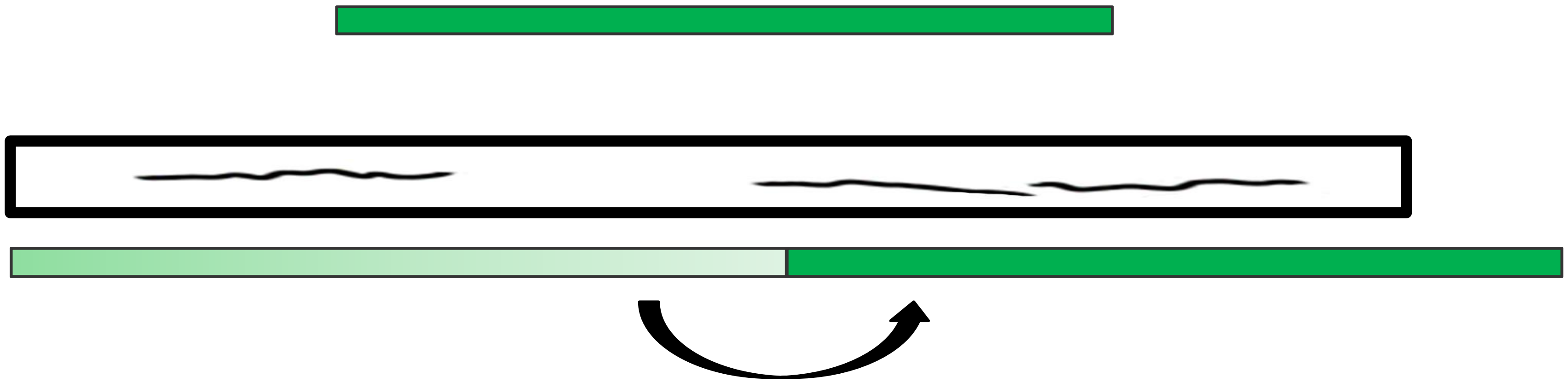
She added, “we will call this new piece an otibele, because ‘bele’ means small, and ‘oti’ means TWO.”

One otibele will fit along the stick exactly TWO times.

How many otibele will the stick measure?

Mama Khanyi started to make an otibele. She cut the stem to make a piece that would fit along the stick exactly TWO times.

First she cut this piece and placed it along the stick to test if it fit exactly TWO times...

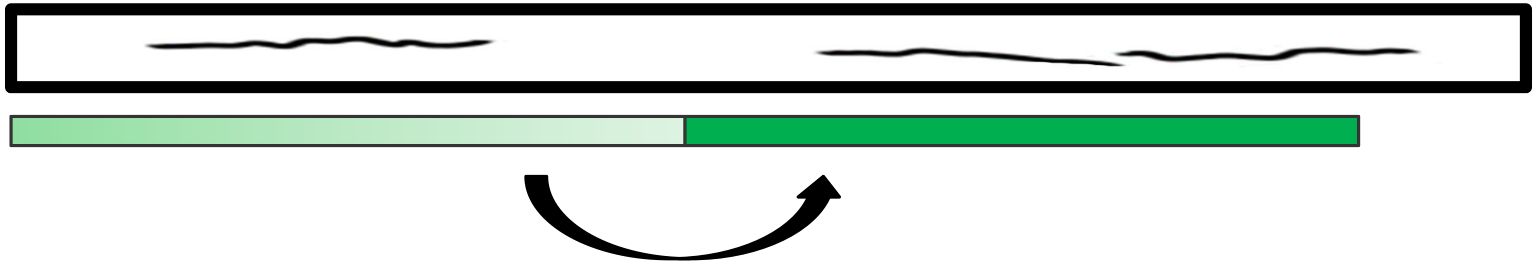


Is this a real otibele?

Would a real otibele be shorter or longer than this?

Mama Khanyi tried again. She took the piece and cut it a little shorter. This is the new length she tried...

She tested it to see if it fit along the stick exactly TWO times.

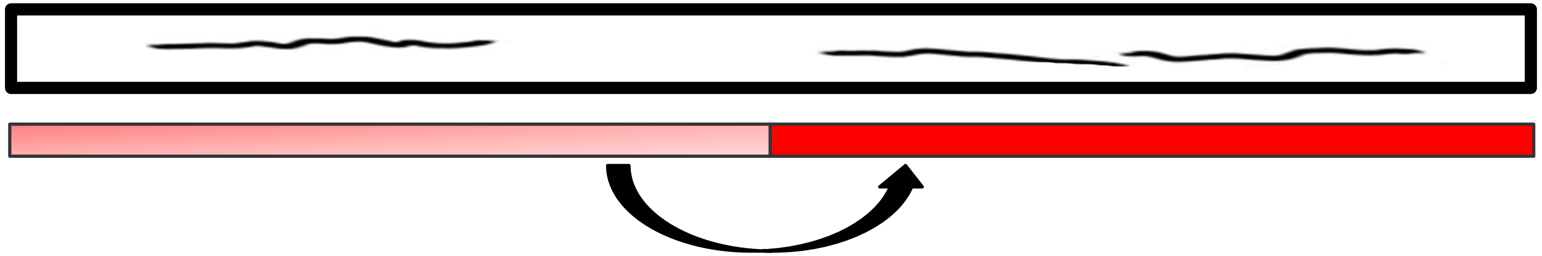


Is this a real otibele? What should Khanyi do now?

Mama Khanyi picked up a new stem to try again. After many tries, she finally got the correct length for the otibele.

This is the length she tried...

When she tested it, it fit exactly TWO times along the stick!
She painted it red so that she knew this was the small she would use to measure pots.



How did Khanyi know it was a real otibele?

"But will that be enough?" asked Thembi. "Will we be able to measure every pot?"

Will Khanyi be able to measure this pot exactly with her stick and the otibele?

Why do you say so?

"We can create more," said Mama Khanyi.

"Let us make a piece so long that when we measure the stick with it, it will fit along the stick exactly THREE times."

"We can call that an etibele," shouted Thembi happily, "because 'eti' means THREE!"

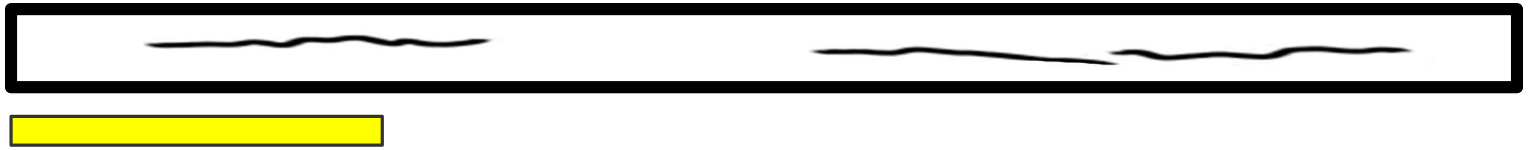
Do you think that an etibele will be shorter or longer than an otibele? Why do you say so?

And so Mama Khanyi and Thembi created a whole set of smalls so that they could measure ALL pots. They painted each small a different colour. Try to make these smalls:

One otibele fits along the stick exactly TWO times.

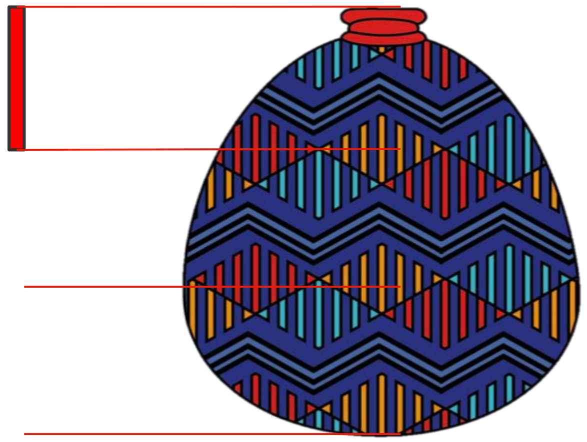
One etibele fits along the stick exactly THREE times.

One utibele fits along the stick exactly FOUR times.

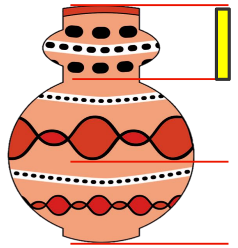


Now make the rest of the smalls that Mama Khanyi and Thembi made.

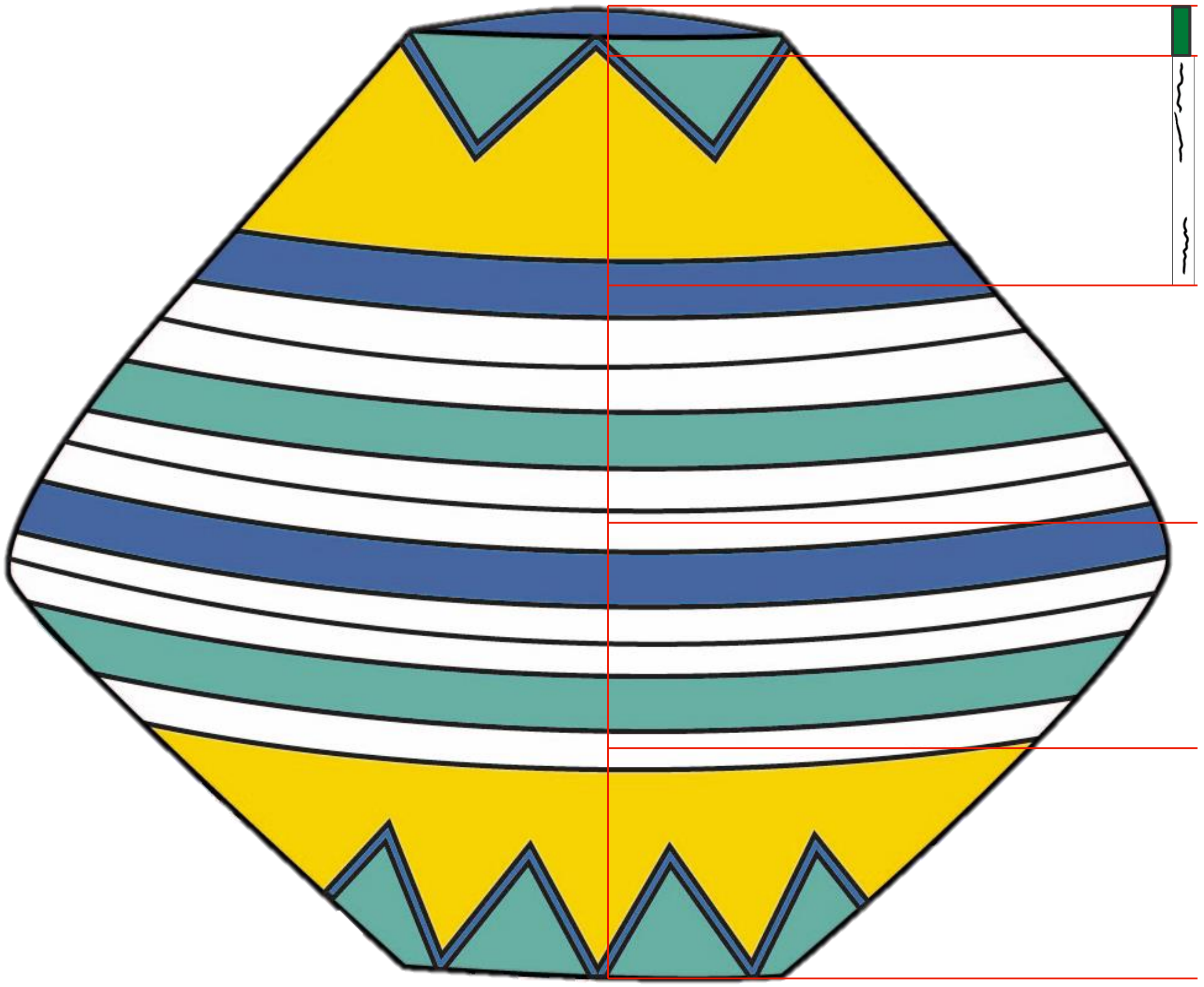
Small of two	Otibele	
Small of three	Etibele	
Small of four	Utibele	
Small of five	Atibele	
Small of six	Ambabele	
Small of seven	Enditibele	
Small of eight	Ahuitibele	
Small of nine	Itetibele	
Small of ten	Nedibele	



three otibele



three utibele



four sticks and one atibele

Mama Khanyi and Thembi practised measuring some of their pots. They discovered that the measuring tools worked for their needs!

Now Mama Khanyi and Thembi could measure any pots.

Other pot-makers soon heard and came to Mama Khanyi to make their own stick and smalls. This way they would all be able to make the same size pots when needed.

From that time on, whenever anyone asked for a pot, it did not matter who took the measurements, as long as they measured carefully and accurately.