



SEGE
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN
DE GOBIERNO DEL ESTADO



SECRETARÍA DE EDUCACIÓN DE GOBIERNO
DEL ESTADO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL, UNIDAD 241

“RECORRIDO DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN EN LA FORMACIÓN
DE PROFESORES (REIFP). UN DISPOSITIVO DIDÁCTICO PARA LA
ENSEÑANZA DE LAS FRACCIONES”

TESIS
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTOR EN DESARROLLO EDUCATIVO CON ÉNFASIS EN
FORMACIÓN DE PROFESORES

PRESENTA
ORLANDO DANIEL JIMÉNEZ LONGORIA

DIRECTOR DE TESIS
DR. LUIS MANUEL AGUAYO RENDÓN

SAN LUIS POTOSÍ, S.L.P.

JUNIO DE 2023

**Doctorado Regional en Desarrollo
Educativo
con Énfasis en Formación de Profesores**

Estados que integran la Región:

Coahuila

Nuevo León

Tamaulipas

San Luis Potosí

Zacatecas



POTOSÍ
PARA LOS POTOSINOS
GOBIERNO DEL ESTADO 2021-2027

SEGE

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN
DE GOBIERNO DEL ESTADO



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
UNIDAD UPN 241
SAN LUIS POTOSÍ, S.L.P.

DICTAMEN DE TRABAJO DE TESIS

San Luis Potosí, S.L.P., 26 de Mayo del 2023.

MTRO.
ORLANDO DANIEL JIMENEZ LONGORIA
P R E S E N T E. -

En mi calidad de Coordinador Regional del programa de Doctorado Capítulo Noreste, de la Universidad Pedagógica Nacional, y después de haber sido analizado su **Trabajo de Tesis** titulado: **"Recorrido de estudio e investigación en la formación de profesores (REI-FP). Un dispositivo didáctico para la enseñanza de las fracciones"**, encuentro que reúne los requisitos a que obligan los reglamentos en vigor para ser presentado ante el H. Jurado del examen para la obtención de Grado, por lo que deberá entregar siete ejemplares y un CD requeridos como parte de su expediente institucional.

ATENTAMENTE

DRA. YOLANDA LÓPEZ CONTRERAS
Coordinadora Regional del Doctorado



S. E. G. E.
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
UNIDAD 241
SAN LUIS POTOSÍ, S.L.P.

Vo. Bo.

LIC. PASTOR HERNANDEZ MADRIGAL
Director de la UPN, Unidad 241

"2023, Año del Centenario del Voto de las Mujeres en San Luis Potosí, Precursor Nacional"

Contenido

I. Introducción	1
Investigaciones sobre la enseñanza de las fracciones en la formación de docentes	4
Investigaciones locales respecto a la enseñanza de fracciones en la formación de docentes	4
Investigaciones nacionales respecto a la enseñanza de fracciones en la formación de docentes	6
Investigaciones internacionales respecto a la enseñanza de fracciones en la formación de docentes	8
Los Planes de Estudio para la formación de profesores	12
Problema	17
Pregunta General	19
Preguntas Complementarias	19
Objetivo General	19
Objetivos Específicos	19
Supuesto	19
II. La Teoría Antropológica de lo Didáctico	21
La TAD y la Formación de Profesores	22
El Modelo Praxeológico de la TAD	23
Tipos de tarea	24
Técnicas	25
Tecnologías	26
Teoría	27
Praxeologías puntuales	28
Praxeologías locales	28
Praxeologías regionales	28
Praxeologías globales	28
El Proceso de Estudio en la TAD	29

Los Momentos de estudio	30
Los Recorridos de Estudio e Investigación	34
Módulo 0. ¿Cómo enseñar un contenido C?	36
Módulo 1. Vivir un REI	36
Módulo 2. Analizar el REI vivido	37
Módulo 3. Diseñar un REI	38
Módulo 4. Gestionar y experimentar un REI	38
Modelo Epistemológico de Referencia (MER)	39
MER Fracciones	41
III. Metodología de la Investigación	47
Técnicas e instrumentos de recolección de datos	49
Los sujetos de estudio	50
Taller: "Enseñar a enseñar fracciones"	51
IV. Enseñar a enseñar fracciones. Resultados del taller recorrido	66
Primer acercamiento a las fracciones	67
Las aprendices de matemáticas	69
La fracción como fracturador. División de un elemento en otros que lo conforman	70
La fracción como comparador. Una comparación cuantitativa entre dos todos diferentes	88
La fracción como operador. Dos cantidades varían, pero la relación entre ellas es constante	98
El Docente Analista	107
Análisis de la situación de encuentra el significado del mensaje	108
Análisis de la situación del básquetbol	116
Análisis de la situación quebrados de cabeza	118
El Docente en formación y la didáctica	124
El Docente ingeniero	133
Evaluación	138
V. Conclusiones	142
Referencias bibliográficas	147

Índice de Tablas

Tabla 1. Cronograma del taller enseñar a enseñar fracciones.	51
Tabla 2. Tiros encestados	57
Tabla 3. Pódium	57

Índice de Figuras

Figura 1. Papel de los modelos epistemológicos de referencia	40
Figura 2. Referencias de los listones	56
Figura 3. Rompecabezas de Brousseau	59
Figura 4. Organizaciones	64
Figura 5. Esquema del taller de enseñar a enseñar fracciones	66
Figura 6. Esquema evidencias del alumno como aprendiz de matemáticas	69
Figura 7. Instrucciones vamos a jugar.	70
Figura 8. Midiendo para crear el mensaje	71
Figura 9. Técnica superponer la tira unidad	72
Figura 10. Técnica doblar el estambre en el listón	73
Figura 11. Mensaje listón 1 A1	74
Figura 12. Mensaje listón 1 A2	74
Figura 13. Mensaje listón 1 A3	75
Figura 14. Mensaje listón 1 A4	75
Figura 15. Mensaje listón 1 A5	76
Figura 16. Técnica de A1 para el Mensaje listón 1	77
Figura 17. Técnica de A2 para el Mensaje listón 1	78
Figura 18. Técnica de A3 para el Mensaje listón 1	79
Figura 19. Técnica de A4 para el Mensaje listón 1	80
Figura 20. Técnica de A5 para el Mensaje listón 1	81
Figura 21. Mensaje listón 2 A1	82
Figura 22. Mensaje listón 2 A2	83
Figura 23. Mensaje listón 2 A3	83
Figura 24. Mensaje listón 2 A4	83
Figura 25. Mensaje listón 2 A5	84
Figura 26. Técnica de A1 para el Mensaje listón 2	85
Figura 27. Técnica de A2 para el Mensaje listón 2	85
Figura 28. Técnica de A3 para el Mensaje listón 2	86
Figura 29. Técnica de A5 para el Mensaje listón 2	86
Figura 30. Técnica de A4 para el Mensaje listón 2	87
Figura 31. Alumnas realizando tiros	89
Figura 32. Registro de los tiros	90
Figura 33. Pódium A6 Técnica representación gráfica.	91
Figura 34. Pódium A3 Técnica representación gráfica	91
Figura 35. Pódium A4 Técnica equivalencia a decimales	92
Figura 36. Pódium A2 Técnica equivalencia a decimales	93
Figura 37. Pódium A1 Técnica representación numérica	94
Figura 38. Pódium A1 Técnica representación numérica	95
Figura 39. Construcción de los rompecabezas quebrados de cabeza	99
Figura 40. Trabajemos a escala	99
Figura 41. Técnica uso de la regla de 3	101
Figura 42. Técnica uso de la fracción	102
Figura 43. Segunda tarea de quebrados de cabeza	103
Figura 44. Técnica algoritmo convencional A1	104
Figura 45. Técnica multiplicación por fracción A4	105
Figura 46. Esquema evidencias del alumno como docente analista	108
Figura 47. Sesión de análisis de las clases de aprendiz de matemáticas	110
Figura 48. Sesión de análisis de la situación quebrados de cabeza	120

Figura 49. Esquema evidencias del alumno como docente en formación	125
Figura 50. Sesión de análisis de los momentos de estudio	126
Figura 51. Diferencias y similitudes como aprendiz de matemáticas	127
Figura 52. Momentos de estudio en las sesiones	132
Figura 53. Esquema evidencias del alumno como docente ingeniero	136
Figura 55. Ejemplos de momentos de estudio no coincidentes con la teoría.	137

I. Introducción

Desde la propia experiencia en el campo educativo, una de las asignaturas que más dificultades ha presentado tanto en su aprendizaje como en su enseñanza son las matemáticas. Esto se puede atribuir a las formas en qué se enseña y cómo se enseña, sumando a ello una amplia gama de contenidos que requieren ser aprendidos por los alumnos de manera gradual, donde un conocimiento es indispensable para aprender los posteriores que aumentan en complejidad.

A su vez, uno de los niveles a los cuales se debe poner atención es la formación inicial de docentes. Con ello se puede generar un espacio para la reflexión, comprensión y modificación de la práctica escolar adaptando todos y cada uno de los espacios educativos para la adquisición del conocimiento, como lo establece Lizarde (2013, pág. 572) respecto a que se requiere realizar “investigaciones respecto a la construcción de una teoría didáctica específica a la práctica docente de los formadores de profesores”.

Uno de los contenidos específicos de las matemáticas, que causa diversos tipos de dificultades, errores e incluso miedos tanto para los alumnos de educación básica como para los maestros en formación inicial son las fracciones (Castro, 2015). Éste es uno de los temas que utiliza diferentes contenidos matemáticos para poder ser comprendido y trabajado dentro de los salones de clase.

Con base en las dificultades en este campo, en este trabajo se busca diseñar y poner a prueba una propuesta de formación para la enseñanza de las fracciones para profesores en formación de una Licenciatura en Educación Primaria. La estructura e intención de la propuesta está inspirada en los Recorridos de Estudio e Investigación para la Formación de Profesores (en adelante REI-FP), dispositivos que han sido conceptualizados en el seno de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD).

Empero, para contextualizar la necesidad de probar un REI-FP y para profundizar sobre la problemática señalada, surge la necesidad de responder a algunos cuestionamientos: ¿qué se ha investigado respecto de la formación y la

enseñanza de las fracciones?, ¿cuáles han sido los aportes de dichas investigaciones? y; ¿qué dicen los programas de estudio mexicanos sobre este proceso de formación?, es decir ¿cómo plantean los programas de formación la relación entre las fracciones, lo didáctico y la práctica de los profesores? Las respuestas a estas interrogantes, sin duda nos permitirán vislumbrar un panorama de actuación dentro del campo, que posibilite el diseño de nuevas investigaciones para atender los aspectos con mayor énfasis en el proceso de enseñanza y aprendizaje de este contenido. Es por ello que se analizan investigaciones relacionadas con el objeto de investigación y los programas de estudio para la Licenciatura en Educación Primaria de las últimas cuatro reformas (Planes de estudio 2022, 2018, 2012 y 1997) que dan pauta al planteamiento de las preguntas y los objetivos de esta investigación.

Finalmente, debemos mencionar que los planteamientos teóricos que dieron sentido a la propuesta, las decisiones metodológicas que se tomaron, pero sobre todo los resultados producidos por la formación desarrollada son los que dan contenido a este trabajo el cual se estructura en cinco capítulos.

En el primero tenemos la introducción al trabajo donde se hace referencia a las investigaciones que se han encontrado respecto al objeto de estudio en el ámbito local, nacional e internacional, pasando al planteamiento del problema, objetivos, preguntas y supuesto.

Dentro del segundo capítulo definimos los referentes teóricos que guían el proceso de investigación retomando la Teoría Antropológica de lo Didáctico como base, para pasar a los REIFP y el MER relativo a las fracciones, que fungen como elementos esenciales para la aplicación de la investigación. Se eligió esta teoría debido a que en ella se encontró un dispositivo didáctico específico para la formación de profesores.

En el tercer capítulo se aborda la metodología, considerando las herramientas para la recogida de datos y la muestra que se analizó.

Pasando al capítulo cuarto tenemos el desarrollo del taller donde se presentan y analizan los datos obtenidos con el desarrollo de la propuesta del REIFP.

Como quinto y último capítulo se abordan las conclusiones a las que se llegan después de aplicar y analizar los datos correspondientes a la investigación, dejando a su vez una serie de sugerencias para continuar con trabajos de este mismo corte.

Investigaciones sobre la enseñanza de las fracciones en la formación de docentes

Como parte del análisis realizado en el campo de la formación inicial de docentes referente a las fracciones se han encontrado algunas investigaciones que dan cuenta de los procesos que se han desarrollado con relación a la enseñanza aprendizaje relacionados con el tema. Éstas van desde la identificación de los conocimientos matemáticos que deben poseer los docentes en formación para poder enseñar el concepto, así como algunas sugerencias de atención con relación al contenido de las mismas. A continuación, se analizan con base en la siguiente clasificación.

Investigaciones locales respecto a la enseñanza de fracciones en la formación de docentes

Dentro del contexto local de este trabajo se encontró que la investigación de Lizarde (2013) tuvo por objetivo determinar los procesos de transposición y destransposición del saber matemático (con el tema de los números racionales), en la interacción didáctica del aula de la Escuela Normal General Matías Ramos Santos en San Marcos, Loreto, Zacatecas. Encontró que el predominio en la configuración de las representaciones sociales sobre las fracciones y su enseñanza lo han construido los estudiantes normalistas desde la escuela primaria. A través de los materiales curriculares que se ofrecen en este nivel se transmiten generacionalmente las limitaciones (o avances) en la teoría didáctica, y según cada época histórica es mayor o menor el peso que se adquiere. Se asume entonces que la configuración de los procesos de transposición didáctica es lo que confiere matices a la formación de los profesores.

En el caso que se estudia en esta investigación se trabaja con el saber matemático (las fracciones), pero en ocasiones aparece “transparente” tanto para los alumnos como para el profesor y por ende algunos procedimientos pseudoformales socialmente compartidos no se cuestionan, por ejemplo, el

multiplicar cruzado para efectuar una suma de fracciones. Derivado de lo anterior, se expresa la necesidad de que los formadores de profesores fortalezcan el análisis de la práctica docente de los estudiantes normalistas, esto es una especie de metaanálisis que permita observar el nivel de comprensión en las conceptualizaciones sobre el saber matemático.

De esta manera, se observa como área de oportunidad el desarrollo de investigaciones respecto a la construcción de una teoría didáctica específica para la práctica docente de los formadores de profesores; investigaciones longitudinales, a partir del Plan de estudios 2012 para la Licenciatura en Educación Primaria, que permitan determinar su incidencia en la configuración de las representaciones sobre las matemáticas y su enseñanza que le subyacen y al mismo tiempo caracterizar el proceso de recombinação de lenguaje que se opera a partir de las representaciones que tienen los formadores de profesores encargados de aplicarlo.

Hernández y Lizarde (2015) en su investigación, pretenden caracterizar el conocimiento de las matemáticas en el proceso de formación de los futuros docentes de educación primaria. Mediante una prueba identifican una dificultad en la enseñanza de las fracciones, los resultados dejan ver una correlación significativa con relación a la dificultad sobre el aprendizaje por parte del alumno de sexto grado de educación primaria, demostrando así una relación entre el problema que surge directamente en la enseñanza y que incide en el aprendizaje del alumno.

Por su parte, Reyes (2018) teniendo como objetivo identificar y caracterizar el conocimiento especializado que evidencian dos profesores en formación inicial de primaria cuando enseñan la noción de razón en su doble manifestación: como significado de la fracción y en algunas relaciones de proporcionalidad. Para ello recurrió a la implementación del MTSK para realizar el análisis de los conocimientos didácticos y matemáticos que poseían los docentes.

Reyes (2018) evidencia al conocimiento matemático con los subdominios: el conocimiento de los temas (KoT); el conocimiento de la estructura matemática (KSM) y el conocimiento de la práctica matemática (KPM), y en su investigación prevalecen indicadores del KoT, mientras que aparecen muy pocos sobre el KSM y KPM. Referente al dominio del conocimiento didáctico del contenido es donde se

encuentra la mayor cantidad de indicadores, enfocándose en los subdominios: conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM); conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) y; el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS).

Una vez encontrados estos resultados de manera general, trabaja en el refinamiento de los datos y avanza en la descripción de otros indicadores de conocimiento relacionados con el conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM) y el conocimiento de la práctica matemática (KPM). También considera que se requiere profundizar en las relaciones que se establecen entre los diferentes dominios y subdominios del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, así como diseñar propuestas de formación inicial y continua, desde la perspectiva del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, que contribuyan a la adquisición y puesta en práctica de conocimientos matemáticos y didácticos en relación con el estudio de la noción de razón desde las fracciones y la proporcionalidad.

En esta misma problemática, Pinedo (2020) tenía como objetivo el determinar la diferencia entre el conocimiento matemático sobre los significados de las fracciones que tienen los docentes en formación y los docentes en servicio. Encontró que los docentes en servicio presentaron pocos argumentos en la resolución de problemas que implican los distintos significados de la fracción y carecieron a su vez de argumentos para conceptualizar los significados de la fracción; por otro lado, los docentes en formación lograron demostrar un dominio conceptual mayor que el de los docentes en servicio únicamente en el significado de la fracción como parte – todo, ya que carecieron de argumentos al definir los otros significados.

Investigaciones nacionales respecto a la enseñanza de fracciones en la formación de docentes

González (2005) se planteaba conocer cuáles son los diferentes significados de la noción de fracción que el estudiante expresa en su discurso y maneja en su práctica docente. Encuentra que la didáctica de la matemática propuesta en el Programa

para la Transformación y el Fortalecimiento Académico de las Escuelas Normales 1997 no permeó sustancialmente las concepciones de los estudiantes normalistas, pues los alumnos expresaron ideas parciales de lo que realmente representa el enfoque de enseñanza planteado en dicho programa. Una posible causa es que el tema relativo a los diferentes significados de la fracción ha sido un objeto escasamente tratado en las aulas de las escuelas normales. Las nociones de los normalistas se reducen a la idea de la fracción como fracturador, un todo dividido en partes iguales, pocos interpretan la fracción como la expresión del cociente de dos magnitudes distintas, sin encontrarse evidencia de otras interpretaciones más.

Como propuesta de continuidad en la investigación, el autor propone la identificación de los factores que mantienen el nivel de dominio de conocimientos sobre los contenidos matemáticos de los significados de la fracción que persiga la comunicación de un saber en una situación didáctica respaldado por los contenidos básicos respectivos del campo del conocimiento.

Por otra parte, en su tesis doctoral, González (2018) plantea una investigación para determinar qué conocimientos matemáticos y didácticos tienen los estudiantes para maestro de dos escuelas de Durango respecto a las fracciones y decimales. En su estado del arte hace una clasificación con tres categorías encaminadas a dar a conocer lo que se ha hecho desde la formación de profesores con una variedad de temas como los conocimientos de los profesores, las actitudes hacia las matemáticas, la manera en que se enseñan o aprenden diversos objetos matemáticos, formas de organizar el trabajo en el aula.

Otra de las categorías fue el conocimiento matemático y didáctico del profesor, encontrando como base en Shulman y Ball y algunos estudios enfocados a contenidos matemáticos específicos, analizando mediante el modelo de Shulman. También reportan investigaciones de los conocimientos sobre fracciones y decimales de los estudiantes para profesores.

En sus conclusiones señala que los maestros en formación tienen un conocimiento apenas en desarrollo acerca de lo matemático y lo didáctico sobre las fracciones y los números decimales y considera que una vez que estos profesores se integren al servicio docente su conocimiento se verá modificado. Por ello

propone como extensión de la investigación realizar estudios similares donde los alumnos puedan justificar o aportar información sobre las decisiones tomadas en el desarrollo de las clases de tal manera que pueda profundizar en el análisis de los conocimientos didácticos y matemáticos que poseen los alumnos, así como expandir el número de clases observadas.

Investigaciones internacionales respecto a la enseñanza de fracciones en la formación de docentes

La didáctica de las fracciones es un tema que ha generado bastante interés entre los investigadores educativos de varios países. Ríos (2011) buscaba caracterizar las interpretaciones que hacen los alumnos que ingresan a la Licenciatura en Educación encontrando que la categoría de mayor complejidad para los alumnos fue: la interpretación de fracción como número racional. Las categorías de mediana complejidad fueron: interpretación del símbolo de fracción impropia y número mixto, interpretación de reparto, interpretación de operador, interpretación como razón, interpretación como número decimal, interpretación como medida para la fracción impropia, interpretación de la totalidad fraccionada, definición del concepto de fracción. Las categorías de baja complejidad fueron: lectura de las fracciones, interpretación del símbolo de fracción para las fracciones propias y unitarias, interpretación como parte todo, interpretación como medida de la fracción propia, donde podemos encontrar la falta del dominio disciplinar por parte de los alumnos en diferentes conceptos vinculados al uso de las fracciones.

En esta misma categoría, Castro (2015) realizó una investigación con la intención profundizar en el conocimiento del contenido matemático escolar y el conocimiento didáctico de la relación parte-todo que manifiestan los estudiantes universitarios del grado de educación primaria. Para ello, hace una revisión del estado del arte donde encuentra investigaciones sobre el conocimiento de la estructura conceptual, de las representaciones, de los contextos y formas de uso, así como las relativas al conocimiento de las fracciones. Encontró que existe una falta de comprensión por los conceptos básicos de las fracciones por parte de los maestros en formación. También halló similitudes respecto a que la enseñanza de

las fracciones debe iniciar mediante conceptos básicos. De la misma forma, establece que los cursos de formación han de ser conscientes de las concepciones básicas que poseen los futuros profesores para poder mejorarlas y profundizar en ellas.

Entre sus conclusiones señala que el estudio permitió identificar la importancia del dominio conceptual de la parte todo como uno de los elementos indispensables para la apropiación de conceptos más complejos, a su vez da sustento a las estructuras aditivas y multiplicativas sirviendo como base para el conocimiento de las fracciones y los números naturales (Behr *et al.* 1983; Freudenthal, 1983; Kieren, 1976, en Castro 2015). Además, propone atender el diseño e implementación de acciones concretas y puntuales en la formación de estudiantes del grado de magisterio, y considerar otros significados (cociente, operador y razón) de la fracción para profundizar en su análisis.

Bufo, Linares, y Fernández (2018) examinan las características del conocimiento de estudiantes para maestro (futuros profesores) sobre subconstructos implicados en el razonamiento proporcional. Encontraron que el éxito en la resolución de aquellos problemas que ponen en juego los subconstructos en los que se podía aplicar un procedimiento previamente aprendido, pero tuvieron dificultades en los que implican reconocer la relación entre las cantidades y no se podía aplicar un procedimiento aprendido.

Observaron que podían resolver con éxito problemas vinculados con los diferentes dominios considerados: los relacionados con la idea parte-todo, medida-recta numérica y cociente (esquema fraccionario), la situación proporcional de valor perdido y el problema vinculado con el proceso unitizing (comparación de razones). Sin embargo, encontraron dificultades con los problemas que requerían reconstruir la unidad (operador inverso y razonamiento up and down), así como el reconocer una situación no proporcional y las situaciones de comparación cuantitativa y cualitativa. Esto denota una problemática generalizada tanto en la enseñanza de los conceptos matemáticos referidos a las fracciones, como en el aprendizaje de los mismos. Por ello, subrayan la necesidad de examinar la relación entre el conocimiento que tienen los futuros profesores y el uso de este conocimiento en la

realización de tareas profesionales, como puede ser la de interpretar la comprensión de los alumnos de primaria.

En su libro denominado “Las fracciones. Aspectos conceptuales y didácticos”, Fandiño (2011) hace un análisis amplio respecto a las fracciones desde sus primeras nociones a lo largo de la historia, pasando por las dificultades en el aprendizaje de las fracciones, hasta la didáctica de las fracciones en el aula. En este apartado nos enfocaremos a analizar el aspecto específico del cuadro teórico de las investigaciones didácticas sobre las fracciones que menciona la autora.

En dicho apartado se consideran algunas investigaciones en torno al aprendizaje de las fracciones, abordando cuestiones generales relacionadas con el concepto de fracción. También hace referencia a las operaciones entre fracciones y operaciones relacionadas (división). Así como las distintas interpretaciones de la idea de fracción.

En opinión de la autora, de todos estos estudios el más notable es el de Kieren (1975, 1976, citados en Fandiño, 2011. p. 84) “porque evidencia la existencia de por lo menos siete significados distintos del término “fracción” demostrando que esta polisemia es lo que dificulta su aprendizaje, ya sea cuando se refiere al concepto, como a las operaciones”.

Los años 80 trajeron consigo una serie de investigaciones que parten del aprendizaje en general hasta el abordaje de temas con fracciones, menciona Fandiño, un ejemplo de ello son las investigaciones relacionadas de: Owens, 1980; Rouchier y otros, 1980, Behr, Pos, Silver, Mierkiewicz, 1980; Hasemann, 1981; Behr, Lesh, Post, Silver, 1983; Lancelotti, Bartolini Bussi, 1983; Pothier, Sawada, 1983; Streenfland, 1983, 1987; Hunting, 1984a, 1986; Behr, Post, Wachsmuth, 1986, Dickson, Brown, Gibson, 1984; Streenfland, 1984a, b, c; Kerslake, 1986; Woodcock, 1986; Figueras, Filloy, Valdemoros, 1987; Hunting, Sharpley, 1988; Behr, Post, 1988; Ohlsson, 1988, Weame, Hiebert, 1988; Centini, 1988; Chevallard, Jullien, 1989 (en Fandiño 2011).

Sin embargo, en lo que corresponde al aprendizaje de las operaciones entre fracciones se encontraron trabajos correspondientes a la comparación entre valores fraccionarios y/o decimales y dificultades de la extensión de números

naturales a fracciones y/o decimales (Leonard, Grisvard, 1980; Nesher, Peled, 1986; Resnik y otros, 1989, en Fandiño, 2011). También se reportan trabajos relacionados con las distintas interpretaciones del término fracción (Novillis, 1980a, b; Ratsimba-Rajohn, 1982; Wachsmuth, Lesh, Behr, 1985; Hunting, 1984b, Kieren, Nelson, Smith, 1985; Giménez, 1986, Post Cramer, 1987; Ohlsson, 1988; Davis, 1989; Peralta, 1989; en Fandiño 2011).

Entre estos trabajos destacan los de Hart porque retoman de forma crítica los trabajos de Kieren. Cabe mencionar que para estas fechas empiezan a ser conocidos los trabajos de Brousseau (1980c, 1981, en Fandiño, 2011) y estos aportes resultan fundamentales en la evolución de la Didáctica de las Matemáticas.

Para los 90 y los 2000 la investigación respecto a los números fraccionarios y/o decimales se expande generando una vasta bibliografía, algunos de los trabajos reportados giran en torno a la conceptualización (Clemens, Del campo, 1990; Weame, 1990, en Fandiño, 2011); otros basados en el aprendizaje (Weame, 1990, Sanenz-Ludlow, 1990, 1992, 1994, 1995; Davis, Hunting, 1990; Mack, 1990, 1993; Bonotto, 1992, en Fandiño 2011). Algunas investigaciones dedican atención a la construcción del significado de fracción (Valdemoros, 1992, 1993a, b, c, 1997, 1998, 2001, en Fandiño, 2011). Fracciones en edad pre-escolar (Pepper, 1991, Hunting, Pepper, Gibson, 1992, Sbaragli, 2008, en Fandiño 2011). Aparece la Ingeniería didáctica con el periódico de fracciones (Sensevy (1996, en Fandiño 2011). Zaskis (1998, en Fandiño 2011) aborda la polisemia de la práctica matemática escolar. En España surge una corriente que analiza la práctica de la enseñanza (Castro, 2001; Castro, Torralbo, 2001; Llinares, 2003; Cid, Godino, Batanero, 2003, en Fandiño, 2011). Para el periodo de 2004-2006 se experimentó la formación matemática con profesores universitarios y de primaria para modificar la calidad de la enseñanza de estos actores (Campolucci, Fandiño Pinilla, Maori, Sbaraglo, 2006, en Fandiño, 2011).

Con el análisis reportado por Fandiño (2011) podemos percatarnos de que la investigación en torno a las fracciones ha sido amplia y que, si bien no se evidencian todos y cada uno de los trabajos publicados, sí nos da un amplio panorama de lo que se ha desarrollado y cómo se ha modificado el campo de la

investigación en este tema pasando desde el dominio matemático de los conceptos asociados a la fracción hasta el proceso de enseñanza y aprendizaje de los mismos. Cabe señalar que las investigaciones en las últimas décadas, desde el punto de vista de Fandiño (2011), centran su atención en la enseñanza y aprendizaje de las fracciones, sin embargo, el campo que abre sus posibilidades es el de la formación de docentes, ya que no se evidencia el trabajo desarrollado en este campo, aspecto que hay que resaltar.

Como podemos observar, las investigaciones sobre fracciones y formación de profesores fundamentalmente giran en torno a la identificación del dominio matemático y didáctico respecto a las fracciones. Estos trabajos generalmente dejan como sugerencia profundizar en el análisis o dar continuidad a sus investigaciones proponiendo nuevas formas de actuación en la formación de docentes para franquear las dificultades que han sido evidentes a lo largo de los años respecto a las fracciones en la formación inicial de docentes. Destacamos que es precisamente en ese tipo de investigaciones donde el campo de la Educación Matemática muestra una ausencia notable.

Si bien existen estudios que utilizan el REI-FP como dispositivo didáctico en la formación inicial de docentes, es necesario probarlo con distintos contenidos matemáticos para dar cuenta de su eficacia en la adquisición de nuevos saberes para que, de esta manera se logre una mejor formación y desarrollo profesional docente.

Los Planes de Estudio para la formación de profesores

La formación de profesores a lo largo de la historia ha pasado por una serie de reformas donde en cada una de ellas se pretende dotar a los futuros docentes de herramientas indispensables para su ejercicio, centrándose en las últimas reformas (2012, 2018, 2022) principalmente en dominio disciplinar de las asignaturas, así como en la didáctica de las mismas.

En el caso de las escuelas normales en México, las últimas cuatro reformas para la Licenciatura en Educación Primaria, planes de estudios 1997, 2012, 2018 y 2022 han traído consigo algunos cambios significativos en el área de formación

matemática de los futuros profesores. Prueba de ello es que en los planes y programas del año 1997 sólo se contaba con dos cursos para la preparación matemática de los futuros docentes: *Matemáticas y su Enseñanza I*, que se cursaba en el segundo semestre; además de *Matemáticas y su Enseñanza II*, cursado en el tercer semestre. En este plan de estudios se incluye el saber didáctico como parte esencial de la formación docente sustituyendo el planteamiento anterior de la formación de un docente investigador.

Después de estar vigente el programa de 1997 por 15 años, surge la necesidad de realizar algunas reformas estructurales para la mejora en la preparación de los docentes, beneficiando hasta cierto punto la formación matemática, aspecto que requirió mayor énfasis debido a la falta de dominio en el campo por parte de los docentes en formación considerando a su vez una parte de conocimiento didáctico para los mismos fines.

Un ejemplo de ello es que en el plan de estudios 2012 se cubrían cuatro semestres de la licenciatura divididos de la siguiente manera: *Aritmética: su aprendizaje y enseñanza* (primer semestre), *Álgebra: su aprendizaje y enseñanza* (segundo semestre), *Geometría: su aprendizaje y enseñanza* (tercer semestre) y *Procesamiento de información estadística* (cuarto semestre).

Este aspecto beneficia al menos en la expansión de los contenidos que anteriormente se cubrían en dos semestres y posteriormente fueron cuatro semestres en los que se abordaba cada eje temático en lo que toca al aprendizaje y su enseñanza. Sin embargo, si bien se dota de una temporalidad más amplia para abordar los contenidos matemáticos, debería de enfocarse más a la profundidad de éstos como temáticas a desarrollar en la educación primaria (Aguayo, Mendoza, González y Lechuga, 2014).

Con una vigencia más corta que la de los planes anteriores, el plan 2012 que estuvo en función seis años hasta el surgimiento del plan 2018, presentó una ligera modificación en la formación matemática. En el nuevo plan de estudios, en la formación para la enseñanza de las matemáticas se incluían cinco semestres incluyendo las asignaturas: *Aritmética. Números naturales* (primer semestre); *Aritmética. Números decimales y fracciones* (segundo semestre); *Álgebra* (tercer

semestre); *Geometría* (cuarto semestre); y *Probabilidad y Estadística* (quinto semestre). Cabe señalar que la gran modificación se dio en el eje de Aritmética, dividiendo lo que anteriormente se abordaba en un semestre en dos, uno para los números naturales y el otro para los decimales y fracciones, aspecto a considerar en el trabajo de investigación. Este plan de estudio consideraba necesario profundizar en los temas de Aritmética, específicamente con las fracciones y decimales ya que, en el plan anterior, éstos sólo se abordaban en una unidad, aspecto que no permitía profundizar en el análisis y por ende comprensión de los mismos.

El plan de estudios 2018 de la Licenciatura en Educación Primaria en el curso de *Aritmética. Números decimales y fracciones* señala que, en las Unidades I y II, los alumnos estudiarán las fracciones y sus operaciones (suma, resta, multiplicación y división); además, pone énfasis en la comprensión y las formas de expresar y representar estos números, así como en el desarrollo del sentido numérico con la pretensión de que conozcan, comprendan y se expliquen diversas relaciones entre los números, sus propiedades y sus operaciones en la resolución de problemas. Para ello se debe partir de problemas que den lugar al uso de fracciones para expresar relaciones parte-todo, razón, proporcionalidad y porcentaje. También, tendrían que conocer el papel de las fracciones y sus operaciones en diversos contextos y su relación con otros conceptos matemáticos.

De esta manera, se establece que los futuros maestros resolverán problemas y expresarán las relaciones implícitas en éstos en términos de fracciones y sus operaciones. A partir de las diversas propuestas de solución planteadas por ellos: a) se analizarán el concepto de fracción, su escritura y lectura; sus representaciones gráficas y numéricas y la equivalencia de fracciones, b) se analizará el orden en las fracciones y su relación con la noción de densidad y, c) se estudiará el significado de las operaciones con fracciones: suma, resta, multiplicación, división, potencias con exponentes enteros. Se analizarán los conceptos subyacentes y los algoritmos de dichas operaciones (p. 5). Para lograr lo anterior el curso distribuye los contenidos referentes al trabajo con fracciones de la siguiente forma:

Unidad de aprendizaje I. Las fracciones, su enseñanza y aprendizaje en el Plan y programas de estudio de educación primaria

• Dosificación de los aprendizajes en el eje temático “Número, Álgebra y Variación” relativo a los temas de:

- Fracciones.
- Suma y resta de fracciones.
- Multiplicación y división de fracciones.

Unidad de aprendizaje II. Estrategias de enseñanza y aprendizaje para el desarrollo del concepto de fracción y sus operaciones

- Concepto de fracción, representaciones gráficas y numéricas.

Fracciones propias, mixtas e impropias.

- Fracciones equivalentes; suma y resta de fracciones.
- Comparación y simplificación de fracciones.
- Multiplicación y división con fracciones.
- Razones y proporciones, variación proporcional directa.

Las actividades que se proponen para abordar los temas relacionados con fracciones son la construcción de una matriz analítica, donde se evidencien los contenidos asociados a las fracciones por grado en educación primaria propuestos desde los planes y programas de estudio vigentes, abordando lo que deben saber los alumnos y lo que deben saber hacer.

También sugiere analizar los conceptos de fracción desde diferentes autores, complementando a su vez con el desarrollo de actividades matemáticas para la identificación de los elementos de la fracción, considerando a los futuros docentes como alumnos de educación primaria que posteriormente analizarán la estructura de las actividades desarrolladas para relacionarla con los conceptos abordados.

Dentro de las sugerencias de actividades en las unidades propuestas referentes a fracciones también se propone analizar los libros de texto de matemáticas para identificar las lecciones que abordan este contenido, su estructura y los materiales empleados con la intención de que sirvan de referentes para el diseño de una lección que posteriormente pondrán en práctica con un

alumno de tal manera que podrán informar respecto a la ejecución de la misma, los retos y dificultades que se presentan y cómo se debería de construir el conocimiento matemático asociado a las fracciones en los alumnos de primaria.

Este plan de estudios analiza con mayor profundidad los contenidos matemáticos necesarios para trabajar las fracciones, dota de algunos elementos didácticos para su transmisión en las primarias, a su vez sugiere la implementación de actividades y su análisis para dilucidar el proceso de adquisición de los saberes por parte de los alumnos, considera en su génesis una mayor cobertura de conocimientos matemáticos para el desempeño del rol docente.

Si bien las reformas traen consigo cambios en pro de la educación surge la duda de por qué dedicar más tiempo a la aritmética en el plan de estudios vigente 2018, específicamente a los números decimales y fracciones. Al hacer un análisis de las dificultades presentadas en la formación docente en el área de matemáticas se han encontrado aspectos como la falta del dominio matemático de los temas a enseñar que continúan tanto en la preparación de los futuros docentes, así como en los docentes en servicio y en los propios alumnos de educación básica.

Ahora bien, en el marco de la Estrategia Nacional de Mejora de las Escuelas Normales de 2022, los planes de estudio para la Licenciatura en Educación Primaria del trayecto de Formación pedagógica, didáctica e interdisciplinar fueron modificados, especialmente el curso: *Aritmética su aprendizaje y su enseñanza*. El plan de estudios anterior daba dos semestres para el estudio de la aritmética, luego de la modificación de 2022 se plantea un curso en un solo semestre y además se reduce el tiempo de 12 horas se pasa a asignarle sólo 4 horas por semana, lo que significa reducir $\frac{2}{3}$ del tiempo, abordando los mismos contenidos importantes asociados a la aritmética.

Para el estudio de las fracciones, el curso incluye dos unidades: una para números naturales y otra para las fracciones y los decimales. En esta última los contenidos a trabajar están relacionados directamente con el concepto de número fraccionario; la fracción, representaciones gráficas y numéricas; fracciones propias, mixtas e impropias, equivalentes; suma, resta, multiplicación y división de fracciones; el uso de recursos digitales y didácticos como medio para la

construcción del concepto de número racional y sus representaciones; las fracciones y números decimales en los materiales curriculares de educación primaria.

Dentro de las actividades propuestas nos encontramos con: análisis de conceptos; identificación gráfica de fracciones; propuestas de situaciones didácticas; juegos de sumas y restas de fracciones; análisis de algoritmos para la suma y resta de fracciones, análisis de problemas, significados de la fracción.

Como es de observarse, a lo largo de las modificaciones de los planes de estudio encontramos diferentes cambios que van desde la cantidad de semestres donde se abordan los contenidos matemáticos, específicamente de fracciones y la cantidad de horas a la semana que se destinan con el mismo fin. También se pueden observar modificaciones en torno a los contenidos disciplinares y didácticos que se usan en cada uno de los planes con la intención de dotar a los futuros docentes de elementos indispensables para favorecer el desempeño cuando éstos se gradúen.

Los grandes cambios pueden traer grandes beneficios, sin embargo, queda clara la importancia de que los docentes en formación tengan dominio de lo que van a enseñar y cómo enseñarlo, aspectos que algunos planes de estudio han considerado en diferentes de sus etapas, y que es de considerarse para plantearse las nuevas rutas hacia la formación de los futuros docentes, saber matemáticas y saber enseñar matemáticas.

Problema

La enseñanza y aprendizaje de las fracciones se ha basado en un modelo que considera cuatro significados: medida, cociente, razón y operador multiplicativo, y que sigue presentando dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las mismas, con base en la propia experiencia dentro del campo de la formación docente y en el desarrollo profesional de los docentes en servicio se han observado dichas dificultades.

Dentro de las investigaciones reportadas en el ámbito internacional, nacional y local observamos una tendencia en la realización de estudios que

fundamentalmente buscan conocer el dominio disciplinar y didáctico de las fracciones para erradicar estas problemáticas. Sin embargo, los resultados que arrojan dichos estudios no llaman al optimismo, además en el campo de la investigación se encontraron pocas propuestas experimentadas que atiendan estas dificultades desde la formación inicial docente.

En este mismo tenor, en el análisis que se hace de los últimos planes de estudio podemos observar cómo es que se ha modificado el énfasis en la formación de profesores en lo que a matemáticas corresponde, pasando desde el semestre idóneo para comenzar a trabajar este trayecto, así como la cantidad de semestres que se dedican para abordar los contenidos y construir las bases del proceso de enseñanza y aprendizaje con los alumnos en primaria, así como la cantidad de horas, contenidos y actividades que se proponen desarrollar en el proceso de formación de los estudiantes normalistas. Consideramos necesaria una mayor amplitud en el abordaje de los contenidos matemáticos y diversificar las teorías de enseñanza de los mismos.

Es en el tema de las propuestas en donde se ubica este trabajo, cuya intención fue elaborar y poner a prueba una propuesta de formación ya que el trabajo con fracciones en todos los niveles educativos ha representado un reto tanto para alumnos como maestros a lo largo de los años, por lo que es conveniente realizar una investigación que trate de atender a las latentes necesidades que de aquí se desprenden.

Cabe mencionar, que las preguntas que aquí se plantean derivan de la revisión de la investigación en torno de la enseñanza de las fracciones, particularmente de la revisión sobre los estudios sobre los profesores. En éstos es notable el vacío en lo que se refiere a los dispositivos de formación para la enseñanza de las matemáticas, vacío que sobresale por la ausencia casi total de propuestas alternativas para la formación de profesores. Éste es el problema que se atiende en la presente investigación.

Pregunta General

¿Qué resultados se obtienen en la formación de profesores al gestionar un REI-FP relativo a las fracciones?

Preguntas Complementarias

¿Cómo construyen el conocimiento matemático de las fracciones los docentes en formación?

¿Qué aspectos matemáticos y didácticos consideran importantes las docentes en formación dentro de la construcción del conocimiento matemático de las fracciones?

¿Cómo plantean sesiones de clase las docentes en formación con relación al conocimiento matemático de las fracciones?

Objetivo General

Probar la eficacia del REI-FP relativo a las fracciones en la formación inicial de maestros.

Objetivos Específicos

Identificar el conocimiento matemático sobre las fracciones que ponen en juego los docentes en formación al enfrentarse a diversas tareas.

Analizar los aspectos matemáticos y didácticos que consideran importantes las docentes en formación dentro de la construcción del conocimiento matemático de las fracciones.

Diseñar sesiones de clase las docentes en formación con relación al conocimiento matemático de las fracciones.

Supuesto

El supuesto de la investigación desde luego que no se ajusta a los cánones de la investigación experimental que utiliza métodos cuantitativos para su comprobación, en nuestro caso es más bien un supuesto guía, que nos permite dilucidar maneras

de analizar los datos para dar cuenta de si en efecto el REI-FP transformó las conceptualizaciones y hacer de los participantes. La hipótesis en cuestión puede expresarse de la siguiente manera: al implementar el REI como un proceso para estudiar la enseñanza de las fracciones, los futuros docentes tendrán un mayor dominio disciplinar y didáctico de las fracciones que permitirán una mejora en el ejercicio de la práctica docente.

Cabe mencionarse que los estudios que se han realizado anteriormente respecto a la formación de docentes específicamente en el área de matemáticas con el tema de fracciones (Rios, 2011; Castro, 2015; Lizarde, 2013; Reyes, 2018; González, 2018; Pinedo, 2020) generalmente han considerado el significado de las fracciones para optimizar el trabajo de enseñanza y aprendizaje. Los resultados obtenidos no han sido alentadores respecto al dominio conceptual que subyace de este concepto. De ello deriva la pertinencia de este estudio ya que se pretende abordar un modelo epistemológico diferente para favorecer el proceso de enseñanza de los docentes y el aprendizaje de los alumnos además de proponer una metodología para enseñar a enseñar el concepto de fracción.

II. La Teoría Antropológica de lo Didáctico

La perspectiva teórica que guiará la investigación es la Teoría de la Transposición Didáctica, que pone su mirada en el proceso de preparación de un “saber sabio” para ser enseñado, es la teorización primaria que posteriormente con su desarrollo se convierte en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD).

El carácter antropológico de esta teoría deriva de su principio fundamental que consiste en considerar a la matemática en su doble dimensión, como actividad humana y como producto de esa actividad. Esto es, se hacen matemáticas cuando se desarrolla la actividad propia de los matemáticos, es decir, cuando se estudian las matemáticas, y el resultado de tal actividad es un producto matemático, que engrosa el cúmulo de conocimientos matemáticos instituidos. Por esta razón, Chevallard (1999) sitúa la actividad matemática, y en consecuencia la actividad de estudio en matemáticas, en el conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales, susceptibles de explicarse mediante una mirada antropológica.¹

Entonces, desde la TAD se piensa que existe una estrecha relación entre la actividad matemática (proceso de estudio) y el saber matemático (producto) (Aguayo, 2004). Esta dualidad se puede expresar en términos del saber y la relación con el saber, al paso del saber sabio al saber enseñado y luego a la obligatoria distancia que los separa (Gómez, 2005).

El estudio en la TAD es visto como el proceso que va desde la creación y utilización de un saber matemático hasta su incorporación en la escuela como saber enseñado. En ese sentido, el papel que juegan las instituciones sociales es el de ir adaptando el saber en diferentes ámbitos para convertirlo en un saber enseñable, entendidas las instituciones como el sitio donde se da el surgimiento del saber sabio, así como la transposición de éste hasta convertirse en saber enseñado.

La TAD fue uno de los primeros enfoques en considerar como objeto de estudio e investigación, no sólo las actividades de enseñanza y aprendizaje en el aula, sino todo el proceso que va desde la creación

¹ En esencia, el objetivo fundamental de la Antropología es el estudio de las actividades humanas.

y utilización del saber matemático hasta su incorporación en la escuela como saber enseñado. Dicho objeto de estudio incluye además todas las instituciones que participan en este proceso, entre las que se cuentan el propio profesorado como institución y también aquellas que intervienen en su formación inicial y continua (Bosch y Gascón, 2009, p. 90).

Siguiendo el sentido de las ideas anteriores, el objetivo del presente capítulo es dar a conocer los elementos teóricos que aporta la TAD en el desarrollo de esta investigación. Para ello, se ha dividido en cuatro apartados: en el primero se analiza el modelo praxeológico, en el segundo el proceso de estudio, en el tercero los recorridos de estudio e investigación y en el cuarto la función del Modelo Epistemológico de Referencia.

La TAD y la Formación de Profesores

Desde la perspectiva teórica de Chevallard, las escuelas para alumnos como las de profesores son escuelas “normales” que crean y difunden normas, considerándolas como prácticas. Por consiguiente, más que difundir las prácticas se refiere a praxeologías, acciones que gestionan una tarea, entendiendo la diferencia entre práctica y praxeología, ya que las últimas llevan consigo la acción y ciertos saberes que permitirán dar sentido a la tarea y a la forma de resolverlas, *“cuando se habla de saber, siempre se designa ordinariamente, y por metonimia, toda una praxeología”* (Chevallard, 1997, en Aguayo, 2005).

Considerando esta perspectiva teórica, la TAD proporciona los elementos que permiten analizar lo que sucede en diversas instituciones donde se realiza el proceso de enseñanza y aprendizaje.

A su vez, la TAD sirve como marco de referencia para analizar la formación de profesores, debido a que como en sus inicios consideró como base la transposición didáctica, toma referencia de las actividades propias de la enseñanza y de aprendizaje, pasando por el proceso del saber matemático y la esfera sabia que se concreta cuando se convierte en saber enseñado (Soto, 2017). Por su parte,

Ruiz-Olaria, Bosch y Gascón (2019) expresan que la TAD fue uno de los primeros enfoques en considerar como objeto de estudio e investigación, no sólo las actividades de enseñanza y aprendizaje en el aula, sino todo el proceso que va desde la creación y utilización del saber matemático hasta su incorporación en la escuela como saber enseñado.

El Modelo Praxeológico de la TAD

Para Chevallard (1999), toda actividad humana puede modelizarse bajo el concepto de Organización Praxeológica o simplemente praxeología, es decir, toda actividad posee su unidad mínima de análisis que es denominada praxeología, término que etimológicamente une dos conceptos: *praxis* (práctica) y *logos* (estudio o tratado), de donde se suele traducir praxeología como el estudio sobre la práctica.

Una praxeología entonces está formada por dos bloques, el de la praxis o técnico-práctico $[T, \tau]$ y el del logos o el tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]$. En el primer bloque se encuentran dos elementos: el tipo de tareas T (lo que se hace) y la técnica τ (la forma cómo se resuelve la tarea). Por su parte, en el bloque del logos están la tecnología θ (un discurso que justifica la técnica y que está respaldado por una institución) y la teoría Θ (un meta discurso que justifica la tecnología y le da sentido a la actividad en general) (Castela, 2011, en Vázquez, Romo, Romo-Vázquez y Trigueros, 2016).

La praxeología es un modelo de la actividad y de los recursos (materiales, pero sobre todo cognitivos) que son producidos socialmente y capitalizados por los grupos humanos para llevar a cabo las actividades (tareas) de forma eficiente. Una determinada praxeología (P) reconocida por una institución (I) provee a los sujetos de (I) recursos para tratar las tareas de un tipo (T). Al mismo tiempo, norma las formas de afrontar estas tareas dentro de la institución (I). (Vázquez, Romo, Romo-Vázquez y Trigueros, 2016).

Esta actividad humana, hacer matemáticas, se despliega cuando el sujeto tiene necesidad de resolver una situación, o en términos de la TAD, cuando tiene necesidad de cumplir con una tarea. Se parte de la idea de que los humanos producimos maneras de resolver problemas (técnicas) y discursos (tecnologías)

que justifican, explican y validan esas técnicas y además, explicamos y damos sentido a las técnicas y las justificaciones mediante teorías, que pueden ser científicas o simplemente modos de pensar al mundo. La acumulación y perfeccionamiento de tales técnicas y tecnologías es lo que denominamos como saber. (Vázquez, Romo, Romo-Vázquez, Trigueros, 2016).

En el caso de las fracciones, por ejemplo, una institución puede considerar como elemento indispensable en la ejecución de las tareas algún tipo de material manipulable para la adquisición del saber, mientras que otra puede considerar irrelevante este aspecto y tratarlo desde un constructo abstracto donde no sea necesaria la implementación de este recurso en la adquisición del saber. De igual modo, para resolver por ejemplo una suma de fracciones con diferente denominador, una institución puede legitimar y valorar socialmente una determinada técnica, mientras que en una institución diferente puede ser más valorada una técnica diferente.

Tipos de tarea

En una praxeología, una tarea no hace referencia a una actividad simple, su significado es mucho más amplio del que se le da desde el sentido común de la propia palabra. Para dotarlo de su significado específico, desde la TAD, se requiere hablar no de una tarea sino de los tipos de tareas que se refieren a un objeto preciso, subir una escalera es un tipo de tarea, pero subir, simplemente, no lo es (Chevallard, 1999).

Concretamente, un género de tareas no existe más que bajo la forma de diferentes tipos de tareas, cuyo contenido está estrechamente especificado. Calcular... es, se ha dicho, un género de tareas; pero calcular el valor (exacto) de una expresión numérica conteniendo un radical es un tipo de tareas, lo mismo que calcular el valor de una expresión conteniendo la letra x cuando se da a x un valor determinado. Durante los años de colegio, el género calcular... se enriquece de nuevos tipos de tareas; ocurrirá lo mismo en el instituto, donde el alumno va en primer lugar a aprender a calcular con

vectores, después, más tarde, a calcular una integral o una primitiva, etc. (Chevallard, 1999, p. 2).

Así, unos ciertos tipos de tareas en la escuela primaria serían, por ejemplo, el efectuar una suma de fracciones, calcular la constante de proporcionalidad en una tabla, dividir un entero entre una fracción, ya que para ello requiere de poner en juego cierto tipo de técnicas.

Técnicas

Ahora bien, para resolver un cierto tipo de tareas se requiere una manera de realizarla, considerando una forma determinada de hacer, esto es una técnica. Sin embargo, las técnicas pueden tener éxito sólo sobre una parte de las tareas de la cual es relativa, de ahí que se pueda hablar del alcance de la técnica. Un ejemplo de esto sucede cuando se suman fracciones, si se habla de fracciones homogéneas es suficiente la técnica de sumar los numeradores y el denominador permanece igual; mas cuando se habla de fracciones heterogéneas, la técnica anterior no resulta eficiente, primero tendríamos que convertir las fracciones a sus equivalentes para tener fracciones homogéneas, lo que significa que, aunque la nueva técnica incluye la anterior no es la misma.

Empero, una técnica no siempre es de naturaleza algorítmica o cuasi algorítmica, son pocos los casos que presentan este tipo. Por ejemplo, para sumar fracciones con el mismo denominador se puede recurrir a la representación gráfica de las mismas y contabilizar las partes que se tienen de cada fracción para obtener el total, considerando así una técnica casi algorítmica; por otro lado, se puede usar la técnica de representación numérica para sumar sólo los numeradores y conservar el denominador siendo ésta una técnica algorítmica.

Por fin, en una institución *I* dada, y a propósito de un tipo de tareas *T* dado, existe en general una sola técnica, o al menos un pequeño número de técnicas institucionalmente reconocidas, con la exclusión de técnicas alternativas posibles -que pueden existir efectivamente, pero en otras instituciones. Dicha exclusión es correlativa, entre los

actores de I, de una ilusión de “naturalidad” de las técnicas institucionales en I -hacerlo así, es natural...-, por contraste con el conjunto de técnicas alternativas posibles, que los sujetos de I ignoran, o, si se les confronta a ellas, las miran espontáneamente como artificiales, y (por ello) “contestables”, “inaceptables”, etc. (Chevallard, 1999, p. 3).

La escuela primaria mexicana es el ejemplo de una institución y en ella puede verse que para realizar la tarea de sumar fracciones se plantea únicamente la técnica que hace referencia a la utilización de productos cruzados como un algoritmo en su resolución quedando excluida, por ejemplo, la técnica de conversión individual de las fracciones en sus equivalentes para buscar aquellas que poseen el mismo denominador.

Tecnologías

En la TAD, las tecnologías se definen como el discurso racional que explica y justifica la técnica utilizada para resolver el tipo de tarea planteado. En cada tipo de tarea hay nociones, esto es una especie de huellas, de señales que apuntan hacia algunas técnicas que permitirán resolverla, y a su vez, en esas técnicas pueden advertirse algunos vestigios de las tecnologías, en numerosos casos existen elementos tecnológicos integrados en la técnica. Otra de las funciones de la tecnología es la de explicar y/o aclarar la técnica, esto es, mencionar por qué es correcta.

Además, otra función de la tecnología es la producción de técnicas, ya que posee la posibilidad de generalizar su significado en diferentes técnicas.

Se admitirá en primer lugar como un hecho de observación que, en una institución I, cualquiera que sea el tipo de tareas T, la técnica $\hat{o}$ relativa a T está siempre acompañada de al menos un embrión o más frecuentemente aún, de un vestigio de tecnología q. En numerosos casos, incluso, algunos elementos tecnológicos están integrados en la técnica. (Chevallard, 1999, p. 4).

Esto significa que, en la enseñanza, desde el diseño de la tarea se consideran elementos tecnológicos que guían la utilización de las técnicas para poder justificar su uso y de esa manera poder ir desarrollando el conocimiento. Por ejemplo, en la suma de fracciones con diferente denominador, los alumnos pueden utilizar la técnica de “los productos cruzados”, pero más que un mecanismo para su solución, la tecnología se refiere a la explicación de por qué se emplea este procedimiento, dando como posible justificación la conversión de las fracciones a sus equivalentes con denominador común para sólo sumar los numeradores, aspecto que se debe considerar en el planteamiento de la tarea, para que de este modo puedan desarrollar las técnicas necesarias para el implemento de esta tecnología.

Teoría

El discurso tecnológico posee afirmaciones relativamente explícitas, que se demuestran con el uso de las técnicas empleadas en la resolución de las tareas. Para ello se requiere pasar a un nivel superior de justificación-explicación-producción denominado teoría que retoma directamente la relación de la tecnología con la técnica, ya que de esta manera se valida desde un constructo conceptual aprobado el proceso por el cual se ha transitado.

Los enunciados teóricos aparecen frecuentemente como “abstractos”, apartados de las preocupaciones de los “simples” tecnólogos y técnicos. Este efecto de abstracción es correlativo a lo que funda la gran generatividad de los enunciados teóricos -su capacidad para justificar, para explicar, para producir. (Chevallard, 1999, p. 5).

Un sujeto utiliza una teoría cuando demuestra el por qué justifica la tecnología en la aplicación de la técnica para realizar la tarea, es una actividad superior que justifica el actuar en la tarea resuelta.

La tarea, la técnica y la tecnología adquieren sentido a través del discurso teórico. En el caso de la suma de fracciones, utilizar la técnica de los “productos

cruzados”; permite expresar que esta técnica es buena porque permite transformar las fracciones a sus equivalentes con denominador común, lo que permitirá realizar la suma de los numeradores únicamente, todo eso adquiere sentido en el marco de la Teoría de los números racionales.

Ahora bien, con base en las relaciones entre tarea, técnica, tecnología y teoría, se puede establecer que las praxeologías no siempre son de un mismo tipo, dependiendo del alcance de las técnicas, de las tecnologías y de las teorías, pueden encontrarse praxeologías puntuales, locales y regionales.

Praxeologías puntuales

Como se ha mencionado, una praxeología está constituida por un bloque práctico-técnico (saber-hacer) y uno tecnológico-teórico (saber). Alrededor de un tipo de tareas, se encuentran en principio, una triada formada por una técnica, una tecnología y una teoría, a dicha actividad se le conoce como praxeología puntual, esto es, cuando la praxeología se centra en una sola técnica y sólo una, se habla de una praxeología puntual.

Praxeologías locales

Surgen cuando se integran diversas praxeologías puntuales que usan un discurso tecnológico en común. Básicamente aparecen cuando una tecnología puede sustentar a un conjunto de técnicas que conforman las praxeologías puntuales. (Soto, 2017).

Praxeologías regionales

Se desarrollan al momento de articular e integrar un conjunto de praxeologías locales en torno a una teoría matemática común (Soto, 2017).

Praxeologías globales

Es el producto de varias praxeologías regionales mediante la integración de diferentes teorías (Soto, 2017).

En una institución dada, I, una teoría responde a varias tecnologías, cada una de las cuales a su vez justifica y hace inteligibles varias

técnicas, correspondientes a otros tantos tipos de tareas. Las organizaciones puntuales van así a combinarse, en primer lugar, en organizaciones locales centradas sobre una tecnología determinada, y después en organizaciones regionales formadas alrededor de una teoría. Más allá, se denominará organización global el complejo praxeológico obtenido en una institución dada, por la agregación de varias organizaciones regionales correspondientes a varias teorías (Chevallard, 1999, p. 6).

En esta investigación el trabajo se circunscribe a las praxeologías locales, sin embargo, se utilizarán algunas praxeologías puntuales al momento de dar a conocer el desarrollo de las actividades que se desprenden del taller planteado.

El Proceso de Estudio en la TAD

Para identificar el estudio como un elemento de análisis haremos referencia a éste como la acción que despliega un sujeto (S) cuando quiere conocer un objeto (o).

El estudio alude a las acciones que se llevan a cabo en una institución para realizar las tareas matemáticas que se plantean en ella, aunque el estudio no se circunscribe al ámbito escolar, hay estudio en todas las instituciones de la sociedad donde se manipula un saber establecido o en vías de establecerse (Aguayo, 2004).

El estudio en el marco de la TAD se refiere a aquel momento que se experimenta el Recorrido de Estudio e Investigación (REI) donde se desarrolla la adquisición de un nuevo conocimiento. En ese sentido, el estudio conlleva un proceso complejo donde se van abordando diferentes aspectos propios de las diferentes praxeologías para la interiorización de un saber.

Ahora bien, para Chevallard (1999), hay momentos invariables que caracterizan a un proceso de estudio, éstos no son un método ni una secuencia, pueden cambiar su orden y repetirse tantas veces como el director del estudio considere necesario.

Los Momentos de estudio

El primer momento es denominado el primer encuentro con la organización praxeológica que se pone en juego a través de un tipo de tarea, puede ser una especie de volver a descubrir dicho objeto en función de entornos matemáticos y didácticos.

¿Qué es lo que se encuentra en un primer encuentro con una organización matemática? La cuestión de la identidad del objeto así encontrado por primera vez merece examinarse. Si existen en efecto primeros encuentros anunciados.

El primer encuentro puede inscribirse en una problemática cultural-mimética. En este caso, mediante una narración con valor de informe a partir de una indagación sobre el mundo, el objeto encontrado aparece en primer lugar como existiendo por otra parte, en algunas prácticas sociales.

El encuentro cultural-mimético conduce en principio a buscar y explicitar -bajo el modo discursivo- las razones de ser de los objetos así encontrados.

El encuentro en situación conduce así a proponer, de hecho, y quizá incluso de derecho, una “definición” del objeto encontrado. (Chevallard, 1999, p. 22-23).

Por ejemplo, un niño de la escuela primaria puede tener su primer encuentro con el componente praxeológico cuando comprende una situación problemática, cuando conoce por primera vez lo que tiene que realizar. En el caso particular de las fracciones sucede cuando los alumnos las identifican dentro del contexto gráfico, donde regularmente se comienza con medios, cuartos y octavos.

El segundo momento, llamado momento exploratorio consiste en la búsqueda y la selección de una técnica que se relacione con el tipo de tarea planteada.

El estudio y la resolución de un problema de un tipo determinado va siempre a la par con la constitución de al menos un embrión de técnica, a partir del cual una técnica más desarrollada podrá eventualmente emerger: el estudio de un problema particular, espécimen de un tipo estudiado, aparecería así, no como un fin en sí mismo, sino como un medio para la constitución de una técnica de resolución. (Chevallard, 1999, p. 23).

En este momento, el sujeto podrá hacer uso de los conocimientos que previamente ha desarrollado para atender la tarea, utilizando los procedimientos empleados con anterioridad para tipos de tareas similares a los que se plantean. Utilizando el ejemplo anterior de la identificación de fracciones, el momento exploratorio sería cuando los alumnos hacen alusión a la división del entero con relación al denominador de la fracción, utilizando diversas estrategias para ello.

El tercer momento, denominado el trabajo de la técnica, es donde se pretende mejorar la técnica acercándose a la fiabilidad y eficacia de la misma, lo que requiere un replanteamiento de la tecnología elaborada. En el momento del trabajo de la técnica, se espera que el alumno haya utilizado diferentes técnicas que le permitan cumplir con la tarea planteada. Mientras que el director del estudio propone nuevas tareas para que la técnica sea generalizada, logrando así la automatización de la técnica.

En el caso de las fracciones podemos decir que, al trabajar con la resta de fracciones con diferente denominador, los alumnos han experimentado y comprendido la técnica de transformar las fracciones a sus equivalentes con el diferente denominador para de esta manera restar únicamente los numeradores.

El cuarto momento es donde se aborda la constitución del entorno tecnológico-teórico relativo de la tarea y técnicas abordadas previamente, es donde se da la interrelación con cada uno de los otros momentos.

Desde el primer encuentro con un tipo de tareas, hay generalmente una puesta en relación con un entorno tecnológico-teórico anteriormente elaborado, o con gérmenes de un entorno por crear,

que se precisará en una relación dialéctica con la emergencia de la técnica. (Chevallard, 1999, p. 23)

En este caso, para que emerja el entorno tecnológico, el director del estudio (profesor) asociará las técnicas empleadas de tal forma que se logre generalizar la tecnología utilizada en el mismo.

Retomando el ejemplo de la resta de fracciones, en este momento es donde los alumnos explican que, para desarrollar la resta de fracciones con diferente denominador, primero tenemos que transformar a equivalentes con el mismo denominador, ya que así podemos comparar partes iguales, así pues, únicamente se efectúa la resta de los numeradores que representan las cantidades que tenemos.

El quinto momento es el de la institucionalización donde se precisa la organización matemática abordada “Los otros momentos del estudio, en efecto, sólo nos libran una organización matemática en obras, donde el trabajo realizado, que se quiere duradero, se mezcla necesariamente con los “relieves” de una construcción elaborada por ensayos, retoques, paradas y avances”. (Chevallard, 1999, p. 24).

Lo que significa que en el momento de la institucionalización se trabaja con los elementos abordados en el transcurso del estudio dándole un carácter oficial, haciendo énfasis en los aspectos abordados y en aquellos que pudieron haber sido omitidos en la solución de la tarea encomendada.

Siguiendo con el ejemplo de la resta de fracciones, la situación exige encontrar la diferencia entre dos cantidades dadas. En esta etapa el docente recupera las participaciones de los alumnos para reflexionar que, para conocer la diferencia entre dos fracciones de diferente denominador, primero debemos encontrar una fracción equivalente a ambas fracciones de manera que ambas fracciones equivalentes tengan un denominador igual, para después restar únicamente los numeradores.

El sexto momento es el de la evaluación que se articula con el quinto momento. En éste se hace una revisión reflexiva respecto a lo aprendido, verificando el trabajo abordado.

La operación de evaluación debe ser entendida así en un sentido más amplio: detrás de la evaluación clásica de relaciones personales, es decir, detrás de la evaluación de “las personas”, se perfila la evaluación de la norma misma –de la relación institucional que sirve de patrón. ¿Cuánto vale, de hecho, la organización matemática que se ha construido e institucionalizado? Más allá de la interrogación sobre el dominio, por cualquier persona, de tal o cual técnica, encontramos entonces la interrogación sobre la técnica en sí misma ¿es potente, manejable, segura, robusta también? (Chevallard, 1999, p. 24).

Sin embargo, en el momento de la evaluación no sólo se reconoce aquello que se ha aprendido de la praxeología, sino también aquello que no fue posible estudiar, por ejemplo, la utilización de otras técnicas o tecnologías que den sustento al concepto abordado en la resolución de la tarea planteada. De igual forma, si el desarrollo de los momentos fue pertinente o pueden realizarse algunas modificaciones respecto a las condiciones presentadas en el desarrollo de éstas.

Empero, para estructurar un proceso en el que se incluyan los diferentes momentos de estudio, se hacen necesarios dos elementos conceptuales: un modelo epistemológico y un dispositivo didáctico. El modelo epistemológico de referencia es el análisis del proceso mediante el cual la praxeología matemática se fue desarrollando en el tiempo a través de la dialéctica pregunta/respuesta, es decir, analizando cómo las preguntas y sus respuestas fueron evolucionando hasta constituirse como una praxeología matemática validada socialmente. El segundo elemento conceptual es la presencia de un dispositivo didáctico que torne posible el acto de enseñanza.

Los Recorridos de Estudio e Investigación

Si se trata de estructurar un proceso de estudio, en la TAD se propone un dispositivo didáctico para ello, llamado *Recorrido de Estudio e Investigación (REI)*, en el que se integran las praxeologías a enseñar (Chevallard, 1999, 2004, 2009, en Parra, Otero, Fanaro, 2013).

Un REI se inicia con el estudio de una cuestión Q con fuerte poder generador, capaz de propiciar la aparición de numerosas cuestiones derivadas. Para poder dar respuesta a dichas cuestiones, se requiere la reconstrucción de un número considerable de herramientas matemáticas (técnicas, nociones, propiedades, etc.) que aparecen como una consecuencia (y no como el origen) del estudio de las cuestiones (Barquero, Bosch y Gascón, 2011).

Los REI son denominados FP cuando éstos se aplican en la formación de profesores (REI-FP) y colocan preguntas Q como punto referencia del saber. El estudio de Q es realizado por una cantidad de alumnos X guiados por un número de profesores Y. Esto provoca la emergencia de un sistema didáctico de la forma S (X;Y;Q). El funcionamiento de este sistema didáctico produce entonces una respuesta R a la pregunta Q, esto es, un fragmento de una organización de saber en construcción. Es decir, el saber surge como resultado a una pregunta, con un sentido y una razón de ser. Esto da lugar a los REI codisciplinarios, donde pueden intervenir una disciplina, dos disciplinas o más, dependiendo de la naturaleza de la pregunta (Parra, Otero y Fanaro, 2013). De acuerdo con Parra, Otero y Fanaro (2013), los REI contienen ciertas características que los definen:

- Permiten la emergencia y desarrollo de relaciones funcionales con el saber, introduciendo la pedagogía de la investigación y del cuestionamiento del mundo, que se opone a la pedagogía actual dominante, la de enumerar saberes – esta pedagogía se refiere a estudiar obras (saberes) sin un sentido, sin una razón de ser, sin saber a qué preguntas responden;
- Se generan por una pregunta Q viva y rica con un fuerte poder generador, denominada pregunta generatriz, es decir, capaz de imponer numerosas preguntas derivadas. La búsqueda de respuestas

a estas preguntas debería conducir a la construcción de un gran número de saberes de diversas disciplinas. Así, una pregunta generatriz y sus derivadas tendrían que permitir recorrer el programa de estudios propuesto en un curso, o al menos, una buena parte de él;

- Evitarían la atomización de la matemática que se enseña en muchas instituciones escolares, e impedirían la pérdida de sentido y del origen de las preguntas que allí se estudian. Esta función de los REI permite que la modelización matemática esté presente en los Sistemas de Enseñanza;
- Permiten un proceso de modelización en cinco tiempos: observar las respuestas existentes; analizar esas respuestas; evaluarlas; desarrollar una nueva respuesta, y finalmente, defender esa nueva respuesta producida;
- Demandan que estos tiempos del estudio sean llevados a cabo en un espacio de trabajo estructurado por las dialécticas: dialéctica del paracaidista y de las trufas, dialéctica de entrar y salir de tema, dialéctica de las cajas negras y las cajas claras, dialéctica de la excripción y de la inscripción, dialéctica de la conjetura y de la prueba, dialéctica de la producción y la recepción, dialéctica del individuo y del conjunto, y la dialéctica de preguntas y respuestas. Se utilizan las dialécticas como metáforas de acuerdo con el desarrollo del REI aplicando cada uno de los momentos de estudio para el trabajo con las praxeologías.

Ahora bien, si hablamos de un Recorrido de Estudio e Investigación para la Formación de Profesores (REI-FP), se habrá de considerar su estructura de cinco módulos, a saber; 0) ¿cómo enseñar un contenido C?; 1) vivir un REI; 2) analizar el REI; 3) Diseñar un REI y; 4) Gestionar y experimentar un REI.

Módulo 0. ¿Cómo enseñar un contenido C?

Es el módulo donde se conoce la problemática identificada por el profesor, donde se parte de una cuestión o conjunto de éstas para que se vayan planteando poco a poco respuestas colectivas y para que al final cada uno aporte respuestas personales. Estas cuestiones son base de la investigación didáctica. (Ruíz, Bosch y Gascón, 2019).

Este módulo contiene tanto la construcción de Módulo 0 (su elección y asunción), así como las exploraciones iniciales con vista a elaborar primeros elementos de respuesta, generalmente a partir de los medios más habituales para los profesores: currículum, libros de texto, revistas para el profesorado, revistas de investigación, centros de recursos, webs, etc. El rol de los formadores en este proceso no es el de aportar elementos de respuesta para darlos a conocer a los profesores, sino guiarlos en la búsqueda de estos elementos y, sobre todo, iniciarlos en la práctica de los gestos básicos del cuestionamiento didáctico. (Ruíz, Bosch y Gascón, 2019, p. 135).

En otras palabras, este módulo sirve para establecer una especie de diagnóstico centrado fundamentalmente en las praxeologías matemáticas que se van a reconstruir en el aula. Para ello es necesario considerar cuáles están presentes en los planes y programas de estudios y en otros documentos que se utilizan en la formación y, analizar también los avances que se puedan lograr con base en el propio dominio de las praxeologías matemáticas que tengan los participantes del estudio.

Módulo 1. Vivir un REI

Consiste en que el alumno se enfrente a una tarea en específico usando las técnicas y tecnologías para dar respuesta a la situación planeada. En esta actividad experimentan directamente con un REI, desarrollándolo en todas sus fases (Soto, 2017).

El objetivo de este módulo es que el estudiante-profesor viva un REI como miembro del sistema didáctico $S(X, Y, Q1)$ situado en la institución de formación del profesorado, donde X denota la comunidad de estudiantes para profesor, Y el formador— como director del estudio— y $Q1$ la cuestión a la que deberán aportar su propia respuesta. En esta fase del recorrido de formación, $Q1$ es la cuestión generadora del REI. (Ruíz, Bosch y Gascón, 2019, p. 137).

En este módulo se trata de situar al profesor en formación como un aprendiz de matemáticas, es decir se trata de que viva todos los momentos didácticos del proceso de estudio reconstruyendo una praxeología matemática específica.

Módulo 2. Analizar el REI vivido

En este módulo se analizan las características de la situación planteada en el módulo anterior, haciendo una descripción de lo acontecido, desglosando cada uno de los aspectos abordados en el REI (Soto, 2017).

En este módulo se debe cuestionar y analizar en profundidad la estructura y la dinámica del REI vivido, tanto en lo que respecta a las praxeologías matemáticas construidas efectivamente, como a la organización didáctica de este proceso, en términos de la articulación de los momentos y las dialécticas del estudio, de los gestos y las técnicas y tecnologías didácticas que se han puesto en juego, y en términos de las responsabilidades que han asumido los profesores en formación en su papel de estudiantes y el formador en su papel de director del proceso de estudio (Chevallard, 1999 en Ruíz, Bosch y Gascón, 2019, p. 137).

En este módulo los profesores en formación analizan las acciones que realizaron en el primer módulo, pero con una mirada de eventual profesor, la cual les permite dar cuenta, entre otras cosas, de la estructura de las actividades

propuestas, los objetos o contenidos matemáticos incluidos en éstas, los diferentes momentos que se desarrollaron para reconstruirla.

Módulo 3. Diseñar un REI

En este apartado los estudiantes diseñan y/o adaptan un REI dirigido a los alumnos con los cuales trabajarán en una etapa posterior, considerando los elementos abordados en los módulos anteriores. De esta forma identificarán los elementos esenciales en el REI para su diseño (Soto, 2017).

¿Cómo llevar a cabo la tarea de diseñar un REI para los alumnos de cierta etapa educativa, análogo al vivido, y analizado en las fases anteriores? Esta cuestión da origen a otras más concretas tales como: (a) ¿qué elementos componen el diseño de un REI?, (b) ¿cuál es el orden más razonable para diseñar cada uno de dichos elementos?, y (c) ¿cómo deben expresarse materialmente dichos elementos del REI? Los criterios básicos para dar respuesta a estas cuestiones y explicitar un diseño didáctico a priori de un REI análogo al vivido surgen en cierta medida de las respuestas aportadas en los módulos anteriores. (Ruíz, Bosch y Gascón, 2019, p. 138).

Con base en lo analizado previamente, los profesores en formación diseñan un REI considerando tanto las praxeologías matemáticas que han reconstruido durante los módulos anteriores, como los momentos didácticos que son consustanciales al proceso de estudio. Retoman parte de lo vivido para ubicarlo en el proceso de estudio de sus alumnos, lo que les permite tener un enfoque específico para enseñar matemáticas.

Módulo 4. Gestionar y experimentar un REI

En este módulo se lleva a la práctica la implementación del REI diseñado en el módulo anterior, de tal forma que se puedan analizar las praxeologías que emplean en el desarrollo de éste, así como los elementos que conforman el REI (Soto, 2017).

El objetivo de este módulo es doble. Por un lado, dar soporte regular a los profesores que se inician en el diseño y gestión de los REI y, por otro, recoger las cuestiones, dificultades y obstáculos que han podido surgir durante esta gestión. Este trabajo experimental debería proporcionar criterios fundados para modificar el diseño de los REI de cara a nuevas experimentaciones e introducir a los profesores a la problemática ecológica en didáctica, mediante el análisis de las condiciones y restricciones institucionales con que se van a topar. (Ruíz, Bosch y Gascón, 2019, p. 138).

En este módulo se lleva a la práctica el REI diseñado en el módulo anterior y, posterior a su puesta a prueba, los profesores en formación analizan los efectos que tuvieron las actividades propuestas, tanto en lo que se refiere a la actividad matemática propuesta como a los aprendizajes que los alumnos lograron. Este análisis permite considerar futuras modificaciones al REI.

Sin embargo, desde la TAD se asume la imposibilidad de diseñar un REI sin la base de un modelo que determine las relaciones entre los componentes praxeológicos, es decir, se requiere un modelo del saber en juego que dé cuenta de la estructura de cuestiones y técnicas que caractericen las praxeologías sobre ese saber, un modelo epistemológico que sirva de referencia para el estudio.

Modelo Epistemológico de Referencia (MER)

Desde la perspectiva de la TAD, el MER es un modelo teórico básico que utiliza el investigador a la hora de analizar los saberes entre diferentes instituciones, considerando así la transición y evolución de éstos, lo cual es la base en toda la construcción conceptual de todos los saberes que se abordan en las instituciones. En otras palabras, el MER es el referente teórico que se tiene respecto a un tema en específico para su posterior desarrollo.

La transposición didáctica puso en evidencia la necesidad de ahondar en lo epistemológico, como base para entender los factores que posibilitan, condicionan, e incluso a veces impiden, la construcción de

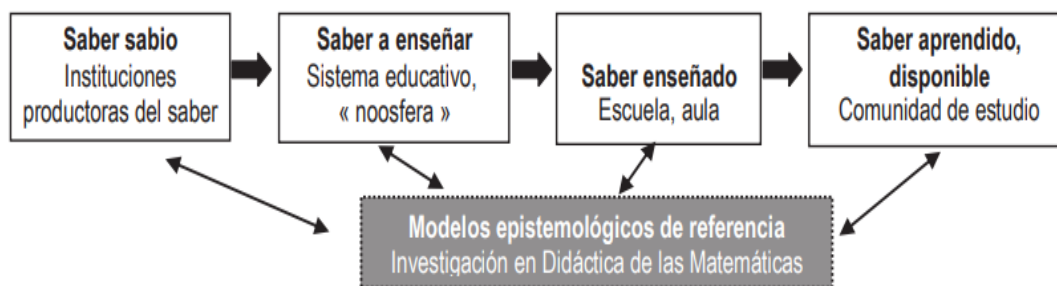
ciertos saberes en una institución determinada, así como las formas que se proponen para la construcción de dichos saberes (saber a enseñar), y las construcciones efectivas que se llevan a cabo (saber enseñado y saber aprendido). (García y Sierra 2015, p. 300).

Resultado de esa necesidad, se acuñó el concepto de Modelo Epistemológico de Referencia. Algunas de las funciones de los MER son fijar la amplitud del ámbito matemático donde se establecerá el problema de investigación, identificando los fenómenos didácticos que subyacen dentro del concepto a trabajar, así como la elaboración de explicaciones tentativas y tipos de soluciones que se consideran apropiadas en el abordaje de éste (Gascón 2014 en García y Sierra, 2015).

Los MER están constituidos como instrumentos de emancipación del didacta y de la ciencia didáctica, puesto que permite cuestionar la forma como las instituciones involucradas en la problemática didáctica interpretan el saber matemático (Barquero, Bosch y Gascón, 2013). En otras palabras, la reconstrucción de un MER rompe con la invisibilidad de los contenidos matemáticos escolares, con la tradición de considerarlos perfectos y se pregunta por la pertinencia de estructurarlos de una manera diferente. En la Figura 1 puede apreciarse la relación de la cadena transpositiva con el MER.

Figura 1.

Papel de los modelos epistemológicos de referencia en los procesos transpositivos



Nota: Tomada de Bosch y Gascón, 2007, en García y Sierra, 2015.

En la Figura 1 se puede ver que el MER considera la transposición del saber desde las diferentes instituciones que lo producen hasta la adquisición de éste por parte del estudiante pasando por el sistema educativo (noosfera) y la escuela. Básicamente, se considera el referente teórico que ha de enmarcar la transmisión de un nuevo saber.

La ruptura con la invisibilidad del saber escolar permite que los MER sean considerados como propuestas alternativas a los modelos epistemológicos dominantes de cierto ámbito del saber enseñado en una institución determinada, más que nada colaboran en la construcción de estos modelos alternativos en la medida que los modelos epistemológicos dominantes no sólo determinan cómo se interpreta el conocimiento matemático sino también cómo se organiza su estudio en la institución considerada (García y Sierra, 2015).

Por ejemplo, en la escuela primaria el modelo epistemológico dominante en el ámbito de las fracciones es el de Kieren (1980), que postula el significado de las fracciones como la relación parte todo y la medida, las fracciones como cociente, la fracción como razón, y la fracción como operador, aspectos que los alumnos deberán de saber abordar en el transcurso de la educación primaria. Sin embargo, un MER alternativo construido sobre ese mismo saber puede establecer que las fracciones pueden comprenderse desde dos nociones importantes: como fracturador y como comparador (Freudenthal, 1983, en González, 2018).

MER Fracciones

Para la enseñanza de las fracciones en cualquier nivel, siempre se ha considerado este tópico como un mega concepto el cual considera diferentes subconceptos que forman parte de él. Dentro de estas clasificaciones podemos encontrarnos con dos de los modelos que han sido de los más referenciados en el campo, el propuesto por Kieren (1980) quien establece cuatro significados de la fracción: medida, cociente, razón y operador; y el de Freudenthal (1983) quien expresa las fracciones como fracturador y comparador. En este apartado definiremos cada uno de los modelos que componen el MER de esta investigación.

Análisis de los números racionales desde la perspectiva de Kieren

El número racional es “cualquier número x que satisface $ax = b$, donde a y b son enteros y $b \neq 0$ ” (Kieren, 1980, p. 125). En palabras del mismo autor, es un concepto que no expresa demasiada información, sin embargo, este mismo concepto se concibe como un gran número de cosas, un mega concepto.

Kieren (1976, en Kieren, 1980) propone “una imagen más completa de los números racionales” en la cual establece que éstos se componen de 7 interpretaciones: fracciones, decimales, pares ordenados, medidas, cocientes, operadores y razones. Posteriormente, Kieren (1988) establece 4 subconstructos de los números fraccionarios y racionales: Medida, cociente, razón y operador multiplicativo, sin hacer referencia al parte todo “esta relación es considerada por Kieren como base para instaurar los diferentes sub-constructos” (Real, Gómez y Figueras 2013, p. 22).

Fracciones como medida

El subconstructo “número racional como medida” maneja una relación cercana con la parte todo. La tarea específica de medir corresponde al asignar un número específico a una región o una magnitud de hasta tres dimensiones producto de la repartición equitativa de la unidad (Kieren, 1980). Podemos expresar este subconstructo en términos de Gómez y Pérez (2016) como “al medir cantidades de magnitudes que siendo conmensurables no se corresponden con un múltiplo entero de la unidad de medida. La fracción a/b resulta de dividir la unidad en b partes iguales y tomar solamente a partes de ella”. (p. 824).

Fracciones como Cociente

Los números racionales como cociente se definen como “el resultado de dividir una cantidad en un número dado de partes y se relaciona en última instancia con las ecuaciones lineales del álgebra” (Kieren, 1980, p. 135). El subconstructo como cociente se puede observar en el ejemplo que resulta de dividir el uno entre cuatro partes y designar tres partes ($3/4$) al resultado de dividir tres unidades en 4 partes ($3/4$) sin embargo son dos conceptos diferentes.

La fracción como cociente se puede explicitar por medio de una división indicada, donde esta determina una división entre dos números naturales $\frac{3}{5}$ aplicable en una situación de reparto, tenemos tres barras de chocolate para repartir entre 5 niños, a cada uno de ellos les tocaría $\frac{3}{5}$. (Pinedo, 2020).

Fracciones como razón

En este subconstructo se manifiesta la idea de la relación cuantificable que existe entre dos cantidades, expresando en términos de Kieren (1980, p. 135) como “las comparaciones cuantitativas de dos cualidades”. En esta definición podemos analizar las diferencias que existen entre las aplicaciones del concepto, el significado de $\frac{3}{10}$ de harina no es el mismo que el significado de $\frac{3}{10}$ que resulta de comparar a los hombres y mujeres en un equipo de fútbol (Kieren, 1980).

En esta definición la fracción es usada como un índice comparativo entre dos cantidades de alguna unidad de medida. Haciendo alusión a la situación donde tenemos un conjunto de figuras donde cinco de ellas son cuadrados y tres círculos, la relación que existe entre círculos y cuadrados sería de $\frac{3}{5}$ es decir por cada tres círculos tenemos cinco cuadrados (Pinedo, 2020).

Fracciones como operador multiplicativo

El subconstructo relacionado al operador multiplicativo hace alusión a la transformación multiplicativa de un conjunto (región) hacia otro. Se puede considerar como la reducción o amplificación de una figura geométrica en otra asociada al uso de fracción (Kieren, 1980). Por su parte, Pinedo (2020) establece que las fracciones como operador son vistas como transformaciones, algo que actúa sobre una situación para ser modificada, básicamente se establece la fracción como una sucesión de multiplicaciones y divisiones o a la inversa.

Cuando hablamos de la fracción como operador en una situación particular, podemos utilizar el ejemplo de Llinares (2000) en donde establece que si en un contexto discreto se considera como una situación inicial el conjunto formado por 36 niños de una clase, el resultado de la aplicación del operador $\frac{2}{3}$ se puede representar como: “el estado inicial = 36 niños; el operador que resulta de multiplicar

por dos y dividir entre tres el estado inicial; dando como estado final 24 ($36 \cdot \frac{2}{3} = 24$)” al estado final 24 recibe el nombre de dos tercios como la descripción de un estado de cosas.

Al analizar la situación planteada anteriormente, podemos considerar la fracción como operador donde ésta es un elemento del Álgebra de funciones, siendo así los números racionales parte de una estructura algebraica asociada a la multiplicación (Llinares, 2000).

Análisis de los números racionales desde la perspectiva de Freudenthal

Freudenthal (1983) expresa que las fracciones están establecidas como “los números racionales positivos”, sin embargo, hace alusión a la necesidad de hacer énfasis en ellos como objetos matemáticos y lo que éstos representan. Se pueden entender los números racionales como “la misma cosa, representada de diferentes formas” por ejemplo $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, 0.5 ... en consecuencia, las fracciones son una fuente fenomenológica del número racional; entendido esto dentro de la fenomenología didáctica como la descripción de todos los fenómenos organizados por un concepto o medio de organización que se pueden encontrar, ya sea dentro o fuera del ámbito matemático “aunque las fracciones $\frac{2}{4}$ y $\frac{3}{6}$ sean elementos del mismo número racional que puede representarse por $\frac{1}{2}$, cada una de ellas pudo ser utilizada en situaciones distintas” (Valenzuela, Figueras, Arnau y Gutiérrez-Soto, 2016. P. 2).

En términos de Freudenthal, la fenomenología didáctica de las fracciones está relacionada con la comparación o descripción de objetos, la división de sustancias medidas por magnitudes, la distribución de cantidades y el sistema decimal de medida, aspectos que dan pie a la interpretación de las fracciones en sus dos principales representaciones (Real, Gómez y Figueras, 2013).

Las fracciones como fracturador

Al hablar de fracturador se hace referencia a la división de un elemento en otros que lo conforman, al dividir sustancias medidas por magnitudes, éstas se fracturan en partes iguales para relacionar una parte o algunas partes con el todo, de tal forma que la fracción representa una relación parte-todo (Real, Gómez y

Figueras, 2013). A su vez esa idea es retomada por González (2018, p.68) como “un todo (discreto o continuo; definido o indefinido; estructurado o carente de estructura) se tiene que dividir en partes iguales”.

Las fracciones como comparador

Cuando se contempla el concepto de comparador se recurre a la idea de analizar las características de dos o más elementos, por su parte Real, Gómez y Figueras (2013) expresan el concepto como la idea de expresar el resultado de una comparación de cantidades o valores de magnitud. En este mismo sentido, las fracciones también pueden describir cantidades o valores de magnitud por medio de otros valores o cantidades, razones, procesos cíclicos o periódicos. Esta definición se manifiesta al momento en que “se hace una comparación cuantitativa entre dos todos diferentes, mismos que pueden ser representados por cantidades discretas o continuas o comparados de un todo independiente” (González, 2018, p. 68).

Las fracciones como operador

La fracción puede aparecer en un operador o en una relación: ‘partiendo por la mitad’ –dinámico–, ‘la mitad de grande’ –estático–. De esta manera se considera el operador fracción como la relación de fractura que puede respectivamente actuar sobre objetos y relacionar entre sí objetos, cantidades y valores de magnitudes. (Valenzuela y Figueras, 2015).

Si los objetos que se comparan son el todo con sus partes, entonces la fracción aparece como operador fracturante (dinámico) o de relación de fractura (estático) si el operador fracturante actúa sobre objetos concretos rompiéndose en partes equivalentes. Si el todo y la parte se consideran separados, entonces se habla de la fracción como relación de razón. Si se comparan cantidades y magnitudes, entonces la fracción aparece como operador razón, que transforma un número, una longitud, o un peso en otro, es decir, coloca las magnitudes o cantidades en una razón, unas respecto de otras. (Valenzuela y Figueras, 2015).

De la relación razón, se puede pasar al operador razón, esto mediante un estadio intermedio de la fracción como transformador, por ejemplo, prolongando 2 $\frac{1}{2}$ veces una magnitud o cantidad, esta operación se realiza sobre el objeto mismo, aunque no por ruptura como en el caso de operador fracturante, sino como aplicación y deformación. (Valenzuela y Figueras, 2015).

Al analizar algunas investigaciones sobre la enseñanza de las fracciones se puede observar que fundamentalmente se realizan desde dos perspectivas. Una, la más utilizada, está basada en el modelo de Kieren (1988) que postula a la fracción como un concepto que adquiere diversos significados, a saber el de medida, cociente, operador y razón. Otra perspectiva, menos utilizada en las investigaciones, es la de Freudenthal (1983) quien asocia a la fracción con dos subestructos, el de fracturador y el de comparador, la noción de la fracción como operador multiplicativo se incluye en el subestructo comparador. Estos conceptos son la perspectiva teórica sobre la fracción que guía la presente investigación.

III. Metodología de investigación

Si bien la presente investigación teóricamente se basa en los postulados de la TAD y por ello puede decirse que es una investigación ligada a las realizaciones didácticas, por los análisis que de los datos se hacen se enmarca dentro del paradigma cualitativo, debido a que se considera como una propuesta de ingeniería didáctica y no sólo pretende centrarse en el hecho de conocer lo que resulta de la misma. De esta manera se busca obtener un conocimiento directo de la realidad social que se estudia con la finalidad de comprenderla (Peiró, 1996 en del Valle y Curotto, 2008). La investigación cualitativa esencialmente desarrolla procesos en términos descriptivos e interpreta acciones, lenguajes, hechos funcionalmente relevantes y los sitúa en una correlación con el más amplio contexto social (Martínez, 2011).

Al tratarse de una ingeniería didáctica, se hace referencia a un esquema experimental basado en las “realizaciones didácticas” en clase, entendiéndose así a la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. De igual manera, se caracteriza por el registro de los estudios de caso cuya validación es en esencia interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori (Artigue, Douady, Moreno y Gómez, 1995).

A su vez, este tipo de investigación es interpretativa, es decir, se sostiene en una concepción hermenéutica. Los métodos de obtención de información permiten acceder a sus datos para ser observados, descritos e interpretados. Su aplicación se ha desarrollado preferentemente en las ciencias sociales, y su interés no es medir las variables componentes de un fenómeno social, sino entenderlo e interpretarlo (Ñaupas, Mejía, Novoa, Villagómez, 2014).

Además, pretende ser de alcance descriptivo debido a que se busca hacer una descripción del trabajo realizado con el REI-FP (Sierra, 2011), de modo que permita, a partir de los datos obtenidos, responder la pregunta de investigación y así mejorar el proceso de formación de los futuros docentes. Los estudios descriptivos tienen como objetivo interpretar con precisión las características de un

individuo en particular, una situación o un grupo, con el fin de establecer su estructura o comportamiento (Kothari, 2004; Arias, 2012).

Dicho en otras palabras, la investigación descriptiva busca especificar propiedades características y rasgos importantes de cualquier fenómeno que se analice, en este caso la implementación de un REIFP referente a la enseñanza de fracciones para generar nuevos conocimientos. En este tipo de estudios el fenómeno a ser investigado es medido y evaluado en sus diferentes aspectos o dimensiones, considerando aspectos desde el dominio matemático hasta el didáctico. Estos estudios responden a preguntas como qué, dónde, cuándo, cómo (Abero, Berardi, Capocasale, García y Rojas, 2015).

Al ser una propuesta de ingeniería didáctica enmarcada en la TAD se cuenta con una propia estructura metodológica que deriva de los principios de la TAD, desde esta perspectiva se sugiere desarrollar los 5 Módulos de un REI-FP, específicamente con el contenido de fracciones. Para desarrollar este recorrido en la formación de docentes se habrán de trabajar los siguientes módulos:

Módulo 0: ¿Cómo enseñar un contenido C?

Para comenzar con el dispositivo didáctico se delimita el contenido matemático con el que se realizará el estudio, considerando las problemáticas identificadas en el diagnóstico general del grupo a trabajar.

Módulo 1: Vivir un REI

En este apartado los docentes en formación conocerán vivencialmente un REI específico al tema de fracciones, para experimentar la propia metodología que más adelante utilizarán en la enseñanza de los conceptos matemáticos referidos al tema.

Módulo 2: Analizar el REI

En este apartado se pretende explorar las nociones previas a la vivencia del REI, así como las transformaciones que tuvieron efecto en el desarrollo y las nuevas concepciones que se dieron al término del mismo.

Módulo 3: Diseñar un REI

De manera secuencial, una vez experimentado y analizado el REI, en este apartado se diseñará una propuesta de un REI a trabajar con alumnos en educación primaria, considerando a éste como el dispositivo didáctico para su implementación.

Módulo 4: Gestionar y Experimentar un REI

Este módulo se caracteriza por llevar a la práctica el REI diseñado con la intención de profundizar en el análisis de las praxeologías que emplean los alumnos y a su vez profundizar en cada uno de los momentos que componen el REI en un contexto real.

Técnicas e Instrumentos de recolección de datos

Dentro de la investigación se va a recurrir a dos técnicas, entendidas como el procedimiento o forma particular de obtener datos o información. La primera de ellas fue la observación, técnica que consiste en visualizar o captar mediante la vista, en forma sistemática, cualquier hecho, fenómeno o situación que se produzca en la naturaleza o en la sociedad, en función de unos objetivos de investigación preestablecidos. Se considera como observación participante debido a que el investigador pasa a formar parte de la comunidad o medio donde se desarrolla el estudio (Arias, 2012).

La otra técnica que se utilizó será la entrevista ya que al momento de ir avanzando en cada uno de los módulos de REI-FP se requerirá explorar las concepciones de los alumnos. Esta técnica se basa en una conversación “cara a cara”, entre el entrevistador y el entrevistado respecto a un tema previamente determinado, de tal manera que el entrevistador pueda obtener la información necesaria. Se considera como semiestructurada cuando existe una guía de preguntas además de que se puede realizar otras no contempladas inicialmente, considerando que una respuesta puede dar origen a otras preguntas. Para este

estudio consideraremos analizar las técnicas y el discurso tecnológico que utilizan los alumnos para dar solución a las tareas. (Arias, 2012).

Los instrumentos, de acuerdo con las técnicas empleadas que servirán de apoyo para la recogida de datos en la investigación, serán los planes de clase, bitácora, videos y evidencias de las producciones de los alumnos.

Los planes de clase constituyen una síntesis del saber pedagógico en la que se articulan conocimientos disciplinarios con una perspectiva didáctica que señala las directrices de cómo se debe asumir la enseñanza de ciertos contenidos (Figueroa, Aillon y Kloss, 2016).

La bitácora, como lo expresan Hernández, Fernández y Baptista (2014), es una especie de diario personal que incluye aspectos como el ambiente donde se desarrolla la investigación, cronología de sucesos, vinculaciones entre conceptos del planteamiento, fotografías y videos que fueron tomados, así como el propio proceso de la investigación (cómo vamos hasta ahora, qué nos falta, qué debemos hacer).

El video de las sesiones desarrolladas, en este caso favorece el análisis de las tareas planteadas, y gracias a ello se puede profundizar en lo que se hizo y por qué se hizo de esta manera, ya que “el video de una sesión de clase proporciona una perspectiva poliédrica de las interacciones entre participantes y permite volver sobre los datos originales una y otra vez” (Planas, 2006, p. 40).

Las evidencias de las producciones de los alumnos se refieren a todas y cada una de las actividades que vayan desarrollando a lo largo de las clases, pueden ser desde estrategias a lápiz y papel, hasta videos explicativos en la resolución de tareas planteadas.

Los sujetos de estudio

Los sujetos con los que se desarrolló la investigación fueron seleccionados a través del muestreo por cuotas, el cual consiste en formar grupos, estratos, clases de individuos por alguna característica en común como: sexo, edad, grupos ocupacionales, nivel de instrucción, pero no aleatoriamente sino a criterio del investigador (Ñaupas, Mejía, Novoa, Villagómez, 2014). En este caso los sujetos

son 6 alumnas que cursaron el séptimo semestre de la Licenciatura en Educación Primaria con el Plan de Estudios 2018, las cuales han concluido las asignaturas referidas a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, donde la cuota específica es que tengan como propuesta el trabajo con las fracciones en su investigación para la obtención del grado.

Taller: “Enseñar a enseñar fracciones”

Para el desarrollo de la investigación se propuso llevar a cabo un taller cuyo objetivo era fungir como un REI-FP que permitiera a los profesores en formación la adquisición de conocimientos necesarios para la enseñanza de las fracciones en la escuela primaria. El taller se diseñó de tal manera que se desarrollara en 10 sesiones de dos horas cada una, comenzando con el módulo de vivir el REI que en este caso se denominó aprendiz de matemáticas, para esta etapa que constaba de tres sesiones para las que se adaptaron actividades propuestas por Block (2022a y 2022b), posterior a esta se siguió con el módulo de analizar el REI diseñando la misma cantidad de sesiones para trabajar cada contenido asociado a la fracción para posteriormente pasar al módulo de diseñar un REI con las sesiones del alumno como docente en formación y como docente ingeniero; las sesiones se podrían trabajar de manera virtual o presencial y se estructuró de la siguiente manera:

Tabla 1.

Cronograma del taller enseñar a enseñar fracciones.

Sesiones	Rol del alumno	Temas	QG Cuestión generatriz
Sesión 0	Socialización del proyecto. Se explica la forma de trabajo a los alumnos participantes, así como el tiempo destinado y se hace una exploración previa respecto a los contenidos matemáticos y didácticos referidos a las fracciones. Se entrega un breve cuestionario individual a los participantes para que expresen sus ideas respecto a ¿Qué uso le das a las fracciones? ¿Qué es un número fraccionario? ¿Cómo se enseñan las fracciones en educación primaria?		
Sesión 1 REIFP: M1	El alumno como aprendiz de matemáticas	La fracción como fracturador	¿Cuáles son las técnicas y el discurso tecnológico teórico que emplean los docentes en formación para resolver tareas matemáticas relativas a una praxeología asociada a la fracción como Fracturador?

Sesión 2 REIFP: M1	*Actividades tomadas y adaptadas de: Más de uno, pero menos de dos. Block (2022a, 2022b)	La fracción como comparador	¿Cuáles son las técnicas y el discurso tecnológico teórico que emplean los docentes en formación para resolver tareas matemáticas relativas a una praxeología asociada a la fracción como comparador?
Sesión 3 REIFP: M1		La fracción como operador multiplicativo	¿Cuáles son las técnicas y el discurso tecnológico teórico que emplean los docentes en formación para resolver tareas matemáticas relativas a una praxeología asociada a la fracción como operador multiplicativo?
Sesión 4 REIFP: M2	El alumno como docente analista	Análisis de la sesión 1	¿Cuál es el discurso tecnológico teórico que expresan los docentes en formación durante el desarrollo de una tarea relativa al análisis conceptual, técnico y funcional del REI referido a la fracción como comparador?
Sesión 5 REIFP: M2		Análisis de la sesión 2	¿Cuál es el discurso tecnológico teórico que expresan los docentes en formación durante el desarrollo de una tarea relativa al análisis conceptual, técnico y funcional del REI referido a la fracción como fracturador?
Sesión 6 REIFP: M2		Análisis de la sesión 3	¿Cuál es el discurso tecnológico teórico que expresan los docentes en formación durante el desarrollo de una tarea relativa al análisis conceptual, técnico y funcional del REI referido a la fracción como operador multiplicativo?
Sesión 7 REIFP: M3	El alumno como docente en formación	Análisis de los momentos de estudio en las sesiones previas	¿Cuál es la estructura de las sesiones que permite identificar los momentos de estudio requeridos desde el REI?

Sesión 8 REIFP: M3	El alumno como docente ingeniero	Diseño de un REI relativo a fracciones	¿Cómo organizan, construyen y diseñan los docentes en formación el estudio de las fracciones a través de una organización didáctica?
Sesión 9	Evaluación del taller	Aprendizajes adquiridos	¿Qué fue lo que aprendieron en el taller los docentes en formación?

Nota: Consideraciones para cada sesión del taller. Fuente: Elaboración propia.

En lo que sigue se describe cada una de las tareas o actividades y se indica su correspondencia con cada una de las sesiones que se trabajaron. Las tareas T1, T2 y T3 corresponden al módulo 1 del REIFP (Vivir un REI).

Las tareas T4, T5 y T6 corresponden al módulo 2 (Analizar un REI).

Las tareas T7 y T8 corresponden al módulo 3 (Diseñar un REI).

TAREA UNO (T1). ENCUENTRA EL SIGNIFICADO DEL MENSAJE

La actividad consiste en escribir un mensaje breve, para otra pareja de personas, con esta información puedan construir un listón de determinado tamaño.

Primera parte: Jugar

Organización: Se trabaja en equipos de cuatro personas. Cada equipo se subdivide en 2 parejas “asociadas”, la A y la B.

Material.

Para cada pareja A y para cada pareja B:

Un cuarto de hoja blanca, lápiz y tijeras.

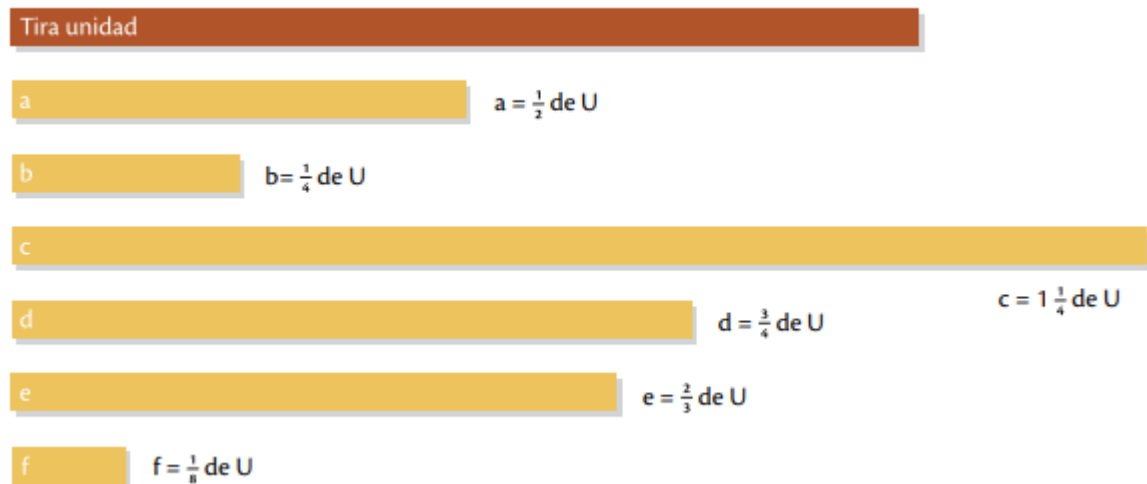
Una “tira unidad” (U) y uno de los “listones” (tiras de cartoncillo) a, b, c, d, e. Previamente, los listones deben calcarse y recortarse. El listón que se entregue a una pareja debe ser diferente al de su pareja asociada.

Una tira de cartoncillo de aproximadamente medio metro por 2 o 3 centímetros de ancho, para cortar (de preferencia de un color distinto a las anteriores, puede ser blanco).

*Atención: la regla graduada está prohibida.

Figura 2.

Referencias de los listones.



Nota: Tomado de Block (2022a)

Desarrollo:

Primer momento. Organización:

- Se forman las parejas A y B y se ubican en el salón. Las parejas A deben sentarse lo más lejos posible de sus parejas asociadas B para que unas no alcancen a ver el listón de las otras.
- Se entrega a cada una la tira unidad, una de las tiras (a, b, c, d, e) a las que llamaremos “listones”, una tira larga para recortar, y la hoja para escribir el mensaje.

Segundo momento. Se explica en qué consiste la actividad:

- “Cada pareja debe escribir un mensaje que se pueda decir por teléfono, es decir, un mensaje claro, breve y sin dibujos en su pedazo de hoja blanca, con la información necesaria para que su pareja asociada pueda cortar un listón del mismo tamaño que el de ustedes.”
- “No se puede usar regla graduada.”

- “Si lo desean, pueden utilizar la tira unidad (se muestra cuál es y se enfatiza que todas son del mismo tamaño)”.
- “Al final, van a sobreponer el listón que construyeron con el de su pareja asociada. Las dos parejas ganan si logran que los listones coincidan”.

Tercer momento. Se elaboran los mensajes.

- Cada integrante debe anotar su nombre en el mensaje.

Cuarto momento. Se intercambian los mensajes entre parejas A y B.

- Cada pareja construye un listón y anota su nombre al reverso.

Quinto momento. La verificación:

- Cada pareja compara el listón que hizo con el de su pareja asociada, super poniéndolos.

Sexto momento. La puesta en común:

- El docente puede decidir de antemano qué mensajes revisar y discutir públicamente. En este momento conviene que los alumnos vean:
 - Mensajes exitosos que echaron mano del recurso que se quería propiciar: subdividir la tira unidad.
 - Se puede incluir un mensaje que fue exitoso, a pesar de no haber acudido al procedimiento que se quería propiciar, por ejemplo, uso de unidades extra como el ancho de un dedo.
 - Uno o dos mensajes que no funcionaron. Aquí será necesario analizar qué falló, si fue un problema de la pareja emisora del mensaje o de quienes lo interpretaron.

Séptimo momento. La institucionalización.

- Al final de la actividad, se destaca la fracturación de la unidad como una buena manera de resolver este problema. El recurso a unidades de medida adicionales (como el pulgar) es bueno también, pero tiene la limitación de que no es seguro que los receptores del mensaje tengan esas unidades del mismo tamaño.
- Repetir el ejercicio intercambiando parejas.

TAREA DOS (T2). EL BASQUETBOL

La actividad consiste en que los alumnos traten de encestar canastas para poder determinar quién es mejor tirador.

Primera parte: Jugar

Los alumnos realizan la cantidad de tiros acordados a la canasta.

Material.

Balón de basquetbol.

Primer momento. Organización

De manera individual y cíclica los alumnos realizan los tiros a la canasta registrando cuántos llevan y cuántos encestan.

Segundo momento. Se explica en qué consiste la actividad:

Como primer momento los alumnos de uno en uno irán realizando los tiros a la canasta de tal manera que puedan contabilizar cuántos de ellos encestan.

Registran los datos obtenidos.

Tercer momento. Elaboración de una tabla

Con los datos obtenidos y tomando como referencia la siguiente tabla, se registran los datos con relación al número de lanzamientos realizados y la cantidad de canastas conseguidas.

Tabla 2.

Tiros encestados.

Chicos	Tiró	Encestó	Fracción del total de tiros que encestó
Alberto		6	$\frac{1}{2}$
Mary	24		$\frac{1}{3}$
Manu	25	10	
Valeria		14	$\frac{2}{3}$
Tatiana		16	$\frac{2}{3}$
Daniel	20		$\frac{3}{5}$

Nota: Tomada de: Block, 2022b

Cuarto momento. Se realiza un pódium

Una vez teniendo los datos sistematizados en la tabla, de manera individual los alumnos deberán de crear un pódium seleccionando a los tres mejores encestadores de canastas.

Tabla 3.

Pódium.

5to puesto	4to puesto	3er puesto	2do puesto	1er puesto

Nota: Orden del último puesto al primero. Fuente: elaboración propia

Los alumnos contrastan los pódiums creados de manera individual con el resto del grupo.

Quinto momento. La puesta en común:

- El docente puede decidir de antemano quienes darán a conocer sus resultados y discutir públicamente.
- En este momento conviene que los alumnos vean:
 - Cómo registraron las fracciones de tiros lanzados y encestados.
 - Al tratarse de cantidades de tiros diferentes, cuál fue el proceso que les permitió comparar cada una de ellas.
 - Considerar los errores que pueden cometer al considerar los tiros no encestados y si la cantidad fuese la misma para todos los alumnos.

Sexto momento. La institucionalización.

- Al final de la actividad, se visualiza la fracción como comparador al expresar el resultado de una comparación de cantidades o valores de magnitud.
- Repetir el ejercicio intercambiando parejas.

TAREA TRES (T3). QUEBRADOS DE CABEZA

La actividad consiste en que los alumnos traten de reproducir un rompecabezas a escala.

Primera parte: Jugar

Los alumnos armarán un rompecabezas con las piezas dadas.

Material.

Rompecabezas.

Hojas para máquina.

Regla.

Primer momento. Organización

Por parejas los alumnos deberán de armar el rompecabezas proporcionado.

Segundo momento. Se explica en qué consiste la actividad:

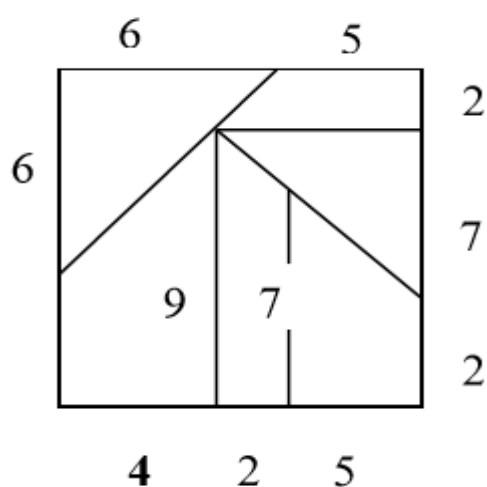
Como primer momento los alumnos deberán armar un cuadrado con las piezas de rompecabezas que se les presente.

Tercer momento. Reproducción del rompecabezas a escala

Una vez tenido el rompecabezas armado se dará la consigna de reproducir el rompecabezas a escala de tal manera que el lado que mide 4cm tendrá que medir 7 cm.

Figura 3.

Rompecabezas de Brousseau



Nota: Tomado de Block, 2022b

Cuarto momento. Armado del nuevo rompecabezas

Con las piezas a escala creadas previamente se armará el nuevo rompecabezas.

Quinto momento. La verificación

Los alumnos contrastarán los rompecabezas creados previamente.

Sexto momento. La puesta en común:

- El docente puede decidir de antemano quienes darán a conocer sus resultados y discutir públicamente.
- En este momento conviene que los alumnos vean:

- Qué estrategias utilizaron para reproducir las figuras.
- Considerar los errores que pueden cometer si tratan de aumentar 3 cm a todos los lados.

Séptimo momento. La institucionalización.

- Al final de la actividad, se visualiza la fracción como operador multiplicativo donde dos cantidades varían, pero la relación entre ellas es constante. Mencionando que para reproducir el rompecabezas se debe de usar una constante de proporcionalidad que afecta de igual manera a cada uno de sus lados, teniendo que multiplicarlos.
- Cambiar de parejas para reproducir el rompecabezas a escala donde el lado que mide 5 cm ahora mide 8.

TAREA CUATRO (T4). ANÁLISIS DE LA SITUACIÓN “ENCUENTRA EL SIGNIFICADO DEL MENSAJE”

La actividad consiste en analizar los discursos tecnológico teórico que expresan los docentes en formación al momento de abordar conceptual, técnico y funcionalmente a la fracción como fracturador.

Primera parte

La sesión consistirá en realizar diferentes cuestionamientos para que los alumnos puedan reflexionar sobre puntos estratégicos en la sesión previamente vivida referente a la clase de encontrar el significado del mensaje.

Los puntos para abordar son:

- Esta situación puede abordarse sin tener conocimientos explícitos de fracciones. Explique con qué procedimientos podría abordarse.
- ¿Cómo se sabe si el mensaje elaborado fue bueno o no? ¿Cómo se sabe si el listón fabricado fue del tamaño correcto? Es decir, ¿cómo se validan las producciones?
- ¿Qué aspectos de las fracciones se ponen en juego con la situación?

- ¿Qué se necesita saber para poder jugar? ¿Qué se puede aprender?
- Compare la dificultad para reproducir los siguientes tres listones: A de $\frac{2}{5}$ de unidad, B de $\frac{1}{3}$ de unidad y C de $\frac{1}{4}$ de unidad. ¿Considera que el grado de dificultad es el mismo para los tres listones o hay diferencias?
- ¿Qué contenido matemático se abordó en la sesión?
- ¿Cuál considera que es el objetivo de la sesión?
- ¿Cuáles son los posibles errores y dificultades con los que se pueden enfrentar los alumnos de educación primaria ante esta situación?

TAREA CINCO (T5). ANÁLISIS DE LA SITUACIÓN “EL BASQUETBOL”

La actividad consiste en analizar los discursos tecnológico teórico que expresan los docentes en formación al momento de abordar conceptual, técnico y funcionalmente a la fracción como comparador.

Primera parte

La sesión consistirá en realizar diferentes cuestionamientos para que los alumnos puedan reflexionar sobre puntos estratégicos en la sesión previamente vivida referente a la clase el basquetbol.

Los puntos para abordar son:

- Esta situación puede abordarse sin tener conocimientos explícitos de fracciones. Explique con qué procedimientos podría abordarse.
- ¿Cómo se sabe si el pódium fue real o no? ¿Cómo se sabe si el mejor tirador fue el del primer lugar? Es decir, ¿cómo se validan las producciones?
- ¿Qué aspectos de las fracciones se ponen en juego con la situación?
- ¿Qué se necesita saber para poder determinar los tres primeros lugares? ¿Qué se puede aprender?
- ¿Es lo mismo identificar al mejor tirador que al peor? ¿Considera que el grado de dificultad es el mismo o hay diferencias?
- ¿Qué contenido matemático se abordó en la sesión?
- ¿Cuál considera que es el objetivo de la sesión?

- ¿Cuáles son los posibles errores y dificultades con los que se pueden enfrentar los alumnos de educación primaria ante esta situación?

TAREA SEIS (T6). ANÁLISIS DE LA SITUACIÓN “QUEBRADOS DE CABEZA”

La actividad consiste en analizar los discursos tecnológico teórico que expresan los docentes en formación al momento de abordar conceptual, técnico y funcionalmente a la fracción como operador multiplicativo.

Primera parte

La sesión consistirá en realizar diferentes cuestionamientos para que los alumnos puedan reflexionar sobre puntos estratégicos en la sesión previamente vivida referente a la clase de Quebrados de cabeza.

Los puntos para abordar son:

- Esta situación puede abordarse sin tener conocimientos explícitos de fracciones. Explique con qué procedimientos podría abordarse.
- ¿Cómo se sabe si la elaboración del rompecabezas fue correcta? Es decir, ¿cómo se validan las producciones?
- ¿Qué aspectos de las fracciones se ponen en juego con la situación?
- ¿Qué se necesita saber para poder reproducir el rompecabezas? ¿Qué se puede aprender?
- Compare la dificultad para reproducir el rompecabezas donde el lado que medía 4 ahora debe de medir 7 y en el que el lado que medía 5 ahora debe medir 8 ¿Considera que el grado de dificultad es el mismo para ambas reproducciones?
- ¿Qué contenido matemático se abordó en la sesión?
- ¿Cuál considera que es el objetivo de la sesión?
- ¿Cuáles son los posibles errores y dificultades con los que se pueden enfrentar los alumnos de educación primaria ante esta situación?

TAREA SIETE (T7). LOS MOMENTOS DE ESTUDIO

La actividad consiste en analizar la estructura metodológica de las sesiones donde los alumnos fungieron como aprendices de matemáticas para identificar los momentos de estudio referentes al REI.

Primera parte

En un primer momento los alumnos de manera individual identificarán la estructura de las tres primeras sesiones donde trabajaron contenidos matemáticos referentes a la fracción como fracturador, comparador y operador multiplicativo.

Una vez elaborado un esquema respecto a los puntos importantes de manera grupal se realizará una tabla de diferencias y similitudes entre la estructura de las clases.

Se comenzará explicando desde la TAD lo que es una praxeología, haciendo énfasis en sus dos bloques, el técnico-práctico y el tecnológico-teórico. Para ello se identificarán estas praxeologías con algunos elementos identificados en la estructura de las sesiones.

Enseguida se identificarán las cuestiones generatrices que guiaron el desarrollo de cada una de las sesiones relacionándolas con los objetivos de cada una de ellas.

Posteriormente el docente de manera guiada determinó cuáles son los momentos de estudio, comenzando por el M1. El primer encuentro se da cuando la organización praxeológica se pone en juego a través de la tarea planteada. Partiendo posteriormente el M2. El momento exploratorio es cuando el alumno busca y selecciona la técnica que se relaciona con la tarea planteada. El M3. Trabajo de la técnica donde se pretende mejorar la técnica centrado en la fiabilidad y eficiencia de ésta. Para partir al M4. Constitución del entorno tecnológico-teórico de las tareas y técnicas usadas donde se explica la interrelación de cada uno de los momentos. Continuando con el M5. Institucionalización donde se precisa la organización matemática abordada. Concluyendo como el M6. Evaluación que corresponde a la reflexión reflexiva de lo aprendido. Relacionándolo con el resto de los elementos identificados en las tablas creadas.

TAREA OCHO (T8). EL REI RELATIVO A LAS FRACCIONES

Se comenzará haciendo una remembranza de lo acontecido hasta el momento. A través de mapas mentales se identificarán las organizaciones matemáticas y didácticas trabajadas en las sesiones previas para tener como referencia para la elaboración de sus REI tanto el contenido matemático a desarrollar como la estructura que deberán tener sus sesiones.

Figura 4.

Organizaciones.



Fuente: Elaboración propia

Partiendo de los elementos identificados, los alumnos deberán diseñar una secuencia de actividades que les permita la elaboración de un REI relativo a fracciones. Puesta en común, análisis y modificaciones de los REI.

TAREA NUEVE (T9). VALORACIÓN DEL TALLER

Se hará una sesión de puesta en común de los aprendizajes logrados a través del taller, para ello se recurrirá a la entrevista atendiendo a cuestionamientos como:

¿Qué aspectos les parecieron más relevantes de las sesiones desarrolladas?

¿Qué nuevos aprendizajes matemáticos lograron obtener?

¿Qué nuevos aprendizajes didácticos lograron obtener?

¿Qué modificaciones sugieren realizar?

¿Es posible desarrollar estas actividades con los alumnos que atenderán en el presente ciclo escolar?

¿Qué es un número fraccionario? ¿Cómo se enseñan las fracciones en educación primaria?

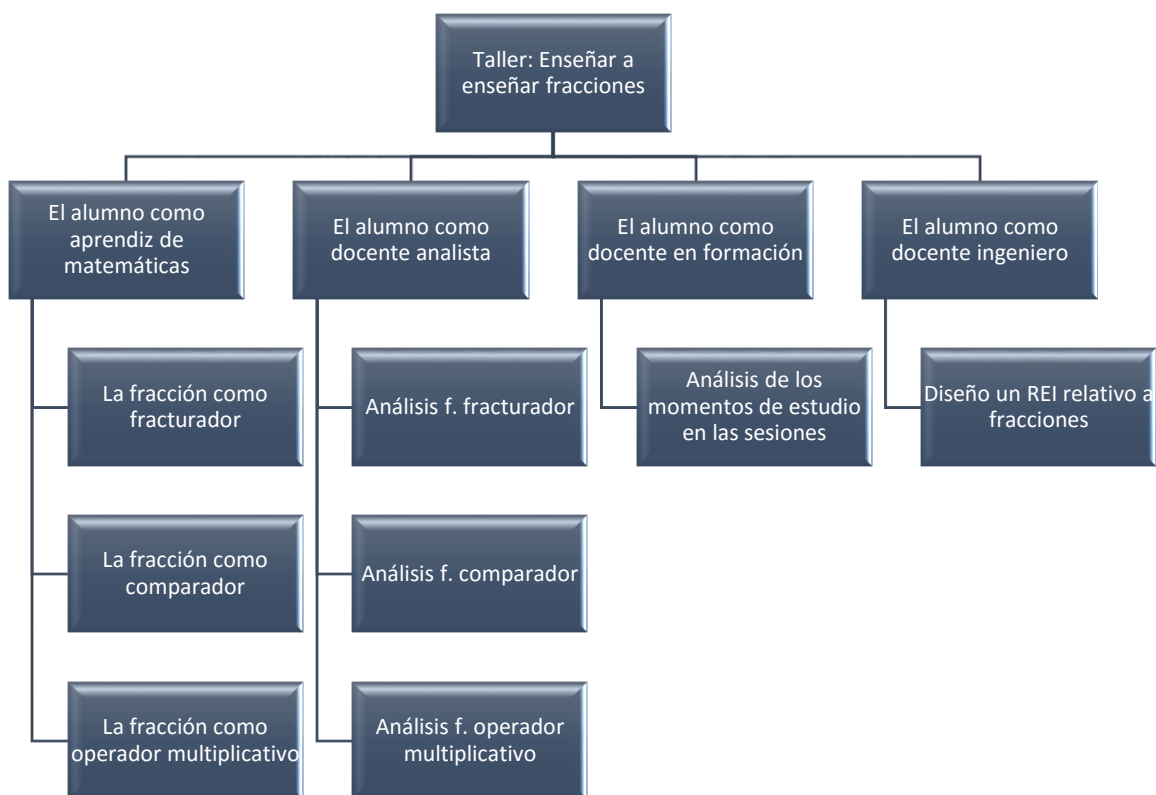
De esta manera, luego de describir las tareas que se plantean en cada una de las sesiones del taller, cerramos este apartado para dar pie a que, en lo que sigue, se de cuenta de los resultados del desarrollo del taller y del análisis de los datos obtenidos con la puesta a prueba del REI-FP propuesto como dispositivo para la el tratamiento didáctico de las fracciones en la formación inicial docente.

IV. Enseñar a enseñar fracciones. Resultados del taller-recorrido

En páginas anteriores se han descrito las actividades del taller recorrido, vistos de manera esquemática, los diferentes momentos quedarían de la manera siguiente.

Figura 5.

Esquema del taller de enseñar a enseñar fracciones.



Fuente: elaboración propia

La muestra con la que se llevó a cabo el taller se constituyó por 6 alumnas en el último año de su formación inicial en la Licenciatura en Educación Primaria, de octubre a enero del ciclo escolar 2021-2022 trabajando sesiones presenciales y en línea debido a la organización de actividades propias de las alumnas.

Dentro de las 10 sesiones destinadas al taller, la primera fue para la presentación de los objetivos y propósitos, así como para la exploración de conocimientos previos de los sujetos participantes, específicamente para conocer qué consideraban respecto a las fracciones previo al desarrollo del trabajo. En esta sesión se dio a conocer la forma de trabajo en el taller, la cual fue de manera presencial y a distancia con base en las propias exigencias del cuidado de la salud que la institución brindaba en el momento de realizarse el taller.

En las sesiones de aprendiz de matemáticas era fundamental la interacción entre las alumnas y el material brindado, por esta razón se optó porque al menos en estas sesiones el trabajo fuera presencial para desarrollar las actividades asociadas al uso de las fracciones. El resto de las sesiones se trabajaron de manera virtual y se registraron las sesiones desarrolladas.

En este capítulo analizaremos en un primer momento las tres sesiones de aprendiz de matemáticas donde las alumnas vivieron el REI, para posteriormente pasar al análisis de estas mismas sesiones donde fungieron como docentes analistas, dando pauta al rol de docentes en formación analizando y vinculando los aspectos teóricos con las sesiones previas y cerrando con el diseño un REI relativo a las fracciones.

Primer acercamiento a las fracciones

En la primera sesión, cuando se exploraron los conocimientos previos se realizaron algunos cuestionamientos a las alumnas respecto a ¿Qué uso le das a las fracciones en la vida cotidiana? En este caso se encontraron respuestas asociadas principalmente a situaciones que implican el reparto, porque consideran a la fracción en su representación como parte todo, pocas encontraron la fracción como medida en situaciones de comida. Algunas de sus respuestas fueron las siguientes:

A5: cuando voy al supermercado y pido partes de kilo de determinado producto.

A3: repartir algo de comer (pastel, pizza, chocolates, etc.).

A2: compras del mercado: frutas, verduras, arroz, frijoles, etc.

En lo que se refiere a la pregunta ¿Qué es un número fraccionario? Encontramos una respuesta similar entre las participantes, respuesta que se relaciona directamente con la parte todo, ya que hacen alusión al entero dividido en partes, únicamente una respuesta hace notar las partes que componen la fracción:

A1: Es cualquier número que se divide entre otro.

A5: una representación numérica de una parte de un entero.

A3: Un número fraccionario es aquel que representa una parte o varias partes de un entero, se compone de numerador y denominador, siendo el numerador el que te indica cuántas partes se tienen y el denominador en cuántas partes está partido el entero, divididos los dos por una línea horizontal, arriba numerador y abajo el denominador.

Para la pregunta relativa a las aulas, es decir ¿Cómo se enseñan las fracciones en educación primaria? Las respuestas hacen referencia en primer lugar al material manipulable como elemento indispensable para la enseñanza de este concepto matemático, aunque también consideran que es necesario un nivel gradual de dificultad, lo que significa utilizar desde la representación gráfica de las fracciones en objetos cotidianos, su abstracción con otras figuras hasta el uso de los números para el mismo fin.

A5: A través de niveles de inferencia, en donde se comienzan a ver los términos desde su forma más primitiva hasta subir cada grado el nivel de dificultad. Las fracciones se enseñan a través de elementos manipulativos y visuales.

A1: Con material manipulable, con rectas numéricas, representaciones gráficas, dibujitos que se puedan dividir en partes iguales y con algoritmos.

Los conocimientos vertidos en las respuestas de las estudiantes versan en torno a la fracción como parte todo y carecen de elementos didácticos para su transmisión, aspectos que denotan un área de oportunidad dentro de la enseñanza y aprendizaje asociado a las fracciones.

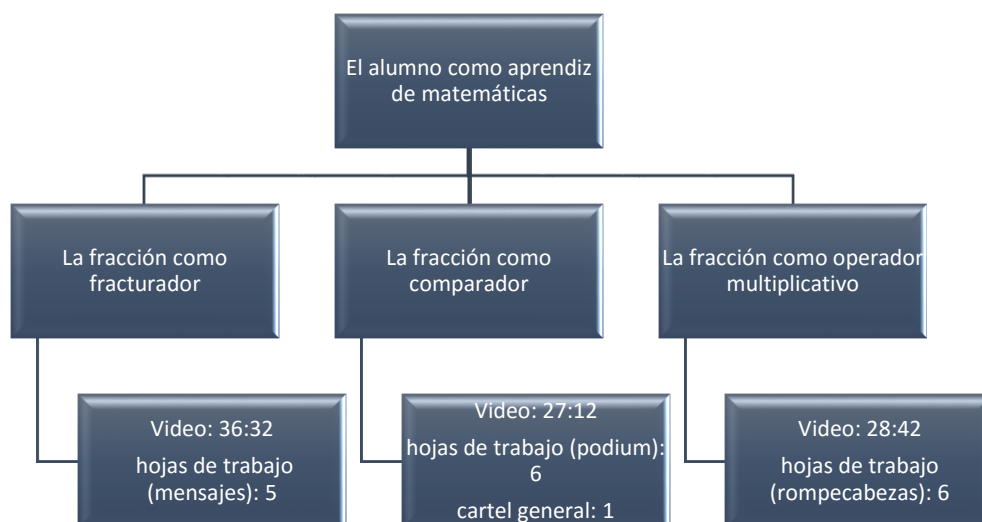
También como parte de la sesión 0 y después de explicar lo que se trabajaría en las sesiones, se tomaron como punto de partida sus conocimientos para considerar las organizaciones matemáticas y didácticas que serían la parte medular en cada una del resto de las sesiones para potencializar estos conocimientos.

Las aprendices de matemáticas

Para los momentos en los que las profesoras en formación asumieron el rol de aprendices de matemáticas se desarrollaron tres sesiones presenciales en un lapso de dos semanas. En cada una de estas sesiones se recuperaron videos del trabajo realizado, así como hojas de trabajo en las que podían observarse las respuestas a las actividades realizadas. En el siguiente esquema se evidencian los productos derivados de cada sesión.

Figura 6.

Esquema evidencias del alumno como aprendiz de matemáticas.



Fuente: elaboración propia.

En el esquema podemos observar las tres sesiones dedicadas al alumno como aprendiz de matemáticas y las evidencias que se obtuvieron de las mismas.

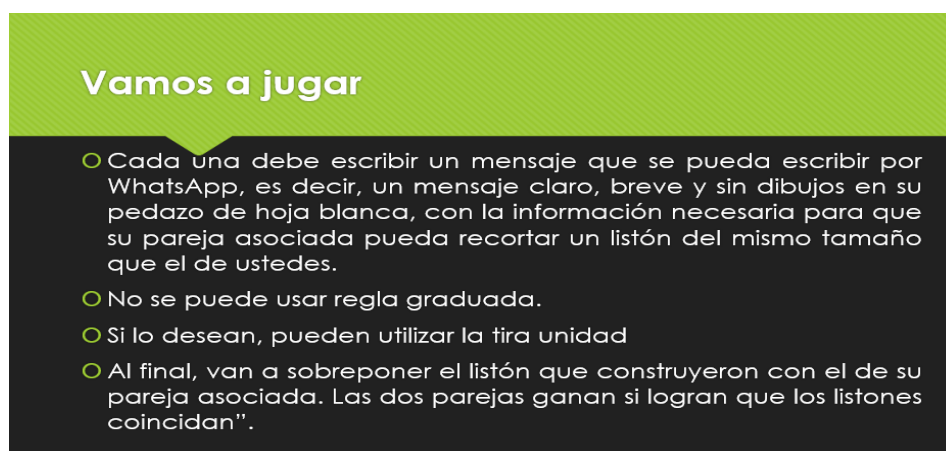
La fracción como fracturador. División de un elemento en otros que lo conforman

En la primera sesión como aprendices de matemáticas se contó con la participación de cinco profesoras en formación, en esta sesión el propósito era identificar qué técnicas y tecnologías empleaban en la solución de una tarea que demandaba el uso de la fracción como fracturador. Para comenzar con esta actividad se presentó a las alumnas el título de nuestra clase “Encuentra el significado del mensaje”, posterior a ello se presentó el material con el cual iban a trabajar: una tira unidad (tira de papel verde con la misma medida para todas), listón (representado por un fragmento de hoja blanca donde cada participante cuenta con un tamaño diferente), y estambre para poder realizar medidas y construir el mensaje que más adelante tendrán que comunicar a sus compañeras.

La siguiente actividad consistió en enunciar la tarea que realizarían con el material brindado, para lo cual se presentó una diapositiva con las siguientes instrucciones

Figura 7.

Instrucciones vamos a jugar.



Vamos a jugar

- Cada una debe escribir un mensaje que se pueda escribir por WhatsApp, es decir, un mensaje claro, breve y sin dibujos en su pedazo de hoja blanca, con la información necesaria para que su pareja asociada pueda recortar un listón del mismo tamaño que el de ustedes.
- No se puede usar regla graduada.
- Si lo desean, pueden utilizar la tira unidad
- Al final, van a sobreponer el listón que construyeron con el de su pareja asociada. Las dos parejas ganan si logran que los listones coincidan”.

Fuente: elaboración propia.

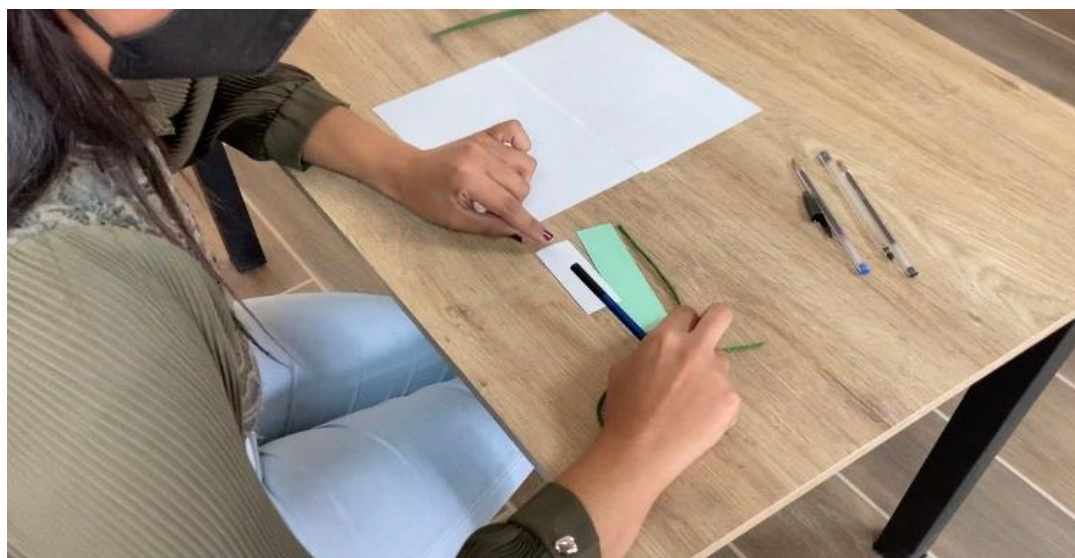
Posteriormente se entregó una hoja de papel y se les pidió que en ella escribieran el mensaje para que alguna de sus compañeras tratara de construir el listón con la medida que le llegara en el mensaje. Se explicó nuevamente cada punto de las instrucciones.

Al plantear la tarea se presentaron algunas dudas por lo que fue necesario profundizar en el uso de la tira unidad para poder determinar los listones y se subrayó que por la naturaleza de la actividad había un gran espacio en el aula para que no observaran los listones de sus compañeras ya que estos tenían diferentes medidas y la intención es que cada una pudiera representar dicha medida sin utilizar ninguna regla graduada.

También se hicieron algunos cuestionamientos respecto a si la tira unidad medía lo mismo para todas. De igual manera se hizo referencia al estambre verde para poder construir su nuevo estambre que super pondrían posteriormente para ver si efectivamente habrían reproducido el mensaje de manera correcta. Hasta este momento las alumnas presentaban algunas dificultades para poder comprender la tarea que se había planteado, no obstante, se destinó un lapso para que pudieran crear sus mensajes.

Figura 8.

Midiendo para crear el mensaje.



Fuente: elaboración propia.

Durante la solución de la tarea algunas participaciones de las alumnas se enfocaron en identificar el nivel de complejidad del mensaje.

A1: Nosotras queremos que la otra no entienda, ¿hacérselo difícil?

M: ¡No! hacérselo entendible. Que lo entienda y pueda hacerlo del mismo tamaño del tuyo.

Una vez que terminaron sus mensajes pudo observarse que para su elaboración utilizaron diferentes técnicas, la principal consistía en superponer la tira de unidad sobre el listón blanco con la intención de ver cuántas de éstas se necesitaban para crear el espacio, cuántas de estas partes son necesarias para tomar la tira unidad como referencia y poder identificar la medida del listón. Esta técnica se puede ver en la Figura 9.

Figura 9.

Técnica superponer la tira unidad.



Fuente: elaboración propia.

Otra técnica que utilizaron consistió en doblar el estambre las veces que contenía el listón blanco para determinar una medida, de esta forma sabrían

cuántas vueltas del estambre serían necesarias para poder determinar la medida del mensaje que enviaron.

Figura 10.

Técnica doblar el estambre en el listón.



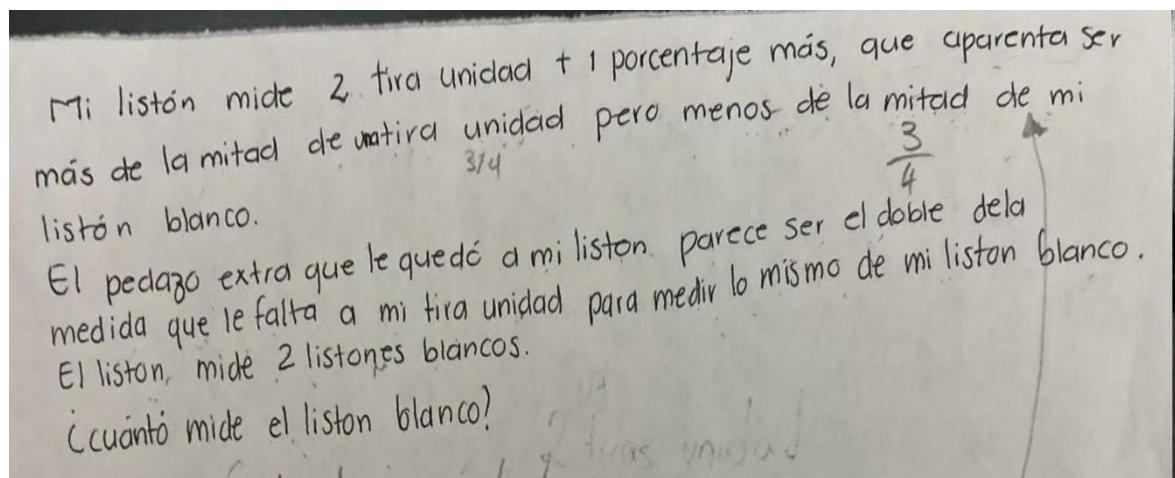
Fuente: elaboración propia.

Cabe mencionar que las técnicas anteriores carecían de una explicación meramente matemática, es decir les falta la justificación de la tecnología que la sustentaba ya que se recurre más al ensayo y error para determinar la medida de su estambre con relación a la tira unidad que serviría como referencia. En otras palabras, los primeros mensajes que se elaboraron tenían en común la utilización de la tira unidad “n” cantidad de veces como referencia para la elaboración del mensaje.

En el primer mensaje (Ver figura 11) podemos observar que el listón blanco es una fracción mayor a la unidad, ya que se expresa la necesidad de agregarlo dos veces y un porcentaje más. La alumna que elaboró este mensaje utiliza este referente como técnica para plantear su respuesta, sin embargo, también hace referencia a las fracciones del porcentaje para saber cuánto mide, de esta manera establece la medida sin considerar la unidad fracturada para llegar a conocer la medida del listón blanco.

Figura 11.

Mensaje listón 1 A1.

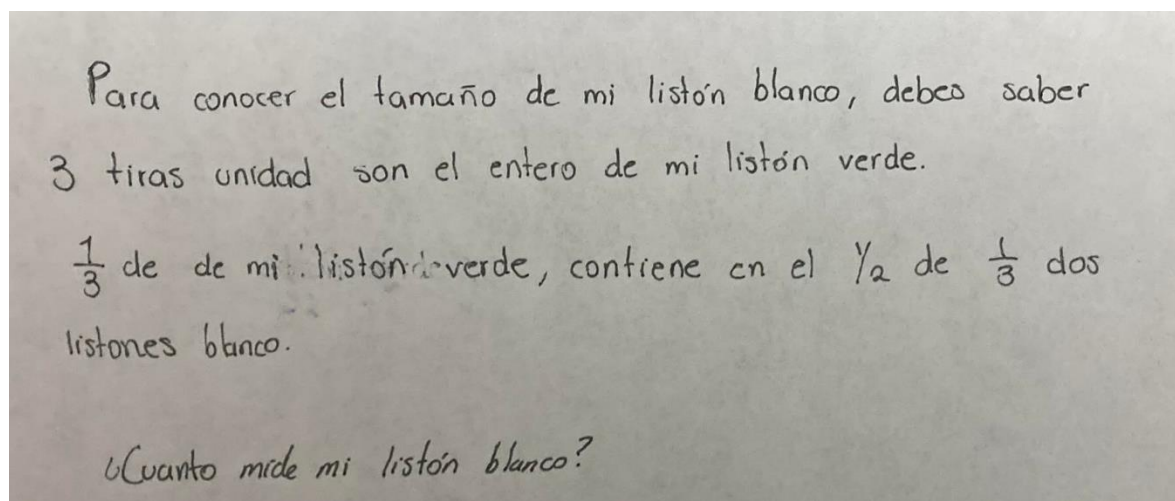


Fuente: Creación de las alumnas.

En posteriores participaciones que se hicieron en la sesión se habla de listones blancos que representan menos de la tira unidad, razón por la cual para la elaboración de los mensajes utilizan técnicas como la de la Figura 12 que permiten fracturar la unidad para conocer la medida del mismo.

Figura 12.

Mensaje listón 1 A2.



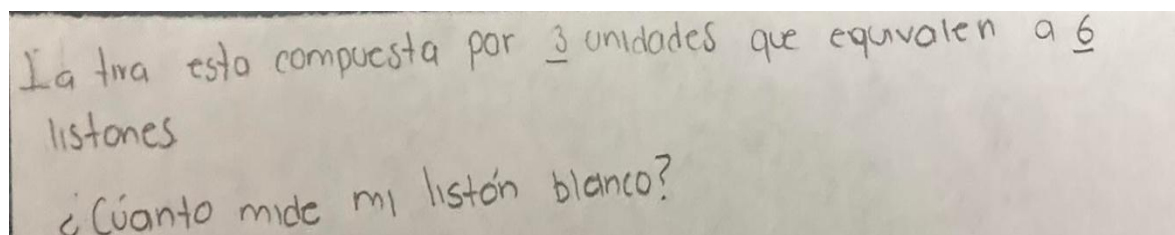
Fuente: Creación de las alumnas.

En este mensaje (Ver figura 12) se puede observar que la técnica empleada se asocia directamente con las fracciones ya que hace subdivisiones de las mismas ($\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$) para encontrar la medida del listón blanco.

En otros mensajes (figuras 13 y 14) la técnica se basa en fracturar la tira unidad de referencia para encontrar la medida de los listones.

Figura 13.

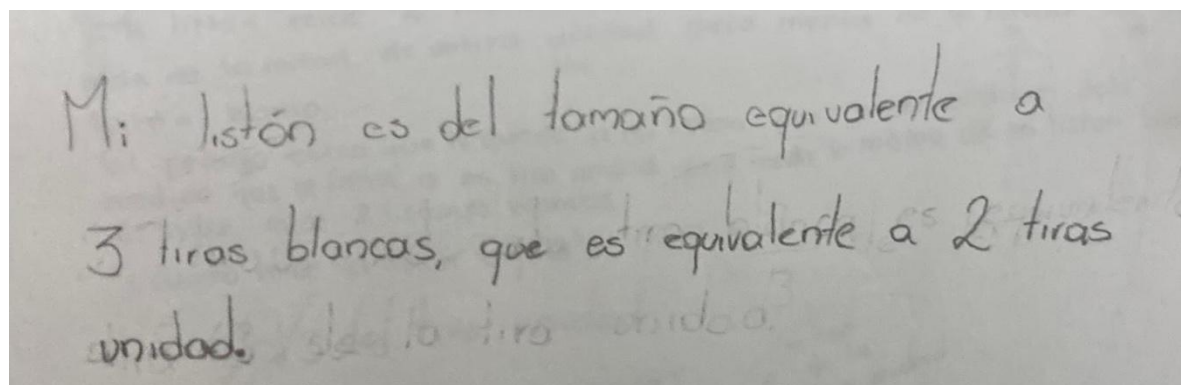
Mensaje listón 1 A3.



Fuente: Creación de las alumnas

Figura 14.

Mensaje listón 1 A4.



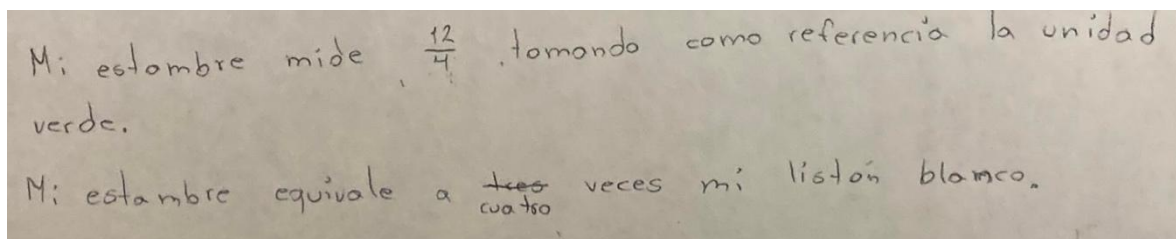
Fuente: Creación de las alumnas.

En ambos mensajes podemos observar la reiteración de la tira unidad como equivalencia de la reiteración del listón blanco, aspecto que permite delimitar la medida utilizando la técnica que permite fracturar la unidad.

Para el último mensaje (Figura 15) se observa que se busca una equivalencia respecto a la tira unidad y listón blanco.

Figura 15.

Mensaje listón 1 A5.



Handwritten text on a piece of paper. The first line reads: 'Mi estambre mide $\frac{12}{4}$ tomando como referencia la unidad verde.' The second line reads: 'Mi estambre equivale a ~~tres~~ ^{cuatro} veces mi listón blanco.'

Fuente: Creación de las alumnas.

En este mensaje podemos observar la utilización de la técnica asociada al uso de fracciones que permiten reiterar la tira unidad tantas veces como equivalga la reiteración del listón blanco, aspecto que permitirá posteriormente la fracturación de la unidad para conocer la medida del listón. Es decir, reitera ambos listones hasta que coinciden en medida al término de ambos.

En las respuestas a la primera tarea podemos observar diferentes técnicas empleadas para la elaboración del mensaje en las que se observa el uso de fracciones, la reiteración de la unidad para conseguir igualar la medida en cantidad de listones blancos y el uso de porcentaje asociado a las fracciones. Las técnicas más utilizadas se basaron en reiterar la tira unidad para identificar la medida del listón blanco, con ello buscaban un punto de coincidencia con las reiteraciones del mismo. Sabían que tendrían que ir dividiendo los listones tomando en cuenta una referencia. Las principales dificultades se asociaron con que, al tener diferentes medidas no sabían la relación existente entre el listón y la tira unidad.

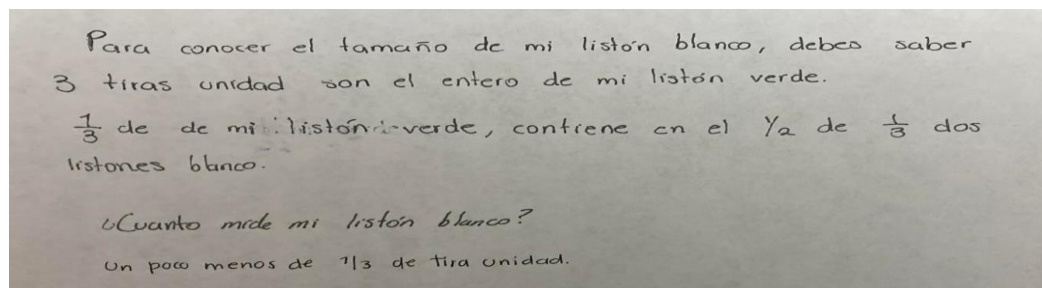
Los mensajes y el destinatario

Una vez que fueron creados los mensajes se intercambian entre las participantes con la intención de que pudieran reproducir los listones blancos de sus compañeras, se aclaró que cada listón era diferente por lo que las medidas establecidas variarían de participante a participante. Antes de que reprodujeran el listón se les dio tiempo para leer el mensaje, luego deberían reproducir la medida que tendrían que comparar midiendo una parte del estambre de la intérprete del mensaje con el listón blanco de quien lo elaboró.

Para reproducir el listón se fue corroborando la información una a una, de tal manera que al hacerlo pudieran hacer explícita la tecnología que sustentaba la técnica empleada en la resolución de la tarea. Las técnicas y tecnologías recuperadas fueron las siguientes:

Figura 16.

Técnica de A1 para el Mensaje listón 1.



Fuente: Creación de las alumnas.

A1: (Contestando el mensaje de A2) Para el listón blanco, su instrucción dice que $1/3$ de su listón verde contiene, bueno, primero habla de que un tercio, entonces lo dividí entre tres, con él, con la tira unidad, porque el listón verde mide tres tiras unidades, entonces así fue fácil identificar $1/3$, ya del tercio dice que lo tiene en el medio, nomás que lo escribí con fracción por eso me estaba confundiendo, contiene en el medio de un tercio dos listones blancos, entonces ya solo lo doble y me salió el pedazo, menos de un tercio

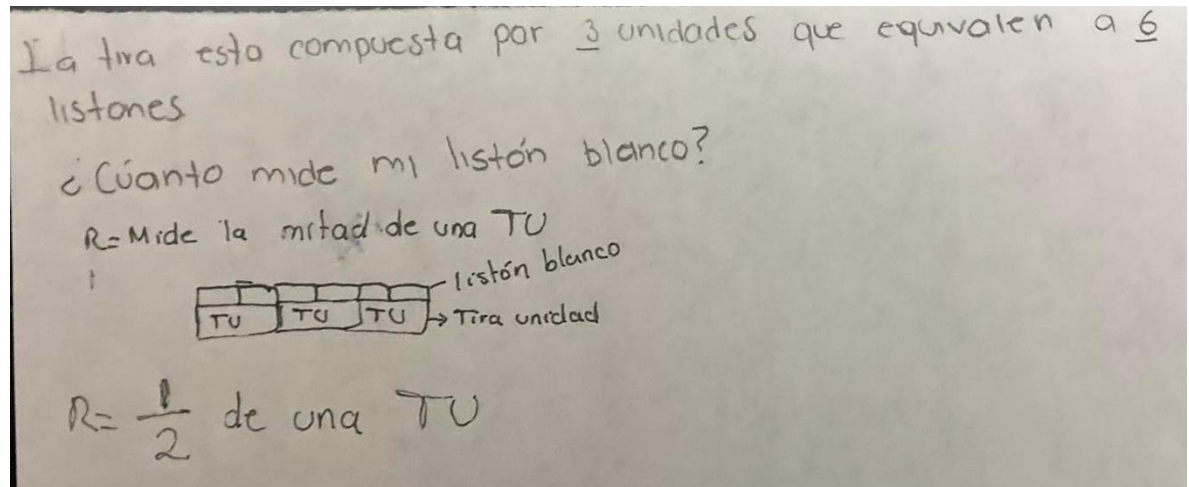
M: entonces no coincidió (haciendo referencia a que sobra una parte).

A1: Yo decía que era menos de un tercio, no lo doble, nada más lo marqué, a lo mejor sea un cuarto, porque no lo doblé, sólo lo hice al tanteo.

Para este caso, la técnica empleada para reproducir la tira fue el uso de la representación numérica de fracciones conocidas y la tecnología está asociada con la aproximación de fracciones ya que explica que sería menos de $1/3$, recurriendo al denominador 4 para expresar que la parte que representa es menor a 3.

Figura 17.

Técnica de A2 para el Mensaje listón 1.



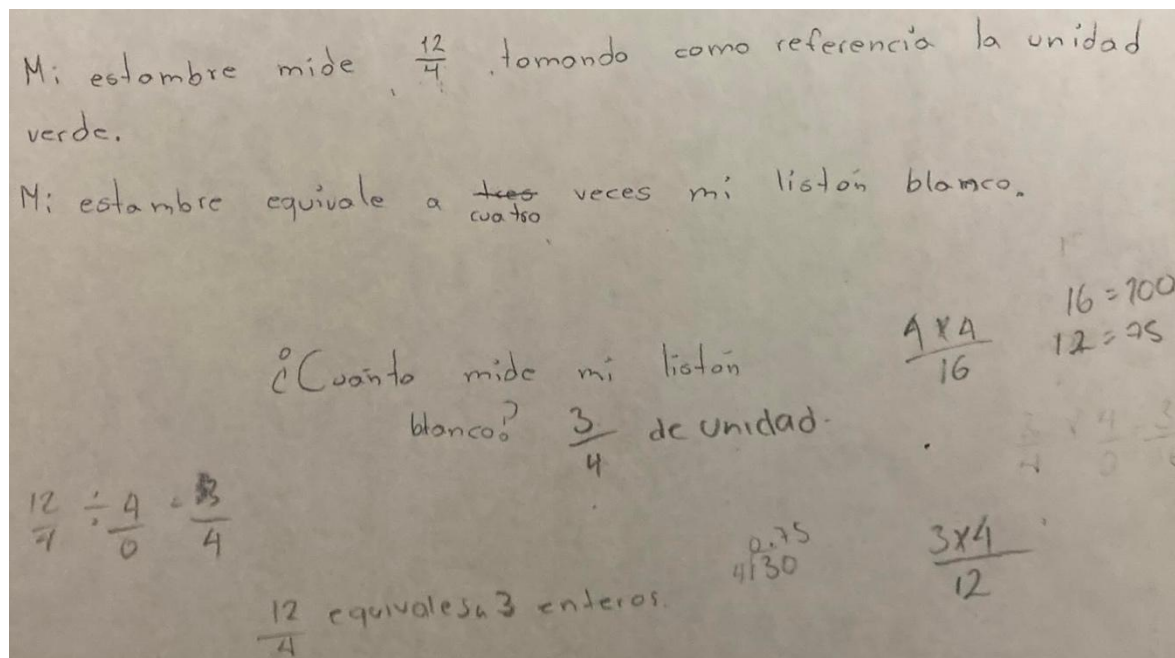
Fuente: Creación de las alumnas.

A2: (Contestando el mensaje de A3). Se supone que sí coinciden porque A3 utilizó la misma medida 3 tiras unidad. El listón blanco mide la mitad de una tira unidad, para saberlo tuve que hacer una representación porque yo soy más visual en estas cuestiones, entonces dibujé tres tiras unidad y como me decía que las tres tiras contenían 6 tiras de listón blanco pues fue fácil averiguar que era la mitad de la tira unidad.

La técnica empleada en esta situación fue la representación gráfica de las fracciones, usando como tecnología las equivalencias de fracciones para encontrar la medida del listón blanco. Si bien esta técnica demuestra cierta comprensión, dan muestra de una actividad numérica limitada en la alumna, ya que requiere una referencia gráfica para sustentar su respuesta. Veamos enseguida otra técnica.

Figura 18.

Técnica de A3 para el Mensaje listón 1.



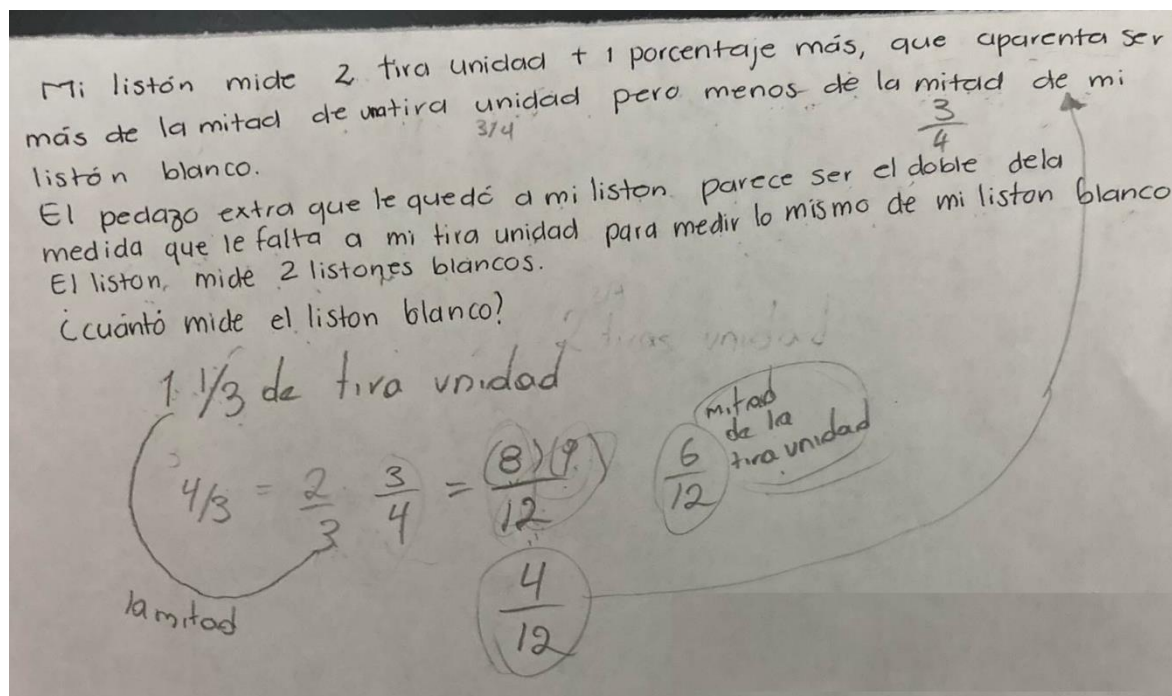
Fuente: Creación de las alumnas.

A3: (Contestando el mensaje de A5). Bueno, yo supe que eran tres unidades de unidad porque ella me dijo primero que eran $\frac{12}{4}$ de unidad, y pues cada una tiene $\frac{4}{4}$ entonces pues son 3 unidades; después me dice que, en el estambre cabe 4 veces el listón blanco, entonces nada más hice cuántas veces cabía el, bueno hice una división del 3 entre el 4 y ya sale 0.75 y viendo como la proporcionalidad de que 100 es el 100% entonces 0.75 sería un ... o sea $\frac{3}{4}$, el listón mide $\frac{3}{4}$ de unidad.

La técnica empleada en este caso se asocia al uso de fracciones, decimales y porcentajes justificando la tecnología como la equivalencia entre éstas para encontrar las medidas solicitadas. El uso de la técnica resultó eficiente, sin embargo requiere transitar entre las diferentes representaciones para llegar al resultado sin centrarse en una específicamente.

Figura 19.

Técnica de A4 para el Mensaje listón 1.



Fuente: Creación de las alumnas.

A4: (Contestando el mensaje de A1, superpone los listones, le sobra un pedazo grande) Sería 1 $\frac{1}{4}$.

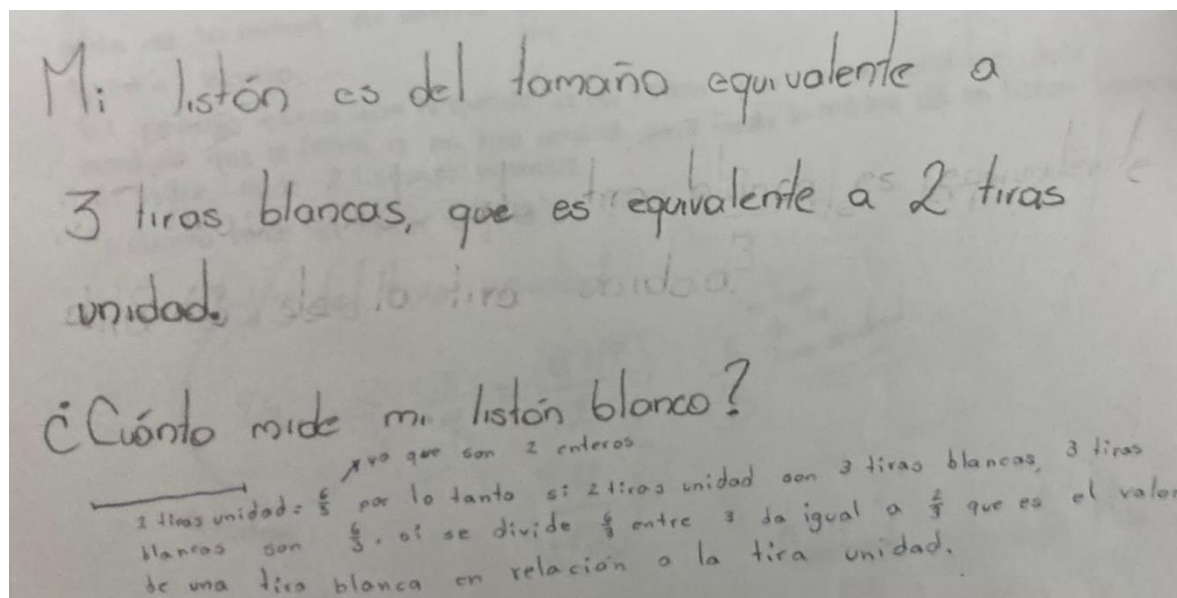
M: Sería 1 $\frac{1}{4}$ ya ahorita que corroboras, ¿por qué determinaste que sería 1/3?

A4: ¡Ay! Primero intenté hacerlo con el algoritmo, pero no, no pude, porque eran muchas cosas que no sabía, entonces no podía como, si poner muchas variables, después hice aproximaciones más o menos, porque dice que, que el listón mide dos tiras unidad más un porcentaje. Y para sacar ese porcentaje dice que, que es más de la mitad de una tira unidad. Entonces yo dije, no pues si es más de la mitad de una tira unidad serían como 3/4, pero menos de la unidad del listón blanco.

Para esta situación la técnica hace referencia a la representación numérica de las fracciones y justifica mediante la tecnología que se asocia a la aproximación de las medidas establecidas. A diferencia de la técnica anterior, en esta solo utilizan las fracciones para encontrar el resultado, aspecto que denota un dominio del tema.

Figura 20.

Técnica de A5 para el Mensaje listón 1.



Fuente: Creación de las alumnas.

A5: (contestando al mensaje de la alumna A4) Lo que hice fue hacer equivalencias, por ejemplo, yo establecí que el listón de A4 mide dos unidades de las verdes, entonces dije, voy a dividirlo entre dos cada unidad, por lo tanto, tengo $\frac{6}{3}$ en el listón de ella... y ese mismo $\frac{6}{3}$ equivale a 2 tiras, no 3 tiras blancas, solamente lo dividí entre tres, sabiendo que cada tira blanca mide dos tercios, y ya lo recorté en relación a la unidad tu listón mide $\frac{2}{3}$.

En este caso, nuevamente encontramos la técnica del uso de la representación numérica de las fracciones justificando tecnológicamente a las equivalencias de fracciones para dividir y determinar la medida. Esta técnica resulta fue la que más utilizaron las alumnas, y al socializarla con sus compañeras van construyendo nuevos conocimientos respecto del dominio de la técnica.

Al concluir este primer acercamiento se pudo observar que las buenas consignas son esenciales para que las alumnas conozcan el proceso de elaboración, al mismo tiempo, conocer las técnicas empleadas por sus compañeras

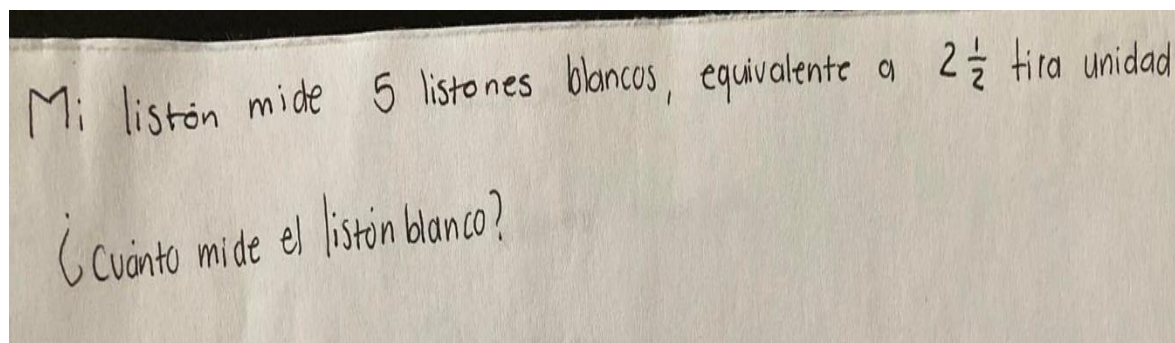
les permite identificar errores y aciertos en el empleo de las mismas y también que de manera autónoma vayan generando conocimiento.

Posterior a la presentación de los primeros mensajes y después de haber compartido y analizado las técnicas para la solución de la primera tarea y los indicios de tecnologías que lo sustentaban, se recurrió a repetir la situación, pero ahora cambiando de listón blanco de cada alumna, de tal manera que fuese evidente el trabajo con las técnicas previamente descritas.

Se volvió a compartir las instrucciones, para este punto ya habían identificado algunos errores y aciertos en las técnicas empleadas de tal manera que podrían atender mejor las instrucciones. Siguiendo la actividad se brindó un lapso para que con el nuevo material pudieran crear sus mensajes reflejando en todos la técnica asociada a la representación numérica de las fracciones buscando la equivalencia entre el listón blanco con relación a la cantidad de tiras unidad para redactar los siguientes mensajes:

Figura 21.

Mensaje listón 2 A1.



Fuente: Creación de las alumnas.

Figura 22.

Mensaje listón 2 A2.

Listón verde mide
 $3\frac{3}{4}$ Tira unidad = 5 listones blancos.
¿Cuánto mide el listón blanco?

Fuente: Creación de las alumnas.

Figura 23.

Mensaje listón 2 A3.

Mi listón mide a un equivalente a 11 listones blancos
que equivalen a $2\frac{3}{4}$ de tira de unidad
¿Cuánto mide mi listón blanco?

Fuente: Creación de las alumnas.

Figura 24.

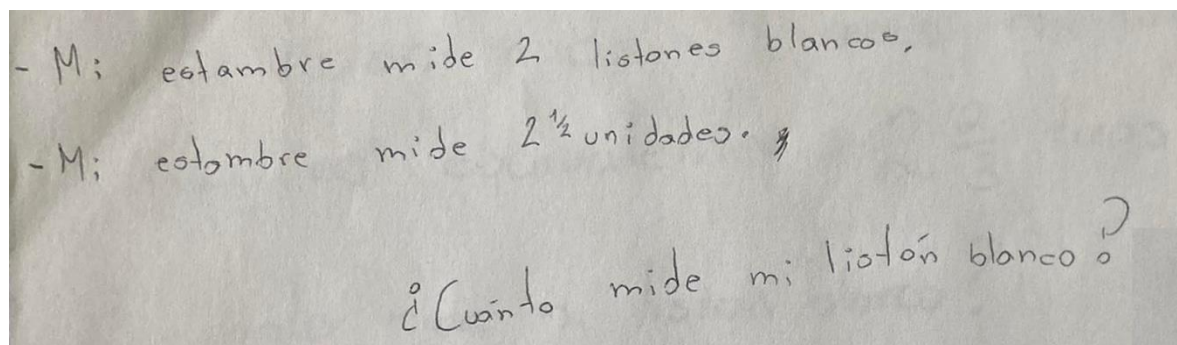
Mensaje listón 2 A4.

Mi listón mide 4 veces mi tira blanca
que es equivalente a $2\frac{2}{3}$ tiras verdes.
¿Cuánto mide mi listón blanco?

Fuente: Creación de las alumnas.

Figura 25.

Mensaje listón 2 A5.



Fuente: Creación de las alumnas.

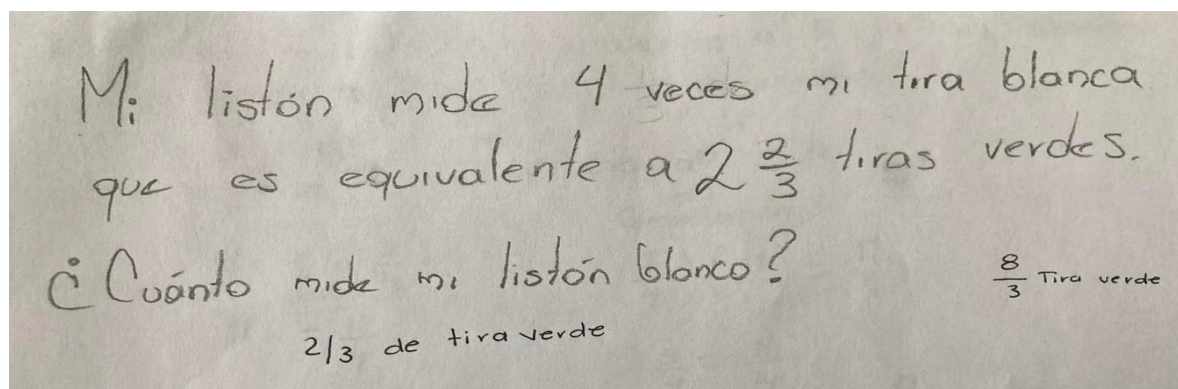
Como se puede observar, las alumnas modificaron las técnicas para redactar el mensaje que dará solución a la tarea planteada. Han dejado las técnicas asociadas a la representación gráfica y la equivalencia con decimales y porcentajes para pasar directamente a fracturar la tira unidad y buscar la equivalencia con las medidas de los listones blancos de diversos tamaños para hacer uso de las fracciones y poder comunicar los mensajes. Esto da cuenta de que su técnica evolucionó pues fractura la tira unidad para identificar las medidas, aspecto que se evidenció al momento en que las alumnas compartieron las técnicas en el mensaje anterior, lo que permitió el uso de una sola técnica en la resolución de la tarea.

Como parte de la actividad, lo que siguió fue intercambiar los mensajes y tratar de dar solución a los cuestionamientos planteados, para ello se les dio un lapso. En esta ocasión intercambian de parejas y listones para tratar de variar la situación abordada previamente.

Las técnicas encontradas en la resolución de la tarea fueron dos, la primera se presenta en 4 de las 5 alumnas y es la representación numérica de las fracciones, fracturando el total de la medida de su estambre para repartirlo con relación a las tiras unidad, y en la segunda se ve una evolución de la técnica donde una alumna puede usar el álgebra para resolver la tarea. A continuación, se evidencian las técnicas y el discurso tecnológico de las cuatro alumnas que utilizan la representación numérica (Ver figuras 26, 27, 28 y 29) y posteriormente la que utiliza la representación algebraica (Ver figura 30).

Figura 26.

Técnica de A1 para el Mensaje listón 2.

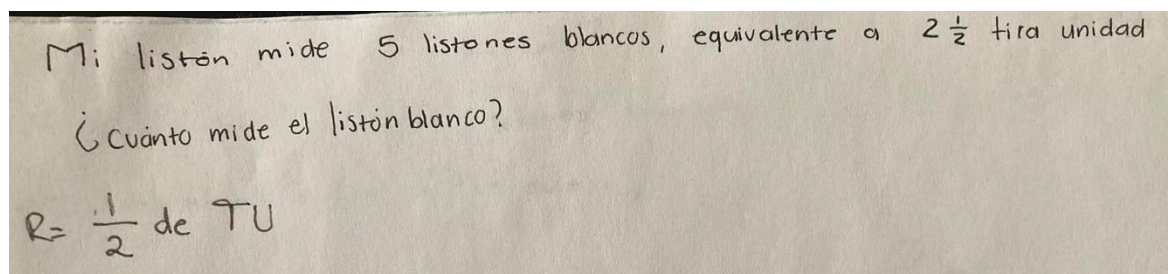


Fuente: Creación de las alumnas.

A1: (respondiendo el mensaje de A4) Entonces yo lo que hice fue que como tenemos dos enteros tres tercios, dije en total tenemos $\frac{8}{3}$ de tiras verdes y $\frac{8}{3}$, bueno, si pues si, como entre 4, fueron dos tercios, cada listón blanco mide $\frac{2}{3}$.

Figura 27.

Técnica de A2 para el Mensaje listón 2.

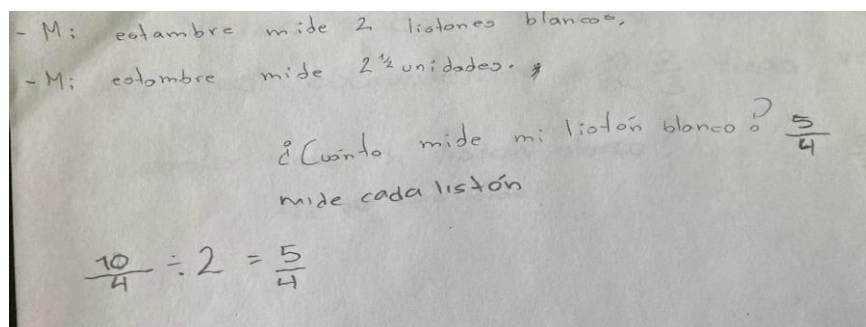


Fuente: Creación de las alumnas.

A2: (respondiendo el mensaje de A1) Tu listón blanco mide un medio de la unidad, bueno usé la lógica, si me decía que eran 5 listones y me decía que tenía dos tiras y media de unidad, solamente multipliqué las dos tiras y media por dos, para que me dieran 5 listones, entonces fue así que supe que era la mitad de una tira unidad.

Figura 28.

Técnica de A3 para el Mensaje listón 2.

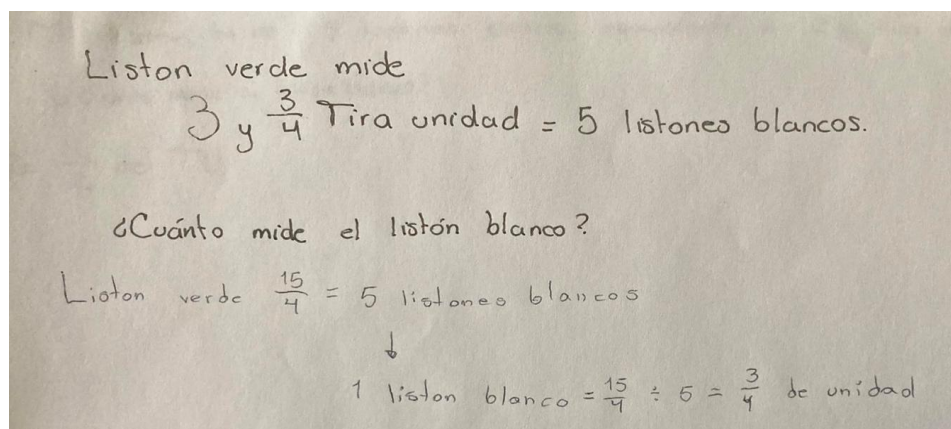


Fuente: Creación de las alumnas.

A3: (respondiendo el mensaje de A5) Aquí me dice que su listón está conformado por dos listones blancos que es equivalente a dos unidades un medio, entonces eso lo convertí a cuartos porque esa es la medida más pequeña que habíamos tenido. Entonces me sale que son 10 cuartos, entonces como me dijo que son dos listones blancos, sólo hice la división de 10 cuartos entre dos y así le hice me da cinco quintos.

Figura 29.

Técnica de A5 para el Mensaje listón 2.



Fuente: Creación de las alumnas.

A5: (respondiendo el mensaje de A2) lo que yo hice fue poner todos los, bueno la medida del listón verde en cuartos, no sólo los tres cuartos que ya tenía, entonces son quince cuartos que es igual a 5

listones blancos, para sacar lo de un listón solamente dividí 15 cuartos entre 5 que me dio tres cuartos y ésa es la medida de los tres cuartos.

En las técnicas que emplean las alumnas se puede ver el uso de la representación numérica de las fracciones en las equivalencias entre la tira unidad y el listón blanco con diferentes medidas que tenían cada una de ellas. A su vez, se puede observar que una vez identificando estas equivalencias ellas fracturaron la unidad de tal manera que al reiterarla se pudiera obtener la equivalencia en listones blancos correspondientes a identificar en el mensaje enviado entre cada una de ellas.

Figura 30.

Técnica de A4 para el Mensaje listón 2.

Mi listón mide a un equivalente a 11 listones blancos
 que equivalen a $2 + \frac{3}{4}$ de tira de unidad

¿Cuánto mide mi listón blanco? $\frac{1}{4}$

Comprobación

$$11x = 2\frac{3}{4}$$

$$11x = \frac{11}{4}$$

$$11\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{11}{4}$$

$$\frac{11}{4} = \frac{11}{4}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{11}{1}\right) = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$$

$$2\frac{3}{4} = \frac{11}{4}$$

$$\frac{11}{4} = \frac{11}{4}$$

Fuente: Creación de las alumnas.

A4: (respondiendo el mensaje de A3) Primero saqué mi ecuación base, dice mi listón mide un equivalente a 11 listones blancos que es 11 X, que es equivalente, o sea igual a $2 \frac{3}{4}$ de la tira unidad, entonces mi ecuación va a ser $11x = 2 \frac{3}{4}$, entonces ya nada más para la X, como no sabía y como era trabajo con fracciones y no sabía cómo despejarla, puse algo que multiplicado, ya ve que la multiplicación de fracciones se le pone un uno abajo del entero y ya se multiplica así

¿verdad? Entonces dije para que me de once cuartos voy a tener que multiplicar 11 por 1 que va a ser 11, el 4 se baja porque no hay otro denominador y luego ya hice la comparación para saber que $X = 1/4$.

Para finalizar con la sesión se les brindó una retroalimentación a las alumnas con base en el uso de las fracciones, haciendo énfasis a la transformación de las fracciones obtenidas como 2 enteros tres cuartos a once cuartos, considerando esto como una técnica general donde se transformaron las fracciones impropias a mixtas para posteriormente dividir las entre la cantidad señalada, cerrando la sesión correspondiente a esta tarea.

Recordemos que el objetivo de la actividad era que las alumnas identificaran la fracción como fracturador, fraccionando sus listones de tal forma que pudieran identificar el total de partes que seccionaron con relación a la tira unidad para encontrar las medidas de cada uno de los listones que les tocaron. Los hallazgos principales denotan una modificación en la técnica empleada en el acercamiento a la tarea, ya que en un primer momento tuvieron dificultades tanto para redactar el mensaje como para reproducirlo. De igual manera, se pudo observar cómo evolucionaron las técnicas, pasando desde la representación gráfica a la algebraica, pasando por la representación numérica para la representación de la fracción como fracturador.

La fracción como comparador. Una comparación cuantitativa entre dos todos diferentes

Para la segunda sesión se contó con la participación de las seis alumnas. En esta ocasión el propósito era identificar las técnicas y el discurso tecnológico empleado para la resolución de una tarea donde se utilizó la fracción como comparador. Para esta segunda actividad se siguió con el patrón establecido en la primera: comenzar con las instrucciones y dejar posteriormente las participaciones de las alumnas.

Para iniciar la actividad se mencionó a las alumnas que iríamos a jugar básquetbol, cada una de ellas lanzaría el balón diferente cantidad de veces, por lo

que deberían llevar el registro de las canastas anotadas y de los tiros realizados. Como condición ineludible las alumnas deberían realizar diferente cantidad de tiros para posteriormente utilizar este dato en el desarrollo de la actividad (cantidad de tiros: 4, 6, 7, 10, 11, 14).

Figura 31.

Alumnas realizando tiros.



Fuente: Creación propia.

Al concluir los tiros, se solicitó a cada alumna registrar en una tabla la cantidad de tiros que habían hecho, los que habían encestado y la fracción que representaban los encestes. La finalidad de esta indicación era que todas tuvieran los mismos datos.

En esta actividad aparecieron dos técnicas, la primera más frecuente está asociada con la representación numérica de las fracciones, la utilizaron 5 alumnas mientras que sólo una utilizó la representación gráfica.

Figura 32.

Registro de los tiros.

Alumna	Tiro	Encesto	Fracción del total de tiros que encesto
Jonell Martinez	10	3	$3/10$
Besenia Carrillo	6	3	
Yarel Puente	14	6	$6/14$
Brenda Rosales	11	2	$2/11$
Celeste Marentes	7	1	$1/7$
Laisha Pérez	4	2	$2/4$

Fuente: Creación de las alumnas.

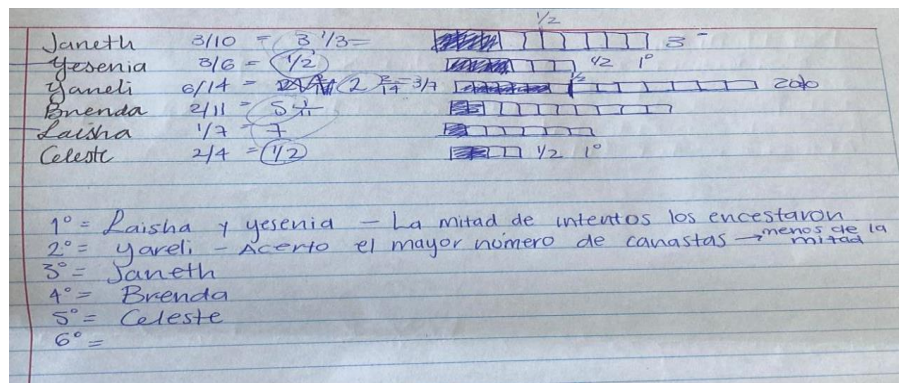
Como se observa en la Figura 32, las alumnas pudieron determinar que la cantidad de tiros corresponde al denominador de la fracción y la cantidad de tiros encestados al numerador. Únicamente en la representación gráfica se hace alusión a la equivalencia de las fracciones, en donde si bien no se determina el total de tiros efectuados y la cantidad de encestados, sí se hace una equivalencia de $3/6$ a un medio.

Al terminar el registro de los tiros se les presentó un pódium en el que la tarea asociada era proporcionar las posiciones que había logrado cada una de ellas al momento de realizar los tiros considerando la efectividad de aciertos, es decir que, aunque no hubiesen sido los mismos, pero reconociendo que la fracción de los tiros encestados representaban una relación con el número de tiros efectuados. La indicación que se brindó fue identificar qué lugar ocupa cada una de ellas de acuerdo con las fracciones que anotaron, registrando quien quedaría en primer lugar y así sucesivamente hasta llegar al sexto.

Una vez que las alumnas registraron los lugares en sus pódiums, se recurrió a investigar qué técnica habían empleado y cuál era la tecnología que sustentaba la técnica, encontrando que, dos alumnas utilizaron la técnica de la representación gráfica, una utilizó la técnica de conversión a decimales, otra utilizó la técnica de conversión a porcentaje y dos más usaron la técnica del uso de la representación numérica de las fracciones. A continuación, se pueden observar las técnicas empleadas en cada caso.

Figura 33.

Pódium A6 Técnica representación gráfica.

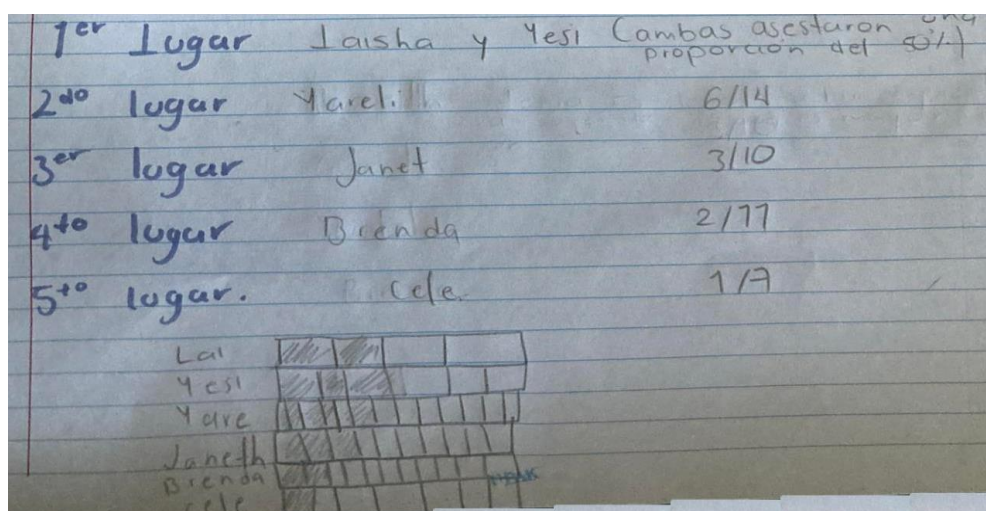


Fuente: Creación de las alumnas.

A6: (Ver Figura 33) Yo tengo un empate en el primer lugar, lo determine a través de un esquema, Yareli tiene más canastas encestandas, pero Laisha y Yesenia tienen menos intentos, pero las dos encestaron la mitad, por eso Yareli sería el segundo lugar porque tiene 6 de 14, da una relación de muchos intentos y muchas canastas, en tercero va Janeth, luego Brenda y al Final Celeste. Lo hice de una forma visual para identificar la cantidad de tiros y la relación de canastas.

Figura 34.

Pódium A3 Técnica representación gráfica.



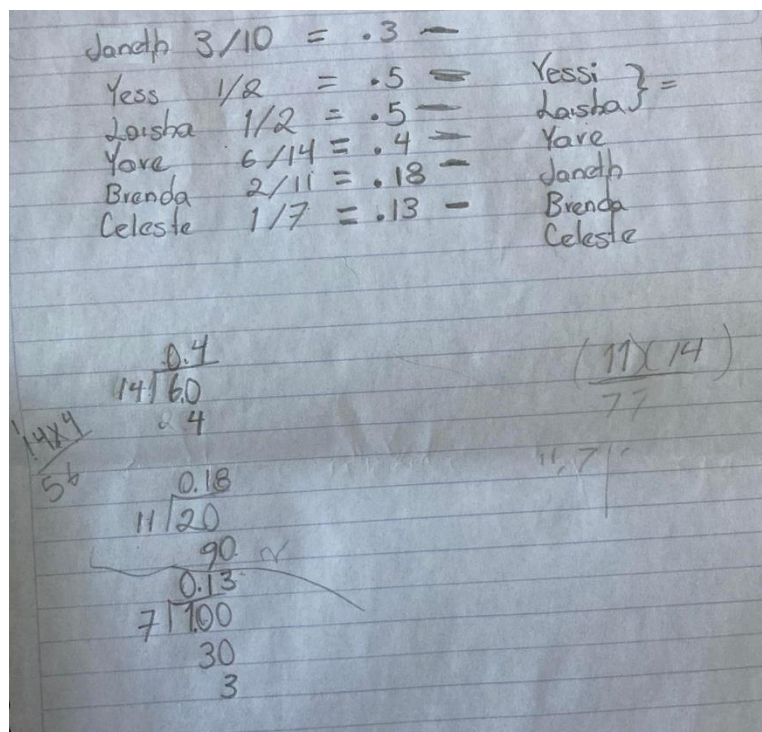
Fuente: Creación de las alumnas.

A3: (Ver figura 34) A mí se me dificultó en un principio, primero las saqué por lógica, el primer lugar es para Laisha y Yesenia porque obtuvieron la mitad. Después Yareli porque casi era la mitad. Luego entre Janeth y Brenda fue como lo difícil, más bien lo hice como por tanteo y el quinto lugar fue Celeste porque es la que tiene menos. Sabía el orden, pero no sabía cómo expresarlo.

Podemos observar en los dos ejemplos que los lugares destinados para cada alumna son los mismos, de igual manera se observa que ambas utilizaron la representación gráfica de la fracción tratando de buscar cuál superficie era mayor para determinar la posición de las alumnas en el pódium. Sin embargo, identificaron las fracciones partiendo de los medios como fracción mayor para de ahí ir obteniendo el resto de los lugares, ello es muestra de que conocen que en fracciones el denominador menor indica un número mayor. Para los casos en que se buscaron equivalencias en decimales encontramos los siguientes resultados:

Figura 35.

Pódium A4 Técnica equivalencia a decimales.

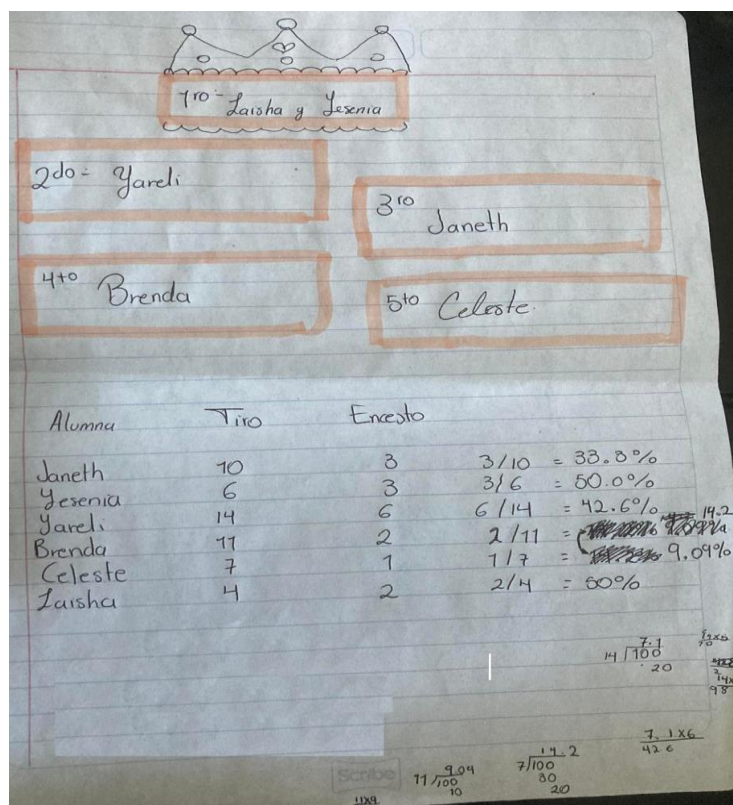


Fuente: Creación de las alumnas.

A4: yo las primeras cuatro las saqué por lógica porque eran Yesenia y Laisha en primer lugar, y luego Yareli y Janeth, porque Yareli era 6 de 14, sería casi un medio y Janeth 3 de 10 y era poquito menos de un medio, donde tuve problemas fue con Celeste y Brenda y dije no pues estará mejor convertir a decimales para que esté más fácil ordenarlo, tuve que hacer la división en los últimos tres 6 entre 14, 2 entre 11 y 1 entre 7 para saber cuánto equivalía. Las últimas dos las tuve que llevar a centésimas para que saliera más exacto.

Figura 36.

Pódium A2 Técnica equivalencia a decimales.



Fuente: Creación de las alumnas.

A2: Lo que a mí me funciona mucho es convertir las fracciones a porcentaje o también a decimal, porque de esta forma puedo obtener un criterio en el que el 100 es todo y el porcentaje va dependiendo de quién tiene más, Janeth tenía un 33 %, Yesenia un 50%, Yareli un 42%, Brenda un 14%, Celeste un 9% y Laisha un 50%.

Como se puede ver, en ambos casos se asoció la necesidad de convertir fracciones a otras representaciones para conocer el valor de cada una de ellas y poder compararlas. Para ellas fue más sencillo trabajar con fracciones que se asocian a un medio; sin embargo, cuando los denominadores no son fracciones múltiplos de 2 se les complicó y fue ahí donde buscaron otra técnica para poder compararlas.

Si bien en los ejemplos que se muestran las alumnas no llegaron a los mismos resultados debido a que en el porcentaje se omite la multiplicación por el numerador, en algunos casos se ve la necesidad de recurrir a alguna equivalencia para cumplir con la tarea.

Sin embargo, en los casos donde se utiliza la representación numérica de las fracciones como técnica hay dos procesos diferentes. En el primero (figura 37) se les compara de manera directa y en el segundo se buscan equivalencias.

Figura 37.

Pódium A1 Técnica representación numérica.

1º	Yessenia & Laisha	$\frac{1}{2}$
2º	Yareli	$\frac{3}{7}$
3º	Janeth	$\frac{3}{10}$
4º	Brenda	$\frac{2}{11}$
5º	Celeste	$\frac{1}{7}$

$$\begin{array}{r}
 5 \cdot 5 \\
 2 \overline{) 11} \\
 \underline{10} \\
 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 5 \cdot 5 \\
 2 \overline{) 11} \\
 \underline{10} \\
 1
 \end{array}$$

7

Fuente: Creación de las alumnas.

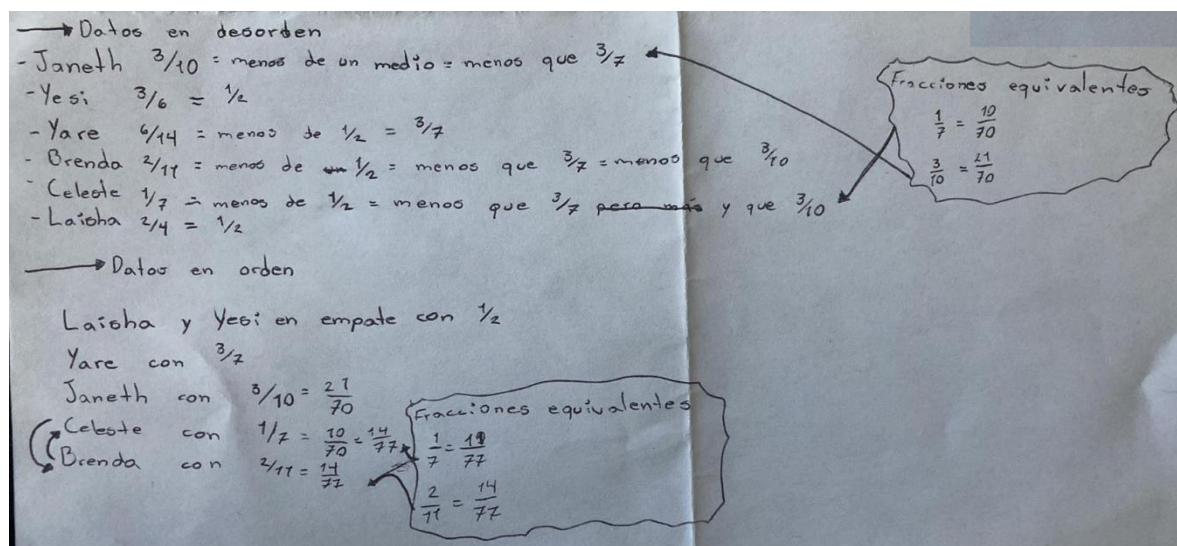
A1: se deduce por lógica, las primeras son Yesenia y Laisha porque ambas encestaron la mitad. En segundo lugar, está Yareli, que son 6 canastas de 14 tiros, se simplificó a $\frac{3}{7}$, aquí me faltaron 4 tiros para llegar a encestar todos, después es Janeth porque a ella le faltaron 7 tiros para llegar a encestar todas por eso la puse en ese lugar porque era más del doble lo que encestó para llegar a encestar todas, Brenda más de 5 veces le faltaban de lo que encestó para llegar al entero y celeste 7 veces más.

Como se puede observar, en este ejemplo se recurrió a la simplificación de fracciones para poder comparar, pero además se fijó en lo que le falta a cada fracción para llegar al entero y así determinar la posición de cada una, haciendo una comparación con los tiros encestados, a quien le faltaba el doble de lo que encestó, el triple, el quíntuple y así sucesivamente.

Al tener estos resultados se lanzó un cuestionamiento, ¿todas tienen las mismas posiciones en su pódium? Ante lo que la alumna que restaba de compartir su técnica mencionó que no, ella tenía otra respuesta para el último caso.

Figura 38.

Pódium A1 Técnica representación numérica.



Fuente: Creación de las alumnas.

A5: Yo como que no supe bien cómo empezar, primero mi procedimiento era convertirlas todas a un mismo denominador, pero va a ser un proceso muy difícil. Entonces lo que hice fue ver cuáles estaban en un medio, cuáles eran equivalentes, de ahí sacamos que Laisha y Yesenia tenían un empate en el primer lugar, después de ahí me fijé en las demás y vi que todas las demás eran menor que un medio, de ahí me fui a la más cercana a un medio que era $\frac{3}{7}$ que era equivalente a lo de Janeth que fue $\frac{6}{14}$. De ahí me fui a otras dos fracciones para hacerlas equivalentes, por ejemplo, tomé la de Celeste y la de Janeth, la de celeste $\frac{1}{7}=\frac{10}{70}$ y la de Janeth $\frac{3}{10}=\frac{21}{70}$ y ahí supe que era la diferencia. Después la de Celeste la comparé con la de Brenda, Celeste tenía $\frac{1}{7}=\frac{11}{77}$ y Brenda $\frac{2}{11}=\frac{14}{77}$ y aquí se pudo saber la posición de cada una.

Si analizamos esta última técnica observaremos que para comparar parejas de fracciones se emplean meramente fracciones equivalentes con el mismo denominador, aspecto que se quiere rescatar en la resolución de este tipo de tareas, si bien observamos un error en el acomodo, que posteriormente es corregido, se usan correctamente las equivalencias para comparar fracciones.

Una vez que se compartieron las técnicas empleadas por todas las alumnas se procedió a cuestionar respecto a cuál era la forma más sencilla que encontraban para poder determinar las posiciones en el pódium, en general la respuesta aludió a la comparación de fracciones.

As: convertir las fracciones a equivalencias con el mismo denominador para sólo comparar los numeradores.

Cuando terminó la participación se recurrió a la institucionalización del concepto abordado en las dos sesiones trabajadas, haciendo remembranza del uso de las fracciones en la primera tarea, la de los mensajes para recrear los listones y en esta tarea que era organizar un pódium de tiros de basquetbol.

M: ¿Se les da el mismo uso a las fracciones en los listones y en los tiros? ¿Estamos haciendo lo mismo?

A1: No, la vez pasada estábamos midiendo con base en las medidas y las fracciones y ya con las fracciones lo que hicimos fue diferente, buscábamos una fracción específica, y aquí no buscamos una fracción específica aquí comparábamos.

Se observa entonces una distinción en el uso de la fracción, pero no se puede formalizar aun con estas participaciones. Se hace alusión entonces a la formalización del concepto por parte del director del REI-FP.

M: Hemos trabajado con dos conceptos asociados a la fracción. En la primera clase trabajamos con la fracción como Fracturador, que es cuando tenemos un elemento que se divide en la misma cantidad de partes. Ustedes tenían su listón que tenía una medida, que cada una tenía diferentes medidas, que se dividía a su vez en partes iguales. Estamos viendo la fracción como Fracturador, un elemento se divide en la misma cantidad de partes, había listones más pequeños, listones más grandes, que se dividían, por eso ustedes decían se conforma de $\frac{2}{3}$ del listón o $\frac{4}{3}$ del total en esa ocasión veíamos a la fracción como Fracturador, un elemento se divide o se fractura entre la misma cantidad de partes.

M: Para esta clase trabajamos la fracción como comparador porque aquí estamos comparando una fracción con la otra, tenemos una unidad de medida, la cual estamos analizando a profundidad de tal forma que hacemos una comparación cuantitativa de los elementos que tenemos.

M: En ambos casos trabajamos las fracciones, en el primero fracturamos y en el segundo comparamos. Estamos viendo dos representaciones de la fracción que se relacionan entre sí, pero a su vez el uso que les damos es diferente.

De esta manera terminó la segunda tarea relativa a la fracción como comparador dando pauta a la última sesión donde se trabajó otro uso de la fracción en el rol de aprendiz de matemáticas de las alumnas normalistas.

Para esta sesión el objetivo de la actividad consideraba que las alumnas pudieran trabajar la fracción como comparador, contrastando dos magnitudes representadas con diferentes denominadores. Encontrando a su vez la evolución de las técnicas pasando de representaciones gráficas, aproximaciones y el uso de las representaciones numéricas de las fracciones a través de las equivalencias validando estas últimas como el proceso óptimo para comparar fracciones.

Las principales dificultades encontradas tienen que ver con el hecho de que se enfocan en el uso de técnicas básicas como la aproximación y la representación gráfica, pero con la socialización se generó la evolución de estas técnicas y se consensuó que la mejor opción era utilizar las equivalencias de las fracciones para comparar directamente los denominadores.

La fracción como operador. Dos cantidades varían, pero la relación entre ellas es constante.

Para la tercera sesión como aprendiz de matemáticas se trabajó con 5 alumnas, en esta ocasión se pretendía abordar el contenido asociado a la fracción como operador. Para iniciar la sesión se les presentó el título de la actividad denominado Quebrados de cabeza, entregando a cada alumna un rompecabezas con la indicación de que deberían armarlo para continuar con las actividades, se hizo alusión a que son 6 piezas y con ellas deberían formar un cuadrado.

Para esta actividad no se les limitó el uso de regla para determinar la medida de cada lado de las figuras, es por ello que las alumnas usaron este recurso para cumplir con la primera actividad que era armar el rompecabezas, para de ahí partir a la primera tarea matemática asociada a la actividad.

Figura 39.

Construcción de los rompecabezas quebrados de cabeza.

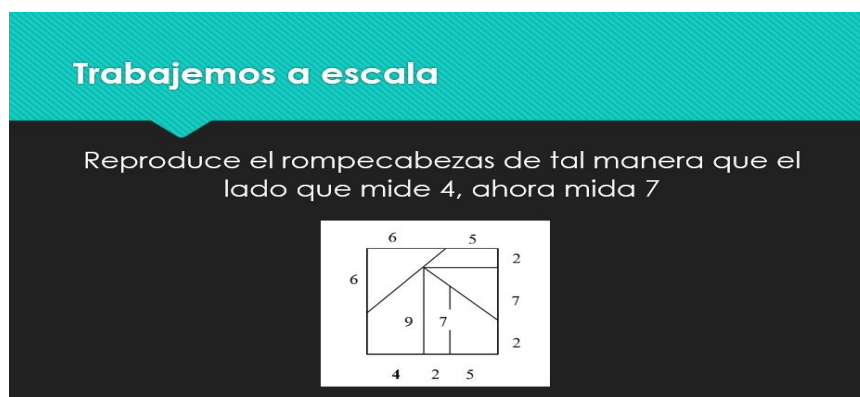


Fuente: Creación propia.

Una vez que las alumnas armaron el rompecabezas se les presentó una imagen con este armado (Figura 40) y las medidas de cada uno de los lados conforme se armaba el cuadrado, para plantear la tarea matemática a resolver la cual consistiría en hacer a escala el rompecabezas fijándose que el lado que medía 4 ahora tendría que medir 7.

Figura 40.

Trabajemos a escala.



Fuente: Creación propia.

Posterior a que se planteó la situación, las alumnas tuvieron un tiempo para trabajar con las técnicas que ellas conocían para dar solución a esta tarea. Encontramos ciertas dificultades para dar solución a esta tarea, principalmente

porque no son tareas que comúnmente realicen y la primera técnica empleada tiene que ver con sumarle 3 a todos los lados para crear la nueva figura; sin embargo, se encuentran con la reproducción de la figura irregular, donde no todos los lados tienen la misma medida y por lo tanto la figura creada no era un cuadrado, aspecto que genera confusión y replanteamiento de la técnica necesaria para atender la tarea.

A2: No sabía si tenía que ser exponencial, si todos los lados tenían que sumarse 3, entonces como primer referente, solo agregué tres cm a esta figura (señalando el lugar que ocupaba el 4), bueno hice el mismo procedimiento después, agregando 3 cm a cada lado, y luego decidí cambiar de táctica, pero no sabía cómo, al momento de querer hacerlo el triángulo que medía 6 por 6 ya no me quedaba, quedaba muy grande ya no iba a quedar como quería. La parte de arriba quedaría más grande, diferente a la de abajo.

Para identificar las técnicas que emplearon las alumnas fue necesario replantear la situación haciendo hincapié en que todas las medidas tenían que cambiar, especificando que el lado que medía 4 ahora tendría que medir 7, las técnicas en total encontradas fueron 3: sumar tres a todas las medidas, como se había expresado anteriormente, además de la implementación de la regla de tres y el uso de la fracción para determinar el aumento.

Para el uso de la regla de tres, tres de las alumnas hacen referencia a esta técnica.

Figura 41.

Técnica uso de la regla de 3.

Base

4-7

2-X = 3.5

5-X = 8.75

lado izquierdo

5-8.75

6-X = 10.5

4-X

4-7 = 12.25

7-X = 12.25

4 = 7

2 = 3.5

5 = 8.75

6 = 10.5

7 = 12.25

4(3/4) 12 = 3+4=7

19.25

19.25

8.75

3.5

Fuente: Creación de las alumnas.

A4: Como ya teníamos que el valor de 4 aquí era igual a 7, pues ya puse 4 es igual a 7, entonces con cada una de las demás medidas hice la regla de tres, como... 4 va a ser igual a 2 lo puse abajo del 4, y ya 2 por 7 entre cuatro, para hacer la regla de tres y me salió 3.5, con el 5 me salió 8.75, 6 a 10.5 y 7 a 12.25 y ya así los puse y vi y de cada lado tenían que salir 19.25.

A5: yo lo hice por regla de tres, solamente utilicé la regla de 3 del 6 del 5 del 7 y del 2, no saqué la del 9 porque sentí que no la necesitaba, entonces ya que los tenía solo saqué la parte de abajo.

A1: lo que hice fue hacer una regla de tres simple, como A4 y A5.

Cuando las alumnas explican sus procedimientos, se le pide a A3 que explique la técnica del uso de fracciones para socializarla y ver su importancia en la solución de la actividad.

Figura 42.

Técnica uso de la fracción.

Handwritten mathematical work on lined paper showing various calculations using fractions and decimals. The work includes several long division problems and addition/subtraction steps, such as $4 \overline{) 7}$, $4 \overline{) 1.25}$, and $4 \overline{) 1.75}$, with intermediate results and final answers like 1.75, 3.125, and 14.875.

Fuente: Creación de las alumnas.

A3: primero me di cuenta de que 7 representa $\frac{7}{4}$, entonces era como tener un entero y más, como el 175%, era como tener dos enteros menos uno, entonces lo que hice fue que el 6 lo dividía entre 4 y lo multiplicaba por 3, lo que me salía se lo sumaba al 6 e hice lo mismo con todos, dividirlos entre 4 y multiplicarlos por 3.

Al analizar las técnicas empleadas por las alumnas, se dan cuenta de que la última resulta más sencilla y que se usan las fracciones. Al cuestionar respecto de la función de la fracción se deduce que sería más sencillo ir calculando los cuartos de cada medida.

M: Si les pregunto cuánto aumentó cada lado qué responderían:

A3: $\frac{3}{4}$.

M: Entonces, si el 2 es un entero y le sumamos tres cuartos, ¿cuánto nos queda?

A2: 3.5, porque $\frac{3}{4}$ de 2 es 1.5 y le sumamos el 2.

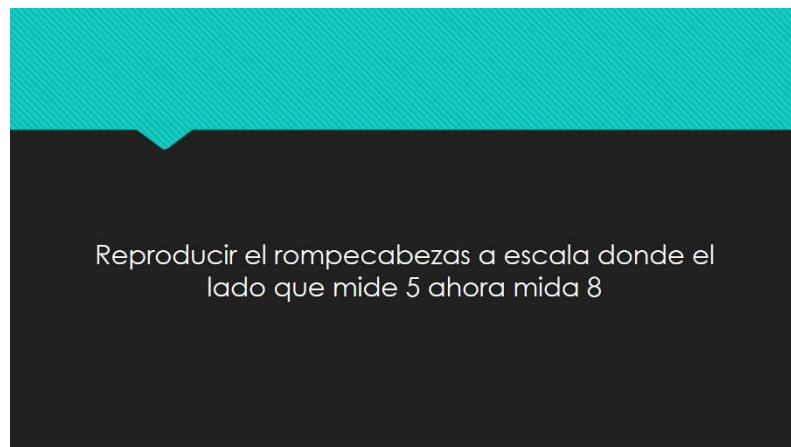
M: Si nuestro entero sería 2, $\frac{1}{2}$ sería 1, y $\frac{1}{4}$ sería .5, si les sumamos $\frac{3}{4}$ entonces sería $\frac{1}{2}$ igual a $\frac{2}{4}$ más $\frac{1}{4}$ sería 1.5, 2 más 1.5, 3.5.

A1: A todos se les suma $\frac{3}{4}$.

Después de socializar esta técnica se les planteó una similar, en la que se cambiaba la escala, se presentó una diapositiva donde se daba la indicación.

Figura 43.

Segunda tarea de quebrados de cabeza.



Fuente: Creación propia.

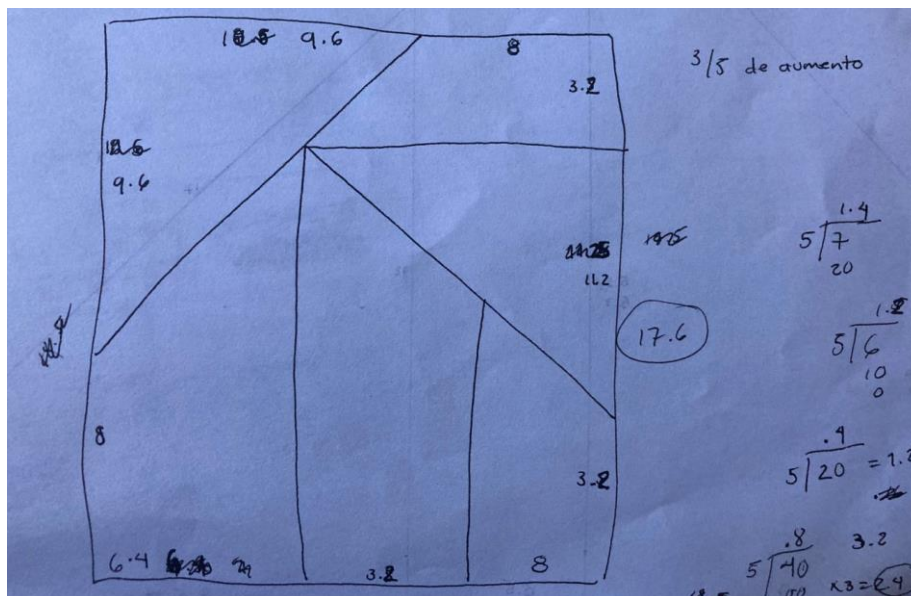
Se dio un tiempo para que las alumnas pudieran encontrar las técnicas necesarias para atender la tarea y le dieran respuesta a la misma. En esta ocasión, y después de haber socializado las diferentes técnicas, las alumnas recurren únicamente al uso de la fracción para dar solución a la tarea, identificando que aumenta $\frac{3}{5}$ con relación a cada lado, utilizando a la fracción como operador multiplicativo.

Utilizan la división entre 5 y multiplicación por 3 de cada medida para determinar la escala a la cual deben de llevar las medidas originales, para ello A1,

A2, A3 y A5 recurren a los algoritmos convencionales y A4 a la multiplicación por fracción y posteriormente a su conversión a decimal.

Figura 44.

Técnica algoritmo convencional A1.



Fuente: Creación de las alumnas.

Como podemos observar, 4 de las 5 alumnas participantes emplean la misma técnica, identifican que aumenta $3/5$, y posterior a ello dividen cada una de las medidas entre 5 para sumarle la correspondencia a tres y crear la figura con su nueva escala.

A5: Divide y multiplica.

A3: Yo dividía entre 5 el número y lo multiplicaba por tres.

A2: Yo estoy como A3, para empezar, estamos hablando de quintos, entonces el 8 lo tenemos que dividir en 5 partes, que tendríamos 1.6.

A1: lo que hice fue con los $3/5$, dividía cada uno de los números entre 5 y lo que me salía lo multiplicaba por 3 y lo sumaba a la cantidad inicial.

Figura 45.

Técnica multiplicación por fracción A4.

$5 = 8$

$(5) \left(\frac{3}{5} \right) = \frac{15}{5} = 3 + 5 = 8$

$(4) \left(\frac{3}{5} \right) = \frac{12}{5} = 2.4 + 4 = 6.4$

$(2) \left(\frac{3}{5} \right) = \frac{6}{5} = 1.2 + 2 = 3.2$

$(6) \left(\frac{3}{5} \right) = \frac{18}{5} = 3.6 + 6 = 9.6$

$(7) \left(\frac{3}{5} \right) = \frac{21}{5} = 4.2 + 7 = 11.2$

Vertical divisions on the right:

- $5 \overline{) 24} \begin{array}{r} 4 \\ 20 \\ \hline 4 \end{array}$
- $5 \overline{) 60} \begin{array}{r} 12 \\ 10 \\ \hline 0 \end{array}$
- $5 \overline{) 18} \begin{array}{r} 3.6 \\ 15 \\ \hline 30 \\ 30 \\ \hline 0 \end{array}$
- $5 \overline{) 21} \begin{array}{r} 4.2 \\ 20 \\ \hline 10 \\ 10 \\ \hline 0 \end{array}$
- $\frac{3}{5}$

Diagram at bottom right:

$1.6 \quad 2.6$
 $\frac{3}{5}$

Fuente: Creación de las alumnas.

A4: Como ya tenía lo de $\frac{3}{5}$ multipliqué, multipliqué 5 por 3 quintos, y me salió $\frac{15}{5}$ numerador por numerador y denominador por denominador que es igual a tres enteros y los sumé a los 5 del principio y así me dieron 8, entonces así le hice con todos. Multipliqué cada entero por $\frac{3}{5}$ y el resultado se lo sumaba al entero.

Al observar la imagen podemos darnos cuenta de que primero A4 multiplica por la fracción para posteriormente convertir el resultado de esta multiplicación a decimal y sumar a la cantidad inicial de tal manera que nos dé la nueva medida del rompecabezas a escala.

Si bien los procedimientos empleados por todas las alumnas comparten el uso de la fracción para identificar el aumento de la escala, el proceso que sigue varía un poco, debido a que el uso de los centímetros asocia su transformación a

decimal para determinar la medida real con base a las concepciones generalizadas de la expresión de la medida centímetro.

Una vez compartidas las técnicas empleadas por cada una de las alumnas se procedió a institucionalizar el concepto de fracción como operador multiplicativo, retomando el ejemplo de la escala, ya que cada lado aumentaba con base a una fracción, en la tarea donde el lado que medía 5 tendría que medir 8, el operador multiplicativo sería $\frac{3}{5}$. Cada una de las medidas originales del rompecabezas tendría que multiplicarse por $\frac{3}{5}$ para después sumarse a la cantidad original y determinar la medida a escala. Se hace referencia a que la fracción como operador es cuando una cantidad es alterada por una fracción.

En esta sesión el objetivo de la actividad era que las alumnas identificaran la fracción como operador multiplicativo, donde las alumnas utilizaron diversas técnicas desde la transformación a decimales, el uso de la regla de tres y la representación algebraica para unificar en el uso de fracciones como operador multiplicativo por medio de la representación numérica y las operaciones básicas que esto conllevaba. Si bien no se vio una evolución de la técnica como en las actividades anteriores, si se pudo observar la unificación y el uso de las fracciones en la tarea planteada sin necesidad de recurrir al uso de decimales.

Las nociones matemáticas que se pusieron en juego con esta tarea fueron diferentes a las anteriores, porque si bien sabían que el trabajo iba a ser con fracciones, el operador multiplicativo no es muy utilizado en la actividad matemática cotidiana, por esta razón la dificultad radicó en el uso de las fracciones para identificar cuánto había aumentado cada uno de los lados. Pero, al igual que las tareas anteriores, se pudo observar que al momento de socializar las técnicas estas evolucionan hasta el punto de que pueden identificar la fracción como operador multiplicativo sin usar otra representación. De esta manera se hace del uso de las fracciones una técnica común entre ellas para referirse a la escala en la que había aumentado cada uno de los lados.

Para el cierre de este módulo donde las alumnas fungen como aprendices de matemáticas se hace una recapitulación de las sesiones abordadas recordando que las fracciones pueden verse como fracturador, como comparador y como

operador multiplicativo, asociándose a cada actividad realizada en el estudio. Primero con la actividad de los listones vimos el significado de Fracturador, para que con el pódium pudiéramos utilizar a la fracción como Comparador y cerramos con las escalas al usar a la fracción como operador multiplicativo.

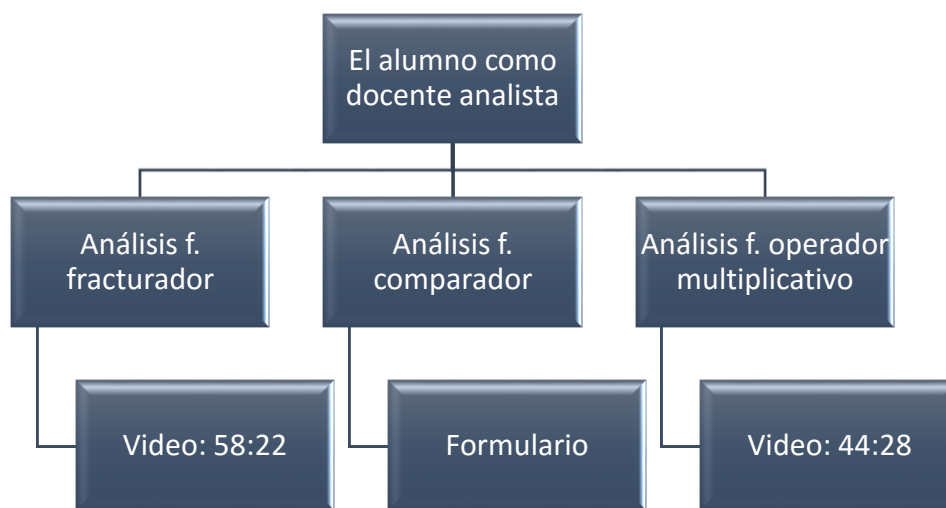
Dentro del módulo pudimos observar cómo las alumnas se convirtieron en aprendices de matemáticas al mismo tiempo que vivían un REI. De esta forma los contenidos matemáticos asociados a las fracciones se fueron consolidando al mismo tiempo que se seguían los momentos de estudio planteados en las cuestiones generatrices que permitieron desarrollar las técnicas y tecnologías que las alumnas aplican al enfrentarse con los diferentes tipos de tarea y que posteriormente servirían para institucionalizar los conceptos de fracturador, comparador y operador multiplicativo.

El Docente Analista

En un segundo momento del taller, el rol de las alumnas cambió, pasaron de ser aprendices de matemáticas a docentes analistas, en este momento analizaron las actividades que previamente habían resuelto. Dadas las condiciones de pandemia e incluso las propias actividades de prácticas de las alumnas, se optó por tener tres sesiones de manera virtual para el momento del docente analista. De estas sesiones se obtuvieron dos videos (sesión 4 y 6) y los resultados obtenidos de un formulario (sesión 5). En el siguiente esquema se da cuenta de las evidencias de cada una de las sesiones.

Figura 46.

Esquema evidencias del alumno como docente analista.



Fuente: elaboración propia

Para desarrollar cada una de las actividades de este momento se utilizó una presentación en Power Point que recogía la información trascendente de cada una de las clases desarrolladas. Fue necesario hacerlo en tres momentos diferentes ya que en cada sesión se analizó un uso diferente de la fracción, asociado a cada significado que le dimos en las sesiones de aprendiz de matemáticas. Es necesario señalar que el procedimiento para desarrollar cada una de las sesiones fue similar, únicamente cambió el uso y significado de la fracción con base en cada uno de los casos planteados.

Análisis de la situación “Encuentra el significado del mensaje”

Para comenzar con la sesión se les mencionó a las alumnas que sería grabada con fin de recuperar cada una de las participaciones y poder sistematizar la información. Posterior a ello comenzamos mencionando lo que corresponde a la tarea 4 recordando lo que se hizo en la sesión para encontrar el significado del mensaje en la actividad con las tiras de listón. Las alumnas comentan sobre este respecto:

A4: Primero nos proporcionó el material, tiras verdes y una blanca para encontrar cuánto medía el hilo. Luego íbamos a ver con la tirita verde cómo

cuánto medía la tiritita blanca y ya para crear un mensaje a nuestro compañero para que supiera cuánto medía la tiritita blanca usando la verde.

M: Se trataba entonces de redactar el mensaje, pero usando una medida de referencia, los listones: sin embargo, ustedes tendrían que crear un nuevo listón con el estambre que tenían de tal manera que sus compañeras pudieran reproducirlo con el mensaje que les enviaron. Si recuerdan tuvimos que trabajar dos veces porque no quedó claro en la primera tarea las instrucciones.

Para el análisis de esta situación se plantearon varias preguntas donde cada una de las alumnas debería de dar respuesta con base en su propia experiencia, la primera cuestión fue “¿Esta situación puede abordarse sin tener conocimientos explícitos de fracciones?”. Algunas respuestas a estas cuestiones son las siguientes:

A4: yo pienso que no porque necesitamos tener las fracciones como referencia para tener la parte del todo, tomando en cuenta la tiritita verde.

A1: yo tengo confusión, pienso que tal vez sí, pero tendría que ser muy bien redactado, usando términos como la mitad, se establece que conocen las fracciones, pero de una manera más indirecta, pienso que siendo así, por ejemplo, cuando yo quise redactar mi problema no usé fracciones, traté de hacer adivinanzas usando la mitad y poquito más de la mitad, entonces al principio no dije “mide un medio o tres cuartos”, y siento que por eso se hizo más complicado. Si no se usan las fracciones se deja mucho a la imaginación, poquito más de la mitad puede ser cualquier fracción.

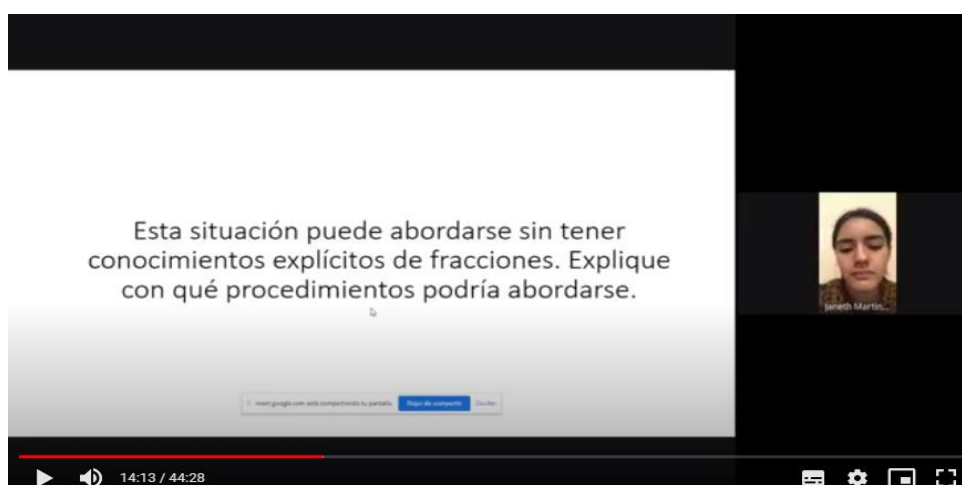
A2: yo pienso que, sí se puede, como actividad introductoria. Manejar elementos del parte todo, eso puede ayudar mucho, usar términos que normalmente usamos, la mitad, la mitad de la mitad, la mitad de la mitad de la mitad.

A5: yo estoy en la opinión de usar esta parte de esto, no sé cómo referirse a algo sin referirse a la mitad de. Siento que sería muy difícil si no se pudiera usar la fracción de $\frac{1}{3}$ sino como el doble o triple.

Como se puede apreciar, las alumnas asocian el contenido directamente con el uso de las fracciones, sólo hacen una distinción entre el lenguaje común como el doble o el triple de una cantidad para luego fracturar un todo para representarlo omitiendo el uso numérico de la fracción como “ $\frac{1}{3}$ de” o “ $\frac{1}{2}$ de”. Es evidente que tienen dificultades para trabajar con el concepto de fracción en su significado de fraccionador.

Figura 47.

Sesión de análisis de las clases de aprendiz de matemáticas.



Fuente: elaboración propia

Una vez analizada la primera cuestión, se pasó a debatir la cuestión ¿Cómo se sabe si el mensaje elaborado fue bueno o no? ¿Cómo se sabe si el listón fabricado fue del tamaño correcto? Es decir, ¿cómo se validan las producciones? Ante estas preguntas destacaron las respuestas siguientes:

A5: para saber si el mensaje fue bueno o no sería si se llega al resultado. Yo me fijaba que algunas compañeras o no sé si yo, tuvimos el problema que no supimos explicarnos y así no llegaron al resultado. Siento que el resultado correcto fue por la comparación, hasta que llegaron con el compañero fue cuando ya sabían si sí o sí no.

A1: Yo considero que es importante ponernos en la posición del otro al momento de elaborar el mensaje porque cuando uno elabora el mensaje tiene mucho sentido, porque sabemos las medidas, entonces

para nosotros, aunque no tenga coherencia tiene sentido porque tenemos las medidas, fijarse en el resultado y en el procedimiento para saber si el mensaje fue bueno o no. Para saber si fue correcto es a través de la comparación, siento yo que al revisar se validaron si estaban correctas las medidas o no.

A4: Coincidió mediante la comparación de los listones, y también lo que dijo A1 ponerse en el lugar del otro.

A2: Igual que A1 entiendo que la importancia radica en el emisor y el receptor.

En estas respuestas se puede percibir que las alumnas identifican que es necesario plantear bien los mensajes para poder comprender la instrucción y por consiguiente trabajar la tarea matemática. Coinciden en que para poder saber si están bien o no es necesario efectuar una comparación de listones siendo este proceso la validación de la técnica que permitirá o no cumplir con la tarea planteada.

Como siguiente cuestionamiento pasamos a identificar ¿Qué aspectos de las fracciones se ponen en juego con la situación? Ante lo que respondieron:

A4: La fracción como parte de un todo, vemos la unidad, ya veíamos si teníamos más de la tiritita o menos.

A2: Nos pudimos percatar de las diferentes formas en las que fue fracturada la tira verde, unos tenían cuartos, otros medios, nadie tenía fracción igual.

A1: También vimos otro tipo de representación de las fracciones, no sólo numérica, sino también gráfica donde a partir de un listón, que en otros ejemplos podría ser una pizza o cosas así, de esta forma trabajamos las fracciones con otros tipos de representaciones.

A5: Puede ser la manera escrita de las fracciones, sabíamos que trabajamos con fracciones, pero usábamos de manera escrita con palabras la fracción con la que estábamos trabajando, el doble, el triple, el lenguaje común.

En este cuestionamiento pudimos observar algunos puntos coincidentes asociados directamente al uso de la fracción como fracturador, donde las alumnas

de manera implícita hacen referencia a la parte todo, su contextualización y uso en objetos cotidianos y la importancia de la verbalización de lo numérico.

Una pregunta más, que también tenía que ver con reconocer a la fracción como fracturador fue la siguiente: ¿Qué se necesita saber para poder jugar? ¿Qué se puede aprender? Las respuestas versaron respecto a:

A5: En la primera pregunta yo siento que necesitamos saber los datos, las referencias, conocer el material. Más que nada tener las instrucciones claras. Se puede aprender la fracción como fracturador, aprendimos eso sin darnos cuenta, no había escuchado ese concepto, y al escucharlo dije “pues sí tiene sentido, estamos fracturando”. Con los alumnos podemos trabajarlo de manera implícita.

A4: Necesitamos analizar y representar, ver cómo se representa una fracción, saber redactar y entre más lenguaje de las fracciones tengamos, más entendible sería el mensaje y más sencillo de entender para el receptor. Se puede aprender a usar las fracciones para comunicar información.

A1: Saber bien lo que se tiene que hacer, también saber hacer inferencias y saber usar referencias, si vamos a hablar de una medida que alguien desconoce, entonces debemos inferir que tal medida era $\frac{3}{4}$ de otra sin saber las medidas, sino lo que referencia. Se puede usar la fracción como fracturador de manera implícita, poder transmitir un mensaje a través de fracciones.

A2: Estoy de acuerdo que para poder jugar tenemos que poder aceptar y reconocer que las fracciones son divisorias de un todo. Pudimos aprender que no sólo se puede medir con lo que tenemos ya fijo, como decimales, sino que podemos medir a través de fracciones y eso nunca lo había hecho.

En estas participaciones también encontramos algunos puntos coincidentes. Sin embargo, rescatamos la importancia de redactar bien las instrucciones y el uso de las fracciones para poder realizar la tarea, también observamos que hacen alusión al concepto de fracturador retomando un todo que se fractura en partes y asociándolo al contexto de medida que en palabras de A2 es algo que comúnmente

no se hace, y que pudimos observar en la sesión de “Quebrados de cabeza” (rol de alumnas como aprendices de matemáticas).

Siguiendo con las preguntas del análisis se les pidió lo siguiente: “Compare la dificultad para reproducir los siguientes tres listones: A de $\frac{2}{5}$ de unidad, B de $\frac{1}{3}$ de unidad y C de $\frac{1}{4}$ de unidad. ¿Considera que el grado de dificultad es el mismo para los tres listones o hay diferencias?”.

A2: Existe diferencia porque es más fácil cuando dividimos por mitades. Cuando dividimos en 5 partes la dificultad aumenta, como así también cuando dividimos en 3, porque creo que son los primeros conocimientos que se nos dan, son con los que tenemos más habilidad.

A4: Estamos más impuestos a trabajar con cuartos, luego tercios y con los quintos menos. Además de los quintos dividimos en 5 y tomamos dos.

A5: Siento que la dificultad está en que no se puede doblar, en tres no se puede, en 5 tampoco, o tan sólo de dividir.

A1: Yo también pensé en dobleces, es más fácil en 4, es la mitad de la mitad, en cambio con partes como 5 o 3, es menos exacto. El más fácil es cuartos, después el de 3, pero ya después querer buscar 5 es más complejo, con dobleces sería al tanteo y sería más difícil.

A6: Coincido con mis compañeras, nosotros estamos acostumbrados a partir de lo básico a lo difícil, pero es importante plantear diferente tipo de situaciones no sólo las mismas, se debe involucrar diferente nivel de dificultad.

Debemos aclarar que cuando resolvieron la actividad con los listones no todas tuvieron el mismo listón, por eso es que algunos mensajes fueron más sencillos ya que hubo quien pudo escribir que la mitad o con dos pedazos de éste, con cuartos también, pero aquellas que tenían un listón con denominador no múltiplo de 2 tuvieron más dificultades para identificar la longitud del listón y plasmar las instrucciones en el mensaje.

Las alumnas consideran que el grado de dificultad aumenta al momento de no poder dividir entre dos, cuatro y/u ocho, debido a que al hacerlo de manera manual el resultado tiende a ser exacto, mientras que, al dividirlo entre un número impar las aproximaciones a la división puede traer consigo una variación en las medidas de las partes. Esto se puede observar con las participaciones de las alumnas, particularmente cuando mencionan que es más común dividir en mitades ya que ellas están habituadas a trabajar con cuartos. Esta costumbre, inferimos, deviene de las formas de enseñanza que comúnmente se usan al abordar el trabajo con fracciones en las aulas de la educación básica.

Otra pregunta que tenía el objetivo de conocer el contenido de las fracciones que las alumnas identifican en la actividad de los listones fue la siguiente ¿qué contenido matemático se abordó en la sesión?

A1: La fracción como fracturador. La unidad se podía fracturar en cierta cantidad de partes.

A4: Si la fracción como fracturador.

El resto de las alumnas aseguraron las participaciones de sus compañeras, dando por hecho que el trabajo de la sesión abordaba el contenido de la fracción como fracturador.

Al momento en que se realizó la actividad y se institucionalizó, además de realizar este análisis, fue muy sencillo para las alumnas el identificar la fracción como fracturador como contenido matemático en estas sesiones ya que recordaron el concepto abordado con cada tarea planteada.

Por otra parte, cuando se preguntó el objetivo de la sesión de escribir el mensaje las alumnas respondieron:

A1: Buscaba que se vieran las fracciones desde otro punto de vista, más que como partes de un todo, como medidas en esta ocasión, además de manera inversa, en lugar de tener las medidas y sacar los resultados, lo que se buscaba era que comenzamos primero elaborando las medidas, buscando las medidas, luego elaborando el

problema y luego resolviéndolo. No sólo conocemos cómo se hacen las cosas, sino desde dónde.

A2: Situamos las fracciones en un problema que se puede dar, y a partir del material manipulable sacar la fracción. No siempre tenemos la fracción y luego el material.

A5: Estoy de acuerdo, pero creo que la sesión nos sirvió para entender un concepto que no sabíamos. El material ayudó.

El propósito de esta sesión era que las alumnas identificaran la fracción como fraccionador por medio de la actividad de escribir el mensaje y que pudieran reproducir el listón haciendo uso de las fracciones en el contexto de medida, aspecto que se ve reflejado en las participaciones de las alumnas.

Para finalizar esta sesión de análisis se preguntó a las alumnas ¿Cuáles son los posibles errores y dificultades con los que se pueden enfrentar los alumnos de educación primaria ante esta situación?

A6: Las equivalencias, explicar con elementos gráficos.

A4: Entender el proceso, identificar la unidad de tira verde, a lo mejor lo pudiera poner con la regla de 30 cm para que la pudieran dividir, porque se me hace complejo como se nos hizo a nosotros para que comprendan instrucciones.

A1: Comprender lo que se tiene que hacer, porque tienen más material y que no todos cuenten el mismo, comprender las instrucciones. Si no dominan las fracciones no van a saber redactar el mensaje.

Con estas participaciones observamos que las dificultades que tuvieron las alumnas como aprendices de matemáticas son las mismas que trasladan al trabajo con alumnos de educación primaria, al vivirlo lo asocian a las dificultades que los niños pueden tener.

Otras de las posibles dificultades que pudieran presentar son el trabajar con fracciones mayores a la unidad, ya que uno de los listones medía más de la tira unidad generando dificultades para expresar la medida. A su vez, trabajar con fracciones que no son múltiplos de dos puede generar que el resultado se aproxime a una fracción impar siendo aproximada la medida.

Hasta este momento las alumnas pudieron identificar una técnica que les permitiera construir mensajes y reproducirlos utilizando como referencia la tira unidad y la fracción que representaba cada uno de los listones, objetivo que perseguía la actividad. Con este análisis cerramos la sesión correspondiente al análisis de la situación de escribir el mensaje para construir listones.

Análisis de la situación “El basquetbol”

Siguiendo el patrón del análisis de las clases, para comenzar con la sesión de análisis de la actividad “El básquetbol”, se les mencionó a las alumnas que sería grabada con fin de recuperar cada una de las participaciones y poder sistematizar la información. Posterior a ello comenzamos mencionando que en esta ocasión trabajaremos la tarea 5, recordando qué se hizo en la sesión de “El basquetbol”. Cabe señalar que no se pudo almacenar la sesión por cuestiones técnicas y recurrimos a la implementación de un formulario para recabar la información.

Para la pregunta asociada a si es necesario tener un dominio de las fracciones para esta sesión y si no fuera el caso ¿cómo podría abordarse? se llegó a la conclusión de que sí es necesario tener dicho dominio para utilizar la descripción gráfica y realizar las comparativas. También se hace la observación de que si bien la descripción gráfica es un recurso que se puede utilizar dificultaría un poco el desarrollo de la actividad al momento de partir cada unidad para poder efectuar la comparación.

Para la serie de preguntas que incluían el ¿Cómo se sabe si el pódium fue el real o no (adecuado)?, ¿Cómo se sabe si el mejor tirador fue el del primer lugar? Es decir, ¿Cómo se validan las producciones? Las respuestas de las estudiantes versaban respecto a que el pódium fue real porque los números de tiros y las cestas eran proporcionales respecto de las cantidades de oportunidades de las tiradoras. De esta manera, se aproximaron a la idea de que se valida la producción con base en la relación que existe entre tiros efectuados y tiros encestandos, además de efectuar las comparaciones por diferentes medios.

A2: A través de las comparaciones entre el número de tiros y las cestas realizadas.

El resto de las alumnas apoyaron la respuesta brindada por A2 expresando frases como “es cierto” y “estoy de acuerdo con A2”.

Para la pregunta ¿Qué aspectos de las fracciones se ponen en juego con la situación? encontramos una serie de respuestas orientadas hacia la representación gráfica de las fracciones, distintos denominadores, comparación de fracciones, aspectos que denotan las técnicas que emplearon en la resolución de la tarea planteada y que se consideran necesarios ya que son contenidos que anteceden la comparación de fracciones.

Pasando al cuestionamiento ¿Qué se necesita saber para poder determinar los tres primeros lugares? ¿Qué se puede aprender? Las respuestas se enfocan directamente a la cantidad de tiros efectuados y la cantidad encestandos, con ello se establece la fracción que permitió comparar e identificar los primeros lugares, si bien se puede trabajar directamente la comparación de fracciones, también la podemos trabajar mediante la representación gráfica, las fracciones equivalentes y las fracciones con igual o diferente denominador.

A3: Comparar el número de tiros y cestas de cada jugadora.

De igual manera que en ocasiones anteriores, las alumnas validan la respuesta de A3 considerando la comparación de los tiros con relación a las canastas encestandas,

Para las preguntas ¿Es lo mismo identificar al mejor tirador que al peor? ¿Considera que el grado de dificultad es el mismo o hay diferencias? ¿Cómo aumentar el grado de dificultad en la actividad? Ante estas preguntas, las alumnas llegan a la conclusión de que es el mismo grado de dificultad, porque lo que se tiene que hacer es buscar una manera de comparar las fracciones que tienen diferente denominador, aspecto que resultaría de igual complejidad si se busca al mejor o al peor; aunque si la cantidad de tiros variara, la complejidad aumentaría dado que se tendría que buscar una fracción equivalente con el mismo denominador para todos los casos.

A2: El grado de dificultad aumentaría si cambiamos a equivalentes que aumenten en cantidad: $5/10 = 50/100 = 2500/5000$.

El resto de las alumnas apoyaban la participación de A2. Para finalizar el análisis de esta actividad se planteó la pregunta: ¿Qué contenido matemático se abordó en la sesión? En general, todas identificaron que el contenido de la actividad era la fracción como comparador. Cabe mencionarse que en el momento final de la actividad “El basquetbol” se institucionalizaron los contenidos abordados en las dos primeras sesiones; además, fue la actividad en la que las alumnas resolvieron la tarea en el menor tiempo con relación a las otras dos sesiones de aprendizaje de matemáticas.

Para la pregunta respecto del propósito de la sesión, las alumnas identificaron que fue el trabajo con la comparación de fracciones de manera lúdica acoplando actividades de la vida cotidiana para ver lo matemático en ello.

Y para cerrar la sesión se les preguntó ¿Cuáles son los posibles errores y dificultades con los que se pueden enfrentar los alumnos de educación primaria ante esta situación? Las respuestas se enfocaron al posible dominio deficiente de diversos denominadores e interpretar comparaciones entre los que desconocen. Algunos otros aspectos que no consideraron como dificultades fue que al realizar el experimento pudiese haber puros tiros con la misma fracción y no dar pie a la comparación, así como el tener denominadores con números primos lo que implicaría un denominador común muy alto y eso pudiera desencaminar en cálculos de fracciones equivalentes erróneas.

Con el análisis de esta situación las alumnas pudieron identificar qué conocimientos anteceden a la comparación de fracciones y cómo debería ser la forma de abordarse, considerando las propias técnicas que ellas utilizaron para llegar a la institucionalización.

Análisis de la situación “Quebrados de cabeza”

Continuando con las sesiones referentes al alumno como docente analista, la última sesión correspondió al análisis de la actividad “Quebrados de cabeza”

Siguiendo la estructura de análisis de las clases anteriores, se comenzó haciendo una remembranza de lo que se había trabajado previamente cuando las alumnas estaban en el rol de aprendiz de matemáticas. Al respecto, las alumnas mencionan:

A5: La clase comenzó con la entrega de figuras de diferentes tamaños, ninguna era igual y había que armar un cuadrado, la única pista era que un lado debería de medir 11.

M: La instrucción entonces fue armar el rompecabezas con las piezas que tenían, armando un cuadrado de 11 por 11.

A1: Después de que nos dio las piezas hicimos lo mismo, pero a escala, con otras medidas.

M: El reto entonces estaba en hacer un nuevo rompecabezas donde el lado que medía 4 ahora debería de medir 7 ¿qué hicieron para encontrar las medidas del resto del cuadrado?

A4: Con regla de tres, conociendo los valores, para sacar una proporcionalidad, si 4 va a 7, cuánto va a medir el de 5.

A1: Yo también lo hice por la regla de tres simple, pero antes de hacerlo así se me había ocurrido que como lo elevábamos el doble menos uno, pensé en hacerlo así, pero eso no iba a dar la misma proporción. Entonces ya mejor lo hice con algo que sabía que era más seguro que era la regla de tres.

A3: Yo lo primero que vi fue dobletear el 4 que eran 8, y vi que eran dos enteros con el 7 y era una proporción de $\frac{7}{4}$, entonces me di cuenta de que aumentaban $\frac{3}{4}$ en cada proporción, y ya sólo fui agregándole $\frac{3}{4}$ a cada número. Por ejemplo, al 4 le sumé $\frac{3}{4}$ y daba 7, en el 5, dividía 5 entre cuatro y multiplica eso por tres y se lo sumaba a 5 y así fui haciéndolo con cada uno.

A2: Yo le sume a cada lado tres centímetros, pero me di cuenta de que la figura quedaba deformada, ya no iba a quedar un cuadrado, por lo que no era viable esa manera.

M: Después ¿qué hicieron?

A3: Hicimos un nuevo cuadrado, pero ahora el lado que medía 5 debería de medir 8.

A4: Hicimos la escala, pero siguiendo lo de las fracciones, como el ejercicio anterior. entonces 3 en el numerador y en el denominador,

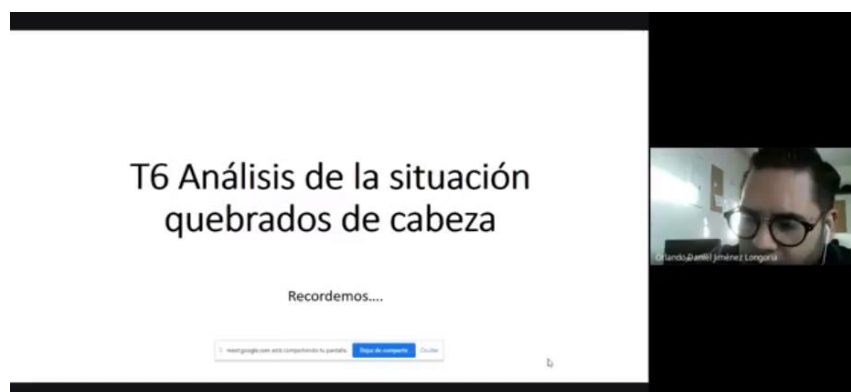
quintos. A cada lado deberíamos de sumar $\frac{3}{5}$, si el lado medía 5 teníamos que sumar 3, entonces yo lo multiplicaba 5 por $\frac{3}{5}$ me daba $\frac{15}{5}$, que era 3, y ya lo sumaba al 5. Y al final usted nos dio una explicación.

Con esta remembranza se puede concluir que trabajar la técnica favorece la adquisición del conocimiento matemático, en este caso como operador multiplicativo, pues es evidente que conocen el proceso que deben de seguir para construir las nuevas medidas correspondiente al rompecabezas a escala, aspecto que a su vez también representa la evolución de las técnicas.

Después de recordar la situación de los quebrados de cabeza y cómo se resolvió a la tarea planteada considerando las diferentes técnicas para dar solución a la misma, se pasó al análisis directo de a través de cuestionamientos similares a las anteriores sesiones, únicamente se adaptaron a la situación en particular.

Figura 48.

Sesión de análisis de la situación quebrados de cabeza.



Fuente: elaboración propia.

En el cuestionamiento ¿esta situación se podía realizar sin tener conocimiento de las fracciones? las respuestas se encaminaban a que sí se podría, haciendo énfasis en el uso de decimales como en la primera transformación del rompecabezas.

A5: Yo creo que sí, porque yo recuerdo que muchas de nosotras no pensamos en usar fracciones hasta que vimos los procedimientos de las compañeras.

A1: Yo no me acordé de las fracciones al momento de resolver la primera escala.

Con esta participación podemos observar que las técnicas pueden evolucionar al momento de contrastarlas. En un primer momento la alumna A5 no utilizó la fracción como operador multiplicativo, pero cuando observó otras técnicas pudo evolucionar la propia e ir construyendo una nueva forma de atender la tarea de manera que las fracciones fueran las que guiarán el desarrollo de la misma.

A3: Yo pienso que sí se necesitan, de manera implícita se usan. Si haces la regla de tres o porcentaje sabes que tienes un entero o decimales, si hablas de 0.5 es la mitad. De manera implícita siempre lo tienes.

Con esta participación podemos observar que la técnica empleada asociada a las fracciones por parte de la alumna A3 ya expresa parte de la tecnología y la teoría, considerando el uso de la fracción como operador multiplicativo considerando la relación entre las fracciones, porcentaje y regla de tres, justificando que en todos los procesos se consideran a las fracciones como el eje que permite desarrollar las técnicas empleadas.

Después de esto pasamos a la pregunta que trataba de validar la elaboración del rompecabezas ¿cómo saben que la elaboración del rompecabezas fue correcta? Las respuestas se encaminaron directamente a la validación por medio de la reproducción del cuadrado, ya que era muy sencillo saber si había sido bien elaborado al reproducir un cuadrado con mayores dimensiones.

A1: Yo pude comprobar que estaba bien porque las medidas correspondían.

A4: Cuando el cuadrado cumplía con las características del cuadrado, que los cuatro lados midieran lo mismo.

Con las participaciones y en esta tarea fue sencillo percibir si la técnica empleada era correcta, ya que si el rompecabezas reproducido a escala cumplía con las características del cuadrado se validaba la técnica. Posteriormente, pasamos a la pregunta ¿qué aspecto de las fracciones se trabajó en esta sesión?

A1: La fracción como proporción, buscar que, aunque la fracción se modifique tenga la misma proporción.

A4: La fracción como operador multiplicativo.

A3: Escalas.

A5: Proporciones.

M: ¿Qué hicimos con las fracciones para encontrar las proporciones y escalas?

A4: Las multiplicamos.

A5: Sumar.

A3: También puede ser la división de fracciones

Posteriormente se les planteó la pregunta ¿Qué se necesita saber para reproducir el rompecabezas? En este caso encontramos respuestas asociadas directamente con las medidas de la figura y la escala a la que se pretende desarrollar. Así como comprender la proporción.

A5: Un posible camino sería sumar la misma cantidad que se sumó al primer lado, pero si se hacía así a todos no saldría, tendríamos que saber la proporción.

A1: Elevar a una escala, sino elevarlos en la misma proporción, que no sólo se incrementen, sino que al incrementar sigan teniendo el mismo valor, pero a escala con relación.

A2: Interiorizar el sentido de las fracciones para no cometer el mismo error que yo tuve de querer usar decimales y no saber.

Una vez analizado este aspecto pasamos a identificar el nivel de complejidad de las tareas planteadas cuando tenían que hacer que la escala del rompecabezas

cambiara del lado que medía 4 a 7 o de 5 a 8. En este caso, las alumnas llegaron a la conclusión de que el grado de dificultad es el mismo, pero varía la forma de contestar cuando se enfrenta por primera vez a una tarea a cuando ya se trabajó una situación y se pretende trabajar la técnica para encontrar la escala y reproducir el rompecabezas.

A3: Cuando lo hice se me hizo igual, porque yo sólo multiplicaba, en ambos casos hice lo mismo. Se me hizo igual de difícil.

A4: Yo pienso que es igual, ya entendiendo que el primer dato nos va a dar el denominador y el numerador va a ser la diferencia entre el primero y el segundo, pues ya no importa mucho qué números sean.

A2: Yo difiero, a veces manejar fracciones que parten de 5 partes es más difícil que trabajar fracciones que parten de 4 partes. Porque trabajamos más la mitad, o la mitad de la mitad, y no tanto con 5 partes.

Además, las participaciones de las alumnas convergen en el punto de que una vez que se enfrentan a la primera tarea que era modificar a una escala donde el lado que medía 4 ahora tenía que medir 7 y socializar las diferentes técnicas permitiría trabajar la misma técnica en una segunda tarea donde se modifica ahora del lado que medía 5 ahora tendría que medir 8, de esta forma se facilita la comprensión de la tarea y por ende el uso de la técnica.

Una vez analizada esta situación se cuestionó ¿qué contenido matemático se había abordado en esta sesión? En general contestaron que el contenido era la fracción como operador multiplicativo y sobre el objetivo de la sesión señalaron:

A1: Con base en un problema, se reconozca lo que se tiene que hacer los datos, en este caso con las fracciones llevar a cabo multiplicaciones.

A3: Utilizar las fracciones como recurso para resolver problemas.

A4: Usar las fracciones para las proporciones, utilizando la regla de tres de manera implícita con las fracciones.

A2: Visualizar las fracciones como medida, dejando de lado lo convencional.

Las alumnas identificaron que lo que aumentaba era proporcional a cada medida y que para ello deberían buscar un operador multiplicativo; sin embargo, en la primera tarea no identificaron que se trata de una fracción y al compartir las diferentes técnicas encontraron que la forma más sencilla era hacer uso de la fracción como operador multiplicativo.

Por otra parte, el cuestionamiento asociado a las dificultades y errores que pudieran enfrentar los alumnos de educación primaria ante esta situación, las respuestas se orientan a la idea que no necesariamente van a utilizar las fracciones para dar solución a la tarea. También aparecieron respuestas asociadas a la frustración de no encontrar una técnica viable para solucionar la tarea y la más importante a su consideración en no encontrar que el aumento a los lados referiría a una fracción.

Como término de esta sesión, y del rol de las alumnas como docentes analistas, se hizo un cierre denotando los conceptos abordados en las sesiones: la fracción como fracturador, como comparador y como operador multiplicativo, denotando que este último se puede utilizar en las escalas aumentando no sólo el doble o triple, sino el aumento de una parte fraccionaria.

El Docente en formación y la didáctica

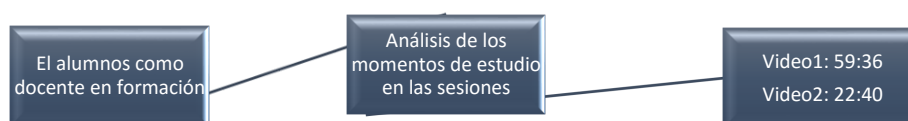
Para el tercer momento de esta investigación se recurrió al análisis de la propia teoría que guió el desarrollo de las sesiones, debido a las situaciones presentadas y mencionadas previamente se llevaron a cabo dos sesiones virtuales, si bien se había contemplado hacerla en una sola sesión, por solicitud de las alumnas y al no quedar del todo claro los conceptos abordados se extendió dando como evidencia dos videos.

El propósito de esta etapa en la investigación era que las alumnas profundizaran en la teoría que subyace en la manera en la que se trabajaron las actividades planteadas. Fue necesario identificar cada uno de los momentos en que

se desarrollaron las clases, relacionándolo con los conceptos de la TAD de tal manera que fueran comprendiendo y vinculando con los ejercicios abordados en las dos etapas anteriores. Esto sirvió como preámbulo para el siguiente paso del REIFP: diseñar un REI. En el siguiente esquema se muestra la distribución de la sesión, así como el contenido y las evidencias que se obtuvieron del mismo.

Figura 49.

Esquema evidencias del alumno como docente en formación

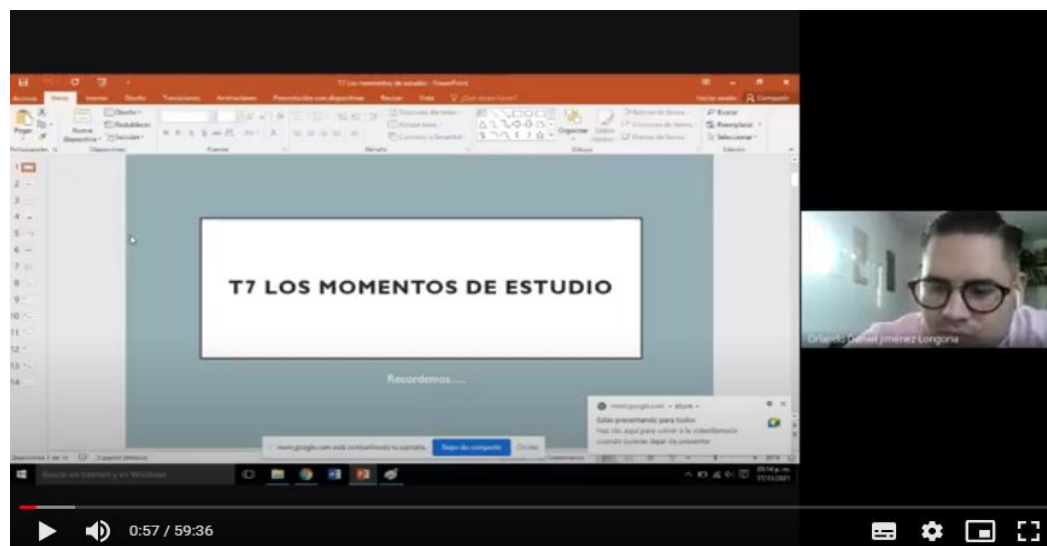


Fuente: elaboración propia.

Para comenzar con esta etapa se les solicitó a las alumnas enunciar la estructura de las sesiones de aprendiz de matemáticas, que expresaran el proceso por el cual se desarrolló cada una de las sesiones vividas previamente en la etapa de aprendiz de matemáticas. Se les hizo la aclaración de que en este momento se recabará información relacionada con la didáctica empleada en la ejecución de las clases, por lo que era importante hacer alusión a ellas.

Figura 50.

Sesión de análisis de los momentos de estudio.



Fuente: elaboración propia.

Frente a dicho planteamiento las alumnas expresaron las siguientes ideas:

A5: Todas las actividades comenzaban con una situación, asociadas a un acertijo, una situación que se convertía en una problemática al momento de pedirnos hacer alguna de las cosas, después de ahí compartimos nuestros procesos y resultados, posteriormente usted intervenía para poder dejar algunas cosas claras o corregir también. Y en el del rompecabezas por ejemplo volvió a suceder el proceso, aumentando de complejidad.

A4: Siguiendo como las etapas de las clases de matemáticas, primero era la acción se nos presentaba el problema, luego la formulación que era como nosotros lo podíamos resolver como pudiéramos, luego la validación que es cuando ya comparábamos las respuestas, y ya la institucionalización que es cuando ya usted nos decía cuál era el procedimiento correcto o veía nuestros procedimientos y tomaba el que era más funcional o el que se ocupaba más las fracciones.

A1: Yo coincido con A4, sólo que antes de la acción pudiera ser una pequeña introducción sin introducir el tema, es decir no nos introdujo el tema, simplemente se introdujo lo que íbamos a hacer y cómo lo íbamos a llevar a cabo.

A3: *Creo que nadie lo mencionó, pero falta decir que al final comparábamos nuestras respuestas y comprobamos las respuestas de cada una y comparábamos resultados.*

A6: *También se retoma como esta conceptualización, pero no se daba como: el fracturador es éste, el comparador es éste y el operador es éste; sino que se hacía primero el ejercicio y se construía el concepto que deberíamos tener en cuenta.*

Con estas participaciones podemos percatarnos de que existe en las alumnas una conceptualización previa del diseño de las clases de matemáticas, haciendo alusión a las fases de las Situaciones Didácticas de Brousseau (A4); sin embargo, este preámbulo sólo serviría para dar a conocer los momentos de estudio de la TAD así como los conceptos importantes para su uso en el diseño de clases de matemáticas.

Continuando con la sesión se les pidió que llenaran una tabla para identificar las diferencias y similitudes en las sesiones como la siguiente:

Figura 51.

Diferencias y similitudes como aprendiz de matemáticas.

EN LA ESTRUCTURA DE LAS CLASES	
Diferencias	Similitudes
-Diferentes niveles de dificultad en las sesiones (1 y 2 con 3). -Diferentes usos de la fracción en cada sesión. -(fracturador, comparador y operador multiplicativo). -Se emplearon diferentes procedimientos para llegar al resultado. -Material diferenciado en las actividades.	-Implementación de material. -Aprendizaje basado en problemas. -Comparación de procedimientos y resultados. -Inician con una situación problemática. -El docente realiza una institucionalización. -Todas involucraban un juego. -Uso de fracciones.

Fuente: elaboración propia.

Dentro de las similitudes las alumnas encontraron la estructura de la clase, el uso del material didáctico, el uso del juego, el planteamiento de problemas, la

comparación de procedimientos, la institucionalización y el trabajo con fracciones. Mientras que las diferencias se asocian con aspectos específicos de cada sesión como los usos de la fracción (fracturador, comparador y operador multiplicativo) así como el material específico en cada sesión, considerando el grado de dificultad. Estos aspectos permitieron ir clasificando cada momento de estudio al momento de su formalización en la siguiente etapa de la sesión.

Para el llenado de la tabla iban participando las alumnas con algunas oraciones que las demás completaron, validando las participaciones entre todas y aseverando tanto las diferencias como similitudes entre lo desarrollado en las sesiones.

Luego de llenar la tabla se hizo una contextualización de la TAD y se mencionó que el referente que habían considerado previamente en sus participaciones (la TSD) no había sido el que guió estas sesiones. Comenzamos con los conceptos generales de la TAD, de dónde surge, el modelo praxeológico.

Para el análisis del momento praxeológico se recurrió a las sesiones previamente desarrolladas, explicando que, bajo esta teoría, cada situación planteada se denomina tarea.

M: Las tareas es la situación planteada, las técnicas es lo que ustedes utilizan para dar respuesta a esas tareas, la tecnología se entiende como el discurso o la explicación que ustedes dan de por qué lo hacen de esa manera y la teoría justifica el por qué lo hicieron de esa forma.

Posteriormente se hizo un análisis breve de la primera sesión para identificar que utilizaron una tira unidad de referencia para transmitir un mensaje que permitiera la construcción del listón. También se subrayó que las técnicas que utilizaron fueron las representaciones gráfica, numérica y algebraica. Después de esto mencionaron la razón por la que usaron ese procedimiento (la tecnología) y la teoría se enfoca en el contexto matemático de por qué lo hicieron así.

Enseguida pasamos a los tipos de praxeologías con base en su alcance, y de ahí a los momentos de estudio: primer encuentro, exploratorio, trabajo de la técnica, constitución tecnológico teórico, institucionalización y evaluación. Al hacer

esto se solicitó a las alumnas tratar de vincular cada momento con las partes de las sesiones abordadas encontrando como primer acercamiento lo siguiente:

M: Si relacionamos cada momento de estudio con lo vivido en las clases ¿dónde vemos el del primer encuentro?

A3: En la sesión dos, la primera acción.

A1: Donde comenzamos la actividad, donde analizamos los tiros.

A4: Mi primer encuentro es cuando nos dijo que representáramos cuántas canastas habíamos metido, tuvimos el primer encuentro con las fracciones.

Con esta participación pasamos a explicar los conceptos de Chevallard asociados directamente de los momentos de estudio para clasificar cada parte de las sesiones.

M: El primer encuentro es cuando ustedes se enfrentan a la situación problemática, cuando conocieron la tarea que iban a resolver, pasar el mensaje, encontrar el pódium, construir un rompecabezas a escala.

M: En el momento exploratorio es donde ustedes tratan de dar solución a la tarea, qué cosas conocen que les va a permitir resolver la tarea. En cada situación ustedes tuvieron un momento para buscar cómo lo iban a hacer.

M: El trabajo de la técnica es donde se pretende mejorar la técnica, ustedes ya se enfrentaron a la tarea, buscaron cómo solucionarla, y ahora deberán de seleccionar la técnica que mejor atiende. En los ejemplos de las clases cada una utilizó diferente técnica, pero al final pudieron trabajar la misma técnica.

A2: En el de comparar usaron técnicas numéricas y yo gráfica, pero después pudimos trabajar sólo la numérica.

M: En las sesiones uno y tres trabajaron la técnica en dos situaciones, con la construcción de diferentes listones y en la tercera con diferentes escalas, así se trabajó la técnica para ir construyendo el concepto matemático.

M: En la constitución del entorno tecnológico teórico ustedes recurrieron a sus saberes para dar solución a la tarea, pero de manera indirecta ya saben cómo lo van a hacer, pero también el por qué lo van

a hacer así. Aquí ustedes van a justificar por qué lo hicieron así. Cuando se les preguntaba por qué lo hicieron así, cuando estaban comparando fracciones y estaban en medios y cuartos no tenían que hacer nada porque ya sabían que las equivalencias podían resolver las igualdades de un medio y dos cuartos.

M: El momento de institucionalización es cuando se formaliza el concepto retomando lo desarrollado en las sesiones retomando las técnicas empleadas para poder construir el concepto.

M: La evaluación va más allá de la interrogación, sino enfocarse en no evaluar a la persona sino más bien si lo que hicieron da respuesta a la tarea que se planteó, ubicando los errores cometidos para suprimirlos y construir el conocimiento.

Para cerrar este apartado cabe mencionar que cada sesión desarrollada en el rol de aprendiz de matemáticas seguía la estructura asignada por los momentos de estudio.

Luego de la institucionalización de los conceptos principales de la TAD, como praxeologías, momentos de estudio, cuestiones generatrices y el propio REI, se abrió un espacio para que las alumnas plantearan sus dudas respecto a los temas abordados. Fue evidente que la construcción del bloque tecnológico teórico, específicamente con la teoría, fue lo que más llamó la atención debido a que muchas veces no se suele justificar matemáticamente por qué se hace de esa manera, haciendo alusión a que muchas veces se resuelven los problemas, pero no se es consciente del por qué se hace así.

Para cerrar la sesión se mostraron las planeaciones de cada clase con las que se guio el taller para evidenciar cada uno de los momentos de estudio, de tal manera que pudieran asociar lo vivido con el referente teórico que se les estaba explicando en el momento, una forma de institucionalizar lo desarrollado en cada sesión a través de las etapas de las clases.

Poco antes de comenzar la última sesión, las alumnas solicitaron abordar nuevamente los conceptos asociados a los momentos de estudio debido a que habían quedado algunas dudas. Para ello se planteó una breve sesión retomando

los aspectos más importantes y resolviendo las dudas que se presentaron. En dicha sesión comenzamos denotando las dudas de las alumnas.

M: ¿Cuáles son sus principales dudas?

A4: ¿El primer encuentro es cuando se entrega el material?

M: Contiene elementos de eso, pero cuando se enfrenta al problema, la situación comienza cuando el alumno se enfrenta a la tarea planteada, previamente tienen que preparar el ambiente, mostrar el material si es necesario.

A4: Sería como la acción pues.

En esta participación podemos observar que la alumna hace referencia a un concepto del que ya se apropió de la Teoría de Situaciones Didácticas, la acción, y lo contrasta con la nueva información teórica referente al momento de estudio 1 que hace alusión al primer encuentro, cuando el alumno se enfrenta a la tarea planteada. Esto demuestra que los esquemas de la alumna se van modificando y va reconceptualizando sus saberes, aplicando los aprendidos en el taller.

A3: El segundo momento no es cuando el alumno lo resuelve de forma que no sea con una técnica en específico sino con diferentes técnicas que él conoce.

M: Sí, precisamente el momento exploratorio es cuando ellos comprenden la tarea a la cual deben de dar solución recurriendo a sus conocimientos previos para tratar de explicar cómo dar respuesta a esa área que se plantea, no necesariamente la técnica va a ser convencional, sino que va a hacer uso de los conocimientos que tiene hasta el momento.

En este momento podemos observar cómo el dominio de los conceptos en la alumna se hace presente, pues en su discurso utiliza las praxeologías para definir el segundo momento, haciendo alusión a las tareas y técnicas referentes al bloque práctico de las mismas, aspecto que permite denotar la evolución en la adquisición de los saberes propios de la teoría empleada en el taller.

Al término de la sesión de dudas, que más que eso fue la validación de algunos momentos, se explicó nuevamente cada uno para poder abordar aspectos

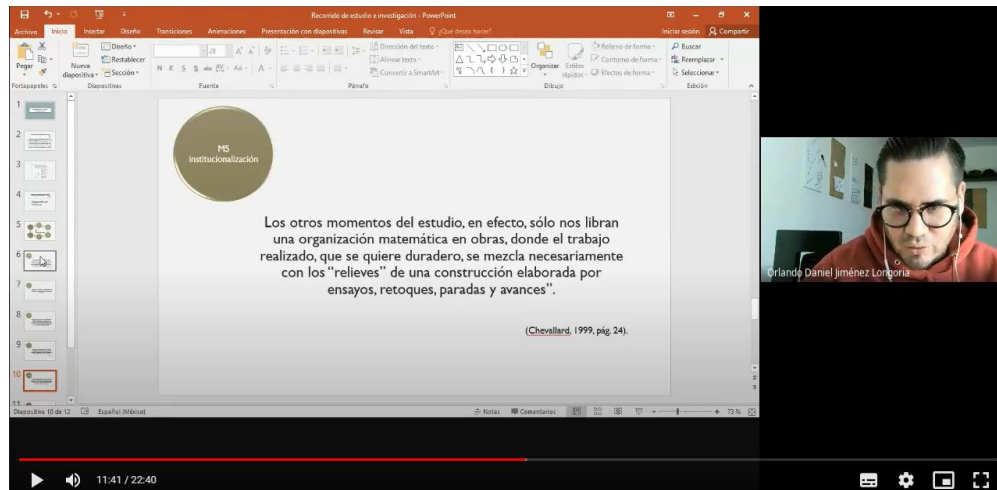
que no quedaron del todo comprendidos y pasar directamente al rol de docentes ingenieros y preparar su sesión de clase.

Para ello se comenzó explicando que van a diseñar un REI con sus alumnos, donde puedan utilizar los momentos de estudio previamente analizados, considerando el REI como el dispositivo didáctico en el marco de la TAD que les permitirá guiar su clase. Se menciona que para el mismo fin deben utilizar una cuestión generatriz, que guíe la sesión, así como un grupo en específico y los docentes, haciendo alusión al sistema didáctico $S(X;Y;Q)$ (Chevallard, 1999).

Para continuar con el análisis del REI se mostró la planeación del taller con el fin de subrayar las cuestiones generatrices en cada apartado del taller y en cada sesión considerando aspectos teóricos y prácticos con base en lo desarrollado en cada intervención. Concluido este aspecto, se estableció la explicación de cada momento de estudio en cada sesión del aprendiz de matemáticas, desde la fracción como fracturador, como comparador y como operador multiplicativo.

Figura 52.

Momentos de estudio en las sesiones.



Fuente: elaboración propia

Se explicó cada aspecto de los momentos para cerrar la sesión y que la estructura de las clases que trabajan en la siguiente sesión sea el esquema que les permita diseñar sus REI para poder trabajar los conceptos matemáticos abordados y analizados por ellas de tal manera que puedan diseñar y en un futuro aplicar con los niños de las primarias donde se desenvuelven. Además, se hace referencia a

la adaptación de las actividades desarrolladas para poder aplicarlas con los alumnos que están realizando sus prácticas, incrementando parte de su inventiva, creatividad y conocimiento, así como los conceptos abordados para el diseño de su clase.

Si bien este proceso donde las alumnas se convertían en docentes en formación estaba considerado para una sesión se expandió debido la solicitud de las alumnas para de profundizar en los conceptos, se pudo observar la clasificación de los momentos en que se desarrollaron las actividades en cada sesión con una mirada teórica desde la TAD, usando de tímidamente algunos de los conceptos como tareas y técnicas, y explicando algunos de los momentos de estudio con ejemplos de las clases vividas como aprendices de matemáticas. Esta parte del recorrido permitió a las alumnas tener otra mirada teórica respecto a cómo enseñar matemáticas, específicamente fracciones en la educación primaria.

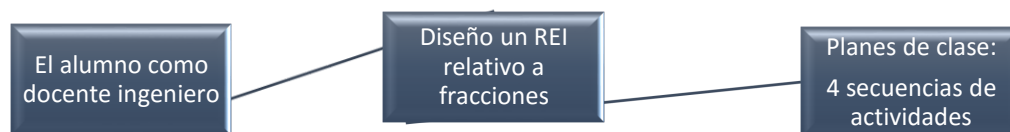
El Docente ingeniero

Para este cuarto momento se pidió a las alumnas que diseñaran una secuencia de actividades relacionadas con cada uno de los significados de la fracción que trabajaron y que dicha secuencia pudiera trabajarse con niños de educación primaria. Este momento se planificó considerando cada uno de los momentos del REI-FP experimentado: vivir un REI y analizar un REI.

En la Figura 53 se esquematiza el proceso donde las alumnas fungieron como docentes diseñadoras y las evidencias que se obtuvieron en este proceso.

Figura 53.

Esquema evidencias del alumno como docente ingeniero.



Fuente: elaboración propia

Una vez analizada la teoría que subyace al trabajo, las alumnas tuvieron una semana de plazo para realizar un bosquejo de su secuencia y proponer actividades que favorecieron el aprendizaje de las fracciones. Todas plantearon tres tareas en las cuales se trabajaría la fracción como fracturador, comparador y operador multiplicativo. Cabe señalar que en general trataron de hacer adaptaciones de las actividades que ellas mismas resolvieron, pero haciendo adaptaciones según el grupo que estaban atendiendo en sus prácticas profesionales.

En el diseño del REI realizado por las estudiantes encontramos puntos coincidentes, el más significativo fue el dominio matemático de los conceptos a desarrollar ya que para la redacción de las sesiones todas enuncian los diferentes usos de las fracciones denotados en el MER.

Si bien dentro de las sesiones reproducen las actividades realizadas al momento de vivir un REI, hacen adaptaciones específicas para el grado en el que trabajan. Por ejemplo, para la fracción como fracturador consideran material como platos desechables para considerar la unidad, tiras de foami, listones para poder fracturar la unidad con actividades similares donde la referencia unitaria deberá fracturarse para poder encontrar el valor de cada una y posteriormente comunicar la información a sus compañeros y maestra.

En lo particular, en las actividades diseñadas para el concepto de fracción como comparador hacen alusión al juego considerando tiros con pelotas, dados, ordenar cantidades de ingredientes, de tal manera que los denominadores de las fracciones construidas sean desiguales y tengan la necesidad de comparar las fracciones dadas a través de diferentes técnicas.

Figura 54.

Borrador de planeación.

Sesión 2: La fracción como comparador.

- Hacer grupos de 3 alumnos.
- Proporcionar un dado a cada trio y una hoja de maquina con la siguiente tabla impresa.

Número de lanzamientos	Nombre del integrante del equipo	Registro del resultado de cada lanzamiento								
8		<table border="1"><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>								
4		<table border="1"><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>								
2		<table border="1"><tr><td></td><td></td></tr></table>								

- Pedir que escriban los nombres de los integrantes de cada equipo en la columna que corresponde.
- Hacer cada integrante del equipo los lanzamientos que se les asignaron en la columna de "Número de lanzamientos"
- Escribir el resultado de cada lanzamiento en columna de "Registro del resultado de cada lanzamiento".
- Dar la consigna de que encierren los números pares que les aparecieron en sus lanzamientos.
- Pedir que en su libreta representen cuantas de sus lanzamientos fueron números pares en relación con el número de lanzamientos (en caso de que no entiendan la consigna nadie, dar un ejemplo).
- Pedir que en equipo ordenen quien tuvo más lanzamientos pares en relación con el número de lanzamientos que hicieron.
- Exponer los resultados y procedimientos de cada equipo y plenaria.
- Dar una explicación tomando ejemplos de los equipos, sobre cómo identificar si una fracción es mayor o menor que otra, encontrando un común denominador y convirtiendo cada fracción a su equivalente, de tal forma que les sea más fácil identificar cual es mayor o menor que la otra.
- Evaluación:
- Pedir a los alumnos que contesten el siguiente problema
- A Manuel le sirven $\frac{5}{8}$ de un pastel y a Eduardo $\frac{2}{4}$, ¿a quién le sirvieron más pastel?

Fuente: elaboración de las alumnas

Para la sesión de la fracción como operador multiplicativo encontramos sesiones que se enfocan al uso de la escala para poder plasmar este significado de la fracción donde tendrán que reproducir al doble, a la mitad y posteriormente a una fracción de la figura original con la intención de que los alumnos puedan identificar la regularidad matemática que les permitirá realizar este proceso.

En las planeaciones realizadas por las alumnas encontramos que le dan un peso significativo a algunos momentos de estudio en específico, la constitución tecnológico teórico y la institucionalización, proceso en los cuales los alumnos denotan qué hicieron y por qué lo hicieron de esa manera en un proceso de validación para posteriormente pasar al proceso de formalización del conocimiento matemático abordado.

Otro de los aspectos coincidentes en el diseño de las sesiones es el uso del material manipulable y recursos visuales para el momento del primer encuentro y posterior desarrollo de las sesiones, a su vez el planteamiento de problemas surge como elemento indispensable en cada una de ellas. También encontramos que las situaciones planteadas a los alumnos no distan del propio contexto y actividades desarrolladas por los alumnos en la escuela, tratando de relacionar la realidad próxima de los estudiantes con el proceso de adquisición de los nuevos saberes matemáticos.

Dentro de este proceso de construcción de sesiones para abordar los conceptos matemáticos relacionados con las fracciones encontramos puntos coincidentes, pero algunas diferencias también en cada una de ellas. Por ejemplo, se puede observar que las alumnas tratan de usar los momentos de estudio como guía para el desarrollo de las mismas, sin embargo, sólo A6 redacta cada uno de éstos en su planeación, pero en el desarrollo de cada momento no corresponde a la ejecución de la clase, hace referencia a ellos, pero de manera errónea.

Figura 55.

Ejemplos de momentos de estudio que no coinciden con la teoría.

Tema: Fracción como factorador.

Nombre de la actividad: Listones de colores.

Objetivo: Que los alumnos identifiquen mediante la gamificación el concepto de fracción y factorador en la relación parte-todo.

Momento 1 (Primer encuentro)

Identificar el concepto de relación parte-todo.

Momento 2 (Momento exploratorio)

La técnica con la que se abordará el trabajo es mediante la gamificación, con un juego tradicional.

Momento 3. (Trabajo de la técnica).

Enseñanza de las fracciones

Liza Fazio, Robert Siegler

UNESCO. Oficina Internacional de Educación, 2011

La comprensión de las fracciones es una de las competencias más importantes que necesitan ser desarrolladas en el currículo de matemáticas. Estas son esenciales para la comprensión del álgebra, la geometría y otros aspectos de las matemáticas. A pesar de esto, se ha demostrado que para la mayoría de los estudiantes alrededor del mundo, resulta difícil entender las fracciones. Esta guía de investigación provee sugerencias para docentes y administradores que buscan mejorar la enseñanza de la fracción en el aula o las escuelas. Las recomendaciones están basadas en una investigación científica y en los conocimientos y experiencias exitosas de maestros de matemáticas. Estas recomendaciones incluyen una variedad de actividades en el aula, así como estrategias de enseñanza enfocadas en mejorar el entendimiento conceptual de las fracciones por parte de los estudiantes

Fuente: elaboración de las alumnas

Mientras que A2 y A4 no escriben los títulos de los momentos, sin embargo, en el desarrollo de la sesión se van observando cada uno de ellos de manera implícita. Por su parte, A1 hace referencia a las praxeologías como elemento para el diseño de la sesión, como si fuesen los momentos de estudio requeridos en su desarrollo.

En esta etapa las alumnas deben de poner en juego los elementos aprendidos durante la ejecución del REI-FP; sin embargo, es evidente que en este momento las alumnas aún carecen de elementos didácticos que les permitan el óptimo diseño de las sesiones, se cuenta con un acercamiento a la estructura propuesta para un REI sin embargo es necesario hacer algunas precisiones para lograr los objetivos planteados. En este momento las alumnas diseñan un borrador para que en un futuro próximo se pueda analizar y modificar con la intención de aplicar en un salón de clases con estudiantes, sin embargo, este elemento no se abordará en esta investigación quedando únicamente en el diseño del borrador del plan de clase.

En las producciones de las alumnas se observa la adaptación de las actividades desarrolladas, aspecto que se considera favorable debido a que pretenden trabajar el concepto matemático como ellas lo aprendieron haciendo algunas modificaciones para su comprensión en el grado donde desarrollan su práctica. Este aspecto denota una intención de dominar el tema que se pretende enseñar además de hacerlo con las nuevas estrategias didácticas aprendidas, tomando como base la propia experiencia con el contenido.

Evaluación

La última sesión del taller se utilizó para valorar los aprendizajes obtenidos, para ello se recurrió a entrevistas individuales para conocer los aspectos importantes del taller. Asimismo, se empleó un formulario de Google con la finalidad de sistematizar las respuestas a cada cuestionamiento para evaluar el taller.

Respecto a la pregunta ¿Qué aspectos les parecieron más relevantes de las sesiones desarrolladas? Se hizo énfasis en los significados de la fracción como fracturador, comparador y operador multiplicativo.

A1: Las tres formas diferentes de trabajar las fracciones: la fracción como fracturador, comparador y como operador multiplicativo.

A2: La concepción de los 3 conceptos en relación a las fracciones, primero desarrollando una actividad para llegar a la construcción de estas actividades y concluir con la intención de cada actividad.

Para la pregunta correspondiente a ¿Qué nuevos aprendizajes matemáticos lograron obtener? Recurrimos nuevamente a los significados de la fracción.

A2: Las fracciones como fracturador sin el uso de conversiones a decimales, las fracciones como operador multiplicativo funcional para escalas.

A5: La utilización diferenciada de las fracciones (como comparador, fracturados y como operador multiplicativo).

Respecto a la pregunta ¿Qué nuevos aprendizajes didácticos lograron obtener? Se centraron a evidenciar las nuevas formas de enseñar, relacionadas directamente con la teoría establecida

A1: Una nueva manera de elaborar o planear una sesión de clases de matemáticas.

A5: Los momentos de estudio para las clases de matemáticas (primer encuentro, momento exploratorio, trabajo de la técnica, constitución tecnológico teórico, institucionalizan, evaluación), además de que se puede iniciar las clases con un juego o una problemática de una situación humana.

Enseguida se cuestionó respecto a ¿Es posible desarrollar estas actividades con los alumnos que atenderán en el presente ciclo escolar? ¿Por qué? Encontrando una respuesta afirmativa únicamente haciendo algunas adecuaciones con respecto al nivel de dificultad de los contenidos.

A3: Sí, con menor grado de dificultad y algunas adecuaciones, pero creo que sí, yo tengo 5to grado y mis niños son muy inteligentes.

A1: Por supuesto, pues únicamente me parecería pertinente modificar el grado de dificultad. Considero que sí porque todas las actividades implican tareas que los niños pueden desarrollar, procedimientos que los niños pueden considerar pertinentes y que pueden explicar.

En las preguntas que se realizaron respecto al uso que se les da a las fracciones, volvemos a encontrar respuestas asociadas a la medida, sin embargo, podemos encontrar los conceptos trabajados en el taller también.

A3: Uso la fracción como fracturador y como comparativo. Al momento de repartir algo, cuando estoy haciendo cualquier actividad y pienso en cuánto me falta para terminarla o cuánto llevo del total. También cuando comparó el tiempo o la comida o la capacidad del tinaco o del garrafón o de cosas así.

Con relación a qué es un número fraccionario, lo relacionan directamente con la división o fracturación de un número.

A1: Un número fraccionario expresa aquella cantidad en la que está o pudiera estar dividido un entero. Es decir, una cantidad dividida entre otra cantidad.

A3: Es cualquier número que está dividido por otro número.

Y para finalizar, encontramos que las alumnas responden a la pregunta ¿Cómo se enseñan las fracciones en educación primaria? haciendo alusión a técnicas tradicionales donde se privilegia el concepto más que su uso y aplicación en las actividades humanas.

A1: Por lo regular se da la clase de explicación donde se enseña el procedimiento convencional y luego los niños hacen ejercicios para reforzar lo que el profesor enseñó y listo. Por lo regular, así es el diseño de la enseñanza, como muy tradicional.

A2: Las fracciones en educación primaria se enseñan desde los ejemplos, y pizarrones. Los alumnos copian los procedimientos que el profesor usa. El material didáctico muchas de las veces se usa como un refuerzo en lugar de un inicio que propicie aprendizaje.

Se puede observar que las percepciones y conocimientos de las alumnas han sido modificadas con base a la primera sesión del taller, pues hacen referencia a los conceptos matemáticos abordados en el taller, así como la manera de desarrollar las sesiones utilizando elementos del propio contexto para el desarrollo de las actividades. También hacen referencia a la estructura didáctica de las sesiones contrastando con los modelos que previamente tenían contruidos, sin embargo, podemos observar que en las preguntas que contestaron al inicio del taller y al final hay poca variación en las respuestas, modificando sutilmente algunas de sus participaciones que no dan cuenta de las respuestas abordadas de manera general con el desarrollo del taller.

Con la implementación del taller, las alumnas generaron el dominio conceptual de la fracción como fracturador, comparador y operador multiplicativo; a su vez, se logró que conocieran otro referente teórico para la enseñanza de las matemáticas. Si bien el proceso del taller llevó consigo un lapso de 5 meses, la

seguridad con la que las alumnas explicaban sus técnicas y las trasladaban a otros contenidos matemáticos en las sesiones posteriores se vio modificada en el mismo proceso de formación de las alumnas.

Por su parte, consideró que el taller brindó herramientas para la enseñanza de las matemáticas específicamente de las fracciones en la educación primaria, así como la ampliación del bagaje de conocimientos en torno al tema; sin embargo, creo que el no diversificar los referentes teóricos para el proceso de enseñanza y aprendizaje en los primeros semestres de la formación inicial de las futuras docentes no permitió que se ahondara en el dominio didáctico que tenía como objetivo el taller, se conocieron conceptos clave pero no se logró la apropiación de la propuesta teórica para el diseño de los planes de clase. Sin embargo, se nota un avance significativo en el proceso de diversificación de formas de enseñar matemáticas.

V. Conclusiones

Atendiendo la pregunta general de investigación que indagaba respecto a ¿Qué resultados se obtienen en la formación de profesores al gestionar un REI-FP relativo a las fracciones?, podemos concluir que se obtienen resultados favorables ya que se va enriqueciendo el proceso de formación de las estudiantes con relación a las teorías que van descubriendo tanto para aprender y enseñar matemáticas.

Esto se ve reflejado en el dominio conceptual de los conceptos de fracción como fracturador, comparador y operador multiplicativo que previamente las alumnas no identificaban y que pudo alcanzarse gracias a las sesiones de aprendizaje de matemáticas, donde se tuvo el contacto directo con el contenido matemático y se pudo profundizar en su análisis y por consiguiente en su apropiación.

Asociando las preguntas de investigación complementarias y las conclusiones a las que llegamos, para identificar cómo construyen el conocimiento matemático de las fracciones las docentes en formación, se puede decir que al momento de estar en el rol de alumnas se enfrentan a las tareas que implica el uso de sus conocimientos previos para poder construir conocimientos nuevos.

Básicamente, en esta investigación, a través de vivir el REI como está establecido en esta metodología es cómo se construye el conocimiento matemático.

En la pregunta complementaria ¿Qué aspectos matemáticos y didácticos consideran importantes los docentes en formación dentro de la construcción del conocimiento matemático de las fracciones? Encontramos que es indispensable utilizar actividades que puedan despertar el interés, pero sobre todo que sean actividades donde el conocimiento matemático sea aplicable, donde la realidad juegue un papel fundamental en la construcción del conocimiento. Teniendo a su vez una guía de los momentos en los cuales se debe plantear la tarea, y cuáles son los posibles mecanismos de solución para guiar el desarrollo de la clase y alcanzar los fines establecidos.

Y para dar continuidad a las preguntas complementarias podemos concluir para ¿Cómo plantean sesiones de clase las docentes en formación con relación al conocimiento matemático de las fracciones? que las alumnas utilizan los momentos de estudio de manera superficial, tratando de reproducir el modelo de las clases seguidas, sin embargo, es un punto de análisis de este REIFP ya que no se consolidó el dominio didáctico necesario para el diseño de las clases. Si bien se hace presente el uso de los conceptos matemáticos como fracción como fracturador, comparador y operador multiplicativo, no se ve una secuencia guiada metodológicamente por los momentos de estudio que puedan utilizar en la implementación del REI como parte del último módulo del REIFP. Aspecto que por el mismo diseño de la investigación no se estudió en este trabajo.

Como parte de los hallazgos de esta investigación hemos encontrado que un punto nodal es la identificación del MER, como está establecido en el momento 0 ¿cómo enseñar un contenido C?, ya que regularmente las investigaciones consideran los significados de las fracciones asociados a la parte todo, operador, cociente y razón. Sin embargo, al proponer únicamente el fracturador, comparador y operador multiplicativo, las alumnas demostraron un dominio matemático de estos conceptos, tanto en el rol de aprendiz de matemáticas como en el de docentes ingenieros, ya que en su discurso aparecen estos conceptos durante el desarrollo del REIFP en cada uno de sus módulos.

El diseño del taller, guiado por los módulos del REIFP, demostró ser un dispositivo didáctico que favorece la adquisición de los saberes disciplinares y didácticos para la enseñanza de las fracciones. Es necesario recalcar que las sesiones destinadas al análisis teórico didáctico dentro del taller se consideró insuficiente, si bien las alumnas identificaron elementos clave del REI y los momentos de estudio, se requiere hacer énfasis para el diseño de las sesiones guiadas completamente por esta teoría. Generalmente, recurren a los conocimientos didácticos adquiridos previamente, aspecto que requiere poner atención en el rediseño del REIFP.

Con base en la propuesta del REIFP en el desarrollo del taller y en el rol de aprendices de matemáticas correspondiente al módulo 1 de vivir un REI, las alumnas pudieron hacer uso de las técnicas que previamente habían interiorizado para dar solución a las tareas planteadas, desde escribir el mensaje que permitiría encontrar la medida de los listones, crear el pódium con base a los tiros y canastas encestadas hasta crear a escala ese rompecabezas. Sin embargo, el culmen de cada sesión fue el momento en que estas técnicas fueron evolucionando, pasando de representaciones gráficas a numéricas e incluso algebraicas, utilizando las fracciones como medio para resolver las tareas planteadas. Compartiendo las técnicas y justificando por qué se usaron se evidenció su evolución. Fue aquí donde se pudo percibir parte de la adquisición del conocimiento matemático necesario para enseñar fracciones.

Para el apartado correspondiente al rol de docente analistas enmarcado dentro del Módulo 2 Analizar un REI, las alumnas fueron identificando la estructura de las clases, ligando cada uno de los momentos de estudio con los referentes teóricos que tenían, apareciendo conceptos como institucionalización, validación y acción provenientes de la TSD, aspecto que denota parte de su formación previa en la escuela normal; sin embargo, también fueron identificando conceptos como tarea, y técnicas utilizadas en el discurso del profesor para referirse a lo acontecido en las diferentes sesiones. En este módulo también se pudo hacer un análisis de las técnicas empleadas en cada situación, así como los constructos matemáticos adquiridos con relación a la fracción como fracturador, comparador y operador

multiplicativo y se fueron identificando los pasos que se siguieron en cada una de las sesiones sin institucionalizarlos ya que eso era parte del siguiente módulo, siendo así tímidamente utilizados estos momentos de estudio en el diseño de los borradores elaborados por las alumnas.

Para el módulo 3 diseñar un REI el taller consideró a las alumnas dentro de dos roles, el primero como docente en formación, donde se tuvo la oportunidad de institucionalizar los conceptos previamente analizados en el módulo anterior, desde las praxeologías, REI y momentos de estudio en el marco de la TAD, previo al diseño de las sesiones que iban a desarrollar las alumnas. Para este módulo se tuvo que recurrir a una nueva sesión ya que con lo analizado y al ser una nueva teoría para las alumnas se requirió de analizar y contrastar con las sesiones desarrolladas en los módulos 1 y 2 donde se tenía que teorizar cada uno de los momentos desarrollados en las sesiones desde la perspectiva de la TAD para la enseñanza de los conceptos matemáticos asociados a las fracciones.

Para el segundo rol correspondiente a este módulo, que era el de docentes ingenieros, las alumnas plasmaron los conocimientos disciplinares y didácticos adquiridos a lo largo del taller en el borrador de un REI relativo a fracciones, encontrando aspectos coincidentes como la adaptación de las actividades al grupo donde las alumnas practicaban. De igual manera, se podía observar claramente el momento del primer encuentro cuando las alumnas presentaban la tarea a desarrollar por los alumnos, también algo recurrente era la construcción tecnológico teórica que guiaba las sesiones solicitando a los alumnos el expresar los procedimientos empleados para la resolución de las tareas y la propia institucionalización de los conceptos abordados.

En este módulo se encontró un área de oportunidad porque si bien encontramos puntos coincidentes asociados con el diseño de las sesiones de clase, no fueron explícitas en la redacción, sino que se fue interpretando con base a las producciones. Es necesario profundizar en el análisis teórico que guía el REI para que puedan asociar cada uno de los momentos de estudio con el desarrollo de las sesiones y se pueda ir construyendo el conocimiento matemático. La adaptación de las sesiones vividas puede fungir como un acierto ya que denotan el dominio

conceptual y procedimental de las tareas planteadas, sin embargo, puede resultar cuestionable su objetivo si por querer hacer más sencillas las actividades se pierda el alcance que se buscaba desde un inicio.

Dentro de esta investigación, como hemos señalado, no se abordó el módulo 4 que se refiere a gestionar y experimentar el REI, la razón es porque consideramos que la información que se desprende de un módulo cuatro, por sí sola es un estudio para una sola tesis.

Dentro de esta investigación se puede concluir, con base en los hallazgos, que enseñar a enseñar fracción a través de un recorrido de estudio e investigación en la formación de profesores se puede lograr con la implementación de un taller que logre guiar a los futuros docentes para la adquisición de los saberes necesarios para desenvolverse en el ámbito educativo.

Como futuras investigaciones que se desprendan de este estudio se sugiere adaptar el REI-FP diseñado para un lapso de tiempo mayor, incluyendo más sesiones, donde se pueda analizar la TAD y los REI de manera más profunda, lo que al parecer tendría mejores resultados en la etapa de docentes ingenieros y ese diseño más detallado, a su vez permitiría llevar a la práctica estos REI para analizar su impacto en las escuelas primarias.

También se sugiere tomar como referencia esta metodología para la enseñanza de diferentes conceptos matemáticos y con ello favorecer la formación inicial de los docentes.

Otro aspecto a considerar sería ampliarlo a diferentes niveles de formación: preescolar, secundaria, bachillerato y nivel superior.

Referencias bibliográficas

- Abero, L., Berardi, L., Capocasale, A., García S., & Rojas, R. (2015). *Investigación educativa. Abriendo puertas al conocimiento*. Uruguay: CLACSO.
- Aguayo, L. (2004). El “saber didáctico” en las escuelas normales. Un análisis de las praxeologías de formación. *Educación matemática*, 16(3), 29-57.
- Aguayo, L. (2005). *La transposición del “saber didáctico”. Un estudio con profesores en formación en el contexto de los números racionales* (Tesis doctoral). Universidad Pedagógica Nacional, México.
- Aguayo, L., Mendoza, J., González, G., & Lechuga, A. (2014). Formación de profesores: cinco malentendidos fundamentales (y una posdata inquisitiva). *Revista Internacional de Ciencia, Matemáticas y Tecnología*, 1(2), 31-43.
- Arias, F. (2012). *El Proyecto de Investigación. Introducción a la metodología científica*. Venezuela: Editorial Episteme.
- Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., & Gómez, P. (Ed) (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Barquero, B., Bosch, M., & Gascón, J. (2011). Los recorridos de estudio e investigación y la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(3), 339-352.
- Barquero, B., Bosch, M., & Gascón, J. (2013). Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática. *Educ. Matem. Pesq.*, 15(1), 1-28.
- Block, D. (2022a). *Más de uno, pero menos de dos. La enseñanza de las fracciones y los decimales en educación básica*. México: Taberna Librería Editores.
- Block, D. (2022b). *Más de uno, pero menos de dos. La enseñanza de las fracciones y los decimales en educación básica. Otra vía en el aprendizaje de las matemáticas*. México: Taberna Librería Editores.
- Bosch, M., & Gascón, J. (2009). Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. En

- M.J. González, M.T. González, & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII*, 89-113.
- Buorn, À., Llinares, S., & Fernández, C. (2018). Características del conocimiento de los estudiantes para maestro españoles en relación con la fracción, razón y proporción. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 23(76), 229-251.
- Castro, E. (2015). *Significados de las fracciones en las matemáticas escolares y formación inicial de maestros*. (Tesis doctoral). Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Granada. España.
- Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.
- Del Valle, M., & Curotto, M. (2008). La resolución de problemas como estrategia de enseñanza y aprendizaje. *REEC: Revista electrónica de enseñanza de las ciencias*, 7(2), 463-479.
- Fandiño, I. (2011). *Las fracciones. Aspectos conceptuales y didácticos*. Colombia: Magisterio.
- Figueroa, B., Aillon, M., & Kloss, S. (2016). The class plan, a professional genre: how beginning teachers narrate and legitimate it from the multimodality paradigm. *Atenea (Concepción)*, (513), 233-250.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Holanda: Kluwer.
- García, F., & Sierra, T. (2015). Modelos epistemológicos de referencia en el análisis de la actividad matemática en libros de texto: El caso del número en la escuela infantil. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX*, 299-307.
- Gómez, A., & Pérez, A. (2016). Tres enfoques para la enseñanza de los números racionales. *Saber. Revista Multidisciplinaria del Consejo de Investigación de la Universidad de Oriente*, 28(4), 819-827.
- Gómez, M. (2005). La transposición didáctica: historia de un concepto. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos*, 1(1), 83-115.

- González, I. (2005). *Los significados de la fracción en el discurso y en la práctica de los estudiantes de 4° grado de normal* (Tesis de maestría). Universidad Pedagógica Nacional, México.
- González, J. (2018). *Conocimiento matemático y didáctico del estudiante para profesor de educación primaria sobre fracciones y decimales*. (Tesis doctoral). Universidad de Aguascalientes. México.
- Hernández, F. J., & Lizarde, E. (2015). El conocimiento especializado del docente de matemáticas. *Revista de Investigación Educativa de la REDIECH*, 11, 36-44.
- Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, M. (2014). *Metodología de la investigación*. México: Mc Graw-Hill / Interamericana Editores.
- Kieren, T. (1980). The rational numbers constructs. Its elements and mechanism. *Recent Research on number Learning*, 125-149. Columbus: ERIC/SMEAC.
- Kieren, T.E. (1980). *Recent research on number learning*. USA: The Ohio State University College of Education.
- Kieren, T.E. (1988). Personal Knowledge of Rational Numbers: Its Intuitive and Formal Development. En J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and Operations on the Middle Grades*. (pp. 162-181). EUA: Lawrence Erlbaum Associates/National Council of Teachers of Mathematics.
- Kothari, C. (2004). *Research Methodology. Methods & Techniques*. Second Revised Edition. New Delhi: New Age International (P) Ltd., Publishers.
- Lizarde, E. (2013). *Transposición y destransposición del saber matemático y didáctico: representaciones y prácticas en la formación inicial de docentes* (Tesis doctoral). Universidad de Huelva. España.
- Llinares, S. (2000). *Fracciones 4*. España: Editorial síntesis, S. A.
- Martínez, J. (2011). Métodos de investigación cualitativa. *Silogismos de investigación*, 8(1).
- Ñaupas, H., Mejía, E., Novoa, E., & Villagómez, A. (2014). *Metodología de la investigación Cuantitativa – Cualitativa y Redacción de la Tesis*. Colombia: Ediciones de la U.

- Parra V., Otero, M., & Fanaro, M. (2013). Los Recorridos de Estudio e Investigación en la Escuela Secundaria: resultados de una implementación. *Bolema*, 27(47), 847-874.
- Pinedo, D. (2020). *El conocimiento matemático sobre los significados de la fracción en docentes en servicio y docentes en formación de la Benemérita Escuela Normal Manuel Ávila Camacho*. (Tesis de maestría). Benemérita Escuela Normal Manuel Ávila Camacho. Zacatecas, México.
- Planas, N. (2006). Modelo de análisis de videos para el estudio de procesos de construcción de conocimiento matemático. *Educación Matemática*, 18(1), 37-72.
- Real, R., Gómez, B., & Figueras, O. (2013). Aspectos de la fracción en los modelos de enseñanza: el caso de un libro de texto. *Épsilon. Revista de educación matemática*, 30(3), núm. 85, 21-36.
- Reyes, A. (2018). *Conocimiento especializado de profesores en formación de primaria. Enseñanza de la noción de razón* (Tesis doctoral). Universidad Pedagógica Nacional. México.
- Ríos, Y. (2011). Concepciones sobre las fracciones en docentes en formación en el área de matemática. *Omnia*, 17(1), 11-33.
- Ruiz-Ollarría, A., Bosch, M., & Gascón, J. (2019). Construcción de una praxeología para la enseñanza en la institución de formación del profesorado. *Educación Matemática*, 31 (2), 132-160.
- SEP (1998). *Matemáticas y su enseñanza II*. México: SEP. Disponible en: http://www.normalexperimental.edu.mx/mapa_primaria/3_semes/mate2.pdf
- SEP (2012). *Aritmética su aprendizaje y su enseñanza*. México: SEP. Disponible en: https://dgesum.sep.gob.mx/public/rc/programas/lepri/aritmetica_su_aprendizaje_y_ensenanza_lepri.pdf
- SEP (2018). *Aritmética. Números decimales y fracciones*. México: SEP. Disponible en: <https://www.dgesum.sep.gob.mx/public/planes2018/LePriIB/LePriIB203.pdf>

- SEP (2022). *Aritmética. Su aprendizaje y su enseñanza*. México: SEP. Disponible en: <https://dgesum.sep.gob.mx/public/planes2022/4425.pdf>
- Sierra, M. (2011). Investigación en Educación Matemática: objetivos, cambios, criterios, método y difusión. *Educación siglo XXI*, 29(2), 173-198.
- Soto, M. (2017). *Un recorrido de estudio e investigación para la formación de profesores (REI-FP). El caso de la proporcionalidad* (Tesis doctoral). Universidad Pedagógica Nacional. México.
- Valenzuela, C., & Figueras, O. (2015). Uso de applets para la enseñanza de las fracciones. *Memorias del III Coloquio de Doctorado del Departamento de Matemática Educativa* (1-12). México: Cinvestav
- Valenzuela, C., Figueras, O., Arnau, D., & Gutiérrez-Soto, J. (2016). Hacia un modelo de enseñanza para las fracciones basado en el uso de applets. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 5(2), 1-20.
- Vázquez, R., Romo, A., Romo-Vázquez, R., Trigueros, M. (2016). La separación ciega de fuentes: un puente entre el álgebra lineal y el análisis de señales. *Educación Matemática*, 28 (2), 31-57.

Anexos

<https://drive.google.com/drive/folders/1wxlITYpupk2U8Ub839ZAMjvaGpS4TzpXN?usp=sharing>